Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Kritická místa v řešení konstrukčních úloh u žáků-uprchlíků z Ukrajiny

Critical parts in solving constructive tasks by pupils-refugees from Ukraine

Bc. Anna Kukhtenko

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů
pro základní školy a střední školy – matematika

Praha 2023

Odevzdáním této práce na téma Kritická místa v řešení konstrukčních úloh u žáků-uprchlíků z Ukrajiny potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10.7. 2023 ....

Podpis autora

Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D., za všestrannou pomoc, množství cenných a inspirativních rad, doporučení, připomínek. Taktéž bych chtěla poděkovat prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za pomoc při tvorbě výzkumu. V neposlední řadě také děkuji všem kolegům a svým žákům za pomoc při zpracování mé práce. Obrovské poděkování patří i mé rodině, bez jejíž pomoci by nebylo možné práci dokončit.

Abstrakt

Konstrukční úlohy jsou považovány za jedny z nejobtížnějších úloh ve výuce matematiky, jelikož jsou propojením prostoru geometrických objektů a vztahů (teoretického) a prostoru grafických entit (reprezentačního). Pro žáky-uprchlíky z Ukrajiny, kteří v důsledku války na Ukrajině v roce 2022 prošli traumatizujícím zážitkem emigrace a přizpůsobování se novému prostředí, mohou tyto úlohy představovat další specifické výzvy. V rámci práce je provedena analýza českých a ukrajinských učebnic, zkoumány odlišnosti postupů a metod řešení, individuální zkušenosti a připravenost žáků-uprchlíků, kteří se chystají na české školy. Metodologie je založena na kvalitativním výzkumu, který zahrnuje práci se skupinou žáků z Ukrajiny s pracovním listem a rozhovory se samotnými žáky pro objektivnější zhodnocení výsledků. Na základě těchto poznatků mohou být dále navrženy a propracovány vhodné pedagogické strategie a přístupy, které lépe podporují úspěšnost a adaptaci těchto žáků v prostředí školního vzdělávání.

Klíčová slova

Konstrukční úlohy, žáci-uprchlíci, žáci s odlišným mateřským jazykem, kritická místa matematiky

Abstract

Construction problems are considered to be one of the most difficult problems in mathematics education, as they are the connection of the space of geometric objects and relations (theoretical) with the space of pro-spatial graphical entities (representational). For pupil refugees from Ukraine, who have gone through the traumatic experience of emigration and adjusting to a new environment, these tasks may present additional specific challenges. The thesis analyses Czech and Ukrainian textbooks, examines differences in procedures and solution methods, individual experience and readiness of pupil-applicants going to Czech schools. The methodology is based on qualitative research, which includes working with a group of pupils from Ukraine with a worksheet and interviews with the pupils themselves to better evaluate the results. Based on these findings, appropriate pedagogical strategies and approaches can be further designed and refined to better support the success and adaptation of these pupils in the school environment.

Keywords

Construction tasks, pupils-refugees, pupils with different mother language, critical places in mathematics.

Obsah

Úvod

Konflikt na Ukrajině, probíhající od začátku roku 2022, vedl k výraznému nárůstu počtu uprchlíků, kteří hledají bezpečí v jiných zemích, včetně zemí Evropské unie. Mezi uprchlíky jsou i děti a mladí lidé, kteří byli nuceni opustit své domovy a komunity a zanechat za sebou školy a vzdělání. Proces přesídlení a integrace do nové země je náročný zejména pro děti uprchlíků, které čelí mnoha překážkám v přístupu ke vzdělání, včetně jazykových bariér, nedostatku dokladů o vzdělání a sociální izolace.

Úspěšná integrace žáků uprchlíků do vzdělávacího systému má zásadní význam pro jejich spokojenost, studijní úspěch a budoucí vyhlídky. Výrazně ztěžovat situaci může i to, že tito žáci čelí řadě překážek, včetně kulturních rozdílů, které mohou bránit jejich schopnosti učit se a zapojit se do studia. Mnoho žáků uprchlíků navíc zažilo trauma a narušení vzdělávání, což může ovlivnit jejich sebedůvěru a motivaci.

Pro zvolení daného tématu autorku motivovalo to, že sama pochází z Ukrajiny, takže prošla vzdělávacím systémem obou zemí. O významu a aktuálnosti problému se přesvědčila sama při práci s žáky z Ukrajiny.

Tato diplomová práce je prohloubením práce Miroslavy Dyntarové (1), která zkoumala problémy žáků střední školy při řešení konstrukčních úloh a je zaměřená na odhalení kritických míst v konstrukčních úlohách u specifické skupiny žáků, konktrétně žáků-uprchlíků z Ukrajiny. Také se bude opírat o výzkum Nadi Vondrové a Miroslava Rendla (2), který byl zaměřený na průzkum kritických míst matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. Cílem práce je na základě analýzy kurikula obou zemí identifikovat oblasti, ve kterých se vyskytují potíže v konkrétní oblasti matematiky, a shromáždit didaktické principy pro práci s danou skupinou žáků.

Práce je rozdělená do dvou částí. V teoretické části se čtenář seznámí se vzdělávacím systémem na Ukrajině a porovná základní přístupy k didaktice v obou zemích. Následně bude uvedena rešerše pojednávající o výuce matematiky u dětí s odlišným mateřským jazykem. Na základě provedené analýzy českých a ukrajinských učebnic budou na závěr vyslovena očekávání.

Praktická část obsahuje pilotní výzkum, který byl proveden se skupinou žáků českých škol stejné věkové kategorie a byl určen pro odhalování nedostatků a lepší připravenost na hlavní výzkum. Hlavní výzkum bude proveden se skupinou žáků-uprchlíků z Ukrajiny formou vypracování pracovního listu a následným individuálním rozhovorem s každým žákem. Data získaná z výzkumu budou následně analyzována a vyhodnocena pro identifikaci klíčových kritických míst a faktorů ovlivňujících schopnost žáka řešit konstrukční úlohy.

Výsledky tohoto výzkumu budou relevantní nejen pro učitele a vychovatele, ale také pro osoby zapojené do programů přesídlování uprchlíků. V konečném důsledku je cílem tohoto výzkumu podpořit studijní úspěch žáků z řad uprchlíků, umožnit jim naplnit jejich potenciál a integrovat se do českého vzdělávání.

1 Vzdělání a podpora pro ukrajinské uprchlíky

Ruská invaze na Ukrajinu vážně ohrozila životy milionů lidí a donutila mnoho z nich opustit domovy a přestěhovat se do sousedních evropských zemí. Převážná část z nich jsou děti, které musely zároveň opustit školu v rodné zemi a pokračovat ve studiu v cizím jazyce. Na oficiálních stránkách Evropské komise (3) se uvádí, že téměř polovinu uprchlíků z Ukrajiny tvoří děti ve školním věku. Pro získání pocitu stability a perspektivy do budoucna je nesmírně důležitý proces návratu do vzdělávacího systému. Momentálně existují řady platforem (4), (5), které lze využít při integraci mladých ukrajinských uprchlíků do vzdělávacích systémů členských států EU včetně České republiky. Tyto platformy poskytují užitečné články a zdroje nejen pro žáky z Ukrajiny, ale i pro učitele, kteří se chystají tyto žáky přivítat ve svých třídách. Pro pedagogy je také vytvořená řada vzdělávacích kurzů zaměřených na podporu při začleňování dětí s odlišným mateřským jazykem (6).

Rada Evropské unie přijala dne 4. března 2022 směrnici 2001/55/ES (7) o poskytování dočasné ochrany uprchlíkům z Ukrajiny, zejména přístupu ke vzdělání. Tento směr byl uznán jako bezprostřední priorita pro integraci a blaho ukrajinských dětí a mladých lidí. Jde nejenom o vysoce kvalitní vzdělání, ale i o požadovanou psychosociální podporu. Evropská komise zdůraznila význam komplexního přístupu k integraci děti-uprchlíků. (3)

1.2 Podpora inkluze dětí vysídlených z Ukrajiny ve vzdělávání: faktory a klíčové principy

Pojem „inkluzivní“ novela školského zákona se objevuje v odborných publikacích (8), (9) v souvislosti s legislativními změnami a úpravami, které se zaměřují na začlenění žáků se specifickými vzdělávacími potřebami do běžného procesu výuky. Z legislativní stránky práci s žáky cizinci řídí § 20 školského zákona (10). Nárok na podpůrná opatření pro děti s OMJ zajišťuje § 16, konkrétně novelizovaný školský zákon 82/2015 Sb. o předškolním, základním, středním a vyšším odborném a jiném vzdělání, spolu s vyhláškou 27/2016 Sb. o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků nadaných (10). Legislativní a kutikulární změny významně ovlivnily organizační, finanční a obsahové prvky současného vzdělávání.

Řada evropských zemí vyvinula konkrétní nástroje pro pomoc v určování vzdělávacích a osobních potřeb nově příchozích žáků (11). V České republice tak vznikly modely vstupních testů, které pomohou učitelům stanovit úroveň nových žáků a sledovat jejich průběžné pokroky. Dalším významným nástrojem je intenzivní podpora při osvojování školního jazyka. Patří sem i pedagogická pomoc s doučováním, přípravou na výuku nebo logopedická podpora. (12)

Evropská komise (3) také vytvořila pracovní dokument, který má za cíl shromáždit v současnosti dostupné kolektivní zkušenosti a poznatky a nabízí informace o osvědčených postupech, které by měly pomáhat s inkluzí vysídlených ukrajinských dětí na školách (13). Komise dokument připravila po konzultacích s Úřadem vysokého komisaře OSN pro uprchlíky (UNHCR), Dětským fondem Organizace spojených národů (UNICEF), zástupci evropských ministerstev školství, organizacemi zainteresovaných stran, které se od března do června 2022 setkávaly na akcích vzájemného učení, a sítí NESET (Síť odborníků na sociální rozměr vzdělávání a odborné přípravy).

Tento dokument uvádí faktory, které je doporučeno zvážit v klíčových oblastech, uvedených níže:

- organizace procesu přivítání a zapsání do školy;
- příprava vzdělávacích institucí a pracovníků na inkluzi vysídlených dětí;
- realizace cílených aktivit na podporu inkluze vysídlených dětí ve vzdělávacím systému;
- spolupráce s rodinami vysídlených dětí a jejich komunitou a pomoc s udržením vazby na Ukrajinu;
- přijímání dlouhodobých opatření na podporu inkluzívního vzdělávání;
- přijímání specifických opatření v oblasti předškolního vzdělávání a péče.

1.3 Postupy ve školním roce 2022–2023

Pro školní rok 2022/2023 byl Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy (15) zpracován zákon „Lex Ukrajina 2“ (14) o opatřeních v oblasti školství v souvislosti s ozbrojeným konfliktem na území Ukrajiny, vyvolaným invazí vojsk Ruské federace (ve znění zákona č. 175/2022 Sb. a zákona č. 199/2022 Sb.).

Zákon přiděluje dětem nově příchozím z Ukrajiny právo na vzdělávání za obdobných podmínek, jako mají české děti. Segregace ukrajinských dětí není podle zákona žádoucí, naopak je třeba směřovat k postupné integraci do českého vzdělávacího systému. Tak například pro školní rok 2022/2023 byl otevřen speciální termín zápisu do škol a ředitelé byli povinni do vzdělávání přijmout každého uchazeče bez výjimky.

Další změny, týkající se vzdělávání uprchlíků:

- Doporučená psychosociální podpora;
- Možnost zajištění pedagogického pracovníka (dvojjazyčného asistenta pedagoga);
- IVP pro adaptaci žáků na český vzdělávací systém;
- Nároková jazyková příprava z §20[1]

[1] Školská legislativa (konkrétně školský zákon) uznává právo **všech cizinců** (nejen občanů EU, jak tomu bylo dříve) na kurz českého jazyka. Pro všechny žáky cizince, kteří *„plní povinnou školní docházku, zajistí krajský úřad příslušný podle místa pobytu žáka ve spolupráci se zřizovatelem školy* ***bezplatnou přípravu k jejich začlenění do základního vzdělávání****, zahrnující výuku českého jazyka přizpůsobenou potřebám těchto žáků.“* (ŠZ, § 20).

2 Matematika pro děti s odlišným mateřským jazykem

Již zmíněná jazyková příprava se týká nejen žáků-uprchlíků, ale i pedagogických pracovníků. Momentálně existuje řada pomocných materiálů a organizací (16), (28) pro výuku dětí s odlišným mateřským jazykem (OMJ), kam můžeme zařadit i děti-uprchlíky. Žáci-uprchlíci spadají do skupiny žáků se sociokulturním handicapem. Vágnerová (17) definuje sociokulturní handicap následovně: „Sociokulturní handicap vyplývá z odlišností v sociální příslušnosti a s tím i souvisejícího omezení v oblasti zkušeností, jež jsou jiné nebo nedostatečné. Jde o problém daný působením jiných sociokulturních vlivů, odlišné socializace. Tito lidé jsou znevýhodněni pouze v určitém sociálním kontextu, jsou členy minority, která se od majoritní společnosti v různé míře liší.“ Z definice plyne, že příslušnost k minoritě může směřovat v rámci sociokulturního handicapu k problémům ve škole i společnosti.

Práce s žáky-uprchlíky je komplexní soubor metod a postupů, které mají poskytovat individuální podporu těmto žákům v rámci výuky a její přípravy. Skládá se z podpory ze strany školy, ze strany učitele a dalších externích organizací. V této kapitole bude představen pohled na podpůrná opatření ze strany učitele zaměřený cíleně na předmět matematika.

2.1 Komunikace v hodinách matematiky

Obecně lze v didaktice matematiky sledovat, že je kladen čím dál větší důraz na komunikaci a interakci v hodinách a na množství různých reprezentací. Tento rozvoj úzce souvisí i s vlivem konstruktivistické výuky, který je od 90. let čím dál větší. Tento vývoj je cesta, která je pro výuku v kulturně heterogenních třídách velice vhodná, mohou z ní těžit všichni žáci nezávisle na kulturním prostředí.

Na základě projektu M³EaL: Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language (18), který se zabýval tím, co by mohlo pomoci učitelům v této problematice, můžeme říci, že výraznou roli hrají zkušenosti. Dalším z faktorů je malá připravenost učitelů, komunikace mezi předměty a komunikace s vedením. Zásadním problémem je též nedostatek učebních materiálů se zaměřením na výuku žáků s odlišným mateřským jazykem. Adamus ve své publikaci (19) zmiňuje: „Vzdělávací program není neměnný, je to něco, co se musí vytvářet, dokud to neodpovídá potřebám všech žáků.“

2.2 Paralela s dalšími skupinami

V rámci již zmíněného projektu se týmy z různých zemí zaměřily různým směrem. Například český tým z Univerzity Karlovy se zaměřil na hledání matematiky v předmětech odlišných kultur. Částečně zde nastala paralela s výukovou metodou CLIL, výukou integrující jazyk a obsah, s tím rozdílem, že v CLIL má cílová skupina stejný mateřský jazyk, případně různé znalosti a návyky. Podle výzkumu (20) má CLIL i s menším rozsahem pozitivní dopad na postoje, motivaci a schopnost učit se nejen cizím jazykům, ale i odborným předmětům. Další paralela zde nastává s výukou neslyšících žáků, protože i zde se žáci dorozumívají pomocí odlišného jazyka, konkrétně znakové řeči. Musí řešit problémy s osvojením jazyka matematiky i jazyka obecně. (21) Podle Hejného (22) pod pojmem jazyk se rozumí soubor znaků, jejichž prostřednictvím se uskutečňuje myšlení a komunikace.

Výukové materiály pro neslyšící mají určitá omezení. Aby byly vhodné, pak musí splňovat základní podmínky:

1. Používat jednoduchý jazyk – Přirozeně existují základní fráze a slova, která se nám automaticky lépe pamatují. Zároveň se v cizím jazyce zpočátku upínáme spíše ke kratším větám. Je tedy vhodné se vyhnout kouzlu českého jazyka, co se týče množství synonym a jeho kreativity, využívat spíše krátké věty a ustálené obraty.
2. V maximální možné míře využít vizuální podněty – V případě obrázku nejsme omezeni žádnou jazykovou bariérou. Vizuálními podněty nejsou myšleny pouze obrázky, ale také grafy, symboly a další. Vhodným příkladem můžou být například komiksy používané na anglických školách, jako například série učebnic *Cartoon Guide* (23).

Obě tyto podmínky je vhodné využít také v materiálech určených žákům s odlišným mateřským jazykem. Vhodným příkladem splňujícím obě podmínky jsou například matematické hry. Tak například výzkum „Teaching mathematics in game learning environment“ (24) zkoumá využití matematických her jako výukovou metodu pro začleňování žáků a zlepšení celkového klimatu ve třídě.

Jednou z věcí, na které je nutné při tvoření učebních materiálů pro obě tyto skupiny dávat pozor, je následující: je důležité se snažit žákům usnadnit práci, ale nikoliv jim předkládat úlohy, které nevyžadují překonání žádné jazykové bariéry. Pro rozvoj matematického myšlení je nezbytné začleňovat do procesu učení i problémové a netradiční úlohy, proto by takové úlohy neměly být vyřazeny ani u žáků-cizinců.

2.3 Didaktické principy

Výuka v odlišném mateřském jazyce se jako každá jiná věda týkající se pedagogiky zakládá na didaktických a metodických principech. Didaktické principy podle E. M. Vereshchagina (25), zahrnující obecné požadavky k procesu výuky, jsou tyto:

- princip vizualizace – zapojení všech smyslů do procesu vnímání vzdělávací materiálů;
- princip vědeckého charakteru – kvalitní výběr jazykového materiálu, zohlednění jazykových dovedností a druhů jazykové činnosti, naplnění obsahu učení na základě objektivních vědeckých faktů;
- princip systematičnosti a důslednosti – cílený postup výukového materiálu s gradací a zajištění návaznosti jeho obsahu ve všech fázích;
- princip dostupnosti – zohlednění věkových a individuálních charakteristik studentů, omezení obtížnosti při zvládnutí jazykového materiálu;
- princip celku – absolvování celého cyklu vzdělávacího a kognitivního vzdělávání studenty (vnímání látky, její pochopení, zapamatování, aplikace v praxi, opakování a systematizace, konsolidace);
- princip vědomí – zájem, motivace, zapojení studentů do procesu učení, přítomnost sebehodnocení a sebekontroly, vnější a vnitřní (duševní) podněty;
- princip propojení teorie a praxe – studenti ovládají všechny druhy jazykové činnosti v češtině na základě minima teoretických znalostí; tento princip je obzvlášť důležitý jako část komunikativního přístupu, protože upřednostňuje jazykovou praxi, využití českého jazyka jako prostředku každodenní komunikace ve vzdělávání a také v rodinném či jiném kolektivu.

2.4 Podstata utváření matematických pojmů a porozumění textu

V. A. Gabdulkhaková (26) se ve svém díle orientovala na zpřesnění podstaty matematických pojmů a stanovení principů podporujících utváření těchto pojmů v cizojazyčném prostředí. Také I. V. Sitniková (27) ve své studii vyvinula koncept (systém požadavků na uvažovaný proces), jehož aplikací lze zajistit vysokou kvalitu studia základních pojmů matematiky a motivací zlepšit kvalitu matematických znalostí a dovedností žáků. V důsledku teoretického a experimentálního výzkumu dospěla k následujícím závěrům:

1. Základem metodologické koncepce utváření matematických pojmů je systematické zhodnocení obsahu pojmu, prostředků a forem jeho realizace, logický postup utváření pojmů a psychologická doporučení pro jejich pochopení a zapamatování.
2. Mezi základní etapy utváření matematických pojmů patří: motivace k jejich zavedení, identifikace podstatných vlastností pojmu, který tvoří definici, chápání logické struktury definice, aplikace konceptu, systematizace pojmů.
3. Můžeme zde vidět určitou paralelu s fázemi osvojování pojmů pomocí Teorie generických modelů (TGM). Hlavní odlišení od TGM je to, že v konceptu práce s žáky s OMJ je hloubka a intenzita provádění daných etap slabší.

Každá fáze je reprezentována určitým souborem postupů včetně:

- vytvoření problémové situace;
- formulace hlavního učebního cíle;
- zdůraznění podstatných vlastností pojmů, které tvoří jeho definici;
- rozpoznání předmětů patřících a nepatřících ke konceptu;
- aplikace konceptu;
- navazování vztahů a závislostí mezi jednotlivými pojmy a větami atp.

3 Odlišnosti ve vzdělávání v České republice a na Ukrajině

Základem úspěšného a efektivního vzdělávání je předchozí učení, které lze nadále využívat k pokrokům. Problémem ukrajinských uprchlíků jsou ale rozdílnosti nejen v kurikulech jednotlivých předmětů, ale i ve struktuře systému základo- a středoškolského vzdělávání jako celku. Právě těmto rozdílům bude věnovaná tato kapitola. (28)

3.1 Vzdělávání na Ukrajině

V roce 2018 byla na Ukrajině schválena školská reforma – Nová ukrajinská škola (NUŠ) (29), která představuje přechod z povinné jedenáctileté školní docházky na dvanáctiletou. Dokončením dvanácti let studia ukrajinští žáci získávají úplné střední vzdělání s maturitou.

NUŠ také zavádí povinnost výuky v ukrajinském jazyce. Vzhledem k tomu, že v některých regionech žijí slovansky mluvící menšiny, přechod z ruského jazyka na ukrajinský tam byl pozvolnější. Původním plánem bylo kompletně přejít na jednotný státní vyučovací jazyk do roku 2023, avšak válka tento plán zrychlila.

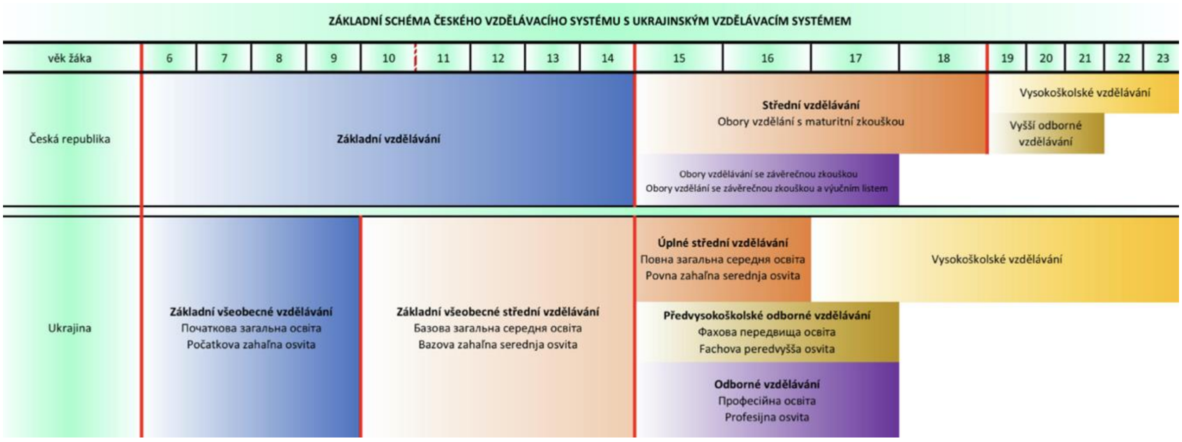
Reforma se projevila i na 1. stupni ZŠ, a to jak v uspořádání a vybavení třídy (přechod na jednomístné lavice a doplnění tříd hracími koutky), tak i v metodických postupech (žáci první třídy nedostávají známky ani domácí úkoly, vyučovací hodina v prvním ročníku trvá 35 minut). Můžeme pozorovat, že se NUŠ snaží dát ukrajinskému vzdělávání konstruktivistický směr.

Podstatnou změnou v novém zákonu o vzdělávání je zaměření na inkluzivní vzdělávání. Jde o novinku, která doposud na Ukrajině neexistovala. Změna umožňuje speciálním pedagogům pracovat s dětmi s mentálním a tělesným postižením a zavádí integraci těchto žáků do speciálních vzdělávacích programů v běžných školách. (30)

3.2 Základní podobnosti a rozdíly mezi českým a ukrajinským školstvím

Ukrajinské a české vzdělávání je v mnoha věcech podobné, ale také v mnoha odlišné. Při práci s žáky-uprchlíky je proto potřeba brát ohled také na rozdíly ve školském systému. To, co je pro české děti součástí běžné výuky a připadá jim naprosto normální, ukrajinského žáka může velice překvapit a dezorientovat.

Nejprve je nutné uvést rozdíl ve struktuře vzdělávacího systému. Povinná devítiletá školní docházka a začátek nástupu do základní školy je v Česku a na Ukrajině stejný, a to zhruba v 6 letech. Na rozdíl od České republiky, která má devítileté základní vzdělávání, zatímco na Ukrajině se dělí na první až čtvrtý ročník základního všeobecného vzdělávání a to, co je známo v Česku jako druhý stupeň základní školy, je na Ukrajině základní všeobecná střední škola (nižší stupeň střední školy). Většina ukrajinských žáků dále pokračuje v 10.–12. ročníku a dokončuje úplné střední všeobecné vzdělání. Žáci mají také možnost po deváté třídě nastoupit na střední školu s odbornou profilací (tzv. kolidge). Takže na rozdíl od českých žáků, kteří po povinné devítileté docházce musí absolvovat 4 roky středoškolského vzdělání a pak nastoupí na vysokou školu, děti na Ukrajině nastupují na vysokou školu v mnohem nižším věku. Podrobnější popis rozdělení fází ukrajinského vzdělávacího systému je uveden v tabulce níže.



Obrázek 3.1 – Schéma porovnání vzdělávacích systémů

Další odlišností je rozdělení škol na Ukrajině na různé typy. Tak například škola, která odpovídá českému 1. a 2. stupni, se dělí na:

- Základní všeobecnou školu – poskytuje základní všeobecné vzdělání, standardní doba studia je podle nových reforem 12 let;
- Gymnázium – vyučování probíhá podle základního vzdělávacího programu, avšak předměty jsou vyučovány více do hloubky. Dítě může začít studium na gymnáziu od 1. třídy;
- Lyceum – vyučování často probíhá podle vlastního programu, žáci si mohou sami vybrat nejen předměty, ale i jejich úroveň. Žák může nastoupit po dokončení 8. třídy všeobecné školy.

Rozdíly jsou také v organizaci výuky samotné. Školní rok začíná v obou zemích stejně 1. září, na Ukrajině ale končí 31. května. Žáci 4. a 9. ročníku během června konají závěrečné nebo postupové zkoušky (Deržavná pidsumková atestacija) (30), které jsou analogem české maturitní zkoušky. Ostatní ročníky věnují tento měsíc volnočasovým aktivitám a výletům.

Ukrajinský školní systém se liší od českého také způsobem hodnocení žáků. Na Ukrajině se používá dvanáctistupňová klasifikace, která funguje opačným směrem (čím vyšší je známka, tím je lepší). Srovnání české a ukrajinské klasifikace je přehledně znázorněno v tabulce níže.

Porovnání s českým hodnocením:

Bodová škála (ukrajinský systém)	Odpovídající hodnocení (známky)	Převod na české hodnocení
12 – дванадцять / dvanadcjať	1+	
11 – одинадцять / odynadcjať	1	1
10 – десять / desjať	1-	
9 – дев'ять / devjať	2+	
8 – вісім / visim	2	2
7 – сім / sim	2-	
6 – шість / šisť	3+	
5 – п'ять / pjať	3	3
4 – чотири / čotyry	3-	
3 – три / try	4	
2 – два / dva	4-	4
1 – один / odyn	5	5

Obrázek 3.2 – Schéma porovnání hodnocení

Tak ukrajinská klasifikační škála umožnuje přesnější hodnocení žáka a potlačuje rozdíl mezi úspěšnými a neúspěšnými žáky. Tento systém však neodstraňuje obecné problémy, které přináší hodnocení známkou, např. stres z bodů nebo obava z neúspěchu.

Dalším základním rozdílem v organizaci výuky je distanční výuka. Na první pohled se zdá, že to je společná věc, vzhledem k tomu, že v době COVID-19 Česko také změnilo způsob výuky na distanční a později hybridní. Na Ukrajině ale funguje odlišně. V době válečného konfliktu ukrajinští žáci přešli na distanční vzdělávání pro možnost studovat i v zahraničí. Pro přístup k online vzdělávacím materiálům v ukrajinském jazyce byla vytvořena centrální platforma Celoukrajinská škola online (44). Je to platforma, jejímž cílem je vzdělávat jak distančně, tak i hybridně žáky 5.–12. ročníků a vytvořit metodickou podporu pro učitele.

Žáci a pedagogové mají přístup k videolekcím, testům a úkolům z 18 předmětů, z nichž 4 tvoří různé oblasti matematiky: matematika, algebra, algebra a úvod do analýzy, geometrie.

Témata vzdělávacího obsahu navrhuje Ministerstvo školství a vědy Ukrajiny (31). V březnu 2022 MŠVU také ve spolupráci s Google Ukrajině vytvořilo Celoukrajinský online rozvrh, který obsahuje online televizní lekce a další potřebné materiály pro výuku. Mnoho ukrajinských učitelů momentálně používá danou platformu jako pomocný nástroj ve výuce. (30)

4 Pojem konstrukční úlohy. Postup a metody řešení

Nezbytnou součást geometrie tvoří konstrukční úlohy, jejichž výsledkem je obvykle narýsovaný obrazec. Zadání tohoto typu úloh vždy obsahuje slovo „sestrojte“ a tato kapitola podrobně rozebere, co přesně to znamená. Na základní a střední škole se konstrukční úlohy neobejdou bez rýsování, přesto grafické provedení není podstatou řešení. Cílem je propojit prostor geometrických objektů a vztahů (teoretický) s prostorem grafických entit (reprezentační). Výsledkem neboli řešením konstrukční úlohy je obrázek, který vyhovuje podmínkám úlohy.

4.1 Eukleidovská konstrukce

V eukleidovských konstrukcích probíhá reprezentace geometrických objektů pomocí daných rýsovacích potřeb: přímého pravítka a kružítka. (32) Ty slouží k rýsování určitých křivek, používaných při konstrukci – základních křivek. Pro eukleidovskou konstrukci jsou základními křivkami přímky (procházející dvěma body) a kružnice (s daným středem a poloměrem). Provedeme-li rýsování geometrického objektu sestrojením základních křivek danými prostředky, říkáme, že jsme ho sestrojili eukleidovskými konstrukcemi.

Tyto konstrukce se považují za nejdůležitější pro školu, ovšem nejsou jediným druhem konstrukcí. Liší se dohodami, které jsou sestavené podle rýsovacích potřeb, které chceme použít.

Základní eukleidovské konstrukce (33):

- vytvoření úsečky protínající dva body
- vytvoření kružnice se středem v jednom bodě tak, aby protínala druhý bod
- vytvoření bodu, který leží v průsečíku dvou protínajících se úseček
- vytvoření jednoho nebo dvou bodů ležících v průsečíku kružnice a úsečky (pokud se protínají)
- vytvoření jednoho nebo dvou bodů ležících v průsečíku dvou kružnic (pokud se protínají)

Na základě zadání konstrukčních úloh se rozlišují dvě základní skupiny:

- **polohové**, kde je předem dáno umístění některých zadaných prvků a tímto je určeno umístění hledaného útvaru;
- **nepolohové**, ve kterých není dáno umístění žádného prvku. Předem jsou předepsané jen metrické vlastnosti.

4.2 Postup řešení konstrukční úlohy

Řešení konstrukčních úloh zpravidla dělíme na čtyři fáze. V závislosti na učebnicích a výukových materiálech se toto rozdělení může lišit. V této kapitole jsou uvedené základní fáze a jejich jednotlivá charakteristika podle Vyšína (32) a Leischnera (34).

1. **Rozbor nebo analýza**

Základem každé konstrukční úlohy je rozbor, jehož součástí je často náčrtek budoucího výsledku. Cílem pro obecné řešení je zachytit všechna možná řešení a odvodit postup konstrukce, který umožní úlohu vyřešit.

Při řešení konstrukční úlohy se předpokládá, že úloha je řešitelná, pokud je možné sestrojit aspoň jeden geometrický útvar, který bude vyhovovat podmínkám úlohy. Předpoklad se samozřejmě může dodatečně ukázat jako nesprávný, což se pozná tak, že rozbor povede ke sporu s podmínkami úlohy nebo platnými matematickými větami. Tedy rozbor pomáhá určit podmínky řešitelnosti úlohy.

Leischner (34) uvádí, že v písemně řešené úloze by měl rozbor obsahovat zápis, jenž obsahuje zdůvodnění objevených vztahů, a tedy i zdůvodnění postupu konstrukce.

Největší problém se objevuje v jednoduchých úlohách, ve kterých žák zpravidla konstrukci uhodne a rozbor vynechá. Existuje tak velké riziko, že vynechá nějaké řešení a vyřeší úlohu neúplně.

Dalším zdrojem obtíží žáků je fakt, že stejný obrázek může reprezentovat jak abstraktní geometrický objekt, tak i jeho určitý případ. K pochopení pak nestačí obrázek samotný, ale je nutná znalost geometrických definic a vět a schopnost promítnout je na danou úlohu. (32)

2. **Postup konstrukce a konstrukce (vyslovení konstrukčního předpisu, sestrojení)**

Leischner (34) a Vyšín (32) popisují tuto fázi jako jednotný celek, někdy se dělí na dvě části (např. v učebnicích základní školy (35), (36)). Konstrukce vyplývá z nalezených nutných podmínek pro neznámé body a obsahuje předpis, podle kterého se realizuje grafické provedení. Vychází se od daných prvků a končí se u prvků hledaných. Je v podstatě výsledkem rozboru, jelikož shrnuje potřebné poznatky, které se v průběhu rozboru získávají. Zvlášť postup konstrukce udává všechna možná řešení úlohy, konstrukce ale pomáhá ověřit, aby v těchto řešeních byly splněné všechny podmínky úlohy.

Může se ovšem stát, že některé útvary sestrojené podle správného postupu konstrukce nebudou splňovat zadání úlohy, tudíž nebudou řešením. Je tak potřeba přezkoušet, zda není třeba některá řešení z výsledné konstrukce vyloučit. A tím se dostáváme do další fáze řešení konstrukčních úloh. (32)

3. **Zkouška**

Třetí fáze se také často nazývá důkaz konstrukce. Je obdobná situaci v algebře, kde se u rovnic dělá zkouška. Projdeme konstrukci krok za krokem a ověříme, zda podle ní sestrojený útvar má všechny požadované vlastnosti. Cílem je totiž nejen zjistit, zda řešení vyhovuje všem podmínkám, ale také zda nějaké nepřibyly. V opačném případě se útvary z množiny řešení vyloučí.

Pokud se ale metoda řešení opírá jen o geometrická místa bodů dané vlastnosti, či shodná a podobná zobrazení, není nutno provádět zvláštní důkaz.

4. **Diskuse**

Závěrečnou, ale velice důležitou fází je diskuse, která zkoumá podmínky řešitelnosti konstrukční úlohy. Jde o třídění množiny těchto úloh na úlohy neřešitelné, úlohy s jedním řešením a úlohy s více řešeními. Patří k tomu i určení podmínek pro parametry, za nichž je úloha řešitelná či neřešitelná (případně parametry, které rozhodují o počtu řešení). Obzvlášť významná je podmínka řešitelnosti: nutná a postačující podmínka, při které úloha má alespoň jedno řešení.

Leischner (34) vyjmenovává základní pravidla pro určení počtu řešení:

1. počtem řešení konstrukční úlohy se rozumí počet všech jejích různých řešení;
2. u polohové úlohy se považují za různá řešení každé dva výsledné útvary, které nejsou totožné a vyhovují jejímu zadání;
3. u nepolohové úlohy jsou různá řešení jen takové útvary, které nejsou shodné.

Takže cílem konstrukční úlohy je nalezení postupu konstrukce, který by splňoval všechny podmínky, dané v zadání úlohy. V osnově leží rozbor, který pomáhá propojit teoretické osnovy (znalosti definic, vět a vlastností geometrických útvarů) s prostorem grafických entit. Dále vhodně zvolený postup konstrukce a konstrukce samotná uvedou množinu všech možných řešení úlohy. Důkaz konstrukce a diskuse zajistí, aby byla vybrána pouze ta řešení, která budou splňovat podmínky úlohy. (32)

4.3 Metody řešení konstrukčních úloh

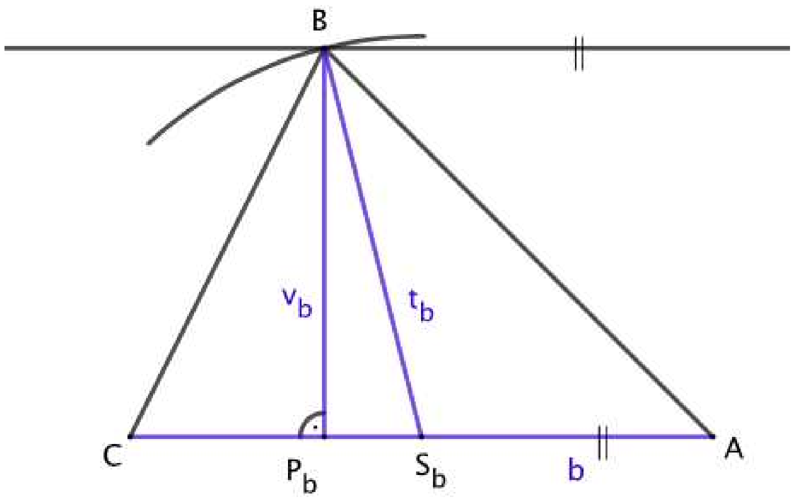
Vzhledem k velkému počtu různých typů konstrukčních úloh neexistuje přesně daný návod, jak tento typ úlohy vyřešit. Dá se ale hovořit o metodách řešení, které se obvykle používají. Tato část představí přehled nejběžnějších metod pro geometrické konstrukce. Ke každé metodě následně bude uveden příklad použití pro lepší představu.

1. Metoda množin bodů dané vlastnosti

Jednou z tradičních metod v řešení konstrukčních úloh je metoda množin bodů, které mají danou vlastnost. Spočívá v tom, že při rozboru hledáme množinu bodů s určitou vlastností, na níž má ležet bod hledaného útvaru. Často hledaný bod lze najít jako průnik dvou křivek, z nichž každá obsahuje vlastnost danou podmínkami úlohy.

Příklad úlohy, řešené danou metodou:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $b = 7$ cm, $t_b = 5$ cm, $v_b = 4$ cm.



Obrázek 4.1 – Metoda množin bodů dané vlastnosti. Náčrt úlohy

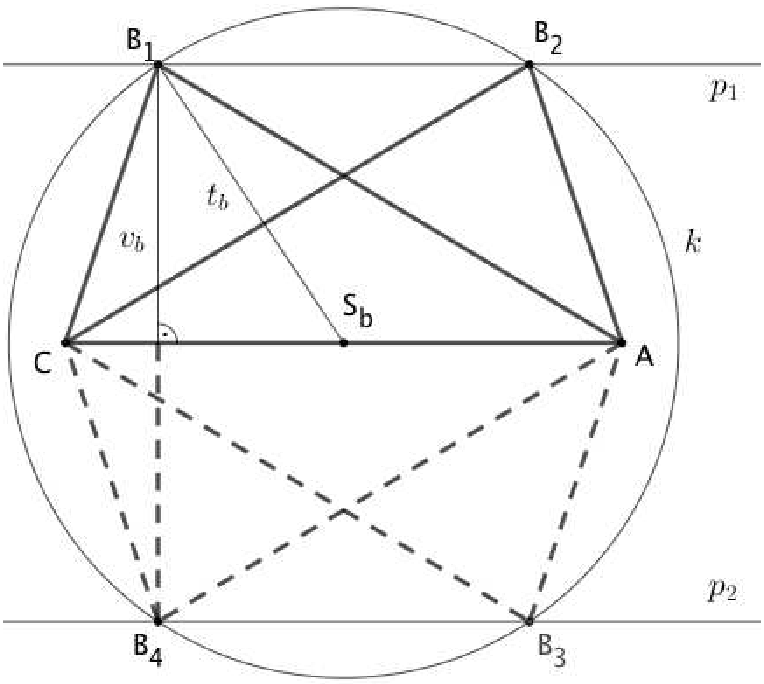
Rozbor

Umístíme stranu CA dané délky b. Bod B musí ležet na přímce p rovnoběžné s přímkou CA ve vzdálenosti v_b (tzv. ekvidistantě přímky CA, kde v_b je parametr ekvidistanty) a zároveň na kružnici $k(S_b; t_b)$, kde S_b je střed umístěné úsečky CA (množině všech bodů, které leží ve vzdálenosti t_b od bodu S_b).

Postup konstrukce

1. Úsečka CA; $|CA| = b = 7$ cm
2. Přímka p; $p \parallel\leftrightarrow CA$ ve vzdálenosti $v_b = 4$ cm
3. Bod S_b; S_b je střed úsečky CA
4. Kružnice k; $k(S_b; t_b), t_b = 5$ cm
5. Bod $B; B \in p \cap k$
6. $\triangle\ ABC$

Výsledek



Obrázek 4.2 – Metoda množin bodů dané vlastnosti. Výsledná konstrukce

Diskuze

Počet řešení úlohy závisí na počtu průsečíků kružnice k s přímkami p_1, p_2:

a) Je-li $v_b < t_b$, jsou přímky $p_1,\ p_2$ sečnami kružnice k. Úloha má tak čtyři řešení: $\triangle\ AB_1C,\ \triangle\ AB_2C,\ \triangle\ AB_3C,\ \triangle\ AB_4C$, přičemž však je $\triangle\ AB_1C \cong \triangle\ AB_4C \cong$ $\cong \triangle\ AB_2C \cong \triangle\ AB_3C$. Podle již zmíněného pravidla (23) má úloha právě jedno řešení ve zvolené polorovině ($\triangle\ AB_1C$). Zadání úlohy 4-1 vede k tomuto výsledku.

b) Je-li $v_b = t_b$, jsou přímky $p_1,\ p_2$ tečnami kružnice k. Řešením úlohy je dvojice shodných rovnoramenných trojúhelníků. Řešená úloha má tedy jedno řešení (rovnoramenný $\triangle\ AB_1C$).

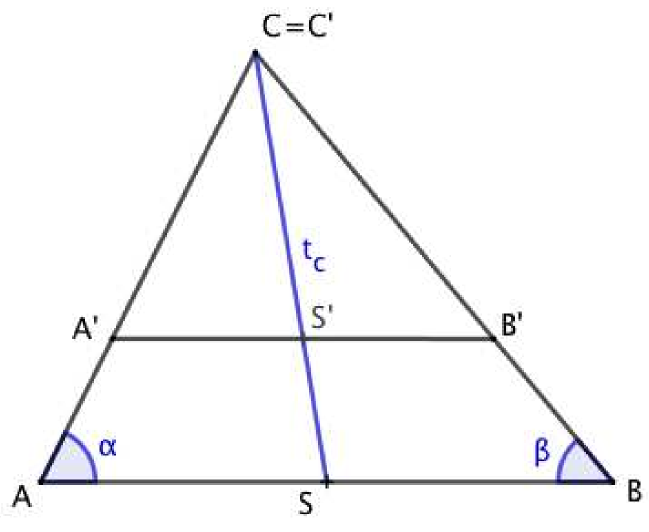
c) Je-li $v_b > t_b$, jsou přímky $p_1,\ p_2$ vnějšími přímkami kružnice k. Úloha nemá žádné řešení.

2. Užití podobnosti

Další vhodnou metodou pro řešení konstrukčních úloh je sestrojení potřebného prvku užitím podobnosti. Pokud se setkáme například s úlohou, ve které se používají věty o podobnosti trojúhelníků nebo úlohy, ve kterých je určen poměr stran, můžeme postupovat tak, že nejdřív sestrojíme pomocný útvar. Pomocí podobnosti zobrazíme pomocný útvar na hledaný, který vyhovuje podmínkám úlohy.

Pro ukázku této metody je uveden následující příklad:

Sestrojte trojúhelník ABC, víte-li že $\alpha = 60°, \beta = 45°, t_c = 5$ cm.



Obrázek 4.3 – Užití podobnosti. Náčrt úlohy

Rozbor

Sestrojíme nejprve trojúhelník, který bude s daným trojúhelníkem podobný – tj. bude mít stejné vnitřní úhly. Pak jej užitím podobnosti upravíme tak, aby jeho těžnice na stranu c měla délku $t_c = 5$ cm. Těžnici podobného trojúhelníku prodloužíme nebo zkrátíme na požadovanou délku. K tomu využijeme stejnolehlost se středem ve vrcholu C a příslušným koeficientem.

Postup konstrukce

1. $\triangle\, A'B'C'; |\measuredangle\alpha'| = |\measuredangle\alpha| = 60°; |\measuredangle\beta'| = |\measuredangle\beta| = 45°$
2. Bod $S'; S'$ je střed úsečky $B'C'$
3. Bod $S; S = H(C'; k = \frac{5}{|S'C'|})$
4. $\triangle\, ABC; H(C, k){:}\triangle\, A'B'C' \rightarrow \triangle\, ABC$

Diskuze

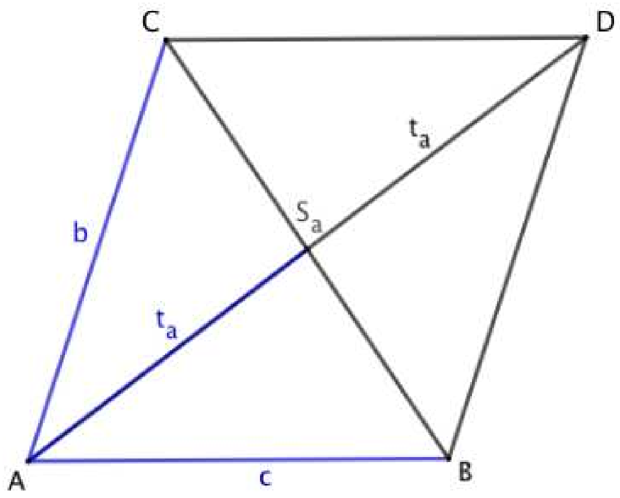
Stejnolehlost je jednoznačně určena středem C' a koeficientem $k = \frac{5}{|S'C'|}$, proto má úloha jediné řešení.

3. Užití shodných zobrazení

V řešení některých konstrukčních úloh nám také mohou pomoci čtyři shodnosti v rovině, které se probírají na základních a středních školách: středová a osová souměrnost, otočení a posunutí. Spočívá v tom, že vynecháním některých podmínek umístění sestrojíme jednodušší útvar, který následně přemístíme pomocí shodnosti do polohy požadované původními podmínkami. Tato metoda je myšlenkově blízká metodě využití množin bodů s danou vlastností.

Příkladem použití metody je následující konstrukce:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $b = 6, c = 5, t_a = 4$.



Obrázek 4.4 – Užití shodných zobrazení. Náčrt úlohy

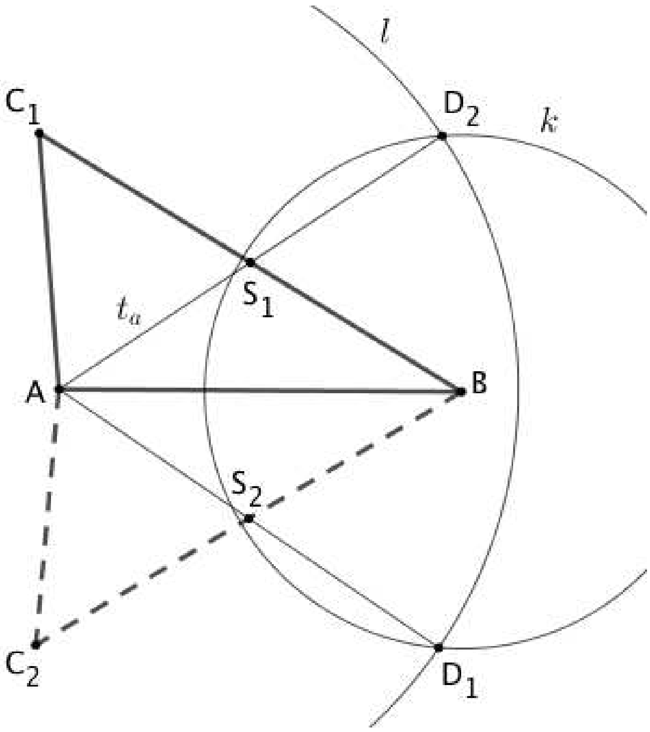
Rozbor

Rovnoběžník $ABDC$ je středově souměrný podle průsečíku úhlopříček. Využitím dané shodnosti sestrojíme hledaný trojúhelník. S_a je střed strany BC a $D = S_{S_a}(A)$. Čtyřúhelník $ABDC$ je rovnoběžník se středem S_a, lze sestrojit trojúhelník ABD s délkami stran $|BD| = b = 6$ cm, $|AD| = 2t_a = 8$ cm a $|AB| = c = 5$ cm, s bodem S_a ve středu strany AD. Bod C je obrazem bodu B v souměrnosti podle S_a.

Postup konstrukce

1. Úsečka AB; $|AB| = c = 5$ cm
2. Kružnice k; $k(B; b)$, b = 6 cm
3. Kružnice l; $l(A; 2t_a)$, $2t_a = 8$ cm
4. Bod D; $D \in l \cap k$
5. Bod S_a; S_a je střed úsečky AD
6. Bod C; $C = S_{S_a}(B)$
7. $\triangle\ ABC$

Výsledek



Obrázek 4.5 – Užití shodných zobrazení. Výsledná konstrukce

Diskuze

Počet řešení úlohy závisí na podmínkách pro poloměr kružnic na základě trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABD. Pokud je trojúhelník ABD sestrojitelný, ostatní kroky jsou jednoznačné:

a) Pokud platí nerovnost $|b - c| < 2t_a < b + c$ má úloha dvě řešení: $\triangle\, ABC_1$ a $\triangle\ ABC_2$, které jsou shodné. Tak podle pravidla (23) vychází pro uvedenou úlohu jediné řešení ($\triangle\, ABC_1$).

b) Pokud tato nerovnost neplatí, úloha nemá řešení.

4. Metoda řešení na základě algebraického výpočtu

Tuto metodu jsem umístila na poslední místo, jelikož není tak populární v českých učebnicích. Překvapivě ale na ní je založená většina konstrukčních úloh, které jsou uvedené v ukrajinských učebnicích. Vzhledem k hloubce probírání konstrukčních úloh na Ukrajině, velký důraz se tam klade na výpočetní techniky. Metoda spočívá v nalezení algebraického výrazu, který určuje hledaný prvek x pomocí prvků daných podmínkami úlohy. (34)

Pro ukázku použití dané metody se použije jednoduchá úloha, která se převede na jednodušší typ konstrukce, který byl ukázán v předchozí části. Proto u daného příkladu uvedeme pouze rozbor bez řešení a postupu konstrukce:

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li známo, že součet délek dvou stran $a + b = 8$ cm a jejich rozdíl je $a - b = 2$ cm. Obvod trojúhelníku je 14 cm.

Rozbor

Na základě algebraického výpočtu nejdřív určíme délky všech tří stran trojúhelníku. Následně budeme postupovat podle konstrukce trojúhelníku ze tří stran s použitím metody množin bodů dané vlastnosti.

Zapíšeme nejdřív všechny údaje ze zadání úlohy: $a + b = 8$ cm $\wedge$ $a - b = 2$ cm $\wedge$ $o = 14$ cm. Z daných podmínek a definice obvodu určíme:

$$o = a + b + c \Longrightarrow c = o - (a + b)$$

Dosadíme-li do odvozeného vztahu místo obvodu a součtu stran konkrétní hodnoty, získáme délku strany $c = 14 - 8 = 6$ cm. Následně ze soustavy rovnic vypočítáme zbylé dvě strany:

$$\begin{matrix} a + b = 8 \\ a - b = 2 \end{matrix} \Longrightarrow 2a = 10 \Longrightarrow a = 5 \text{ cm } \wedge b = 3 \text{ cm.}$$

Výpočtem jsme určili délky všech tří stran trojúhelníku, a proto byla tato úloha převedena na typ konstrukce trojúhelníku ze tří stran.

Diskuze

Výraz má smysl právě tehdy, kdy pro délky stran trojúhelníku a, b, c je splněna trojúhelníková nerovnost $|a - b| < c < a + b$. V takovém případě má úloha jediné řešení. To je případ uvedené úlohy.

Jestliže vztah neplatí, nemá úloha řešení.

5 Konstrukční úlohy v českých učebnicích

Podle českého RVP se konstrukční úlohy vyučují v rámci tématu Geometrie v rovině a prostoru. Od ledna roku 2021 platí nová úprava RVP (37), ve které se velký důraz klade na digitální kompetence. Podle RVP se žáci s konstrukčními úlohami setkávají již od 1. stupně základní školy.

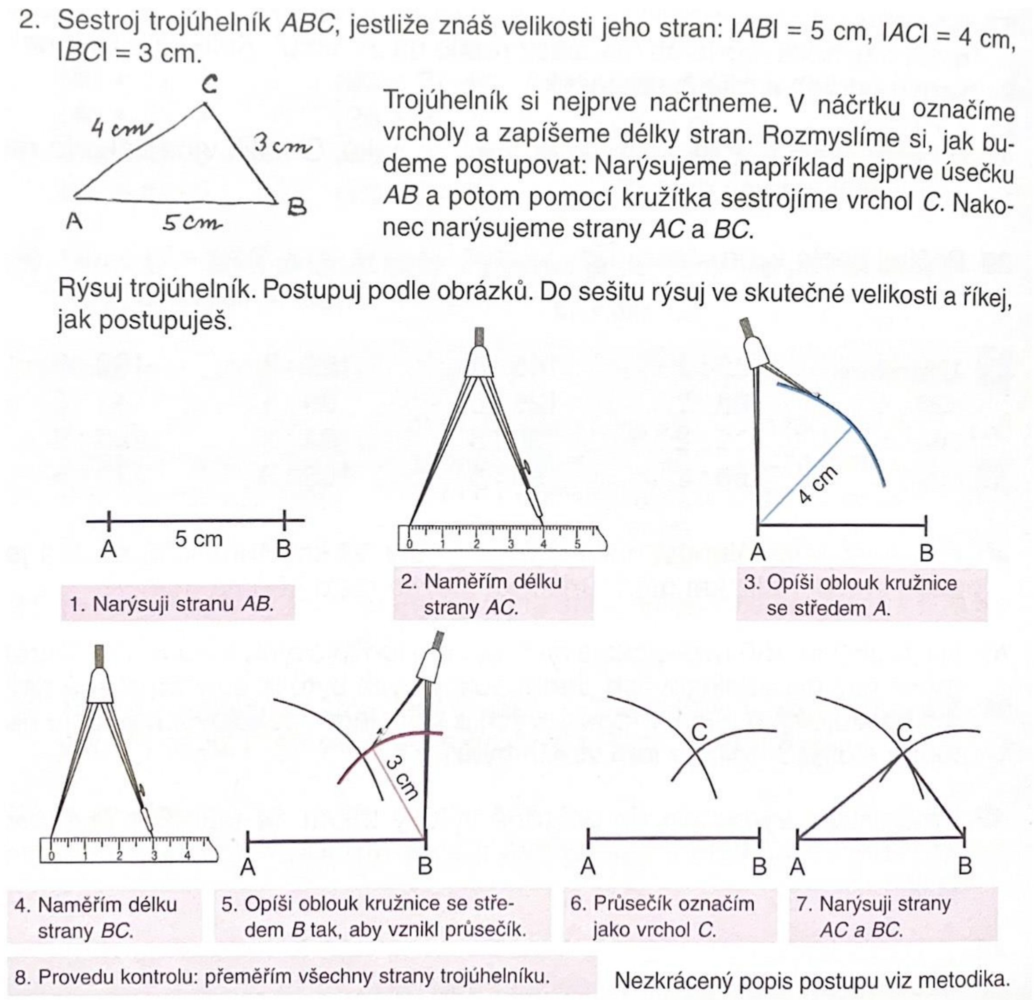
5.1 Učebnice na 1. stupni

Ve třetím ročníku se seznamují se základními pojmy jako například bod, přímka, úsečka. Tak například v učebnici pro 3. ročník základní školy (38) jsou uvedené úlohy na přímku a polopřímku a vzájemnou polohu dvou přímek. Předpokládá se, že v této fázi žák tyto pojmy dokáže rozeznat a vymodelovat, naučí se pracovat s pravítkem.

Druhý díl stejné série učebnic (39) rozebírá úlohy obsahující různé druhy rovinných útvarů a v této fázi se žák učí práci s kružítkem. Každému rovinnému útvaru je věnována jedna kapitola, ale zatím se konstrukční úlohy nezmiňují.

V posledním třetím dílu učebnice (40) se žáci seznamují s úlohami, které dále poslouží jako základ pro konstrukční úlohy. Jedna z prvních kapitol v učebnici je věnovaná přenášení a porovnání úseček pomocí kružítka: základní znalost, kterou žáci využijí v konstrukčních úlohách. V další „geometrické“ kapitole se žáci poprvé seznamují s obecným pojmem konstrukční úloha. Kapitola obsahuje jedinou úlohu, a to na konstrukci trojúhelníku ze tří stran. Učebnice nejdříve nabízí žákům zkusit vymodelovat trojúhelník pomocí barevných proužků, jak je to ukázáno na obrázku. Tato úloha je hezkou ukázkou izolovaného modelu, který pomůže názorněji pochopit cíl konstrukční úlohy.

Dále následuje samotná úloha, která dole obsahuje kompletní řešení s postupem a obrázky pro názornost (viz Obrázek 5.1). Učebnice obsahuje právě jednu úlohu na samostatné procvičování látky, a to na konci v kapitole Opakování.



2. Sestroj trojúhelník *ABC*, jestliže znáš velikosti jeho stran: |*AB*| = 5 cm, |*AC*| = 4 cm, |*BC*| = 3 cm.

Trojúhelník si nejprve načrtneme. V náčrtku označíme vrcholy a zapíšeme délky stran. Rozmyslíme si, jak budeme postupovat: Narýsujeme například nejprve úsečku *AB* a potom pomocí kružítka sestrojíme vrchol *C*. Nakonec narýsujeme strany *AC* a *BC*.

Rýsuj trojúhelník. Postupuj podle obrázků. Do sešitu rýsuj ve skutečné velikosti a říkej, jak postupuješ.

1. Narýsuji stranu *AB*.
2. Naměřím délku strany *AC*.
3. Opíši oblouk kružnice se středem *A*.
4. Naměřím délku strany *BC*.
5. Opíši oblouk kružnice se středem *B* tak, aby vznikl průsečík.
6. Průsečík označím jako vrchol *C*.
7. Narýsuji strany *AC* a *BC*.
8. Provedu kontrolu: přeměřím všechny strany trojúhelníku.

Nezkrácený popis postupu viz metodika.

Obrázek 5.1 – Příklad z české učebnice 1

5.2 Učebnice na 2. stupni

Tato diplomová práce je zaměřená na učivo 2. stupně základní školy, respektive víceletého gymnázia. Předpokládá se, že v tomto období dokáže žák znázornit, narýsovat a označit základní rovinné útvary (včetně rovnoběžek a kolmic) pomocí teoretických znalostí. Ke konstrukčním úlohám se žáci vracejí v šestém ročníku základní školy nebo v primě gymnázia během tématu *Osová souměrnost a Trojúhelník*. Pro názornost budou dále uvedené úlohy, které se objevují v učebnicích těchto ročníků.

Se samostatnou kapitolou o konstrukčních úlohách se ale žáci poprvé setkávají v 8. ročníku základní školy nebo v tercii víceletého gymnázia. Podrobný rozbor tohoto tématu bude představen na základě analýzy následujících učebnic pro odpovídající ročníky: Matematika pro 8. ročník základní školy O. Odvárka a J. Kadlečka (35) a Matematika, Geometrické konstrukce J. Hermana (36).

5.2.1 Matematika pro 8. ročník základní školy

První kapitola učebnice (35) je věnovaná jedinému rovinnému útvaru – kružnici a jejím vlastnostem, které jsou nezbytné pro základy konstrukčních úloh. Kapitola seznamuje žáky s pojmem kružnice a kruh. Po krátkém úvodu a připomenutí teorie týkající se kružnice následuje rýsovací úloha.

Příklad 5.1:

Rýsuj a přemýšlej!

a) Narýsuj kružnici $k(S; 3\ \mathrm{cm})$.

Zvol na kružnici k dva body A, B a sestroj postupně průměr kružnice k, který prochází bodem A, a průměr kružnice k, na kterém leží bod B.

b) Ověř, že platí: Oba sestrojené průměry mají stejnou délku. Kolik je to centimetrů?

c) Rozhodni, zda platí: Všechny průměry kružnice k jsou shodné úsečky.

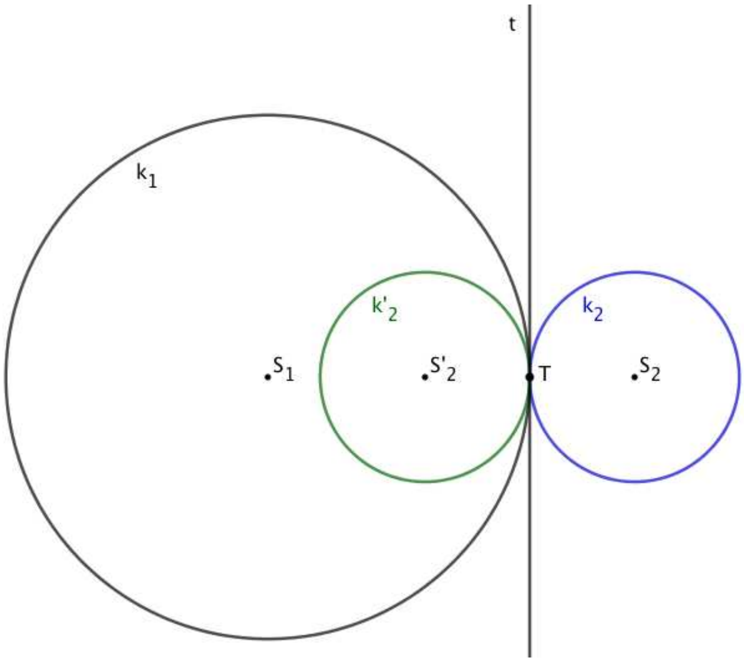
Úloha je rozdělená na jednotlivé podúlohy, které jsou založeny na principu gradovaných úloh a vedou žáky k hlubšímu pochopení teoretického prostoru. Umožňuje prozkoumat schopnost žáků pracovat s geometrickými útvary a orientovat se v pojmech a definicích jako například kružnice, průměr kružnice a shodné úsečky. V zadání není uvedena nutnost zápisu postupu konstrukce, avšak je tam prostor pro jeho uskutečnění s cílem připravit žáky k danému kroku pomocí jednodušších úloh.

Následně se probírá vztah kružnice a přímky a další pojmy jako: tečna/sečna a jejich rozdíly, tětiva, pata kolmice. Kapitola také propojuje práci s rovinnými útvary s rýsováním v kartézské soustavě souřadnic. Překvapivé je ale to, že i přesto, že v učebnici je uvedená definice tečny a její vlastnosti, není popsaný postup konstrukce tečny procházející bodem.

Další část této kapitoly pojednává o vztazích mezi dvěma kružnicemi a jejich vzájemné poloze. Následující úloha bude uvedena s kompletním řešením, jelikož později bude použita v zadání pracovního listu ve výzkumu.

Příklad 5.2:

Narýsuj kružnici $k_1(S_1; 45\ \mathrm{mm})$ a na ní zvol bod T. Sestroj kružnici $k_2(S_2; 20\ \mathrm{mm})$ tak, aby se dotýkala kružnice k_1 v bodě T. Narýsuj do dvou obrázků jednotlivé možnosti, nejprve vždy urči střed S_2. V obou případech narýsuj i společnou tečnu kružnic k_1 a k_2 v jejich bodě dotyku.



Obrázek 5.2 – Příklad 5.2. Náčrt a konstrukce úlohy

Rozbor:

Nejprve umístíme libovolně bod středu kružnice S_1 a odměříme poloměr kružnice $r_1 = 45$ mm. Sestrojíme kružnici k_1 a umístíme na ní bod T. Následně máme dvě možnosti, kam umístit střed druhé kružnice S_2, a to tak, že sestrojíme polopřímku vedenou body S_1 a T. Na dané polopřímce zvolíme bod S_2, který je vzdálený od bodu T na délku $r_2 = 20$ mm. Pro řešení tedy využijeme kružnici.

Postup konstrukce:

1. Kružnice k_1; $k_1(S_1; 45\text{ mm})$
2. Bod $T; T \in k_1$
3. Polopřímka $\mapsto S_1T$
4. Bod S_2; $S_2 \in \mapsto S_1T \wedge |S_2T| = r_2 = 20$ mm
5. Kružnice $k_2; k_2(S_2; 20\text{ mm})$
6. Přímka $t; T \in t \wedge t \perp \mapsto S_1T$

Diskuze:

Existují dvě možnosti umístění bodu S_2 v dané vzdálenosti od bodu T, proto má úloha vždy dvě řešení. Tečna v obou případech bude stejná.

V dané úloze se žáci učí propojovat teoretické znalosti s praktickým rýsováním. Je to úloha s více řešeními záměrně obsahující nápovědu, která vyvolá diskuzi o počtu řešení, aby se zamysleli i žáci, kteří nejsou zvyklí na hledání více možných řešení. Cílem úlohy bude zjistit schopnost žáků pracovat v prostoru reprezentací a používat znalosti pojmů jako bod dotyku kružnic, tečna kružnice. Úlohu lze také vyřešit s použitím metody shodných zobrazení. Stačí pouze kružnici k_2 zobrazit v osové souměrnosti podle osy t.

Poslední část této kapitoly je věnovaná Thaletově kružnici, která je jedním ze základních pilířů konstrukčních úloh.

V tuto chvíli se předpokládá, že žáci mají veškeré teoretické a praktické znalosti, které by mohly sloužit jako základ v konstrukčních úlohách. Poslední kapitolou v této učebnici je kapitola o konstrukčních úlohách, která je rozdělena na tři jednotlivé části:

1. **Množiny bodů v rovině**

V této části se žák seznámí s množinou bodů o určité vzdálenosti, osou úsečky a úhlů. Většina úloh je doprovázena podrobným návodem na řešení. Níže je uveden příklad úlohy z dané části kapitoly:

Příklad 5.3:

Narýsuj přímku p.

a) Sestroj libovolnou kružnici k s poloměrem 2 cm, která se dotýká přímky p.
b) Popiš množinu středů všech kružnic s poloměrem 2 cm, které se dotýkají přímky p.

Dole v úloze je také zmíněna nápověda, aby si žáci načrtli obrázek. Tato úloha rozvíjí schopnost přemýšlet nestandardně a hledat všechna možná řešení na základě teoretických znalostí. Také připravuje žáky na potřebu náčrtu jako pomocného nástroje při řešení konstrukčních úloh.

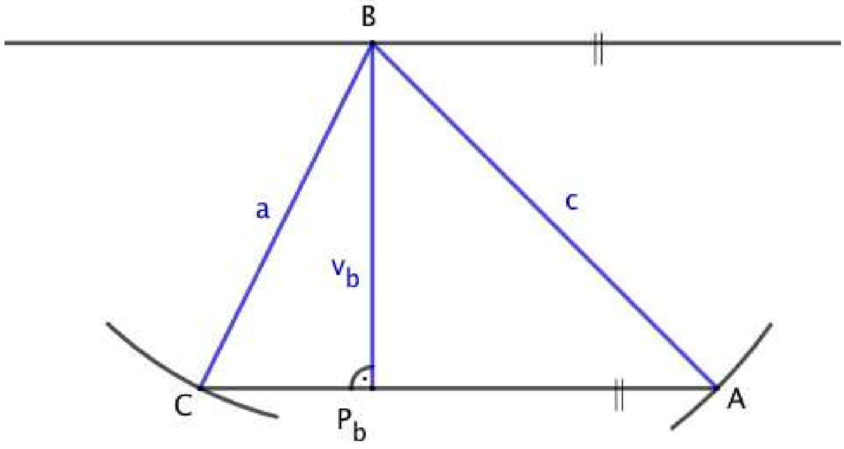
2. **Konstrukce trojúhelníků**

Představuje zřejmě nejpopulárnější typ konstrukční úlohy, který se vyučuje postupně počínaje 1. stupněm základní školy. Na základě konstrukce trojúhelníků se následně probírají také konstrukce čtyřúhelníků a dalších geometrických útvarů.

V této části jsou uvedené základní typy úloh jako konstrukce ze tří stran, ze strany a úhlů k ní přilehlých a ze dvou stran a úhlu jimi sevřeného. Každá úloha bude uvedena s řešením převzatým z učebnice a vypracovaným řešením od autorky, doplněným o stručný didaktický komentář. Některé vypracované úlohy budou později použity pro zpracování pracovního listu.

Příklad 5.4:

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 6$ cm, $c = 4$ cm, $v_b = 3$ cm.



Obrázek 5.3 – Příklad 5.4. Náčrt úlohy

Řešení z učebnice

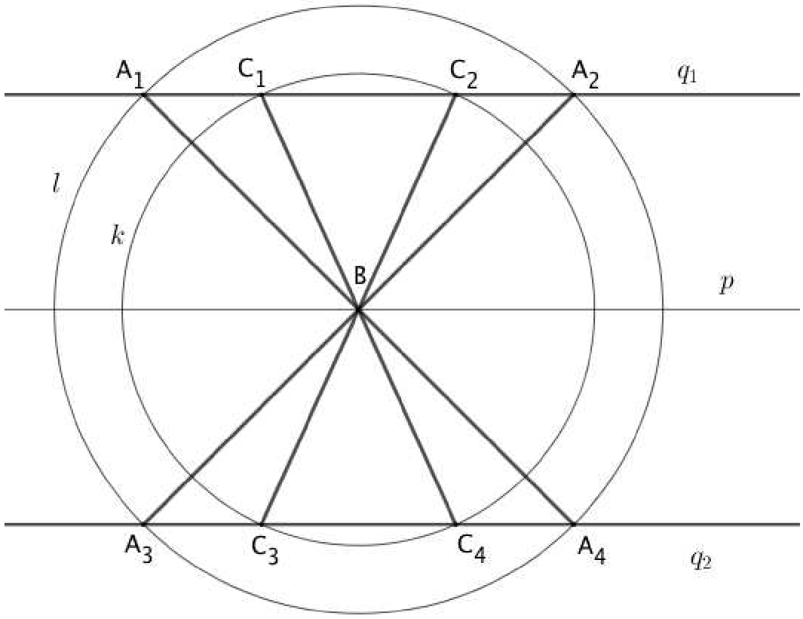
Rozbor:

Umístíme bod B na přímce rovnoběžné s přímkou CA ve vzdálenosti v_b. Zároveň vrchol C je vzdálený od vrcholu B na vzdálenost $a = 6$ cm, a vrchol A na vzdálenost $c = 4$ cm.

Postup konstrukce:

1. Přímka p
2. Bod $B; B \in p$
3. Přímka $q;\ q \parallel p \wedge |qB| = v_b = 3$ cm
4. Kružnice $k; k(B; 6$ cm$)$
5. Bod $C; C \in k \cap q$
6. Kružnice $l; l(B; 4$ cm$)$
7. Bod $A; A \in l \cap q$
8. Trojúhelník ABC.

Výsledek:



Obrázek 5.4 – Příklad 5.4. Výsledná konstrukce

Komentář autorky s vlastním řešením:

Úloha je netypická z pohledu postupu řešení, jelikož konstrukce začíná bodem, nikoliv stranou. Celkem má osm řešení, základní jsou ale pouze čtyři řešení, což bude uvedeno dále. Úloha pomáhá rozvíjet schopnost žáků hledat nová řešení, také procvičuje metodu množin bodů dané vlastnosti. Avšak řešení z učebnice obsahuje nedostatečné zpracovaný rozbor, který je spíše postupem, a nevěnuje se vztahům mezi zadanými údaji. Také postrádá diskuzi vzhledem k ročníku, pro který je zpracována. Proto bude dále doplněná o tyto části, přičemž diskuze bude rozšířena i na obecné zadání úlohy.

Rozbor:

Umístíme bod B do roviny. Zbylé vrcholy trojúhelníku tak musí splňovat dvě podmínky: a) jejich vzdálenost od bodu B je a, resp. c, b) musí ležet na přímce, která má vzdálenost v_b od bodu B.

Diskuze:

Počet řešení úlohy na konstrukci trojúhelníku ze dvou stran a výšky vedené na třetí stranu závisí na počtu průsečíků kružnic k a l s přímkami q_1, q_2 a na vztahu velikosti stran a a c:

a) Je-li $v_b > a \lor v_b > c$, jsou přímky q_1, q_2 vnějšími přímkami kružnic k a l. Úloha nemá žádné řešení.

b) Jsou-li $a \neq c$ a je-li $v_b < a \land v_b < c$, jsou přímky q_1, q_2 sečnami obou kružnic. Úloha má tak osm řešení: $\triangle A_1BC_1$, $\triangle A_1BC_2$, $\triangle A_2BC_1$, $\triangle A_2BC_2$ a další čtyři trojúhelníky ležící v opačné polorovině, které jsou shodné s uvedenými, takže podle již zmíněného pravidla (23) je nebudeme počítat. Tak má úloha čtyři řešení.

c) Jsou-li $a \neq c$ a je-li $v_b = a \land v_b < c$ nebo $v_b = c \land v_b < a$, jsou přímky q_1, q_2 tečnami jedné z kružnic a sečnami druhé. Řešením úlohy jsou čtyři pravoúhlé trojúhelníky, z nichž dva leží v jedné polorovině a zbylé dva jsou s nimi shodné. Řešená úloha má tedy dvě řešení.

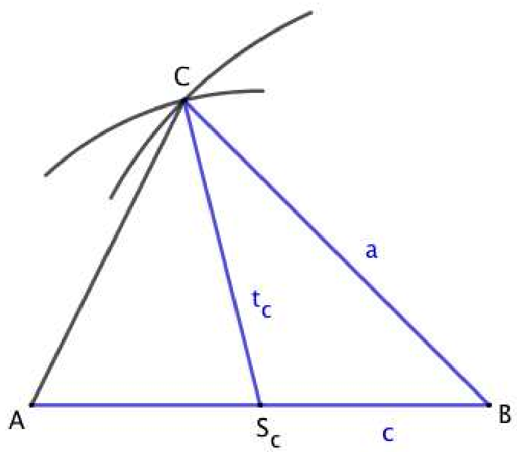
d) Je-li $a = c = v_b$, všechny tři úsečky splývají a úloha tak nemá žádné řešení.

V daném příkladu podmínky úlohy vyhovují vztahu b), proto má úloha čtyři řešení ve zvolené polorovině.

Příklad 5.5:

Sestrojíme trojúhelník ABC, ve kterém $c = 5$ cm, $a = 2$ cm a $t_c = 3$ cm.

Sleduj a kontroluj náš postup.



Obrázek 5.5 – Příklad 5.5. Náčrt úlohy

Řešení z učebnice

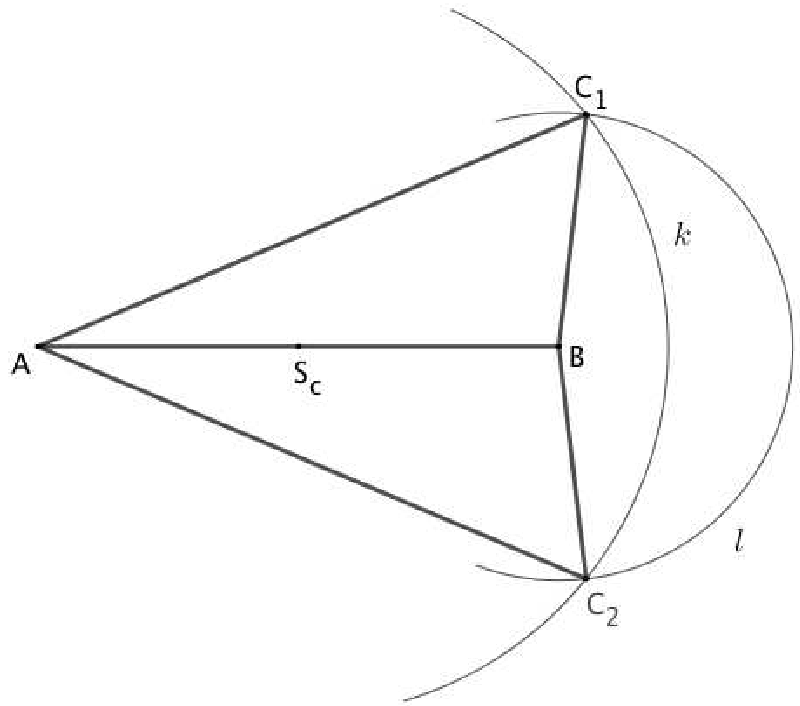
Rozbor:

Umístíme stranu AB dané délky c. Bod C musí ležet v průsečíku kružnic $k; k(S; 3\text{ cm})$ a l; $l(B; 2\text{ cm})$, kde poloměr kružnice k je roven délce těžnice t_c a poloměr kružnice l je roven délce strany a.

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = 5\text{ cm}$
2. $S; S \in AB, |AS| = |SB|$
3. $k; k(S; 3\text{ cm})$
4. l; $l(B; 2\text{ cm})$
5. C; $C \in k \cap l$
6. Trojúhelník ABC.

Výsledek:



Obrázek 5.6 – Příklad 5.5. Výsledná konstrukce

Komentář autorky s vlastním řešením:

Daná úloha je zajímavá tím, že se dá převést na jednodušší typ – konstrukci trojúhelníku podle tří stran. Stačí, aby si žák u náčrtku uvědomil, že body S_cBC tvoří trojúhelník, ve kterém známe délky všech tří stran, jelikož strana S_cB má poloviční délku než strana c na základě definice těžnice. Úlohu obdobně doplníme o upravený rozbor a diskuzi o existenci a počtu řešení a následně uvedeme diskuzi k obecné úloze stejného typu.

Rozbor:

Umístíme stranu AB dané délky c do roviny. Bod C musí splňovat dvě podmínky:

a) jeho vzdálenost od středu úsečky AB se musí rovnat délce těžnice t_c,
b) jeho vzdálenost od vrcholu B se musí rovnat délce strany a.

Diskuze:

Počet řešení závisí na existenci trojúhelníka $S_cBC.$ Z trojúhelníkové nerovnosti tedy plyne vztah pro délky stran:

$$\left|\frac{c}{2}\right| + |a| > t_c$$

$$\left|\frac{c}{2}\right| + |t_c| > a$$

$$|t_c| + |a| > \frac{c}{2}$$

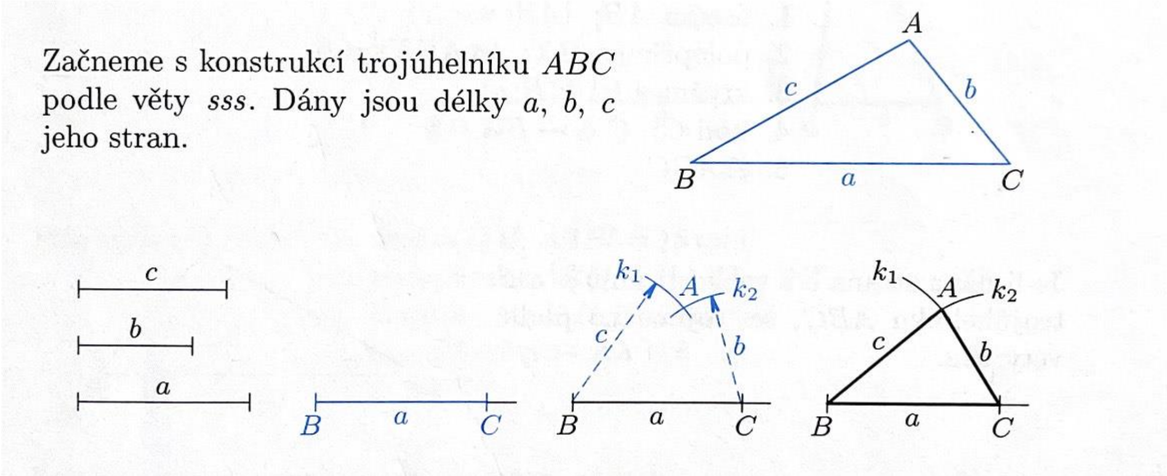
V dané úloze jsou splněné všechny tři nerovnosti, proto má úloha jedno řešení (druhé řešení je shodné podle věty sss a leží v opačné polorovině).

3. **Konstrukce čtyřúhelníků**

Poslední část, která je věnovaná konstrukcím čtyřúhelníků, seznamuje žáky s konstrukcemi rovnoběžníku, lichoběžníku a obecného čtyřúhelníku.

5.2.2 Matematika, Geometrické konstrukce

Učebnice (36) je rozdělena do několika kapitol a obdobně jako první učebnice obsahuje na začátku kapitoly o základních konstrukcích a množinách bodů daných vlastností. Mezi základními konstrukcemi se objevují osa úsečky a úhlu, kolmice k přímce procházející daným bodem, rovnoběžka procházející daným bodem, rovnoběžka v dané vzdálenosti a tečna kružnice. Závěr kapitoly je věnovaný konstrukcím. Každá úloha je doprovázená sérií obrázků navazujících na sebe, které slouží jako nápověda pro žáky, jak mají postupovat v rýsování (viz Obrázek 5.7).



Obrázek 5.7 – Příklad z české učebnice 2

Konstrukce vychází z věty o podobnosti trojúhelníků. Na základě této věty lze prokázat existenci a jednoznačnost řešení trojúhelníku. Z toho jednoznačně vyplývá, že konstrukce má smysl.

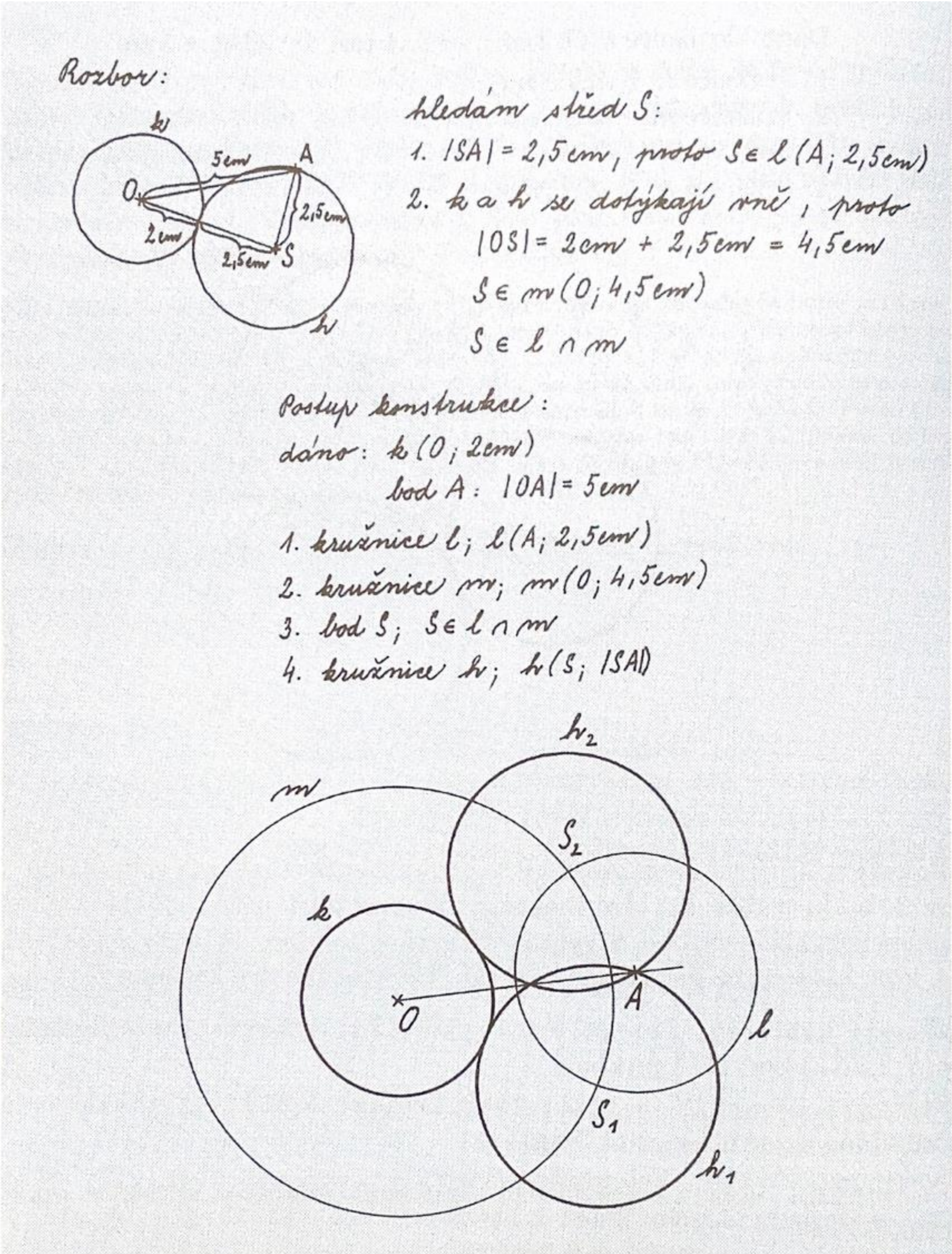
Následuje vysvětlení, jak postupy konstrukcí zapisovat bez obrázku. Celé toto učivo je graficky rozdělené do dvou sloupců, kde v levém sloupci každý krok zobrazený předem na obrázku je následně zapsaný slovy. V pravém sloupci je stručnější zápis jednotlivých kroků konstrukce. Celá část slouží k tomu, aby se děti naučily používat matematické symboly a správně zapisovat postup konstrukce.

Následuje kapitola o množinách bodů dané vlastnosti, v níž se popisují základní útvary, přičemž každý je podložený obrázkem pro názornost a příkladem k procvičování. V učebnici (36) se uvádí, že útvar U je množinou všech bodů, které mají danou vlastnost, pokud:

- každý bod útvaru U má danou vlastnost
- žádný bod, který útvaru U nepatří, danou vlastnost nemá.

Kapitola také obsahuje část o Thaletově kružnici, kde zmíněná kružnice je definovaná jako (36) množina vrcholů C všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s danou přeponou AB, ze které jsou vyloučeny body A a B.

Učebnice obsahuje dále celou kapitolu věnovanou pouze konstrukčním úlohám a postupu jejich řešení. V kapitole se popisuje pět základních fází řešení, jelikož postup konstrukce a konstrukce samotná jsou rozdělené do různých fází. Náčrt je zde uveden jako součást rozboru a posledními dvěma kroky jsou zkouška správnosti a diskuze. Na konci kapitoly žáci najdou ukázku kompletně vyřešeného příkladu se správným zápisem (viz Obrázek 5.8).

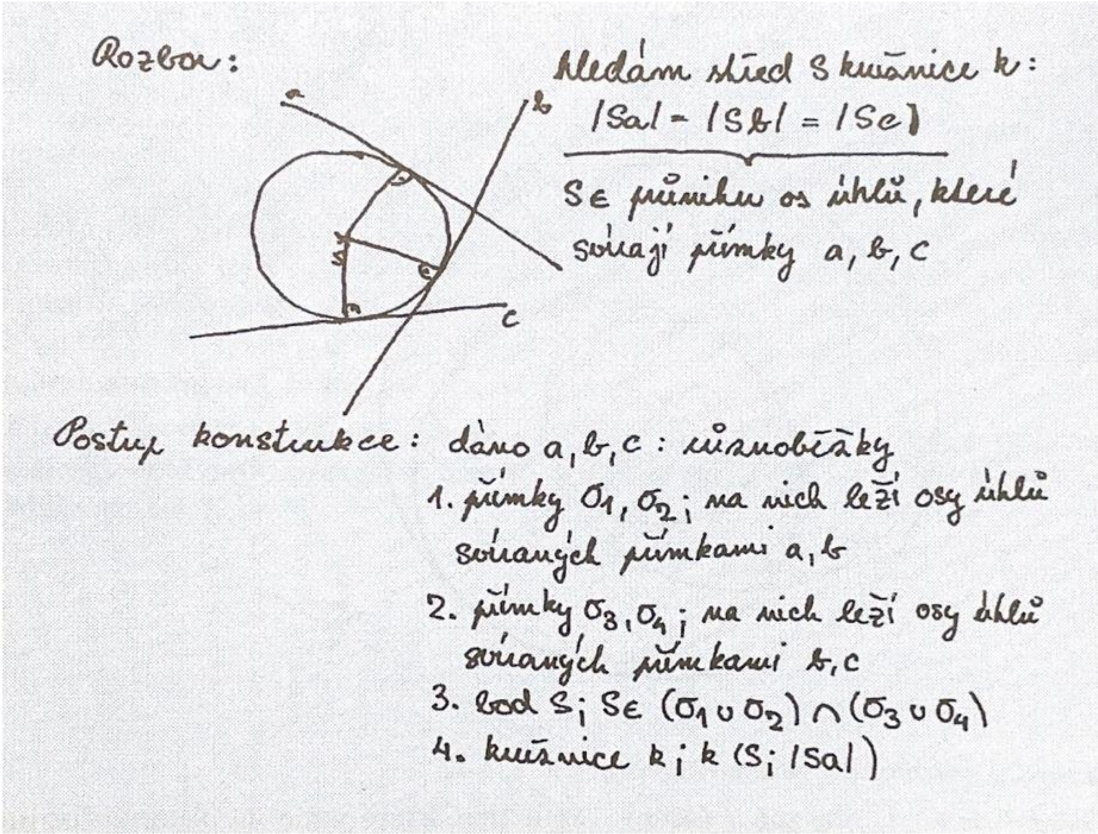


Obrázek 5.8 – Příklad z české učebnice 3

V závěru kapitoly je uvedena následující úloha s ukázkou rozboru a postupu konstrukce (viz Obrázek 5.9).

Příklad 5.6:

Jsou dány tři přímky a, b, c, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Sestrojte kružnici k, která se všech tří přímek dotýká.



Obrázek 5.9 – Příklad z české učebnice 4

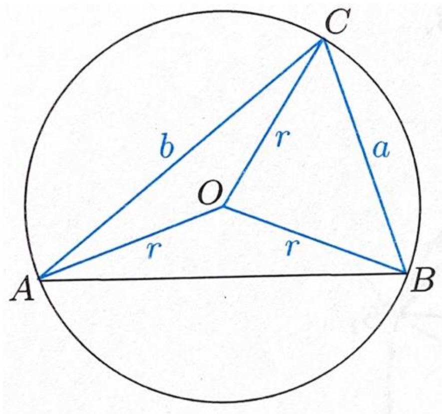
Je zřejmě, že se jedná o Apollóniovu úlohu, o čemž je zmínka hned pod úlohou. Úloha by měla připravit žáky na náročnější uvažování a hlubší porozumění teoretickému základu.

Následuje kapitola o konstrukcích trojúhelníku. Celá je věnovaná otázce, jak sestrojit trojúhelník, jsou-li dány některé jeho prvky (měřitelné údaje), jako například délky stran, těžnic a výšek, velikosti vnitřních úhlů nebo poloměr kružnice trojúhelníku opsané či vepsané. Hned na začátku se žáci seznamují s pojmem polohové a nepolohové konstrukční úlohy.

Kapitola obsahuje úlohy na konstrukce trojúhelníku různého typu a používá rozmanité teoretické znalosti. Tak například další příklad vyžaduje teorii, která se týká kružnice trojúhelníku opsané.

Příklad 5.7:

Sestrojíme trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 2$ cm, $b = 4{,}5$ cm, $r = 2{,}5$ cm.



Obrázek 5.10 – Příklad 5.7. Náčrt úlohy

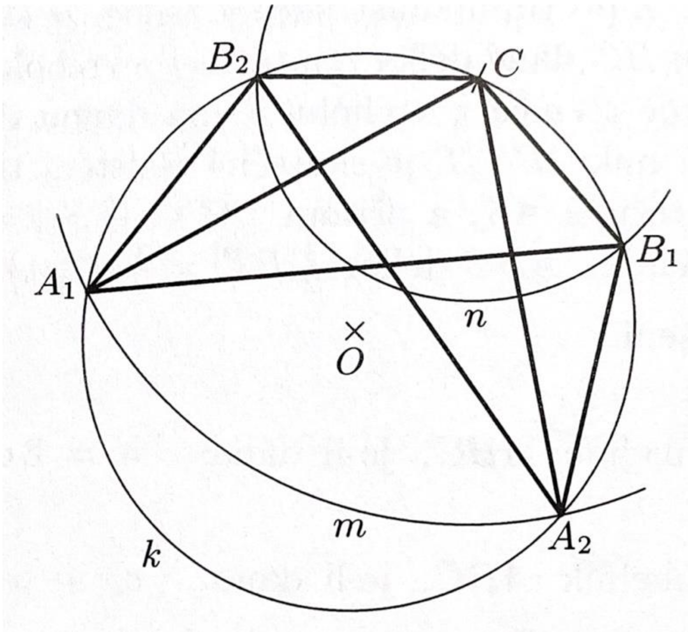
Řešení z učebnice

Rozbor:

V rovině nejprve umístíme kružnici $k(O; r)$ a na ní zvolíme bod C. Vrcholy A a B pak najdeme jako průsečíky kružnice k a s kružnici $m(C; b)$ a $n(C; a)$.

Postup konstrukce:

1. Kružnice k; $k(O; r)$, O – libovolný bod, $r = 2{,}5$ cm
2. Bod C; $C \in k$ (libovolně)
3. Kružnice m; $m(C; b)$, $b = 4{,}5$ cm
4. Bod A; $A \in k \cap m$
5. Kružnice n: $n(C; a)$, $a = 2$ cm
6. Bod B; $B \in k \cap n$
7. Trojúhelník ABC



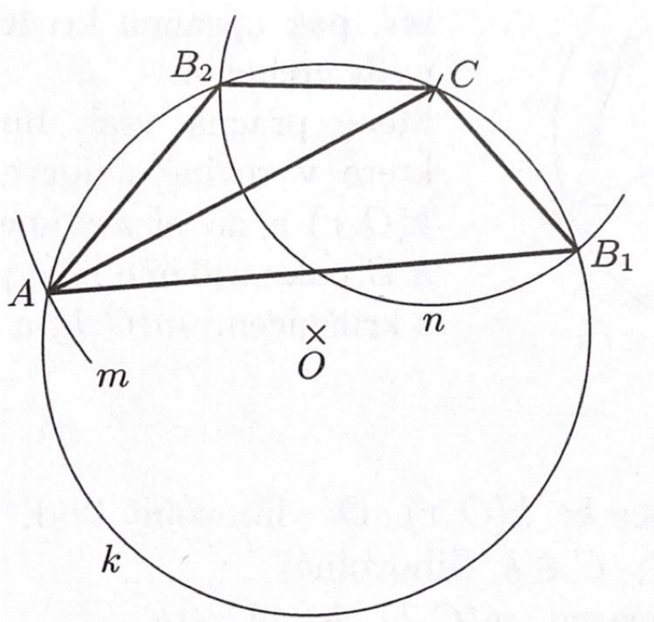
Obrázek 5.11 – Příklad 5.7. Výsledná konstrukce 1

Zkouška správnosti:

Protože $A \in k$, $B \in k$ i $C \in k$, je $r = 2{,}5$ cm poloměr kružnice opsané sestrojenému trojúhelníku ABC. Protože $A \in m$, platí $|AC| = b = 4$ cm. Podobně z $B \in n$ vyplývá $|BC| = a = 2$ cm.

Počet řešení:

I když při konstrukci vyšly 4 trojúhelníky, má úloha jen dvě řešení, neboť trojúhelníky A_1B_1C a A_2B_2C jsou shodné, stejně jako trojúhelníky A_1B_2C a A_2B_1C. Jde totiž o dvojice trojúhelníků, které jsou souměrně sdružené podle osy OC. Při konstrukci se rozhodneme, ve které z polorovin s hraniční přímkou OC bude vrchol A ležet. Pak již ale nemůžeme „vybrat polorovinu" pro vrchol B.



Obrázek 5.12 – Příklad 5.7. Výsledná konstrukce 2

Komentář autorky s vlastním řešením:

Rozbor v řešení převzatém z učebnice je spíše postupem konstrukce, tedy postrádá rozbor vlastností prvků ze zadání. Diskuze počtu řešení bude doplněná o vysvětlení, proč vlastně nemůžeme vybrat polorovinu pro vrchol B.

Rozbor:

Střed kružnice opsané leží ve stejné vzdálenosti od všech vrcholů trojúhelníku. Vrcholy leží na kružnici a to tak, že bod C je vzdálený od vrcholu A na délku rovnající se straně b a od vrcholu B na délku rovnající se straně a. Umístíme nejdřív do roviny kružnici opsanou a naneseme na ni vrcholy tak, aby vyhovovaly podmínkám zadání.

Doplnění diskuze:

Zvolením vrcholu A na kružnici k automaticky zvolíme polorovinu, ve které budeme dále pracovat. Řešením z opačné poloroviny by byly dva další trojúhelníky, které jsou shodné s původními, proto je nemůžeme zařadit do výsledku.

6 Konstrukční úlohy v ukrajinských učebnicích

Vzhledem k tomu, že je na Ukrajině předmět matematika rozdělený zvlášť na geometrii a algebru, v této kapitole se bude pracovat s učebnicemi, které se věnují pouze geometrickým úlohám a teorii. Pro hlubší analýzu konstrukčních úloh v ukrajinských učebnicích byly zvolené tři různé učebnice geometrie, podle kterých se ukrajinští žáci učili v době prezenční výuky. V každé úloze bude uvedeno plné řešení v ukrajinštině s dodatečným překladem do češtiny a didaktický komentář autorky s návrhem na vlastní řešení. Cílem je prozkoumat odlišnosti způsobů a metod řešení konstrukčních úloh v českých a ukrajinských učebnicích. Způsob řešení uvedený v učebnicích, které budou podrobeny analýze, se následně bude zohledňovat při analýze problému a vyslovování očekávání.

V ukrajinských učebnicích se konstrukční úlohy převážně dělí do tří typů:

- **Výpočetní úlohy.** V zadání úlohy je nejenom konstrukce útvaru, ale i předběžný výpočet aspoň jednoho údaje na základě teoretických vlastností.
- **Důkazové úlohy.** Jedná se o důkaz geometrického tvrzení pomocí konstrukce daného útvaru.
- **Konstrukční úlohy.** Klasické úlohy na rýsování obrázku na základě podmínek daných v úloze.

6.1 Planimetrie pro 7-9. ročníky

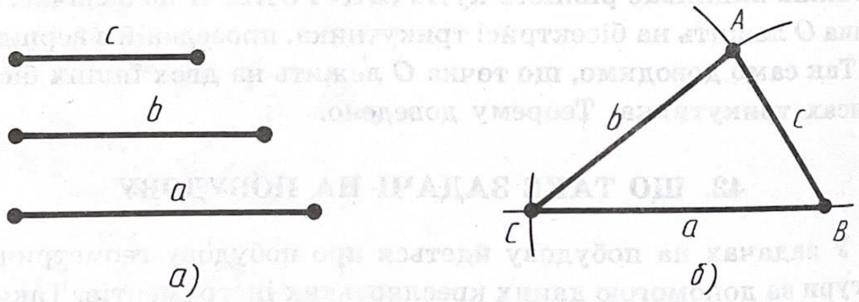
První učebnicí, která poslouží k přiblížení pojmů konstrukčních úloh v ukrajinských učebnicích, je Planimetrie pro 7-9. ročníky. (41) Učebnice obsahuje shrnutí veškeré teorie z geometrie za tři ročníky. Každá kapitola na konci obsahuje úlohy pro samostatné procvičování látky. Kapitola začíná rozborem kružnice a následně na ni navazují další úlohy: kružnice opsaná a vepsaná trojúhelníku, tečna kružnice.

Hned poté následuje podkapitola o konstrukcích obecně, která obsahuje jednodušší konstrukce jako osa úhlu a úsečky, kolmice a geometrické umístění bodů. V žádné části není uvedené teoretické vysvětlení látky, na které by se dalo navázat. Každá konstrukce obsahuje zadání úlohy a následně vypracované řešení se slovním vysvětlením. Řešení neobsahuje jednotlivé kroky konstrukčních úloh a zajímavé je to, že v jedné úloze je řešení popsaným postupem konstrukce, načež v jiné připomíná spíše rozbor. Uvedeme příklady takových úloh.

Příklad 6.1 a řešení z učebnice:

Задача 5.1. ***Побудувати трикутник з даними сторонами a, b, c*** (мал. 99, *а*).

Розв'язання. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму і позначаємо на ній довільну точку B (мал. 99, *б*). Розхилом циркуля, що дорівнює a, описуємо коло з центром B і радіусом a. Нехай C — точка перетину цього кола з прямою. Тепер розхилом циркуля, що дорівнює c, описуємо коло з центром у точці B, а розхилом циркуля, що



Мал. 99

дорівнює b, описуємо коло з центром у точці C. Нехай A — точка перетину цих кіл. Проведемо відрізки AB і AC. Трикутник ABC має сторони, які дорівнюють a, b, c.

Obrázek 6.1 – Příklad 6.1. Řešení v ukrajinštině

Překlad zadání a řešení příkladu 6.1:

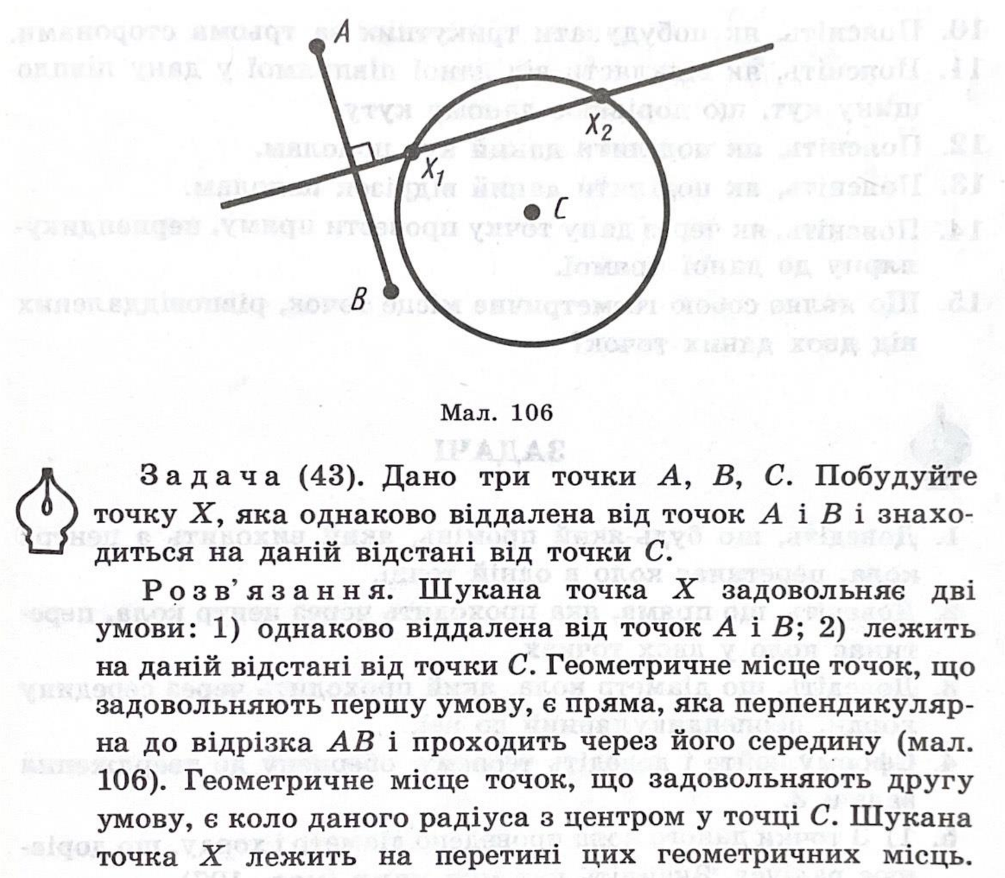
Příklad 5.1: Sestrojit trojúhelník z daných stran a, b, c (obr. 99, a).

Řešení: Pomocí pravítka vedeme libovolnou přímku a vyznačíme na ní bod B (obr. 99, b). Rozevřením kružítka na délku a rýsujeme kružnici se středem v B a poloměrem a. Nechť je C bodem průsečíku této kružnice s přímkou. Teď rozevřením kružítka, které se rovná c, rýsujeme kružnici se středem v B, a rozevřením kružítka na délku b rýsujeme kružnici se středem v C. Nechť je A bodem průsečíku těchto kružnic. Sestrojíme úsečky AB a AC. Trojúhelník ABC má strany, které se rovnají a, b, c.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

Úloha je jednoduchou základní konstrukcí. Řešení z učebnice je zřejmě slovním zápisem postupu konstrukce. Úloha tak postrádá rozbor a diskuzi o počtu řešení. Není tak jasné, jaké jsou vztahy pro jednotlivé prvky ze zadání a co platí pro výsledek obecně. Je tedy vhodné doplnit řešení na začátku o implicitní zmínku o tom, že bod A má od bodu C vzdálenost b a od bodu B vzdálenost c. Bude tedy ležet v průniku dvou kružnic. Také je důležité zmínit, že úloha má jediné řešení v dané polorovině.

Příklad 6.2 a řešení z učebnice:



Мал. 106

З а д а ч а (43). Дано три точки A, B, C. Побудуйте точку X, яка однаково віддалена від точок A і B і знаходиться на даній відстані від точки C.

Р о з в' я з а н н я. Шукана точка X задовольняє дві умови: 1) однаково віддалена від точок A і B; 2) лежить на даній відстані від точки C. Геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину (мал. 106). Геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, є коло даного радіуса з центром у точці C. Шукана точка X лежить на перетині цих геометричних місць.

Obrázek 6.2 – Příklad 6.2. Řešení v ukrajinštině

Překlad zadání a řešení příkladu 6.2:

Úloha (43): Jsou dány tři body A, B, C. Sestrojte bod X, který je stejně vzdálen od bodů A a B a má určitou vzdálenost od bodu C.

Řešení: Hledaný bod X musí splňovat dvě podmínky:

1) být stejně vzdáleny od bodů A a B;
2) být v určité vzdálenosti od bodu C.

Geometrické umístění bodů, které vyhovují první podmínce, tvoří přímka, která je kolmá na úsečku AB a prochází jejím středem (obr. 106). Geometrickým umístěním bodů, které vyhovují druhé podmínce, je kružnice s daným poloměrem, která má střed v bodě C. Hledaný bod X leží v průsečíku těchto křivek.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

Uvedené řešení je zjevně spíše rozborem úlohy. Zajímavé je to, že se v řešení nepoužívá pojem osa úsečky, ale přímka, která je kolmá na úsečku AB a prochází jejím středem. V kapitole se vůbec nevyskytuje pojem osy úsečky, jenom úhlu. Postup konstrukce je zahrnutý v rozboru, obrázek slouží jako nápověda. Je vhodné doplnit úlohu o komentář k počtu řešení, jelikož obrázek ukazuje jenom jednu možnost. Mělo by být uvedeno, že počet řešení závisí na počtu průsečíků kružnice s přímkou a tak úloha může mít jedno, dvě nebo žádné řešení.

V závěru kapitoly jsou uvedené úlohy na samostatné vypracování, ve kterých se vyskytují všechny tři typy úloh, které již byly zmíněné. Příklady úloh jsou níže.

Příklad 6.3:

1. Máme kružnici se středem O a bod A, který leží na této kružnici. Bodem A vedeme přímku, která se nedotýká kružnice. OB je kolmice vedená na tuto přímku. Na prodloužení úsečky AB uděláme úsečku $BC = AB$. Dokažte, že bod C leží na kružnici.
2. Dokažte, že přímka, která má jeden společný bod s kružnicí, je tečnou kružnice v tomto bodě.
3. Dokažte, že pokud dvě kružnice mají jen jeden společný bod, dotýkají se v tomto bodě.

Uvedená série gradovaných úloh je také ukázkou úlohy důkazového typu. Důkaz podle doporučení učebnice by se měl provádět sporem. Úlohy vyžadují hlubší přemýšlení a umění vykonávat operace, které se zakládají na teoretických znalostech.

6.2 Geometrie pro 7. třídy

Následující učebnici, na jejímž základě bude provedena analýza ukrajinských, je Geometrie pro 7. třídy základních všeobecných škol. (42) Daná učebnice je z nové řady roku vydání 2020. V souladu s tím se v ní používají nejnovější metody výkladu látky. Celá učebnice se skládá ze čtyř kapitol, ze kterých první dvě jsou věnované elementárním geometrickým útvarům, jejich vlastnostem a vzájemné poloze útvarů v rovině. Podstatné pro tuto práci jsou následující kapitoly, ve kterých se probírají trojúhelníky a kružnice, kruh.

V kapitole o trojúhelnících na začátku je uvedený teoretický výklad definic a vlastnosti, které se následně použijí při řešení úloh. Všechny úlohy v této části jsou buď výpočetní, nebo důkazové, není uvedena ani jedna konstrukční úloha.

Poprvé se s jednodušší konstrukční úlohou lze setkat až v části o kružnici a kruhu. Jedná se o konstrukce základních útvarů jako je tečna kružnice, kružnice vepsaná a opsaná. Ve stejné části jsou uvedené dvě kapitoly, které se týkají vyloženě konstrukčních úloh. První kapitola je úvodem do tématu a jsou zde představené základní jednoduché konstrukce. Každá obsahuje zadání a řešení s vysvětlením a obrázkem. Stejně jako v předchozím rozboru učebnice veškeré vysvětlení a postup konstrukce je sepsán slovně, nebo je provedeno řešení, které obsahuje pouze rozbor. V této kapitole se děti seznámí s konstrukcemi:

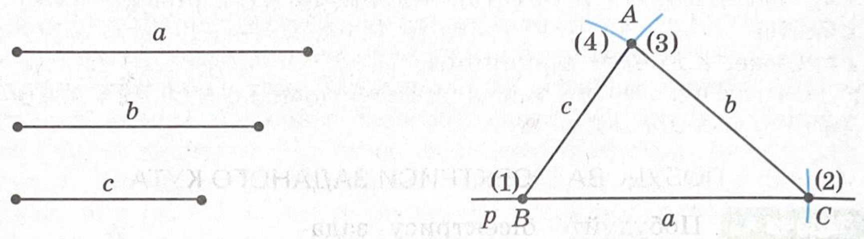
- úsečky o dané délce;
- trojúhelníku ze tří stran;
- úhlu o dané velikosti;
- osy úhlu;
- osy úsečky;
- kolmice k přímce.

Cílem je porovnat učebnice a metody výkladu daného téma, které se v nich uvádí. Proto pro analýzu bude představená stejná úloha jako v minule části s odlišným přístupem řešení.

Příklad 6.6 a řešení z učebnice:

Задача 2. Побудуйте трикутник із заданими сторонами a, b і c.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай задано три відрізки a, b і c (мал. 412).



Мал. 412 Мал. 413

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму p і позначимо на ній довільну точку B ((1) на мал. 413).
2) За допомогою циркуля відкладемо на прямій p відрізок $BC = a$ (дуга (2) на мал. 413).
3) Розхилом циркуля, що дорівнює b, опишемо дугу (3) кола із центром у точці C (мал. 413).
4) Розхилом циркуля, що дорівнює c, опишемо дугу (4) кола із центром у точці B (мал. 413).
5) Точка A – точка перетину дуг (3) і (4). $\triangle ABC$ – шуканий.

Д о в е д е н н я цього факту є очевидним, оскільки сторони трикутника ABC дорівнюють заданим відрізкам a, b і c: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

З а у в а ж е н н я. Якби побудовані дуги (3) і (4) не перетнулися, то трикутник побудувати було б неможливо. За нерівністю трикутника: кожна зі сторін повинна бути меншою за суму двох інших.

Obrázek 6.3 – Příklad 6.6. Řešení v ukrajinštině

Překlad zadání a řešení příkladu 6.6:

Úloha 2. Sestrojte trojúhelník ze tří stran a, b a c.

Řešení: Nechť jsou dány tři úsečky a, b a c (obr. 412).

1. Pomocí pravítka vedeme libovolnou přímku p a vyznačíme na ní libovolný bod B ((1) na obr. 413).
2. Pomocí kružítka vyznačíme na přímce p úsečku $BC = a$ (oblouk (2) na obr. 413).
3. Rozevřením kružítka na délku b opíšeme oblouk (3) kružnice se středem v bodě C (obr. 413).
4. Rozevřením kružítka na délku c opíšeme oblouk (4) kružnice se středem v bodě B (obr. 413).
5. Bod A je průsečíkem oblouků (3) a (4). $\triangle ABC$ je hledaný trojúhelník.

Důkaz tohoto faktu je zřejmý, jelikož strany trojúhelníku se rovnají zadaným úsečkám a, b a c: $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$.

Upozornění: kdyby se sestrojené oblouky (3) a (4) neprotnuly, nebylo by možné trojúhelník sestrojit. Podle trojúhelníkové nerovnosti každá strana musí být kratší než součet délek zbylých dvou stran.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

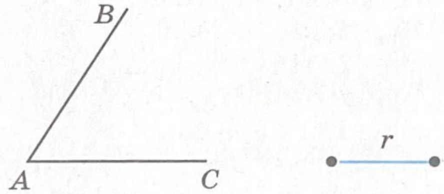
Řešení z předložené učebnice se výrazně liší od předchozího. V určitém smyslu jsou zachované některé kroky řešení konstrukční úlohy. Postup konstrukce je sepsaný slovně, nepoužívá se žádný symbolický zápis. Jednotlivé části konstrukce jsou na rozdíl od ostatních učebnic zvýrazněné číslem pro lepší orientaci žáků. Je to velice netradiční přístup k výkladu. Můžeme si všimnout rozdílu v symbolickém zápisu délek stran: v ukrajinských učebnicích se nepoužívají svislé čáry pro označení délek úseček. Na konci se uvádí „upozornění“, což je v podstatě diskuze počtu řešení. Úlohu by bylo vhodné doplnit o rozbor a symbolický zápis. Jinak řešení obsahuje veškeré potřebné kroky.

Druhá kapitola je věnovaná geometrickému místu bodů, které se v učebnici definuje jako útvar sestávající ze všech bodů roviny, které mají určitou vlastnost. Jde v podstatě o množiny všech bodů dané vlastnosti. Pro samostatné procvičování jsou uvedené typické jednodušší úlohy na konstrukci trojúhelníku. Níže je uveden příklad řešení jedné z nich.

Příklad 6.7 a řešení z učebnice:

Задача. У даний кут вписати коло заданого радіуса.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай дано кут A (мал. 433), у який треба вписати коло радіусом r (тобто таке коло радіусом r, яке дотикалося б до сторін кута).

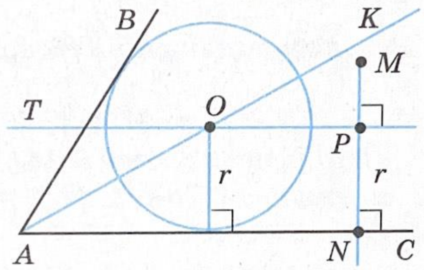


Мал. 433

Спочатку знайдемо центр цього кола – точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) міститься на відстані r, наприклад, від сторони AC кута.

Звідси побудова:

1) будуємо бісектрису кута A – промінь AK (мал. 434);



Мал. 434

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої AC, що проходить через деяку точку M, яка лежить усередині кута;

3) визначаємо на побудованій прямій точку P, що міститься на відстані r від прямої AC;

4) проводимо через точку P пряму PT, перпендикулярну до прямої PN; тоді прямі PT і AC – паралельні, кожна точка прямої PT міститься на відстані r від прямої AC;

5) пряма PT перетинає промінь AK у точці O. Ця точка і є центром кола, радіус якого r, вписаного в кут A;

6) описуємо коло, радіус якого r, із центром у точці O, воно дотикається до сторін кута.

Д о в е д е н н я того, що побудоване коло є шуканим, випливає з побудови.

Obrázek 6.4 – Příklad 6.7. Řešení v ukrajinštině

Překlad zadání a řešení příkladu 6.7:

Úloha. Do daného úhlu vepište kružnici o daném poloměru.

Řešení: Nechť je dan úhel A (obr. 433), do kterého je třeba vepsat kružnici o poloměru r (takže takovou kružnici o poloměru r, která by se dotýkala ramen úhlu). Nejdříve nalezneme střed této kružnice – bod O. Daný bod vyhovuje dvěma podmínkám: 1) leží na ose úhlu (protože je stejně vzdálený od ramen úhlu); 2) má vzdálenost r například od ramene AC úhlu.

Z toho plyne konstrukce:

1. Sestrojíme osu úhlu A – polopřímku AK (obr. 434);
2. Sestrojíme přímku, která je kolmá na přímku AC a prochází libovolným bodem M, který leží uvnitř úhlu;
3. Označíme na sestrojené přímce bod P, který se nachází ve vzdálenosti r od přímky AC;
4. Proložíme bodem P přímku PT, která je kolmá na přímku PN; potom budou přímky PT a AC rovnoběžné a každý bod přímky PT bude mít vzdálenost r od přímky AC;
5. Přímka PT protíná polopřímku AK v bodě O. Tento bod je středem kružnice s poloměrem r, která je vepsaná do úhlu A;
6. Narýsujeme kružnici o daném poloměru r se středem v bodě O, která se dotýká ramen úhlu.

Důkaz toho, že daná kružnice je hledanou v zadání, vyplývá z konstrukce.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

Úloha je zajímavá z didaktického hlediska. Uvedené řešení je nejbližší tomu, které se vyskytuje v českých učebnicích. Začíná rozborem, ve kterém se uvádí vztahy pro prvky ze zadání úlohy. Následně vidíme postup konstrukce, který navazuje na rozbor. Jak je tomu zvykem v ukrajinských učebnicích, je postup popsaný slovně bez použití symbolického zápisu. Za zmínku stojí odlišnost ve způsobu zápisu jednotlivých prvků. Tak například úhel se značí pouze podle vrcholu (např. úhel A), přímka a polopřímka nemají speciální označení a kolmost přímek na obrázku se značí odlišným symbolem. Další odlišností je část samotného řešení. V uvedeném řešení z ukrajinské učebnice konstrukce přímky, která je rovnoběžná k dané přímce a leží od ní v určité vzdálenosti, je rozdělená na vícero kroků. V českých učebnicích je tato konstrukce shrnutá do jediného kroku. Úlohu je také vhodné doplnit o diskuzi počtu řešení, ve kterém by bylo uvedeno, že úloha má vždy jediné řešení, jelikož dané přímky se protínají v jediném bodě.

Učebnice obsahuje omezený počet konstrukčních úloh. Probírají se jednodušší konstrukce, většina úloh je uvedená pro samostatné procvičování. Učebnice je vybrána z nejnovější řady učebnic. Řešení uvedených úloh jsou zpracovaná na výrazně lepší úrovni.

6.3 Geometrie pro 8. ročník

Poslední učebnicí, která bude podrobena analýze ukrajinských výukových materiálů, je učebnice Geometrie pro 8. ročníky základních škol. (43) Na rozdíl od předchozích učebnic tato neobsahuje téma konstrukčních úloh jako samostatnou kapitolu, ale daný typ úlohy se vyskytuje na konci každé kapitoly, věnované konkrétnímu útvaru. Důvodem je to, že se konstrukční úlohy probíraly v předchozím dílu učebnice. Každá úloha je tak v podstatě opakováním učiva a předpokládá schopnost žáků tuto úlohu vyřešit. Nejspíše proto se v učebnici nevyskytuje žádná vyřešená konstrukční úloha jako ukázka. Stejně tak ve výsledcích není řešení ani nápověda, jak by žáci měli postupovat. Tak například v kapitole o čtyřúhelnících jsou uvedeny úlohy, které navazují na učivo probrané v předchozím ročníku a prohlubují znalosti žáků v této oblasti, ale zřejmě jedinou zpětnou vazbou o správnosti řešení je učitel.

Příklady 6.8 z učebnice:

130.** Побудуйте прямокутник за стороною та кутом між діагоналями, який протилежний даній стороні.

131.* Побудуйте прямокутник:
1) за діагоналлю та різницею двох сторін;
2) за периметром і діагоналлю;
3) за периметром і кутом між діагоналями.

Obrázek 6.5 – Příklad 6.8. Zadání v ukrajinštině

Překlad zadání příkladů 6.8:

130.** Sestrojte obdélník ze strany a úhlu mezi uhlopříčkami, který leží proti dané straně.

131.* Sestrojte obdélník:

a) z úhlopříčky a rozdílu délek dvou sousedních stran;
b) z obvodu a úhlopříčky;
c) z obvodu a úhlu mezi úhlopříčkami.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

Jak již bylo zmíněno, největším nedostatkem úloh v dané učebnici je chybějící příprava na úlohu a zpětná vazba. Bylo by vhodné navázat na předchozí učivo stručným opakováním a použít tyto úlohy pro zkoumání nové látky. Úlohy jsou netradiční, takže by se daly zakomponovat do přípravy na další učivo. Pomocí teorie, která je uvedená dříve v kapitole, lze vypracovat rozbor konstrukce. Jako opakování předchozího učiva by mohl sloužit postup konstrukce. Diskuze by v takovém případě propojovala obě fáze.

Přestože trojúhelníkům není věnovaná samostatná kapitola, v učebnici se zvlášť probírá střední příčka trojúhelníku. Po krátkém teoretickém výkladu, který obsahuje definici a vlastnosti střední příčky, žáci mohou najít úlohy na samostatné procvičování látky. Jednou z takových úloh je konstrukce trojúhelníku podle středních příček. Další konstrukční úlohy také můžeme najít v kapitole věnované kružnicím a úhlům v nich.

V kapitole o podobnosti trojúhelníků a v závěru této kapitoly žáci mají možnosti procvičit konstrukce trojúhelníků pomocí následující série úloh:

Příklad 6.9 z učebnice:

416.•• Побудуйте трикутник:
1) за стороною та кутами, які ця сторона утворює з медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за двома медіанами та кутом між ними;
3) за висотою та медіаною, проведеними до однієї сторони, і кутом між цією стороною та медіаною, проведеною до іншої сторони;
4) за трьома медіанами.

Obrázek 6.6 – Příklad 6.9. Zadání v ukrajinštině

Překlad zadání příkladu 6.9:

416.** Sestrojte trojúhelník ze:

1. strany a úhlů, které tato strana svírá s těžnicemi vedenými ke zbylým dvěma stranám;
2. dvou těžnic a úhlů mezi nimi;
3. výšky a těžnice, vedenými k jedné straně, a úhlu mezi danou stranou a těžnicí, vedené k další straně;
4. tří těžnic.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

Dané zadání představuje sérii gradovaných úloh, která je vhodná jak pro opakování již známé látky, tak pro procvičování nových znalostí. Série umožňuje procvičování více metod řešení. Tak například pro řešení první a druhé úlohy lze použít znalost definice těžnice a těžiště a jeho vlastnosti. Následně se úloha převede na jednoduchou konstrukci. V poslední úloze navíc jednou z očekávaných metod řešení je metoda užití shodných zobrazení. Tak se sestrojí doplňkový trojúhelník s délkami stran, které se rovnají dvěma třetinám délek těžnic. Následně se doplní na rovnoběžník. Dále se úloha převádí na jednoduchou konstrukci. Úlohy stejně jako v minulém případě postrádají vypracované řešení, které by bylo možné podrobit analýze.

Na konci této kapitoly jsou uvedeny obtížnější úlohy a jedna z nich je zaměřena nejenom znalosti postupu konstrukce, ale i znalosti pojmů a definic v oblasti geometrie.

Příklad 6.10 z učebnice:

2. Побудуйте трикутник ABC за трьома даними точками: вершиною A, ортоцентром H і центром O описаного кола.

Obrázek 6.7 – Příklad 6.10. Zadání v ukrajinštině

Překlad zadání příkladu 6.10:

Sestrojte trojúhelník ABC ze tří zadaných bodů: vrcholu A, ortocentra H a středu kružnice opsané O.

Komentář autorky s návrhem na vlastní řešení:

Úloha by mohla sloužit k opakování nebo procvičování důležitých prvků v trojúhelníku. Je velice obtížná na samostatné procvičování, jelikož vyžaduje nadstandardní teoretické znalosti. Obtížnost úlohy také spočívá v tom, že v podmínkách není uvedená žádná úsečka, konstrukce se tak kompletně zakládá na práci s významnými body. Úloha může být vyřešena pomocí Eulerovy přímky[2]. Je vhodná pro práci při hodině, aby učitel mohl poskytnout zpětnou vazbu.

6.4 Online platformy

Veškeré politické změny si vyžádaly změnu přístupu k vyučování. Nezbytnými jsou teď online platformy pro výuku dětí, které momentálně nemají možnost chodit do školy. Ministerstvo školství Ukrajiny poskytlo seznam odkazů na různé webové stránky a kurzy, které slouží žákům jako pomocné nástroje při výuce. Mezi ně patří například „Všeukrajinská škola online" (Всеукраїнська школа онлайн (44)) nebo online platforma „Prometheus" (45). Jako základní prvek ale stále slouží online platforma „Education Ukraine" (46). Ta obsahuje nejen učebnice a materiály ke čtení, ale také televizní pořady a další interaktivní pomůcky ke vzdělávání. Na dané platformě je možné nalézt i učebnice geometrie pro všechny ročníky, kde se tento předmět vyučuje.

Žádný ze zmíněných kurzů ale neobsahuje téma konstrukčních úloh. Geometrie, která se probírá v kurzech, se zaměřuje vyloženě na výpočetní úlohy a znalost teorie. Tím pádem můžeme očekávat, že úroveň žáků z Ukrajiny v této oblasti bude nižší a žáci budou potřebovat více času k procvičování rýsování a geometrické představivosti.

[2] **Věta** (O Eulerově přímce): Střed kružnice opsané, těžiště a ortocentrum leží na jedné přímce (nebo splývají v jeden bod) a platí, že vzdálenost těžiště od středu kružnice opsané je dvojnásobek vzdálenosti těžiště od ortocentra. Této přímce se říká Eulerova přímka. (49)

7 Problémy v konstrukčních úlohách u žáků-uprchlíků z Ukrajiny

Dyntarová v (1) zkoumá kritická místa v konstrukčních úlohách u žáků českých středních škol. Naše práce je zaměřena konkrétně na problémy v této oblasti, které působí žákům z Ukrajiny jejich uprchlický stav a rozdíly v systému vzdělávání.

Cílem je odhalit specifické problémy, s nimiž se ukrajinští žáci setkají během začátku výuky na českých školách, a podrobněji se zaměřit na analýzu každého z těchto problémů.

Na základě kapitol 5 a 6 bude vytvořen přehled odlišností ve výuce úloh v obou zemích. Tyto rozdíly budou hrát zásadní roli ve vyslovování budoucích očekávání.

7.1 Jazyková bariéra

Přestože matematika používá jednotný mezinárodní jazyk – čísla a symboly, jazyková bariéra je největším problémem žáků s odlišným mateřským jazykem. Chápání úlohy včetně pojmů a názvů jednotlivých objektů je základem správného postupu. Součástí zmíněného problému je také znalost symbolů. V ukrajinských učebnicích se vyskytují symboly, které se značí jinak, nebo existují symboly, které ukrajinští žáci neznají vůbec.

Žáci, kteří se chystají na české školy, mají nízkou jazykovou úroveň v běžném životě, při práci s odborným textem je tento problém ještě hlubší a vyžaduje důkladnější řešení. Pracovní list by měl být zpracován s použitím jednoduchých vět a srozumitelných pojmů, větší důraz by se měl klást na symbolický zápis.

Ve výzkumu bude použit slovník základních matematických pojmů a symbolů, který by měl pomoci žákům tento problém překonat. Chápání samotného zadání bude pozorováno již v prvním kroku řešení úlohy při tvorbě náčrtku.

7.2 Jednotlivé fáze konstrukční úlohy

V Kapitole 6 již bylo zmíněno, že v moderním ukrajinském kurikulu se téma konstrukčních úloh zvlášť neprobírá. Některé úlohy jsou zmíněny jako součást témat z planimetrie, a to jen ve starších učebnicích. Moderní školní program, který momentálně funguje formou online platformy, nezahrnuje žádnou konstrukční úlohu do vzdělávacího programu.

Žáci-uprchlíci z Ukrajiny tak nemají základní kompetence, které by jim pomohly pracovat v prostoru grafických entit. Tato práce také bude zkoumat schopnost zorientovat se v postupu řešení úloh daného typu a naučit se aplikovat nabízenou metodu při samostatném řešení.

Předpokládá se, že žáci nejsou seznámeni s jednotlivými kroky řešení a výzkum se bude zaměřovat na asimilaci žáků v nové metodě.

7.3 Nestandardní zadání

Na základě analýzy ukrajinských učebnic v kapitole 6 lze předpokládat, že žáci z Ukrajiny umějí pracovat se standardními zadáními a postupy, jsou zvyklí na prototypy v úlohách. Většina úloh podrobených analýze obsahovala výpočetní postup a následně jednoduchou konstrukci. Výzkum také bude zaměřený na schopnost žáků přemýšlet na více úrovních a aplikovat svoje teoretické dovednosti v netypické situaci.

Část II
Praktická část

8 Metodologie

Pro splnění cíle této práce autorka zvolila pracovní list, který se bude zaměřovat na hlubší pochopení problémů a bude sloužit jako pomocný nástroj pro výuku žáků-uprchlíků. Výzkumu bude předcházet pilotní studie, která pomůže zredukovat pracovní list a ponechat podstatné úlohy. Hlavní výzkum bude probíhat formou samostatné práce a následně rozhovoru individuálně s každým žákem skupiny. Během rozhovoru se organizátorka bude snažit analyzovat postup řešení a úvahy, pomocí kterých žák dospěje k výsledku. Součástí výzkumu je také odhalení problémů, se kterými se žáci můžou potýkat při začátku výuky na českých školách.

8.1 Výběr úloh

Během analýzy učebních materiálů se zjistilo, že přístup k výuce konstrukčních úloh je velice odlišný. Je to jedno z mála témat, která se na Ukrajině vyučují nedostatečně. Existuje ale pevný základ, který dává žákům osnovy znalostí v geometrii.

Pracovní list tak bude obsahovat úlohy, které jsou v kurikulech obou zemí velice podobné. Důvodem je to, že není cílem tohoto výzkumu zkoumat odlišnosti ve výukových materiálech, ale zjistit problémy způsobené jiným přístupem k výuce těchto metod. Všechny úlohy, které budou použité ve výzkumu, jsou převzaté z teoretické části, konkrétně z kapitol Konstrukční úlohy v českých učebnicích a Konstrukční úlohy v ukrajinských učebnicích. V teoretické části je také proveden kompletní rozbor těchto úloh včetně řešení, proto v praktické části budou uvedena pouze řešení žáků bez správného postupu.

Velký vliv samozřejmě bude hrát jazyková bariéra, kterou se autorka pokusí odstranit pomocí slovníku pojmů na začátku pracovního listu a metodou sběru dat při osobním rozhovoru s žáky. Úkolem pracovního listu bude vyvarovat se této strategie a nasměrovat žáky cestou chápání těchto úloh.

8.1.1 Úlohy

ÚLOHA 1

Je dána kružnice $k(S; |SA|)$ a body $A \in k$ a $B \notin k, |SB| > r$. Narýsuj takovou kružnici $l\ (P;\ |PA|)$, která má $A \in l, B \in l$.

Postup konstrukce:

1. $k(S; 3\ cm), A \in k,\ B \notin k, |SB| > r$
2. $o;\ o - osa\ AB$
3. $p; S \in p\ \cap A \in p$
4. $P; P \in o \cap p$
5. $l(P; |PA|)$

Proveď konstrukci podle postupu.

ÚLOHA 2

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 6\ cm,\ \ c = 4\ cm,\ v_b = 3\ cm.$

a) Načrtni trojúhelník a označ v něm všechny údaje, které znáš ze zadání.
b) Rozmysli si, jakou úsečkou začneš a jak budeš postupovat.
c) Zapiš symbolicky své kroky.
d) Proveď konstrukci podle daného postupu.
e) Ověř, jestli jsi narýsoval/a všechny výsledky.

ÚLOHA 3

Narýsuj kružnici $k_1(S_1; 45\ \text{mm})$ a na ní zvol bod T . Sestroj kružnici $k_2(S_2; 20\ \text{mm})$ tak, aby se dotýkala kružnice k_1 v bodě T . Narýsuj do obrázku jednotlivé možnosti, nejprve vždy urči střed S_2. Ve všech případech narýsuj i společnou tečnu kružnic v jejich bodě dotyku.

ÚLOHA 4

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $b = 7\ cm,\ t_b = 5\ cm,\ v_b = 4\ cm.$ Proveď rozbor, postup konstrukce a diskuzi.

ÚLOHA 5

Sestroj trojúhelník ABC, ve kterém $c = 5$ cm, $a = 2$ cm a $t_c = 3$ cm. Proveď rozbor, postup konstrukce a diskuzi.

Každá úloha v pracovním listu se zaměřuje na zkoumání jednotlivých kroků poznávacího procesu. Zároveň pracovní list slouží jako celek, ve kterém úlohy navazují na sebe a vytváří gradovanou sérii úloh.

První úloha zkoumá vyloženě znalost symbolů a schopnost narýsovat útvar podle postupu konstrukce. Cílem této úlohy je ověřit schopnost žáků číst symbolický zápis a promítat ho do formy geometrické reprezentace.

Druhá úloha zjišťuje, jak žáci umí rýsovat a používat znalosti z teoretického základu v praktických úlohách. Úloha je jako jediná převzatá z ukrajinské učebnice, takže obsahuje konkrétní postup, který by mohl pomoci žákům a navést je na správný postup. Úloha je převzatá z kapitoly 5, Matematika pro 8. ročník základní školy.

Počínaje třetí úlohou je pracovní list zaměřený na komplexní zkoumání postupu, který žáci použijí při řešení. Třetí úloha je bude navádět pomocí jednotlivých podúloh na kroky řešení konstrukčních úloh, které se vyskytují v českých učebnicích a dají základ pro řešení složitějších zadání. Úloha byla také zmíněna v analýze českých učebnic, v části Matematika pro 8. ročník základní školy.

Poslední dvě úlohy budou vyžadovat kompletní postup a budou zkoumat schopnost žáků používat poznatky již získané v předchozích úlohách, pro řešení komplexní úlohy. Pomohou nám získat nejhlubší vhled do úrovně chápání dané látky a kritických míst, která se vyskytují v řešení. Budeme také pozorovat, zda předchozí části poslouží v nějaké míře jako návod nebo pomůcka pro úspěšné řešení. Čtvrtá úloha je uvedena jako příklad metody řešení konstrukčních úloh pomocí množiny bodů o dané vlastnosti. Poslední úloha je převzatá z kapitoly 5, učebnice pro 8. ročník.

8.2 Vyslovení očekávání

Na základě vyslovených problémů a analýzy vzdělávacího procesu v této oblasti můžeme vyslovit očekávání, týkající se nejpodstatnějších problémů žáků v osvojení konstrukčních úloh:

1. *očekávání:*

Předpokládáme špatné porozumění textu a tím nesprávné chápání zadání. Může se také vyskytnout problém v pochopení symbolického zápisu. Budeme současně předpokládat potíže se zápisem podmínek úlohy nebo textovým zápisem (například u rozboru).

Cílem je prozkoumat jazykovou úroveň potřebnou pro ovládání jednodušších matematických textů.

2. *očekávání:*

Domníváme se, že na řešení některých úloh žáci půjdou intuitivním způsobem bez znalosti algoritmu řešení úlohy. Budeme předpokládat, že respondenti sami přijdou na nutnost náčrtku pro lepší představu, dále že budou dělat kompletní konstrukce, ve kterých objeví všechna možná řešení úlohy.

3. *očekávání:*

Velkým problémem pro většinu žáků budou úlohy, které oni vidí poprvé a nemají s nimi žádnou zkušenost. Předpokládáme, že se respondenti budou snažit aplikovat metody řešení úloh, na které jsou zvyklí již z ukrajinského vzdělávacího procesu.

Úlohy se tak budeme snažit vybrat jiného typu, než jsou standartní z ukrajinských učebnic, abychom mohli pozorovat schopnost žáků jednat v netypických situacích.

9 Pilotní studie

Pilotní studie této práce byla zaměřena na ověření plánovaného průběhu výzkumu a výběru úloh pro pracovní list za účelem následující redakce a přizpůsobování obou. Pro výzkum byli zvolení čtyři žáci kvarty víceletého gymnázia, kteří byli ve stejné věkové skupině jako účastníci hlavního výzkumu. Všichni měli konstrukční úlohy již probrané v předchozím ročníku. Pro výzkum organizátorka zvolila metodu samostatné práce žáků s pracovním listem a následně rozbor postupu řešení formou rozhovoru v ukrajinštině individuálně s každým žákem.

Vypracování celého pracovního listu trvalo žákům přibližně hodinu, rozhovor zabral dalších patnáct až dvacet minut. Celkově žáci zvládli výpočet na dobré úrovni bez větších problémů. Dále je uveden komentář zvlášť ke každé úloze.

První úloha byla zaměřená na porozumění symbolického zápisu. Ukázalo se, že žáci začínali s postupem konstrukce, aniž by si přečetli zadání. Organizátorka vždy upozornila na potřebu pochopení cíle úlohy, některým žákům bylo doporučeno pomoci si náčrtkem. Žákyně M tuto radu využila proto, aby viděla, jak bude vypadat výsledek, a aby věděla, kam má umístit první kružnici, aby se obrázek vešel na papír. Všichni měli problém s rozhodnutím, kam umístit bod B, což způsobovalo zdržení a zmatení v postupu. Žák S měl potíže s konstrukci osy, zřejmě kvůli problémům s matematickou definicí. Proběhl následující dialog:

S – To nepůjde. Tu osu zkonstruovat nemůžeme.
O – Proč to nepůjde?
S – Ta může být kdekoliv.

Poté, co si společně s organizátorkou žák definici připomněl, problém s konstrukcí byl vyřešen. Problém v úloze také vyvolala logická spojka součinu, nikdo z žáků nedokázal tento krok přečíst. S žákem M proběh následující dialog:

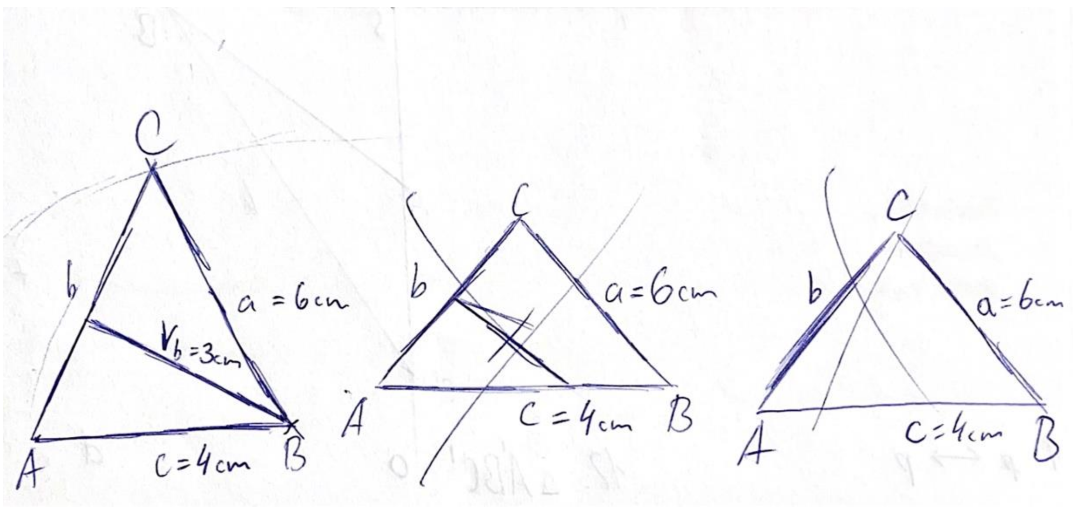
M – p se objevilo náhodně. Myslel jsem, že máme sestrojit nový bod S.
O – A nemáš tam už nějaký bod S?
M – To mám. Tím pádem musím sestrojit to, co ještě nemám. Takže tu přímku p.

S první úlohou žáci měli potíže v různých krocích řešení, a tak se organizátorka rozhodla změnit tuto úlohu za vhodnější. Cíl úlohy by ale měl zůstat stejný, chceme zkoumat schopnost žáků orientovat se v postupu konstrukce a symbolickém zápisu.

Druhá úloha byla převzata z kapitoly 6 a je přidána do pracovního listu za účelem prozkoumat potřebu zařazení cvičení z ukrajinských materiálů. Úlohu žáci zvládli vyřešit hned, nikdo s ní neměl žádný problém. Zřejmě tato úloha není zajímavá z didaktického hlediska, proto v hlavním výzkumu bude vyřazena z pracovního listu.

Další tři úlohy byly zaměřené na konstrukce trojúhelníků a měly za cíl postupně připravovat žáky na jednotlivé konstrukční kroky. Třetí úloha obsahovala podúlohy, takže měla sloužit jako nápověda a návod k postupu. Zajímavé je, že všichni žáci přistoupili k náčrtku až po doporučení organizátorky. Žákyně M postupovala tak, že si jednotlivé definice vyslovovala nahlas a následně uvažovala, jak je použije pro řešení úlohy. Teoretické znalosti v oblasti geometrie měla na dobré úrovni, takže je snadno přenesla do grafického prostoru. Během samostatné práce žákyně M úplně vynechala postup konstrukce, který ale správně dokázala popsat během rozhovoru. Na otázku, proč postup konstrukce vynechala, odpověděla, že jej pro správnou konstrukci nepotřebuje.

Žák S sice postupoval přesně podle kroků, ale hned na začátku udělal špatný náčrtek, čímž si úkol zjednodušil. (viz Obrázek 9.1) Po vyzvání organizátorky, ať si pozorně přečte zadání ještě jednou a zkusí se nad ním zamyslet, svoji chybu napravil.



Obrázek 9.1 – Žákovské řešení. Pilotní studie

Další problém se objevil u žáka M, který nad třetí úlohou dlouho přemýšlel, protože nevěděl, čím by řešení začal. Vzhledem k tomu, že trojúhelník v náčrtku byl speciální případ obecného zadání, žák objevil vlastnost, která obecně neplatí.

O – Čím bys začal?

M – Mohl bych sestrojit výšku. Udělám kolmici a budu mít stranu AC.

Po delším uvažování:

M – Výška je vlastně $\frac{3}{4}$ průměru kružnice opsané.

O – Platí to obecně pro všechny trojúhelníky?

M – Ne, ne, to platí jen u rovnostranných.

Následně žák rychle opravil obrázek v náčrtku.

Poslední dvě úlohy se lišily pouze v obtížnosti, zadáním obou bylo kompletně shrnout poznatky žáků a prozkoumat, zda pracovní list slouží jako pomocný nástroj k jednotlivým krokům. Problém se objevil u žákyně M, která si kvůli chybějícímu náčrtku spletla strany trojúhelníku a poznala to až ve výsledku, když jí nesouhlasily vrcholy. Jinak měla postup správně a objevila všechna možná řešení. Zápis konstrukce a konstrukci samotnou prováděla průběžně a jednotlivé kroky střídala.

Žák D se v návaznosti na předchozí úlohy rozhodl pomoci si náčrtkem. Následně do náčrtku začal rýsovat, načež byl upozorněn organizátorkou, že výsledná konstrukce má být na zvláštním obrázku. Měl problém s teoretickou znalostí, proto se mu úloha zdála velice složitá. Pro symbolický zápis využil první úlohu jako nápovědu.

Celkem organizátorka hodnotila práci žáků nad očekávání, žáci ve skupině dokázali najít všechna možná řešení úlohy, snažili se rýsovat přesně, chyby vždy napravovali sami a nepřenášeli je dál. Během výzkumu se ale objevil nečekaný problém s teoretickými základy. Organizátorka zpozorovala, že většině žáků dělaly potíže jednodušší matematické definice, bez nichž úlohu nebylo možné vyřešit. Na základě pilotního výzkumu bylo rozhodnuto některé úlohy z pracovního listu vynechat, u jiných změnit formu. Podrobněji o výběru úloh pro hlavní výzkum budeme hovořit v další kapitole. V hlavním výzkumu také bude zachována metoda sběru dat pomocí rozhovoru.

10 Výzkum

10.1 Kritéria pro výběr respondentů

Pro větší homogenitu skupiny respondentů autorka zvolila jednu třídu, která se skládala z deseti žáků-uprchlíků, právě procházejících přípravným matematickým kurzem. Žáci ve skupině byli všichni stejné věkové kategorie, která zhruba odpovídala 9. ročníku české základní školy. Všichni probírali téma konstrukčních úloh na přípravném kurzu s jinou vyučující. Rozhovor pomůže zjistit, zda jednotliví respondenti byli seznámeni s daným typem úloh již dříve během studia na Ukrajině. Součástí výzkumu a vyslovování očekávání je i rozhovor s vyučující, která dané téma ve třídě odučila.

10.2 Rozhovor s učitelkou

Cílem rozhovoru bylo zjistit, na jaké úrovni a pomocí jakých metod byly vyučovány konstrukční úlohy na přípravném kurzu. Autorku zajímalo, jakou míru znalostí měly děti na začátku kurzu, jak uměly pracovat s teoretickými pojmy, jak ovládají grafický prostor. Také bylo důležité zjistit, jaké typy úloh žáci procvičovali a jestli umějí všechny čtyři kroky řešení konstrukčních úloh.

Z rozhovoru s učitelkou, která průběžně vyučovala ve skupině respondentů, bylo zjištěno, že se jedná o žáky ve věkovém rozmezí 15–16 let, kteří na Ukrajině dokončili 8.–9. ročník základní školy. V České republice se připravují na zkoušky CERMAT, a proto absolvují přípravný kurz pro cizince. Vyučující uvedla, že vzhledem k tomu, že poslední ročníky jejich výuky na Ukrajině probíhaly formou on-line kvůli covidu, žáci nebyli seznámeni s konstrukčními úlohami. Konstatovala slabší geometrickou představivost a neznalost metod práce s rovinnými útvary. Všichni měli základní znalosti v oblasti geometrie: definice útvaru, znění některých vět, ale v teoretickém prostoru se pohybovali nejistě, nedokázali odvodit zákonitosti, které platily na základě teoretických poznatků, a použít je v prostoru grafických entit. Při prvním ze zkušebních testů nikdo ani nezkusil vyřešit konstrukční úlohu (není známo, jestli kvůli tomu, že nevěděli jak ji vyřešit, anebo ji jednoduše nepochopili kvůli jazykové bariéře).

Během přípravného kurzu se seznámili s konstrukčními úlohami pomoci procvičování testů CERMAT. Takže se jednalo vždy o polohové útvary s přesně danými hodnotami. Výklad vždy probíhaly tak, že se nejdřív na jedné úloze prezentoval správný postup řešení, následovala samostatná práce. Vyučující uvedla, že žáky vždy naváděla žáky na sestrojení náčrtku jako pomocného nástroje, ale nikdy s nimi nedělala všechny čtyři kroky řešení. Tím se potvrdila příležitost vyzkoušet pracovní list jako přípravu na řešení konstrukčních úloh promocí rozboru a postupu konstrukce. Během výuky se žáci nevzdávali hned v prvním kroku, ale snažili se přijít na možný způsob řešení, což v budoucím výzkumu pomůže získat nejpodrobnější obraz situace.

Jazyková úroveň žáků byla na dostačující úrovni, ale vyučující nedokázala určit úroveň chápání symbolických zápisů. To umožní zjistit formou výzkumu první úloha v pracovním listu. Problém se vyskytoval také v typových rozdílech geometrických úloh. Jak již bylo zmíněno v teoretické části, na Ukrajině se řeší hlavně výpočetní geometrické úlohy.

10.3 Výběr úloh

Po analýze výsledků pilotní studie se organizátorka rozhodla pro změnu pracovního listu. Některé úlohy byly vynechány, u jiných se změnila forma zadání. Cílem bylo vytvořit zadání, které by se skládalo ze tří úloh, a to tak, že první úloha bude zkoumat pouze znalost symbolického zápisu, druhá bude sloužit jako návod k jednotlivým krokům a třetí bude obsahovat kompletní shrnutí poznatků. Bylo také rozhodnuto nechat pouze úlohy o trojúhelníku, jelikož v celku budou na sebe navazovat a vytvářet systém gradovaných úloh.

První úloha byla zaměřená na zvládnutí postupu konstrukce a pro tyto účely byla pozměněná forma čtvrté úlohy z pracovního listu pro pilotní studie. V hlavním výzkumu zadání obsahovalo připravený postup konstrukce, takže se zkoumala schopnost žáků sestrojit trojúhelník podle určitého postupu. Druhou a třetí úlohu pracovního listu hlavního výzkumu tvořily třetí a pátá úloha z pilotní studie, které byly převzaté v původní podobě.

Na začátku pracovního listu byl uveden slovník matematických pojmů, který obsahoval označení důležitých prvků a symbolů, které žáci následně mohli použít při řešení. Níže je uvedena ukázka pracovního listu, se kterým pracovali žáci-uprchlíci.

Slovník matematických pojmů/Словник математичних термінів:

Чеська назва	Запис символом	Український переклад
Bod A	A	Точка A
Úsečka s krajními body A a B	AB	Відрізок з крайніми точками A та B
Přímka p	p	Пряма p
Těžnice na stranu a	t_a	Медіана до сторони a
Výška na stranu a	v_a	Висота трикутника на сторону a
Trojúhelník ABC	$\triangle ABC$	Трикутник ABC
Vrcholy trojúhelníku	A, B, C	Вершини трикутника
Strany trojúhelníku	a, b, c	Сторони трикутника
Středy stran	S_a, S_b, S_c	Середини сторін
Průsečík dvou přímek p a q	$P; P \in p \cap q$	Точка перетину двох прямих p та q
Kružnice se středem v bodě S a poloměrem délky r	$k(S, r)$	Круг с серединою в точці S та радіусом довжиною r
Kolmé přímky p a q	$p \perp q$	Перпендикулярні прямі p та q
Rovnoběžné přímky p a q	$p \parallel q$	Паралельні прямі p та q

ÚLOHA 1

Sestroj trojúhelník ABC, ve kterém $c = 5$ cm, $a = 2$ cm a $t_c = 3$ cm, podle postupu konstrukce.

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = 5$ cm
2. $S; S \in AB, |AS| = |SB|$
3. $k; k(S; 3$ cm$)$
4. l; $l(B; 2$ cm$)$
5. C; $C \in k \cap l$
6. Trojúhelník ABC.

ÚLOHA 2

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $a = 6$ cm, $c = 4$ cm, $v_b = 3$ cm.

a) Načrtni trojúhelník a označ v něm všechny údaje, které znáš ze zadání.
b) Rozmysli si, jakou úsečkou začneš a jak budeš postupovat.
c) Zapiš své kroky symbolicky.
d) Proveď konstrukci podle daného postupu.
e) Ověř, jestli jsi narýsoval/a všechny výsledky.

ÚLOHA 3

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $b = 7$ cm, $t_b = 5$ cm, $v_b = 4$ cm. Proveď rozbor a diskuzi počtu řešení pomocí kroků z předchozí úlohy.

10.3.1 Rozbor zadání vzhledem k výzkumu

V první úloze sledujeme porozumění úloze z jazykové stránky a chápání symbolického zápisu. Následně budeme pozorovat znalost postupu vybraných konstrukcí (střed úsečky, kružnice) a jejich korektnost. Důležitou součástí výzkumu je schopnost žáků odhalit všechna možná řešení úlohy.

Druhá úloha slouží k pozorování schopnosti žáků postupovat podle nápovědy, kterou poskytují jednotlivé kroky řešení úlohy. Budeme pozorovat, zda žáci použijí náčrtek; provedou symbolicky zápis postupu konstrukce; naleznou všechna možná řešení úlohy. Chceme sledovat, zda se žáci budou snažit aplikovat nějaké metody řešení, které znají z ukrajinského učiva; jak si poradí s netypickou úlohou.

Ve třetí úloze se zamíříme na zkoumání schopnosti žáků použít již získané poznatky z předchozích úloh v komplexním zadání; zda žáci použijí náčrtek jako pomocný nástroj; celkový postup při řešení úlohy; určení všech možných řešení úlohy. Budeme sledovat znalost důležitých úseček v trojúhelníku (těžnice, výška).

10.4 Průběh výzkumu

Výzkum proběhl ve skupině deseti žáků-uprchlíků z Ukrajiny. Na začátku organizátorka popsala průběh výzkumu a účel pracovního listu. Každému z žáků byla nabídnuta pomoc po celý průběh výzkumu, hlavně pomoc s překonáním jazykové bariéry. Všichni měli šedesát minut na samostatné vypracování úloh, následně organizátorka vyvolala každého na individuální rozhovor v délce trvání od deseti do dvaceti minut na každého.

V této kapitole se ukáže rozbor každé úlohy zvlášť podle analýzy pracovního listu a rozhovoru s žáky. Uvedeme také útržky rozhovorů s vybranými žáky, které jsou zajímavé z didaktického hlediska. Následně bude vypracována analýza řešení celé skupiny pro ověření očekávání.

ÚLOHA 1

S první úlohou si všichni poradili dobře, nikdo neměl žádný větší problém, který by jim bránil úlohu vyřešit. Žáci uvedli, že všichni používali slovník, ale jenom pro zjišťování významu symbolického zápisu. Překlad matematických pojmů zvládli bez slovníku jenom na základě dosavadních znalostí.

Jeden žák měl již od začátku problém se symbolickým zápisem, takže mu organizátorka poskytla důležité rady, aby ho nasměrovala. Stejný žák také měl problém s postupem konstrukce středu úsečky, takže postupoval pomocí měření pravítkem. Zbytek skupiny použil konstrukci středu pomocí kružítka.

Další respondent přistoupil k vypracování první úlohy netradičním způsobem: nepostupoval podle kroků postupu konstrukce, ale řešil danou úlohu samostatně. Svůj postup obhájil tím, že se nerad drží předem daných pravidel a více ho baví hledání netradičních cest. Během rozhovoru svůj postup dokázal srozumitelně zopakovat.

Celá třída se ve vypracování první úlohy rozdělila na dvě skupiny: skupina čtyř, která našla obě řešení úlohy, a skupina zbylých šesti, která objevila pouze jedno řešení. Při rozhovoru s respondenty z druhé skupiny organizátorka zjistila, že všichni se řídili pravidlem, že geometrické úlohy mají jen jedno řešení, protože na to byli zvyklí z úloh, které řešili na Ukrajině. Nejlépe situaci popsala Alina, která během rozhovoru správně uvažovala, že se kružnice protnuly ve dvou bodech, ale uvedla, že jakmile našla jedno řešení, považovala úlohu za vyřešenou:

O – Zkoušela jsi hledat další řešení?
A – Já to vždy mám takhle, i když v zadání je uvést všechna možná řešení, já vždy najdu jedno, ale druhé mě nikdy nenapadne.

Někteří žáci si pomohli náčrtkem bez toho, aniž by jej považovali za součást řešení. Uvedli, že náčrtek dělají u geometrických úloh vždy, aby měli představu, jak by mělo vypadat řešení. Tento nástroj využívali při řešení úloh již na Ukrajině.

ÚLOHA 2

Druhá úloha byla pro žáky obtížnější zejména proto, že se museli držet určitých kroků v postupu řešení. Většina respondentů dodržela první krok a udělala náčrtek. Překvapivé je, že někteří žáci měli špatně sestrojenou konstrukci, která neodpovídala správnému náčrtku. Své chyby si všimli až během rozhovoru. Jedním z takových žáků byl Jura, který jako jeden z mála postupoval přesně podle kroků uvedených v úloze: udělal náčrtek a postup konstrukce. Pro lepší orientaci je níže uvedeno vyfocené řešení žáka (Obrázek 10.1). Je vidět, že náčrtek žák udělal správně a dokonce velice přesně, ale postup konstrukce a výsledek tomuto náčrtku neodpovídají. Podle kroku „napodobování" řešení z první úlohy můžeme soudit, že žák zvolil cestu předchozí zkušenosti a nezorientoval se v nestandardní situaci. Z rozhovoru organizátorka zjistila, že žák postupoval intuitivně. Postup konstrukce podle jeho slov začal stranou a, protože byla v zadání úlohy na prvním místě. Postupoval podle stejného principu. Následně proběhl dialog ohledně diskuze počtu řešení:

O – Když jsi řešil úlohu, ověřil jsi na závěr, zda jsi narýsoval všechny výsledky?

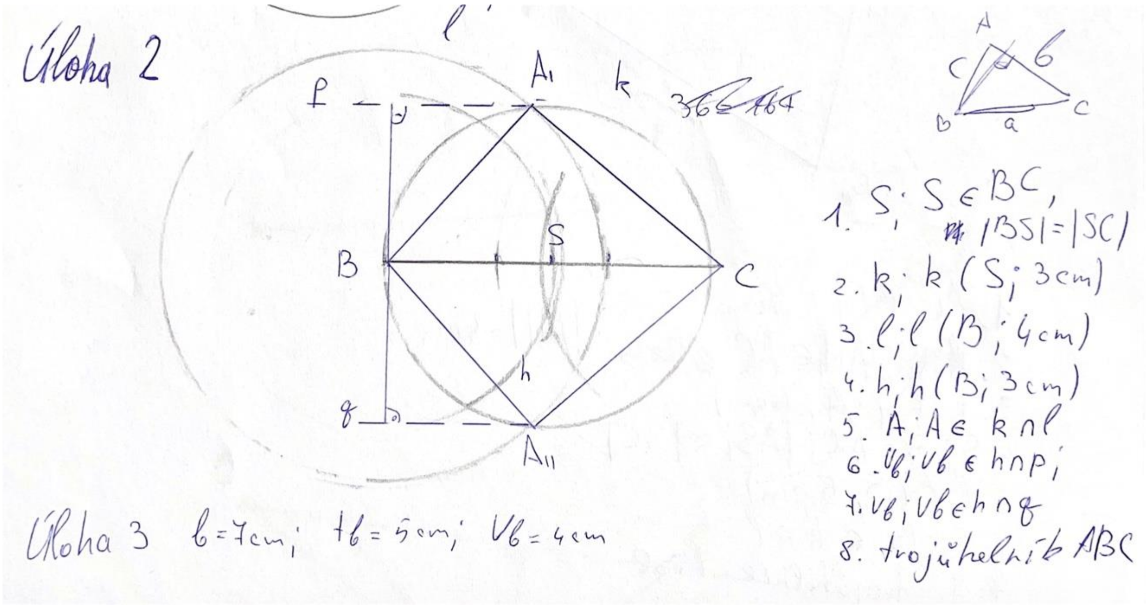
J – Já jsem narýsoval jen dvě řešení, ale předpokládám, že celkem mohou být čtyři.

O – Dobře, a proč jsi v tom případě nezkusil narýsovat všechna čtyři?

J – Nevím, protože se mi nechtělo.

Po rozhovoru s organizátorkou žák samostatně opravil chyby a našel všechna možná řešení.

Převážná většina respondentů měla problém s definicí výšky a její následnou aplikací. Někteří zaměnili pojem výška s pojmem těžnice. Jura například zřejmě chápal pojem výška jako vzdálenost od jednoho vrcholu trojúhelníku k přímce, procházející sousedním vrcholem (viz Obrázek 10.1). Chyba je zřejmá z výsledného obrázku.



Obrázek 10.1 – Žákovské řešení. Hlavní výzkum

S velmi netradičním řešením přišel Nikita:

O – Jak jsi postupoval v druhé úloze?

N – Nejdřív jsem se podíval na úlohu a napadlo mě, že tam je něco z Pythagorovy věty. Tak jsem to zkusil. Najednou mi vyšlo deset, tak jsem zkusil narýsovat 10 cm hned a potom se to už řešilo samo.

O – Takže ses nejdřív rozhodl počítat?

N – Ano, nenašel jsem jiný způsob.

Žák Nikita jako jeden z mála našel všechna řešení.

Na otázku organizátorky, proč neudělal náčrtek, odpověděl, že nemá rád obrázky, že vždycky má představu řešení v hlavě.

Postup řešení zbytku třídy se moc nelišil, tedy všichni řešili úlohu intuitivně a neřídili se uvedenými kroky. Převážná většina měla problém se symbolickým zápisem postupu konstrukce. Ti žáci, kteří jej zvládli zapsat, se řídili nápovědou z první úlohy. Během rozhovoru někteří respondenti uvedli, že se s tím setkali poprvé. Zajímavé je, že téměř všichni žáci až na několik výjimek začali stranou *a.* V rozhovoru uvedli, že je to z toho důvodu, že byla uvedena v zadání jako první Následně postupovali stejným principem podle pořadí údajů daných v úloze. Je důležité zmínit, že pouze jeden žák našel všechna řešení. Ostatní měli jedno nebo dvě řešení, během rozhovoru objevili další.

ÚLOHA 3

V řešení třetí úlohy se třída rozdělila na několik skupin: ty, co už získali určitý vhled do postupu řešení a v řešení poslední úlohy byl u nich zřejmý velký pokrok; ty, kterým se třetí úloha zdála složitější a potřebovali s ní poradit během samostatné práce; a poslední skupinku, která se skládala ze dvou žáků, kteří se již po přečtení úlohy vzdali a k úloze nepřistoupili.

Zajímavý problém se objevil v řešení Alisy:

O – V čem byl problém ve třetí úloze?
A – Nemohla jsem pochopit, jak tady udělat ještě jednu… jako že máme jak výšku, tak těžnici, takže jsem nevěděla, jak to všechno mám dát dohromady, protože to všechno vychází z bodu *B*. To vidím poprvé, že by byly výška a těžnice v jedné úloze.
O – Jak sis s tímto problémem poradila?
A – Nějak jsem to zkoušela, až mi to vyšlo.

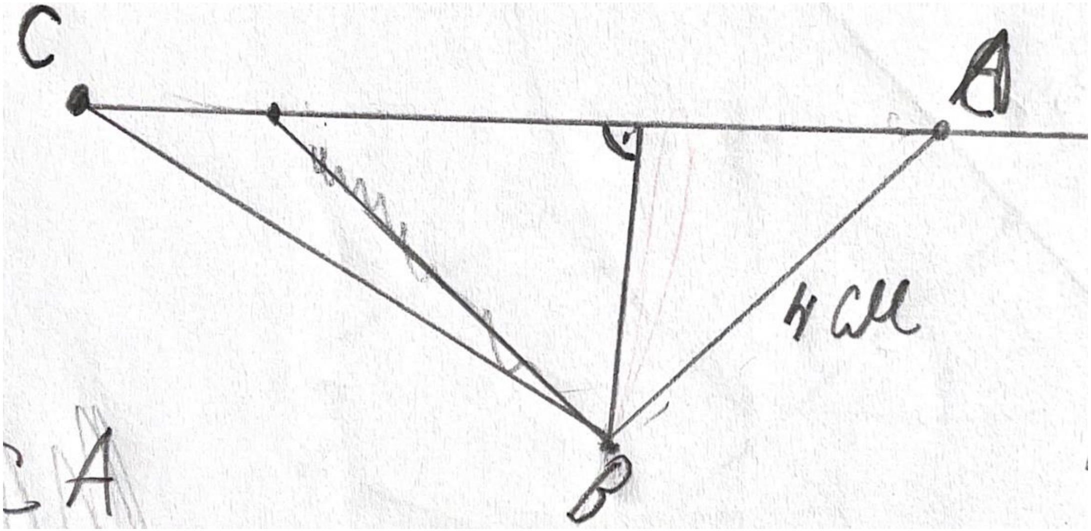
Během rozhovor a návodných otázek svůj postup ale zrekapitulovat nedokázala.

Další podobný problém se vyskytl také v řešení Mirona:

O – S čím jsi měl potíže v poslední úloze?
M – Ona byla složitá, protože tady není uvedeno nic kromě strany *b*. Není uvedena strana *a*, ani *c*.
O – Zkoušel jsi udělat náčrtek?
M – Zkoušel jsem, ale nějak jsem se do toho zamotal, takže jsem to smazal.

Zřejmě je žák zvyklý na typové úlohy konstrukce trojúhelníku ze tří stran. S nestandardní úlohou si rady nevěděl.

Nestandardní situace se vyskytla také v řešení Nikity, který správně udělal náčrtek a pokusil se o symbolický zápis postupu konstrukce. Ve výsledném řešení dokonce našel obě základní řešení úlohy, jedno z nich ale zřejmě považoval za nesprávné, takže ho škrtnul (viz Obrázek 10.2)



Obrázek 10.2 - Žákovské řešení. Hlavní výzkum

Všichni respondenti ve třetí úloze udělali náčrtek, který jim, jak jsme zjistili během rozhovorů, sloužil jako pomocný nástroj. Problém se objevil u symbolického zápisu postupu konstrukce, který nezvládl žádný žák, a diskuze počtu řešení. Část třídy našla všechna možná řešení, ale někteří se drželi strategie, že jedno řešení vždy stačí.

Celkem se organizátorce podařilo z rozhovoru zjistit, že skupina neměla žádný problém s pochopením textu z jazykové stránky, převážná většina rozuměla všem slovům i bez použití slovníku, jelikož se s těmito pojmy setkali již dříve. Slovník používali vyloženě pro práci se symbolickým zápisem. Největší potíže žákům dělaly symboly pro označení kružnice, průsečíku a výšky. Výška se na Ukrajině značí převážně pomocí písmena h.

Všichni uvedli, že se s konstrukčními úlohami setkali poprvé v Česku během přípravného kurzu, všechny úlohy byly polohové. Uvedli také, že první dvě úlohy jen pomohly v řešení třetí: první úloha sloužila jako vzor ke správnému zápisu postupu konstrukce a druhá jako vzor na náčrtku a ověření počtu všech možných řešení. Objevil se také slovní zápis konstrukce bez použití symbolů. Občas se v zápisu řešení vyskytovala i ukrajinská písmena.

Jedna žákyně během rozhovoru uvedla, že na Ukrajině byla zvyklá na úlohy, kde byly zadané určité údaje a pomocí nějaké věty se zjišťovaly další. Říkala, že má problém s nestandardními úlohami a že nejčastěji je řeší metodou pokus-omyl.

10.5 Analýza výsledků

V této kapitole se zaměříme na jednotlivé potíže, které se mohou projevovat u žáků-uprchlíků z Ukrajiny v konstrukčních úlohách, a provedeme diskuzi problémů vyslovených v kapitole 7.

10.5.1 Jazyková bariéra

Prvním a nejzásadnějším problémem žáků je chápání úlohy z jazykové a symbolické stránky. Pro zmírnění potíží s cizím jazykem byl na začátku pracovního listu uveden slovník matematických pojmů a příslušných symbolických zápisů. Během výzkumu se ukázalo, že jazyková úroveň žáků vypracovaná za několik měsíců na jazykové škole je pro zvládání úloh postačující. Převážná většina uvedla, že překlad slov nepotřebovala, jelikož si termíny pamatovali z předchozích zkušeností.

Domněnka se ale potvrdila v jiné stránce, a to zvládání symbolického zápisu. S některými symboly, jako například průsečík nebo symbolický zápis kružnice, se žáci setkali poprvé. U jiných, jako je výška nebo symbol pro pravý úhel, měli problém s tím, že se na Ukrajině značily jinak. V zápisu postupu konstrukce se také objevil způsob zápisu slovně, jelikož pomocí symbolů to pro žáky bylo příliš náročné.

Na základě zmíněných poznatků by se dalo říci, že nezbytnou součástí práce s žáky z Ukrajiny je nejen slovní zásoba, ale i znalost matematického značení a jeho konvencí. Učitel by při práci s takovými žáky měl mít připravenou tabulku se všemi matematickými symboly, které žáci mohou při výuce využít. Také je důležité jejich procvičování a aplikace v konkrétních úlohách.

10.5.2 Jednotlivé fáze konstrukční úlohy

Vzhledem k tomu, že se na Ukrajině téma konstrukčních úloh nevyučuje v plné míře, počítalo se s tím, že žáci během výzkumu budou mít potíže s dodržováním jednotlivých fází při řešení konstrukčních úloh. Očekávání se z části potvrdila z části, a to tak, že žáci většinou byli intuitivně zvyklí dělat náčrtek jako pomocný obrázek. Někteří používali tento pomocný nástroj již během výuky na Ukrajině. V ojedinělých případech měli žáci chybu v náčrtku, zpravidla ale náčrtek udělali správně a tím měli představu, jak by měl vypadat výsledný obrázek.

Větší problém se projevil v jiných krocích. V návaznosti na předchozí problém žáci vůbec nezvládali symbolický zápis postupu konstrukce. Ti, kteří se o to snažili, zapisovali postup konstrukce průběžně s konstrukcí samotnou. To je samozřejmě běžné i u žáků v českých školách, takže se jedná o tradiční problém. Ve strategii řešení úloh žáky z Ukrajiny lze vyzdvihnout to, že se někteří snažili zapsat postup konstrukce slovně, což může sloužit jako dobrý základ pro používání matematického zápisu.

Největší potíže mohou nastat v diskuzi počtu řešení. Jak již bylo zmíněno v předchozí části kapitoly, většina žáků vždy našla jedno řešení, čímž úlohu považovala za vyřešenou. Z rozhovoru s respondenty bylo zjištěno, že možnou příčinou je to, že geometrické úlohy, které děti řešily na Ukrajině, měly vždy jedno řešení. Při individuálním rozboru úloh žáci dokázali najít další řešení samostatně, nebo s menší nápovědou. Z toho můžeme udělat závěr, že při práci s žáky z Ukrajiny je třeba klást velký důraz na diskuzi počtu řešení. Je třeba zařazovat k procvičování úlohy, které obsahují více výsledků, a žáci by měli být vyzváni k hledání všech možných řešení. Důležité je zmiňovat, že úloha je považována za vyřešenou jen při nalezení všech správných řešení.

10.5.3 Nestandardní zadání

Jedním z cílů úloh v pracovním listu bylo prozkoumat schopnost žáků orientovat se v nestandardních situacích a aplikovat svoje teoretické znalosti v jiných úlohách, než na které jsou zvyklí. Byla vyslovena očekávání, že se žáci budou snažit použít již známé metody a postupy, které se naučili během studia na Ukrajině.

Z výše uvedeného můžeme odvodit, že žáci z Ukrajiny mají problém s konstrukčními úlohami, které jsou běžné pro české žáky. Považují je za nestandardní a snaží se postupovat podle známých metod, nejčastěji výpočtem chybějících údajů. V analýze druhé úlohy se uvádělo řešení, na které přišel Nikita, který pomocí Pythagorovy věty vypočítal chybějící údaje, čímž úlohu převedl na jednodušší typ konstrukce ze tří stran. Předběžné výpočty se objevily ve vícero řešeních. Během výzkumu se také ukázalo, že se část třídy při hledání řešení vždy spokojila s jedním řešením. V rozhovorech to žáci odůvodnili tím, že geometrické úlohy, které řešili na Ukrajině, obvykle měly pouze jedno řešení.

10.6 Diskuze vzhledem k citovaným výzkumům

Na rozdíl od práce Miroslavy Dyntarové (1), kde autorka zkoumala obtíže českých žáků středních škol, tato práce byla zaměřená na odhalování potíží u žáků-cizinců ze základních škol. Důraz tak byl kladen na jiné aspekty, avšak některé výsledky se výrazně překrývají. Tak například oba výzkumy popisují obtíže žáků s přechodem mezi prostorem reprezentací a teoretickým prostorem. Daný problém byl také popsán v knize (2) jako kritické místo i českých žáků na základních školách. U žáků z Ukrajiny je další komplikací neznalost postupu jednotlivých kroků řešení konstrukčních úloh, což bylo vysloveno v očekáváních, která se následně potvrdila.

Odlišnou vlastností však je motivace žáků provádět postup konstrukce. Jak již bylo zmíněno dříve v kapitole o kritických místech v konstrukčních úlohách (2), autoři uvádějí nedostatek potřeby žáků českých škol daný krok realizovat. Daný problém se také popisuje ve výzkumu (47), který se zabýval nutností konstrukce a popisoval přirozené nutkání dětí řešit úlohy experimentální a manipulativní metodou. Oba výzkumy potvrzují problém českých žáků v oblasti motivace provádět postup konstrukce jako součást řešení. Nehledě na to, že se s tímto krokem ukrajinští žáci setkali teprve u výzkumu, snažili se alespoň o slovní zápis postupu. Část respondentů se pokusila o symbolický zápis, který uskutečnili pomocí vzoru z první úlohy z pracovního listu. Rozhodně se tato oblast dá rozvíjet pomocí vhodných úloh a pracovních listů při budoucím vzdělávání žáků-uprchlíků.

Samostatným problémem ukrajinských žáků je jazyková bariéra. Přípravný kurz, který respondenti absolvovali v rámci přípravy na střední školu v ČR, poskytl žákům základ slovní zásoby, jíž využili při práci během výzkumu. Přesto musíme vnímat jazykovou bariéru jako největší obtíž žáků-cizinců nejen kvůli pochopení zadání, ale také kvůli slovnímu vyjadřování, jež také vyžadují zde zkoumané konstrukční úlohy. Je tedy nezbytné se při práci s danými žáky řídit principy 2.3, které již byly uvedeny v teoretické části a osvědčily se při vytváření pracovního listu. Nepostradatelné je tedy používání slovníku matematických pojmů a definic, který by u vybraných slov také obsahoval symbolické označení. Přínosnou také může být součinnost s konceptem práce s žáky s OMJ (27), který byl popsán v kapitole Matematika pro děti s odlišným mateřským jazykem a osvědčil se během výzkumu.

Objevil se také problém použití již známého postupu pro řešení úlohy jiného typu, ale v odlišném smyslu než v práci (1). Někteří žáci byli zvyklí na řešení geometrických úloh pouze metodou výpočtu, proto se snažili aplikovat danou strategii i v konstrukčních úlohách. Tak například žáci z hlavního výzkumu nejdříve použili Pythagorovu větu, aby dopočítali potřebné údaje, a následně použili jedinou konstrukci, kterou uměli – konstrukci trojúhelníku ze tří stran. Za příčinu takového postupu považujeme velký důraz kladený na počítání a práce s výpočetními úlohami v ukrajinském kurikulu. Vzhledem k odlišnostem základu didaktiky matematiky na školách v Česku a na Ukrajině tento problém není tradičním kritickým místem.

Závěr

Na základě zmíněné analýzy výsledku můžeme dospět k závěru, že oblast problematiky výuky matematiky pro žáky-uprchlíky je zatím málo popsaná a vyžaduje hlubší průzkum. Cílem práce bylo odhalit kritická místa v konstrukčních úlohách na základě analýzy učebnic v Česku a na Ukrajině a pomocí výzkumu se skupinou žáků z Ukrajiny.

V teoretické části byl čtenář seznámen se vzdělávacím systémem na Ukrajině a s odlišnostmi ve vzdělávacích systémech obou zemí. Následně proběhla analýza českých a ukrajinských učebnic, na jejichž základě byla vyslovena očekávání autorky o problémech v konstrukčních úlohách u žáků-uprchlíků z Ukrajiny. Na základě teoretické části byl zpracován pracovní list, který byl následně použit pro ověření očekávání.

Praktická část obsahovala pilotní výzkum, který se prováděl s českými žáky s účelem ověření plánovaného průběhu hlavního výzkumu. Následoval hlavní výzkum se skupinou žáků-uprchlíků z Ukrajiny. Pro získání dat organizátorka použila pracovní listy a individuální rozhovor s každým žákem v jeho mateřském jazyce. Práce se opírala o výzkum Dyntarové (1), který byl zaměřený na problémy žáků střední školy při řešení konstrukčních úloh. Také se zakládala na výzkumu Vondrové a Rendla (2) o kritických místech matematiky na 2. stupni základní školy. Na konci práce proběhla diskuze vzhledem k uvedeným výzkumům.

Výzkum poukázal na to, že některé potíže ukrajinských žáků mohou být stejné pro děti obou zemí. Některé problémy ale jsou specifické a vyžadují dodatečnou míru pozornosti a připravenost pedagogů. Výzkum by se dal rozšířit na další témata, probíraná na českých školách, která mohou působit problém žákům z Ukrajiny. V práci byly poskytnuty základní principy a rady pro práci s žáky-uprchlíky z Ukrajiny.

Citovaná literatura

1. DYNTAROVÁ, Miroslava. *Problémy žáků střední školy při řešení konstrukčních úloh*. Praha, 2021. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Michal Zamboj.

2. VONDROVÁ, Naďa a kol. *Kritická místa v konstrukčních úlohách.* Praha: Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

3. EVROPSKÁ KOMISE. Na útěku z Ukrajiny: ochrana dětí. *Eu-solidarity-ukaine.ec.europa.eu* [online]. © 2023 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://eu-solidarity-ukraine.ec.europa.eu/information-people-fleeing-war-ukraine/fleeing-ukraine-protection-children_cs

4. Multikulturní centrum Praha. *Mkc.cz* [online]. © 2016 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://mkc.cz/cz/

5. SchoolEducationGateway. [online]. © 2023 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://www.schooleducationgateway.eu/cz/pub/resources/publications/practical-manual-on-refugees.htm

6. INBÁZE. Kurzy pro pracovníky ve vzdělání. *Inbaze.cz* [online]. © 2023 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://inbaze.cz/kurzy-pro-pracovniky-ve-vzdelavani/

7. RADA EVROPSKÉ UNIE. Směrnice rady 2001/55/ES. *Úřední věstník Evropské unie* [online]. 2001, sv. 4, 162−171 [cit. 2023-06-06]. ISSN 1977-0626. Dostupné z: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/?uri=celex:32001L0055

8. ŠTECH, Stanislav. Inkluzivní vzdělávání – obtížné zvládání „rozmanitosti“ v praxi. *Pedagogická orientace.* 2018, 28(2), 382–398. ISSN 1211-4669.

9. MICHALÍK, Jan a kol. *Postoje pedagogických pracovníků k vybraným aspektům společného vzdělávání.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2018. ISBN 9788024453439.

10. VOKÁČ, Petr a Jaroslava ZELENÁ. *Školský zákon: zákon č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání*. 6., přeprac. vyd. Třinec: Resk, 2016. ISBN – 978-80-87675-13-7

11. EUROPEAN COMMISSION. Supporting refugee learners from Ukraine in schools in Europe 2022. In: *Eurydice.eacea.ec.reuropa.eu* [online]. 6. 7. 2022 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://eurydice.eacea.ec.europa.eu/publications/supporting-refugee-learners-ukraine-schools-europe-2022

12. NÁRODNÍ PEDAGOGICKÝ INSTITUT ČESKÉ REPUBLIKY. Jak začlenit nově příchozí žáky do vzdělávání? In: *Inkluzevpraxi.cz* [online]. 21. 9. 2022 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: http://www.inkluzevpraxi.cz/kategorie-pedagog/2209-jak-zaclenit-nove-prichozi-zaky-do-vzdelavani-prinasime-inspiraci-z-velke-britanie

13. CONTENS. Podpora inkluze vysídlených dětí z Ukrajiny ve vzdělávání: faktory, klíčové principy a postupy ve školním roce 2022–2023. In: *Schooleducationgateway.eu* [online]. 30. 6. 2022 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://www.schooleducationgateway.eu/cz/pub/resources/publications/practical-manual-on-refugees.htm

14. EVROPSKÁ KOMISE. *Dočasná ochrana osob prchajících před agresivní válkou Ruska proti Ukrajině: ohlédnutí po roce* [online]. Brusel: Evropská komise, 2023 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/?uri=CELEX%3A52023DC0140&qid=1686168031334

15. MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY ČR. *Základní informace k vzdělávacímu systému Ukrajiny v porovnání s českým vzdělávacím systémem* [online]. Praha: Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, 2022 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2022/03/vzdelavaci_system_UA.pdf

16. NÁRODNÍ PEDAGOGICKÝ INSTITUT ČESKÉ REPUBLIKY. E-LEARNING. *Cizinci.npi.cz* [online]. © 2023 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://cizinci.npi.cz/en/e-learning-2/

17. VÁGNEROVÁ, Marie. *Psychopatologie pro pomáhající profese.* 3., rozš. a přeprac. vyd. Praha: Portál, 2004. ISBN 80-7178-802-3.

18. FAVILLI, Franco. M³EaL. *M³EaL Multiculturalism, Migration, Mathematics Education and Language* . [online]. 2012 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://m3eal.dm.unipi.it/

19. ADAMUS, Petr. *Metodika hodnocení kvality inkluzivní školy.* Opava: Slezská univerzita v Opavě, 2015. ISBN 978-80-7510-163-1.

20. JANČAŘÍK, Antonin, Hana MORAOVÁ a Jarmila NOVOTNÁ. *Výuka matematiky v jazykově a kulturně heterohenních třídách. Různé přístupy ve světě.* Praha: Pedf UK, 2016.

21. Produced and directed by J. Twitchin, devised by D. Marsh and co-developed with B. Marshland, A. Maljers andD. Wolff. *Teaching with Foreign Languages.* ontinuing Education Centre, University of Jyväskylä, Central Bureau, 1998.

22. HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990.

23. GONICK, Larry. *Cartoon Guide to Algebra.* New York: Harper Collins Publishers, 2015. ISBN 9780062202697.

24. AFARI, Ernest. Teaching mathematics in game learning environment. *The International Review of Contemporary Learning Research*. 2012, 1(1), 33–45. ISSN 2210-1438.

25. ВЕРЕЩАГИН, Евгений Михайлович. *Психологическая и методическая характеристика двуязычия (билингвизма).* Москва : Издательство Московского университета, 1969.

26. ГАБДУЛХАКОВ, Альберт Валерьянович. *Дидактические условия обучения математическим понятиям в двуязычной среде (на материале естественнонаучных дисциплин).* Казань, 2008.

27. СИТНИКОВА, Ирина Викторовна. *Формирование математических понятий в средней школе.* Киров, 2000.

28. Inkluzivní škola.cz. *META.* [online]. © 2023 [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://inkluzivniskola.cz/

29. НУШ Нова українська школа. [online]. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://nus.org.ua/

30. Про організацію освітнього процесу (About the organization of the educational process). *Osvita.ua* [online]. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/86140/

31. *Міністерство освіти і науки України.* [online]. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://mon.gov.ua/ua

32. VYŠÍN, Jan. *Geometrie pro pedagogické fakulty*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

33. EUKLEIDÉS. *Eukleidovy základy [Elementa].* Praha: Jednota českých mathematiků, 1907.

34. LEISCHNER, Pavel. *Metody řešení planimetrických úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2012. ISBN 978-80-7394-378-3.

35. ODVARKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy. 3. díl, Kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy.* Praha: Prometheus, 2013. ISBN 9788071961833.

36. HERMAN, Jiří a kol. *Matematika. Geometrické konstrukce.* Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-114-0.

37. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online], Praha: MŠMT, 2021. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

38. BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník - 1. díl.* Všeň: Alter, 2007. ISBN 9788072452323.

39. BLAŽKOVÁ, Růžena a kol. *MATEMATIKA pro 3. ročník, 2. díl.* Všeň: Alter, 1999. ISBN 9788072452330.

40. BLAŽKOVÁ, Růžena a kol. *MATEMATIKA pro 3. ročník - 3. díl*. Všeň: Alter, 2013. ISBN 9788072452347.

41. ПОГОРЄЛОВ, Олексій. Планіметрія. Підручник для 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Біла Церква : Школяр, 2005.

42. ІСТЕР, Олександр. Геометрія: підручнік для 7-го класу закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2020.

43. МЕРЗЛЯК, Аркадій; ПОЛОНСЬКИЙ, Віталій; ЯКІР, Михайло. Геометрія. Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2016.

44. ВШО Всеукраїнська школа онлайн [online]. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://lms.e-school.net.ua/

45. PROMETHEUS [online]. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://prometheus.org.ua/

46. Ukrainian Education Platform [online]. [cit. 2023-06-06]. Dostupné z: https://www.ukredu.org/en

47. BACHRATÁ, Katarína; BACHRATÝ, Hynek. *Budovanie matematických predstáv pomocou manipulácií.* Učitel matematiky, vol. 21 (2013).

Seznam obrázků