

Posudek na bakalářskou práci “Duality for Weak Lebesgue Spaces” slečny Anny Musilové

Lenka Slavíková (vedoucí práce)

Bakalářská práce slečny Anny Musilové se zabývá dualizací jistých prostorů funkcí, u nichž standardní přístup k dualitě nepřináší dobré výsledky. Základním takovým příkladem jsou prostory L^p pro $p \in (0, 1)$, jejichž duál obsahuje pouze nulovou funkci, a proto není možné z informace o duálu získat informaci o prostoru samotném. Myšlenka dualizovat tyto prostory jiným způsobem je motivována aplikacemi v harmonické analýze, konkrétně v teorii bilineárních singulárních integrálních operátorů. Narozdíl od lineárních singulárních integrálních operátorů, které jsou typicky omezené z L^p do L^p pouze pro $p \in (1, \infty)$, jsou bilineární operátory nezřídka omezené ze součinu prostorů $L^{p_1} \times L^{p_2}$ do prostoru L^p i pro nějaké $p < 1$. Místo odhadů pro operátor samotný je mnohdy jednodušší odhadovat odpovídající trilineární formu, k tomu je ale třeba umět dualizovat prostor L^p pro $p < 1$, nebo alespoň nějakou jeho variantu, kterou je v tomto případě slabý Lebesgueův prostor $L^{p,\infty}$ (díky bilineární verzi Marcinkiewiczovy interpolační věty lze totiž z odhadů slabého typu interpolací získat kýžený odhad silného typu).

Výchozím bodem práce je Lemma 2.6 z knihy [1], které popisuje metodu dualizace prostoru $L^{p,\infty}$ pro $p \in (0, 1]$. Autorka tuto metodu rozšířila na obecnější kvazinormované prostory tvaru

$$\|f\|_\varphi = \sup_{t>0} \varphi(t)f^*(t),$$

kde φ je spojitá rostoucí funkce splňující Δ_2 -podmínku a f^* značí nerostoucí přerovnaní funkce f . Ačkoliv metoda důkazu je analogická té pro prostory $L^{p,\infty}$, autorka se musela vypořádat s jistými obtížemi technického rázu, například v souvislosti s použitím Δ_2 -podmínky. Získaný výsledek je poté aplikován na konkrétní případ $\varphi(t) = t^{1/p}(1 + |\log t|)^\alpha$, kde $p \in (0, \infty)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Takto definovaná funkce φ sice není v obecném případě rostoucí, autorka ovšem elementárními metodami ukázala, že φ je vždy přinejmenším ekvivalentní nějaké rostoucí funkci, pro kterou lze hlavní větu práce použít.

Práce je svým rozsahem spíše kratší, nicméně toto je vyváжено pečlivostí zpracování. Autorka se práci věnovala soustavně v průběhu celého akademického roku, musela se seznámit s poměrně velkým množstvím literatury a vhodným způsobem nabyté znalosti zkombinovat k získání nových výsledků. Práce dle mého názoru splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci, a doporučuji ji tedy jako takovou uznat.

REFERENCES

- [1] C. Muscalu and W. Schlag. *Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Volume 2*, volume 138 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.