



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

František Jurák

**Mnohorozměrné modelování volatility**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Finanční matematika

Studijní obor: MFMP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Rád bych poděkoval mé vedoucí RNDr. Jitce Zichové, Dr. za vstřícnost, trpělivost a každou pomoc při psaní mé bakalářské práce. Bylo mi ctí a potěšením s Vámi spolupracovat.

Název práce: Mnohorozměrné modelování volatility

Autor: František Jurák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá formulací a odhadem mnohorozměrného modelu GARCH. Zmiňuje různé parametrizace mnohorozměrného modelu GARCH a pojednává o vztazích mezi nimi. Představeny jsou nutné a postačující podmínky kovarianční stacionarity mnohorozměrného modelu GARCH a odhad parametrů modelu metodou maximální věrohodnosti. Součástí práce je i odhad parametrů dvourozměrného modelu GARCH(1,1) pro reálné časové řady pomocí EViews.

Klíčová slova: ARCH, GARCH, kovarianční stacionarita, vech, BEKK, vec, metoda maximální věrohodnosti

Title: Multivariate Volatility Modeling

Author: František Jurák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with the formulation and estimation of the multivariate GARCH model. It mentions the various parameterizations of the multivariate GARCH model and discusses the relationships between them. The necessary and sufficient conditions for covariance stationarity of the multivariate GARCH model are presented, as is the maximum likelihood estimation of the parameters of the model. The thesis also includes estimation of the parameters of the bivariate GARCH(1,1) model for real time series using EViews.

Keywords: ARCH, GARCH, covariance stationarity, vech, BEKK, vec, maximum likelihood estimation

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Jednorozměrný model GARCH</b>	<b>3</b>
1.1 Definice modelu ARCH . . . . .	3
1.2 Definice modelu GARCH . . . . .	3
1.3 Stacionarita . . . . .	4
<b>2 Mnohorozměrný model GARCH</b>	<b>6</b>
2.1 Reprezentace vech . . . . .	6
2.1.1 Obecný model . . . . .	7
2.1.2 Diagonální model . . . . .	7
2.2 Reprezentace BEKK . . . . .	8
2.2.1 Obecný model . . . . .	8
2.2.2 Diagonální model . . . . .	10
2.3 Reprezentace vec . . . . .	11
2.4 Vztah mezi parametrizací BEKK a vech . . . . .	13
2.5 Kovarianční stacionarita mnohorozměrného modelu GARCH . . .	16
2.5.1 Parametrizace s operátorem zpětného posunutí . . . . .	16
2.5.2 Podmínky stacionarity . . . . .	17
2.6 Odhadování parametrů mnohorozměrného modelu GARCH . . . .	18
<b>3 Aplikace modelu GARCH na reálná data</b>	<b>21</b>
3.1 Softwarové možnosti . . . . .	21
3.2 Reálná data . . . . .	21
3.3 Aplikace modelu GARCH . . . . .	22
3.3.1 Rovnice podmíněné střední hodnoty . . . . .	23
3.3.2 Diagonální BEKK . . . . .	26
3.3.3 Diagonální vech . . . . .	30
3.3.4 Stacionarita . . . . .	30
<b>Závěr</b>	<b>34</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>35</b>

# Úvod

Modelování volatility, jinak také kolísavosti, náhodných procesů s diskrétním časem se používá zejména v ekonometrii. Modely, které je pro tento účel možné využít, jsou autoregresní model s podmíněnou heteroskedasticitou, jinak také model ARCH, a jeho zobecněná varianta, model GARCH. Tyto modely lze aplikovat například při řízení finančních rizik, oceňování aktiv a odhadování výnosů z cenových papírů.

V této práci představujeme modelování volatility použitím mnohorozměrného modelu GARCH. Budeme se zabývat různými způsoby jak vyjádřit podmíněnou varianční matici příslušného náhodného procesu (časové řady), jak přecházet od jednoho vyjádření ke druhému a jaké podmínky pro to musí být splněny. Každé vyjádření této matice obsahuje sadu parametrů. Naším cílem bude porovnat počty parametrů příslušných vyjádření a pojednat o odhadování parametrů. Pro analýzu finančních dat aplikací modelu GARCH použijeme EViews, program pro statistické a ekonometrické analýzy.

V první kapitole uvádíme definice jednorozměrného modelu ARCH a GARCH a některé jejich základní vlastnosti, jako je stacionarita. Ve druhé kapitole rozšíříme definici modelu GARCH na mnohorozměrnou variantu, představujeme parametrizace vech, BEKK a vec a pojednáváme o vztazích mezi těmito parametrizacemi. Dále se věnujeme podmínkám kovarianční stacionarity pro jednotlivé parametrizace a v neposlední řadě také odhadu parametrů mnohorozměrného modelu GARCH metodou maximální věrohodnosti. Ve třetí kapitole se zabýváme aplikací modelu GARCH na reálná data, konkrétně odhadem parametrů dvourozměrného modelu GARCH pro časové řady logaritmických výnosových měř akcie Komerční banky a indexu PX pomocí systému EViews.

Hlavními zdroji pro tuto práci jsou články Engle a Kroner (1995) a Rossi (2004). Většinu značení v této práci přebíráme z článku Rossi (2004).

# 1. Jednorozměrný model GARCH

V této kapitole se budeme zabývat jednorozměrnou verzí modelu GARCH a některými jeho vlastnostmi. Nejprve zavedeme jednorozměrný model ARCH a následně jeho generalizovanou variantu.

## 1.1 Definice modelu ARCH

Autoregresní model s podmíněnou heteroskedasticitou poprvé zmiňuje ve svém článku Engle (1982) a popisuje jej jako model s nulovou střední hodnotou, nekonzantním podmíněným rozptylem, který závisí na předchozích pozorováních, a konstantním nepodmíněným rozptylem. Rossi (2004) definuje model ARCH následujícím způsobem:

Nechť  $y_t$  je náhodný proces s diskrétním celočíselným časem  $t$  takový, že

$$\begin{aligned}y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \\ \mu_t &= \mathbb{E}(y_t | \Phi_{t-1}),\end{aligned}$$

kde  $\Phi_{t-1}$  je informace známá v čase  $t - 1$  ( $\sigma$ -algebra generovaná  $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$ ). Nechť pro náhodné veličiny  $\epsilon_t$  platí

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\epsilon_t | \Phi_{t-1}) &= 0, \\ \text{Var}(\epsilon_t | \Phi_{t-1}) &= \sigma_t^2,\end{aligned}$$

a  $\epsilon_t = \sigma_t z_t$ , kde  $z_t$  je standardizovaný proces k  $\epsilon_t$ . Předpokládejme, že  $z_t \sim \mathcal{N}(0,1)$  nezávislé a  $z_t$  jsou nezávislé na  $\sigma_t^2$ . Pak platí

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z_t | \Phi_{t-1}) &= 0, \\ \text{Var}(z_t | \Phi_{t-1}) &= 1.\end{aligned}$$

Potom autoregresní model s podmíněnou heteroskedasticitou řádu  $q$ , značeno ARCH( $q$ ), má tvar

$$\begin{aligned}\epsilon_t | \Phi_{t-1} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2,\end{aligned}$$

kde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Zjevně tedy platí  $\sigma_t^2 > 0$ . Zřejmě platí

$$\text{Var}(y_t | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2.$$

## 1.2 Definice modelu GARCH

V předchozí sekci jsme uvedli jednorozměrný model ARCH. Nyní představíme zobecněnou verzi tohoto modelu, kterou popisuje ve svém článku Bollerslev

(1986). Tato verze navíc používá zpožděné hodnoty podmíněného rozptylu časové řady. Zobecněný autoregresní model s podmíněnou heteroskedasticitou řádů  $p$  a  $q$ , značeno GARCH( $p,q$ ), je tvaru

$$\epsilon_t | \Phi_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \quad (1.1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (1.2)$$

kde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $\beta_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Pro  $p = 0$  se model zredukuje na ARCH( $q$ ). Dále budeme pro zjednodušení často volit parametry  $p = q = 1$ . Podmíněný rozptyl modelu GARCH(1,1) má potom tvar

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

*Poznámka.* Bollerslev (1986) také uvádí ekvivalentní reprezentaci GARCH( $p,q$ ), kterou můžeme dostat jako

$$\begin{aligned} \epsilon_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \epsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j}^2 + v_t, \\ v_t &= \epsilon_t^2 - \sigma_t^2 = (\eta_t^2 - 1) \sigma_t^2, \end{aligned}$$

kde  $\eta_t \sim \mathcal{N}(0,1)$  nezávislé a náhodné veličiny  $v_t$  jsou nekorelované,  $E(v_t) = 0$ . GARCH( $p,q$ ) tedy může být interpretován jako ARMA model pro  $\epsilon_t^2$  řádů  $m = \max\{p,q\}$  a  $p$ .

Definujme nyní operátor zpětného posunutí  $L$  tak, že platí  $L^k w_t = w_{t-k}$ . Označme  $h_t = \sigma_t^2$ . Pak můžeme rovnost (1.2) přepsat ve tvaru

$$h_t = \omega + A(L) \epsilon_{t-i}^2 + B(L) h_{t-j}. \quad (1.3)$$

Pokud všechny kořeny rovnice  $1 - B(z) = 0$  leží vně jednotkového kruhu, můžeme rovnici (1.3) přepsat jako

$$\begin{aligned} h_t &= \omega(1 - B(1))^{-1} + A(L)(1 - B(L))^{-1} \epsilon_{t-i}^2 = \\ &= \omega(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \epsilon_{t-i}^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

kde  $\delta_i$  pocházejí z rozvoje výrazu  $D(L) = A(L)(1 - B(L))^{-1}$ . Kombinací výrazů (1.1) a (1.4) dostaneme model ARCH( $\infty$ ).

### 1.3 Stacionarita

Jednou z vlastností časových řad je stacionarita. Cipra (2008) definuje stacionaritu časové řady  $y_t$  tak, že chování této řady je v jistém smyslu stochasticky ustálené. Rozlišujeme striktní stacionaritu a slabou stacionaritu. Striktní stacionarita znamená, že pravděpodobnostní chování příslušného stochastického procesu je invariantní vůči posunům v čase. Pro slabou stacionaritu stačí, aby příslušný proces byl invariantní vůči posunům v čase pouze v rámci momentů do druhého řádu, tedy pro každé  $s$  a  $t$  a pro libovolné  $h$  platí



$$E(y_t) = \mu = konst, \quad (1.5)$$

$$\text{Cov}(y_s, y_t) = E(y_s - \mu)(y_t - \mu) = \text{Cov}(y_{s+h}, y_{t+h}), \quad (1.6)$$

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2 = konst. \quad (1.7)$$

Při nulové střední hodnotě se pro slabou stacionaritu používá též název kovarianční stacionarita. Stacionaritě modelu GARCH se ve svém článku věnuje Bollerslev (1986) a jako nutnou a zároveň postačující podmínkou slabé stacionarity modelu GARCH uvádí platnost nerovnosti  $D(1) < 1$ , nebo ekvivalentně  $A(1) + B(1) < 1$ , viz následující věta.

**Věta 1.** (Bollerslev, 1986, Theorem 1.) Model  $GARCH(p, q)$ , definovaný dle (1.1) a (1.3), splňuje podmínky kovarianční stacionarity (1.5) – (1.7) právě tehdy, když  $A(1) + B(1) < 1$ . Pak  $E(\epsilon_t) = 0$ ,  $\text{Var}(\epsilon_t) = \omega(1 - A(1) - B(1))^{-1}$  a  $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ , pro  $t \neq s$ .

*Důkaz.* Dokázáno ve zdrojovém článku (Bollerslev, 1986). □

*Poznámka.* Nutnou a zároveň postačující podmínkou slabé stacionarity modelu ARCH, kterou uvádí Engle (1982), je, že všechny kořeny charakteristické rovnice procesu  $y_t$  leží vně jednotkového kruhu.

## 2. Mnohorozměrný model GARCH

V předchozí kapitole jsme definovali jednorozměrný model GARCH. Tuto definici nyní rozšíříme pro  $N$ -rozměrný model GARCH, jak uvádí Rossi (2004). Nechť  $\mathbf{y}_t$  je náhodný proces s diskrétním celočíselným časem  $t$ , složený z  $N$ -rozměrných náhodných vektorů, takový, že

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \\ \boldsymbol{\mu}_t &= \mathbb{E}(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}),\end{aligned}$$

kde  $\boldsymbol{\Psi}_{t-1}$  je informace známá v čase  $t - 1$  ( $\sigma$ -algebra generovaná  $\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}, \boldsymbol{\epsilon}_{t-2}, \dots$ ). Nechť pro  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  platí

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\boldsymbol{\epsilon}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}) &= \mathbf{0}, \\ \text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}) &= \mathbf{H}_t,\end{aligned}$$

a  $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t$ , kde  $\mathbf{z}_t$  je  $N$ -rozměrný standardizovaný proces k  $\boldsymbol{\epsilon}_t$ .

*Poznámka.* Pozitivně definitní matice  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  se nazývá odmocninová matice a platí  $\mathbf{H}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{H}_t^{1/2}$ . Vyjádření matice  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  dostaneme použitím spektrálního rozkladu. Nechť  $\mathbf{H}_t = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T$  je spektrální rozklad matice  $\mathbf{H}_t$ . Pak matici  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  můžeme vyjádřit jako  $\mathbf{H}_t^{1/2} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T$ .

Předpokládejme, že  $\mathbf{z}_t \sim \mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N)$  nezávislé a  $\mathbf{z}_t$  jsou nezávislé na  $\mathbf{H}_t$ . Pak platí

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{z}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}) &= \mathbf{0}, \\ \text{Var}(\mathbf{z}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}) &= \mathbf{I}_N.\end{aligned}$$

Matice  $\mathbf{H}_t$  je pozitivně definitní řádu  $N$  a

$$\text{Var}(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}) = \mathbf{H}_t.$$

Každý prvek matice  $\mathbf{H}_t$  závisí na prvcích  $q$ -krát zpožděné matice  $\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T$  a na prvcích  $p$ -krát zpožděné matice  $\mathbf{H}_t$ . Různé parametrizace matice  $\mathbf{H}_t$  a jejich vzájemné vztahy jsou předmětem zbytku této kapitoly. Pro zjednodušení budeme dále často uvažovat dvourozměrný model GARCH(1,1), tedy  $N = 2$ .

### 2.1 Reprezentace vech

Jednu z parametrizací matice  $\mathbf{H}_t$  dostaneme použitím operátoru *vech*. Mějme symetrickou matici  $\mathbf{A}$  typu  $N \times N$ . Operátor *vech* seřadí prvky dolního trojúhelníku matice  $\mathbf{A}$  do sloupcového vektoru délky  $N(N + 1)/2$ . Jelikož je matice  $\mathbf{H}_t$  symetrická, tak *vech*( $\mathbf{H}_t$ ) obsahuje všechny prvky  $\mathbf{H}_t$ . Rossi (2004) uvádí dvě varianty této reprezentace.

## 2.1.1 Obecný model

Reprezentace vech modelu GARCH( $p, q$ ) má tvar

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{W} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i^* \text{vech}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-i} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j^* \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}), \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{W}$  je vektor délky  $N(N+1)/2$  a  $\mathbf{A}_i^*$  a  $\mathbf{B}_j^*$  jsou matice typu  $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ .

*Příklad.* Pro dvourozměrný model GARCH(1,1) ( $N=2, p=q=1$ ) dostaneme

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Prvky matice  $\mathbf{H}_t$  můžeme z modelu (2.2) vyjádřit jako

$$h_{11,t} = w_1 + a_{11}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + a_{12}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{13}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{11}^* h_{11,t-1} + b_{12}^* h_{21,t-1} + b_{13}^* h_{22,t-1}, \quad (2.3)$$

$$h_{21,t} = w_2 + a_{21}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + a_{22}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{23}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{21}^* h_{11,t-1} + b_{22}^* h_{21,t-1} + b_{23}^* h_{22,t-1}, \quad (2.4)$$

$$h_{22,t} = w_3 + a_{31}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + a_{32}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{33}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{31}^* h_{11,t-1} + b_{32}^* h_{21,t-1} + b_{33}^* h_{22,t-1}. \quad (2.5)$$

Počet parametrů reprezentace vech je roven  $N(N+1)/2 + (p+q)(N(N+1)/2)^2$ . I pro nízké hodnoty  $N$  a  $p=q=1$  dostaneme velmi vysoký počet parametrů.

N	Počet parametrů
2	21
3	78
4	210
5	465

Tabulka 2.1: Počet parametrů reprezentace vech,  $p=q=1$

## 2.1.2 Diagonální model

Problém vysokého počtu parametrů je možné vyřešit použitím diagonální reprezentace. V tomto modelu jsou  $\mathbf{A}_i^*$  a  $\mathbf{B}_j^*$  diagonální matice.

Diagonální reprezentace vech dvourozměrného modelu GARCH(1,1) je tvaru

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$(i,j)$ -tý prvek matice  $\mathbf{H}_t$  tedy závisí pouze na  $(i,j)$ -tých prvcích  $\epsilon_{t-1} \epsilon_{t-1}^T$  a  $\mathbf{H}_{t-1}$ . Prvky matice  $\mathbf{H}_t$  můžeme opět vyjádřit jako

$$h_{11,t} = w_1 + a_{11}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + b_{11}^* h_{11,t-1},$$

$$h_{21,t} = w_2 + a_{22}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + b_{22}^* h_{21,t-1},$$

$$h_{22,t} = w_3 + a_{33}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{33}^* h_{22,t-1}.$$

Počet parametrů diagonální reprezentace vech je  $(N(N + 1)/2)(1 + p + q)$ . Oproti obecnému modelu má diagonální model mnohem menší počet odhadovaných parametrů.

N	Počet parametrů
2	9
3	18
4	30
5	45

Tabulka 2.2: Počet parametrů diagonální reprezentace vech,  $p = q = 1$

## 2.2 Reprezentace BEKK

Hlavními nevýhodami reprezentace vech je vysoký počet parametrů a náročnost ověření pozitivní definitnosti matice  $\mathbf{H}_t$ , a to jak v obecném, tak v diagonálním modelu. Následující parametrizace, kterou představují Engle a Kroner (1995), se snaží tyto problémy řešit tak, aby zároveň příliš neztratila na obecnosti. Tuto parametrizaci matice  $\mathbf{H}_t$  nazýváme reprezentace BEKK a je pojmenovaná podle svých autorů: Baba, Engle, Kraft, Kroner.

### 2.2.1 Obecný model

Rossi (2004) uvádí reprezentaci BEKK modelu GARCH( $p, q$ ) ve tvaru

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^T + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{ik} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i}^T \mathbf{A}_{ik}^T + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_{jk} \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{B}_{jk}^T, \quad (2.7)$$

kde  $\mathbf{C}$  je dolní trojúhelníková matice typu  $N \times N$  a  $\mathbf{A}_{ik}$  a  $\mathbf{B}_{jk}$  jsou matice typu  $N \times N$ . Často se klade  $K = 1$ . Model GARCH( $p, q$ ) má pak tvar

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}^T + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_{i1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i}^T \mathbf{A}_{i1}^T + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_{j1} \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{B}_{j1}^T. \quad (2.8)$$

*Příklad.* Pro dvourozměrný model GARCH(1,1) ( $N = 2, p = q = 1$ ) dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{21} \\ c_{11}c_{21} & c_{21}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 & \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} & \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Prvky matice  $\mathbf{H}_t$  můžeme z modelu (2.9) vyjádřit jako

$$h_{11,t} = c_{11}^2 + a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11}a_{12}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{11}^2 h_{11,t-1} + 2b_{11}b_{12}h_{21,t-1} + b_{12}^2 h_{22,t-1}, \quad (2.10)$$

$$h_{12,t} = c_{11}c_{21} + a_{11}a_{21}\epsilon_{1,t-1}^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}a_{22}\epsilon_{2,t-1}^2 + b_{11}b_{21}h_{11,t-1} + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})h_{21,t-1} + b_{12}b_{22}h_{22,t-1},$$

$$h_{21,t} = c_{11}c_{21} + a_{11}a_{21}\epsilon_{1,t-1}^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}a_{22}\epsilon_{2,t-1}^2 + b_{11}b_{21}h_{11,t-1} + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})h_{21,t-1} + b_{12}b_{22}h_{22,t-1}, \quad (2.11)$$

$$h_{22,t} = c_{21}^2 + c_{22}^2 + a_{21}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{21}a_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{21}^2 h_{11,t-1} + 2b_{21}b_{22}h_{21,t-1} + b_{22}^2 h_{22,t-1}. \quad (2.12)$$

Zřejmě  $h_{12,t} = h_{21,t}$ .

Počet parametrů reprezentace BEKK je roven  $N(N+1)/2 + (p+q)KN^2$ . V porovnání s obecným modelem vech používá model BEKK mnohem méně parametrů.

N	Počet parametrů vech	Počet parametrů BEKK
2	21	11
3	78	24
4	210	42
5	465	65

Tabulka 2.3: Porovnání počtu parametrů vech a BEKK,  $p = q = 1$

Parametr  $K$  určuje obecnost procesu. Reprezentace BEKK je dostatečně obecná, aby zahrnovala všechny pozitivně definitní diagonální reprezentace a skoro všechny pozitivně definitní vech reprezentace (Rossi, 2004).

**Věta 2.** (Engle a Kroner, 1995, Proposition 2.1) *Mějme reprezentaci BEKK  $N$ -rozměrného modelu GARCH( $p, q$ ) (2.8), kde  $p = q = 1$ . Předpokládejme, že prvky na diagonále matice  $\mathbf{C}$  jsou kladné a prvky  $a_{11}$  a  $b_{11}$  jsou také kladné. Pak jsou matice  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_{11}$  a  $\mathbf{B}_{11}$  touto reprezentací určeny jednoznačně.*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme jednoznačnost matice  $\mathbf{C}$ . Jestliže jsou prvky na diagonále matice  $\mathbf{C}$  kladné, pak je matice  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$  pozitivně definitní. Označme  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ . Potom je  $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$  Choleského rozklad matice  $\mathbf{C}_0$  a z jednoznačnosti Choleského rozkladu dostaneme jednoznačnost matice  $\mathbf{C}$ .

Následně dokážeme jednoznačnost matice  $\mathbf{A}_{11}$ . Z (2.8) vyjádříme prvek na pozici  $(l, m)$  matice  $\mathbf{H}_t$  následujícím způsobem:

$$h_{lm,t} = c_{lm} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{li}a_{mj}\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{li}b_{mj}h_{ij,t-1}.$$

Položme konstantu  $c_{lm}$  a všechny  $b_{li}b_{mj}$  rovny nule. Pak prvek na pozici (1,1) matice  $\mathbf{H}_t$  je

$$h_{11,t} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{1i}a_{1j}\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1}.$$

Koeficient u  $\epsilon_{1,t-1}^2$  je  $a_{11}^2$ , prvek  $a_{11}$  je tedy určen jednoznačně až na znaménko. Předpokládejme, že prvek  $a_{11}$  je kladný. Pak koeficient u  $\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{j,t-1}$  je  $(a_{11}a_{1j} + a_{1j}a_{11}) = 2a_{11}a_{1j}$ . Jelikož je prvek  $a_{11}$  určen jednoznačně, tak jsou i všechny prvky  $a_{1j}, j = 2, \dots, N$  určeny jednoznačně. První řádek matice  $\mathbf{A}_{11}$  je tedy určen jednoznačně. Tento postup můžeme rozšířit na další řádky matice  $\mathbf{A}_{11}$  studiem prvků  $h_{12,t}, \dots, h_{1N,t}$ . Všechny řádky matice  $\mathbf{A}_{11}$  jsou určeny jednoznačně, matice  $\mathbf{A}_{11}$  je tedy určena jednoznačně.

Jednoznačnost matice  $\mathbf{B}_{11}$  dokážeme analogicky volbou konstanty  $c_{lm}$  a všech  $a_{li}a_{mj}$  rovných nule. □

Jedním z důvodů zavedení reprezentace BEKK bylo zjednodušení ověření pozitivní definitnosti matice  $\mathbf{H}_t$ . Následující věta stanoví postačující podmínku pozitivní definitnosti  $\mathbf{H}_t$  pro  $K = 1$ .

**Věta 3.** (Rossi, 2004, Proposition 11) *Mějme reprezentaci BEKK  $N$ -rozměrného modelu GARCH( $p, q$ ) (2.8). Jestliže  $\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_{-1}, \dots, \mathbf{H}_{-p+1}$  jsou pozitivně definitní matice, pak je pro všechny možné hodnoty  $\epsilon_t$  matice  $\mathbf{H}_t$  pozitivně definitní, pokud má matice  $\mathbf{C}$  nebo některá z matic  $\mathbf{B}_{i1}, i = 1, \dots, p$  hodnot  $N$ .*

*Důkaz.* Dokázáno ve zdrojovém článku (Rossi, 2004). □

*Poznámka.* Engle a Kroner (1995) uvádí i verzi pro model (2.7).

## 2.2.2 Diagonální model

Erten a kol. (2012) popisují diagonální reprezentaci parametrizace BEKK. V tomto modelu jsou matice  $\mathbf{A}_{ik}$  a  $\mathbf{B}_{jk}$  diagonální.

Diagonální reprezentace BEKK dvourozměrného modelu GARCH(1,1),  $K = 1$ , je tvaru

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{21} \\ c_{11}c_{21} & c_{21}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 & \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} \\ \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} & \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Prvky matice  $\mathbf{H}_t$  můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= c_{11}^2 + a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + b_{11}^2 h_{11,t-1}, \\ h_{12,t} &= c_{11}c_{21} + a_{11}a_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + b_{11}b_{22}h_{21,t-1}, \\ h_{21,t} &= c_{11}c_{21} + a_{11}a_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + b_{11}b_{22}h_{21,t-1}, \\ h_{22,t} &= c_{21}^2 + c_{22}^2 + a_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{22}^2 h_{22,t-1}. \end{aligned}$$

Opět zřejmě  $h_{12,t} = h_{21,t}$ .

Počet parametrů diagonální reprezentace BEKK je  $N(N+1)/2 + (p+q)KN$ . Oproti obecnému modelu i diagonálnímu vech modelu je tedy počet odhadovaných parametrů diagonálního modelu opět menší.

N	Počet parametrů diag. vech	Počet parametrů diag. BEKK
2	9	7
3	18	12
4	30	18
5	45	25

Tabulka 2.4: Porovnání počtu parametrů diag. vech a diag. BEKK,  $p = q = 1$

## 2.3 Reprezentace vec

Následující parametrizace, kterou definují Engle a Kroner (1995), využívá operátor vektorizace *vec*. Mějme matici  $\mathbf{A}$  typu  $N \times N$ . Operátor *vec* seřadí sloupce matice  $\mathbf{A}$  do sloupcového vektoru délky  $N^2$ .

Dále potřebujeme zavést Kroneckerův součin matic. Mějme matici  $\mathbf{A}$  typu  $m \times n$  a matici  $\mathbf{B}$  typu  $p \times q$ . Pak Kroneckerův součin matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  je

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

kde výsledná matice  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  je typu  $mp \times nq$  (Rao, 1978).

*Poznámka.* Rao (1978) uvádí, že Kroneckerův součin má následující vlastnosti:

- $\mathbf{0} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ,
- $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}$ ,
- $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_2$ ,
- $a\mathbf{A} \otimes b\mathbf{B} = ab\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ,
- $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2)$ ,
- pro  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  regulární:  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$ ,
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^- = \mathbf{A}^- \otimes \mathbf{B}^-$  při jakékoli volbě pseudoinverze,
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$ ,
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{I}_{mp \times nq}$ .

Rovněž dokážeme následující pomocné tvrzení:

**Tvrzení 1.** *Mějme matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  typu  $2 \times 2$ . Pak platí*

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}).$$

*Důkaz.* Roznásobením obou stran rovnice ukážeme, že oba vektory jsou shodné.

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{12}b_{22}c_{21} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{22}b_{22}c_{21} \\ a_{11}b_{11}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B}) &= \begin{pmatrix} c_{11}\mathbf{A} & c_{21}\mathbf{A} \\ c_{12}\mathbf{A} & c_{22}\mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} & a_{12}c_{11} & a_{11}c_{21} & a_{12}c_{21} \\ a_{21}c_{11} & a_{22}c_{11} & a_{21}c_{21} & a_{22}c_{21} \\ a_{11}c_{12} & a_{12}c_{12} & a_{11}c_{22} & a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{12} & a_{22}c_{12} & a_{21}c_{22} & a_{22}c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11} + a_{12}b_{21}c_{11} + a_{11}b_{12}c_{21} + a_{12}b_{22}c_{21} \\ a_{21}b_{11}c_{11} + a_{22}b_{21}c_{11} + a_{21}b_{12}c_{21} + a_{22}b_{22}c_{21} \\ a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{11}b_{12}c_{22} + a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{12} + a_{22}b_{21}c_{12} + a_{21}b_{12}c_{22} + a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

platí tedy  $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$ . □

*Poznámka.* Tvrzení 1 platí i pro čtvercové matice rozměru většího než 2.

Reprezentace vec modelu GARCH( $p, q$ ) má tvar

$$\text{vec}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \text{vec}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-i} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vec}(\mathbf{H}_{t-j}), \quad (2.14)$$

kde  $\mathbf{C}_0$  je vektor délky  $N^2$  a  $\mathbf{A}_i$  a  $\mathbf{B}_j$  jsou matice typu  $N^2 \times N^2$ . Mezi parametrizacemi BEKK a vec existuje vztah, který je popsán následující větou.

**Věta 4.** (Engle a Kroner, 1995, Proposition 2.4) Reprezentace BEKK (2.7) a reprezentace vec (2.14) jsou ekvivalentní právě tehdy, když

$$\mathbf{C}_0 = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})\text{vec}(\mathbf{I}_N), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{A}_i = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{ik} \otimes \mathbf{A}_{ik}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{B}_j = \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_{jk} \otimes \mathbf{B}_{jk}. \quad (2.17)$$

*Důkaz.* Pro jednoduchost necht'  $p = q = 1$ .

Když reprezentaci BEKK (2.7) vyjádříme ve tvaru vec, dostaneme

$$\text{vec}(\mathbf{H}_t) = \text{vec}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) + \sum_{k=1}^K \text{vec}(\mathbf{A}_{1k} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^T \mathbf{A}_{1k}^T) + \sum_{k=1}^K \text{vec}(\mathbf{B}_{1k} \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{B}_{1k}^T).$$

To dle tvrzení 1 můžeme upravit na

$$\text{vec}(\mathbf{H}_t) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{C})\text{vec}(\mathbf{I}_N) + \sum_{k=1}^K (\mathbf{A}_{1k} \otimes \mathbf{A}_{1k})\text{vec}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^T) + \sum_{k=1}^K (\mathbf{B}_{1k} \otimes \mathbf{B}_{1k})\text{vec}(\mathbf{H}_{t-1}).$$

Odtud dostaneme všechny tři požadované rovnosti.

Analogicky lze postupovat pro  $p > 1$  nebo  $q > 1$ . □



Zároveň lze ukázat, že všechny pozitivně definitní diagonální reprezentace  $vec$  je možné přepsat ve tvaru BEKK. V takovém případě je parametrizace BEKK stejně obecná jako parametrizace  $vec$ .

**Věta 5.** (Engle a Kroner, 1995, Proposition 2.6) Mějme reprezentaci  $vec$   $N$ -rozměrného modelu GARCH( $p, q$ ). Předpokládejme, že konstantní část matice  $\mathbf{H}_t$  je pozitivně definitní, tedy  $\mathbf{C}_0 = vec(\mathbf{\Omega})$ , kde  $\mathbf{\Omega}$  je pozitivně definitní. Dále předpokládejme, že  $\mathbf{A}_i$  a  $\mathbf{B}_j$  jsou diagonální pro všechna  $i = 1, \dots, q$  a  $j = 1, \dots, p$ . Pak jestliže  $\mathbf{H}_t$  je pozitivně definitní pro všechny možné hodnoty  $\epsilon_t$ , tak existuje dolní trojúhelníková matice  $\mathbf{C}$  a diagonální matice  $\mathbf{A}_{ik}$  a  $\mathbf{B}_{jk}$ ,  $k = 1, \dots, K$  takové, že platí (2.15) – (2.17).

*Důkaz.* Dokázáno ve zdrojovém článku (Engle a Kroner, 1995). □

## 2.4 Vztah mezi parametrizací BEKK a vech

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi reprezentacemi BEKK a vech. K tomu použijeme reprezentaci  $vec$  jako prostředníka. Rossi (2004) uvádí, že mezi operátory  $vec$  a  $vech$  existuje následující vztah. Mějme symetrickou matici  $\mathbf{A}$  typu  $N \times N$ . Pak

$$vec(\mathbf{A}) = \mathbf{D}_N vech(\mathbf{A}), \quad (2.18)$$

kde  $\mathbf{D}_N$  je tzv. duplikační matice typu  $N^2 \times N(N+1)/2$ . Pro symetrickou matici  $\mathbf{H}$  rozměru  $2 \times 2$  dostaneme

$$\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_2 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix}.$$

Pro znázornění vztahu mezi parametrizacemi využijeme postup, který popisuje Rossi (2004). Vezmeme reprezentaci BEKK  $N$ -rozměrného modelu GARCH( $p, q$ ) (2.8) a vyjádříme ji ve tvaru  $vec$ :

$$vec(\mathbf{H}_t) = vec(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) + \sum_{i=1}^q vec(\mathbf{A}_{i1}\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}^T\mathbf{A}_{i1}^T) + \sum_{j=1}^p vec(\mathbf{B}_{j1}\mathbf{H}_{t-j}\mathbf{B}_{j1}^T). \quad (2.19)$$

Podle tvrzení 1 můžeme tento vzorec přepsat ve tvaru

$$vec(\mathbf{H}_t) = vec(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) + \sum_{i=1}^q (\mathbf{A}_{i1} \otimes \mathbf{A}_{i1}) vec(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p (\mathbf{B}_{j1} \otimes \mathbf{B}_{j1}) vec(\mathbf{H}_{t-j}), \quad (2.20)$$

a ze vztahu (2.18) dostaneme

$$\begin{aligned} vec(\mathbf{H}_t) &= \mathbf{D}_N vech(\mathbf{H}_t) = \mathbf{D}_N vech(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) + \\ &+ \sum_{i=1}^q (\mathbf{A}_{i1} \otimes \mathbf{A}_{i1}) \mathbf{D}_N vech(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^p (\mathbf{B}_{j1} \otimes \mathbf{B}_{j1}) \mathbf{D}_N vech(\mathbf{H}_{t-j}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Má-li  $\mathbf{D}_N$  plnou sloupcovou hodnotu, označme

$$\mathbf{D}_N^+ = (\mathbf{D}_N^T \mathbf{D}_N)^{-1} \mathbf{D}_N^T.$$

Zřejmě  $\mathbf{D}_N^+ \mathbf{D}_N = \mathbf{I}_{N^2 \times N(N+1)/2}$ . Vynásobíme-li výraz (2.21) maticí  $\mathbf{D}_N^+$  zprava, dostaneme

$$\begin{aligned} \text{vech}(\mathbf{H}_t) &= \text{vech}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) + \mathbf{D}_N^+ \left( \sum_{i=1}^q (\mathbf{A}_{i1} \otimes \mathbf{A}_{i1}) \right) \mathbf{D}_N \text{vech}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-i} \boldsymbol{\epsilon}_{t-i}^T) + \\ &+ \mathbf{D}_N^+ \left( \sum_{j=1}^p (\mathbf{B}_{j1} \otimes \mathbf{B}_{j1}) \right) \mathbf{D}_N \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dále se zaměříme na dvourozměrný model.

*Příklad.* Pro dvourozměrný model GARCH(1,1) ( $N = 2, p = q = 1$ ) máme po roznásobení (2.22)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{11}^2 \\ c_{11}c_{21} \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11}a_{12}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 \\ a_{11}a_{21}\epsilon_{1,t-1}^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}a_{22}\epsilon_{2,t-1}^2 \\ a_{21}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{21}a_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11}^2 h_{11,t-1} + 2b_{11}b_{12}h_{21,t-1} + b_{12}^2 h_{22,t-1} \\ b_{11}b_{21}h_{11,t-1} + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})h_{21,t-1} + b_{12}b_{22}h_{22,t-1} \\ b_{21}^2 h_{11,t-1} + 2b_{21}b_{22}h_{21,t-1} + b_{22}^2 h_{22,t-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde prvky matice  $\mathbf{H}_t$  můžeme vyjádřit jako (2.10) – (2.12).

Při porovnání prvků  $\mathbf{H}_t$  v parametrizaci vech (2.3) – (2.5) a v parametrizaci BEKK (2.10) – (2.12) dostaneme

$$\begin{aligned} h_{11,t} : & w_1 + a_{11}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + a_{12}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{13}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{11}^* h_{11,t-1} + b_{12}^* h_{21,t-1} + b_{13}^* h_{22,t-1} = \\ & = c_{11}^2 + a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{11}a_{12}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{11}^2 h_{11,t-1} + 2b_{11}b_{12}h_{21,t-1} + b_{12}^2 h_{22,t-1}, \\ h_{21,t} : & w_2 + a_{21}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + a_{22}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{23}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{21}^* h_{11,t-1} + b_{22}^* h_{21,t-1} + b_{23}^* h_{22,t-1} = \\ & = c_{11}c_{21} + a_{11}a_{21}\epsilon_{1,t-1}^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{12}a_{22}\epsilon_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{11}b_{21}h_{11,t-1} + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})h_{21,t-1} + b_{12}b_{22}h_{22,t-1}, \\ h_{22,t} : & w_3 + a_{31}^* \epsilon_{1,t-1}^2 + a_{32}^* \epsilon_{1,t-1} \epsilon_{2,t-1} + a_{33}^* \epsilon_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{31}^* h_{11,t-1} + b_{32}^* h_{21,t-1} + b_{33}^* h_{22,t-1} = \\ & = c_{21}^2 + c_{22}^2 + a_{21}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{21}a_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + a_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + \\ & + b_{21}^2 h_{11,t-1} + 2b_{21}b_{22}h_{21,t-1} + b_{22}^2 h_{22,t-1}. \end{aligned}$$

Parametry reprezentace vech (prvky vektoru  $\mathbf{W}$  a matic  $\mathbf{A}_1^*$  a  $\mathbf{B}_1^*$  z (2.1) pro  $p = q = 1$ ) tedy můžeme pomocí parametrů reprezentace BEKK (prvků matic  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_{11}$  a  $\mathbf{B}_{11}$  z (2.8) pro  $p = q = 1$ ) vyjádřit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^2 \\ c_{11}c_{21} \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_1^* &= \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 2a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & 2a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_1^* &= \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & 2b_{11}b_{12} & b_{12}^2 \\ b_{11}b_{21} & (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}) & b_{12}b_{22} \\ b_{21}^2 & 2b_{21}b_{22} & b_{22}^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

*Poznámka.* Reprezentace vech (2.22), kterou dostaneme vyjádřením z reprezentace BEKK (2.19), je určena jednoznačně. Obrácená implikace obecně neplatí, neboť např.  $\mathbf{A}_{i1} \otimes \mathbf{A}_{i1} = (-\mathbf{A}_{i1}) \otimes (-\mathbf{A}_{i1})$  odtud nelze jednoznačně určit  $\mathbf{A}_{i1}$  (Rossi, 2004).

K tomu se váže následující tvrzení:

**Tvrzení 2.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je diagonální matice typu  $2 \times 2$  a  $\mathbf{D}_2$  je duplikační matice taková, že platí (2.18). Pak pro  $\mathbf{D}_2^+ = (\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_2^T$  je matice  $\mathbf{D}_2^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_2$  také diagonální s prvky  $a_{ii}a_{jj}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 2$  na diagonále.*

*Důkaz.* Máme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matici  $\mathbf{D}_2^+$  dostaneme výpočtem

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_2^+ &= (\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_2^T = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_2^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Matice  $\mathbf{D}_2^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_2$  je tedy diagonální s prvky  $a_{ii}a_{jj}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 2$  na diagonále. □

*Poznámka.* Tvzení 2 platí i pro čtvercové matice rozměru většího než 2.

*Důsledek.* Každou pozitivně definitní diagonální reprezentaci vech lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru BEKK.

## 2.5 Kovarianční stacionarita mnohorozměrného modelu GARCH

Tuto kapitolu zakončíme pojednáním o nutných a postačujících podmínkách kovarianční stacionarity mnohorozměrného modelu GARCH. Budeme se věnovat stacionaritě všech tří výše zmíněných parametrizací, tedy vech, BEKK a vec.

### 2.5.1 Parametrizace s operátorem zpětného posunutí

Engle a Kroner (1995) uvádí další způsob parametrizace matice  $\mathbf{H}_t$ . Využívají při něm operátor zpětného posunutí  $L$ , který jsme definovali v první kapitole. Mějme posloupnost  $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$  a označme  $\boldsymbol{\eta}_t = \text{vec}(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T)$  a  $\mathbf{h}_t = \text{vec}(\mathbf{H}_t)$ . Pak můžeme mnohorozměrný model GARCH zapsat ve tvaru

$$\mathbf{h}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}(L)^{i-1} (\mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(L)\boldsymbol{\eta}_t). \quad (2.23)$$

Tato parametrizace zahrnuje modely ve tvaru BEKK i modely ve tvaru vec. Tento fakt ukážeme tak, že (2.23) upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_t &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(L)\boldsymbol{\eta}_t + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{B}(L)^{i-1} (\mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(L)\boldsymbol{\eta}_t) = \\ &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(L)\boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{B}(L) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}(L)^{i-1} (\mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(L)\boldsymbol{\eta}_t) = \\ &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{A}(L)\boldsymbol{\eta}_t + \mathbf{B}(L)\mathbf{h}_t. \end{aligned}$$

Když položíme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(L) &= \mathbf{A}_1 L + \mathbf{A}_2 L^2 + \cdots + \mathbf{A}_q L^q, \\ \mathbf{B}(L) &= \mathbf{B}_1 L + \mathbf{B}_2 L^2 + \cdots + \mathbf{B}_p L^p, \end{aligned}$$

dostaneme model ve tvaru vec (2.14). Když položíme  $\mathbf{C}_0 = \text{vec}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)$  a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(L) &= \sum_{k=1}^K (\mathbf{A}_{1k} \otimes \mathbf{A}_{1k})L + \cdots + \sum_{k=1}^K (\mathbf{A}_{qk} \otimes \mathbf{A}_{qk})L^q, \\ \mathbf{B}(L) &= \sum_{k=1}^K (\mathbf{B}_{1k} \otimes \mathbf{B}_{1k})L + \cdots + \sum_{k=1}^K (\mathbf{B}_{pk} \otimes \mathbf{B}_{pk})L^p, \end{aligned}$$

dostaneme model BEKK, zapsaný ve tvaru vec (2.19) pro  $k = 1, \dots, K$ .

## 2.5.2 Podmínky stacionarity

Pro určení podmínek kovarianční stacionarity mnohorozměrného modelu GARCH využijeme parametrizaci s operátorem zpětného posunutí. Nejprve zformulujeme následující větu.

**Věta 6.** (Engle a Kroner, 1995, Proposition 2.7) Mějme  $\{\boldsymbol{\epsilon}_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$  a mnohorozměrný model GARCH( $p, q$ ) s parametrizací (2.23). Pak je proces  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  kovariančně stacionární právě tehdy, když pro každé vlastní číslo  $\lambda$  matice  $\mathbf{A}(1) + \mathbf{B}(1)$  platí  $|\lambda| < 1$ .

*Důkaz.* Dokázáno ve zdrojovém článku (Engle a Kroner, 1995). □

Odtud dostaneme podmínky kovarianční stacionarity pro parametrizace vec a BEKK. Z věty 6 vyplývá, že proces  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  s parametrizací vec je kovariančně stacionární právě tehdy, když jsou absolutní hodnoty vlastních čísel matice  $\sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j$  menší než jedna. Dále z ní vyplývá, že proces  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  s parametrizací BEKK je kovariančně stacionární právě tehdy, když jsou absolutní hodnoty vlastních čísel matice  $\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q (\mathbf{A}_{ik} \otimes \mathbf{A}_{ik}) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p (\mathbf{B}_{jk} \otimes \mathbf{B}_{jk})$  menší než jedna (Engle a Kroner, 1995). Nepodmíněná kovarianční matice, pokud existuje, je určena výrazem

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}(1) - \mathbf{B}(1))^{-1} \mathbf{C}_0.$$

Uvažujme nyní model GARCH(1,1). Pak nepodmíněná kovarianční matice pro parametrizaci vec je

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{C}_0.$$

Položme navíc  $K = 1$ . Pak nepodmíněná kovarianční matice pro parametrizaci BEKK je

$$E(\boldsymbol{\eta}_t) = (\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{11} \otimes \mathbf{A}_{11}) - (\mathbf{B}_{11} \otimes \mathbf{B}_{11}))^{-1} \text{vec}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T).$$

*Důsledek.* Diagonální model GARCH ve tvaru vec je stacionární právě tehdy, když platí  $a_{ii} + b_{ii} < 1$  pro všechna  $i$ . Diagonální GARCH model ve tvaru BEKK je stacionární právě tehdy, když platí  $\sum_{k=1}^K (a_{ii,k}^2 + b_{ii,k}^2) < 1$  pro všechna  $i$  (Engle a Kroner, 1995).

*Poznámka.* Nediagonální model GARCH ve tvaru BEKK může být stacionární, i když má jeden nebo více prvků na diagonále větších než jedna (Engle a Kroner, 1995).

Rossi (2004) uvádí podmínky stacionarity pro parametrizaci vech. Mějme mnohorozměrný model GARCH s parametrizací vech ve tvaru

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{W} + \mathbf{A}^*(L) \text{vech}(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_t^T) + \mathbf{B}^*(L) \text{vech}(\mathbf{H}_t).$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*(L) &= \mathbf{A}_1^* L + \mathbf{A}_2^* L^2 + \cdots + \mathbf{A}_q^* L^q, \\ \mathbf{B}^*(L) &= \mathbf{B}_1^* L + \mathbf{B}_2^* L^2 + \cdots + \mathbf{B}_p^* L^p. \end{aligned}$$

Proces  $\epsilon_t$  s parametrizací vech je kovariančně stacionární právě tehdy, když jsou absolutní hodnoty vlastních čísel matice  $\mathbf{A}^*(1) + \mathbf{B}^*(1)$  menší než jedna.

Pro model GARCH( $p, q$ ) s parametrizací vech je nepodmíněná kovarianční matice, pokud existuje, určena výrazem

$$E(\text{vech}(\epsilon_t \epsilon_t^T)) = (\mathbf{I}_{N^*} - \mathbf{A}^*(1) - \mathbf{B}^*(1))^{-1} \mathbf{W},$$

kde  $N^* = N(N + 1)/2$ .

*Důsledek.* Diagonální model GARCH ve tvaru vech je stacionární právě tehdy, když platí  $a_{ii}^* + b_{ii}^* < 1$  pro všechna  $i$  (Rossi, 2004).

*Příklad.* Mějme dvourozměrný model GARCH(1,1) ( $N = 2, p = q = 1$ ). Pak je proces  $\epsilon_t$  s parametrizací vech (2.1) kovariančně stacionární právě tehdy, když jsou absolutní hodnoty vlastních čísel matice

$$\mathbf{A}_1^* + \mathbf{B}_1^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ b_{31}^* & b_{32}^* & b_{33}^* \end{pmatrix}$$

menší než jedna.

*Příklad.* Mějme dvourozměrný model GARCH(1,1) ( $N = 2, p = q = 1$ ). Pak je proces  $\epsilon_t$  s parametrizací BEKK (2.8) kovariančně stacionární právě tehdy, když jsou absolutní hodnoty vlastních čísel matice

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{11} \otimes \mathbf{A}_{11} + \mathbf{B}_{11} \otimes \mathbf{B}_{11} = \\ & = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{12} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}^2 & a_{21}a_{22} & a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{12} & b_{11}b_{12} & b_{12}^2 \\ b_{11}b_{21} & b_{11}b_{22} & b_{12}b_{21} & b_{12}b_{22} \\ b_{11}b_{21} & b_{12}b_{21} & b_{11}b_{22} & b_{12}b_{22} \\ b_{21}^2 & b_{21}b_{22} & b_{21}b_{22} & b_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

menší než jedna.  $a_{ij}$  a  $b_{ij}$  v parametrizaci BEKK označují prvky matic  $\mathbf{A}_{11}$  a  $\mathbf{B}_{11}$ .

*Příklad.* Mějme dvourozměrný model GARCH(1,1) ( $N = 2, p = q = 1$ ). Pak je proces  $\epsilon_t$  s parametrizací vec (2.14) kovariančně stacionární právě tehdy, když jsou absolutní hodnoty vlastních čísel matice

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

menší než jedna.  $a_{ij}$  a  $b_{ij}$  v parametrizaci vec označují prvky matic  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{B}_1$ .

## 2.6 Odhadování parametrů mnohorozměrného modelu GARCH

V předešlém textu jsme se věnovali definici mnohorozměrného modelu GARCH a jeho různým parametrizacím. Nyní se budeme zabývat odhadováním parametrů v jednotlivých reprezentacích. Pro odhady parametrů všech tří zkoumaných parametrizací se používá metoda maximální věrohodnosti.

Engle a Kroner (1995) ji používají pro reprezentace BEKK a vec, Rossi (2004) ji používá pro reprezentace vech a BEKK.

Předpokládejme, že náhodný vektor  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  a náhodné vektory  $\boldsymbol{\epsilon}_t$  podmíněné informací  $\boldsymbol{\Psi}_{t-1}$ ,  $t = 2, \dots, T$  mají  $N$ -rozměrné normální rozdělení  $\mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Mějme náhodný výběr  $\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_T$ . Pak pro sdruženou hustotu platí

$$f(\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_T) = f(\boldsymbol{\epsilon}_1)f(\boldsymbol{\epsilon}_2|\boldsymbol{\epsilon}_1)f(\boldsymbol{\epsilon}_3|\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2) \dots f(\boldsymbol{\epsilon}_T|\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_{T-1}).$$

Zřejmě je

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\epsilon}_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det \mathbf{H}_1}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_1^T \mathbf{H}_1^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_1\right\}, \\ f(\boldsymbol{\epsilon}_t|\boldsymbol{\Psi}_{t-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det \mathbf{H}_t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t\right\}, \quad t = 2, \dots, T, \\ f(\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_T) &= (2\pi)^{-TN/2} \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{H}_t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t\right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nechť  $\boldsymbol{\theta}$  je vektor parametrů sdružené hustoty  $f(\boldsymbol{\epsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_T)$ . Pak (2.24) je vyjádření věrohodnostní funkce  $L_T(\boldsymbol{\theta})$ , ze kterého jednoduše dostaneme logaritmickou věrohodnost  $l_T(\boldsymbol{\theta})$ . Využijeme při tom vztahů

$$\begin{aligned} l_1(\boldsymbol{\theta}) &= \ln f(\boldsymbol{\epsilon}_1), \quad l_t(\boldsymbol{\theta}) = \ln f(\boldsymbol{\epsilon}_t|\boldsymbol{\Psi}_{t-1}), \quad t = 2, \dots, T, \\ l_T(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Logaritmická věrohodnostní funkce pak je

$$\begin{aligned} l_t(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \left[ N \ln(2\pi) + \ln(\det \mathbf{H}_t) + \boldsymbol{\epsilon}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t \right], \quad t = 1, \dots, T, \\ l_T(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \left[ TN \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T \left( \ln(\det \mathbf{H}_t) + \boldsymbol{\epsilon}_t^T \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_t \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Maximálně věrohodným odhadem vektoru parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  je

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} L_T(\boldsymbol{\theta}).$$

*Poznámka.* Logaritmus je ryze rostoucí funkce, takže funkce  $L_T(\boldsymbol{\theta})$  a  $l_T(\boldsymbol{\theta})$  nabývají maxima v tomtéž bodě.

*Poznámka.* Vektor parametrů  $\boldsymbol{\theta}$  můžeme vyjádřit jako

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \text{vec}(\mathbf{A}_1^*) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{A}_q^*) \\ \text{vec}(\mathbf{B}_1^*) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{B}_p^*) \end{pmatrix}$$

pro reprezentaci vech (2.1), jako

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \text{vech}(\mathbf{C}) \\ \text{vec}(\mathbf{A}_{11}) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{A}_{q1}) \\ \text{vec}(\mathbf{B}_{11}) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{B}_{p1}) \end{pmatrix}$$

pro reprezentaci BEKK (2.8), a jako

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \text{vec}(\mathbf{A}_1) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{A}_q) \\ \text{vec}(\mathbf{B}_1) \\ \vdots \\ \text{vec}(\mathbf{B}_p) \end{pmatrix}$$

pro reprezentaci vec (2.14).

Výše zmíněné vektory  $\boldsymbol{\theta}$  obsahují parametry rovnice podmíněného rozptylu  $\text{Var}(\boldsymbol{\epsilon}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1}) = \mathbf{H}_t$ . Pozorujeme časovou řadu  $\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t$ , takže do logaritmicke věrohodnostní funkce (2.25) dosazujeme  $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t$  a pro nenulový vektor  $\boldsymbol{\mu}_t$  přistupují do vektoru  $\boldsymbol{\theta}$  parametry rovnice podmíněné střední hodnoty  $\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{E}(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\Psi}_{t-1})$ .

Řada  $\mathbf{y}_t$  může být modelována například mnohorozměrným autoregresním procesem řádu  $r$ . Ten je definován rovnicí

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_r \mathbf{y}_{t-r} + \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

kde  $\boldsymbol{\varphi}_0$  je vektor délky  $N$  a  $\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_r$  jsou matice typu  $N \times N$  (Cipra, 2008). Tedy

$$\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \sum_{i=1}^r \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{y}_{t-i}.$$

Případně lze použít externí regresory. Konkrétní specifikace rovnice podmíněné střední hodnoty je ukázána v následující kapitole.



# 3. Aplikace modelu GARCH na reálná data

Doposud jsme se zabývali teorií mnohorozměrného modelu GARCH. Nyní ukážeme, jak je možné tuto teorii uvést do praxe.

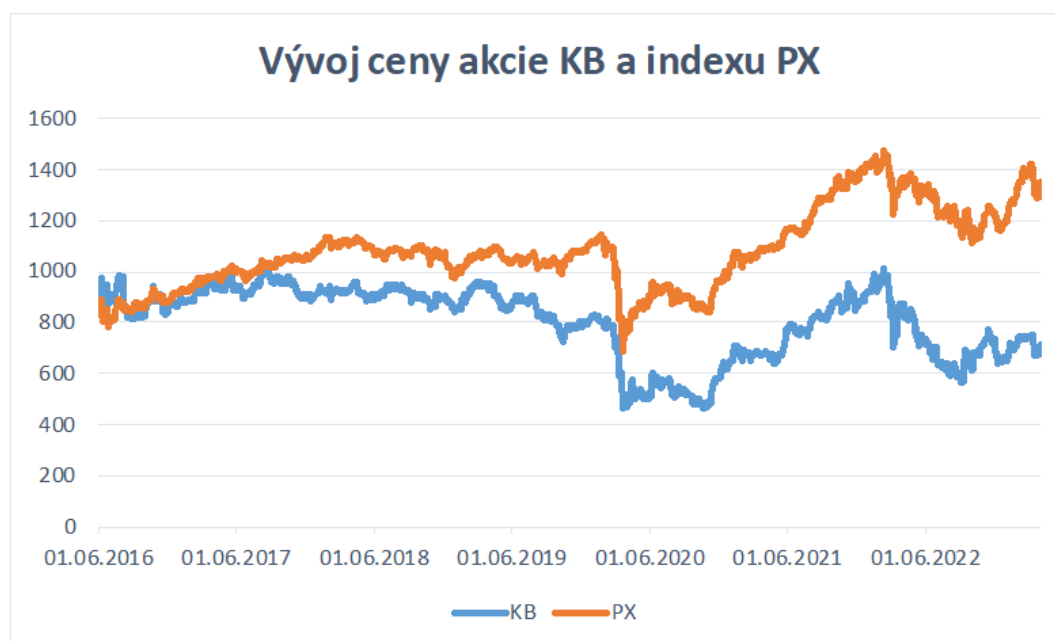
## 3.1 Softwarové možnosti

Nejprve bylo třeba prozkoumat softwarové implementace mnohorozměrného modelu GARCH. Například systém WOLFRAM MATHEMATICA má implementovaný pouze jednorozměrný model GARCH, což pro účely této práce není dostatečné.

Rozhodli jsme se použít systém EViews, který má spolu s jednorozměrným modelem GARCH implementovaný i mnohorozměrný model GARCH. EViews umožňuje odhadovat parametry diagonálního modelu GARCH s parametrizací BEKK a diagonálního modelu GARCH s parametrizací vech. V této kapitole ukážeme odhad obou parametrizací. Bwire (2019) uvádí způsob, jak odhadovat volatilitu dvourozměrného modelu GARCH(1,1) s diagonální parametrizací BEKK. Při odhadování volatilitu dvourozměrného modelu GARCH(1,1) s diagonální parametrizací vech budeme postupovat podobně.

## 3.2 Reálná data

Následně bylo nutné najít vhodná data pro aplikaci mnohorozměrného modelu GARCH. Zvolili jsme vývoj ceny akcie Komerční banky a indexu PX, obojí dostupné na stránkách KB (Komerční banka, 2023). Index PX je oficiálním ce-



Obrázek 3.1: Vývoj ceny akcie KB a indexu PX

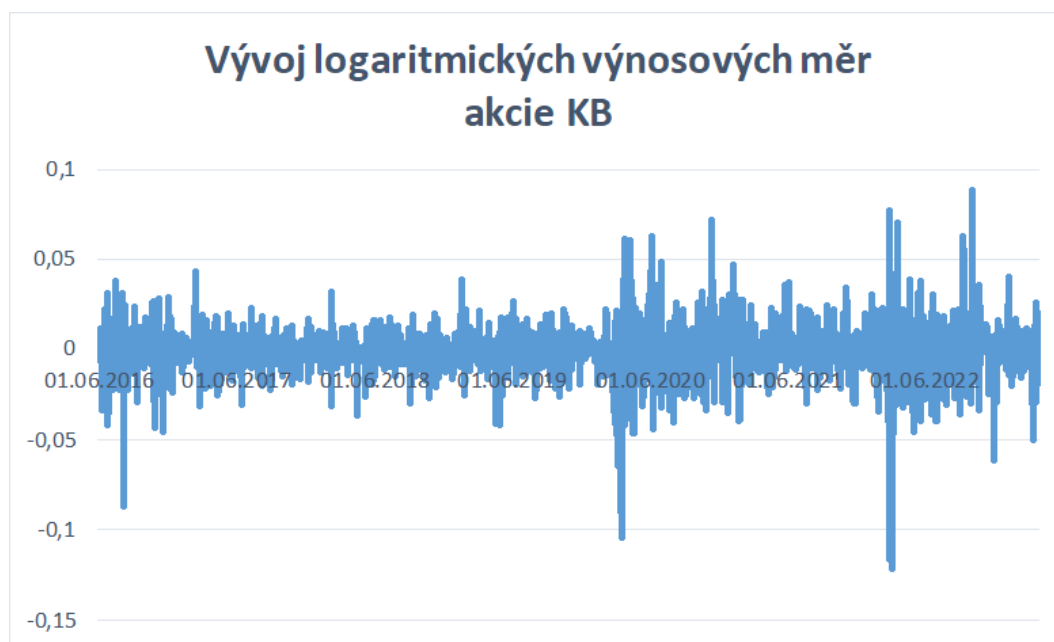
novým indexem Burzy cenných papírů Praha. Součástí indexu jsou akcie deseti společností, jednou z nich je i Komerční banka, která má v indexu zastoupení 20,47% (Burza cenných papírů Praha, 2023). Mezi těmito časovými řadami tedy existuje závislost. K tomuto faktu se vrátíme později.

Máme k dispozici údaje o ceně akcie KB a indexu PX z období od 1. 6. 2016 do 31. 3. 2023 a to za každý pracovní den (bez státních svátků). Celkem tedy máme 1 716 pozorování v každé časové řadě. Vývoj těchto řad je znázorněn na obrázku 3.1. Byla analyzována i měsíční data, ta se ale kvůli malému počtu pozorování ukázala horší než denní data.

V našem modelu budeme namísto cen používat logaritmické výnosové míry. Když označíme  $P_t$  cenu aktiva v čase  $t$ , tak logaritmickou výnosovou míru  $r_t$  dostaneme jako

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad t = 2, \dots$$

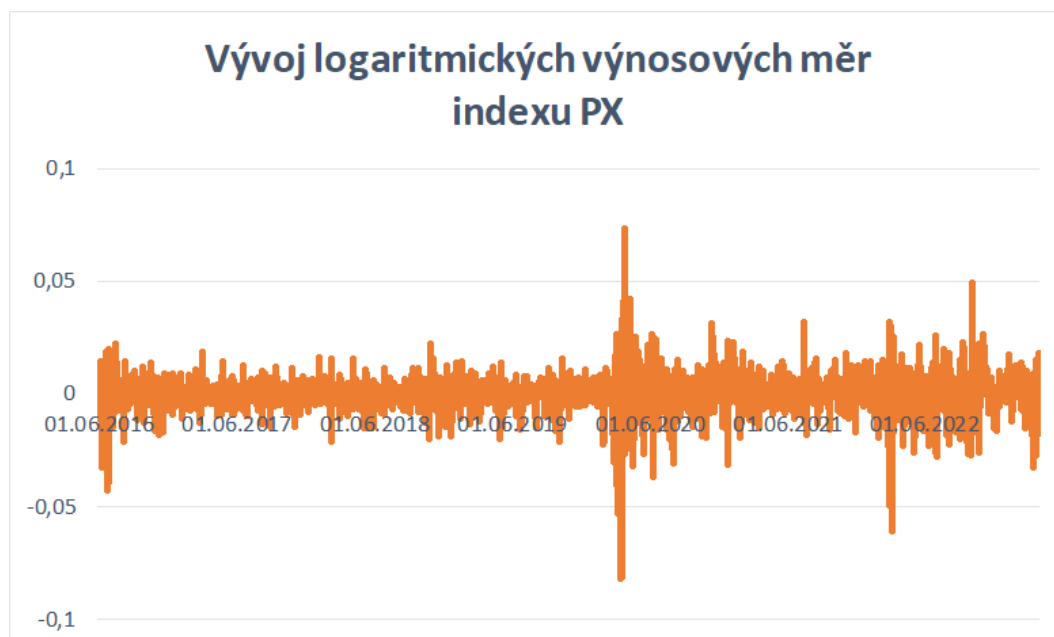
Transformací cen na logaritmické výnosy dosáhneme stacionárního průběhu pozorovaných časových řad. Původní řady cen stacionární nejsou, jak lze vidět z obrázku 3.1. Časové řady logaritmických výnosových měr akcie KB a indexu PX označme postupně  $DLKB$  a  $DLPX$ . Nakonec máme tedy k dispozici 1 715 pozorování v každé časové řadě. Vývoj logaritmických výnosových měr akcie KB je znázorněn na obrázku 3.2 a vývoj logaritmických výnosových měr indexu PX je znázorněn na obrázku 3.3.



Obrázek 3.2: Vývoj logaritmických výnosových měr akcie KB

### 3.3 Aplikace modelu GARCH

Nyní, když máme připravena data, můžeme přistoupit k samotnému odhadování parametrů dvourozměrného modelu GARCH pro časové řady  $DLKB$  a  $DLPX$ . Budeme následovat postup, který uvádí Bwire (2019).



Obrázek 3.3: Vývoj logaritmických výnosových měr indexu PX

### 3.3.1 Rovnice podmíněné střední hodnoty

Prvním krokem je volba rovnice podmíněné střední hodnoty. Specifikujeme ji tak, že hodnota každé z časových řad v čase  $t$  závisí na konstantě a na zpožděných hodnotách obou časových řad  $DLKB$  a  $DLPX$ . Jelikož víme, že mezi časovými řadami existuje závislost, tak tato specifikace má smysl.

Bwire (2019) používá zpoždění do hodnoty  $t - 4$ , pracuje tedy s čtyřmi autoregresními parametry pro každou časovou řadu. V takovém případě řada  $DLKB$  závisí na konstantě a na zpožděných hodnotách  $DLKB(-1$  až  $-4)$  a  $DLPX(-1$  až  $-4)$ . To samé platí pro  $DLPX$ . Rovnici podmíněné střední hodnoty lze po složkách symbolicky zapsat ve tvaru

$$\mu_{1,t} = C_1 + \sum_{i=1}^4 C_1(i)DLKB(-i) + \sum_{i=5}^8 C_1(i)DLPX(-i)$$

$$\mu_{2,t} = C_2 + \sum_{i=1}^4 C_2(i)DLKB(-i) + \sum_{i=5}^8 C_2(i)DLPX(-i).$$

Dále

$$y_{1,t} = DLKB(0) = \mu_{1,t} + \epsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = DLPX(0) = \mu_{2,t} + \epsilon_{2,t}.$$

Odhad parametrů provádíme v EViews a výstupem je tabulka 3.1. Z výsledků vidíme, že koeficienty u zpožděných hodnot  $DLKB(-3)$ ,  $DLPX(-1)$ ,  $DLPX(-2)$  a  $DLPX(-3)$  jsou na hladině 5% statisticky významné (nenulové). To platí, jelikož jsou jejich p-hodnoty (sloupec Prob.) menší než 0,05. Z rovnice vynecháme všechny koeficienty, jejichž p-hodnoty jsou větší než 0,05, tedy konstantu  $C_1$  a zpožděné hodnoty  $DLKB(-1)$ ,  $DLKB(-2)$ ,  $DLKB(-4)$  a  $DLPX(-4)$ . Důležitou částí výstupu je Durbinova-Watsonova statistika, která odhalí případnou korelovanost sousedních reziduí. Hodnoty Durbinovy-Watsonovy (D-W) statistiky blízke 2 značí nekorelovanost reziduí (Cipra, 2008). V našem případě nic

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$C_1$	-0.000316	0.000377	-0.839664	0.4012
$DLKB(-1)$	-0.030106	0.035545	-0.846981	0.3971
$DLKB(-2)$	-0.030523	0.035521	-0.859290	0.3903
$DLKB(-3)$	-0.081194	0.035474	-2.288808	0.0222
$DLKB(-4)$	0.032052	0.035434	0.904555	0.3658
$DLPX(-1)$	0.181057	0.056800	3.187620	0.0015
$DLPX(-2)$	0.150060	0.056939	2.635451	0.0085
$DLPX(-3)$	0.165036	0.056846	2.903213	0.0037
$DLPX(-4)$	0.008629	0.056990	0.151418	0.8797
Durbin-Watson stat			1.997514	

Tabulka 3.1: Odhad rovnice podmíněné střední hodnoty 1 (řada  $DLKB$ )

nenasvědčuje tomu, že by sousední rezidua rovnice podmíněné střední hodnoty byla korelovaná.

Dostaneme novou specifikaci rovnice podmíněné střední hodnoty, a sice že řada  $DLKB$  závisí na  $DLKB(-3)$  a  $DLPX(-1)$  až  $-3$ ). Výstupem této specifikace je tabulka 3.2. Vidíme, že p-hodnoty všech koeficientů jsou menší než

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$DLKB(-3)$	-0.075698	0.035295	-2.144719	0.0321
$DLPX(-1)$	0.145744	0.038580	3.777684	0.0002
$DLPX(-2)$	0.116230	0.038446	3.023188	0.0025
$DLPX(-3)$	0.157554	0.056660	2.780721	0.0055
Durbin-Watson stat			2.026144	

Tabulka 3.2: Odhad rovnice podmíněné střední hodnoty 2 (řada  $DLKB$ )

0,05, všechny koeficienty jsou tedy statisticky významné. Navíc D-W statistika je blízka 2, což značí nekorelovanost sousedních reziduí. Zdá se tedy, že by tato specifikace mohla být vhodným odhadem rovnice podmíněné střední hodnoty.

Bohužel, při použití této specifikace EViews hlásí problém s kovariancí koeficientů. Tento problém lze vyřešit snížením počtu koeficientů. Vytvoříme novou specifikaci tak, že z předchozí vypustíme nejméně významný koeficient, tedy  $DLKB(-3)$ . V této specifikaci řada  $DLKB$  závisí na  $DLPX(-1)$  až  $-3$ ). Výstupem je tabulka 3.3. P-hodnoty koeficientů  $DLPX(-1)$  a  $DLPX(-2)$  jsou

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$DLPX(-1)$	0.145175	0.038620	3.759085	0.0002
$DLPX(-2)$	0.117764	0.038480	3.060417	0.0022
$DLPX(-3)$	0.068635	0.038659	1.775383	0.0760
Durbin-Watson stat			2.025902	

Tabulka 3.3: Odhad rovnice podmíněné střední hodnoty 3 (řada  $DLKB$ )

menší než 0,05, tyto koeficienty jsou statisticky významné na hladině 5%. Koeficient  $DLPX(-3)$  má p-hodnotu větší než 0,05, ale menší než 0,1. Tento koeficient

je statisticky významný na hladině 10%, v rovnici jej tedy ponecháme. Hodnota D-W statistiky opět nasvědčuje nekorelovanosti reziduí. Odhadem rovnice podmíněné střední hodnoty pro řadu DLKB je tedy

$$C_1(1)DLPX(-1) + C_1(2)DLPX(-2) + C_1(3)DLPX(-3). \quad (3.1)$$

Stejným způsobem specifikujeme rovnici pro  $DLPX$ . V konečné specifikaci dostaneme, že řada  $DLPX$  závisí na  $DLPX(-1)$  až  $-3$ ). Výstupem je tabulka 3.4. Z p-hodnot vidíme, že koeficienty u  $DLPX(-1)$  a  $DLPX(-2)$  jsou statisticky

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$DLPX(-1)$	0.061251	0.024041	2.547721	0.0109
$DLPX(-2)$	0.105781	0.024051	4.398130	0.0000
$DLPX(-3)$	0.026018	0.024195	1.075333	0.2824
Durbin-Watson stat			2.001714	

Tabulka 3.4: Odhad rovnice podmíněné střední hodnoty 4 (řada  $DLPX$ )

významné na hladině 5%. Koeficient  $DLPX(-3)$  má p-hodnotu větší než 0,05. Tento koeficient je statisticky významný na hladině 30%. D-W statistika značí nekorelovanost reziduí rovnice. Odhadem rovnice podmíněné střední hodnoty pro řadu  $DLPX$  je

$$C_2(1)DLPX(-1) + C_2(2)DLPX(-2) + C_2(3)DLPX(-3). \quad (3.2)$$

Bwire (2019) ve svém článku pracuje s měsíčními daty. Jelikož používáme denní data, tak by zpoždění do hodnoty  $t - 4$  nemuselo být dostatečné. Proto jsme se rozhodli zopakovat celý postup pro zpoždění až do hodnoty  $t - 20$ . Tímto postupem dostaneme následující specifikace rovnice podmíněné střední hodnoty. Řada  $DLKB$  závisí na  $DLPX(-1)$ ,  $DLPX(-2)$  a  $DLPX(-16)$  a řada  $DLPX$  závisí na  $DLKB(-7)$ ,  $DLPX(-2)$  a  $DLPX(-15)$ . Výstupem těchto specifikací je tabulka 3.5 a tabulka 3.6.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$DLPX(-1)$	0.151961	0.038727	3.923877	0.0001
$DLPX(-2)$	0.118109	0.038633	3.057201	0.0023
$DLPX(-16)$	-0.117294	0.038645	-3.035144	0.0024
Durbin-Watson stat			2.037995	

Tabulka 3.5: Odhad rovnice podmíněné střední hodnoty 5 (řada  $DLKB$ )

Všechny p-hodnoty a D-W statistiky u obou specifikací odpovídají požadavkům. Odhady rovnic podmíněné střední hodnoty jsou

$$DLKB : C_1(1)DLPX(-1) + C_1(2)DLPX(-2) + C_1(3)DLPX(-16), \quad (3.3)$$

$$DLPX : C_2(1)DLKB(-7) + C_2(2)DLPX(-2) + C_2(3)DLPX(-15). \quad (3.4)$$

Bwire (2019) používá v obou složkách podmíněné střední hodnoty stejné regresory. Pro aplikaci modelu GARCH budeme volit 3 dvojice rovnic podmíněné

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$DLKB(-7)$	0.049027	0.014949	3.279602	0.0011
$DLPX(-2)$	0.110940	0.024035	4.615750	0.0000
$DLPX(-15)$	0.072645	0.024003	3.026515	0.0025
Durbin-Watson stat			1.873372	

Tabulka 3.6: Odhad rovnice podmíněné střední hodnoty 6 (řada  $DLPX$ )

střední hodnoty se stejnými regresory pro  $DLKB$  a  $DLPX$ . Na základě (3.1) a (3.2) použijeme  $DLPX(-1)$ ,  $DLPX(-2)$  a  $DLPX(-3)$ , na základě (3.3) použijeme  $DLPX(-1)$ ,  $DLPX(-2)$  a  $DLPX(-16)$  a na základě (3.4) použijeme  $DLKB(-7)$ ,  $DLPX(-2)$  a  $DLPX(-15)$ . Koeficienty značíme v souladu se zobrazenými výstupy z EViews. Dostaneme vyjádření

$$\begin{aligned} DLPX &= C(1)DLPX(-1) + C(2)DLPX(-2) + C(3)DLPX(-3), \\ DLKB &= C(4)DLPX(-1) + C(5)DLPX(-2) + C(6)DLPX(-3), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} DLPX &= C(1)DLPX(-1) + C(2)DLPX(-2) + C(3)DLPX(-16), \\ DLKB &= C(4)DLPX(-1) + C(5)DLPX(-2) + C(6)DLPX(-16), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} DLPX &= C(1)DLKB(-7) + C(2)DLPX(-2) + C(3)DLPX(-15), \\ DLKB &= C(4)DLKB(-7) + C(5)DLPX(-2) + C(6)DLPX(-15). \end{aligned} \quad (3.7)$$

V následujícím úseku rozhodneme, který z odhadů vede k nejlepšímu modelu.

### 3.3.2 Diagonální BEKK

Dalším krokem je pro každý z těchto odhadů implementovat dvourozměrný model GARCH(1,1) s diagonální parametrizací BEKK. Následně rozhodneme, který z modelů je nejlepší. K tomu použijeme Akaikeho informační kritérium. Vybereme model s nejnižší hodnotou Akaikeho informačního kritéria (AIC). Pro implementaci používáme EViews a výstupy jsou k dispozici na následujících stránkách. Výsledné modely označíme postupně BEKK\_01, BEKK\_02 a BEKK\_03.

Při porovnání výsledných modelů zjistíme, že nejnižší hodnotu AIC má model BEKK\_02, tedy model s odhadem rovnic podmíněných středních hodnot (3.6). Vidíme, že  $C(2)$ ,  $C(4)$ ,  $C(5)$  a  $C(6)$  mají p-hodnoty menší než 0,05, tyto koeficienty jsou tedy statisticky významné na hladině 5%.  $C(1)$  a  $C(3)$  mají p-hodnotu větší než 0,05, tyto koeficienty tedy mohou být na hladině 5% považovány za nulové. Na hladině větší než 10% bychom jejich nulovost zamítali. Hodnoty obou D-W statistik jsou blízké 2, což značí nekorelovanost sousedních reziduí rovnic podmíněných středních hodnot. Pro koeficienty  $C(7)$  -  $C(13)$  rovnice podmíněného rozptylu (2.13) jsou všechny p-hodnoty menší než 0,05, takže všechny koeficienty jsou statisticky významné na hladině 5%. Rovnice podmíněného rozptylu má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= 10^{-6} \begin{pmatrix} 3,33 & 2,78 \\ 2,78 & 5,63 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,26 \end{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^T \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,26 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0,92 & 0 \\ 0 & 0,95 \end{pmatrix} \mathbf{H}_{t-1} \begin{pmatrix} 0,92 & 0 \\ 0 & 0,95 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

System: BEKK_01				
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)				
Covariance specification: Diagonal BEKK				
Date: 07/07/23 Time: 16:38				
Sample: 4 1715				
Included observations: 1712				
Total system (balanced) observations 3424				
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)				
Convergence achieved after 32 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.044117	0.023557	1.872729	0.0611
C(2)	0.058272	0.020897	2.788525	0.0053
C(3)	0.019428	0.020973	0.926352	0.3543
C(4)	0.130846	0.033469	3.909453	0.0001
C(5)	0.074274	0.029934	2.481258	0.0131
C(6)	0.093428	0.029654	3.150642	0.0016
Variance Equation Coefficients				
C(7)	2.35E-06	3.45E-07	6.795571	0.0000
C(8)	2.07E-06	3.13E-07	6.620597	0.0000
C(9)	4.77E-06	5.89E-07	8.100130	0.0000
C(10)	0.293895	0.014448	20.34093	0.0000
C(11)	0.253409	0.010345	24.49560	0.0000
C(12)	0.936372	0.005460	171.5124	0.0000
C(13)	0.955267	0.003461	276.0049	0.0000
Log likelihood	11319.15	Schwarz criterion		-13.16677
Avg. log likelihood	3.305827	Hannan-Quinn criter.		-13.19282
Akaike info criterion	-13.20812			
Equation: $DLPX = C(1)*DLPX(-1) + C(2)*DLPX(-2) + C(3)*DLPX(-3)$				
R-squared	0.013446	Mean dependent var		0.000243
Adjusted R-squared	0.012292	S.D. dependent var		0.009780
S.E. of regression	0.009720	Sum squared resid		0.161464
Durbin-Watson stat	1.967166			
Equation: $DLKB = C(4)*DLPX(-1) + C(5)*DLPX(-2) + C(6)*DLPX(-3)$				
R-squared	0.016555	Mean dependent var		-0.000177
Adjusted R-squared	0.015404	S.D. dependent var		0.015639
S.E. of regression	0.015519	Sum squared resid		0.411569
Durbin-Watson stat	2.013774			
Covariance specification: Diagonal BEKK				
$GARCH = M + A1*RESID(-1)*RESID(-1)*A1 + B1*GARCH(-1)*B1$				
M is an indefinite matrix				
A1 is a diagonal matrix				
B1 is a diagonal matrix				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	2.35E-06	3.45E-07	6.795571	0.0000
M(1,2)	2.07E-06	3.13E-07	6.620597	0.0000
M(2,2)	4.77E-06	5.89E-07	8.100130	0.0000
A1(1,1)	0.293895	0.014448	20.34093	0.0000
A1(2,2)	0.253409	0.010345	24.49560	0.0000
B1(1,1)	0.936372	0.005460	171.5124	0.0000
B1(2,2)	0.955267	0.003461	276.0049	0.0000

Obrázek 3.4: Model BEKK\_01

System: BEKK_02				
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)				
Covariance specification: Diagonal BEKK				
Date: 07/07/23 Time: 16:39				
Sample: 17 1715				
Included observations: 1699				
Total system (balanced) observations 3398				
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)				
Convergence achieved after 33 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.045465	0.024558	1.851337	0.0641
C(2)	0.062280	0.021291	2.925237	0.0034
C(3)	-0.033977	0.021256	-1.598488	0.1099
C(4)	0.144605	0.032512	4.447801	0.0000
C(5)	0.096717	0.027563	3.508970	0.0004
C(6)	-0.080019	0.037565	-2.130174	0.0332
Variance Equation Coefficients				
C(7)	3.33E-06	4.53E-07	7.343778	0.0000
C(8)	2.78E-06	3.95E-07	7.025044	0.0000
C(9)	5.63E-06	6.64E-07	8.472375	0.0000
C(10)	0.319284	0.015181	21.03197	0.0000
C(11)	0.260767	0.010331	25.24078	0.0000
C(12)	0.919131	0.006492	141.5783	0.0000
C(13)	0.950673	0.003685	257.9791	0.0000
Log likelihood	11248.62	Schwarz criterion		-13.18455
Avg. log likelihood	3.310365	Hannan-Quinn criter.		-13.21075
Akaike info criterion	-13.22616			
Equation: DLPX = C(1)*DLPX(-1) + C(2)*DLPX(-2) + C(3)*DLPX(-16)				
R-squared	0.014357	Mean dependent var		0.000270
Adjusted R-squared	0.013194	S.D. dependent var		0.009719
S.E. of regression	0.009654	Sum squared resid		0.158081
Durbin-Watson stat	1.967041			
Equation: DLKB = C(4)*DLPX(-1) + C(5)*DLPX(-2) + C(6)*DLPX(-16)				
R-squared	0.018609	Mean dependent var		-0.000160
Adjusted R-squared	0.017452	S.D. dependent var		0.015585
S.E. of regression	0.015448	Sum squared resid		0.404758
Durbin-Watson stat	2.029583			
Covariance specification: Diagonal BEKK				
GARCH = M + A1*RESID(-1)*RESID(-1)*A1 + B1*GARCH(-1)*B1				
M is an indefinite matrix				
A1 is a diagonal matrix				
B1 is a diagonal matrix				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	3.33E-06	4.53E-07	7.343778	0.0000
M(1,2)	2.78E-06	3.95E-07	7.025044	0.0000
M(2,2)	5.63E-06	6.64E-07	8.472375	0.0000
A1(1,1)	0.319284	0.015181	21.03197	0.0000
A1(2,2)	0.260767	0.010331	25.24078	0.0000
B1(1,1)	0.919131	0.006492	141.5783	0.0000
B1(2,2)	0.950673	0.003685	257.9791	0.0000

Obrázek 3.5: Model BEKK\_02



System: BEKK_03				
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)				
Covariance specification: Diagonal BEKK				
Date: 07/07/23 Time: 16:40				
Sample: 16 1715				
Included observations: 1700				
Total system (balanced) observations 3400				
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)				
Convergence achieved after 38 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.009278	0.012906	0.718920	0.4722
C(2)	0.059532	0.021060	2.826786	0.0047
C(3)	0.028029	0.022859	1.226148	0.2201
C(4)	-0.002915	0.023394	-0.124594	0.9008
C(5)	0.095878	0.027200	3.524860	0.0004
C(6)	0.005803	0.035630	0.162878	0.8706
Variance Equation Coefficients				
C(7)	2.92E-06	4.45E-07	6.556895	0.0000
C(8)	2.49E-06	3.78E-07	6.585615	0.0000
C(9)	5.38E-06	6.54E-07	8.231026	0.0000
C(10)	0.309814	0.015133	20.47239	0.0000
C(11)	0.259811	0.010256	25.33319	0.0000
C(12)	0.926067	0.006679	138.6508	0.0000
C(13)	0.951962	0.003646	261.1119	0.0000
Log likelihood	11248.86	Schwarz criterion		-13.17707
Avg. log likelihood	3.308488	Hannan-Quinn criter.		-13.20326
Akaike info criterion	-13.21866			
Equation: $DLPX = C(1)*DLKB(-7) + C(2)*DLPX(-2) + C(3)*DLPX(-15)$				
R-squared	0.013638	Mean dependent var		0.000272
Adjusted R-squared	0.012476	S.D. dependent var		0.009716
S.E. of regression	0.009655	Sum squared resid		0.158208
Durbin-Watson stat	1.882426			
Equation: $DLKB = C(4)*DLKB(-7) + C(5)*DLPX(-2) + C(6)*DLPX(-15)$				
R-squared	0.005677	Mean dependent var		-0.000164
Adjusted R-squared	0.004505	S.D. dependent var		0.015581
S.E. of regression	0.015546	Sum squared resid		0.410130
Durbin-Watson stat	1.895513			
Covariance specification: Diagonal BEKK				
$GARCH = M + A1*RESID(-1)*RESID(-1)*A1 + B1*GARCH(-1)*B1$				
M is an indefinite matrix				
A1 is a diagonal matrix				
B1 is a diagonal matrix				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	2.92E-06	4.45E-07	6.556895	0.0000
M(1,2)	2.49E-06	3.78E-07	6.585615	0.0000
M(2,2)	5.38E-06	6.54E-07	8.231026	0.0000
A1(1,1)	0.309814	0.015133	20.47239	0.0000
A1(2,2)	0.259811	0.010256	25.33319	0.0000
B1(1,1)	0.926067	0.006679	138.6508	0.0000
B1(2,2)	0.951962	0.003646	261.1119	0.0000

Obrázek 3.6: Model BEKK\_03

### 3.3.3 Diagonální vech

Při implementaci dvourozměrného modelu GARCH(1,1) s diagonální parametrizací vech budeme postupovat stejně jako u diagonálního modelu BEKK. Výstupy jsou k dispozici na následujících stránkách a výsledné modely označíme postupně vech\_01, vech\_02 a vech\_03.

Při porovnání výsledných modelů zjistíme, že nejnižší hodnotu AIC má model vech\_02, tedy opět model s odhadem rovnic podmíněných středních hodnot (3.6). Nyní  $C(2)$ ,  $C(4)$  a  $C(6)$  mají p-hodnoty menší než 0,05, tyto koeficienty jsou tedy významně nenulové.  $C(1)$ ,  $C(3)$  a  $C(5)$  mají p-hodnotu větší než 0,05. Na hladině větší než 11% bychom jejich nulovost zamítali. Stejně jako u diagonálního modelu BEKK jsou hodnoty obou D-W statistik blízké 2, což značí nekorelovanost sousedních reziduí rovnic podmíněných středních hodnot. Pro koeficienty  $C(7)$  -  $C(15)$  rovnice podmíněného rozptylu (2.6) jsou všechny p-hodnoty menší než 0,05, takže všechny koeficienty jsou statisticky významné na hladině 5%. Rovnice podmíněného rozptylu diagonálního modelu vech má tedy tvar

$$\begin{aligned} \text{vech}(\mathbf{H}_t) = 10^{-6} & \begin{pmatrix} 3,18 \\ 3,45 \\ 7,23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,097 & 0 & 0 \\ 0 & 0,081 & 0 \\ 0 & 0 & 0,079 \end{pmatrix} \text{vech}(\boldsymbol{\epsilon}_{t-1} \boldsymbol{\epsilon}_{t-1}^T) + \\ & + \begin{pmatrix} 0,85 & 0 & 0 \\ 0 & 0,86 & 0 \\ 0 & 0 & 0,88 \end{pmatrix} \text{vech}(\mathbf{H}_{t-1}). \end{aligned}$$

### 3.3.4 Stacionarita

Dříve v textu jsme uvedli, že diagonální GARCH model ve tvaru BEKK je stacionární právě tehdy, když platí  $\sum_{k=1}^K (a_{ii,k}^2 + b_{ii,k}^2) < 1$  pro všechna  $i$  a že diagonální model GARCH ve tvaru vech je stacionární právě tehdy, když platí  $a_{ii}^* + b_{ii}^* < 1$  pro všechna  $i$ . Pro naše modely platí

$$\begin{aligned} BEKK : \quad & 0,319284^2 + 0,919131^2 = 0,946744 \\ & 0,260767^2 + 0,950673^2 = 0,971779 \\ vech : \quad & 0,097168 + 0,850088 = 0,947256 \\ & 0,080529 + 0,864123 = 0,944652 \\ & 0,079105 + 0,881875 = 0,96098. \end{aligned}$$

Oba modely tedy splňují podmínky kovarianční stacionarity.

System: VECH_01				
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)				
Covariance specification: Diagonal VECH				
Date: 07/07/23 Time: 18:27				
Sample: 4 1715				
Included observations: 1712				
Total system (balanced) observations 3424				
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)				
Convergence achieved after 61 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.042142	0.024216	1.740295	0.0818
C(2)	0.053152	0.022132	2.401647	0.0163
C(3)	0.017587	0.021492	0.818318	0.4132
C(4)	0.101199	0.036892	2.743095	0.0061
C(5)	0.051044	0.032707	1.560633	0.1186
C(6)	0.051155	0.032971	1.551508	0.1208
Variance Equation Coefficients				
C(7)	2.43E-06	3.90E-07	6.231859	0.0000
C(8)	2.59E-06	4.30E-07	6.023478	0.0000
C(9)	5.91E-06	7.48E-07	7.894109	0.0000
C(10)	0.085129	0.009154	9.299206	0.0000
C(11)	0.070491	0.006637	10.62069	0.0000
C(12)	0.071826	0.006275	11.44652	0.0000
C(13)	0.875036	0.011916	73.43661	0.0000
C(14)	0.888463	0.010657	83.36808	0.0000
C(15)	0.896812	0.008458	106.0336	0.0000
Log likelihood	11337.27	Schwarz criterion		-13.17924
Avg. log likelihood	3.311118	Hannan-Quinn criter.		-13.20929
Akaike info criterion	-13.22695			
Equation: $DLPX = C(1)*DLPX(-1) + C(2)*DLPX(-2) + C(3)*DLPX(-3)$				
R-squared	0.012807	Mean dependent var		0.000243
Adjusted R-squared	0.011652	S.D. dependent var		0.009780
S.E. of regression	0.009723	Sum squared resid		0.161569
Durbin-Watson stat	1.962439			
Equation: $DLKB = C(4)*DLPX(-1) + C(5)*DLPX(-2) + C(6)*DLPX(-3)$				
R-squared	0.014662	Mean dependent var		-0.000177
Adjusted R-squared	0.013509	S.D. dependent var		0.015639
S.E. of regression	0.015533	Sum squared resid		0.412361
Durbin-Watson stat	1.981112			
Covariance specification: Diagonal VECH				
$GARCH = M + A1.*RESID(-1)*RESID(-1)' + B1.*GARCH(-1)$				
M is an indefinite matrix				
A1 is an indefinite matrix				
B1 is an indefinite matrix*				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	2.43E-06	3.90E-07	6.231859	0.0000
M(1,2)	2.59E-06	4.30E-07	6.023478	0.0000
M(2,2)	5.91E-06	7.48E-07	7.894109	0.0000
A1(1,1)	0.085129	0.009154	9.299206	0.0000
A1(1,2)	0.070491	0.006637	10.62069	0.0000
A1(2,2)	0.071826	0.006275	11.44652	0.0000
B1(1,1)	0.875036	0.011916	73.43661	0.0000
B1(1,2)	0.888463	0.010657	83.36808	0.0000
B1(2,2)	0.896812	0.008458	106.0336	0.0000
* Coefficient matrix is not PSD.				

Obrázek 3.7: Model vech\_01

System: VECH_02				
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)				
Covariance specification: Diagonal VECH				
Date: 07/07/23 Time: 18:28				
Sample: 17 1715				
Included observations: 1699				
Total system (balanced) observations 3398				
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)				
Convergence achieved after 63 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.043068	0.024972	1.724619	0.0846
C(2)	0.054780	0.022355	2.450404	0.0143
C(3)	-0.034798	0.021877	-1.590575	0.1117
C(4)	0.105380	0.037926	2.778576	0.0055
C(5)	0.056398	0.032576	1.731278	0.0834
C(6)	-0.091137	0.037337	-2.440926	0.0146
Variance Equation Coefficients				
C(7)	3.18E-06	4.86E-07	6.542602	0.0000
C(8)	3.45E-06	5.25E-07	6.569051	0.0000
C(9)	7.23E-06	8.61E-07	8.389511	0.0000
C(10)	0.097168	0.010328	9.408140	0.0000
C(11)	0.080529	0.007365	10.93361	0.0000
C(12)	0.079105	0.006696	11.81465	0.0000
C(13)	0.850088	0.013792	61.63817	0.0000
C(14)	0.864123	0.012023	71.87094	0.0000
C(15)	0.881875	0.009197	95.88790	0.0000
Log likelihood	11270.02	Schwarz criterion		-13.20098
Avg. log likelihood	3.316662	Hannan-Quinn criter.		-13.23122
Akaike info criterion	-13.24899			
Equation: $DLPX = C(1)*DLPX(-1) + C(2)*DLPX(-2) + C(3)*DLPX(-16)$				
R-squared	0.013649	Mean dependent var		0.000270
Adjusted R-squared	0.012486	S.D. dependent var		0.009719
S.E. of regression	0.009658	Sum squared resid		0.158194
Durbin-Watson stat	1.961322			
Equation: $DLKB = C(4)*DLPX(-1) + C(5)*DLPX(-2) + C(6)*DLPX(-16)$				
R-squared	0.016694	Mean dependent var		-0.000160
Adjusted R-squared	0.015534	S.D. dependent var		0.015585
S.E. of regression	0.015464	Sum squared resid		0.405548
Durbin-Watson stat	1.988944			
Covariance specification: Diagonal VECH				
$GARCH = M + A1.*RESID(-1)*RESID(-1)' + B1.*GARCH(-1)$				
M is an indefinite matrix				
A1 is an indefinite matrix				
B1 is an indefinite matrix				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	3.18E-06	4.86E-07	6.542602	0.0000
M(1,2)	3.45E-06	5.25E-07	6.569051	0.0000
M(2,2)	7.23E-06	8.61E-07	8.389511	0.0000
A1(1,1)	0.097168	0.010328	9.408140	0.0000
A1(1,2)	0.080529	0.007365	10.93361	0.0000
A1(2,2)	0.079105	0.006696	11.81465	0.0000
B1(1,1)	0.850088	0.013792	61.63817	0.0000
B1(1,2)	0.864123	0.012023	71.87094	0.0000
B1(2,2)	0.881875	0.009197	95.88790	0.0000

Obrázek 3.8: Model vech\_02

System: VECH_03				
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)				
Covariance specification: Diagonal VECH				
Date: 07/07/23 Time: 18:29				
Sample: 16 1715				
Included observations: 1700				
Total system (balanced) observations 3400				
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)				
Convergence achieved after 69 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.007415	0.013163	0.563292	0.5732
C(2)	0.053697	0.022285	2.409529	0.0160
C(3)	0.027787	0.022894	1.213701	0.2249
C(4)	-0.003556	0.023811	-0.149327	0.8813
C(5)	0.051121	0.032861	1.555648	0.1198
C(6)	-0.001758	0.035549	-0.049448	0.9606
Variance Equation Coefficients				
C(7)	2.94E-06	4.75E-07	6.203210	0.0000
C(8)	3.16E-06	5.10E-07	6.196347	0.0000
C(9)	6.89E-06	8.42E-07	8.179502	0.0000
C(10)	0.093068	0.010146	9.172758	0.0000
C(11)	0.077483	0.007139	10.85300	0.0000
C(12)	0.078393	0.006527	12.01067	0.0000
C(13)	0.858210	0.013732	62.49540	0.0000
C(14)	0.872163	0.011914	73.20328	0.0000
C(15)	0.884957	0.009045	97.83471	0.0000
Log likelihood	11272.57	Schwarz criterion		-13.19622
Avg. log likelihood	3.315462	Hannan-Quinn criter.		-13.22644
Akaike info criterion	-13.24420			
Equation: $DLPX = C(1)*DLKB(-7) + C(2)*DLPX(-2) + C(3)*DLPX(-15)$				
R-squared	0.012641	Mean dependent var		0.000272
Adjusted R-squared	0.011477	S.D. dependent var		0.009716
S.E. of regression	0.009660	Sum squared resid		0.158368
Durbin-Watson stat	1.882038			
Equation: $DLKB = C(4)*DLKB(-7) + C(5)*DLPX(-2) + C(6)*DLPX(-15)$				
R-squared	0.003456	Mean dependent var		-0.000164
Adjusted R-squared	0.002281	S.D. dependent var		0.015581
S.E. of regression	0.015563	Sum squared resid		0.411046
Durbin-Watson stat	1.888166			
Covariance specification: Diagonal VECH				
$GARCH = M + A1.*RESID(-1)*RESID(-1) + B1.*GARCH(-1)$				
M is an indefinite matrix				
A1 is an indefinite matrix				
B1 is an indefinite matrix*				
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	2.94E-06	4.75E-07	6.203210	0.0000
M(1,2)	3.16E-06	5.10E-07	6.196347	0.0000
M(2,2)	6.89E-06	8.42E-07	8.179502	0.0000
A1(1,1)	0.093068	0.010146	9.172758	0.0000
A1(1,2)	0.077483	0.007139	10.85300	0.0000
A1(2,2)	0.078393	0.006527	12.01067	0.0000
B1(1,1)	0.858210	0.013732	62.49540	0.0000
B1(1,2)	0.872163	0.011914	73.20328	0.0000
B1(2,2)	0.884957	0.009045	97.83471	0.0000
* Coefficient matrix is not PSD.				

Obrázek 3.9: Model vech\_03

# Závěr

V této práci jsme představili modelování volatility použitím mnohorozměrného modelu GARCH. Nejprve jsme definovali jednorozměrný model ARCH a jednorozměrný model GARCH. Uvedli jsme definici stacionarity a podmínku kovarianční stacionarity modelu GARCH.

Definici jednorozměrného modelu GARCH jsme rozšířili na mnohorozměrný model GARCH a zabývali jsme se vlastnostmi podmíněné varianční matice  $\mathbf{H}_t$ . Uvedli jsme parametrizace  $\mathbf{H}_t$ , z nichž jsme dostali reprezentace vech, BEKK a vec modelu GARCH. Pro reprezentace vech a BEKK jsme uvedli obecnou a diagonální variantu a porovnávali jsme počty jejich parametrů. Dále jsme se věnovali vztahům mezi parametrizacemi, konkrétně vyjádření parametrů reprezentace vech pomocí parametrů reprezentace BEKK a podmínkám ekvivalence reprezentace BEKK a reprezentace vec. Následně jsme se zabývali kovarianční stacionaritou mnohorozměrného modelu GARCH. Uvedli jsme nutnou a postačující podmínku kovarianční stacionarity pro všechny výše zmíněné reprezentace. Také jsme pojednali o odhadování parametrů mnohorozměrného modelu GARCH metodou maximální věrohodnosti.

Diagonální model GARCH s parametrizací BEKK a diagonální model GARCH s parametrizací vech jsme aplikovali na časové řady reálných dat. Časové řady vývoje ceny akcie Komerční banky a indexu PX jsme převedli na časové řady logaritmických výnosových měř. Pro tyto řady jsme odhadli rovnice podmíněných středních hodnot a následně jsme pro parametrizaci BEKK i parametrizaci vech odhadli rovnici podmíněného rozptylu. Posuzované modely s různě volenou rovnicí podmíněné střední hodnoty se jevily jako kvalitativně srovnatelné. Tímto se nám podařilo mnohorozměrně modelovat volatilitu.

# Seznam použité literatury

- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- BURZA CENNÝCH PAPÍRŮ PRAHA, A. S. (2023). PX. *Burza cenných papírů Praha*. URL <https://www.pse.cz/indexy/hodnoty-indexu/detail/XC0009698371?tab=detail-composition>.
- BWIRE, T. (2019). Modelling and Forecasting Volatility in Financial Markets Using E-Views. *COMESA Monetary Institute*.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. První vydání. Ekopress, Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, **50**(4), 987–1007.
- ENGLE, R. F. a KRONER, K. F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, **11**(1), 122–150.
- ERTEN, I., TUNCEL, M. B. a OKAY, N. (2012). Volatility Spillovers in Emerging Markets During the Global Financial Crisis: Diagonal BEKK Approach. *Bogazici University*.
- KOMERČNÍ BANKA, A. S. (2023). Akcie KB. *Komerční banka*. URL <https://www.kb.cz/cs/o-bance/pro-investory/akcionari-akcie-a-dividendy/akcie-kb>.
- RAO, C. R. (1978). *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*. První vydání. Academia, Praha.
- ROSSI, E. (2004). Lecture Notes on GARCH Models. *University of Pavia*.