

# Oponentský posudek na bakalářskou práci Anna Musilová: „*Duality for Weak Lebesgue Spaces*“

29. srpna 2023

Bakalářská práce Anny Musilové se zabývá dualizací některých kvazi-Banachových prostorů funkcí. Klíčovou vlastností Banachových prostorů funkcí je jistá obdoba reflexivity, tedy že každý Banachův prostor funkcí  $X$  splývá se svým druhým asociovaným prostorem  $X''$ , a tedy normu funkce v prostoru  $X$  lze učit pomocí testování funkcemi z asociovaného prostoru  $X'$ . Tato vlastnost je velmi důležitá v aplikacích, například při studiu omezenosti operátorů, avšak obecně neplatí pro kvazi-Banachovy prostory funkcí, protože normovatelnost prostoru je její nutnou podmínkou. Navíc je dobře známo, že některé kvazi-Banachovy prostory funkcí mají asociovaný prostor (i topologický duál) triviální. Přesto se ukazuje, že alespoň v některých z těchto prostorů lze kvazinormu stále vyjádřit pomocí nějaké formy duality, byť ve slabším smyslu. Tento výsledek byl znám pro slabé Lebesgueovy prostory  $L^{p,\infty}$  kde  $p \in (0, 1]$ , v práci je pak rozšířen pro výrazně větší třídu prostorů.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola obsahuje definice základních pojmů a některé jejich základní vlastnosti; tato kapitola by mohla být obsáhlejší a poskytovat více kontextu, avšak poskytnutý základ postačuje pro pochopení zbytku práce. Kapitola dvě prezentuje výše zmíněný fakt, že některé kvazi-Banachovy prostory funkcí (zde konkrétně  $L^{p,\infty}$  kde  $p \in (0, 1)$ ) mají triviální topologický duál a asociovaný prostor. V prvním případě je výsledek pouze citován z literatury. Druhé tvrzení je dokázáno, včetně potřebného pomocného tvrzení, avšak přínos důkazů je především v jejich pečlivém sepsání; oproti důkazům v citované literatuře neobsahují žádné nové myšlenky. Třetí kapitola je pak jádrem práce, kde je dokázáno, že slabou Marcinkiewiczovu kvazinormu

$$\|f\|_\varphi = \sup \varphi f^*$$

lze dualizovat v jistém slabém smyslu pro každou rostoucí  $\varphi$  splňující  $\Delta_2$ -podmínku. Tato věta je velmi zajímavá především pro svoji obecnost, jelikož uvedené předpoklady splňuje fundamentální funkce libovolného kvazi-Banachova prostoru funkcí a výsledek tedy pokrývá všechny zajímavé prostory tohoto typu. Dále je ukázáno, že obdobná věta platí i pro funkce tvaru

$$\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}(1 + |\log(t)|)^\alpha,$$

kde  $p \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , přestože tyto funkce nejsou vždy rostoucí. Tento výsledek plyne z toho, že zmíněné funkce jsou vždy ekvivalentní rostoucí funkci splňující  $\Delta_2$ -podmínku. Tento výsledek není nový (plyne m.j. z teorie pomalu se měnících funkcí, jde v podstatě o důkaz že  $1 + |\log(t)|$  je pomalu se měnící, což je známý fakt), ale prezentovaný konstruktivní důkaz je původní, elegantní a pečlivě sepsaný (včetně názorných obrázků).

Jak téma tak dosažené výsledky jsou velmi zajímavé. Autorka se musela seznámit s rozsáhlou látkou nad rámec přednášek bakalářského studia, to jest teorií (kvazi-)Banachových prostorů funkcí a souvisejícími pojmy jako nerostoucí přerovnání. Práce je napsána precizně a srozumitelně a obsahuje vhodné množství podrobností. K práci nemám významnějších výhrad a jednoznačně ji doporučuji uznat jako práci bakalářskou.

Dalimil Peša