Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zavedení objemu těles pomocí Cavalieriho principu

Introducing the volume of solids using Cavalieri's principle

Eliška Fialová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Zavedení objemu těles pomocí Cavalieriho principu potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. 7. 2023

Ráda bych tímto poděkovala paní profesorce prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce, za připomínky, rady a čas, který mi věnovala. Také bych chtěla poděkovat žákům, kteří se mého výzkumu účastnili a ochotně se zapojili. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za pomoc a podporu, kterou mi poskytovala.

ABSTRAKT

Cílem diplomové práce pomocí série výukových experimentů zavést objem jehlanu, kuželu a koule pomocí Cavalieriho principu u žáků devátého ročníku základní školy. Nejprve jsou v práci charakterizovány teorie a přístupy, na základě kterých byl experiment stavěn, jako je teorie generického modelu a konstruktivismus. Další část se zabývá analýzou učebnic pro 2. stupeň základní školy a gymnázia, které se věnují zavádění objemů těles jehlan, kužel a koule, a především těm učebnicím, které dané objemy zavádí pomocí Cavalieriho principu. Výukovému experimentu předcházela série hodin zaměřených na seznámení žáků s vybranými geometrickými tělesy a odvozování výpočtů jejich povrchů. Následovalo zavedení Cavalieriho principu, nejprve v rovině, následně v prostoru. V praktické části práce jsou uvedeny úlohy, které byly ve výukovém experimentu použity. Popis průběhu výukového experimentu je doplněn kopiemi řešení žáků. Závěry jsou ilustrovány postřehy žáků a shrnutími, k nimž dospěli formou diskuze nad úlohami. V závěru práce je uvedeno vyhodnocení výukového experimentu a zhodnoceno, jak žáci k výuce přistupovali a co se z ní naučili. Ukázalo se, že Cavalieriho princip je určitě jednou z možností, jak k výuce tohoto tématu přistoupit.

KLÍČOVÁ SLOVA

Cavalieriho princip, objem, jehlan, kužel, koule

ABSTRACT

The aim of the thesis is to use a series of pedagogical experiments to introduce the volume of a pyramid, a cone and a sphere using Cavalieri's principle for pupils of the ninth year of primary school. First, the thesis characterizes the theories and approaches on the basis of which the experiment was built, such as the generic model theory and constructivism. The next part deals with the analysis of schoolbooks for the upper primary school and gymnasium, which are devoted to the introduction of the volumes of solids of pyramids, cones and spheres, and especially those schoolbooks which introduce the given volumes using the Cavalieri principle. The pedagogical experiment was preceded by a series of lessons focused on familiarizing pupils with given geometric solids and deriving calculations of their surfaces. This was followed by the introduction of the Cavalieri principle in the plane and also in space. In the practical part of the thesis, the tasks that were used in the pedagogical experiment are presented. The description of the course of the pedagogical experiment is supplemented by copies of the pupils' solutions. The conclusions are illustrated by the pupils' observations and summaries, which they arrived at in the form of a discussion on the tasks. At the end of the thesis, an evaluation of the pedagogical experiment is presented and an evaluation of how the pupils approached the teaching and what they learned from it. It turned out that Cavalieri's principle is definitely one of the ways to approach the teaching of this topic.

KEYWORDS

Cavalieri’s principle, volume, pyramid, cone, sphere

Obsah

Úvod

V diplomové práci se zabývám výukou objemů těles na základní škole pomocí Cavalieriho principu, konkrétně jehlanu, kuželu a koule. Z vlastní zkušenosti ze svých žákovských let mohu říct, že se zavádění objemů těles mnohdy provádí předáním vzorečku, u kterého se očekává, že se ho žáci naučí a budou aplikovat na další úlohy. Měla jsem problémy si tolik vzorců zapamatovat a ani mě nenapadlo přemýšlet o tom, jak mohly vztahy na výpočtu objemů vzniknout. S jinou možností přístupu k zavádění objemů těles jsem se setkala až na vysoké škole na Pedagogické fakultě. V magisterském studiu didaktiky matematiky nám byli představeny různé přístupy k výuce matematiky. Jedním z nich byla teorie generických modelů. Od té doby jsem věděla, že nemohu učit už jinak, protože mi konečně výuka s tímto přístupem začala dávat smysl. Proto jsem se rozhodla, které učím na základní škole, zavést objemy jehlanu, kuželu a koule právě s oporou v teorii generických modelů. K tomu se přímo nabízel Cavalieriho princip.

Cílem diplomové práce je připravit, realizovat a vyhodnotit výukový experiment zaměřený na Cavalieriho princip, pomocí kterého zavedu objemy těles s žáky devátého ročníku základní školy. Žáci by měli porozumět tomu, z čeho vztahy pro výpočet objemu jehlanu, kuželu a koule vychází. K tomu je potřeba zrealizovat také výuku, ve které se žáci s principem postupně seznámí. Nedílnou součástí práce je také rešerše učebnic, které jsou na toto téma zaměřené, s cílem zjistit, jakým způsobem jejich autoři téma vykládají. Také jsem se zaměřila na to, které učebnice objemy vybraných těles podle Cavalieriho principu zavádějí. Výuka inspirovaná úlohami z uvedených publikací byla realizována v devátém ročníku základní školy.

Diplomová práce je rozdělena na dvě části. První částí je teoretická část, ve které představuji pojmotvorný proces, teorii generického modelu, konstruktivismus a transmisivní přístup k výuce. Dále navazuje definování geometrických těles a poté jsou uvedeny vybrané učebnice, které zavádí objemy mnou vybraných těles. Následující oddíly jsou věnované tomu, jak Bonaventura Cavalieri princip, který dnes podle něj pojmenováváme, odvodil. Je zde také uvedeno znění Cavalieriho principu, jak v rovině, tak i v prostoru. V posledním oddílu teoretické části uvádím učebnice, které se přímo Cavalieriho principu věnují a podle něj zavádí objemy vybraných těles.

Druhá část je praktická. Úvodní část se zabývá přípravou výuky a podmínkami, ve kterých se realizovala. V další části je představeno, jak výuka proběhla. Začíná úvodními hodinami, které se věnovaly úvodům k tělesům, do které spadá i zjišťování jejich povrchu. Následují oddíly o zavádění Cavalieriho principu nejprve v rovině, a poté v prostoru. Závěrem výukového experimentu a zároveň jeho vrcholem je pak samotné zavedení objemu jehlanu, kuželu a koule. Průběh výuky je podrobně popsán a ilustrován pracemi žáků a rozhovory s nimi. V závěru je výukový experiment shrnut.

V přílohách práce jsou pracovní listy, které byly využité ve výuce.

1 Teoretická část

V této části představím teoretické podklady, které jsou potřeba k ukotvení mé práce. Nejprve vymezím, jaký přístup k výuce jsem volila z teoretického hlediska, aby později byly čtenáři zřejmé veškeré pojmy, které se budou nacházet v další části práce. Protože v praktické části se budu zabývat výukou objemů vybraných geometrických těles, představím definice těchto těles v této části. Následně také zmíním, jak objemy těles zavádějí různí autoři v učebnicích. Na závěr je uvedeno trochu z historie objevení Cavalieriho principu, samotný princip je představen a na konec uvádím učebnice konkrétně se věnující Cavalieriho principu.

1.1 Pojmotvorný proces

Součástí poznávacího procesu člověka je vytváření vztahů mezi představami a jazykovými vyjádřeními. Každý člověk si tak ve svém vědomí vytváří pojmy. Tento proces je dlouhodobý a složitý. Touto problematikou se již v historii zabývalo nemálo autorů. Došli tak pro nás důležitým třem myšlenkám:

1. Pojmotvorný proces je možné analyzovat jen jako součást celkového rozvoje psychické struktury člověka.
2. Vznik a přetváření pojmu ve vědomí člověka je důsledkem jeho aktivní činnosti, pomocí kterých se pojem přediferencovává a zvnitřňuje.
3. Během studia je vhodné rozložit pojmotvorný proces na posloupnost geneticky na sebe navazujících etap.

(Hejný & Rybárová, 1984)

Pojmotvorný proces můžeme chápat kvalitativně – tím myslíme abstrakci, na které je daný pojem uložený ve vědomí jedince. Dále je možné na něj nahlížet kvantitativně – množství zkušeností, které jedinec nabyl s daným pojmem. Pojmotvorný proces je potom posloupnost kvalitativních změn, kdy se přechází z nižší abstrakční hladiny na vyšší abstrakční hladinu. Tyto přechody mezi abstrakčními hladinami se nazývají abstrakční zdvihy. Z výše uvedeného vyplývá kritérium, s jehož pomocí rozkládají Hejný a Rybárová (1984) pojmotvorný proces na etapy. Jednou etapou myslí jedno časové období, ve kterém představa o daném pojmu zůstává ve vědomí člověka na určité abstrakční hladině. Celkem uvádí čtyři etapy:

1. Synkretická představa: Z pojmů, které se dostávají do vědomí člověka, se vyčleňuje skupina takových pojmů, které se mají asociovat s budoucím pojmem. Pojem se váže na životní zkušenost, a ještě se neoddělil od blízkých pojmů ani v představě nebo v činnosti.
2. Předmětná představa: Pojem se odděluje od příbuzných pojmů a přediferencovává se, přetváří se, ale i tak je stále úzce spojen s konkrétním předmětem.
3. Intuitivně-abstraktní představa: Pojem se odpoutává od předchozích asociací a přechází k rodícím se abstraktním představám. Manuální operace se nahrazují myšlenkovými operacemi.
4. Strukturální představa: Pojem, který je zde už abstraktní, se stává součástí matematické struktury, stává se prvkem axiomatické teorie.

Každý pojem, který vstupuje do vědomí člověka je relativní. Každý si jej vysvětluje po svém, a proto při učení dojde každý pojem do různé etapy. Pokud během celého procesu vstupování pojmu do jednotlivých etap nemá pojem dostatečnou předmětnou představu nebo se stane, že pojem neprojde všemi etapami, ukládá se do vědomí jako prázdná fráze nebo se ukládá bez dostatečného pochopení (Hejný & Rybárová, 1984).

1.1.1 Teorie generického modelu

Jednou z teorií zabývajících se poznávacím procesem je teorie generického modelu, kterou uvádí kolektiv autorů pod vedením Milana Hejného. Tato teorie vznikala dlouhodobě na základě dlouholetých výzkumů. Je založena na konstruktivismu, což je metodický přístup, který představuje myšlenku, že každý poznatek, který přichází do vědomí žáka, si musí žák sám vybudovat na základě zkušeností. Učitel může k budování poznatku žáka přispět tím, že bude pro něj vytvářet takové prostředí, ve kterém žák dostane vhodné série úloh. Učitel bude také budovat pracovní klima ve třídě a motivovat žáky.

Jak již bylo řečeno, teorie se dlouhodobě vyvíjela. Už mezi lety 1942–1977 se jí zabýval Vít Hejný, otec Milana Hejného. Ten se snažil nalézt metodu, která by vedla ke zlepšení situace u žáků, kteří matematice „nerozumí“. Takoví žáci se snaží způsoby řešení dané látky učit zpaměti místo toho, aby se snažili látce porozumět. Usiloval proto o zlepšení této skutečnosti a hledal způsoby, jak přispět k budování žákových poznatků, a jak je vést k porozumění vztahů mezi nimi. Vít Hejný byl také přesvědčen, že k zefektivnění výuky povede také to, když bude učitel znát zákonitosti poznávacího procesu (Hejný, 2014).

Na tuto práci Víta Hejného pak navazuje jeho syn Milan Hejný a mimo to se inspiruje a přebírá myšlenky od Jeana Piageta (1985), Leva Semionoviče Vygotského (1970, 1976) a dalších autorů, kteří se zabývali touto problematikou (Hejný, 2004).

Milan Hejný vytvořil model mechanismu poznávacího procesu žáka, který pomáhá lépe pochopit, jak žákovy myšlenkové pochody fungují, dále pomáhá při odhalování chyb žáků a k hledání jejich příčin nebo pomáhá ke konstruování reedukačních postupů. Také napomáhá k tomu, aby učitel dokázal ve výuce zvolit vhodné postupy a strategie, které nevedou k formálnímu poznání žáků a vedou k vyšší efektivitě výuky. Během takového učení není důležité jen získání poznatků, ale také všechny proběhlé procesy, které vedou k přebudování pojmu ve vědomí žáka, a také neúspěšné cesty, které vedly za poznáním (Hejný, 2004).

Celý proces poznání a budování matematického poznatku rozděluje Hejný (2004) do série pěti hladin a dvou zdvihů. První hladinou procesu je *motivace*, která má žáka vést k aktivitě. Po ní následuje hladina *izolovaných modelů*, kde žák získává zkušenosti s konkrétními případy budoucího poznatku. Přes první mentální zdvih, který se nazývá *zobecnění*, se dostává poznatek do hladiny *generických modelů*, která je v procesu stěžejním pojmem. Po této hladině následuje další mentální zdvih, jenž je nazýván *abstrakční zdvih*, a ten dostává poznatek do nejvyšší hladiny, kterou nazýváme *abstraktní poznatek*. Pokud dojde k tomu, že se do již vytvořených struktur má zařadit nový poznatek, nazýváme tento proces *krystalizace* (Hejný, 2014; Hejný & Kuřina, 2009). Proces poznání a budování matematického poznatku lze znázornit schématem, viz obrázek 1. Poznávací proces neprobíhá tak, že by poznatek vstoupil do jedné hladiny, ukončil ji a přeskočil do další. Většinou probíhá tak, že vstupuje do několika hladin, kromě motivace, najednou (Hejný, 2004).

<table>
<tr><td rowspan="2">motivace</td><td>→</td><td>izolované modely</td><td>→
zobecnění</td><td>generický model</td><td>→
abstrakce</td><td>abstraktní poznatek</td></tr>
<tr><td colspan="6">krystalizace</td></tr>
</table>

Obrázek 1 Schéma teorie generického modelu (Hejný 2014, str. 73)

Motivace

Motivace stojí na úplném počátku a z toho důvodu hraje důležitou roli v celém poznávacím procesu. Pojem vychází z latinského slova *moveo* = hýbat a *stimeo* = bodat (Hejný, 2014). Motivace by měla u žáka vyvolat rozpor mezi „nevím“ a „chtěl bych vědět“ (Hejný, 2004). Dobrá motivace představuje úspěšný start. Dítě je od přírody zvídavé a má silnou potřebu poznávat věci kolem sebe. Bez touhy po vědění si žák nevytvoří žádné poznatkové struktury, protože k budování poznatků je potřeba, aby se do něj žák sám aktivně zapojil (Hejný & Kuřina, 2015).

Izolované modely

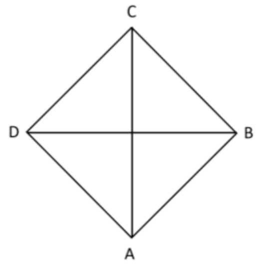
Izolovaný model[1] je konkrétní model naší příští znalosti. V této hladině žáci postupně nabývají zkušeností s konkrétními případy poznatku. V průběhu této etapy projde poznatek několika podhladinami (fázemi). Nejprve dochází k prvotní zkušenosti, setkání s prvním modelem. Těchto modelů přichází postupně více, ale jsou od sebe zatím odděleny, separovány. Některé modely začnou postupně vytvářet strukturu, protože na sebe vzájemně poukazují a shlukují se do skupin. Tato fáze je pro hladinu izolovaných modelů klíčová. V konečné fázi si začne žák uvědomovat, co je podstatou jejich „stejnosti“, a nakonec se začnou ve vědomí žáka vytvářet shluky izolovaných modelů a vytvoří komunity (Hejný, 2004).

Mezi izolovanými modely hrají důležitou roli typy jednotlivých modelů: překvapivý model, zdánlivý model a ne-model.

Překvapivý model je takový model, jehož existenci jsme nepředpokládali. Překvapivým modelem by mohl být čtverec na obrázku 2, protože takový čtverec žáci často považují za kosočtverec.

Zdánlivým modelem nazýváme takový model daného objektu, který se pouze jeví být modelem. Jako příklad můžeme opět využít čtverec na obrázku 2, ale tentokrát by to byl zdánlivý model kosočtverce, protože na obrázku kosočtverec není.

[1] Ve starších publikacích, např. Hejný, Novotná a Stehlíková (2004), uvádí Milan Hejný místo pojmu izolované modely pojem separované modely.



Obrázek 2 Čtverec ABCD – překvapivý model

Ne-modelem rozumíme jev, který není modelem. Rozhodně nepatří do komunity separovaných modelů. Například jím může být ukázka nekonvexního mnohoúhelníku při zavádění pojmu konvexní mnohoúhelník.

Generický model

Když soubor izolovaných modelů vytvoří strukturu, začneme její strukturovaný princip nazývat generickým modelem. Došlo tak k prvnímu mentálnímu zdvihu – zobecnění. Zobecnění nebo též generalizace vychází z poslední podhladiny izolovaných modelů, kdy se spojují a vytváří komunitu. Generalizace je stěžejním momentem celého poznávacího procesu, dodává novou energii v podobě motivace, protože přináší něco nového. Poznatek v hladině generického modelu je prototypem izolovaných modelů, můžeme ho považovat za jejich zástupce (zástupce kteréhokoli prvku). Také dává vhled do komunity prvků a vyjadřuje jejich podstatu. Generický model je stále vázán na názornost. Například prsty mohou být generickým modelem pro počítání, kdy zastupují určitý počet objektů. Stejně tak jimi mohou být návody, grafy, vzorce nebo algoritmy (Hejný, 2004; Hejný & Kuřina, 2009).

Abstraktní poznatek

Generický model je na stejné úrovni abstrakce jako modely izolované. Až posledním mentálním zdvihem – abstrakčním zdvihem – dochází k abstraktnímu poznání, které je často provázeno změnou jazyka. Přechází se od konkrétních modelů a vyjádření do jazyka písmen a symbolů. Žák musí rekonstruovat své dosavadní ukotvení poznatku, což doprovází mnoho změn, a tento proces je pro něj velmi náročný (Hejný, 2004).

S jazykem písmen a symbolů se žáci podrobně seznamují až na druhém stupni základní školy. Jazyk písmen pomůže při hledání generického modelu při přechodu z izolovaných modelů. Tento proces se však nesmí uspěchat, aby žáci porozuměli tomu, proč to tak je.

Proces lze urychlit tím, že učitel představí poznatek žákům sám. To vede však pouze k tomu, že žáci budou schopni řešit pouze podobné úlohy jako příklad, který ukázal učitel sám (Hejný, 2014).

Krystalizace

Krystalizace bývá dlouhodobým procesem. Probíhá během celého poznávacího procesu. Při novém poznání dochází k propojování s již existujícími poznatky nejprve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání (Hejný, 2004). Nový poznatek se napojuje na již vytvořené struktury ve vědomí žáka, a to i ve více oblastech. Vytváří se husté vazby mezi poznatky, které už ve vědomí jsou nebo tam teprve budou (Hejný, 2014).

Ještě by do tohoto procesu mohla spadat automatizace. Hejný (2004) ji do poznávacího procesu nezařazují, i když hraje ve vyučování důležitou roli. „*Automatizace uvolňuje intelektuální energii člověka pro jinou, náročnější činnost*“ (Hejný & Kuřina, 2009, str. 142). Pomáhá eliminovat kalkulativní kroky, které by zvyšovaly kognitivní náročnost úkolu, a je tak možné se soustředit výhradně na vhodnou strategii (Hejný & Kuřina, 2009).

Formální poznatek

Poznatek, který přichází do vědomí žáka zvenčí jako informace, která není konstruována pomocí jednotlivých etap teorie generického modelu, nazýváme formálním poznatkem. Formální znalosti jsou takové znalosti, které jsou uchovávány jako izolovaná fakta, nejsou dostatečně propojena, jsou bez struktury a mají nízkou aplikační sílu (Hejný, 2004). Samozřejmě ne vždy je možné se jim plně vyhnout. Jde především o situace, jako je seznamování s pojmy, například názvy geometrických útvarů. Každý učitel by měl tvorbě formálních poznatků předcházet a v případě jejich vzniku je umět diagnostikovat a reedukovat. Mohlo by se zdát, že do formálních poznatků spadají i zautomatizované postupy. Lze však volbou vhodné série úloh ověřit, jestli jsou dané poznatky opřené o izolované a generické modely. Tipy na takové úlohy nabízí Hejný (2004), str. 40–41.

1.2 Konstruktivismus

V Pedagogickém slovníku se konstruktivismus definuje jako *„široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností.“* (Průcha kol., 2013, str. 132)

Definicí pro konstruktivismus je mnoho, uvnitř něj existuje i mnoho proudů. Například Hejný a kol. rozděluje konstruktivismus na několik proudů na radikální, kognitivní, sociální, pedagogický, didaktický a realistický konstruktivismus (Stehlíková, 2004). Pro tuto práci jsou stěžejní právě poslední dva uvedené proudy.

Hejný a Kuřina (2015) se věnují didaktickému konstruktivismu a ve své práci formulují deset zásad pro vyučování matematice, které nazývají *Desatero didaktického konstruktivismu*:

1. Aktivita – Matematiku chápeme především jako specifickou lidskou aktivitu, tedy nikoli jen jako její výsledek, který se obvykle formuluje do souboru definic, vět a důkazů.
2. Řešení úloh – Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Popsaný proces může probíhat v matematice samé nebo v libovolné jiné oblasti lidského poznání. Tvorba matematických modelů reality je pak jeho součástí.
3. Konstrukce poznatků – Poznatky, a to nejen poznatky matematické, jsou nepřenosné. Přenosné (z knih, časopisů, přednášek a různých médií) jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka. Jsou to individuální konstrukty.
4. Zkušenosti – Vytváření poznatků (např. v oblasti pojmů, postupů, představ, domněnek, tvrzení, zdůvodnění, …) se opírá o informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. Zkušenosti si přináší žák zčásti z kontaktu s realitou svého života, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušeností i ve škole (experimentování, řešení úloh, …)
5. Podnětné prostředí – Základem matematického vzdělávání konstruktivistického typu je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost. Nutným předpokladem toho je tvořivý učitel a dostatek vhodných podnětů (otázky, úlohy, problémy…) na straně jedné a sociální klima třídy příznivé tvořivosti na straně druhé.

6. Interakce – Ačkoli je konstrukce poznatků proces individuální, přispívá k jeho rozvoji sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů…).
7. Reprezentace a strukturování – Pro konstruktivistický přístup k vyučování je charakteristické pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa. Dílčí zkušenosti a poznatky jsou různě orientovány, tříděny, hierarchizovány, vznikají obecnější a abstraktnější pojmy.
8. Komunikace – Pro konstruktivistické vyučování v matematice má značný význam komunikace ve třídě, a pěstování různých jazyků matematiky. Jedním z nich je neverbální vyjadřování, jiným matematická symbolika. Dovednost vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku druhých je třeba systematicky pěstovat.
9. Vzdělávací proces – Vzdělávací proces v matematice je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek. První je porozumění matematice, druhé je zvládnutí matematického řemesla, třetí jsou aplikace matematiky. Pro porozumění matematice má zásadní význam vytváření představ, pojmů a postupů, uvědomování si souvislostí. Rozvíjení matematického řemesla vyžaduje trénink a případně i paměťové zvládnutí určitých pravidel, algoritmů a definic. Aplikace matematiky nemusí být jen vyvrcholením vzdělávacího procesu, mohou hrát roli i motivační. Matematiku se učíme jejich provozováním.
10. Formální poznání – Vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní), vede především k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (např. u zkoušky), obvykle však dochází k jejich rychlému zapomínání a zřídkakdy k jejich netriviálnímu využití. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním formálním.

(Hejný & Kuřina, 2009, str. 194–195)

Žáci by měli mít radost z matematického poznání. Matematika by jim měla přijít smysluplná a užitečná. Měli by cítit potřebu se ji učit. Matematika by měla žáky vést k dobré argumentaci a k rozvoji sociálních schopností. Učitelé by měli žáky podporovat, protože takové úkoly rozhodně není jednoduché zvládnout samostatně. Měl by také pro ně vytvářet vhodné podnětné prostředí.

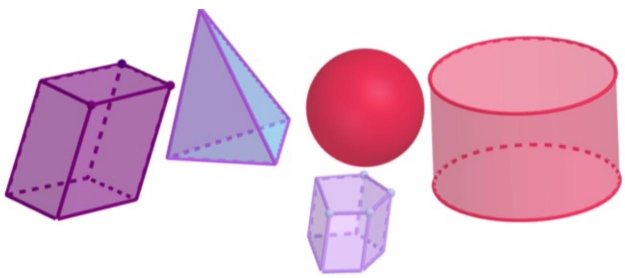
1.3 Transmisivní vyučování

V předchozí kapitole jsem představila konstruktivistický přístup k výuce, který bude i dále v práci zmiňován. Na druhém pólu spektra stojí transmisivní přístup k výuce.

Transmisivní vyučování je podobné behavioristickému přístupu. Výuka se zaměřuje na výkon, a ne na osobnost žáka. Žák zaujímá pasivní roli ve výuce, přijímá znalosti v již hotové podobě od učitele a očekává se od něj, že si co nejvíce zapamatuje a následně bude učivo reprodukovat. Učitel se snaží podat žákovi velký objem informací a snaží se žákům usnadnit učení zpaměti (Hejný a kol., 2014). Transmisivní vyučování může vést k formálním poznatkům. Učitelé zpravidla využívají kombinaci konstruktivistického a transmisivního přístupu, která se nachází na různých částech pomyslného spektra.

1.4 Geometrická tělesa

Geometrické těleso je možné definovat tak, jak ho uvádí Eva Pomykalová: „*Geometrické těleso je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranicí nazývanou také povrchem je uzavřená plocha.*“ (Pomykalová, 1995, str. 123). Mezi geometrická tělesa řadíme například krychli, kvádr, kužel, jehlan, kouli atd. Tyto trojrozměrné útvary mají tři rozměry – délku, šířku a výšku. Můžeme je dělit na dvě kategorie a těmi jsou mnohostěny a rotační tělesa. Příklady mnohostěnů a oblých těles jsou na obrázku 3.



Obrázek 3 Geometrická tělesa

U každého takového tělesa je možné se zabývat jeho povrchem nebo objemem. Uveďme proto, co povrchem a objemem myslíme.

Obsah

U rovinných obrazců určujeme obsah útvaru. Obsah rovinných útvarů můžeme definovat takto:

Obsah S obrazce je kladné číslo přiřazené geometrickému obrazci tak, že platí:

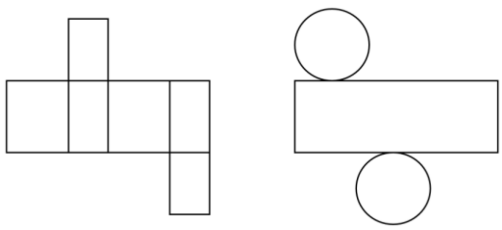
1. Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.
2. Skládá-li se obrazec z několika obrazců, které se navzájem nepřekrývají, rovná se jeho obsah součtu jejich obsahů.
3. Obsah čtverce o straně 1 (mm, cm …) je 1 (mm^2, cm^2, …).

(Pomykalová, 1993, str. 65–66)

Obsahem útvaru tedy myslíme číslo, které určuje velikost ohraničené plochy daným útvarem.

Povrch

Povrch geometrických těles označujeme stejně jako obsah rovinných útvarů písmenem S a rozumíme jím obsah jeho hranice (Pomykalová, 1995, str. 150) neboli obsah jeho sítě. Sítí geometrického tělesa pak myslíme rozvinutí všech ploch, které tvoří povrch tělesa, do roviny. Příklady sítí kvádru a válce jsou na obrázku 4.



Obrázek 4 Síť kvádru a válce

Objem

Objem určujeme u geometrických těles a značíme ho zpravidla písmenem V. Myslíme tím velikost prostoru, které těleso zabírá.

Objem tělesa je kladné číslo přiřazené útvaru tak, že platí:

1. Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.

2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.
3. Objem krychle o straně 1 (mm, cm, …), je roven 1 (mm^3, cm^3, …).

(Pomykalová, 1995, str. 149)

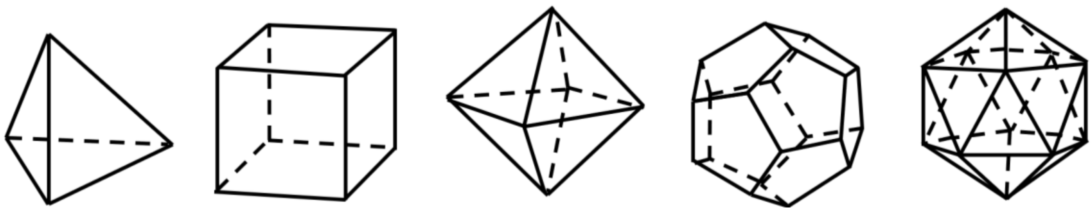
Pro žáky pak objem může znamenat, jakým množstvím látky (například vody nebo vzduchu) se dá těleso naplnit.

Jak již bylo zmíněno, je možné všechna geometrická tělesa rozřadit do dvou kategorií, které v dalším textu popíšu podrobněji.

1.4.1 Mnohostěny

Mnohostěn je geometrické těleso, jehož hranice je tvořena mnohoúhelníky. Žádné dva mnohoúhelníky neleží v jedné rovině a každá strana jednoho mnohoúhelníku je zároveň stranou jiného mnohoúhelníku. Neboli, pokud rozvineme síť mnohostěnu do roviny, bude se jeho síť skládat z několika mnohoúhelníků (Kadleček, 1996, str. 147).

Pravidelný mnohostěn je těleso, jehož všechny stěny jsou shodné mnohoúhelníky a zároveň z jeho každého vrcholu vychází stejný počet hran. Pro pravidelné mnohostěny se také používá označení Platónská tělesa. Platónských těles je právě pět. Jsou to pravidelný čtyřstěn (tetraedr), pravidelný šestistěn (hexaedr), pravidelný osmistěn (oktaedr), pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) a pravidelný dvacetistěn (ikosaedr), viz obrázek 5.



Obrázek 5 Platónská tělesa

Mnohostěny můžeme dále dělit na tělesa hranolového a jehlanového typu.

Hranol

Abychom mohli přesně vymezit pojem hranol, musíme nejprve definovat pojem hranolová plocha (viz obrázek 6):

Nechť je dán konvexní n-úhelník $A_1, A_2, \dots, A_n$ ležící v rovině ρ a přímka s různoběžná s rovinou ρ. Sjednocení všech rovnoběžek s přímkou s protínající hranici mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá hranolová plocha.

(Polák, 2008, str. 517)

Dále určíme, co je hranolový prostor:

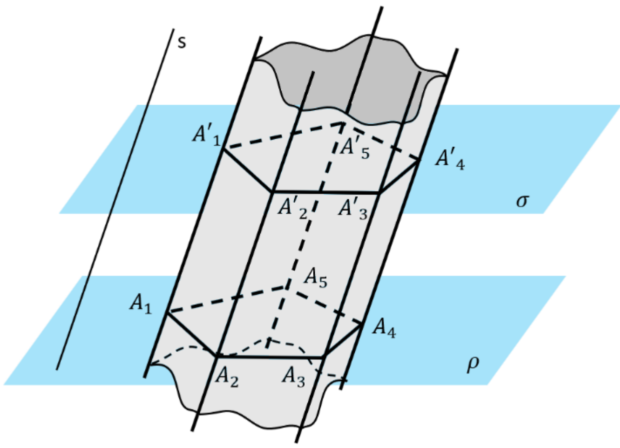
Množina všech přímek rovnoběžných s přímkou s protínající mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá hranolový prostor.

(Polák, 2008, str. 517)

A s pomocí takto definovaných pojmů můžeme konečně zavést hranol:

Průnik tohoto hranolového prostoru a vrstvy s hraničními rovinami ρ a $\sigma \parallel \rho$ $(\sigma \neq \rho)$ se nazývá n-boký hranol.

(Polák, 2008, str. 517)



Obrázek 6 Hranolová plocha

Speciálními případy hranolů jsou pravidelný šestistěn, který nazýváme krychle, a hranol tvořený šesti pravoúhlými čtyřúhelníky, které však nemusí být shodné, a ten nazýváme kvádr. Další typy hranolů se nazývají podle toho, jaký n-úhelník se nachází v podstavě hranolu v definici hranolové plochy. Pro trojúhelník se hranol nazývá trojboký hranol, pro čtyřúhelník se hranol nazývá čtyřboký hranol, pro pětiúhelník je pětiboký hranol atd.

Jehlan

Analogicky jako hranol můžeme zavést i jehlan. Nejprve definujeme jehlanovou plochu (viz obrázek 7):

Nechť je dán konvexní n-úhelník $A_1, A_2, \dots, A_n$ v rovině ρ a bod V, který v této rovině neleží. Sjednocení všech přímek procházejících bodem V a protínající hranici mnohoúhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá jehlanová plocha.

(Polák, 2008, str. 518)

Dále zavedeme jehlanový prostor:

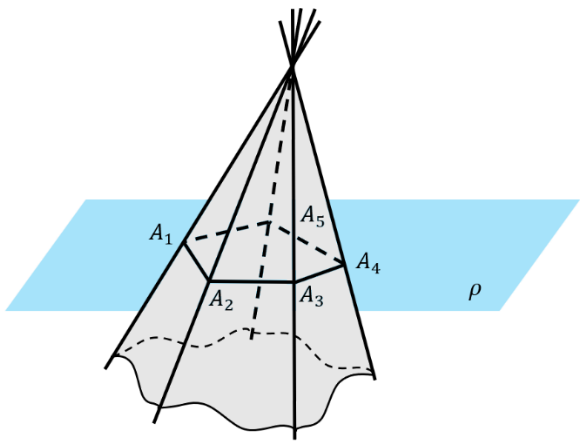
Sjednocení všech přímek procházejících bodem V a protínají mnohoúhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se nazývá jehlanový prostor.

(Polák, 2008, str. 518)

A nakonec definujeme jehlan:

Průnik jehlanového prostoru a prostorové vrstvy, jejímž hraničními rovinami jsou rovina ρ a rovina $\sigma \parallel \rho$ procházející vrcholem V jehlanového prostoru, se nazývá n-boký jehlan.

(Polák, 2008, str. 518)



Obrázek 7 Jehlanová plocha

Nejjednodušším jehlanem je čtyřstěn. Hranice čtyřstěn tvoří čtyři trojúhelníky. Zvolením jednoho z trojúhelníků podstavou získáme trojboký jehlan a zbylé trojúhelníky budou bočními stěnami. Čtyřstěn (nebo také trojboký jehlan) má nejmenší možný počet stěn ze všech jehlanů. Jiné jehlany se pojmenovávají analogicky jako hranoly. Jehlan s postavou trojúhelníku se nazývá trojboký jehlan. Jehlan s podstavou čtyřúhelníku se nazývá čtyřboký jehlan atd.

1.4.2 Rotační tělesa

Rotační tělesa (také někdy nazývaná oblá tělesa) jsou geometrická tělesa, která vznikají rotací rovinného útvaru kolem přímky. Přímku nazýváme osou rotace, přičemž tato osa rotace leží ve stejné rovině jako daný geometrický útvar (Pomykalová, 1995, str. 134–136). Mezi rotační tělesa patří válec, kužel a koule.

Válec

Válec můžeme zavést pomocí kruhové válcové plochy, stejně jako se zaváděly mnohostěny. Poté ukáži, jak se zavádí rotační válec jako speciální případ kruhového válce, který má strany kolmé k podstavám.

Nechť je dána kružnice k v rovině ρ a přímka s různoběžná s rovinou ρ. Sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají kružnici k, se nazývá kruhová válcová plocha. Tyto přímky se nazývají povrchové přímky, kružnice k se nazývá řídící kružnice (viz obrázek 8).

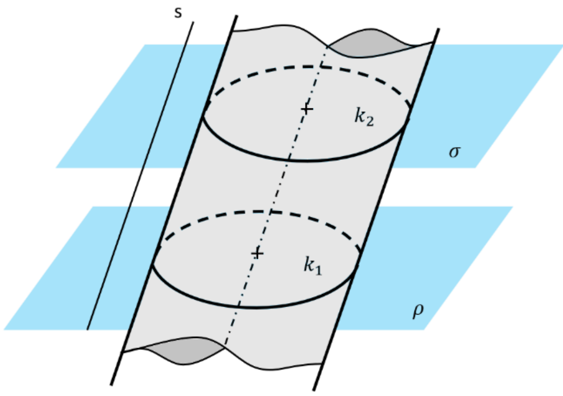
(Polák, 2008, str. 521)

Sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou s a protínají kruh s hranicí k, se nazývá kruhový válcový prostor.

(Polák, 2008, str. 521)

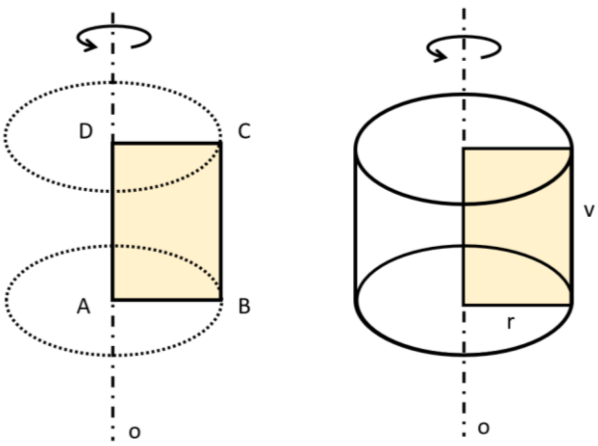
Průnik kruhového válcového prostoru a vrstvy s hraničními rovinami ρ a $\sigma \parallel \rho$ $(\sigma \neq \rho)$ se nazývá kruhový válec. Podstavy tělesa tvoří kruhy, v nichž tyto roviny protínají kruhový válcový prostor. Strany válce jsou úsečky vyťaté rovinami na povrchových přímkách. Plášť válce je množina stran válce. Výška válce je vzdálenost rovin jeho podstav.

(Polák, 2008, str. 521)



Obrázek 8 Kruhová válcová plocha

Rotační válec vzniká rotací obdélníku, případně čtverce, kolem přímky obsahující jednu jeho stranu. Jedna strana obdélníku je výškou válce a druhá jeho strana je poloměrem podstavy válce. Na obrázku 9 je dán obdélník $ABCD$, který rotuje kolem přímky o. Strana AD je výškou rotačního válce. Body B a C vytvoří svou rotací podstavné hrany válce (kružnice). Rotací stran AB a CD vzniknou podstavy válce a rotací strany BC vznikne plášť. Úsečka AB je poloměrem válce, její dvojnásobek je průměrem válce. Polohy úsečky BC v jednotlivých místech rotace se nazývají strany válce.



Obrázek 9 Vznik rotačního válce

Kužel

Kužel opět stejně jako válec nejprve definuji pomocí kuželové plochy a poté jako rotační těleso (speciální případ kruhového kuželu).

Nechť je dána kružnice k v rovině ρ a bod V, který v rovině neleží. Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají kružnici k, se nazývá kruhová kuželová plocha. Bod V se nazývá vrchol kuželové plochy (viz obrázek 10).

(Polák, 2008, str. 521)

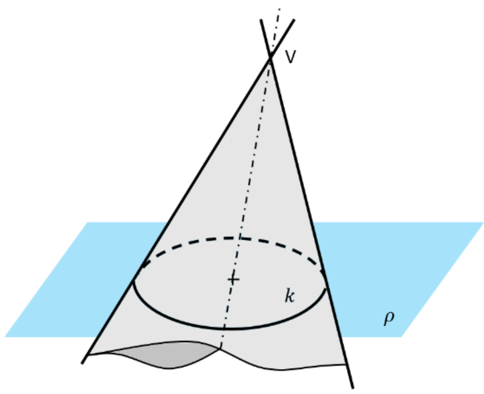
Sjednocení všech přímek, které procházejí bodem V a protínají kruh s hranicí k, se nazývá kruhový kuželový prostor.

(Polák, 2008, str. 521)

Kruhový kužel je těleso, které tvoří část kruhového kuželového prostoru. Je omezená kruhovou kuželovou plochou a rovinou, která je různoběžná s přímkami kuželové plochy, ale neprochází jejím vrcholem V. Vyplňují jej tedy všechny úsečky, jejichž jeden krajní bod je ve vrcholu V a druhými krajními body jsou jednotlivé body řídícího kruhu.

Podstava kužele je řídící kruh. Strany kužele jsou úsečky, jejichž jeden krajní bod je ve vrcholu V a druhý na řídící kružnici. Plášť tvoří množina stran kužele. Výškou rozumíme úsečku spojující vrchol kužele a patu kolmice spuštěné z něho na rovinu podstavy. Rotační kužel je speciální případ kruhového kužele.

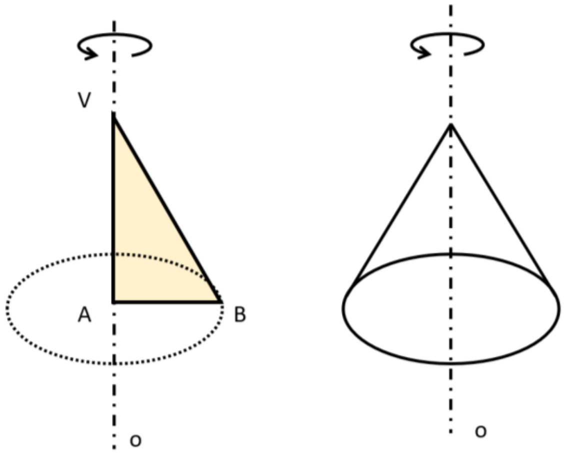
(Polák, 2008, str. 521–522)



Obrázek 10 Kruhová kuželová plocha

Rotační kužel stejně jako rotační válec vzniká rotací rovinného útvaru kolem osy. Zde rotuje pravoúhlý trojúhelník kolem přímky, která obsahuje jednu jeho odvěsnu, jak je ukázáno na obrázku 11. Pravoúhlý trojúhelník ABV rotuje kolem osy o. Bod V je vrcholem kuželu. Rotací bodu B vzniká podstavná hrana a rotací strany AB podstava kuželu. Délka odvěsny

AB je poloměrem podstavy. Plášť kuželu vzniká rotací přepony BV a jednotlivé polohy v rotaci přepony BV nazýváme strany kuželu.



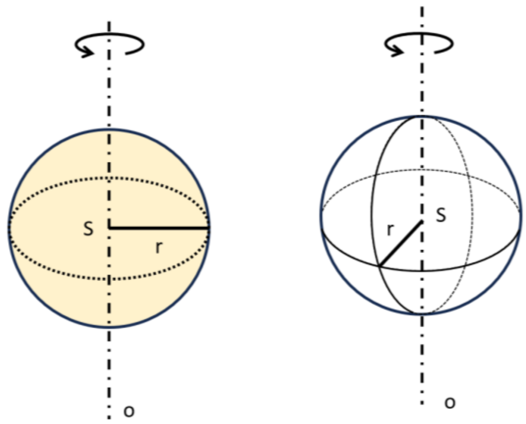
Obrázek 11 Vznik rotačního kuželu

Koule

Kulová plocha je množina bodů v prostoru, které mají od pevného bodu S stejnou vzdálenost $r > 0$. Bod S je středem kulové plochy a r jejím poloměrem. Značí se $\kappa(S; r)$

(Polák, 2008, str. 522)

Koule jako rotační těleso vzniká rotací kruhu kolem přímky (osy rotace) procházející jeho průměrem, viz obrázek 12. Střed kruhu je zároveň středem koule. Zároveň také poloměr kruhu je poloměrem koule. Hranicí koule (nebo též povrch koule) je kulová plocha, která vznikla rotací kružnice kolem osy rotace. Průměr koule je každá úsečka, jejíž krajní body leží na kulové ploše a zároveň obsahuje střed koule.



Obrázek 12 Vznik koule

1.5 Zavádění geometrických těles ve výuce

V předchozím oddíle jsem představila, jak je možné jednotlivá tělesa definovat. Zde se budu věnovat tomu, jaké jsou možné způsoby výuky zavádění těchto těles.

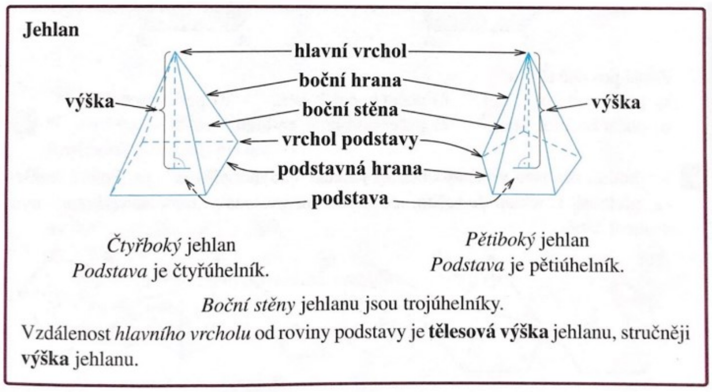
Jedním ze způsobů je transmisivní přístup. Žákům se předloží tělesa a učitel představí formou výkladu požadovaná geometrická tělesa, doplní jej o demonstrativní obrázky a ukázky modelů nebo třeba zabrousí i k informačním technologiím a využije interaktivní tabuli k zajímavým cvičením. Většinu aktivní role zastává učitel, žák je v pasivní, přijímající pozici. Jednotlivé vztahy pro výpočty povrchů a objemů jsou žákům předány, možná i doplněny o jejich důkazy, ale pouze informativně a po žákovi se nepožaduje, aby jim porozuměl. Důležitější je, aby si vzorečky zapamatoval a uměl je použít v následujících aplikačních úlohách.

Jinou možností výuky je konstruktivistický přístup. Během takové výuky jsou žákům taktéž předkládaná tělesa, ale učitel je ve výuce spíše jako facilitátor nebo moderátor a žáci odhalují dané vztahy, která pro tělesa platí. Samozřejmě pojmy vztahující se k tělesům objevit nelze. Aktivní část výuky přebírají žáci a podílejí se na ní. Žáci jsou vedeni k tomu, aby porozuměli, dostali vhled do problematiky a uměli je následně i využívat. Mezi konstruktivistické přístupy se řadí teorie generických modelů od profesora Milana Hejného a kolektivu autorů. V dalším textu se budu již výhradně věnovat výuce s konstruktivistickým přístupem.

V následujících oddílech představím, jak je možné se ve výuce zavádět vybraná geometrická tělesa. Budu převážně vycházet z učebnic *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 2. díl* (Odvárko & Kadleček), *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Jehlany a kužely* (Herman a kol.) učebnice H-mat (Hejný a kol.) *Matematika 9 pro ZŠ a víceletá gymnázia – Geometrie učebnice* (Binterová a kol.), *Matematika pro gymnázia: stereometrie* (Pomykalová) *Matematika pro střední školy – 6. díl: Stereometrie – učebnice* (Vondra). V těchto oddílech pouze uvedu, jaké jsou možnosti zavádění těles, čtenář se pak může na podrobné rozpracování podívat do uvedených publikací, na které odkazuji.

1.5.1 Jehlan

Nejprve je při výuce důležité žáky motivovat k tématu. To můžeme provést tak, že žákům těleso představíme buď na obrázku nebo jako model nebo klidně kombinací obojího. Stejně jako nabízí učebnice, je pak vhodné nechat žáky, aby nacházeli ve svém okolí, nebo pátrali ve své paměti, kde se jehlan kolem nich vyskytuje. Mohou tím být střechy hradů nebo věží (Trejbal, 1999) nebo třeba také pyramidy. Dále můžeme navázat popisem částí jehlanu, například tak, jak je uvádí Odvárko a Kadleček (2013), viz obrázek 13.



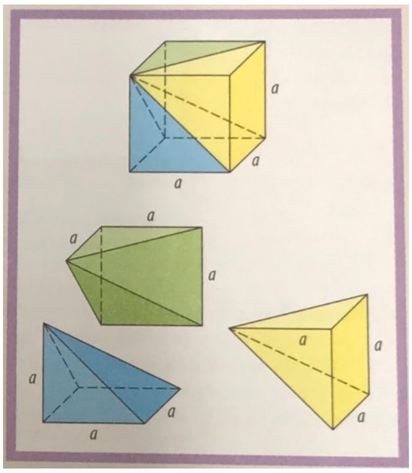
Obrázek 13 Části jehlanu (Odvárko & Kadleček, 2013, str. 5)

Povrch jehlanu

Všechny uvedené učebnice přistupují k zavádění povrchu jehlanu stejně. Nejprve čtenáře seznámí se sítí jehlanu, poté spočítají obsah plochy vyznačené touto sítí. Nakonec vztah zobecní, protože každý jehlan má pokaždé jiný počet částí a tvoří je různé geometrické útvary, do vzorce $S = S_p + S_{pl}$, kde S_p značí obsah podstavy jehlanu a S_{pl} obsah pláště.

Objem jehlanu

K objemu jehlanu přistupují všechny učebnice podobně. Všechny vybrané učebnice se shodují v tom, že názorně ukazují, že tři shodné jehlany zaplní celý objem kvádru (krychle), a buď rovnou takový model představují (viz obrázek 14), nebo alespoň žáky nabádají, ať si ověří na školním modelu, že to platí (Trejbal, 1999, str. 24).



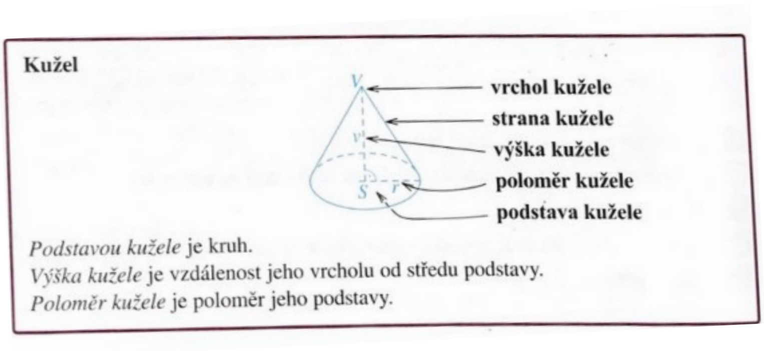
Obrázek 14 Krychle rozdělená na tři shodné jehlany (Vondra, 2014, str. 59)

Z poznatku, že se objem kvádru dá rozdělit na tři shodné jehlany vyvozují, že objem jehlanu spočítáme jako objem kvádru, a protože hranoly již žáci znají, přechází k výpočtu objemu jehlanu: $V = \frac{1}{3}S_p v$, kde S_p je obsah podstavy a v výšky jehlanu, která je shodná s výškou kvádru.

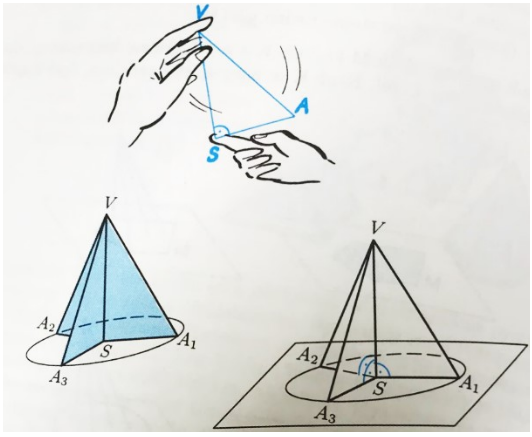
Jiný přístup k objemu jehlanu uvádí Pomykalová (1995) a učebnice H-mat od Hejného a kol. Jejich přístup více popíšu v oddíle 1.8.

1.5.2 Kužel

Úvod k tělesu kužel opět všechny učebnice začínají motivací, stejně jako u jehlanu, hledáním objektů v okolí s daným tvarem a pokračují popisem jeho částí (viz obrázek 15). Speciální částí, kterou kužel má a není zcela intuitivní ji pojmenovávat, je strana kuželu. Herman a kol. (2001) nabízí žákům vyzkoušet si, jak vzniká rotační kužel. Využívá k tomu pravoúhlý trojúhelník AVS (viz obrázek 16), který když nechá rotovat kolem odvěsny VS, vzniká kužel.



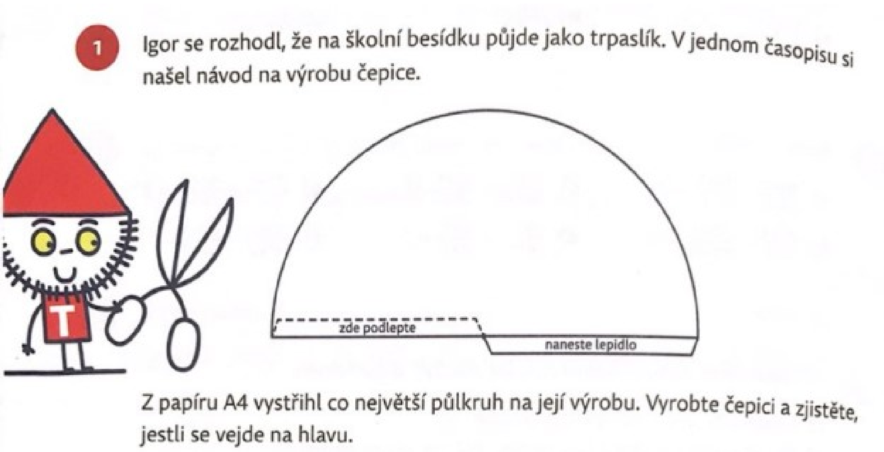
Obrázek 15 Části jehlanu (Odvárko & Kadleček, 2013, str. 16)



Obrázek 16 Rotační kužel vzniklý z pravoúhlého trojúhelníku AVS (Herman a kol., 2001, str. 80)

Povrch kuželu

Povrch kuželu se opět pojí se sítí a počítáním obsahu sítě. Síť kuželu se skládá z kruhu a kruhové výseče. Motivací pro síť kuželu může být pro žáky třeba výroba čepičky, jak ukazuje Hejný a kol. (2017), viz obrázek 17. S kruhovou výsečí se žáci do té doby nesetkali a je pro ně novým pojmem. Spočítat obsah kruhu není problém. Na obsah kruhové výseče používají učebnice různé přístupy.



Obrázek 17 Výroba čepičky (Hejný a kol., 2017)

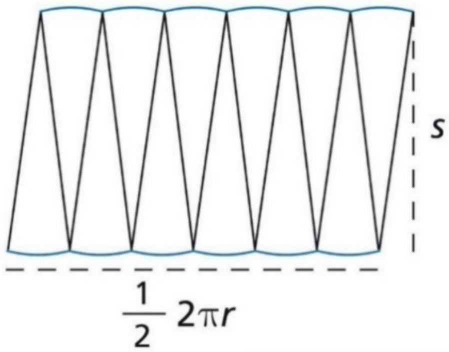
Herman a kol. (2001) a Odvárko a Kadleček (2013) odvozují obsah kruhové výseče pomocí poměru podobnosti (přímá úměrnost), kde dávají do poměru obsah pláště s obsahem celého kruhu (πs^2), ze kterého je vyříznuta kruhová výseč, poloměrem je délka strany s kuželu, a poměr délky oblouku kruhové výseče ($2\pi r$) a obvodu kruhu kruhové výseče ($2\pi s$). Poměry podobnosti jsou stejné, je možné přejít k rovnosti:

$$S_{pl} : \pi s^2 = 2\pi r : 2\pi s$$

$$S_{pl} = \pi r s$$

Počítání obsahu pláště za pomoci obloukové míry (poměru velikosti úhlu ku celému kruhu) uvádí Pomykalová (1995) a Hejný a kol. (2017). V případě Hejného a kol. (2017) žáci z uvedených izolovaných modelů odvodí vztah pro vyjádření úhlu, Pomykalová (1995) bez odvození uvádí vztah $\varphi = \frac{2\pi r}{s}$ a z toho dochází k vyjádření vztahu pro obsah pláště.

Zcela jiný přístup uvádí Binterová a kol. (2010). Kruhovou výseč rozdělují na menší kruhové výseče, „*skoro trojúhelníky*“ (Binterová a kol., 2010, str. 27). Pokud se výseče vhodně přeskládají, vznikne kosodélník, jak je vidět na obrázku 18. Spočítat obsah takového útvaru je pro žáky snadné. Stejný postup přeskládání uvádí i Hejný a kol. v příručce pro učitele (2019).



Obrázek 18 Rozdělení pláště kuželu na "skoro trojúhelníky“ (Binterová a kol., 2010, str. 27)

Objem kuželu

Objem kuželu většina učebnic uvádí jako zobecnění objemu jehlanu tak, že se zvětšuje počet vrcholů mnohoúhelníku v podstavě jehlanu. Čím více vrcholů bude mít, tím bude podobnější kruhu. Proto se objem kuželu počítá $V = \frac{1}{3} S_p v$, kde $S_p = \pi r^2$ je obsah podstavy (kruhu) a v je výška kuželu.

Stejným způsobem k odvození přistupuje i učebnice Hejného a kol. (2017), ale s tím rozdílem, že jim pouhé konstatování faktu nepostačuje a postava Elmara v učebnici vyzívá, aby žáci ověřili vztah „Cavalierim“.

1.5.3 Koule

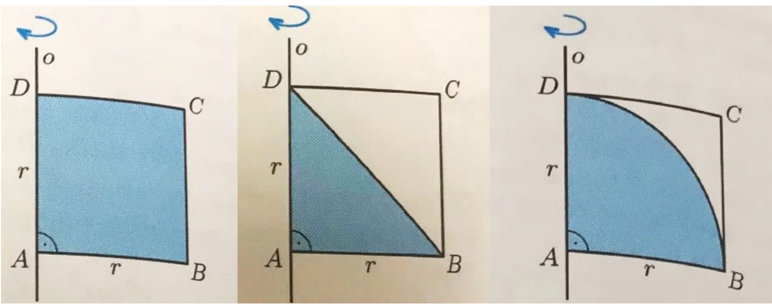
Koule je opět zaváděna pomocí motivace hledáním objektů ze zkušeností žáka, které mají tvar koule. Některé učebnice popisují, jak koule vzniká – rotací kruhu nebo půlkruhu (Trejbal, 1999; Herman a kol., 2001).

Protože většina učebnic nejprve zavádí objem koule, uvedu zde také opačné pořadí zavádění pojmů objem a povrch koule.

Objem koule

Některé učebnice předávají vzorec pro výpočet objemu koule bez zdůvodnění (např. Vondra, 2014 nebo Trejbal, 1999). Trejbal (1999) dokonce uvádí, že ho pouze přijmeme za správný, protože žáci nejsou v tuto chvíli schopni vztah odvodit.

Další učebnice se pokouší alespoň o úvahu s odhadem. Příkladem toho je učebnice od Hermana a kol. (2001). Nejprve připomínají, že rotací čtverce kolem jedné jeho hrany vzniká rotační válec o objemu $V = \pi r^2$. Pokud stejným způsobem necháme rotovat polovinu čtverce, který uřízneme po jeho úhlopříčce, vznikne rotační kužel o objemu $V = \frac{1}{3}\pi r^3$. Pokud ve čtverci sestrojíme čtvrtkruh, jako je na obrázku 19, dostaneme těleso, jehož objem bude menší než objem válce a zároveň větší než objem kuželu.

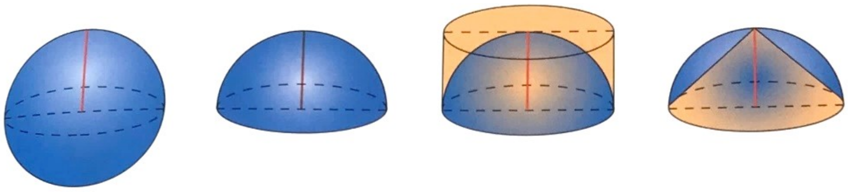


Obrázek 19 Rotace čtverce, trojúhelníku a čtvrtkruhu (Herman a kol., 2001, str. 118)

Rotací čtvrtkruhu získáme polokouli, proto budeme uvažovat dvojnásobky uvedených objemů: $\frac{2}{3}\pi r^3 < V_{koule} < 2\pi r^2$. Bez důkazu pak uvádí, že *„chyby‘ obou odhadů jsou stejné, neboť objem V je aritmetickým průměrem obou nalezených hodnot*“ (Herman a kol., 2001, str. 119) a dostávají vztah pro objem koule $V = \left(\frac{2}{3}\pi r^3 + 2\pi r^2\right) : 2 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Pomykalová (1995) a Hejný a kol. (2017) se svým přístupem odlišují, více v oddíle 1.8.

Binterová a kol. (2010) naznačují, jak je možné k výpočtu objemu koule dospět, ale neodvozují ho s tím, že se odvození žáci naučí, pokud půjdou na střední školu. Objem odhadují z objemu válce, který lze opsat polokouli a z objemu kuželu, který lze polokouli vepsat. Pro názornost uvádí pouze obrázek 20.



Obrázek 20 Odhad objemu koule (Binterová a kol., 2010, str. 31)

Povrch koule

Zavedení povrchu koule opět někteří autoři nechávají bez zdůvodnění (např. Bitnerová a kol., Vondra, Odvárko & Kadleček). Problémem, který u povrchu koule nastává, je to, že koule nemá síť, není možné ji rozvinout do roviny.

Nejvíce učebnic uvádí postup s rozdělením koule na n shodných čtyřbokých jehlanů s výškou poloměru koule (viz obrázek 21). Protože jsou jehlany malé, můžeme jejich podstavy považovat za rovinné. Povrch celé koule je rozdělen na podstavy jehlanů a objem koule rozřezán na několik jehlanů. Vzhledem k tomu, že jen změníme uspořádání objemu (kouli rozebereme na jehlany), se velikost objemu nezmění. Proto součet objemů jehlanů a objem koule je stejný. Dále víme, že součet obsahů podstav všech jehlanů tvoří povrch celé koule. Na konec jde jen o úpravu rovnice:

$$V_k = V_{j1} + V_{j2} + \cdots + V_{jn}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}S_{p1}v + \frac{1}{3}S_{p2}v + \cdots + \frac{1}{3}S_{pn}v$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}S_{p1}r + \frac{1}{3}S_{p2}r + \cdots + \frac{1}{3}S_{pn}r$$

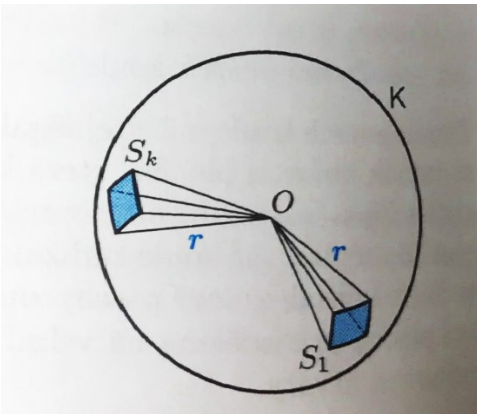
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}r\left(S_{p1} + S_{p2} + \cdots + S_{pn}\right)$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rS_k$$

$$S_k = 4\pi r^2,$$

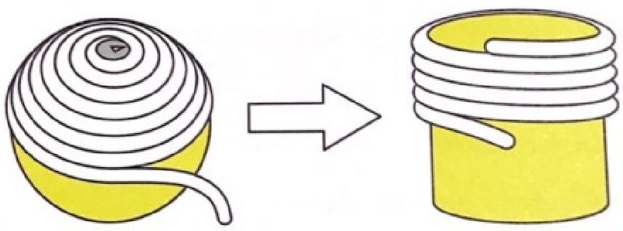
kde V_k je objem koule, S_k je povrch koule, V_{ji} je objem jehlanu, pro $i = 1, \dots, n$, S_{pi} je obsah podstavy jehlanu, pro $i = 1, \dots, n$, v je výška jehlanu a r je poloměr koule.

U této úpravy bychom mohli namítat, že podstava jehlanů je rovná, a ne zakřivená jako je povrch celé koule. Tento problém vyřešíme tím, že jehlany budeme úvahou postupně zmenšovat. Použijeme infinitezimální představu k tomu, aby podstavy jehlanů byly tak malé, že se celý povrch vyhladí a ztratíme tím chybu vzniklou z rovinných podstav (Herman a kol., 2001; Trejbal 1999; Hejný a kol., 2018).



Obrázek 21 Koule rozřezaná na n jehlanů (Herman a kol., 2001, str. 120)

Hejný a kol. (2018) ukazuje ještě jiný způsob hledání povrchu koule, a to pomocí experimentu za pomoci modelu koule, válce a provázku. Válec má stejnou výšku jako má koule průměr. Pomocí provázku omotáme celou kouli a provázek poté namotáme na připravený válec, viz obrázek 22. Žáci pak zjišťují, do jaké výšky se omotá válec provázkem. Protože žáci znají vztah pro výpočet povrchu válce a při přesném omotání bude provázek dosahovat do výšky průměru koule, tedy $2r$, získáme z toho vztah pro výpočet povrchu koule: $S = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$.



Obrázek 22 Namotávání provázku na kouli (Hejný a kol., 2018, str. 30)

1.5.4 Cavalieriho princip pro zavádění objemů těles

Jiný způsob, který učebnice od Evy Pomykalové a Milana Hejného a kol. odlišují, je Cavalieriho princip. Pomocí tohoto principu je možné odvodit objemy těles se žáky na úrovni základní školy. Uvedu nejprve jeho znění pro tělesa:

Dána jsou dvě tělesa a rovina ω. Jestliže každá rovina, rovnoběžná s ω protne dvě tělesa v útvarech stejného obsahu, pak je objem obou těles stejný.

(Hejný a kol., 2016, str. 55)

Cavalieriho princip má poměrně mladou, ale přesto zajímavou historii. Jak je možné zavést pomocí něj objemy těles představím až v oddíle 1.8 poté, co uvedu, jak se k němu jeho autor Bonaventura Cavalieri dostal.

1.6 Bonaventura Cavalieri

O životě Bonaventury Cavalieriho píše ve své knize *Cavalieri's Method of Indivisibles* Kristi Andersen (1984, str. 292–301), jeho dílem je tento a následující oddíl inspirovány.

Bonaventura Cavalieri, který žil v 17. století, se nejvíce proslavil svou metodou nedělitelných. Myšlenky této metoda ale nejsou až tolik známé, to především proto, že autoři, kteří se zabývali obecným vývojem analýzy v 17. století, psali především o infinitesimálech. Někteří dokonce když prezentovali Cavalieriho metodu, prezentovali ji tak zjednodušeně, že neodrážela jeho původní záměry.

Vše, co o Cavalieriho životě víme, pramení především z jeho dopisů s Galileem Galilei a s dalšími kolegy, z několika oficiálních dokumentů a od jeho prvního životopisce a žáka Urbana Davisa.

Cavalieri se narodil kolem roku 1598 v Miláně a už jako chlapec se seznámil s poměrně malým mužským řádem jezuitů. V roce 1615 vstoupil do tohoto řádu a při té příležitosti přijal křestní jméno Bonaventura. V jezuitském klášteře v Pise se stal žákem Benedetta Castelliho a následně i samotného Galilea Galileiho.

Kniha, která proslavila Cavalieriho mezi matematiky, byla *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*[2] (Bologna, 1635), zkráceně *Geometria*.

[2] Geometrie nedělitelných kontinuí představována novým způsobem (přeloženo)

Publikací na toto téma bylo v té době málo, proto vzbudila pozornost dalších matematiků. *Geometria* obsahuje začátky metody nedělitelných a teorémy týkající se této metody. Krátce před svou smrtí Cavalieri publikoval další práci o nedělitelných *Exercitationes geometricae sex*[3].

Vydání knihy *Geometria* v roce 1635 bylo vyvrcholením delšího procesu, na kterém Cavalieri pracoval, a odhaluje tak zajímavý vznik metody nedělitelných. Bylo to na počátku 20. let 17. století, kdy Cavalieri dostal nápad použít nedělitelných při porovnání dvou obsahů a dvou objemů (Andersen, 1984, str. 292–296).

1.6.1 Metoda nedělitelných

Záměrem Cavalieriho metody nedělitelných bylo poskytnout nástroj pro kvadratury a kubatury (obsahy a objemy) obrazců. Jeho metoda byla nová, ale jeho představy o kvadraturách a kubaturách byly založeny na řecké teorii velikostí. Řečtí matematici dělili matematické objekty do různých kategorií. Pro Cavalieriho byly důležité kategorie obsahující přirozená čísla a tři kategorie obsahující jednorozměrné, dvourozměrné a trojrozměrné geometrické útvary. Dva objekty ze stejné kategorie jsou stejného druhu a lze je různě kombinovat a skládat. Dané kombinace a vztahy nebyly definovány, ale některé z jejich vlastností byly postulovány v Euklidových *Základech*.

Řecký koncept čísel neumožňoval míry jako délka, plocha a objem zapisovat čísly. Proto provést kvadraturu nebo kubaturu znamenalo pro řecké matematiky najít poměr mezi hledaným údajem a „známým“ údajem.

Cavalieri se inspiruje řeckými matematiky a ve své knize *Geometria* představuje svůj koncept „všech přímek“ (*omnes lineae*)[4]:

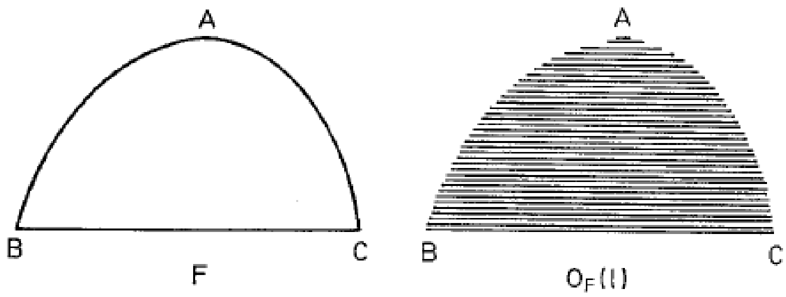
Jsou-li mezi rovnoběžkami sestrojeny libovolné dva rovinné obrazce a jestliže všechny přímky ve stejné vzdálenosti od rovnoběžek protínají obrazce ve stejně velkých částech, jsou si obrazce navzájem rovny. Jsou-li mezi dvěma rovinami sestrojeny libovolné dva objemové

[3] Šest geometrických cvičení (přeloženo)
[4] Dnes tento koncept nazýváme Cavalieriho principem.

obrazce a jestliže všechny roviny sestrojené ve stejné vzdálenosti od rovnoběžných rovin protínají obrazce a jsou roviny jimi protnuté stejné, jsou si dané obrazce sobě rovny[5].

Hlavní myšlenkou konceptu „všech přímek“ je určení nedělitelných figur, které jsou základem Cavalieriho definice nedělitelných. Znamená to, že geometrické objekty lze generovat pohybem. V případě rovinného obrazce to lze provést pohybem přímky rovnoběžné se sebou tak, aby protínala daný obrazec. Průsečíky mezi pohybující se přímkou a obrazcem jsou, řečeno Cavalieriho terminologií, „všechny přímky“ obrazce, tedy její nedělitelné. Stejně tak pro tělesa jsou „všechny roviny“, které získáme průsečíkem pohybující se roviny s tělesem, jeho nedělitelné.

Uvažujme-li rovinný útvar $F = ABC$, viz obrázek 23, a přímka BC je *regulou* určující směr v rovině F, pak všechny přímky v rovině F rovnoběžné s přímkou BC tvoří soubor tětiv v rovině F. Tuto množinu tětiv autor označuje jako $O_F(l)$ (Andersen, 1984, str. 299–301).



Obrázek 23: Řez útvarem F (Andersen, 1984, str. 301)

1.7 Cavalieriho princip

Jak už bylo zmíněno, znění Cavalieriho principu sepsal sám Cavalieri ve své knize *Geometria* jako koncept „všech přímek“. Dnes je známý v upravené podobě a v různých variantách. Uvedu tedy některé z nich.

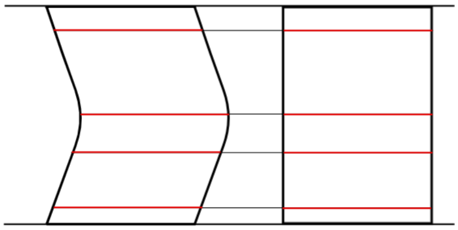
---

[5] Datae planae figurae cucantur duo plana inuscem paralela, recta, fiue inclinata ad planum datae figurae, hinc inde indefinité producta; quorum alterum moueatur verfus reliquum eidem femper aequiditans donec illi congruerit: fingulae rectae lineae, quae in toto motu fiunt communes fectiones plani moti, & datae figurae, fimul collectae vocentur: Omnes lineae tallis figurae, fumptae regula una earundem; & hoc cum plana funt recta ad datam figutam: Cum veró ad illam funt inclinata vocentur. Omnes linee eiufdem obliqui tranfitus datae figurae, regula pariter earundem una. (Cavalieri, 1653, str. 99)

1.7.1 Cavalieriho princip v rovině

Gray (1987, str. 13) vyjadřuje Cavalieriho princip pro dvě dimenze takto: „*Princip tvrdí, že dva rovinné obrazce mají stejný obsah, pokud leží mezi dvěma rovnoběžkami, a jakákoli přímka sestrojená rovnoběžně se dvěma danými rovnoběžkami vytne dvě stejné tětivy v obou obrazcích.*“

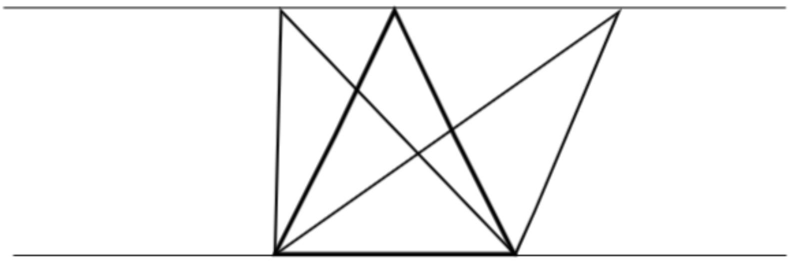
Na obrázku 24 můžeme vidět ilustraci Cavalieriho principu pro dva rovinné obrazce.



Obrázek 24 Ilustrace Cavalieriho principu ve dvou dimenzích

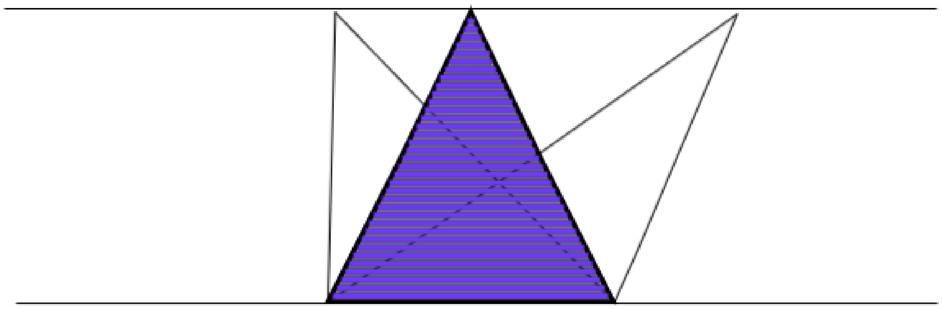
Obsah trojúhelníků

Cavalieriho princip se lehce ukáže při zkoumání obsahů trojúhelníků, které jsou stejně jako na obrázku 24 ohraničené dvěma rovnoběžkami. Takové trojúhelníky můžeme vidět na obrázku 25.



Obrázek 25 Trojúhelníky mezi rovnoběžkami

Podívejme se na ně z pohledu Cavalieriho. Všechny trojúhelníky mají stejnou základní stranu (leží na jedné z rovnoběžek). Pokud bychom si představili, že například prostřední trojúhelník rozdělíme pomocí metody nedělitelných na jednotlivé tětivy (viz oddíl 1.6.1), můžeme jednotlivými tětivami lehce posunout doleva nebo doprava, a tím nám vzniknou trojúhelníky vlevo a vpravo. Rozdělení na tětivy je vidět na obrázku 26. Všechny trojúhelníky mají stejnou výšku, žádná z tětiv nezmizí, nebude zakryta nebo nevznikne prázdná mezera.

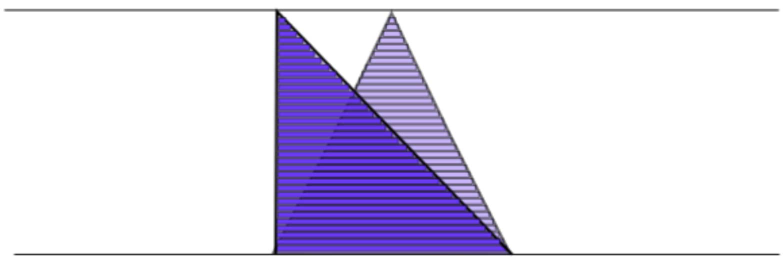


Obrázek 26 Rozdělení trojúhelníku na jednotlivé tětivy

Můžeme tedy říct, že všechny tyto trojúhelníky mají stejný obsah.

Tato představa, viz obrázek 26, pracuje s konečným počtem tětiv. Můžeme ale myšlenku rozvést dále a mezi každé dvě tětivy vložit další a mezi ně vložit další, až se dostaneme na úroveň infinitezimálních rozměrů. Tětivy tedy zaplní celý prostor trojúhelníku.

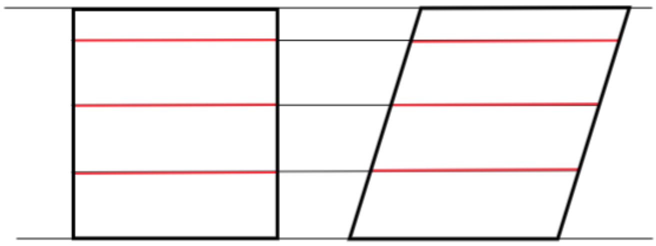
Takovýto trojúhelník bude mít i stejný obsah s pravoúhlým trojúhelníkem se stejnou základnou, jak vidíme na obrázku 27.



Obrázek 27 Pravoúhlý trojúhelník

Rovnoběžníky

Obdobně můžeme Cavalieriho princip ukázat na dvojici rovnoběžníků, viz obrázek 28. Oba rovnoběžníky jsou ohraničeny dvěma rovnoběžkami, mají stejnou výšku i stejně dlouhou základnu. Každá přímka rovnoběžná s rovnoběžkami protíná rovnoběžníky ve stejně velkých tětivách. Nejlépe je to vidět na stranách, které leží na rovnoběžkách. Rovnoběžníky tedy mají stejně velký obsah.



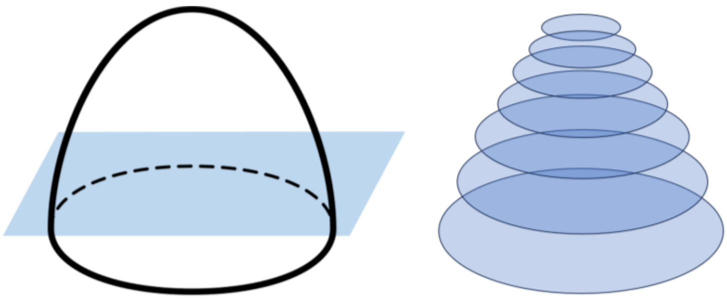
Obrázek 28 Rovnoběžníky

Jak vidíme, k určování obsahů trojúhelníků, které jsou ostroúhlé nebo tupoúhlé, a k určování kosodélníků není potřeba znát složitý vzorec pro výpočet. Stačí myšlenka, která tu už je od 17. století, a umět vypočítat obsah pravoúhlého trojúhelníku a obdélníku. A kdybychom šli ještě dál, tak vlastně ani obsah pravoúhlého trojúhelníku nepotřebujeme znát, protože je to jen polovina obdélníku. Takto jsme tedy zredukovali nemalé množství vzorců na obsah obdélníku a jednu úvahu, která je stále stejná.

1.7.2 Cavalieriho princip v prostoru

V knize *Geometria* zavedl Cavalieri koncepty, které mohou být použity při výpočtech a úvahách v prostoru. Jde spíše o zobecnění toho, co bylo ukázáno na útvarech v rovině.

Pro řešení objemů pevných těles v prostoru si Cavalieri představoval soubor rovnoběžných rovin (Definice 11.2 v *Geometrii*). Dále si představoval, že se jedna tečná rovina pohybuje směrem k druhé, přičemž s ní stále zůstává rovnoběžná. Všechny průsečíky vzniklé protnutím pohybujících se rovin a tělesa bere Cavalieri jako koncept „všech rovin“. Ukázka „všech rovin“, jak je zamýšlel Cavalieri, je na obrázku 29.



Obrázek 29 "Všechny roviny" tělesa podle Cavalieriho

Cavalieri se především zajímal o případ, kdy průsečíky rovnoběžných rovin a tělesa jsou čtverce a porovnával jejich obsahy. Všiml si, že čtverce jsou sobě podobné a ze vztahu pro poměr mezi objemy útvaru, který je stejný jako poměr obsahů jejich průsečíků s rovinami neboli

$$V_1 : V_2 = \mathrm{O}_{\mathrm{F}_1}(l) : \mathrm{O}_{\mathrm{F}_2}(l),$$

(V_i označuje objem $i$tého geometrického útvaru)

($\mathrm{O}_{\mathrm{F}_\mathrm{i}}(l)$ libovolnou rovinu ze „všech rovin" útvaru)

došel k podobnému vztahu, který vyjadřuje poměry mezi útvarem a obsahem čtverce

$$A_1 : A_2 = S_{l_1} : S_{l_2}$$

(A_i označuje soubor všech podobných a rovnoběžných obrazců $\mathrm{O}_\mathrm{F}\big(A(i)\big)$)

($\mathrm{S}_{\mathrm{l}_i}$ označuje obsah čtverce s délkou strany l_i).

(Andersen, 1984)

Pro objemy můžeme princip uvést následovně:

Pokud objemy leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami (tedy mají stejnou výšku) a jakýkoli řez rovinou rovnoběžnou s rovinou společné základny obou těles tvoří průřezy se stejným poměrem, pak jsou tělesa ve stejném poměru jako řezy.

1.8 Cavalieriho princip v učebnicích matematiky

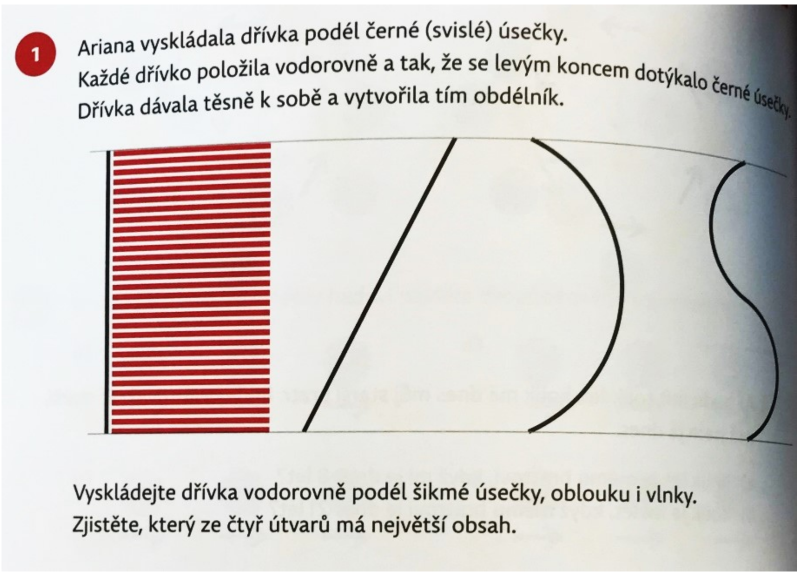
Cavalieriho princip, jak bylo již zmíněno, uvádějí i některé učebnice pro základní školu, ovšem na různé úrovni. Učebnice Hejného a kol. (2016) pomocí Cavalieriho principu přímo zavádí objemy těles, jiné jej jen zmiňují jako další možnost, ale více princip nerozvádí (např. Herman a kol.).

Cavalieriho princip se objevuje i ve středoškolských učebnicích, jako například v učebnici *Matematika pro gymnázia – Stereometrie* od autorky Evy Pomykalové (1995) nebo také v učebnici pro gymnázia od Jiřího Hermana a kol. (2001). Jiné učebnice objemy těles více nerozvádějí, často pouze jen uvedou vztah pro výpočet (např. J. Vondra, Z. Půlpán a kol., Binterová a kol. nebo O. Odvárko a J. Kadleček). Jak ale zmiňuje Polák v publikaci *Geometrie*, ve středoškolské matematice se princip nedokazuje, protože je možné jej dokázat až s pomocí integrálního počtu (Polák, 2014). Podívejme se na uvedené publikace blíže.

1.8.1 Učebnice nakladatelství H-mat

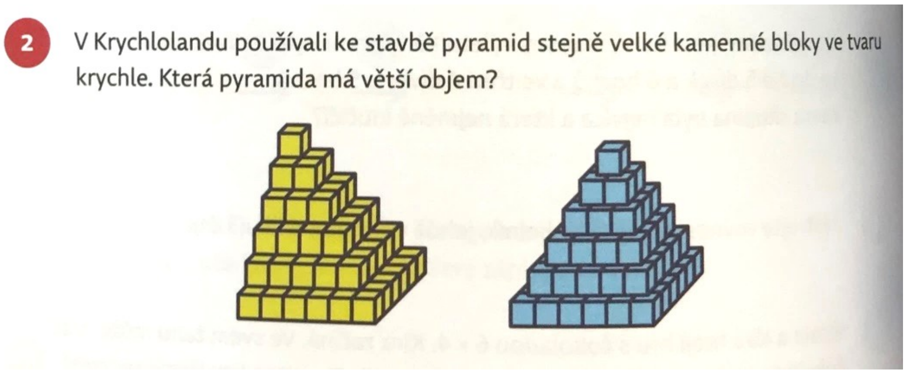
Učebnice nakladatelství H-mat poprvé zmiňují Cavalieriho princip v učebnici *Matematika C* (Hejný a kol., 2016). Hejný a kol. nejprve představují tři poměrně intuitivní úlohy, které by měly žákům zprostředkovat manipulativní zkušenost s Cavalieriho principem. Cílem celé kapitoly, kde jsou tyto tři úlohy umístěny, je, aby čtenář intuitivně porozuměl představě, že když se těleso rozřeže na „vrstvy", tak se jejich přemístěním objem tělesa nezmění (Hejný a kol., 2017, str. 73).

První úloha (viz obrázek 30) nechává žáka, aby si sám zkusil přesouvat dřívka vodorovně podél různě tvarovaných křivek a u toho si uvědomil, že každý z vzniklých útvarů má stejný obsah. Důležité u této úlohy je, aby si ji žáci manipulativně opravdu vyzkoušeli.



Obrázek 30 Úloha s. 46, cv. 1 (Hejný a kol., 2016)

Druhá úloha, která je na obrázku 31, by pro manipulaci ve třídě byla lehce obtížnější. Bylo by možné sehnat do třídy pro žáky menší množství kostek a žáci by mohli manipulovat s nimi. V úloze jde především o to, aby žáci měli představu toho, že stejně jako v první úloze se neměnil obsah útvaru při manipulaci s dřívky, tak zde se nebude měnit objem tělesa, pokud krychličky přemístíme. Přechází se tak od 2D modelů k 3D modelu.

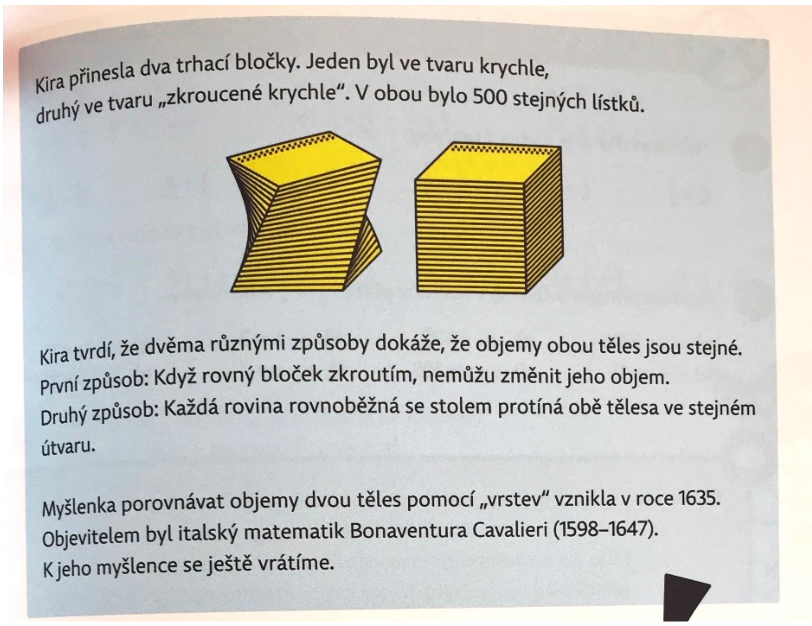


Obrázek 31 Úloha s. 46, cv. 2 (Hejný a kol., 2016)

Třetí úloha je opět s 3D útvary, tentokrát je navrstvených deset mincí, pokaždé jiným způsobem a žáci mají zjistit, který ze sloupečků má největší objem. Úloha má především poukázat na možnou formulaci Cavalieriho principu:

„Dvě tělesa mají stejný objem, jestliže mají stejnou podstavu, stejnou výšku a jejich řezy rovnoběžné s podstavami vedené ve stejné vzdálenosti od podstavy mají stejné obsahy.“ (Hejný a kol., 2017, str. 74)

Následně na další straně učebnice *Matematika C* je v modrém rámečku uveden Cavalieriho princip, jak ho Kira uvádí jako „důkaz“. Zmiňuje i Bonaventuru Cavalieriho, který s touto myšlenkou přišel, viz obrázek 32.



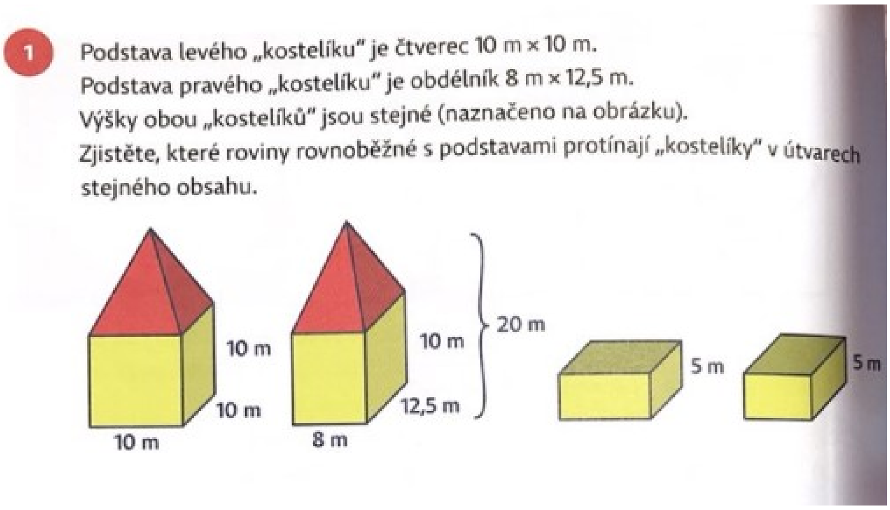
Obrázek 32 Cavalieriho princip, Matematika C (Hejný a kol., 2016, s. 46)

Učebnice autorského kolektivu vedeného Milanem Hejným dále poskytuje několik dalších úloh, které jsou řešitelné pomocí Cavalieriho principu. Jednotlivé úlohy jsou rozmístěny v následujících kapitolách po celé učebnici. Ukažme si některé z nich.

Obrázek 33 Úloha s. 49, cv. 2 (Hejný a kol., 2016)

Tato úloha, viz obrázek 33, není zadána úplně. V zadání chybí údaje o kružnicích. V příručce pro učitele autoři uvádějí, že kružnice jsou stejně velké (Hejný a kol., 2017). Úlohu je možné vyřešit, a to buď Cavalieriho principem nebo tzv. geometrické chirurgie. Pro nás je zajímavější první postup. Pokud vezmeme přímku rovnoběžnou s okraji útvarů, u kterých hledáme obsah, zjistíme, že každá taková přímka protíná oba útvary v úsečkách, které mají stejnou délku. Pro lepší představu a pochopení by zde bylo i vhodné připomenout první úlohu z kapitoly o Cavalieriho principu, kde se obdobným způsobem pokládala dřívka podél různých křivek. Tato úloha se od úlohy se dřívky liší tím, že si žák musí představit nekonečný počet přímek, které útvary protnou.

Další úloha se týká už objemů těles. Úlohu můžeme vidět na obrázku 34. Pro spodní část útvaru je řešení poměrně snadné. Všimneme si, že podstava krychle i kvádru má stejný obsah, v každém rovnoběžném řezu s podstavou tedy bude obsah stejný. Pro vrchní část kostelíku (jehlany) řešení tak snadné nebude. Vodorovným řezem střech obou kostelíků bude vždy jiný útvar. Levou střechu kostelíku rozřežeme na postupně se zmenšující čtverce a pravou střechu na obdélníky.



Obrázek 34 Úloha na str. 54 cv. 1

1.8.2 Elektronická učebnice Krynického

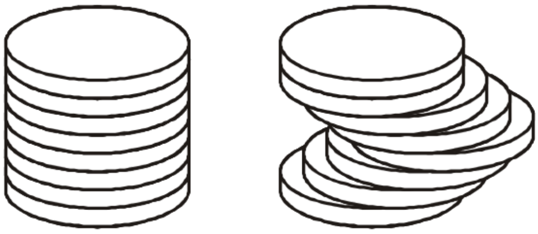
Tato učebnice se nachází na webových stránkách www.realisticky.cz s podtitulem *když (se) chcete naučit* ... Učebnice se nachází na internetu volně přístupné. Celý projekt je dílem středoškolského učitele Martina Krynického. Učebnice není recenzovaná a není schválena Ministerstvem školství, ale přesto splňuje svým obsahem všechny body dané Rámcovým vzdělávacím programem.

V učebnicích Krynického je Cavalieriho princip zmíněn v kapitole 5.4.2 Objemy a povrchy mnohostěnů I[6], kde se objem odvozuje na základě znalosti definice obsahu. V úvodu je definice obsahu znovu ukázána a první úlohou pro žáky je, aby vymysleli obdobnou definici pro objem tělesa. Dále je jen zmíněno, že je možné pomocí Cavalieriho principu odvodit vzorce pro objemy těles, a následně je představen Cavalieriho princip:

„Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem." (Krynický, 2021)

Poté je vysvětlen jeho význam na dvou sloupečcích mincí, které jsou každý jinak poskládaný, ale mají stejný objem, protože jsou ze stejných mincí a v každé rovině rovnoběžné s podstavnou plochou mají stejný obsah, viz obrázek 35. Více v učebnici princip není rozvinut ani využit.

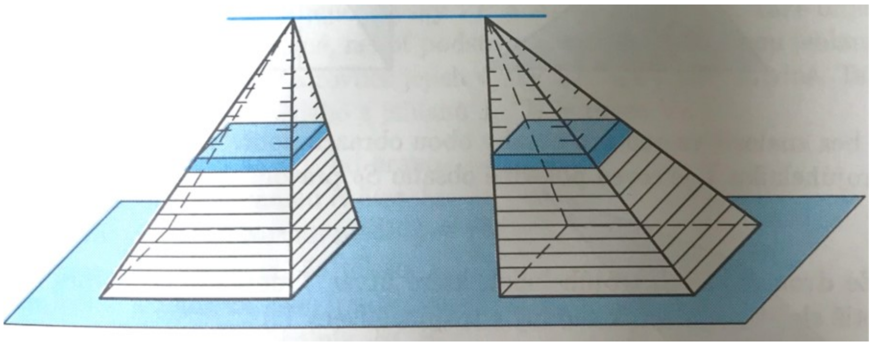
[6]http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/05%20Stereometrie/04%20T%C4%9Blesa/02%20Objemy%20a%20povrchy%20mnohost%C4%9Bn%C5%AF%20I.pdf



Obrázek 35 Sloupečky mincí (Krynický, 2021)

1.8.3 Učebnice Herman a kolektiv

Učebnice od Hermana a kol. zmiňuje, že „*tělesa, která mají stejný ‚tvar' a ‚velikost', mají stejný objem. Objem tělesa, které je rozděleno na několik částí, se rovná součtu objemů jednotlivých částí*" (Herman a kol., 2001, str. 67). Tím zřejmě naráží na Cavalieriho princip, protože dále se pokračuje, že tyto vlastnosti nejsou dostačující pro odvození vzorce pro objem jehlanu a je doplněno pravidlo: „*Dva jehlany, které mají shodné podstavy a shodné výšky, mají týž objem*" (Herman a kol., 2001, str. 67). Tato pravidla autoři uvádějí bez důkazu a doplňují je obrázkem (viz obrázek 36), ke kterému přidávají i podrobnější popis celého principu, aniž by ale B. Cavalieriho zmínili. Zdůvodňují, proč mají uvedené jehlany stejný objem, tím, že ve stejné (libovolné) výšce se nacházejí destičky, tvarem podobné hranolům, které mají stejný objem.



Obrázek 36 Jehlany o stejném objemu (Herman a kol., 2001, str. 67)

V další části odvozují objem jehlanu pomocí hranolu a dokazují, že je možné jej vyplnit třemi jehlany se stejným objemem. Více se však ke Cavalieriho principu nevracejí a nevyužívají jej pro další zdůvodnění.

1.8.4 Učebnice Pomykalová

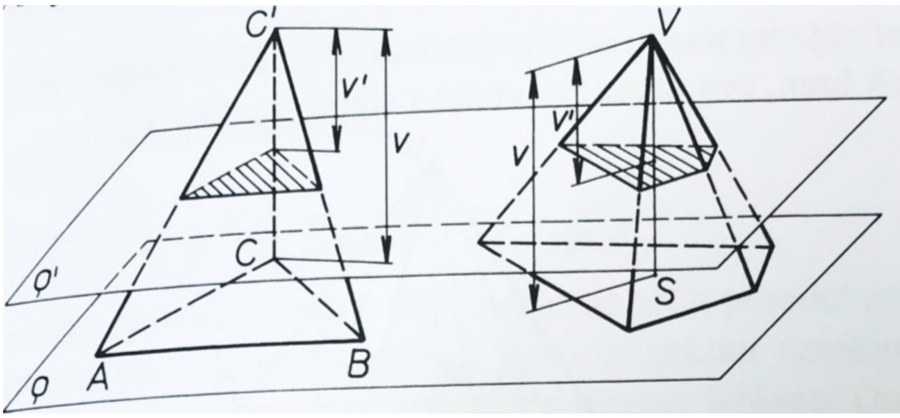
Pomykalová (1995) při zavádění objemů těles uvádí nejprve zavedení objemu kvádru, protože je základem pro odvozování vzorců ostatních těles. Vzápětí zmiňuje, že pro odvozování objemů se využívá vlastnosti objemu zvané Cavalieriho princip a uvádí toto znění:

Jestliže pro dvě tělesa existuje taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná obě tělesa v rovinných útvarech se stejnými obsahy, mají tělesa stejný objem.

(Pomykalová, 1995, str. 150)

Pro lepší představu čtenáře nabízí typické znázornění principu pomocí dvou sloupců vyskládaných mincí, které podle Cavalieriho principu mají stejný objem.

Princip dále využívá u odvozování objemů dalších těles. Například pro kosý hranol zmiňuje, že lze pro něj dokázat pomocí Cavalieriho principu, že má stejný vzorec pro výpočet objemu jako kolmý hranol. Dalším příkladem využití principu je odvození vztahu pro objem jehlanu. Nejprve autorka odvozuje, proč by jehlan s obsahem podstavy a^2 měl být třetinou objemu krychle o stejné délce hrany jako je podstava jehlanu, a následně vztah zobecňuje na platnost pro všechny jehlany a pro zdůvodnění užívá Cavalieriho princip. Důkaz demonstruje na dvou jehlanech (viz obrázek 37), které mají stejný obsah podstavy a stejnou výšku a pomocí stejnolehlosti ukazuje, že v každém řezu rovinou rovnoběžnou s rovinou podstav jsou obsahy řezů shodné. Závěrem je, že jehlany mají stejný objem, a pro libovolný jehlan platí $V = \frac{1}{3} S_p v$.

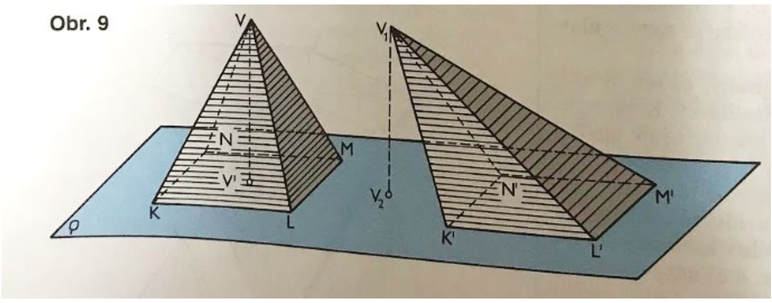


Obrázek 37 Porovnání objemů jehlanů (Pomykalová, 1995, str. 155)

Poslední zmínka o Cavalieriho principu v této učebnici je u odvození objemu koule. Objem koule je zde odvozen objevením toho, že polokoule a válec o stejné výšce jako je poloměr koule s vyjmutým rotačním kuželem, který s ním má společnou jednu podstavu a vrchol kuželu je středem druhé podstavy válce, mají stejný objem. Důkaz je samozřejmě proveden pomocí Cavalieriho principu, protože se odvodí, že v každém řezu rovinou rovnoběžnou s podstavami těles jsou obsahy řezů stejně velké. Nakonec autorka zmiňuje, že obdobnými úvahami je možné ukázat i objemy kulové úseče a kulové vrstvy (Pomykalová, 1995).

1.8.5 Učebnice Trejbal

Poslední učebnicí, která alespoň naznačuje úvahy podobné Cavalieriho principu, je učebnice od Josefa Trejbala (1999). Opět se podíváme do kapitoly o objemu jehlanu. V ní autor uvádí ukázky jehlanů a různé příklady, kde se žák může s takovým tělesem setkat. Potom navazuje úvahou, která odkazuje na obrázek (viz obrázek 38), a vysvětluje proč by měly mít jehlany stejný objem. K argumentaci využívá myšlenky, že jehlany jsou vyrobeny ze stejného materiálu a stejného počtu velmi tenkých destiček, které vzhledem k jejich malé tloušťce připodobňuje k hranolům. Tyto stejné hranoly mají stejný objem. Protože taková úvaha platí pro každou dvojici destiček a všechny destičky dají dohromady jehlan, vyvozuje, že oba jehlany mají stejný objem. Více se v dalším textu k principu nevrací, ani jej neužívá k dalšímu odvozování vztahů pro objemy. Dokonce u kapitoly o objemu koule píše: „*Přijměte ho*[7] *za správný, aniž budete uvažovat, jak vznikl. V základní škole nejste totiž schopni ho přesným matematickým postupem odvodit.*“ (Trejbal, 1999, str. 33)



Obrázek 38 Čtyřboké jehlany se shodným objemem (Trejbal, 1999, str. 24)

[7] Vzorec pro objem koule

2 Praktická část

Praktická část mé práce se týká zavedení objemů těles v 9. ročníku základní školy. V této kapitole postupně představím, co celé výuce předcházelo, jaké žáky jsem učila, jaká byla připravená struktura hodin včetně výukových metoda, a neposledně jak výuka proběhla, a jaké měla výsledky.

2.1 Specifikace žáků

Žáci, s nimiž jsem pracovala, navštěvují základní školu, na které čtvrtým rokem pedagogicky působím. Je samotné učím matematiku od 6. ročníku. Třída je heterogenní, jsou v ní slabší žáci se speciálními vzdělávacími potřebami, žáci, kteří mají průměrný prospěch, i žáci, kteří se pravidelně účastní matematických a logických soutěží a olympiád. Žáků je ve třídě 29.

Žáci jsou zvyklí v hodinách matematiky pracovat s učebnicí autorů Odvárko a Kadleček, s pracovním sešitem od nakladatelství Fraus[8] pro 9. ročník. K výuce využíváme mimo to i klasický sešit, do kterého si žáci dělají poznámky. Každý žák si pořizuje poznámky podle své vlastní potřeby.

Výuku matematiky se snažím vést konstruktivisticky a každý krok s žáky zdůvodňujeme. K vyvolávání žáků ve výuce využívám dřívka, na kterých jsou napsána jména žáků, aby žáci byli vyvoláváni náhodně. Někteří žáci jsou zvyklí být ve výuce velmi pasivní a náhodným vyvoláváním se je snažím udržet v pozoru a zapojit každého žáka alespoň jednou za hodinu. Většinou dřívka vracím zpět do kelímku, aby žáci mohli být vyvoláni opakovaně, někdy však volím strategii, kdy vytažená dřívka nevracím, aby se dostalo na všechny žáky. Po vyvolání všech, vracím dřívka do kelímku. Ve výuce také někdy žáci využívají tabulky, které slouží k tomu, aby mohli ukázat své odpovědi, pokud nebyli vyvoláni. Také je využíváme pro hlasování nebo pro krátké počítací aktivity s rychlými odpověďmi.

[8] Tlustý, Pavel & Huclová, Miroslava. *Matematika 9 s nadhledem 2v1: Hybridní pracovní sešit*. Praha: Fraus, 2020.

2.2 Cíle výuky

Cílem výuky bylo zavést objemy jehlanu, kuželu a koule pomocí Cavalieriho principu. Ke splnění cíle je potřeba provést i sérii výukových hodin, které budou probíhat během běžné výuky, ve kterých se žáci nejprve seznámí s Cavalieriho principem ve dvourozměrném prostoru a v dalších hodinách se budou seznamovat s tím, jak Cavalieriho princip funguje v trojrozměrném prostoru. Poté bude následovat úvod k zavedení objemů pro jehlan. Žáci by si měli u toho uvědomit, že objem jehlanu je třetinou objemu kvádru, který je stejně vysoký a jeho podstava má stejný obsah jako postava jehlanu. Dále bude obdobným způsobem probíhat výuka o kuželu a na závěr přijde odvození objemu koule.

2.3 Příprava a průběh výuky

Pro výuku bylo potřeba připravit několik pomůcek a materiálů. Část úloh je inspirována literaturou jako například učebnicemi a pracovním sešitem matematiky pro 2. stupeň a víceletá gymnázia Hejného a kolektivu (*Matematika C*, kapitola „Cavalieriho princip“, *Matematika E* a *Matematika F*).

Nejprve se žáci seznamovali s tělesy jehlan, kužel a koule, naučili se, jak se pojmenovávají jejich jednotlivé části, a jak se počítá jejich povrch. Všechny tyto části se učili aktivním způsobem. Toto netradiční pořadí výuky (zavést nejprve povrchy všech těles a až poté všechny objemy) jsem volila z toho důvodu, aby žáci tělesa znali, pak se teprve věnovali objevení Cavalieriho principu, a jak se s ním pracuje při porovnávání obsahů a objemů, a až na závěr se věnovali jejich objemům.

Celá výuka probíhala během března roku 2023 v období před jednotnými přijímacími zkouškami na střední školy. Žáci měli týdně pět hodin matematiky. Přípravu výuky jsem členila na jednotlivé hodiny a během celé výuky jsem ji průběžně upravovala, měnila pořadí úloh nebo úlohy přesouvala podle potřeb žáků z hodiny do hodiny. Z tohoto důvodu zde nebudu uvádět přesné pořadí probíraných částí výuky, ale zaměřím se na probíraná témata jako celek. Jak již bylo zmíněno, nejprve jsem se se žáky věnovala povrchům těles, proto prvně uvedu, jakým způsobem se žáci s povrchy seznamovali. Dalším krokem bylo zavedení Cavalieriho principu nejprve v rovině a poté v prostoru a následné upevnění tohoto principu. Na závěr jsme se žáky objevovali objemy jehlanu a kuželu, kde nejprve objevili objem jednoho konkrétního tělesa a pomocí Cavalieriho principu jsme výpočet objemu zobecnili pro všechny jehlany a kužely. Objem koule byl specifický v tom, že objem koule se zaváděl rovnou u obecně zadané koule pomocí Cavalieriho principu.

2.3.1 Souvislost s RVP a ŠVP

Očekávané výstupy, které uvádí Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání[9] (RVP ZV) k tomuto tématu, se vztahují k tematickému okruhu Geometrie v rovině a v prostoru pro 2. stupeň. Po absolvování 9. ročníku dle očekávaných výstupů RVP ZV (2021) má žák:

- určit a charakterizovat základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti
- odhadnout a vypočítat objem a povrch těles
- načrtnout a sestrojit sítě základních těles
- načrtnout a sestrojit obraz jednoduchých těles v rovině

Na škole, kde výuka probíhala, se podle školního vzdělávacího programu[10] učí žáci o objemu těles jehlan, kužel, koule v devátém ročníku. Výstupem tématu je, že žák sestrojí obraz těchto těles v rovině a spočítá jejich objem a povrch.

2.4 Metoda sběru dat

V průběhu výuky jsem zaznamenávala jak písemně ve formě poznámek, tak i na diktafon, jakým způsobem žáci reagují na připravené úlohy a otázky. Během celé výuky jsem také pořizovala fotografické záznamy práce vybraných žáků, které budou zde v práci uvedeny. Pořizování všech záznamů včetně pořizování fotografií prací bylo se souhlasem zákonných zástupců všech těchto žáků a všechny výroky a fotografie jsou také anonymizovány.

2.5 Plán výuky

Výukový experiment byl naplánován na patnáct výukových hodin, což zhruba vycházelo na měsíc výuky. Celý experiment jsem rozčlenila podle témat. Nejprve zavádění těles jehlan a kužel, kde se žáci seznámili s pojmy k nim se vztahující a s výpočtem povrchů těchto těles. Následně, abychom mohli vhodně odvodit objemy těchto těles, následovala série hodin, ve

---

[9] Rámcové vzdělávací programy, c2011-2021. *Národní pedagogický institut České republiky (dříve Národní ústav pro vzdělávání)* [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2023-07-06]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp

[10] *Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha: ZŠ Hostivař, 2021. [cit. 2023-07-06]. Dostupné z: http://www.zshostivar.cz/svp/svp.pdf

kterých se žáci seznamovali s Cavalieriho principem, nejprve v rovině a poté v prostoru. Potom už mohli žáci s pomocí tohoto principu objevovat objemy těles, včetně objemu koule. Posledním tématem bylo hledání vztahu pro povrch koule. Do plánu jsou zařazeny i procvičovací hodiny, kde si žáci upevňovali nabyté poznatky z předchozích hodin. Celý plán výuky shrnuje tabulka 1.

Výuka byla vedena konstruktivisticky s využitím teorie generického modelu, na kterou se budu v průběhu odkazovat. Žáci byli aktivně zapojováni do procesu odhalování vztahů. Jediné pojmy týkající se popisu částí těles byly žákům předány. Úlohy a aktivity, které jsem ve výuce používala, byly inspirovány nebo přejímány z učebnic H-mat, od autorů Odvárko & Kadleček, z pracovního sešitu od nakladatelství Fraus, a také od Bímové a kol. (2019). Veškeré odkazy na publikace se nacházejí u odpovídajících úloh.

Tabulka 1 Plán výuky

Číslo výukového celku	**Téma**	**Cíl hodiny**
1. vyučovací hodina	Jehlan – úvodní hodina	Žák rozpozná jehlan, určí jeho základní parametry a narýsuje jeho síť.
2. vyučovací hodina	Povrch konkrétního jehlanu	Žák určí povrch jehlanu.
3. vyučovací hodina	Povrch libovolného jehlanu	Žák vypočítá povrch libovolného jehlanu.
4. vyučovací hodina	Kužel – úvodní hodina	Žák určí základní parametry kuželu a narýsuje jej.
5. vyučovací hodina	Povrch kuželu	Žák spočítá povrch kuželu.
6. vyučovací hodina	Cavalieriho princip v rovině	Žák rozpozná útvary se stejným obsahem.
7. vyučovací hodina	Cavalieriho princip v prostoru	Žák porovná objemy těles v prostoru a určí, jestli mají stejný objem.

8. vyučovací hodina	Objem jehlanu	Žák vysvětlí vztah pro počítání objemu jehlanu.
9. vyučovací hodina	Objem libovolného jehlanu	Žák spočítá objem libovolného jehlanu.
10. vyučovací hodina	Procvičovací hodina	Žák si upevní pojmy týkající se jehlanu a procvičí si výpočty jeho povrchu a objemu.
11. vyučovací hodina	Objem kuželu	Žák určí objem kuželu.
12. vyučovací hodina	Procvičovací hodina	Žák si upevní své poznatky o vlastnostech kuželu.
13. vyučovací hodina	Objem koule	Žák objeví, že objem polokoule je možné získat odečtením objemu kužele z válce o stejném poloměru podstavy a výšce.
14. vyučovací hodina	Povrch koule	Žák vysvětlí vzorec pro výpočet povrchu koule.
15. vyučovací hodina	Procvičovací hodina	Žák si upevní získané poznatky o kouli.

Jak bylo již zmíněno, průběh výuky se v průběhu realizace experimentu měnil, proto v následujících oddílech bude průběh výuky zaznamenán po tematických celcích.

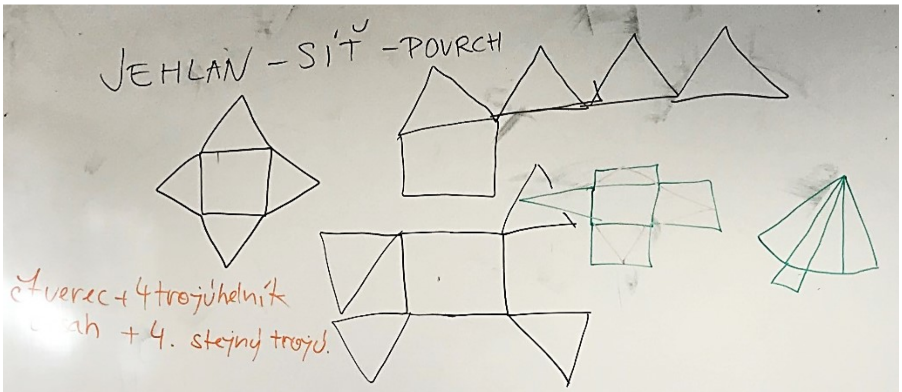
2.6 Zavedení povrchů jehlanu, kuželu a koule

Aby se žáci mohli učit o objemu těles, museli se naučit tělesa rozpoznávat. Tento úkol byl pro ně jednoduchý, neboť tělesa již znali z vlastní zkušenosti. Tělesa jako komolý jehlan a komolý kužel byla pro ně nová, ale těm se v této práci nevěnuji. Pojmenování částí těles jako je vrchol, hrana, podstava a plášť byla žákům jasná. Další pojmy, které jsou pro tělesa specifická, jsem žákům představila, protože jde pouze o pojmy, které nelze žádným způsobem objevit. Jednalo se například o stranu kuželu nebo stěnovou výšku jehlanu.

2.6.1 Povrch jehlanu

Pro zavedení povrchu jehlanu dostali žáci do dvojice malý model pravidelného čtyřbokého jehlanu a papír. Dostali za úkol jehlan obalit papírem tak, aby žádné místo tělesa nebylo neobalené a zároveň, aby se žádný kus papíru nepřekrýval s jiným kusem. Cílem bylo objevit síť jehlanu, aniž by žáci toto zadání explicitně dostali. Pro žáky byl tento úkol známý, neboť takto již hledali síť válce minulý školní rok.

U tohoto úkolu se muselo především dbát na to, aby žáci opravdu přesně dodrželi zadání a opravdu se žádný kus papíru nepřekrýval. Některým žákům dělalo obtíže toto zadání dodržet a musela jsem jim kritéria zadání opakovat. Nakonec všichni získali síť jehlanu. Každý svým způsobem, a proto jsme si všechny izolované modely, na které žáci přišli, nakreslili na tabuli, viz obrázek 39. Jeden ze žáků prezentoval síť složenou ze čtyř čtverců a jednoho trojúhelníku. Jak se po jeho prezentaci ukázalo jednalo se o ne-model, jeho obal nesplňoval kritérium, že se papír nesmí na žádných místech překrývat. Opravu své sítě pak žák na tabuli udělal jinou barvou.



Obrázek 39 Síť jehlanu – návrhy žáků

Sítí jehlanu byl pro žáky obal tělesa. Na otázku, co si představují pod pojmem povrch jehlanu odpovídali, že objem je to uvnitř a povrch to venku. Na to samostatně navazovali, že budeme počítat obsah čtverce a čtyř trojúhelníků. Po dotazu, jak bychom počítali povrch jiného jehlanu než pravidelného čtyřbokého, bylo z odpovědí žáků zřejmé, že si dokáží poradit i s jinými jehlany, protože si, jak sami řekli, spočítají obsahy jednotlivých částí, ze kterých se bude síť jehlanu skládat. Tím byl zaveden povrch jehlanu a dále si ho žáci procvičovali na zadaných úlohách.

2.6.2 Povrch kuželu

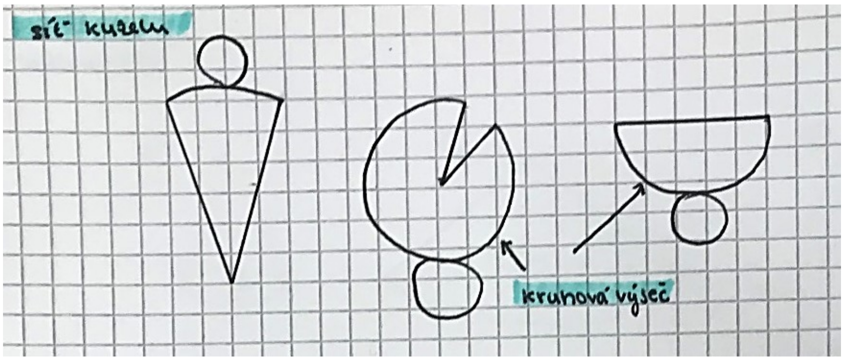
Kužel jsem se žáky zaváděla jako rotační těleso pomocí manipulačních úloh, podle toho, jak ho zavádí Bímová, D. a kol., 2019:

Rotujte vystřiženým trojúhelníkem a zkuste vymodelovat kužel. Vyzkoušejte postupně se dvěma trojúhelníky a rotujte kolem různých stran trojúhelníka.

a) *Rotací kterého trojúhelníku vznikne rotační kužel? Rotací kolem které strany?*
b) *Mohou rotací stejného trojúhelníku vzniknout různé kužely?*
c) *Může rotační kužel vzniknout i jinou rotací než kolem strany trojúhelníka?*

Cílem aktivity bylo, aby žáci objevili, že kužel vznikne rotací trojúhelníku, ale ne libovolného. K dispozici měli připravený obecný trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník, pravoúhlý trojúhelník a rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a jejich manipulací měli dojít k cíli. Z jejich experimentování došli k závěru, že kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku podlé obou jeho odvěsen (dva různé kužely), rotací rovnoramenného trojúhelníku podél jeho osy souměrnosti (u něj stačilo udělat jen půl otáčky) a i rotací rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, u kterého stačí vybrat jen jednu odvěsnu, protože rotací kolem druhé odvěsny získáme stejný kužel.

Pro hledání výpočtu povrchu kuželu si žáci nejprve vyrobili čepičku, která měla mít tvar kuželu (připodobnili jsme ji narozeninové čepičce pro lepší specifikaci, aby žáci nevyráběli něco jiného). Poté žáci prezentovali, z jakého kusu papíru čepičku vyrobili. Mnoho z nich nemělo čepičku vyrobenou do podoby kuželu, protože vzali pouze papír A4 a smotali jej do kornoutu. Po vybídnutí, aby odstranili přebytečné části, které se překrývají nebo nemají být součástí, je někteří z nich pouze ohnuli (překryli jimi část kuželu) nebo úkol neprovedli. Ostatní žáci, kteří čepičku vyrobili, svá řešení nakreslili na tabuli, a tím ostatním žákům ukázali možné modely sítě kuželu (viz obrázek 40). U posledních dvou modelů sítí na obrázku 40, kde kruhové výseče tvořící plášť kuželu mají úhel větší nebo roven 180°, mělo pár žáků obtíže s představou toho, že by to mohl být plášť kuželu, byly to pro ně překvapivé modely. Ale vzhledem k tomu, že žákyně, které toto řešení uvedly, měly před sebou takový kužel vyrobený, bylo pro jejich spolužáky jednodušší si kužel představit a přijmout představované modely jako pláště kuželu.



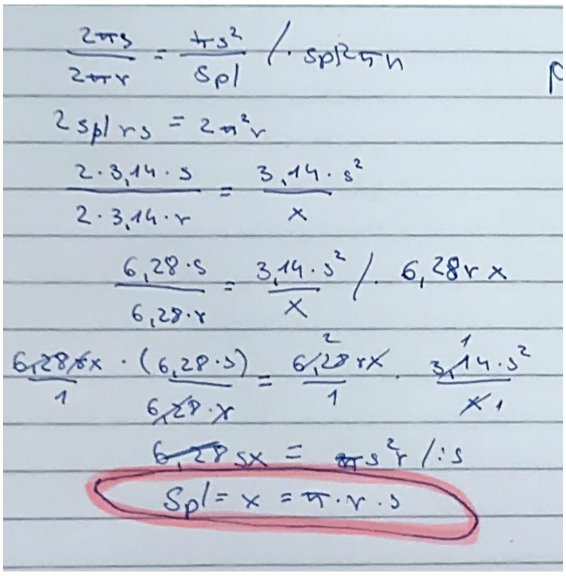
Obrázek 40 Sítě kuželu ze sešitu žákyně

Povrch kuželu se skládá ze dvou částí podstavy a pláště. Obsah podstavy byl pro žáky triviální. Pro počítání obsahu pláště se žáci seznámili s novým pojmem, a to s kruhovou výsečí. Počítání jejího obsahu však pro ně triviální nebyl. Nápady žáků na výpočet obsahu byly většinou takové, že hledali v kruhové výseči známé útvary, jejichž obsahy umí spočítat, jako například trojúhelníky nebo obdélníky. Vždy však zbyla část kruhové výseče nebo kruhová úseč, která byla pro žáky neznámá a nevěděli si s ní rady. Po vyčerpání všech nápadů jsme se vrátili k tomu, co je kruhová výseč – část kruhu. Pomocí zobecňovaní žákům známých kruhových výsečí (od čtvrtiny, poloviny, třetiny kruhu až k obecné velikosti úhlu kruhové výseče) jsme se dostali ke vztahu, který nám udával souvislost poměru obsahů kruhu a kruhové výseče a poměru obvodu kruhu a kruhové výseče. Postup byl inspirován úlohou z Hejný a kol., *Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, 2017 z kapitoly Oblé útvary. Závěrem byla úprava rovnice

$$S_{kruh} : S_{pl} = o_{kruh} : o_{kruhová\ výseč}$$
$$\pi s^2 : S_{pl} = 2\pi s : 2\pi r$$
$$S_{pl} = \pi r s,$$

kde S_{kruh} je obsah kruhu, ze kterého je vyříznuta kruhová výseč s poloměrem s, S_{pl} obsah kruhové výseče tvořící plášť kuželu, o_{kruh} obvod kruhu, ze kterého je vyříznuta kruhová výseč s poloměrem s a $o_{kruhová\ výseč}$ je délka oblouku kruhové výseče, která je stejná jako je obvod podstavy kuželu s poloměrem r.

Žáci prováděli úpravu rovnice samostatně. Někteří počítali s parametry, jiní si dosadili za $\pi = 3{,}14$ a jiní si dosadili konkrétní hodnoty i za s, r. Většina žáků také místo S_{pl} psala x, jako neznámou, aby si odlišili parametry od toho, co chtějí vypočítat, viz úprava rovnice žáka na obrázku 41.



$\frac{2\pi s}{2\pi r} = \frac{\pi s^2}{S_{pl}} \; / \cdot S_{pl} 2\pi r$

$2 S_{pl} r s = 2\pi s^2 r$

$\frac{2\cdot 3{,}14\cdot s}{2\cdot 3{,}14\cdot r} = \frac{3{,}14\cdot s^2}{x}$

$\frac{6{,}28\cdot s}{6{,}28\cdot r} = \frac{3{,}14\cdot s^2}{x} \; / \cdot 6{,}28 r x$

$\frac{6{,}28 r x}{1}\cdot\frac{(6{,}28\cdot s)}{6{,}28\cdot r} = \frac{6{,}28 r x}{1}\cdot\frac{3{,}14\cdot s^2}{x}$

$6{,}28 s x = \pi s^2 r \; / : s$

$S_{pl} = x = \pi\cdot r\cdot s$

Obrázek 41 Výpočet obsahu kruhové výseče ze sešitu žáka

Po odvození jsem žákům nabídla ještě jiný způsob nalezení obsahu kruhové výseče a to tak, že kruhovou výseč nastříháme na menší výseče, ze kterých pomocí přeskládání složíme rovnoběžník, jak uvádí Bitnerová a kol. (2017). Stejným způsobem jsem se žáky zaváděla obsah kruhu. Výpočet obsahu rovnoběžníku byl již triviální záležitostí a výsledek výpočtu ekvivalentní s předchozím postupem.

Při reflexi zavádění povrchu kuželu však žáci uvedli, že jim přišel vhodnější první způsob pomocí zobecňovaní a úpravu rovnice. Někteří řekli, že jim první způsob stačil, a tak ani druhému způsobu nevěnovali pozornost.

2.6.3 Koule

Povrch koule byl jako jediný zaveden jiným způsobem než předchozí tělesa. Koule je specifickým tělesem, a proto si vyžaduje i specifický přístup. Povrch koule jsme se žáky zaváděli na konec, až poté, co znali její objem.

Jedním z přístupů k zavádění povrchu koule je namotávání provázku kolem koule a následně kolem válce, a pak se zjišťuje, do jaké výšky se provázek na válec namotá (viz oddíl 1.5.3). Bohužel ale postup namotávání provázku není zcela přesný, protože neznáme tloušťku provázku, který namotáváme. Proto jsem tento postup při výuce nepoužila.

Další možností je ukázat, že povrch koule se vejde do čtyř kruhů. Nejčastěji je uváděn tak, že se oloupe například pomeranč a jeho slupka se rovnoměrně natrhá a rozdělí do čtyř kruhů se stejným poloměrem jako je poloměr koule (pomeranče). Opět tento přístup není přesný, neboť při zaplňování kruhů vznikají veliké mezery, a tedy nemusel by ani být pro žáky přesvědčivý.

Přístup, který jsem volila ve výuce, se zakládá na znalosti objemu koule, který uvádí například Herman a kol. (2001), viz oddíl 1.5.3. Spočívá v tom, že se koule „rozřeže" na jehlany s výškou stejnou jako je poloměr koule a jejich vrcholy se všechny potkávají ve středu koule. Jehlan je pro žáky v tu dobu známým tělesem.

Nabídla jsem žákům tuto představu. Nakreslila jsem kouli a vysvětlila, jak by se dala koule rozřezat na čtyřboké jehlany. A ptala jsem se žáků, co už o kouli víme, a co by nám zde mohlo pomoci v nalezení vztahu pro povrch koule. Jeden ze žáků řekl, že všechny jehlany dají dohromady celou kouli. Zeptala jsem se, jestli by žáci dokázali matematicky vyjádřit, co jejich spolužák řekl. Žáci slovně odpověděli, že objem koule se rovná objemu jehlanů. Zapsala jsem tedy $V_{koule} = V_{jehlany}$. Protože se žáci ještě nesetkali s vyjádřením součtu neznámého počtu (až nekonečného počtu), řekla jsem jim, že můžeme místo $V_{jehlany}$ psát $V_{j1} + V_{j2} + \cdots + V_{jn}$. Pak jsem se žáků doptávala, jak by vyjádřili jednotlivé objemy pomocí toho, co už znají z předchozích hodin, z čehož jsme se dobrali vyjádření $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}S_{p1}r + \frac{1}{3}S_{p2}r + \cdots + \frac{1}{3}S_{pn}r$. Další úpravy byly pro žáky zřejmé. Že obsahy podstav jehlanů dají dohromady povrch koule bylo pro ně skoro přirozené a sami myšlenku dokázali vysvětlit bez potřebných doplňujících otázek.

2.7 Seznámení se s Cavalieriho principem

Zavádění Cavalieriho principu v českých učebnicích pro základní školy mají pouze učebnice H-mat. Jiné učebnice se o něm pouze zmiňují, jak uvádím v oddíle 1.8. V učebnicích H-matu je zaváděn Cavalieriho princip v učebnici *Matematika C*, která je doporučena žákům šestého ročníku základních škol.

2.7.1 Obsah

Nejprve jsme, stejně jako v učebnici *Matematika C* (Hejný a kol., 2016), zaváděli princip v rovině, následně v prostoru. Zde se trochu projevila nevhodnost zavádění Cavalieriho principu až v devátém ročníku základní školy. Především šlo o znalost výpočtu obsahu trojúhelníku, od kterého se nedokázali žáci ze začátku odprosit a uvažovat nad úlohami jinak.

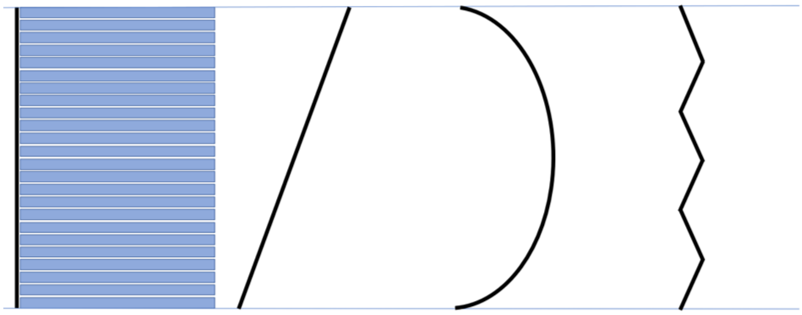
Žáci měli připravený pracovní list (viz Příloha 1), na kterém byly zadány jednotlivé úlohy. Pracovali ve dvojicích. Součástí pracovního listu byla i manipulace s dřívky, v našem případě jsme použili špejle, které jsem předem nastříhala, místo dřívek. Všechny špejle měly stejnou délku.

První úloha (viz obrázek 42) byla zaměřená právě na manipulaci se špejlemi, a aby žáci získaly izolované modely pro útvary v rovině se stejným obsahem. Žáci měli vyskládat dřívka podél zadaných úseček a zjistit, který z útvarů má největší obsah. Skládání většině žáků nedělalo obtíže. Jen asi dvě dvojice skládali špejle ne kolmo k úsečce jako Ariana, ale podél úsečky a snažili se tím vymodelovat tvar úseček. Po upozornění, že mají skládat jako Ariana, už pracovali podle požadovaného zadání. Následně, když měli všichni vyskládáno, jsem žákům pokládala připravené otázky. První z nich „*Který z útvarů má největší obsah?*“ měli žáci v zadání a měli si na ni připravit odpověď i s vysvětlením předem. Zde jsou některé z odpovědí žáků:

Ž1: „Největší obsah měl poslední útvar.“
U: „Proč si to myslíš?“
Ž1: „Protože ta čára je nejdelší.“
Ž2: „Největší obsah má třetí útvar, protože je to podél oblouku.“
Ž3: „Největší obsah měl ten útvar, který vyskládala Ariana.“
U: „Proč si to myslíš?“
Ž3: „Nevím.“
Ž4: „Všechny útvary měly stejný obsah, protože jsme je skládali ze stejných špejlí.“
Ž5: „Největší obsah měl první útvar.“

Protože žáci nebyli rozhodnutí o správné odpovědi, jak ukázaly jejich výpovědi, někteří jen tipovali a nedokázali proto zdůvodnit svou odpověď, hlasovali jsme, o tom, který z útvarů má největší obsah. Žáci hlasovali zvednutím tabulky se svou odpovědí. Při hlasování se ukázalo, že výrok žáka 4 byl pro ostatní dostatečně přesvědčivý, protože kromě tří žáků se všichni rozhodli pro možnost, že všechny útvary mají stejný obsah. Po dotázání, proč volili tuto možnost, odpovídali, že všechny útvary jsou ze stejného počtu stejných špejlí, proto mají všechny stejný obsah.

1. Ariana vyskládala dřívka podél černé úsečky. Každé dřívko položila vodorovně a tak, aby se levým koncem dotýkalo černé úsečky. Dřívka skládala těsně k sobě.



Vyskládej dřívka vodorovně podél šikmé úsečky, oblouku i vlnky. Zjistěte, který ze čtyř útvarů má největší obsah. Vysvětli.

Obrázek 42 Zadní úlohy 1 - Cavalieriho princip v rovině

Druhá úloha (viz obrázek 43) již zobecňovala představu porovnávání obsahu útvarů. Žáci měli porovnávat obsah dvou čtyřúhelníků, ale mohli se ještě vrátit k modelu špejlí a vyskládat si do obsahu připravené špejle a s nimi manipulovat. Pak se opakovala stejná situace jako u předchozího cvičení, kdy pro žáky nebyla manipulace se špejlemi dostatečně přesvědčivá a žáci tvrdili, že větší obsah má jeden nebo druhý čtyřúhelník. Jejich zdůvodnění byla taková, že se od pohledu jeden jeví větší než druhý. Když jsem žáky nasměrovala zpět k myšlence se skládáním špejlí, začali se postupně navzájem přesvědčovat, že obsahy jsou stejné. Jelikož zde museli žáci přejít k představě, že špejle jsou velmi tenké, aby zaplnily celý prostor útvaru, vyžadovala jsem po nich, aby řádně zdůvodnili, proč jsou obsahy stejné. Jeden ze žáků zdůvodnil, že obsah druhého čtyřúhelníku bude větší, protože je delší. Proto jsem se ho zeptala:

U: „Proč je delší? Jakou délku má špejle, kterou jste použili na první čtyřúhelník?“

Ž: „a“

U: „A jakou délku má špejle v druhém čtyřúhelníku?“

Ž: „a“

U: „Takže?“

Ž: „Jsou stejně dlouhé.“

U: „Když porovnáme špejle v jiném místě, jakou budou mít délku?“

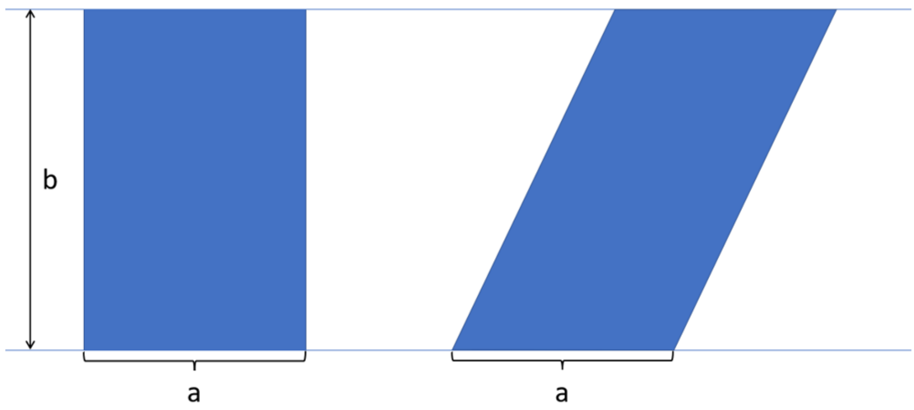
Ž: „a“

U: „Co to znamená pro obsahy těch dvou čtyřúhelníků?“

Ž: „Takže budou stejné.“

Tímto vyžadováním zdůvodnění jsme vlastně i naznačili, jaká je podstata Cavalieriho principu v rovině. Útvary musí mít stejnou délku úsečky, kterou vytne každá proložená přímka rovnoběžná se základnou. Žákům však stále nic o Cavalieriho principu sděleno nebylo.

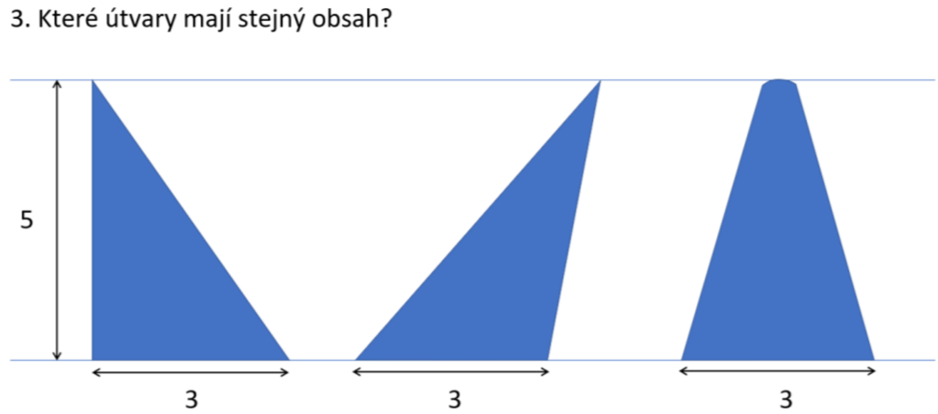
2. Porovnej obsahy daných čtyřúhelníků:



Jsou dány čtyřúhelníky porovnej jejich obsahy. Vyzkoušej si manipulativně, co se s dřívky děje.

Obrázek 43 Zadání úlohy 2 – Cavalieriho princip v rovině

U zadání třetí úlohy (viz obrázek 44) žáci již od pohledu říkali, že útvary budou mít stejný obsah, aniž by dočetli zadání. Předpokládali, že zadání bude stejné jako předchozí. V úloze se skrýval ne-model, který cílil na pochopení, že v každé úsečce, která vzniká průnikem útvaru a přímky rovnoběžné se základnou, musí být útvary stejné. Což u posledního útvaru neplatilo a žáci měli zdůvodnit proč. Zároveň zde jim již nemohli být špejle nápomocny a žáci se měli od nich oprostit. Stále se přesto mohli k nim vracet a špejle si do trojúhelníku alespoň nakreslit a porovnávat s jiným útvarem.



Obrázek 44 Zadání úlohy 3 – Cavalieriho princip v rovině

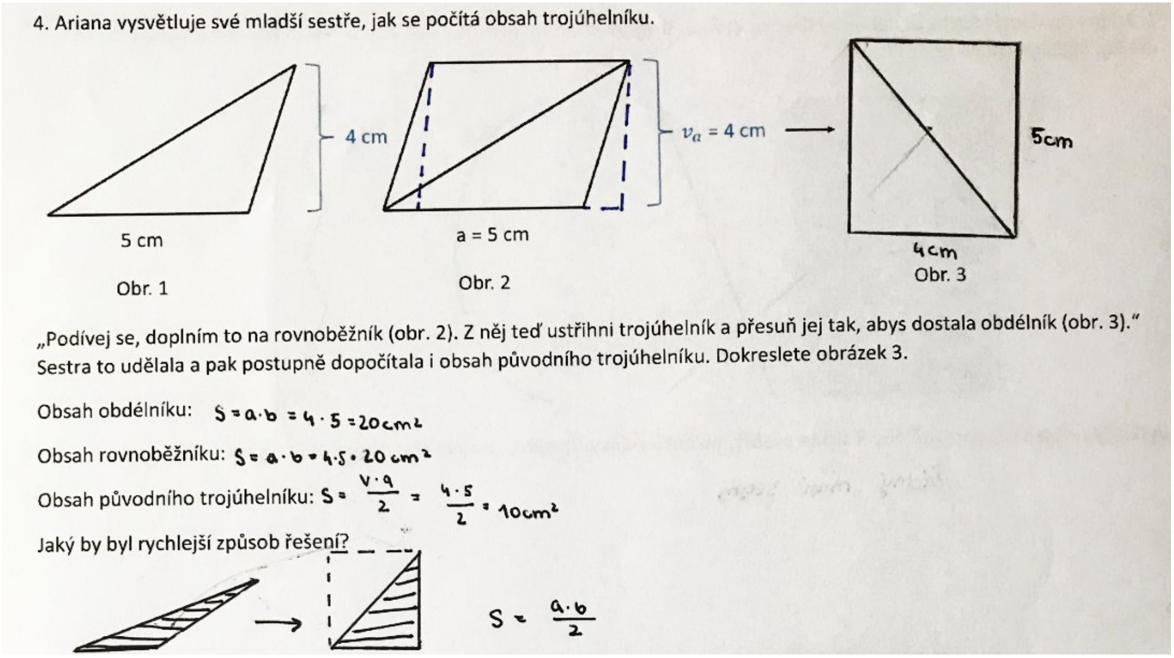
Poté, co se žáci nad úlohou více zamysleli, nebo si do trojúhelníků nakreslili „špejle“, vysvětlili, že první dva útvary mají stejný obsah, protože změřením každé „špejle“ jim vyjde stejná délka. Po tomto zdůvodnění si začali i více všímat odlišnosti posledního útvaru. Jedna žákyně řekla, že nemůže mít stejný obsah, protože „*tam nahoře je zaoblený*“. Pro jistotu jsem se zeptala náhodně vyvolaného jiného žáka, jestli mají všechny útvary stejný obsah. Ten stejně jako jeho spolužačka zdůvodnil, že první dva ano, ale poslední se liší tím, že je na vrcholu zaoblený a špejle by tam byly jinak dlouhé. Ukázalo se, že žáci stále ještě potřebují k úvahám modely špejlí.

Další úloha byla úpravou úlohy z Hejný a kol., *Matematika C, pracovní sešit pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*, 2018 z kapitoly Trojúhelníky II. Začátek úlohy byl stejný, ale místo závěru, kde Kira ukazuje rychlejší způsob řešení, jsem žákům dala za úkol vymyslet: *Jaký by byl rychlejší způsob řešení?* Cílem bylo, aby žáci přišli na to, že můžeme jen trojúhelník „narovnat“ do pravoúhlého trojúhelníku (přeskládat špejle).

S první částí zadání neměli žáci potíže ani s výpočty obsahů. Řešení jedné žákyně z pracovního listu je na obrázku 45. Na poslední otázku o hledání rychlejšího způsobu řešení mnoho žáků neodpovědělo. Ostatní se spíše snažili nabídnout řešení pomocí vzorečku, který by jen mladší Arianině sestře předali, nebo by jí řekli, ať si počká do sedmé třídy, kde jí to paní učitelka vysvětlí. Jiní uváděli, že Arianin způsob je postačující. Žáci tak vůbec úlohu nepropojili s tím, co se naučili v předchozích úlohách. Nejspíše zde v tom i bránilo to, že vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníku znali a nechtěli se od něj oprostit. Proto jsem jim stejně jako Kira v učebnici Hejného a kol. (2018) nabídla možnost s pravoúhlým trojúhelníkem, a aby si vzpomněli na to, co dělali před chvílí v předchozích úlohách pracovního listu. Na to se chytily dvě žákyně a začaly vysvětlovat, jak by přeskupily špejle v trojúhelníku do pravoúhlého trojúhelníku.

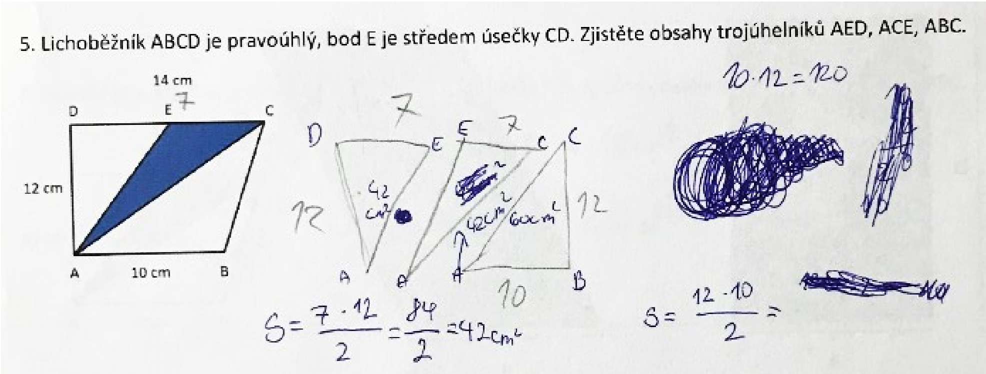
U: „V čem by nám to bylo nápomocné?“

Ž: „Protože pravoúhlý trojúhelník je už jen polovina obdélníku.“

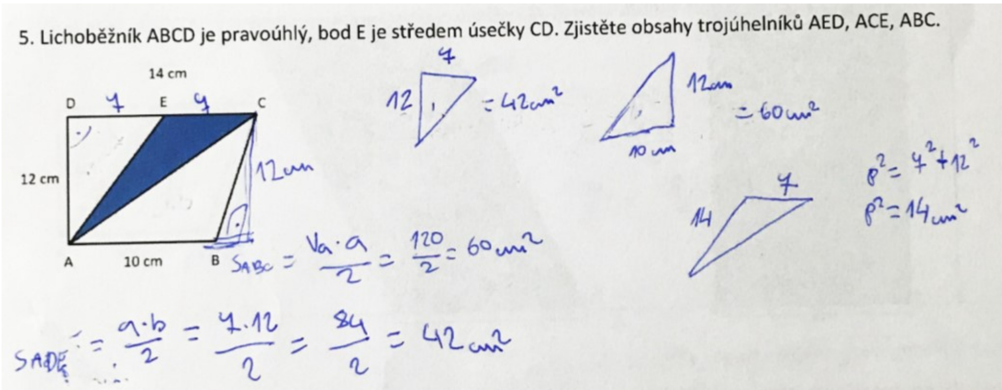


Obrázek 45 Řešení čtvrté úlohy – Cavalieriho princip v rovině

U páté úlohy počítali žáci různými způsoby, ukázky některých z nich jsou na obrázcích 46 a 47. Ti, kteří měli hotovo pokračovali posledním cvičením, které bylo pouze na procvičení obsahu trojúhelníku. Žáci vyhodnotili, že nejjednodušší bude nejprve spočítat obsah trojúhelníku ADE, protože je pravoúhlý a znají délky jeho odvěsen. Jako další počítali obsah trojúhelníku ABC, domnívám se, že ho zvolili proto, že byl pro ně prototypem jim známého trojúhelníku typicky pojmenovaného ABC. Výšku většina z nich určila správně, i že je stejná jako u trojúhelníku ADE. Někteří žáci dokonce chtěli použít Pythagorovu větu, protože našli pravoúhlý trojúhelník s dokreslenou výškou a dopočítávali ostatní strany lichoběžníku $ABCD$ (viz obrázek 47), i když to nebyla součást úkolu. Po dotázání, k čemu potřebují délku této strany znát, odpovídali, že ji počítali jen tak. Poslední trojúhelník ACE byl pro žáky oříškem. Vyžádala jsem si od žáků nápady, které k tomu mají a jedna žákyně uvedla, že trojúhelník má stejnou výšku jako trojúhelník ADE a stejně dlouho stranu. S její pomocí pak i ostatní zvládli obsah trojúhelníku spočítat. Využití Cavalieriho principu, nebo alespoň zmínka o posouvání špejlí a nahnutých trojúhelnících jako u předchozích příkladů, se v odpovědích žáků v této úloze neprojevilo.

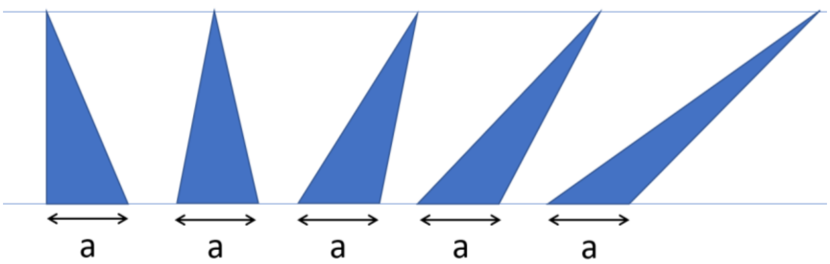


Obrázek 46 Řešení úlohy 5 žáka 1 – Cavalieriho princip v rovině



Obrázek 47 Řešení úlohy 5 žáka 2 – Cavalieriho princip v rovině

Závěrem, abych ověřila pochopení žáků, jsem jim předložila úlohu, kde měli porovnat obsahy trojúhelníků a vysvětlit svou odpověď, viz obrázek 48. Žáci zdůvodnili, že mají stejný obsah, protože jde jen o „posunuté“ špejle.

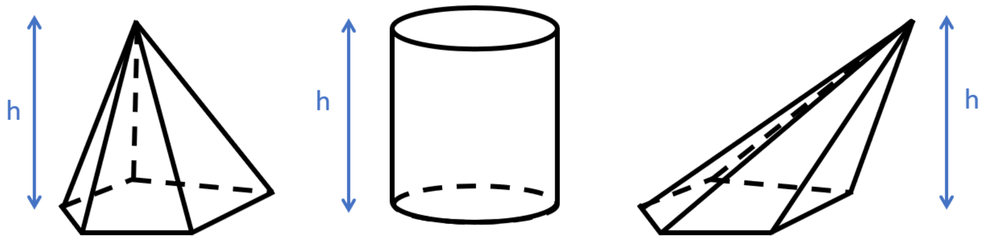


Obrázek 48 Porovnání obsahů trojúhelníků

2.7.2 Objem

Po zavedení Cavalieriho principu v rovině jsme nejprve se žáky zopakovali, co vědí o porovnávání obsahů útvarů v rovině. Následně jsem na to navázala, že se budeme dívat stejným způsobem na tělesa v prostoru. K demonstraci jsem použila sloupec žetonů (stejně velikých koleček), které znázorňovaly válec. Zkoumali jsme, co se bude dít s objemem tohoto válec, pokud válec nahneme (posuneme žetony ve válci, aby válec nebyl kolmý). Žáci odpovídali, že se objem nezmění, že jsme pouze změnili tvar. Poté jsem žákům ukázala dva sloupce čtvercových papírků, které byly stejně vysoké, jeden sloupec byl rovný, takže vypadal jako kvádr, druhý sloupec měl papírky různě posunuté a otočené tak, že nepřipomínal žádné známé těleso. Šlo o to, aby žáci získali i jiný model, a hlavně papírky byly tenčí a více znázorňovaly rovinu. Opět jsme diskutovali o tom, který ze sloupců má větší objem, ale tentokrát jsme hledali i důvod, proč mají nebo nemají stejný objem. Žáci přišli na to, že sloupce se skládají z totožných papírků, a každý papírek má stejný obsah, proto musejí mít sloupce i stejný objem. Při shrnutí diskuze jsem žákům demonstrativně předvedla, že papírky v řezech v rovinách rovnoběžných s podstavou mají stejný obsah a to tak, že jsem vyndala papírky z řezné roviny, papírky přes sebe přeložila a ty se vzájemně překryly.

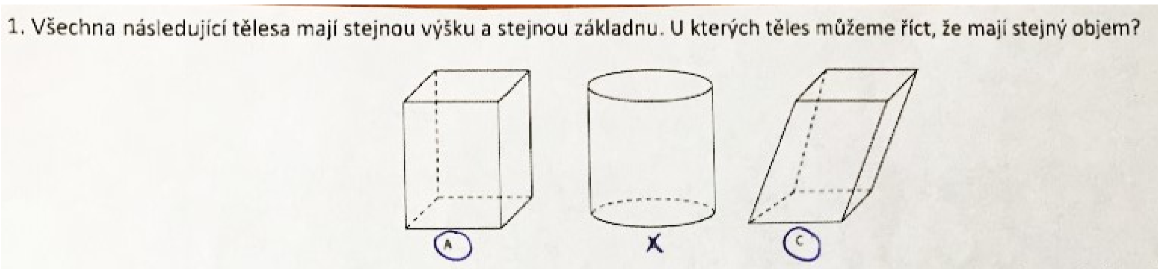
V další části výuky měli žáci porovnat objemy dvou jehlanů a válce, které mají stejnou výšku a stejný obsah podstavy. Zadání měli žáci promítnuté z projektoru (viz obrázek 49). Všichni žáci byli přesvědčeni o tom, že jehlany mají stejný objem, protože mají stejnou podstavu a výšku a jeden je jen nahnutý, stejně, jak tomu bylo u předchozí demonstrace se sloupci papírků. Na otázku, jestli má stejný objem i válec, tvrdila část žáků, že ano a druhá část, že válec nemá stejný objem jako jehlany.



Obrázek 49 Porovnání objemů jehlanů a válce se stejný obsahem podstavy

Při zdůvodňování první část žáků tvrdila, že tělesa mají stejný obsah podstavy a stejnou výšku, tak musí mít i stejný objem, protože to tak platilo i u sloupců papírků. Druhá část žáků tvrdila, že nemají stejný objem, protože se jehlany směrem k vrcholu zužují a válec ne. Žáky jsem vyvolávala náhodně s pomocí dřívek a ti se střídali se svými názory. Začala jsem na ně naléhat, aby si vzpomněli, co jsme dělali na začátku se sloupci papírků. Postupně začali žáci z první části měnit svoje přesvědčení, že tělesa mají stejný objem, a jako vysvětlovali, že se válec nezužuje tak jako jehlany. Argumentem pro ně nebylo, že mají stejný obsah v každé řezu rovnoběžnou rovinou s podstavou, ale jestli se těleso zužuje nebo ne. Neboli, jestli lístečky tvořící tato tělesa se postupně zmenšují nebo ne.

Následovala samostatná práce s předtištěným zadáním jako pracovní list (viz Příloha 2). Během práce jsem chodila mezi žáky a individuálně s žáky rozebírala jejich odpovědi. Někteří žáci u prvního cvičení zaškrtli, že pouze tělesa A a C mají stejný objem, viz obrázek 50. Po požádání, aby svou odpověď zdůvodnili, se každý z žáků sám hned opravil, že i válec bude mít stejný objem, protože má v každém průřezu stejný obsah.



Obrázek 50 Řešení úlohy 1 – Cavalieriho princip v prostoru

U druhého cvičení všichni žáci správně vysvětlili, že tělesa nemají stejný objem. Zde uvádím některé z uvedených důvodů žáků z pracovních listů:

Ž1: „Nemají stejný objem. U jehlanu skládáme 5úhelníky na sebe a ty se zmenšují. U hranolu skládáme taky 5úhelníky, ale ty se nezmenšují."

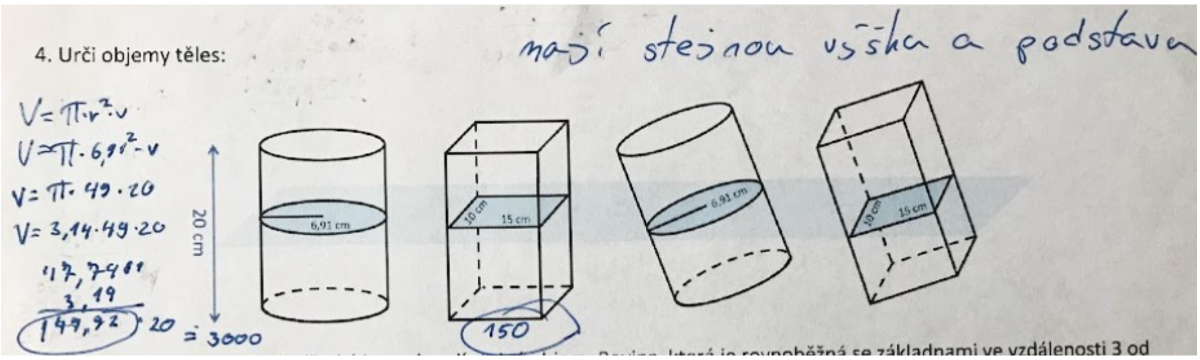
Ž2: „Jehlan má vrchol a hranol by furt rostl do výšky."

Ž3: „Nemají, protože jehlan se zmenšuje a hranol ne."

Ž4: „Pokud v půlce vezmeme 1 část jehlanu a hranolu obsahy se shodovat nebudou."

U třetího cvičení měli žáci vypočítat objemy dvou kvádrů, z čehož jeden byl kolmý a druhý kosý, a to jim dělalo obtíže. Pro začátek nevěděli, jak vypočítat objem prvního z těles. Proto jsme si společně připomněli výpočet objemu kvádru. Pak se někteří pustili do výpočtu objemu druhého nekolmého kvádru, jiní řekli, že neznají pro něj vzorec, a že neví, jak ho spočítat. Zde se neprokázalo, že by žáci využili toho, že mohou jen porovnat objemy těles. U jiných se však ukázalo, že již mají generický model porovnávání objemů těles a zdůvodňovali, že nemusí nic počítat, protože tělesa mají objem stejný, jen jsou jinak „nahnutá“.

Čtvrté cvičení nebylo příliš jasně formulováno a někteří žáci si mysleli, že poslední dvě tělesa jsou nižší než první dvě, protože obrázek znázorňoval výšku a při jejich naklonění musí mít tedy výšku nižší. Každopádně tato nesrovnalost neměla vliv na podstatu úlohy a všichni zvládli uvést vhodné argumenty, proč mají tělesa alespoň po dvojicích (vedle sebe) stejné objemy. Uváděli, že mají stejný obsah podstavy a nijak se tělesa nezužují, jsou všude stejná, a proto mají stejné objemy. Pro upřesnění zadání jsem žákům položila otázku „*Jak by to bylo, kdyby byla stejně vysoká všechna tělesa?*“, z čehož všichni dopočítali správně objemy. Výpočet jednoho žáka, který spočítal jen objem prvního a uvědomil si, že ostatní nemusí počítat, protože mají stejnou výšku a obsah podstavy, je na obrázku 51. Jedna žákyně měla jiný výsledek než ostatní a byla přesvědčená, že proto nemají všechna tělesa stejný objem. Nechala jsem ji předvést její výpočet na tabuli, jak k výsledku došla a ukázalo se, že neumocnila poloměr kruhu, proto měla jiný výsledek než ostatní.

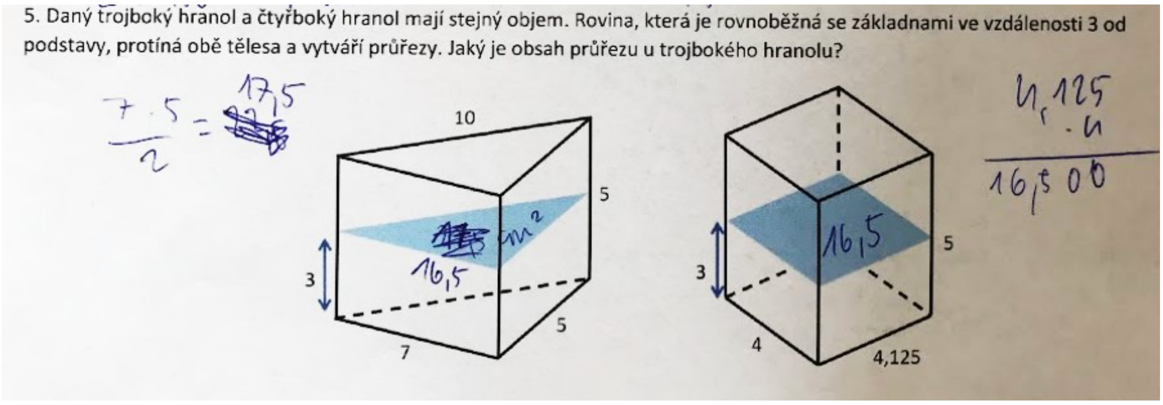


Obrázek 51 Řešení úlohy 4 – Cavalieriho princip v prostoru

Poslední cvičení bylo nejobtížnější, a hlavně bylo zadáno jinak než předešlé úlohy, což se pro žáky ukázalo jako obtížné. Žáci měli určit obsah průřezu rovnoběžnou rovinou hranolu, když věděli, že jsou obě tělesa stejně vysoká a mají stejný objem. Několik žáků si nevšímalo poslední část zadání, že tělesa mají stejný objem a nevyužili souvislosti mezi tělesy, nebo ani nic nevyzkoušeli a snažili se počítat obsah vyznačeného trojúhelníku s pomocí zadaných rozměrů v obrázku v zadání. Jedni si řekli, že trojúhelník vypadá jako pravoúhlý a byli o tom skálopevně přesvědčeni, protože by to podle nich nešlo jinak vyřešit. Řekla jsem jim, ať ověří, jestli je pravoúhlý. Po vypočítání obrácené Pythagorovy věty a ověření její nerovnosti $10^2 \neq 5^2 + 7^2$, nebyla jedna žákyně stále přesvědčena o tom, že trojúhelník není pravoúhlý. Neviděla v úloze jiné východisko a potřebovala nalézt oporu v něčem, co znala. Její řešení je uvedeno na obrázku 52 (nakonec po společné diskuzi ve svém řešení opravila výsledek obsahu trojúhelníku). Jiní žáci se snažili přes neznámou dopočítat další rozměry těles, získat výšku trojúhelníku apod. Pomocí otázky: „*Co vše o tělesech víte?*“ jsem se snažila žáky navést k tomu, aby si uvědomili, že nemají zadané pouze rozměry těles, ale že i zadání nese důležitou informaci.

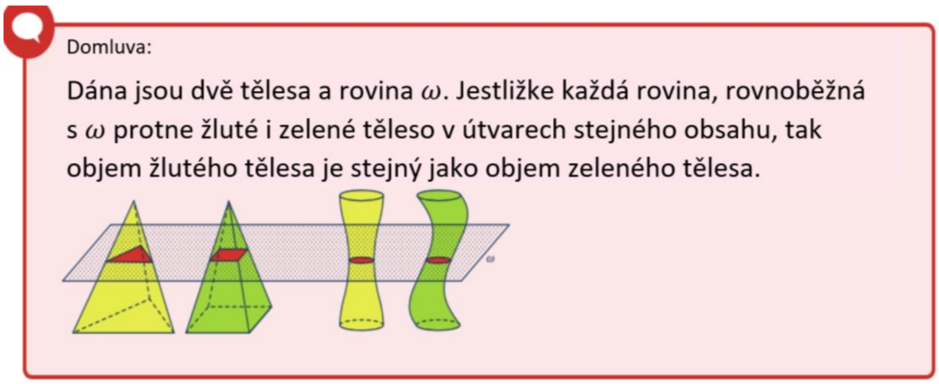
U: „Co to znamená, že mají stejný objem? Vzpomeňte si, co platilo pro ty sloupce papírků. Co měly stejného?“
Ž: „Měly stejné objemy i obsahy v průřezech.“
U: „Co to znamená pro tato dvě tělesa?“
Ž2: „Mají stejný obsah?“
U: „No jasně! Je to naopak než to, co jste doteď dělali.“
Ž2: „Takže ten trojúhelník má stejný obsah jako ten čtverec?“
U: „A proč by měl mít?“
Ž3: „Protože mají oba stejný objem!“
U: „Přesně tak.“
Ž4: „Já to nechápu. Proč by ten trojúhelník měl mít obsah 16,5 cm^2?“
Ž5: „Protože mají stejný objem.“
Ž4: „Co? A jakto?“
Ž5: „To máš v tom zadání!“
Ž4: „Ajo, tady to je v tom zadání.“

Po tomto uvědomění žáků, že v zadání mají odpověď k řešení, všichni správně dopočítali obsah trojúhelníku, který byl už teď jednoduchý.



Obrázek 52 Řešení úlohy 5 - Cavalieriho princip v prostoru

Při závěrečném shrnutí jsem žákům sdělila, že to, co vlastně celou dobu dělali, je platný princip, který vymyslel v 17. století Bonaventura Cavalieri. Princip jsem žákům promítla na tabuli (viz obrázek 53), aby ho viděli a mohli si jej zapsat.



Obrázek 53 Znění Cavalieriho principu (Hejný a kol., 2016)

2.8 Objemy těles pomocí Cavalieriho principu

V této kapitole se budu věnovat tomu, jak se žáci učili objemům jehlanu, kuželu a koule pomocí Cavalieriho principu. Žáci již byli s tělesy seznámeni a věděli, jak spočítat povrch kuželu a jehlanu. Povrch koule se odvozoval až poté, co žáci znali objem koule.

2.8.1 Jehlan

Ve výuce byl zadán úkol, aby žáci sestavili model jehlanu podle zadání:

Vyrobte ze čtvrtky model jehlanu, jehož základnou je čtverec o délce strany 15 cm. Dvě sousední stěny tvořící plášť jehlanu budou pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem k sobě přilehlým. Výška jehlanu je 15 cm.

Žákům bylo zadání napsáno na tabuli, aby jej měli stále před sebou. Sami se rozřadili do trojic, ve kterých pracovali.

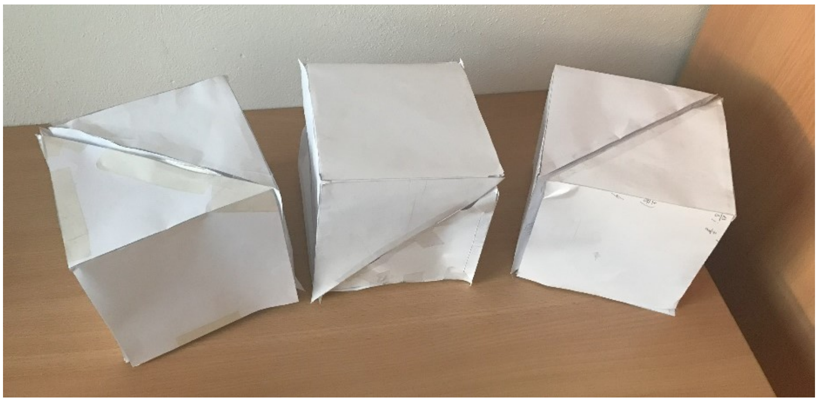
Jedna jediná skupinka přesně pochopila, jak má jehlan podle zadání vypadat (nutno podotknout, že ve skupině byli spolu žáci, kteří normálně o matematiku neprojevují zájem a ani v ní neexcelují). Ostatním skupinám dělalo obtíže pochopit, co znamená, že dvě sousední strany pláště jsou pravoúhlé trojúhelníky. Umisťovali pravoúhlé trojúhelníky místo na sousední strany na strany protější, jiní z toho vyvodili, že všechny stěny pláště budou ze shodných pravoúhlých trojúhelníků.

Moje nápomoc žákům byla v tom, že jsem jim radila, aby si nejprve udělali náčrtek, aby viděli, jak bude jehlan vypadat. Ty skupinky, které tak udělaly, dále pracovaly bez obtíží. Ostatní, které si náčrtek neudělaly, jsem nechala, ať si alespoň připraví části jehlanu, o kterých mají informace ze zadání. Následně, když měli části vystřižené, jsem se ptala, co jim chybí, jaký útvar budou dále vystřihovat, jak ho narýsují, co k tomu potřebují, aby ho narýsovali apod. Mnoho z nich rýsovalo trojúhelníky s výškou rovnou výšce jehlanu, která byla zadaná, proto jsem se jich vyptávala, jaký je rozdíl mezi jehlanem (3D těleso) a trojúhelníkem, který mají vyrobit (2D útvar). Takovou diskuzí si žáci lépe uvědomili, jak by měl výsledný model jehlanu vypadat. Skupinky také často začínaly tím, že vyráběly rovnoramenné trojúhelníky s výškou, která byla zadaná pro jehlan.

Po dokončení výroby modelu, si žáci vzali své jehlany a dostali slovní zadání dalšího úkolu:

Z jehlanů, které jste vyrobili sestavte jiné geometrické těleso. Musíte spolupracovat s celou třídou. Nemusíte použít všechny jehlany.

Bylo celkem devět vyrobených jehlanů od devíti skupinek. V prvních několika sekundách už třetina třídy měla sestavenou krychli ze svých modelů. Ostatní postupovali pomaleji a zkoušeli různé způsoby toho, co lze z jehlanů složit. Nejprve ze čtyř jehlanů sestavili další jehlan. Upozornila jsem, že těleso má být jiným geometrickým tělesem. Po dalších několika pokusech i oni sestavili krychli ze tří jehlanů. Sestavené krychle jsou na obrázku 54.



Obrázek 54 Sestavené krychle z vyrobených jehlanů

Poté jsme výsledky práce shrnuli a začali se věnovat objemu jehlanu:

U: „Jaký objem má tato krychle?“

Ž1: „$V = a \cdot a \cdot 6$!“

Ž2: „To je povrch.“

U: „Proč je to povrch?“

Ž3: „Protože to jsou čtverce a je jich tam šest. Objem je $a \cdot a \cdot a$“

U: „Jak bychom spočítali objem toho jehlanu, ze kterých jste vyrobili tuhle krychli?“

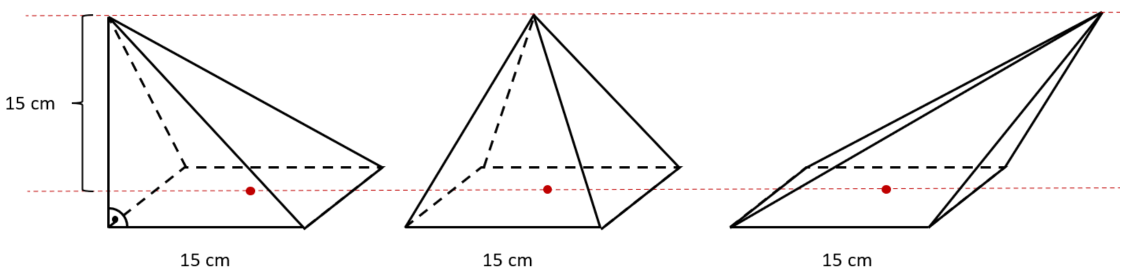
Ž4: „No asi bychom to vydělili třemi, když jsou tři.“

U: „Takže jak spočítáme objem jehlanu?“

Ž4: „Jako třetinu objemu krychle.“

Po shrnutí jsme se přesunuli k další části, která byla vedena formou diskuze nad úlohami, který měli žáci před sebou.

1. *Urči objemy jednotlivých jehlanů, jejichž podstavou je čtverce. Vysvětli svůj postup.*



Obrázek 55 Zadání 1. úlohy o objemu jehlanu

První úloha, a pak i všechny následující, cílily na to, aby si žáci uvědomili, že jehlany budou mít stejný objem, a také aby došli k závěru, že objem každého jehlanu je možné počítat jako třetina objemu hranolu jemu opsanému. U této úlohy jsem také očekávala, že žáci využijí ke zdůvodnění Cavalieriho princip.

Žáci po výrobě modelu jehlanu zjistili, jak se spočítá objem jednoho konkrétního jehlanu. Aby si pro každý jehlan zvlášť nemuseli vytvářet svůj vlastní model, musí vztah zobecnit, aby byl platný pro každý jehlan. Takto jsem i žákům úlohu představila. Zadání jsem doplnila otázkami, na které žáci odpovídali:

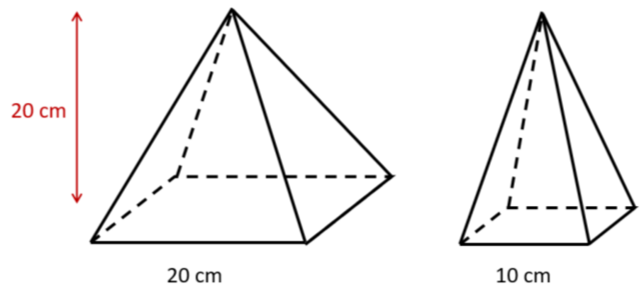
U: „Na prvním obrázku vidíte, to, co jste vyráběli. Jaký má tedy objem? A co ty ostatní?"

Ž1: „Ten poslední vypadá protáhlejší, ten bude mít asi větší objem."

Ž2: „Budou stejné, protože jsou jen posunuté. Ty vrstvy se jen nahnuly."

Argument žáka 2 byl pro všechny ostatní žáky dostačující a všichni jej přijali, jak jsem si ověřila náhodným vyvoláváním žáků. Proto jsme pokračovali další úlohou.

2. *Urči objemy jednotlivých jehlanů, jejichž podstavou je čtverec a mají stejnou výšku. Vysvětli svůj postup.*



Obrázek 56 Zadání 2. úlohy o objemu jehlanu

Původní účel této úlohy byl takový, že by zde mohli žáci využít podobnosti a využít Cavalieriho princip. Ale nechtěla jsem žáky příliš navádět na hledání odpovědi a nechala je, ať si zkusí nalézt odpověď sami. Žáci měli prostor na rozmyšlení, a poté jsem se jich ptala, na co přišli. Žáci se zdráhali odpovídat, a proto jsem jim položila několik otázek, které je mohly nasměrovat:

U: „Co ten první? Můžeme z něho udělat krychli jako předtím? Jaký má objem taková krychle? A jaký je tedy objem jehlanu? Co ten druhý?"

Ž: „Objem bude dvakrát menší."

U: „Proč bude dvakrát menší?"

Ž: „Protože se zmenšil dvakrát."

Ž2: „Uděláme z toho kvádr."

U: „Vzpomeňte si na podobnost. Když se délka zvětšila, jak to bylo s tím poměrem podobnosti? Co jsme si tam odvodili?"

Ž3: „Je menší čtyřikrát."

U: „Proč?"

Ž3: „Protože to jsme dělali u těch obsahů. Délka je menší dvakrát, tak obsah je menší čtyřikrát."

U:" A z kolika jehlanů ho složíme?"

Žáci netušili, jak odpovědět.

U: „Jsou podobné, ten druhý je čtyřikrát menší. A když se podíváme na tu krychli a kvádr, které jsme z nich vyrobili, kolikrát se zmenšil ten kvádr?"

Ž4: „Čtyřikrát."

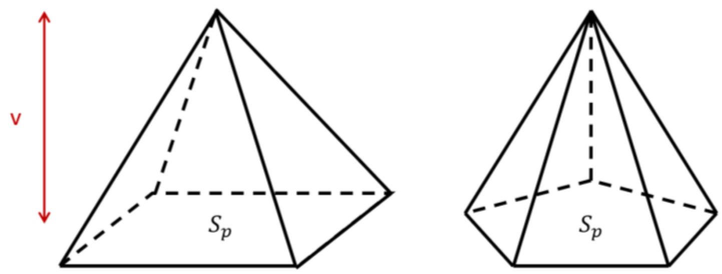
U: „Kolik jehlanů teda na výrobu budeme potřebovat?"

Ž5: „4, 3, 2, …?"

Žáci hádali náhodná čísla a spíše vůbec netušili, jak si s úlohou poradit. Někteří tušili, že pro výrobu hranolu z jehlanů budou potřeba tři jehlany, ale neuměli svou domněnku vysvětlit. Jiní žáci navrhovali, že si to vyrobíme. Samozřejmě by to byla možnost. Proto jsem se žáků zeptala, jak by to udělali s dalšími jehlany. Došli k závěru, že bychom museli vyrábět každý typ jehlanu zvlášť, a tento postup by nebyl příliš časově ekonomický. Znovu jsme prošli od začátku až do konce, co jsme během výuky udělali a v průběhu se snažili každý krok znovu zdůvodnit. Nakonec žáci došli k závěru, že by pro jehlan v zadání použili tři takové jehlany, aby sestavili kvádr. Hledání poměru podobnosti žákům připadalo příliš složité a od této myšlenky utíkali a raději se vraceli k výrobě kvádru z několika jehlanů. Výroba jehlanů jim zřejmě přišla více uchopitelná, uměli by je vyrobit, a čistě matematické odvozování z podobnosti pro ně bylo příliš abstraktní.

Následovala poslední úloha, která měla zobecnit objem jehlanu na všechny typy jehlanů (n-boké):

3. *Urči objemy jednotlivých jehlanů, jejichž podstavy mají stejný obsah a jsou stejně vysoké. Vysvětli svůj postup.*

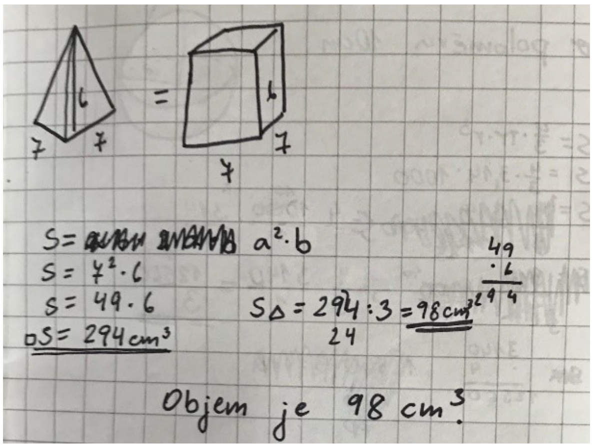


Obrázek 57 Zadání 3. úlohy o objemu jehlanu

Úloha byla zamýšlena stejným způsobem jako úloha předchozí. Žáci však stále hledali způsoby, jak by z jehlanů vytvořili hranoly a zkoumali, kolik takových jehlanů by se vešlo do pětibokého hranolu. Informaci ze zadání, že jehlany mají stejný obsah podstavy, nevyužívali a nepracovali s ní. Snažila jsem se jim připomínat, aby u úlohy využili zadání, ale žáci jej nebrali v potaz a stále se vraceli k jejich myšlence o plnění hranolů jehlany.

Pro žáky bylo těžko uchopitelné to, jak by mohli takové pětiboké jehlany seskládat do hranolu, a jestli na jeho sestavení budou potřeba také tři nebo jiný počet. Nakonec žáci přešli k jednodušší variantě, a to k trojbokému jehlanu, protože se jim lépe kreslil. Zdůvodnili si mezi sebou, že se do trojbokého hranolu poskládají tři trojboké jehlany, jak vyvodili z nakresleného obrázku, který si vytvořili. Řekli si, že když to platí pro trojboký a čtyřboký jehlan, pak to bude určitě platit i pro pětiboký. Pro ně to byl dostatečně přesvědčivý argument. Vyvodili, že ze tří n-bokých jehlanů vyrobíme n-boký hranol. Shrnuli jsme tedy na závěr, jak se počítá objem hranolů, a jak z něj vypočítáme objem jehlanu. Závěrečný zobecněný vztah pro objem každého jehlanu $V = \frac{1}{3} S_p v$ si žáci zapsali do sešitů.

V procvičovací úloze pak žáci často využívali k počítání objemu jehlanu právě hranoly. Nejprve si spočítali objem hranolu a následně dělili jeho objem třemi. Ukázka takového výpočtu žáka je na obrázku 58. Žák si ještě k zadání hranol přímo nakreslil. Ke značení objemu však používá písmeno S místo V, což je jen formální záležitost a nemá vliv na žákovo uvažování o objemu jehlanu.



Obrázek 58 Žákův výpočet objemu jehlanu

2.8.2 Kužel

Při výuce objemu kuželu, dostali žáci za úkol vyrobit ve dvojicích plášť kuželu tak, aby měl kužel stejný obsah podstavy a výšku jako zadaný válec, jehož model dostali (jeden takový žáky vyrobený kužel je na obrázku 59). Úloha byla inspirovaná úlohou od Bímová a kol. (2019). Pro výuku jsem použila jako modely válců prázdné konzervy. Dále žáci pro výrobu potřebovali čtvrtky, nůžky, izolepu a igelitový sáček.

Někteří žáci si bez problémů s úkolem poradili a dali se do vyrábění. Jiným dělalo obtíže načrtnout jen samotný plášť kuželu (nebo jeho síť), který měli vyrobit. Kreslili různé útvary, jako například trojúhelník nebo „kornout s kopečkem“, a nedařilo se jim plášť z nich vyrobit. Někteří dostali takový model válce, že plášť kuželu tvořila půlkruh, a mysleli si proto, že to mají špatně, a tak přeměřovali jeho rozměry. To i přesto, že jsme v předchozích hodinách takové pláště kuželů viděli od jiných jejich spolužáků jako modely při zavádění tohoto tématu.

Největším problémem pro žáky bylo naměřit poloměr kružnice, ze které se vyráběla kruhová výseč pro plášť kuželu. Někteří žáci dopočítali poloměr kruhu, za které se vyráběla kruhová výseč, pomocí Pythagorovy věty s využitím výšky válce a poloměru jeho podstavy, ostatní použili výšku válce jako poloměr vyráběné kruhové výseče (délku strany kuželu), což ale odhalili až u další části úkolu.

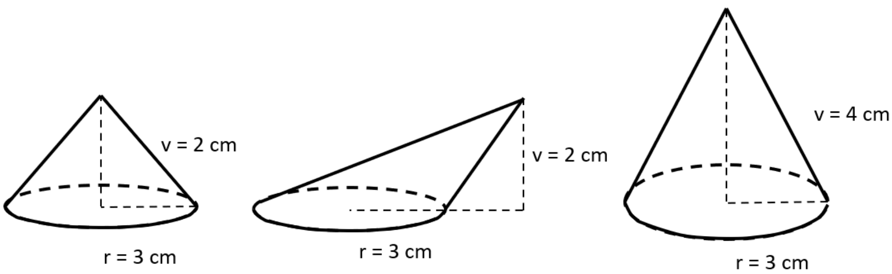
Po dokončení výroby pláště, vyložili žáci model igelitovým sáčkem (aby se papír nepropil), naplnili kužel vodou a měli zjistit, kolikrát přelijí objem kuželu do válce. Dvojice, které správně určily rozměry pláště kuželu, zjistily, že se objem kužel vejde do válce třikrát. Dvojice, které neměly správně vyrobený plášť kuželu, naměřily, že se objem kuželu vejde do válce čtyřikrát. Zde jsme objevili, že udělali chybu a snažili se přijít na to, co se nepovedlo. Prošli jsme společně celý jejich postup a odhalili, že u rýsování kruhové výseče použili jako poloměr výšku válce, a ne délku strany kuželu, která se měla dopočítat. Bylo možné žáky více ohlídat během výroby pláště, aby se chyby nedopustili, ale tím by zase přišli o možnost chybu udělat a z ní se poučit.

Poté jsme shrnuli, co žáci objevili a začali jsme výpočet pro objem kuželu zobecňovat.

Obrázek 59 Kužel se stejnou podstavu a výšku jako zadaný válec

Pro zobecnění jsem použila obdobnou úlohu jako u zobecňování objemu jehlanu:

Urči objemy těles na obrázku. Najdi co nejjednodušší způsob řešení.



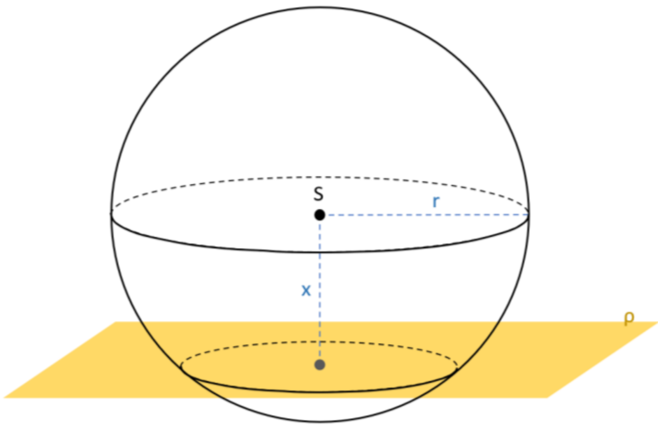
Obrázek 60 Zadání úlohy na zobecnění objemu kuželu

Nikomu ze žáků nedělalo obtíže pochopit a dokázali hned i zdůvodnit, proč i jiné kuželi mají třetinový objem válce se stejnou výškou a podstavou, a proč to neplatí jen pro daný kolmý kužel, který vyrobili. Jako důvody uváděli, že druhý kužel na obrázku je jen nahnutý (vrstvy se posunuly), a proto mají první dva stejný objem. U třetího kuželu na obrázku uvedli, že se z něj vyrobí válec a do něj se jeho objem vejde třikrát, tak jak to předtím vyrobili. Modely válců v podobě konzerv, které byly použity pro výrobu, byly různě velké, získali žáci několik izolovaných modelů pro objem kuželu, proto bylo zřejmě pro ně jednodušší pochopit a zobecnit vztah pro objem kuželu. Také objem kuželu je jistou analogií pro objem jehlanu.

2.8.3 Koule

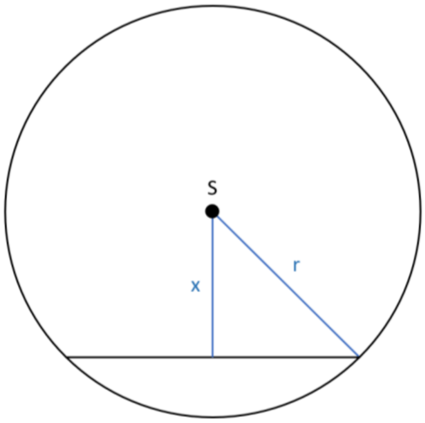
Při výuce tématu koule se žáci nejprve seznámili s tělesem jako takovým, a že jej budeme probírat trochu jinak, protože je v jistém ohledu specifická. Na výuku jsem měla připravený model koule, ze kterého lze odebírat části koule po vrstvách. Následující zadání úloh je převzato z učebnice *Matematika E* od Hejného a kol. (2017):

Kouli o poloměru r rozřízneme rovinou ρ, která je od středu koule S vzdálená x. Zjistěte obsah řezu.



Obrázek 61 Průnik koule a roviny

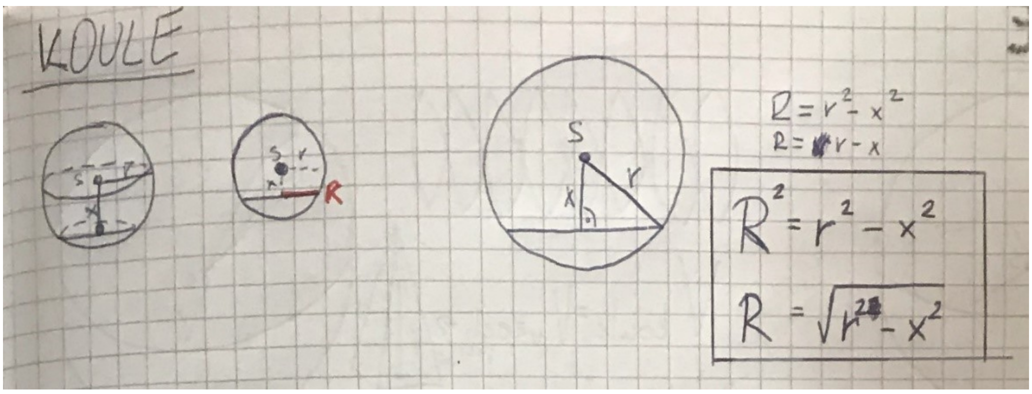
Začali jsme tím, že jsme na modelu koule „odřízli“ vršek koule a snažili se přijít na to, jak bychom mohli zjistit plochu jejího průřezu. Nejprve jsme se bavili o tom, jaký tvar řezem koule vznikl. Žáci odpovídali, že vznikla kružnice, pak se opravili, že vznikl kruh. Dále jsme se zabývali tím, jak by bylo možné zjistit obsah kruhu, který vznikl řezem roviny a koule. Došli jsme k tomu, že potřebujeme zjistit jeho poloměr. Při sbírání nápadů, jak bychom mohli na poloměr přijít, navrhovali žáci, že bychom mohli využít válec, neboť jsme ho využívali u předchozího zavádění těles (u kuželu). Jiný důvod však pro to neměli. Že bychom se mohli na kouli podívat z jejího průřezu, nenapadlo nikoho. Proto jsem pohled z tohoto úhlu pohledu nabídla, viz obrázek 62.



Obrázek 62 Řez koulí

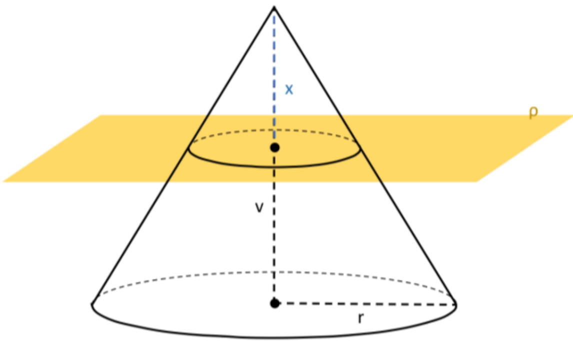
V průřezu koule začali žáci objevovat různé útvary a navrhovali, co vše vidí: obdélník, pravoúhlý trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník atd. Během toho žáci na tabuli ukazovali, kde tyto útvary vidí a zároveň měli i navrhovat, jak bychom pomocí daného útvaru došli k hledanému poloměru. Také žáci navrhovali, že by využili kruhovou výseč, protože ji už znají.

Nápad s rovnoramenným trojúhelníkem byl stěžejní, protože tím si žáci uvědomili, že u tohoto útvaru vystupuje hledaný poloměr. Z toho je napadlo využití Pythagorovy věty a dopočítání poloměru. Záznam úpravy výrazu ukazuje obrázek ze sešitu žákyně na obrázku 63. S výsledným výrazem jsme dopočítali obsah řezu koule s rovinou, který jsme hledali $S = \pi R^2 = \pi(r^2 - x^2)$.

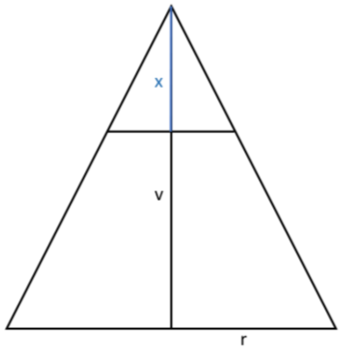


Obrázek 63 Výpočet obsahu řezu koule s rovinou

Další úlohou bylo stejným způsobem zjistit obsah řezu kuželu a roviny rovnoběžné s podstavou kuželu, viz obrázek 64. Hledání obsahu žáci provedli obdobným způsobem jako u kuželu. Více nápomocný jim byl rovinný pohled na kužel (viz obrázek 65) stejně jako u předchozí úlohy. Změnou ale bylo to, že se zde měla využít podobnost trojúhelníků. Žáci, kteří zapomněli, co o podobnosti vědí jsem nabídla úlohu: *Zjisti, zda jsou podobné dva pravoúhlé trojúhelníky s délkami odvěsen 9 a 5 cm a druhý 3 a 2,5 cm*. Úlohu vyřešili, připomněli si podobnost, a pak pokračovali v započaté práci na předchozí úloze.



Obrázek 64 Průnik kuželu a roviny rovnoběžné s jeho podstavou



Obrázek 65 Řez kuželu

Podobnost trojúhelníků žáci odhadli z pohledu na obrázek 65. Pak ji zdůvodnili tím, že strany trojúhelníků jsou rovnoběžné a mají proto stejný úhel a zároveň jeden úhel je pravý. Využili tedy větu *úhel-úhel*. Poměr podobnosti žáci rychle odhalili a došli ke vztahu:

$$\frac{v}{x} = \frac{r}{R},$$

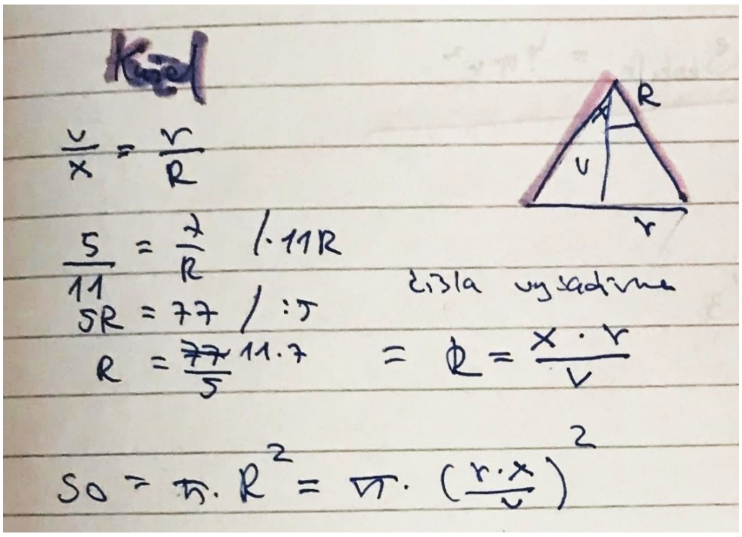
(kde R značí hledaný poloměr) což je parametricky zadaná rovnice, pro žáky devátého ročníku nesnadně řešitelná. Po domluvě s nimi jsme za parametry dosadili čísla, která nebyla soudělná, a také jsme se domluvili, aby čísla mezi sebou nenásobili. Jeden z žáků se dotázal, co kdybychom dosadili za parametry „hezčí čísla“. Myslel tím čísla soudělná. Vysvětlila jsem, že by se mohlo stát, že by je v průběhu úpravy zkrátili. Přitom ale nevíme, jestli je to možné, a mohl by nám vyjít zkreslený výsledek. Proto je lepší dosadit obecnější čísla – nesoudělná. Získali jsme tak pro žáky přívětivější podobu rovnice

$$\frac{5}{11} = \frac{7}{R}.$$

Žáci tuto rovnici zvládli upravit, jiní na konci dosadili místo čísel zpět parametry v, x, r, někteří dokonce rovnou upravovali parametricky zadanou rovnici. Všichni získali výsledek

$$R = \frac{xr}{v}.$$

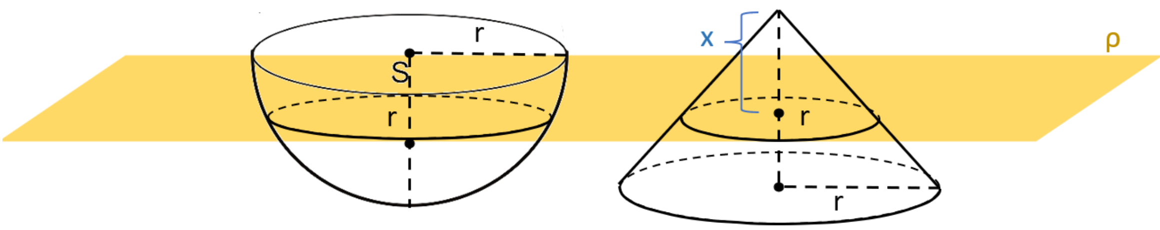
Úpravu rovnice jednoho žáka uvádím na obrázku 66. Žák zde počítal s dosazenými čísly a na závěr, jak uvádí, čísla „vysadil“, čímž myslel, že zpět dosadil parametry. Také v posledním řádku úpravy vynásobil $11 \cdot 7$, což sám opravil, právě když zjistil, že by jinak nemohl dosadit zpět parametry. V závěru žák i upravil výsledný vztah pro obsah kruhu, který vznikl řezem kuželu.



Obrázek 66 Úprava rovnice pro výpočet poloměru řezu kuželu ze sešitu žáka

V poslední úloze měli žáci sečíst obsahy řezů polokoule a kuželu:

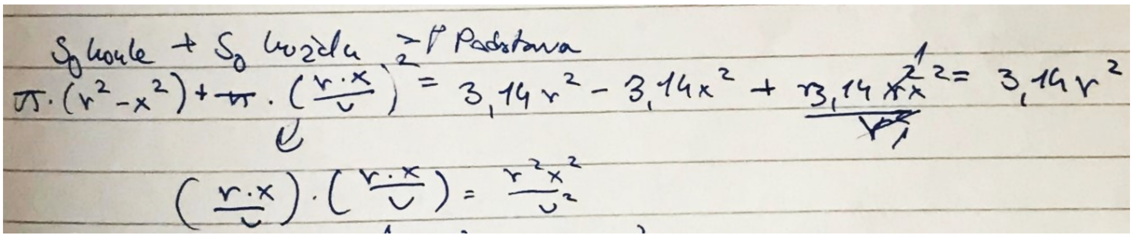
Zjistěte, v jaké výšce máme umístit rovinu, aby součet obsahů obou kruhů byl co nejmenší.



Obrázek 67 Řez polokoulí a kuželem

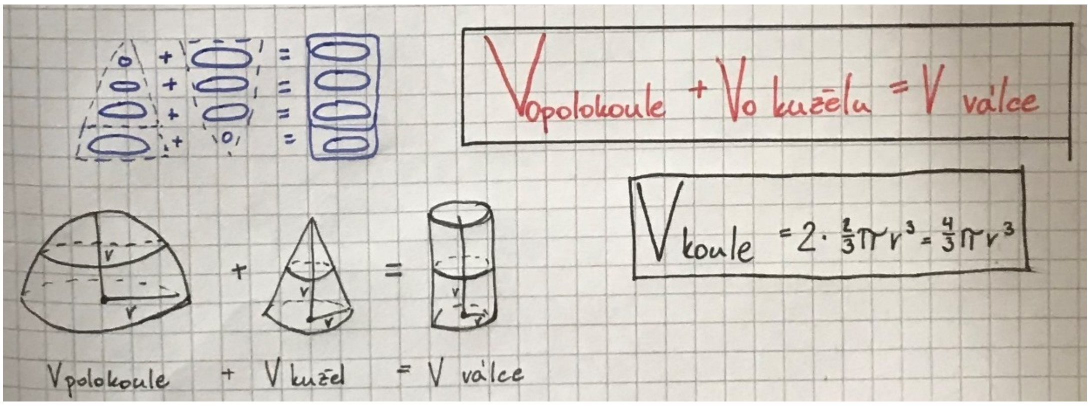
Předchozí úlohy napomohly k tomu, že zde měli žáci už jen pracovat s předchozími výsledky a nemuseli se zabývat úpravami rovnic. Jediná změna oproti předchozím úlohám byla ta, že výška kuželu byla stejná jako poloměr polokoule, tedy $v = r$, jak ukazuje obrázek 67. Tato část dělala žákům obtíže, nejspíš proto, že si pořádně nepřečetli zadání, a pracovali rovnou s neupravenými výsledky z předchozích úloh.

Poté, co měli žáci prostor na samostatný výpočet, náhodně vyvolaný žák upravil na tabuli výraz: $S_{řez\ polokoule} + S_{řez\ kuželu}$, ze kterého úpravou vyšel výsledek πr^2. S jeho výsledkem se shodovaly i výsledky ostatních žáků (např. i výsledek žáka z obrázku 68, který dosadil zaokrouhlenou hodnotu $3{,}14$ za π). Žáci si i propojili, že výsledný vztah představuje obsah kruhu, poté co jsem se jich zeptala, co výsledný výraz znamená.



Obrázek 68 Úprava vztahu pro součet obsahů řezů koule a kuželu za sešitu žáka

Protože v zadání byl jeden konkrétní řez, zeptala jsem se žáků, co by vyšlo, kdybychom řez udělali v jiné výšce. Tím jsem cílila na to, abychom zobecnili výpočet. Bez obtíží žáci vysvětlili, že by opět vyšel obsah kruhu, protože by tam byly stejné výrazy. Následně jsme shrnuli, k čemu jsme se dostali. Pro žáky bylo problematické vyjádřit, co znamenají získané výsledky jako celek. Protože se osvědčilo v minulých hodinách, že lépe porozumí, když k úvahám dostávají vizuální oporu, nakreslili jsme na tabuli, jak by mohl vypadat řez polokoule a kuželu v různých výškách. Začali jsme od spodu. Dále jsme kreslili, jak by vypadaly řezy výš. Takto jsme postupovali až k vrcholu kuželu. Sečtením těchto řezů nám vždy vyšel jeden a ten samý kruh, viz obrázek 69. Z toho bylo žákům jasné, že součtem objemů polokoule a kuželu získáme objem válce. Museli jsme ještě výsledek matematicky zapsat. Pak už krátkou úpravou rovnice žáci dospěli ke vztahu pro výpočet objemu polokoule a od polokoule se dostali k objemu koule. Záznam úpravy výrazu je na obrázku 69.



Obrázek 69 Součet objemu kuželu a objemu polokoule se rovná objemu válce

2.9 Vyhodnocení výuky

V první řadě bych chtěla zmínit, že celý výukový experiment probíhal měsíc před jednotnými přijímacími zkouškami na střední školy, na které se připravovalo 20 z 29 žáků ve třídě. Tato situace se na nich samozřejmě podepsala. Žáky bylo obtížné motivovat jakýmkoli způsobem, aby se zapojili do výuky, která nebyla zaměřená přímo na témata z přijímacích zkoušek. Také žáci rádi používali naučené vzorečky, které se učili právě na přijímací zkoušky, a bylo pro ně těžké myslet na něco jiného, nebo se na úlohy dívat jinak.

Častým problém také bylo, že žáci nedočetli zadání nebo mu nevěnovali dostatečnou pozornost a docházeli tak k chybným závěrům. Občas se i stalo, že své snažení vzdali předem. Musela jsem se proto stále ptát žáků, co přesně se v zadání píše, aby si ho důkladně přečetli a stále na něj odkazovat.

2.9.1 Povrchy těles

Zavádění povrchů těles probíhalo činnostmi, při kterých žáci vyráběli sítě těles. Zaváděly se tak povrchy jehlanu a kuželu. Žáci buď ve skupinkách nebo samostatně měli z papíru vyrábět sítě těles a v nich hledat známé geometrické útvary a počítat jejich obsahy.

Síť jehlanu hledali tak, že obalovali model, který měli před sebou a bylo pro ně snazší síť nalézt. Zřejmě asi také proto, že jeho síť se i skládá ze známých útvarů. Pro síť kuželu žáci model neměli a museli proto více pracovat s prostorovou představivostí. Ukázalo se, že tím byla úloha pro ně náročnější. Protože ne všichni žáci síť kuželu správně vyrobili a svou práci ani neopravili, měli pak potíže při výrobě modelu, který vyráběli pro účely nalezení vztahu pro objem kuželu. Při hledání vztahu pro povrch kuželu se museli žáci naučit počítat obsah kruhové výseče. Byly jim nabídnuty dva způsoby. Dle výpovědí žáků ze závěrečné reflexe záleželo na pořadí představení způsobů. Žákům připadal vhodnější způsob, který byl delší, ale uveden jako první, který vztah pro obsah kruhové výseče využíval poměru mezi obsahy a obvody kruhové výseče a kruhu, ze kterého je kruhová výseč odříznuta.

Přístup k odvození vztahu pro povrch koule byl žákům nabídnut, ale jen úvodní myšlenka, kterou pak sami rozvíjeli. Žáci ukázali, že dokáží pracovat s obecnými vyjádřeními vztahů a upravovat je. Také ukázali, že dokáží pracovat s představou neznámého počtu těles, které v odvození a úpravách výrazů vystupovaly, a s čímž se doposud nesetkali.

2.9.2 Cavalieriho princip v rovině

Zavedení Cavalieriho principu proběhlo tak, že se žáci nejprve s Cavalieriho principem seznamovali pomocí připravených úloh, ale netušili, že se jedná o nějaký speciální princip. Samotné porovnávání obsahů útvarů s jeho pomocí žáci zvládali. Při manipulacích se špejlemi a u úloh, kde je mohli využít, správně argumentovali, že obsahy jsou stejné, protože délky špejlí jsou v každé části útvaru stejně dlouhé. Obtížné však pro ně bylo aplikovat tyto úvahy v jiných úlohách. U úloh, především zaměřených na obsah trojúhelníku, bylo pro žáky překážkou, že počítání obsahu trojúhelníku měli upevněné v paměti a byli zvyklí počítat jej pomocí vzorečku. Nikde se v průběhu řešení těchto úloh a v následných diskuzích neprokázalo, že by si žáci počítání obsahu trojúhelníku spojili s Cavalieriho principem. Buď mohli stále ještě setrvávat na hladině izolovaných modelů nebo, což je pravděpodobnější, nedošlo ke krystalizaci pojmu o obsahu trojúhelníku, který už dávno měli ve stádiu abstraktního poznatku, protože v tom zřejmě neviděli důvod.

Pokud by žáci byli s Cavalieriho principem v rovině seznámeni dříve, ještě před zaváděním obsahu trojúhelníku, měl by, podle mě, experiment v této části větší úspěch. Mezi žáky se ale našli i tací, kterým tento postup dal jakýsi nadhled a vhled do tématu, a u těch pár z nich docházelo k AHA-momentům, kdy se dozvěděli, že pro výpočet obsahu trojúhelníku stačí umět počítat pouze obsah obdélníku.

2.9.3 Cavalieriho princip v prostoru

Cavalieriho princip v prostoru byl pro žáky uchopitelnější, zřejmě proto, že pracovali s novým tématem a veškeré poznatky si teprve konstruovali. Nemálo žáků používalo i k argumentaci na porovnávání objemů těles Cavalieriho princip, i když jeho přesné znění zatím neznali (viz výroky žáků z pracovního listu v oddíle 2.7.2). Všichni žáci u úlohy 1 z pracovního listu na téma Cavalieriho princip v prostoru správně zdůvodňovali, proč mají všechna tělesa v zadání stejný objem, což jsem si ověřila během individuálních rozhovorů při procházení třídou. Když žáci narazili na novou úlohu, jako například úloha 3 nebo 5 v uvedeném pracovním listě, často se zdráhali nad úlohou se alespoň zamyslet a raději říkali, že to nejde, nebo že se to neučili.

Žáci prokázali, že u porovnávání objemů uvažují pomocí Cavalieriho principu a často pro porovnání používali výroky jako „těleso se (ne)zužuje“, čímž naznačovali, že těleso (ne)má stejný obsah ploch v průřezu rovinou. Ještě u úloh, kde žáci počítali objemy těles, někteří ukázali, že aplikovat Cavalieriho princip dokáží (viz obrázek 51). Ostatní žáci počítali objemy bez využití principu a snažili se příklady počítat jinými způsoby.

2.9.4 Zavádění objemů těles

Během výuky, která cílila na zavedení objemů těles pomocí Cavalieriho principu, nastalo nemálo překážek. Nejprve se ukázalo, že žákům dělá obtíže manuální výroba modelů těles. Žáci nesnadně pracovali s představou, jak by měly jejich modely vypadat, a to jak u jehlanu, tak i u kuželu. Buď si vůbec neuměli s úkolem poradit a potřebovali velkou oporu v učiteli nebo bezmyšlenkovitě vyrobili model (nebo část modelu), a když jejich výsledek nevypadal podle jejich očekávání, bez dalšího uvážení nebo počítání jen vyrobili jinou podobu modelu.

Při zobecňování objemů, poté co žáci věděli, jak spočítat objem konkrétního jednoho tělesa, a měli přejít k tomu, že je vztah platný i pro všechny ostatní, a proč, se u žáků neprojevilo propojení na Cavalieriho princip. Raději se snažili nalézt jiné důvody, jako například zobecňování u objemu jehlanu, viz oddíl 2.8.1. Ve výjimečných případech jeden či dva žáci takovou argumentaci využili. Úlohy, které vedly k odvozování objemů jehlanu a kuželu, byly pro žáky zřejmě příliš obecné až abstraktní a často se při nich diskutovalo a málo počítalo, na což nebyli příliš zvyklí. Žáci často zůstávali na úrovni izolovaných modelů a poznatky nezobecňovali i přesto, že tak byly připraveny úlohy.

U objevování objemu koule úlohy přímo na využití Cavalieriho principu cílily. Úlohy byly více konkrétní a žákům se snadněji u nich přemýšlelo, zřejmě proto, že úlohy byly více počítací. Výpočty někteří žáci zvládali i parametricky, jiní dokázali upravovat rovnice alespoň s dosazenými čísly a nebylo pro ně tak obtížné dopracovat se k výsledku. Potíže dělala interpretace výsledků, když měli žáci vysvětlit, co jim vyšlo. Jak se pak ukázalo, byla k interpretaci potřeba vizuální podpora toho, na co přišli, kterou jsem uvedla na konci oddílu 2.8.3. Při uvádění argumentací, na co žáci přišli, nepoužíval nikdo přímo, že využil Cavalieriho princip. Ve výrocích žáků se však ukazovaly alespoň náznaky principu, kdy například říkali, že objem polokoule získáme z odečtení objemu kuželu od objemu válce, protože v každém průřezu u předchozího výpočtu vyšel kruh (viz oddíl 2.8.3).

Závěr

Cílem mé práce bylo připravit a realizovat výuku na zavádění objemů vybraných těles s pomocí Cavalieriho principu. V teoretické části byl nejprve popsán pojmotvorný proces a charakterizována teorie generického modelu spolu s konstruktivistickým a transmisivním přístupem k výuce. Dále byla provedena rešerše a analýza učebnic, které zavádějí objemy jehlanu, kuželu a koule. Z některých úloh uvedených v učebnicích byl sestaven plán výuky pro výukový experiment. Jiné úlohy byly jen inspirací a některé naopak příkladem toho, jak bych výuku vést nechtěla. Jednalo se především o úlohy s transmisivním přístupem.

Do výuky jsem žákům připravovala pracovní listy nebo zadání úloh, které jsem s pomocí projektoru promítala na tabuli, a vyráběla pomůcky (špejle pro úvodní část o Cavalieriho principu). Smyslem bylo připravit takové vyučovací hodiny, aby byly pro žáky dostatečně podnětné a žáci v nich mohli objevovat pojmy.

Během výukového experimentu jsem se snažila do uvažování žáků příliš nezasahovat a respektovat jejich nápady, i když se někdy odchýlily od původního záměru výuky. Uvědomuji si, že v některých situacích jsem se snažila žáky až příliš nasměrovat svými otázkami a dotlačit je k očekávané odpovědi, což nebylo přínosné. Pro příště bych mohla být více připravena na situace, ve kterých žáci půjdou při odvozování vztahů vlastní cestou, a lépe na ně reagovat.

V první části jsme se věnovali zavedení těles jehlan a kužel, při které se žáci seznámili s jejich částmi a objevovali, jak vypadá jejich síť a následně, jak je možné zjistit jejich povrch. I když povrch těles není tématem této práce, je jeho nedílnou součástí. Žáci v této části projevili, že jsou schopni odvozovat vztahy pouze s proměnnými a upravovat rovnice s parametry.

U výuky o Cavalieriho principu se ukázalo, že pro jeho zavádění v rovině není vhodný až devátý ročník. Pro účely této práce však nebyla jiná možnost. Výuka o Cavalieriho principu v prostoru mohla být obohacena o další pomůcky, které by podpořily představivost žáků, a se kterými by mohli žáci ve výuce manipulovat. Příkladem by mohla být tělesa, která by se dala rozčlenit na jednotlivé vrstvy vzniklé řezy rovinou rovnoběžnou s jejich podstavou. Žáci by mohli vrstvy porovnávat mezi jednotlivými tělesy a ověřovat, jestli mají stejný obsah. Žáci v této části také prokázali, že dokáží využívat Cavalieriho princip u izolovaných modelů, a především u úloh, kde se pouze porovnávali obsahy nebo objemy. U aplikačních úloh se v jejich odpovědích odkazy na Cavalieriho princip neukázaly.

Při výrobách modelů těles se ukázalo, že žáci nejsou příliš zruční ve vyrábění a mají potíže s prostorovou představivostí. Jejich dovednosti v těchto dvou oblastech je potřeba více rozvíjet. Například častějším zařazováním úloh na vyrábění modelů nebo kreativního rýsování pro rozvoj zručnosti.

Vrcholem experimentu bylo odvození vztahů pro objem jehlanu, kuželu a koule, které měli žáci objevit s využitím Cavalieriho principu. U odvozování objemu jehlanu se u žáků projevila miskoncepce při zobecňování vztahu pro jeho objem. Žáci potřebovali konkrétní představu toho, jak vztah zobecnit a přišli tak se způsobem, který neuváděla žádná z učebnic. Sice to nebylo v souladu s cílem, kterým bylo, aby k odvození došli skrze Cavalieriho princip, ale dává nám to možnost dalšího pojetí přístupu k tomuto učivu. Mohla by to být pro další učitele inspirace. Bylo by vhodné vyrobit více modelů jehlanů, aby se ve výuce neobjevily jen čtyřboké jehlany, a žáci by tím získali větší množství izolovaných modelů. Pro odvození objemu kuželu se ukázalo, že žáci pro zobecnění vztahu myšlenky principu používají, ale stále jen izolovaně. Objem koule byl nejvíce na odvození pomocí Cavalieriho principu připravený, a proto se u žáků více ukázalo, že jej alespoň ve zdůvodnění používají.

Během psaní diplomové práce jsem získala větší přehled o dostupných učebnicích. Bylo pro mě milým překvapením, že konstruktivistický přístup neuvádějí jen učebnice od nakladatelství H-mat. Získané zkušenosti z výukového experimentu mě také obohatily pro další roky mé pedagogické činnosti.

Seznam použité literatury

Andersen, K. (1984). *Cavalieri's Method of Indivisibles.* Aarhus: University of Aarhus.

Bímová, D., Blažková, R., Břehovský, J., Budínová, I., Hrčková, K., Jančařík, A., Jirotková, D., Kaňková, Š., Kloboučková, J., Moravcová, V., Nováková, V., Novotná, J., Robová J., Samková, L., & Vondrová, N. (2019). *Náměty na aktivity rozvíjející matematickou gramotnost* (1. vyd.). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. Načteno z https://pages.pedf.cuni.cz/sc25/files/2020/02/N%C3%A1m%C4%9Bty-na-aktivity-rozv%C3%ADjej%C3%ADc%C3%AD-matematickou-gramotnost.pdf

Binterová, H., Fuchs, E. & Tlustý, P. (2010). *Matematika 9 pro ZŠ a víceletá gymnázia – Geometrie učebnice*. Plzeň: Fraus.

Cavalieri, B. (1653). *Geometria indivisibilibus continuorum: noua quadam ratione promota.* Bologna: Ex Typographia de Ducijs.

Gray, J. (1987). *The Route to Calculus: Unit 9 (Course MA290)*. Milton Keynes, Bucks: The Open University.

Hartl, P., & Hartlová, H. (2015). *Psychologický slovník.* Praha: Portál.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně.* Praha: Univerzita Karlova: Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.

Hejný, M., & Rybárová, J. (1984). *Pojmotvomý proces vo vyučování matematiky.* Bratislava: Matematicko-fyzikálnní fakulta UK.

Hejný, M., & Šalom, P. (2017). *Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia* (1. vyd.). Praha: H-mat, o. p. s.

Hejný, M., & Šalom, P. (2018). *Matematika C, pracovní sešit pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia* (1. vyd.). Praha: H-mat, o. p. s. .

Hejný, M., & Šalom, P. (2018). *Matematika F, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia* (1. vyd.). Praha: H-mat, o. p. s. .

Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2019). *Matematika EF, příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia* (1. vyd.). Praha: H-mat, o. p. s. .

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., Jirotková, D., & Sukniak, A. (2017). *Matematika CD: příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia* (1. vyd.). Praha: H-mat, o. p. s. .

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Sukniak, A., & Urbánek, L. (2016). *Matematika C: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia* (1. vyd.). Praha: H-mat, o. p. s.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2001). *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií: Jehlany a kužely.* Praha: Prometheus.

Kadleček, J. (1996). *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy.* Praha: Prometheus.

Krynický, M. (18. 10. 2021). *Tělesa.* Načteno z realisticky: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/05%20Stereometrie/04%20T%C4%9Blesa/02%20Objemy%20a%20povrchy%20mnohost%C4%9Bn%C5%AF%20I.pdf

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2013). *Matematika pro 9. ročník ZŠ, 2. díl.* Praha: Prometheus.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development*. Chicago: University of Chicago Press.

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus.

Polák, J. (2014). *Didaktika matematiky.* Praha: Fraus.

Pomykalová, E. (1993). *Matematika pro gymnázia: Planimetrie.* Praha: Prometheus.

Pomykalová, E. (1995). *Matematika pro gymnázia: Stereometrie.* Praha: Prometheus.

Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2013). *Pedagogický slovník.* Praha: Portál.

Půlpán, Z., Čihák, M. & Trejbal, J. (2010). *Matematika 9 pro základní školy – Geometrie*. Praha: SPN.

Rámcové vzdělávací programy, c2011-2021. Národní pedagogický institut České republiky (dříve Národní ústav pro vzdělávání) [online]. Praha: Národní ústav pro vzdělávání [cit. 2023-07-06]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/rvp

Školní vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: ZŠ Hostivař, 2021. [cit. 2023-07-06]. Dostupné z: http://www.zshostivar.cz/svp/svp.pdf

Tlustý, P. & Huclová, M. (2020). *Matematika 9 s nadhledem 2v1: Hybridní pracovní sešit*. Praha: Fraus.

Trejbal, J. (1999). *Matematika pro 9. ročník základní školy - 2. díl.* Praha: SPN.

Vondra, J. (2014). *Matematika pro střední školy - 6. díl: Stereometrie - učebnice.* Praha: Didaktis.

Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč*. Praha: SPN.

Vygotskij, L. S. (1976). *Vývoj vyšších psychických funkcí*. Praha: SPN.

Www.realisticky.cz: když (se) chcete naučit... [online]. Česká republika: Martin Krynický, ©2010 [cit. 2023-07-01]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz

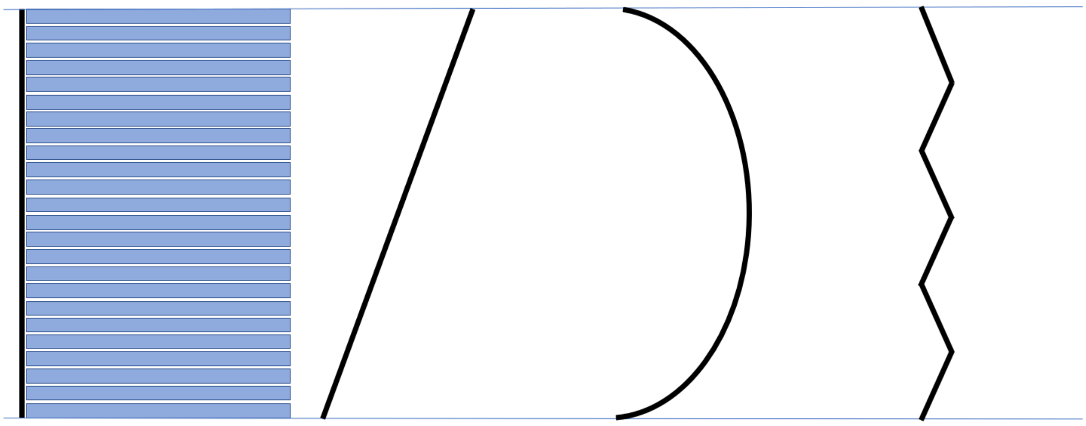
Seznam příloh

Seznam obrázků

Přílohy

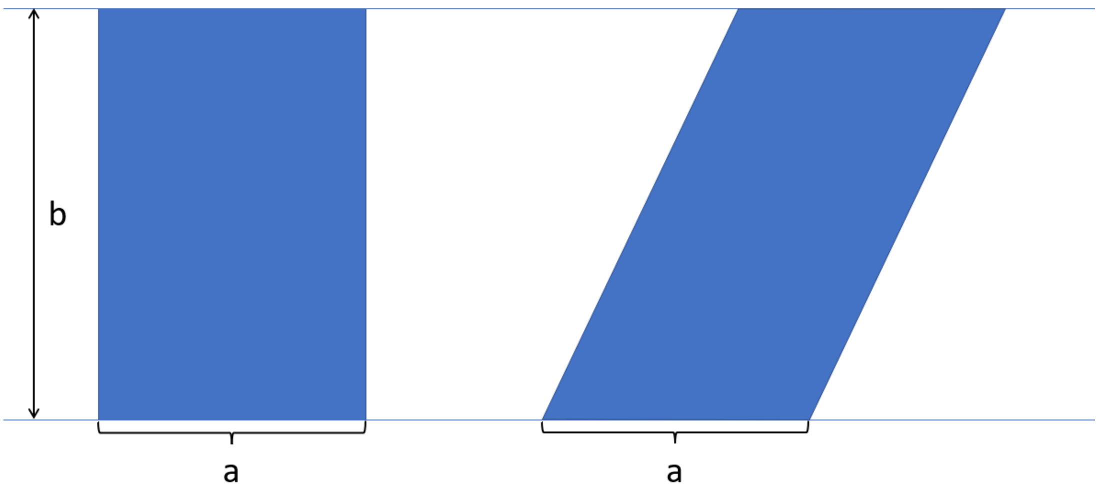
Příloha 1 – Pracovní list: Cavalieriho princip v rovině

1. Ariana vyskládala špejle podél černé úsečky. Každou špejli položila vodorovně a tak, aby se levým koncem dotýkaly černé úsečky. Špejle skládala těsně k sobě.



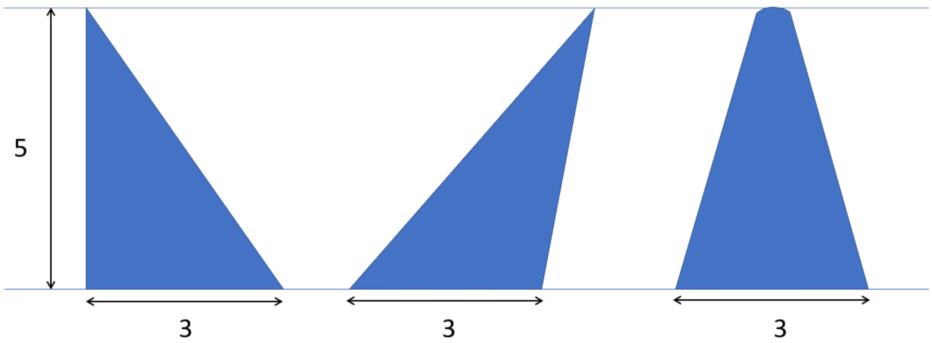
Vyskládejte špejle vodorovně podél šikmé úsečky, oblouku i vlnky. Zjistěte, který ze čtyř útvarů má největší obsah. Vysvětli.

2.

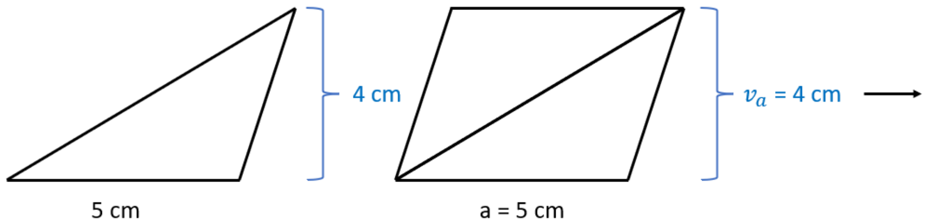


Jsou dány čtyřúhelníky porovnej jejich obsahy. Vyzkoušej si manipulativně, co se se špejlemi děje.

3. Které útvary mají stejný obsah?



4. Ariana vysvětluje své mladší sestře, jak se počítá obsah trojúhelníku.



Obr. 1 Obr. 2 Obr. 3

„Podívej se, doplním to na rovnoběžník (obr. 2). Z něj teď ustřihni trojúhelník a přesuň jej tak, abys dostala obdélník (obr. 3).“ Sestra to udělala a pak postupně dopočítala i obsah původního trojúhelníku. Dokreslete obrázek 3.

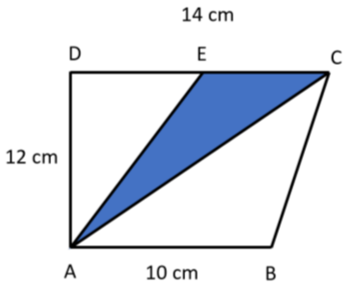
Obsah obdélníku:

Obsah rovnoběžníku:

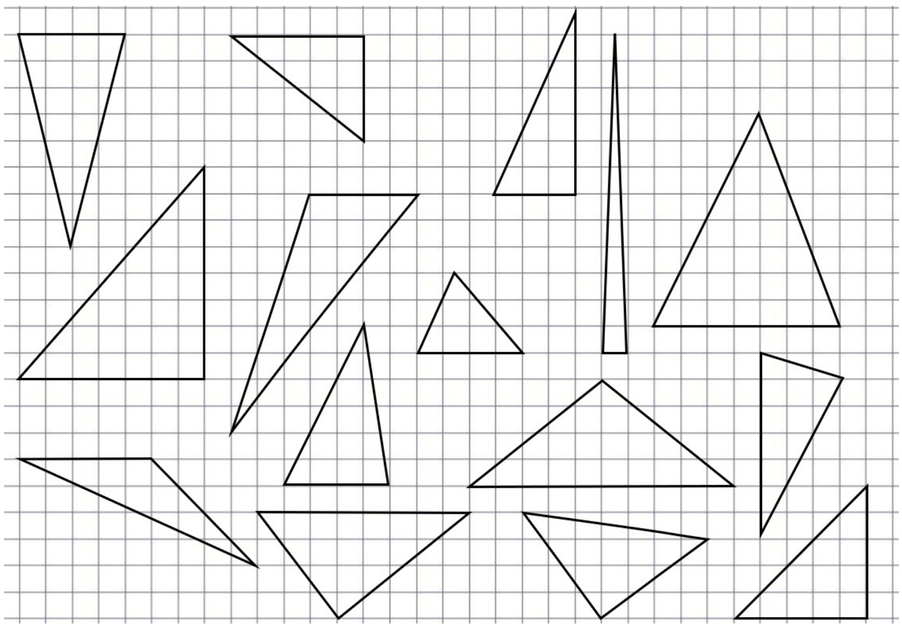
Obsah původního trojúhelníku:

Jaký by byl rychlejší způsob řešení?

5. Lichoběžník ABCD je pravoúhlý, bod E je středem úsečky CD. Zjistěte obsahy trojúhelníků AED, ACE, ABC.

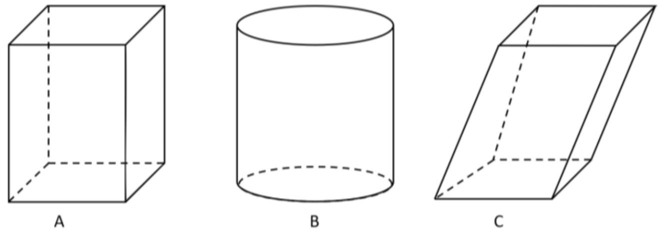


6. Spojte trojúhelníky se stejným obsahem. Najděte trojúhelník s obsahem 12.

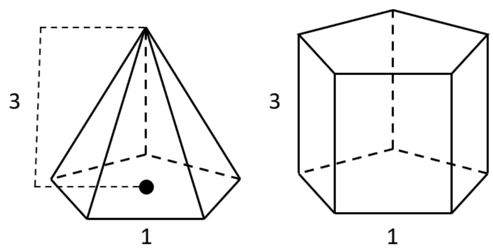


Příloha 2 – Pracovní list: Cavalieriho princip v prostoru

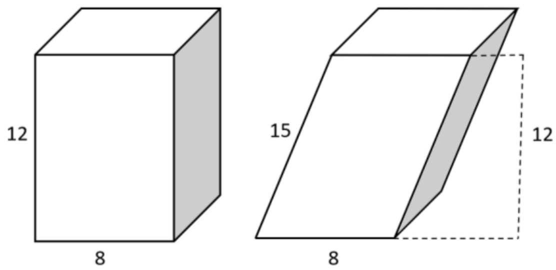
1. Všechna následující tělesa mají stejnou výšku a stejnou základnu. U kterých těles můžeme říct, že mají stejný objem?



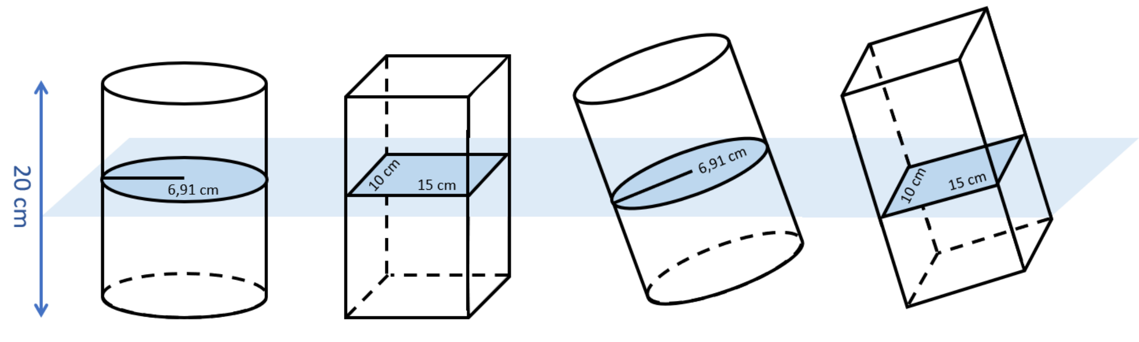
2. Mějme následující jehlan a hranol. Obě tělesa mají základnu, která je pravidelným pětiúhelníkem. Mají stejný objem? Zdůvodni.



3. Mějme následující hranoly, jejichž základny jsou čtverce. Urči jejich objemy.



4. Urči objemy těles:



5. Daný trojboký hranol a čtyřboký hranol mají stejný objem. Rovina, která je rovnoběžná se základnami ve vzdálenosti 3 od podstavy, protíná obě tělesa a vytváří průřezy. Jaký je obsah průřezu u trojbokého hranolu?