Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Výuka slovních úloh prostřednictvím metodických materiálů typu Porovnávání

Teaching word problems using teaching materials „Comparsion“

Ing. Eva Hrúzová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Výuka slovních úloh prostřednictvím metodických materiálů typu Porovnávání potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. 7. 2023

Ráda bych touto cestou poděkovala prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D., za vedení mé diplomové práce, za cenné rady a připomínky k práci i ochotu mi kdykoliv pomoci. Děkuji také Ing. Janě Hrúzové za odlišný pohled na svět matematiky, bez kterého by se má diplomová práce nemohla obejít. Poděkování patří i mé rodině a Honzovi za podporu během celého studia.

ABSTRAKT

Tato práce se zaměřuje na implementaci metodických materiálů založených na konceptu *concept cartoons* při výuce slovních úloh na druhém stupni základní školy. V teoretické části se práce zabývá popisem slovní úlohy a jejím vyučování ve školách, včetně role učitele a konstruktivistického pojetí. Dále se věnuje konceptu *concept cartoons*, který je použit jako základ pro implementaci metodických materiálů. V praktické části jsou tyto materiály implementovány v průběhu pěti vyučovacích hodin v rámci sedmého a osmého ročníku. Shrnutím výsledků lze říci, že implementace metodických materiálů využívajících *concept cartoons* při výuce slovních úloh na druhém stupni základní školy byla úspěšná a žáci tento nový způsob výuky hodnotili pozitivně. Jednou z hlavních výhod použití *concept cartoons* je podle zkušeností z mého výukového experimentu, že vytváří prostředí, v němž žáci nezažívají pocit selhání. To je proto, že chyby a obtíže při řešení úloh jsou připisovány fiktivním kresleným postavičkám. Použití *concept cartoons* také podporuje diskusi a interakci mezi žáky, protože často existuje více než jedno správné řešení daného problému. Tento přístup pomáhá podporovat spolupráci a rozvoj kritického myšlení. Celkově pozitivní výsledky této studie naznačují, že použití materiálů může být cenným nástrojem při výuce slovních úloh na základních školách a další výzkum v této oblasti je na místě.

KLÍČOVÁ SLOVA

Concept cartoons, Slovní úloha, Výukové přístupy, Implementace slovní úlohy,
Matematická diskuse

ABSTRACT

This paper focuses on the implementation of methodological materials based on concept cartoons for teaching word problems at the lower level of secondary school. The theoretical part of the work deals with the description of word problems and their teaching in schools, including the role of the teacher and the constructivist approach. It also addresses the concept of concept cartoons, which is used as the basis for implementing methodological materials. In the practical part, these materials are implemented over five teaching hours in the seventh and eight grades. The results indicate that the implementation of methodological materials using concept cartoons in teaching word problems at the lower secondary school level was succesful, and students evaluated this new teaching approach positively. One of the main benefits of using concept cartoons, based on the experience from teaching experiment, is that they createa non-threatening learning environment where students do not experience the fear of failureThis is because mistakes and difficulties in solving problems are attributed to fictional cartoon character. Additionally, the use of concept cartoons encourages discussion and interaction among students, as there is often more than one correct solution to a given problem. This approach helps to promote a more collaborative learning environment and fosters the development of critical thinking skills. Overall, the positive results of this study suggest that the use of these materials could be a valuable tool in teaching word problems in secondary schools, and further research in this area is warranted.

KEYWORDS

Concept cartoons, Word problems, Teaching approaches, Implementation of world problems, Mathematical discussion

Obsah

1 Úvod

Ve své diplomové práci se zabývám implementací metodických materiálů se slovními úlohami, které jsou založené na konceptu *concept cartoons. Concept cartoons* jsou hojně používané v přírodovědných předmětech v zahraničí, ale v České republice nejsou prozatím příliš rozšířené.

Cílem práce je ověřit praktickou aplikaci metodiky založené na porovnávání strategií řešení vytvořené v rámci projektu TAČR TL03000469 „Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol“, tedy popsat, jak na metodické materiály žáci reagují a jak se jejich prostřednictvím učí, a také podat zpětnou vazbu řešitelskému kolektivu projektu. Tento typ metodického materiálu je v kontextu České republiky nový a je třeba zjišťovat přínosy a limity jeho implementace v praxi. Mé očekávání je, že implementace metodických materiálů typu porovnávání založených na konceptu kreslených postaviček (*concept cartoons*) při výuce slovních úloh na 2. stupni základní školy pomůže žákům řešit slovní úlohy a podpoří jejich kritické myšlení a spolupráci ve třídě.

Zvolila jsem si téma slovních úloh, protože mě fascinují rozdílné názory a pohledy žáků i učitelů na dané téma. Setkala jsem se s učiteli, kteří se ve svých hodinách slovním úlohám snažili vyhýbat, ale také s těmi, kteří kladli na četnou implementaci slovních úloh v hodinách matematiky velký důraz. V odborné literatuře nacházím výsledky různých šetření, ale i dotazování, ve kterých se autoři kloní spíše k neoblíbenosti slovních úloh mezi žáky, protože slovní úlohy bývají pro žáky velmi obtížné (Novotná, 2000; Rakoušová, 2011; Vondrová a kol., 2020). Také mnohé rozhovory s učiteli dokazují, že se učitelé domnívají, že slovní úlohy nepatří mezi žáky oblíbené části matematiky. Nicméně během své dvouleté praxe na základní škole se přesvědčuji o platnosti opačného tvrzení. Mnohé žáky slovní úlohy velmi zajímají a baví je, pokud mohou předat svůj způsob řešení spolužákům a paní učitelce. Tento postoj žáků je spjat i se způsobem výuky slovních úloh. Například autoři Eisenmann, Novotná a Přibyl (2015) ve své studii poukazují, že používání heuristických strategií při řešení úloh vede ke změně postoje žáků k řešení problémů obecně od negativního postoje k pozitivnímu.

Slovní úlohy se objevují ve výuce matematiky ve všech ročnících prvního i druhého stupně základní školy. Ale nejen pro svou četnost hrají tak velkou roli. Vedou ke kognitivnímu rozvoji žáka, rozvíjí obecné schopnosti a dovednosti, například schopnost udržet pozornost, jazykově-čtenářské dovednosti, porozumění pojmům, pracovní paměť a pomáhají aktivovat již nabyté znalosti.

Práce je rozdělena do dvou částí. V teoretické části se zabývám didaktickým rozborem tématu slovních úloh, jejich vymezením, obtížností, procesem řešení a žákovskými strategiemi. Na slovní úlohy navazuje koncept kreslených postaviček tzv. *concept cartoons*. Ukazuji základní znaky tohoto konceptu, vliv na učení a na výuku. Důraz je zde kladen na oborové a pedagogické vzdělávání učitelů, práci s chybou a také na to, jak převést konstruktivistický přístup k výuce z teorie do praxe.

V praktické části je popsána implementace metodického materiálu založeného na konceptu kreslených postaviček, které představují svá řešení. Metodický materiál poskytnutý Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy od N. Vondrové obsahuje společný rozbor textu úlohy, jazykové úkoly, otázky na metakognici i matematickou diskusi a porovnávání řešení, společnou práci a shrnutí a následné tipy na návaznou práci. Výukový experiment byl proveden na základní škole v Plzni ve dvou třídách sedmého a jedné třídě osmého ročníku ve školním roce 2021/2022. Celkem se experimentální výuka slovních úloh na základě nového metodického materiálu uskutečnila v pěti vyučovacích hodinách. V práci jsou popsány jednotlivé vyučovací hodiny a jejich průběh, srovnání mezi 7. a 8. ročníkem a také vývoj implementace v konkrétní třídě. Během výukových experimentů jsem sledovala a zaznamenávala úspěšnost žáků při řešení slovních úloh a hodnotila přínosy a překážky, které se objevily při používání materiálů.

V závěru práce jsou prezentovány výsledky kvalitativního výzkumu. V diskusi jsou připomenuty cíle práce a míra jejich dosažení. Dále je zde popsán můj pohled na implementaci materiálů a reflexe pedagogické praxe.

Příloha práce obsahuje metodické materiály, které byly testovány v rámci experimentu. Tyto materiály mohou být využity při výuce matematiky na základních školách a představují novou a inovativní formu výuky, která může být přínosná pro žáky v různých věkových kategoriích.

Věřím, že výsledky mé diplomové práce poskytnou učitelům cenné poznatky pro výuku slovních úloh na druhém stupni základní školy. Zlepšení v této oblasti má potenciál ovlivnit matematickou gramotnost žáků. Věřím, že mé bádání přispěje k rozvoji pedagogické praxe a povede k dalším studiím v této oblasti.

2 Teoretická část

2.1 Vymezení slovní úlohy

Slovní úlohy jsou součástí matematiky již od starověku. V antických civilizacích byly matematické výpočty primárně zaměřeny na řešení praktických problémů. Mezi tyto problémy patřily mimo jiné rozdělování pozemků a půdy, doprava zboží, nerostných surovin a potravin, výpočet daní, poplatků a dědictví. Například v Egyptě se slovní úlohy objevují již v pyramidových textech a zahrnují výpočty množství obilí, potřebného pro potravu a chléb pro zemřelého faraóna. V Řecku se slovní úlohy řešily hlavně v kontextu geometrie, což bylo v té době dominantním matematickým tématem (Anton, 2010). V období středověku se slovní úlohy objevují v astronomii a navigaci. V moderní době se slovní úlohy staly součástí standardního kurikula matematiky a jsou důležitou částí přípravy na různé testy a zkoušky, včetně přijímacích zkoušek. Slovní úlohy jsou ukázkou toho, že zvládání matematických operací od raného věku je důležité pro řešení praktických úkolů běžného života.

Existuje řada různých pohledů na vymezení pojmu slovní úloha v matematice. Například Vondrová a kol. vymezují slovní úlohu jako

> úlohu, která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudoreálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Úloha obsahuje jeden nebo více úkolů (ve formě otázek nebo imperativních vět), které lze splnit za pomoci těchto numerických údajů, vztahů mezi nimi, které řešitel vyvodí ze zadání, a řešitelových znalostí a zkušeností, včetně mimoškolních. Úkolem žáka je situaci/příběh matematizovat, tj. (a) určit, které prvky budou vyjádřeny matematickými symboly, (b) zjistit, jakou, resp. jaké operace bude nutné s těmito prvky provádět a v jakém pořadí, aby bylo nalezeno řešení problému (adekvátní odpověď na položenou otázku). Řešení je následně třeba ověřit, protože mnohé slovní úlohy sugerují více možností matematizace, kdy tvůrce úlohy vědomě postupuje opačným směrem, než očekává od žáka, který bude úlohu řešit. (Vondrová a kol., 2019, str. 15)

V jiné publikaci Vondrové a kol. (2020) autoři vymezují slovní úlohu takto: „Slovní úlohou rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se objevují objekty, jevy a situace z nejrůznějších oblastí, popsané slovy.“ (str. 7).

Hejný vymezuje slovní úlohu jako matematickou úlohu, která vyžaduje jazykové porozumění a přesah do životní zkušenosti (Hejný, 2003).

V literatuře nepanuje shoda, jestli má mít slovní úloha aplikační charakter s přesahem do běžné zkušenosti žáka, nebo i jiných předmětů (jako například fyziky, chemie, nebo i do samotné matematiky), či zda i úloha bez situačního kontextu může být nazvána slovní úlohou. Nicméně, nezávisle na tom, jaký pohled na slovní úlohu zaujímáme, jsou slovní úlohy důležitou součástí výuky matematiky, protože žáci si prostřednictvím řešení slovních úloh rozvíjejí kritické myšlení, logiku a schopnost aplikovat matematické koncepty na reálné situace. Slovní úlohy žákům poskytují *příležitosti k učení* (Vondrová, 2019).

Řešení slovních úloh ve výuce je však pro žáky velmi významné, protože slovní úlohy vedou nejen ke kognitivnímu rozvoji žáka, ale především proto, že v běžném životě se setkáváme se situacemi, které jsou popsány slovy. „Řešení slovních úloh je jednou z mála oblastí ve školské matematice, která vyžaduje matematizaci situací zadaných slovně a zpětnou transformaci získaného matematického řešení do kontextu úlohy." (Vondrová a kol., 2020, str. 7) Například rozpočtování rodinných výdajů, plánování cestování, nakupování nějakého zboží nebo služby, nebo hledání nejlepšího řešení našeho problému, to vše je využití řešení slovních úloh v praxi.

2.2 Zakotvení slovní úlohy v rámcovém vzdělávacím programu

Řešení slovních úloh je důležitým prvkem výuky matematiky a může mít vliv na rozvoj různých klíčových kompetencí u žáků. „Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti." (RVP ZV, 2021, str. 10)

Podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání České republiky se mezi tyto kompetence řadí kompetence k řešení problémů, kompetence k učení, kompetence komunikativní, sociální a personální, občanská, pracovní a nyní nově i digitální. Slovní úlohy v něm netvoří zvláštní téma, ale jsou zahrnuty jako součást matematického vzdělávání a prolínají se všemi tématy. Cílem matematického vzdělávání v rámcovém programu je, aby žáci byli schopni řešit matematické úlohy, včetně slovních úloh, a používat matematické znalosti v praktických situacích.

> Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní. (RVP, 2021, str. 30)

Výuka slovních úloh by měla být dostatečně podporována výukovými praktikami, jako jsou například modelování, diskuse, individuální a skupinová práce, zpětná vazba, a použitím různých druhů úloh a různých vizuálních a digitálních nástrojů.

2.3 Proces řešení slovní úlohy

Řešení slovní úlohy je komplexní proces, který se skládá z více kroků.

Proces řešení slovní úlohy, i přestože každý může k zadanému problému přistupovat odlišně, lze generalizovat a rozložit na jednotlivé kroky. Polya (2004) ve své práci *How to solve it* rozděluje proces řešení úlohy na následující části:

- *Understanding the problem* – pochopení problému

  Prvním krokem k vyřešení úlohy je porozumění problému. Tento krok zahrnuje čtení úlohy a pochopení toho, co je po nás požadováno. Ptáme se: Co je neznámá? Jaké jsou podmínky pro řešení úlohy? Jaká jsou známá data?

- *Devising a plan* – vytvoření plánu

  Druhý krok spočívá v plánování řešení. Cílem je najít postup, který povede k řešení. Ptáme se: Viděl jsem podobnou úlohu někdy předtím? Znám nějakou metodu, kterou bych mohl použít? Pokud úlohu nedokážu vyřešit, mohu se pokusit o řešení nějaké podobné, jednodušší?

- *Carrying out the plan* – realizace a kontrola plánu

  V této fází aplikujeme postup, který jsme vymysleli v předchozím kroku, a snažíme se najít řešení. Ptáme se: Jsou všechny kroky správné?

- *Looking back* – kontrola výsledku

Ptáme se: Můžu použít výsledek i pro jiný problém? Je výsledek správný?

Nejprve je nutné zadanou úlohu přečíst a porozumět ji z jazykového hlediska. Po přečtení následuje identifikace objektů a jejich vzájemných vztahů. Ve slovních úlohách se mohou nacházet také nadbytečné údaje, které je nutné v tomto kroku odlišit od potřebných. V neposlední řadě musí řešitel nalézt otázky, na které hledáme odpověď. Tímto získává vše potřebné k tvorbě tzv. situačního a z něj poté matematického modelu – matematizaci slovní úlohy. Situační model je představou problémové situace. „Objasňuje, k čemu má textem popsaná situace nebo jednání konatelů dospět; jde o stanovení problému.“ (Vondrová, 2019, str. 62). Po vyřešení tohoto modelu je nutné provést zkoušku. Zkouška by měla být nejen numerická, ale také sémantická. Sémantická zkouška je ověření, že výsledek dává smysl i v kontextu reálného života (Vondrová a kol., 2020). Typickými příklady by mohly být rychlost automobilu přesahující 300 km/h, záporný počet objektů a desetinný počet lidí.

Kroky jsou uvedeny v lineárním pořadí, avšak v praktické situaci se mohou prolínat, spojovat, nebo některý krok může i žák přeskočit.

- Přečtení úlohy: Žák by měl přečíst úlohu pozorně a získat co nejvíce informací o situaci nebo problému, který má být řešen.
- Pochopení úlohy: Žák by se měl snažit pochopit smysl úlohy a co od něj úloha požaduje. To znamená, že žák musí úloze porozumět i z jazykového hlediska. Pokud nezná nějaká slova použitá v zadání slovní úlohy (jazykový význam slova), znamená to pro něj další překážku.
- Formulace matematického modelu: Žák by měl převést slovní formulaci na matematický jazyk a vytvořit matematický model pro řešení úlohy. Ještě před tímto krokem předchází identifikace objektů, které jsou potřebné a vyřazení přebytečných informací.
- Výběr metody pro řešení a následná zkouška správnosti výsledku matematické úlohy, která by měla být provedena i v kontextu běžného života.

Dle Kuřiny (2011) je podstatnou složkou řešení úloh tvořivost, dobré nápady a „umění vidět“ souvislosti. V matematice je „umění vidět“ schopnost vidět a chápat vztahy mezi různými geometrickými tvary a veličinami bez nutnosti použití složitých výpočtů.

Proces řešení slovních úlohou mohou ovlivnit vlastnosti jako pozornost, pracovní paměť a seberegulace (Vondrová a kol., 2020). U slovní úlohy musí žák udržet v hlavě několik informací a vztahů mezi nimi, aby mohl provést výpočty nebo rozhodnutí.

Také schopnost soustředit se na úlohu a ignorovat rušivé faktory je klíčová pro úspěšné řešení slovních úloh. Žáci, kteří mají potíže s pozorností, mohou mít potíže s přečtením a pochopením úlohy a s vytvořením matematického modelu. Žáci se musí soustředit na specifické informace v textu úlohy, aby pochopil, jaký matematický model mají vytvořit a jaký výpočet provést.

Např. úloha: V květinářství Květiny od Pepy v Plzni otevřeného od roku 2020 se prodávají růže za 50 Kč za kus, tulipány za 30 Kč za kus a gerbery za 40 Kč za kus. Jaký je celkový náklad na 10 růží a 15 tulipánů?

Žák musí být schopen se soustředit na informace o ceně růží a tulipánů a ignorovat další nadbytečné informace v úloze, aby mohl vytvořit matematický model pro řešení úlohy. Zvláště slovní úlohy s delším zadáním a nadbytečnými informacemi kladou vyšší nároky na pozornost žáků.

2.4 Strategie řešení

Tato kapitola představuje některé strategie, které žáci při řešení slovních úloh používají.

Novotná (2000) rozděluje strategie dle použitého matematického aparátu na aritmetické a algebraické. Aritmetické strategie jsou takové, kdy řešitel nepoužívá pro výpočet výsledku rovnice. Naproti tomu u algebraických strategií řešitel používá jednu či více rovnic.

Eisenmann, Přibyl, Novotná, Břehovský a Cihlář (2017) uváději tři způsoby řešení úlohy: pokus, přímý způsob a užitím heuristické strategie. Pokus definují jako „…nejprimitivnější způsob vypořádání se s úlohou, který předpokládá pouze vnější motivaci řešitele. Ten plní pouze cíl „vyřešit úlohu“, a to většinou pouze jednou, bez vnitřní zpětné vazby o správnosti řešení.“ (str. 22). Přímý způsob využívá naučené znalosti, či algoritmu. Při řešení užitím heuristické strategie nemá řešitel znalosti na to, aby úlohu vyřešil. Dle autorů je však vnitřně motivován k jejímu řešení. Mezi heuristické strategie Eisenmann, Přibyl, Novotná, Břehovský a Cihlář (2007) řadí systematické experimentování, pokus – ověření – korekce, cesta zpět a zavedení pomocného prvku (pouze u geometrických úloh).

Principem systematického experimentování je přibližování se k výsledku. „Na počátku provede řešitel volbu odhadu výsledku … a dále postupuje systematicky. Po každém provedeném experimentu řešitel pouze ověří, zda získal požadovaný výsledek či nikoliv. Pokud ne, pokračuje dál…“ (Eisenmann a kol., 2017, str. 23)

Principem strategie pokus – ověření – korekce je také přibližování se k výsledku, avšak ve druhém kroku řešitel ověřuje, zda byla jeho volba správná a pokud ne, snaží se zjistit, jak moc se spletl. Ve třetím kroku provádí korekci.

Cesta zpět je strategie, kdy se řešitel snaží jít od konce k počátku. Dle autorů jsou vhodným příkladem některé konstrukční úlohy z geometrie. „Specifickou variantou úloh řešených pomocí cesty zpět jsou slovní úlohy, ve kterých se s úspěchem využívají inverzní operace k operacím uvedeným v zadání úlohy.“ (Eisenmann a kol., 2017, str. 24)

Zavedení pomocného prvku je strategie, při níž řešitel zavádí tzv. pomocný prvek, který mu lépe pomůže dosáhnout řešení. „Prvním typem je pomocný prvek (auxiliary element) jako takový a druhým pak pomocná úloha (auxiliary problem). Smyslem pomocné úlohy je umožnit řešiteli buď získat vhled do původní úlohy, nebo vyřešit úlohu jako takovou.“ (Eisenmann a kol., 2017, str. 24)

Dále např. Verschaffel a kol. (2020) rozděluje strategie řešení úloh na formální a neformální. Autoři upozorňují, že žáci dokáží neformálními způsoby řešit slovní úlohy ještě předtím, než se ve škole naučí odpovídající matematické znalosti a dovednosti. Například pro oblast slovních úloh využívající sčítání a odčítání si i žáci mateřské školy našli postup, jak vyřešit úlohu, například pomocí sčítání objektů, ještě dřív, než se naučili provádět výpočty s čísly. Stejně tak, než se žáci naučí násobení nebo dělení, někteří z nich již umí řešit určité typy problémů zahrnující tyto operace pomocí různých neformálních strategií založených např. na opakovaném sčítání či odčítání.

Verschaffel a kol. (2020) dále poukazují na dva směry vývoje strategie řešení slovních úloh u dětí. Jeden směr je od neformálních, někdy i pracných strategií směrem k více formalizovaným a zkráceným výpočetním strategiím. Druhý směr vývoje je od použití různé metody řešení na každou odlišnou úlohu směrem k používání jedné obecné metody, kterou lze použít pro všechny úlohy s podobnou základní aritmetickou operací.

Formální strategie využívají k řešení slovních úloh matematických vzorců a rovnic, postupů a kroků, které se ve výuce opakují. Naproti tomu neformální strategie využívají předchozí zkušenosti k řešení podobných úloh (typické pro matematické olympiády), obsahují i volné a spontánní myšlení, které se vyhýbá pevným postupům, či nevědomé pochopení řešení bez nutnosti formální strategie (i tzv. „umění vidět“).

2.4.1 Povrchové strategie a jak jim předcházet

Vondrová (2020) vymezuje povrchové strategie jako strategie, které žáci používají při řešení slovních úloh, aniž by plně pochopili matematický koncept, který je v úloze obsažen. Tyto strategie se zaměřují na použití jednoduchých postupů nebo na zapamatování jednotlivých vzorců, aniž by žák pochopil princip, na kterém jsou založeny, či aniž by se pokusil si vytvořit situační model. Povrchové strategie jsou často neefektivní a žákům brání v pochopení a aplikaci matematiky v budoucnosti.

Vondrová (2020) identifikuje několik příčin, proč žáci používají povrchové strategie při řešení matematických úloh. Tyto příčiny zahrnují:

- Nedostatečné pochopení matematických konceptů

  Žáci, kteří nemají dostatečné znalosti, se spoléhají na povrchové strategie, protože nevědí, jak řešit úlohy jiným způsobem. Především pokud učitel klade důraz pouze na provedení zápisu, ale nezdůrazňuje nutnost tvorby situačního modelu a představy situace (např. v podobě schématu, obrázku, převyprávění úlohy vlastními slovy apod.). Žáci hledají například signální slova (jsou to slova nebo fráze v textu slovní úlohy, které pomáhají určit, jaké matematické operace nebo výpočty by mohly být potřeba k řešení úlohy), nebo návodná čísla a pokouší se o výpočet bez porozumění úloze.
- Didaktické příčiny

  Mezi zmiňované didaktické příčiny patří tendence učitelů vést žáky k povrchové strategii signálních slov, řešení typických úloh, především na prvním stupni, u nichž povrchové strategie vedou ke správnému výsledku, a upevňování přesvědčení (volbou úloh), že každá úloha má řešení jediné a jednoznačné.
- Psychologické příčiny

  Psychologické příčiny mohou být rozmanité. Do této kategorie může patřit neschopnost udržet si informace v paměti. Tvorba situačního modelu je kognitivně náročnou činností a klade důraz na kapacitu pracovní paměti. Zmíněnou příčinou je u některých žáků i naučená bezmocnost, nízká důvěra žáka ve vlastní schopnosti. Žák je přesvědčen, že úlohu nedokáže vyřešit, tak se nepokouší o hlubší porozumění.

Vondrová (2020) zdůrazňuje, že důležité je, aby učitelé podporovali žáky v rozvoji hlubšího pochopení matematiky, a vyzývali je, aby se zaměřili na správné řešení úloh místo rychlého vyřešení pomocí povrchových strategií.

„Tendenci k povrchovému řešení slovní úlohy si žáci osvojují již na 1. stupni základní školy, proto je důležitá prevence.“ (Vondrová, 2020, str. 79)

Vondrová navrhuje následující didaktická doporučení, jak mohou učitelé podporovat používání hlubších strategií u svých žáků:

- Volba vhodné úlohy
  Zaměřit se na volbu úlohy s nějakým problémem či komplikujícím faktorem, aby povrchové strategie nebyly účinné. Jedná se například o úlohy s antisignálem (slovo nebo slovní spojení, které naznačuje matematickou operaci, ale interpretace je opačná k tomu, jaká operace se očekává), či s nadbytečnými údaji.
- Rozvoj metakognitivních dovedností
  Žáci by se měli naučit přemýšlet o svém řešitelském procesu.
- Důraz na proces
  Učitelé by měli zaměřit svou pozornost na proces řešení úloh místo na výsledek. Například velmi důležitou částí je tvorba legendy (tj. výsledný písemný záznam reprezentace zadání úlohy), avšak ne dle daného algoritmu nebo opisem z tabule a učebnice. Žáci by měli být vedeni k tomu, aby zaznamenali strukturu úlohy a legendu použili pro její matematizaci. Legenda nemusí být neměnná a žáci ji mohou v průběhu řešení doplňovat a opravovat.
- Vizuální reprezentace řešení slovní úlohy
  Žáci používající řešitelský obrázek (vizuální reprezentaci) dosahují vyšší úspěšnosti v řešení úloh (Vondrová, 2020).
- Povzbuzování k diskusi
  Učitelé by měli povzbuzovat žáky k diskusi a ke sdílení svých myšlenek a postupů při řešení úloh. Vhodným podkladem jsou úlohy, které mají nejednoznačné zadání, tedy připouští více správných interpretací.
- Jazykové záležitosti

Řešení slovní úlohy závisí na jejím porozumění. Proto je vhodné nechat žáky převyprávět úlohu vlastními slovy či diskutovat nad významy slov.

Tyto zásady mohou pomoci žákům přecházet od používání povrchových strategií k hlubšímu pochopení matematiky a k používání efektivnějších způsobů řešení slovních úloh.

2.5 Obtížnost slovních úloh

Slovní úlohy mohou být formulovány různými způsoby a mohou obsahovat různé informace, které mohou být pro řešení úlohy důležité nebo nepotřebné. Proto je stěžejní, aby žáci byli schopni pochopit slovní formulaci úlohy a vytvořit správný situační model a na jeho základě matematický model pro její řešení.

Pro žáky může být řešení slovních úloh obtížné, protože vyžaduje pochopení slovní formulace úlohy, převod slovní formulace do matematického jazyka a volbu správné metody pro řešení úlohy. Žáci mohou mít potíže s pochopením konceptů, které jsou v úloze zahrnuty, nebo s vytvářením správného situačního modelu úlohy.

Řešení slovních úloh mohou ovlivňovat různé faktory, z nichž mnohé se týkají přímo zadání slovních úloh. Např. Havlíčková (2020) se ve svém výzkumu zabývala vlivem atraktivity kontextu matematické slovní úlohy na řešitelský proces u žáků základní školy. Bylo zjišťováno, zda žáci budou úspěšnější v řešení úloh s atraktivním kontextem (s prvky pohádky, science fiction a humoru) než v úlohách s neutrálním kontextem. Výsledku ukázaly, že atraktivní kontexty mohou vést ke zvýšení snahy žáků o řešení úloh a v některých případech i k mírnému zlepšení úspěšnosti řešení.

Vondrová a kol. (2020) systematicky zkoumali vliv následujících parametrů: přítomnost nadbytečných informací a délka textu, verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy, pořadí informací v zadání slovní úlohy, zkušenostní kontext, návodnosti, operátor a přítomnost stavu, antisignál, proporční a aditivní uvažování a typ poměru a jazyková explicitnost zadání slovní úlohy.

V následujících oddílech představím především parametry související s úlohami, které byly použity v mých výukových experimentech. V praktické části popisuji slovní úlohy Irena, Plachetnice a Dojíždění. Dvě úlohy obsahují dlouhý text a přítomnost nadbytečných informací, jedna se opírá o vzdálený zkušenostní kontext žáků, jedna má nejednoznačné a neexplicitní zadání a číslo zadané slovně („další šestinu“).

2.5.1 Přítomnost nadbytečných informací

Přítomnost nadbytečných informací může být problémem při řešení slovních úloh, protože může ztěžovat identifikaci relevantních informací a tvorbu správného matematického modelu. To dále může způsobit, že se žáci v zadání „ztratí“ a přestanou být motivovaní k řešení úlohy. Přítomnost nerelevantních informací ovlivňuje výše zmíněné – pozornost žáka a pracovní paměť. Z toho důvodu je důležité, aby žáci uměli vybírat klíčové informace, které jsou potřebné k řešení úlohy.

Výzkum Vondrové a kol. (2019) rozděluje úlohy s přítomností nadbytečných informací do tří skupin: nadbytečné informace na začátku zadání, nadbytečné informace uvnitř zadání a úlohy s nadbytečným numerickým údajem. Příkladem úlohy s nadbytečným textem na začátku zadání varianta k úloze Jindřišská I (určená pro 3. ročník). Původní úloha zní takto

> Na zastávce Jindřišská z tramvaje vystoupili 3 cestující a 5 jich nastoupilo. Dále pokračovalo 13 cestujících. Kolik cestujících bylo v tramvaji, než přijela na zastávku Jindřišská?

Prodloužená varianta

> Tramvaj číslo 6 jede po své trase z Libně do Vršovic. Je to nový typ tramvaje, který jezdí v Praze teprve krátce. Na zastávce Jindřišská z tramvaje vystoupili 3 cestující a 5 jich nastoupilo. Dále pokračovalo 13 cestujících. Kolik cestujících bylo v tramvaji, než přijela na zastávku Jindřišská? (Vondrová a kol., 2019, str. 97)

Příkladem úlohy s nadbytečným textem vnořeným do zadání je dvojice úloh Výletníci (pro 7. ročník).

> Výletníci ujdou 4,5 kilometru za hodinu. Na výlet v celkové délce 31,5 kilometru se vydají v 9.00. Rádi by dorazili zpět nejpozději v 17.30. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem?

> Výletníci mají bezpečně ověřeno, že ujdou 4,5 kilometru za hodinu. Na zítřek si naplánovali náročný okružní výlet v celkové délce 31,5 kilometru. Na cestu by

se chtěli ze svého tábora vydat v 9.00 a rádi by dorazili zpět nejpozději v 17.30. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem a přestávkami s občerstvením? (Vondrová a kol., 2019, str. 97)

Posledním příkladem může být trojice variant úloh Plechovky (pro 6. a 7. ročník) s nadbytečným numerickým údajem na začátku úlohy a na konci úlohy před otázkou, která ještě další nezbytný údaj pro řešení obsahovala.

V továrně na zpracování kovů tento týden pracují na výrobě plechovek. V pondělí, úterý i ve středu jich vyrobili stejný počet. Dohromady to za tyto tři dny bylo 14 685 plechovek. Ve čtvrtek jich vyrobili o 319 více než v pondělí. Kolik plechovek musí v pátek ještě vyrobit, aby mohli zákazníkovi odeslat 25 000 kusů, které si objednal?

V továrně na zpracování kovů tento týden pracují na výrobě plechovek v celkové ceně 12 500 EUR. V pondělí, úterý i ve středu jich vyrobili stejný počet. Dohromady to za tyto tři dny bylo 14 685 plechovek. Ve čtvrtek jich vyrobili o 319 více než v pondělí. Kolik plechovek musí v pátek ještě vyrobit, aby mohli zákazníkovi odeslat 25 000 kusů, které si objednal?

V továrně na zpracování kovů tento týden pracují na výrobě plechovek. V pondělí, úterý i ve středu jich vyrobili stejný počet. Dohromady to za tyto tři dny bylo 14 685 plechovek. Ve čtvrtek jich vyrobili o 319 více než v pondělí. Celková cena vyrobených plechovek byla 12 500 EUR. Kolik plechovek musí v pátek ještě vyrobit, aby mohli zákazníkovi odeslat 25 000 kusů, které si objednal? (Vondrová a kol., 2019, str. 97–98)

Dle výzkumu Vondrové a kol. (2019) se prokázaly následující souvislosti:

- Pokud nadbytečné informace neobsahují číslo a jsou zadány na začátku slovní úlohy, vliv na žákovské řešení nebyl prokázán.
- Pokud jsou nadbytečné informace vnořeny do textu a zároveň neobsahují číslo, je zde prokázaný vliv v závislosti na věku řešitele. Vliv nadbytečných údajů s věkem slábne.

- Pokud nadbytečné informace obsahují číslo/a, negativní vliv na žákovské řešení slovní úlohy je prokázán.

Žákům můžeme pomoci při řešení úloh s dlouhým zadáním a nadbytečnými informacemi např. tak, že je vyzveme k jejímu zkrácení tak, aby byla ještě řešitelná, popřípadě k doplnění o důležité informace (aby byla pro žáky jednodušší na pochopení).

2.5.2 Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy

Verbální složkou je ta část, která se skládá z psaných nebo mluvených slov. Tato složka obsahuje text, který popisuje úkol, nebo informace, které jsou potřebné k vyřešení tohoto úkolu.

Neverbální složkou jsou všechny ostatní aspekty úlohy, které nejsou verbální. Patří sem například vyjádření čísel číslicí, dále obrázky, grafické prvky nebo symboly, které se používají k doplnění nebo vysvětlení verbální části úkolu.

Především role obrázků je důležitá pro pochopení matematického konceptu, který se v úkolu řeší. Například pro úlohy s geometrickými koncepty, jako jsou úhly nebo trojrozměrné objekty, mohou obrázky žákům lépe pochopit, co se od nich očekává. I pro úkoly s číselnými koncepty, jako jsou statistiky nebo grafy, mohou obrázky pomoci žákům lépe pochopit strukturu slovní úlohy (Sepeng & Sigola, 2013).

Pro hlubší porozumění tomuto tématu doporučuji výzkum Vondrové a kol. (2019), ve kterém autoři věnují pozornost zadání čísla číslicí, nebo slovně. Konkrétně autoři zkoumali zadání dvou číselných údajů – oba v roli číslice, právě jeden z nich jako číslice, nebo oba údaje zadané slovně. Autoři předpokládali, že pro žáka budou jednodušší ty úlohy, kde je vyjádřen číselný údaj pomocí číslice (nezávisle na ostatních parametrech, např. délce textu). Příkladem trojice variant úloh je úloha Výletníci (pro 7. ročník, zmíněná výše).

> Výletníci mají bezpečně ověřeno, že ujdou 4,5 kilometru za hodinu. Na zítřek si naplánovali náročný okružní výlet v celkové délce 31,5 kilometru. Na cestu by se chtěli ze svého tábora vydat v 9.00 a rádi by dorazili zpět nejpozději v 17.30. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem a přestávkami na občerstvení?

> Výletníci mají ověřeno, že ujdou čtyři celé pět desetin kilometru za hodinu. Na zítřek si naplánovali okružní výlet v celkové délce třicet jedna celých pět desetin

> kilometru. Na cestu se vydají v 9.00 a rádi by dorazili zpět nejpozději v 17.30. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem a přestávkami na občerstvení?
>
> Výletníci mají bezpečně ověřeno, že ujdou 4,5 kilometru za hodinu. Na zítřek si naplánovali okružní výlet v celkové délce 31,5 kilometru. Na cestu by se chtěli vydat v devět hodin ráno a rádi by dorazili zpět nejpozději v půl šesté večer. Kolik nejvýše času mohou celkem strávit při své cestě odpočinkem a přestávkami na občerstvení? (Vondrová a kol., 2019, str. 126–127)

Výzkum prokázal, že žáci byli úspěšnější v první variantě úlohy, kde jsou oba údaje vyjádřeny číslicemi než ve zbylých dvou variantách úlohy Výletníci. U dalších dvou testovaných úloh v 6. a 7. ročníku se také prokázaly rozdíly. V 8. a 9. ročníku se žádné rozdíly u testovaných úloh neprojevily (Vondrová a kol., 2019).

2.5.3 Pořadí informací

Pokud jsou informace prezentovány v logickém pořadí, tj. jejich pořadí odpovídá pořadí dějů, které úloha popisuje, je řešení úlohy pro žáky snazší (Vondrová a kol., 2019). Dle výzkumu Vondrové a kol. (2019) však není rozdíl mezi prezentováním informací v logickém pořadí a pomícháním údajů v zadání, ve kterých není hierarchie. „V případě přesunutí údajů, mezi nimiž hierarchie je, …, se rozdíly v obtížnosti prokázaly, přičemž jejich významnost se snižovala se vzrůstajícím věkem žáků.“ (str. 320)

Příkladem úlohy, kde jsou pomíchané údaje, mezi nimiž není hierarchie je varianta úlohy Jindřišská I.

> Na zastávce Jindřišská z tramvaje vystoupili 3 cestující a 5 jich nastoupilo. Dále pokračovalo 13 cestujících. Kolik cestujících bylo v tramvaji, než přijela na zastávku Jindřišská?
>
> Na zastávce Jindřišská do tramvaje nastoupilo 5 cestujících a 3 vystoupili. Dále pokračovalo 13 cestujících. Kolik cestujících bylo v tramvaji, než přijela na zastávku Jindřišská? (Vondrová a kol., 2019, str. 191)

Příkladem pro dvojici úloh s hierarchií přesunovaných informací je varianta úlohy Geologická.

> Když tramvaj přijela do zastávky Geologická, bylo v ní 20 cestujících. 8 jich vystoupilo a 6 nastoupilo. Na další zastávce Hlubočepy 4 lidé vystoupili a několik lidí nastoupilo. V tramvaji pak bylo celkem 17 cestujících. Kolik jich na zastávce Hlubočepy nastoupilo?
>
> Tramvaj přijela do zastávky Geologická. 8 cestujících vystoupilo a 6 nastoupilo. Na další zastávce Hlubočepy 4 lidé vystoupili a několik lidí nastoupilo. V tramvaji pak bylo celkem 17 cestujících. Když tramvaj přijela do zastávky Geologická, bylo v ní 20 cestujících. Kolik jich na zastávce Hlubočepy nastoupilo? (Vondrová a kol., 2019, str. 191)

2.5.4 Zkušenostní kontext

Zkušenostní kontext je jedním z parametrů slovní úlohy. „Kontextem se míní reálná situace obsahující problém, jehož matematické řešení žáci hledají.“ (Vondrová a kol., 2019, str. 66)

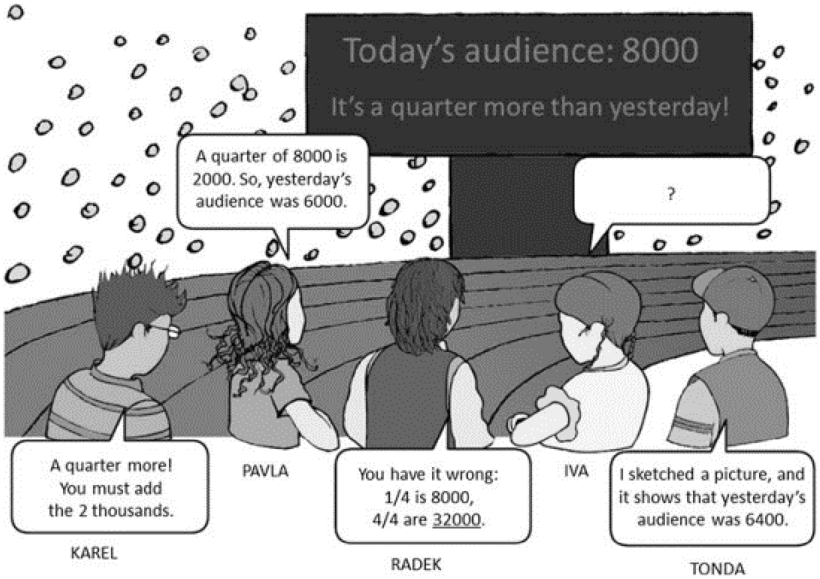
Z výsledků výzkumu Vondrové a kol. (2019) vyplývá, že změna kontextu nevede k systematické změně v úspěšnosti řešení. Úlohy s reálným kontextem (např. rozdělování jablek) jsou pro žáky stejně náročné jako úlohy s fantasy či sci-fi kontextem (např. Minecraft). Ani politický kontext, kontext z dílny apod. žákům problém nečiní, pokud porozumí významu slov.

2.6 Concept cartoons

Concept cartoons je pedagogický nástroj, který se používá k rozvoji kritického myšlení a komunikace u žáků. Jedná se o kreslené karikatury/komiksy (obrázek 1), které zobrazují reálnou situaci nebo problém a které jsou doplněny otázkami, které žáky vedou k hloubkovému zvažování a diskusi o dané situaci nebo problému.

Cílem *concept cartoons* je rozvíjet žákovy schopnosti analyzovat, komunikovat a řešit problémy. V zahraničí se často používají ve výuce matematiky, fyziky, chemie či biologie a v dalších přírodních vědách.

První *concept cartoons* byly představeny v roce 1991 autory Brendou Keogh a Stuartem Naylorem a setkaly se s dobrým přijetím. Účelem jejich vytvoření bylo podnítit nápady a rozvíjet myšlení a komunikaci u žáků (Naylor & Keogh, 2013). Autoři také publikovali knihu s názvem *Concept cartoons in mathematics*, kde popisují své teorie a praktické rady s používáním *concept cartoons* ve výuce.

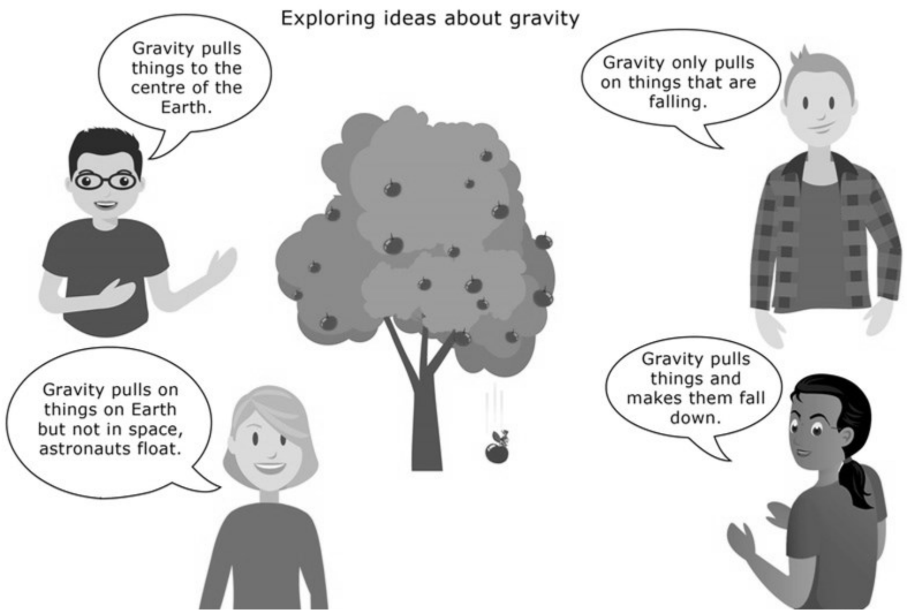


Obrázek 1 – *Concept cartoons* a jejich využití v matematice. Zdroj: Samková (2016), str. 81. Volně přeloženo: Dnešní počet diváků: 8000. To je o čtvrtinu více než včera! Karel: „O čtvrtinu více! Musíš přidat 2 tisíce.“, Pavla: „Čtvrtina z 8000 je 2000. Takže včerejší počet diváků byl 6000.“, Radek: „Máte to špatně. 1/4 je 8000, 4/4 jsou 32000.“, Iva: „?“, Tonda: „Nakreslil jsem si obrázek. Ukazuje, že včerejší počet diváků byl 6400.“

Dle Naylora a Keoghové (2013) patří mezi významné vlastnosti *concept cartoons* a způsobu jejich prezentace především:

- Jsou založeny na každodenních situacích, které se nezdají být vědecké, takže je méně pravděpodobné, že se jich žáci s nedostatkem sebedůvěry zaleknou. Tyto každodenní situace jsou stejné pro státy ve světě, což umožňuje používat *concept cartoons* v mnoha zemích.
- Představují alternativní názory na situaci, včetně vědecky přijatelného názoru. V mnoha případech může existovat více vědecky přijatelných alternativ. To představuje další výzvu pro žáky, především pro školně úspěšné.
- Obsahují i prázdnou bublinu, která má motivovat žáky k dalším nápadům.
- Text musí být napsaný v jazyce žáků, aby jim byl srozumitelný.

- Všechny alternativní pohledy mají rovnocenné postavení. To dává méně sebevědomým žákům podporu při vyjadřování toho, co si myslí, protože se vyjadřují k myšlenkám někoho jiného. V některých případech může být reprezentováno i nesprávné řešení, tudíž žáci nezažívají neúspěch při vyslovení nesprávné myšlenky.
- Jsou prezentována nesprávná řešení či úvahy a učitelé by měli přimět žáky k diskusi a vyvrácení mylných představ (obrázek 2).



Obrázek 2 – Příklad využití *concept cartoons* ve fyzice.
Dostupné z: https://www.sciencelearn.org.nz/resources/2566-using-concept-cartoons
Volně přeloženo: Zkoumáme nápady o gravitaci. Zleva zdola: „Gravitace přitahuje věci k Zemi, ale ne ve vesmíru, kosmonauti létají.“, „Gravitace přitahuje tělesa do středu Země.“, „Gravitace přitahuje věci a ty padají.“, „Gravitace působí pouze na padající objekty.“

Tento koncept spojuje diskusi ve třídě, práci s chybou, pokládání kvalitních otázek, správnou argumentaci. Vytváří prostředí, které je pro žáky motivační.

2.7 Concept cartoons a vliv na učení

Concept cartoons jsou vizuální nástroje, které pomáhají žákům učit se nové koncepty a kriticky o nich přemýšlet. Ilustrace a dialog, který je v nich uveden, pomáhá žákům vidět různé perspektivy problému, a tím i rozvíjet rozumové schopnosti. Současně mají vliv na více aspektů žákovského učení (Naylor & Keogh, 2013).

Při používání *concept cartoons* se žáci ocitají v roli porotce, to znamená, že posuzují názory, které zastávají jiní lidé. To je pro žáky neobvyklá role, protože ve škole je to většinou učitel, který hodnotí jejich nápady (Naylor & Keogh, 2013). Dle Dweckové (2000) mají žáci tendenci se vyhýbat riziku, že se mýlí (pokud si nejsou jistí), kvůli učitelům, kteří soudí jejich nápady. Méně sebevědomí žáci a žáci s horšími školními výsledky často nejsou ochotni předložit své nápady, protože mají strach. Převzetí role rozhodčího může být pro žáky posilující, protože sami hodnotí své nápady. To umožňuje zapojit i méně sebevědomé žáky do argumentace a umožňuje jim to snáze předkládat své myšlenky.

Dále působí jako účinný podnět k argumentaci, včetně toho, že umožňují žákům spolupracovat a vytvářet společné argumenty. Umožňují, aby argumentace probíhala bez potřeby formální struktury, konkrétní slovní zásoby, nebo nutnosti učitele zasahovat do procesu argumentace (Naylor & Keogh, 2013).

Concept cartoons čerpají informace a podklady z publikovaného výzkumu a představují tak i nejčastější mylné představy žáků. Tímto způsobem kreslené postavy formulují to, co se jeví jako věrohodné vědecké názory, ale jsou to mylné představy. Žáci se ocitají v situaci, kdy musí zvážit všechny věrohodné alternativy, z nichž je mnohé předtím ani nemusely napadnout. Vytváří se tak kognitivní konflikt. Pro sebevědomější a školně úspěšnější žáky to může být důležitý krok k tomu, aby se hlouběji zamysleli nad vědeckými pojmy nebo matematickými problémy. Nemít jasnou správnou odpověď (více alternativních, nebo i chybné) činí kognitivní konflikt pravděpodobnější (Naylor & Keogh, 2013).

Další z výhod je nastavení neformálního učení. Neformální učení je proces učení, který se neodehrává v tradičním vzdělávacím prostředí, jako jsou školy nebo univerzity (Naylor & Keogh, 2013). Místo toho se odehrává v běžném životě, například prostřednictvím zkušeností, konverzací, nebo hraní. Neformální učení je často neúmyslné a neplánované, ale může být stejně cenné jako formální vzdělávání. *Concept cartoons* mohou překlenout propast mezi formálním (škola) a neformálním učením, protože jsou založeny na každodenních situacích, kde „obyčejné" postavičky dělají či zkoumají „obyčejné" věci (Naylor & Keogh, 2013). Dle Naylora a Keoghové (1999) byly úspěšně použity i v neformálním prostředí jako například na školních chodbách, při výstavách ve vědeckých centrech, či v britské nebo švédské hromadné dopravě, aby zapojili širší veřejnost do uvažování nad vědeckými problémy.

Použitím *concept cartoons* se žáci učí rozvíjet své jazykové dovednosti tím, že se učí popsat a vysvětlit ilustraci a své názory na dané téma, a také tím, že se učí poslouchat a porozumět názorům ostatních. Při obrazovém znázornění úlohy či myšlenek s minimálním textem je pro žáky s odlišným mateřským jazykem snazší se zapojit do procesu řešení úlohy. Nyní jsme svědky většího počtu žáků s odlišným mateřským jazykem na základních školách (například ukrajinský nebo vietnamský jazyk). Je všeobecně známo, že jazyk může být výraznou překážkou při učení (Naylor & Keogh, 2013).

Tyto komiksy mohou být účinným nástrojem pro motivaci a zapojení žáků do výuky, protože představují zajímavý a atraktivní způsob, jak se učit nové informace, představují způsob, jak zapojit žáky, kteří mají různé styly učení, podporují komunikaci a spolupráci mezi žáky. Autoři Naylor a Keoghová (1999) zmiňují, že jsou vysoce motivující pro žáky různých věkových skupin a původů, včetně těch, kteří mají poruchy chování. Žáci stráví více času při řešení těchto úloh právě proto, aby si udrželi postavení mezi spolužáky a mohli s nimi komunikovat (diskutovat o problému).

V matematice je proces řešení slovní úlohy stejně důležitý jako výsledek, ke kterému dospějeme. *Concept cartoons* mohou poskytnout vhled do strategií, které žáci používají, aniž by je oni sami dokázali formulovat. Můžeme tak snáze odhalit v jaké části procesu mají žáci případné potíže.

Concept cartoons mohou mít pozitivní vliv na výuku tím, že podporují aktivní zapojení žáků v hodinách. Učitelům mohou pomoci při vysvětlování složitých témat a stimulovat diskusi a spolupráci mezi žáky. Také je tento koncept dobrým příkladem implementace konstruktivistického přístupu k vzdělávání do praxe, nebo příkladem dobré práce s žákovskými chybami.

2.8 Konstruktivistické vzdělávání v praxi

Konstruktivistické přístupy k výuce byly v zahraničí dominantním tématem 80. a 90. let (např. Naylor & Keogh, 2013). Přesto jejich přístupy zůstávají spíše v rovině teoretické než praktické (Stehlíková, 2004).

V českém prostředí jsou nejznámějšími proponenty konstruktivistických přístupů k výuce matematiky Hejný a Kuřina. Ve své publikaci *Dítě, škola a matematika* (2001) popisují konstruktivistické pojetí vyučování matematiky jako metodu, která klade důraz na aktivní zapojení žáků do procesu učení a rozvoj jejich vlastních matematických konceptů a myšlení. Toto pojetí vychází z předpokladu, že každý žák má své vlastní způsoby, jak porozumět matematickým konceptům a vztahům, a že učitel by měl být spíše průvodcem v tomto procesu než autoritou, která učí předem daný materiál. Autoři dále zdůrazňují důležitost aktivního učení, kdy žáci pracují s matematickými koncepty a problémy a hledají řešení sami. Výsledkem takového učení je, že žáci nejen získávají konkrétní matematické znalosti a dovednosti, ale také si osvojují způsoby myšlení a řešení problémů, které mohou využít i v jiných oblastech. Kromě toho autoři zdůrazňují také důležitost přirozeného učení, kdy matematické koncepty a problémy jsou propojeny s každodenním životem a zájmy žáků. To umožňuje žákům lepší porozumění matematickým konceptům a motivuje je k učení.

Také dle Novotné (2004) vychází konstruktivismus z přesvědčení, že učení je dynamický proces, kterého se žáci musí aktivně účastnit. Konstruktivistické pojetí výuky matematiky zdůrazňuje, že žák musí aktivně konstruovat své vlastní poznatky a pochopení matematických konceptů prostřednictvím prožitků a interakcí s prostředím. Učitel by se měl stát facilitátorem, který poskytuje žákům příležitosti k objevování a konstruování poznání, místo toho, aby jen předával informace. Konstruktivistické pojetí je založeno především na rozvíjení schopnosti řešit problémy, experimentovat a objevovat a vyhýbá se pouhému memorování látky. „… zařazení experimentování do předmětů, jako je chemie nebo fyzika, považují [učitelé] většinou za samozřejmé. Objevování ve vyučování matematice však už tak jednoznačně přijímáno není." (Novotná, 2004, str. 357) Příčinu problému vidí autorka především v tom, že učitelé nemají přístup ke kvalitním materiálům a mají malé zkušenosti s touto vyučovací strategií. Při tom právě objevování může být pro žáky motivující a zábavné. Objevování v matematice žáky podporuje ve vnímání učení jako činnosti, za kterou jsou oni sami zodpovědní.

Různé konstruktivistické koncepce mají společné to, že kladou důraz na aktivitu žáka. „Chápou učení jako aktivní proces, v němž si žáci konstruují své vědění, žák musí dostat příležitost s učivem pracovat." (Stehlíková, 2004, str. 15)

N. Stehlíková se zaměřuje na charakteristiku kultury vyučování matematice a na principy účinného vyučování matematiky. Formuluje sedm základních principů tzv. dobré praxe (Stehlíková, 2007, str. 16):

- Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
- Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy).
- Učitel podporuje žákovu aktivní činnost.

- Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení.
- Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
- Učitel iniciuje a moderuje diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů.
- Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění.

První princip se zaměřuje na důležitost motivace při výuce matematiky. Vnitřní motivace, která vychází ze zájmu a zvídavosti žáka, je považována za nejcennější. Pro podporu této motivace je důležitým faktorem výběr vhodných úloh a problémů, které jsou pro žáky relevantní a přístupné, ale zároveň dostatečně náročné. Žáci by měli prožívat radost při řešení matematických problémů, což může vést k pozitivnímu emočnímu zážitku spojenému s matematikou. V praxi je nutné zohlednit rozdílné schopnosti žáků a volit úlohy, které lze řešit různými strategiemi a na různých úrovních.

Druhý princip se zaměřuje na podnětné úlohy a prostředí. Podnětné úlohy jsou takové úlohy, které podněcují zvídavost a zájem žáků a motivují je k aktivnímu myšlení a hledání řešení. Jsou to úlohy, které nejsou příliš snadné, ale zároveň nejsou příliš obtížné, aby žáci mohli být úspěšní a získávat pocit uspokojení z řešení problému.

Třetí princip popisuje matematiku jako aktivní činnost žáků, nikoliv jen jako soubor znalostí, axiomů, vět a důkazů. Žáci by měli řešit problémy, přemýšlet, navrhovat strategie, klást otázky a argumentovat. Učitelé by měli podporovat žáky při řešení problémů, položit návodné otázky a vyhnout se situacím, kdy žáci hádají, co si učitel myslí.

U čtvrtého principu autorka pojednává o tom, jak by měli učitelé matematiky pracovat s žáky, aby rozvíjeli jejich schopnost samostatného a kritického myšlení. Měli by vytvářet atmosféru podporující zvídavost a vést žáky k tvorbě hypotéz, argumentů a kritické reflexi. Důležitým faktorem je také dostatek času na přemýšlení a příležitost klást otázky. Učitelé by měli věřit, že žáci jsou schopni přemýšlet, a snažit se reagovat na jejich podnětné návrhy.

Pátý princip se týká toho, jakým způsobem učitelé přistupují k chybám žáků při výuce matematiky. Učitel, který chápe chybu jako součást procesu učení a jako impuls pro další práci, může přispět ke zlepšení matematického sebevědomí žáků. Je důležité, aby žák pociťoval radost z procesu učení a ze zdolávání překážek, nejen z výsledku. Učitel by měl umět chválit žáka za správný proces řešení, i když to ke správnému výsledku nevedlo, protože to může být matematicky relevantní. Chyby jsou často vnímány jako něco nežádoucího a učitel bývá tím, kdo je opravuje, což může vést k tomu, že žák nemusí o chybě přemýšlet sám.

Předposlední princip zdůrazňuje roli diskusí o matematické podstatě problémů, které jsou iniciovány a moderovány učitelem. Klíčovým faktorem úspěchu diskuse je kvalita učitelových otázek, které by měly být srozumitelné, ale přitom ne příliš navádět k odpovědi. Učitel může hrát v diskusích dvě role – účastníka a komentátora. Učitel by měl být schopen poskytnout žákům matematické informace, ale také podporovat jejich tvořivost a kritické myšlení.

Poslední princip se týká schopnosti učitele diagnostikovat porozumění jednotlivých žáků a přizpůsobit svou výuku podle výsledku diagnostiky. Učitel by měl neustále sledovat, čemu žáci rozumí a čemu ne, a být schopen pohotově řešit situace. Diagnostika žákovského porozumění může být provedena různými typy otázek, například nestandardními úlohami, inverzními úlohami, nebo výzvou, aby žáci vymysleli své vlastní úlohy na diagnostikovaný poznatek. Zdůrazňuje se, že to, že žák dokáže říct definici nějakého pojmu, nutně neznamená, že mu rozumí.

Výše zmíněné principy zde uvádím pro jejich důležitost ve výuce matematiky a tím také ve výuce slovních úloh. Důležitost dodržování těchto didaktických zásad spočívá v tom, že principy slouží jako klíčová dírka, skrz niž můžeme nahlížet na vyučovací proces a zlepšovat ho. Tyto principy nám pomáhají charakterizovat kulturu vyučování matematiky, analyzovat a popisovat reálnou výuku matematiky ve školách a reflektovat naši vlastní výuku (Stehlíková, 2007).

C*oncept cartoons* mohou sloužit jako jeden příklad převedení konstruktivistické teorie do praktického vyučování. Níže pojednám o některých principech podnětné výuky v souvislosti s *concept cartoons.*

2.8.1 Práce s chybou

Zapojení žákovských chyb je v hodinách matematiky důležitým aspektem přístupu učitelů, který může podpořit vztah žáka k matematice. Učitel by měl využívat chyby žáků jako příležitost ke zlepšení jejich pochopení tématu.

> Úspěch povzbudí. Motivační sílu žákova úspěchu posilní učitel tím, že s ním jeho radost spoluprožívá. Chyba nemusí odradit. Chyba může a měla by být pro

> žáka užitečnou zkušeností, poučením. Úlohou učitele je pomoci žákovi z chyb se poučit. Naučit žáka učit se z chyb. Učitel, který žáka za chybu kárá, mu to znesnadňuje. (Hejný a kol., 2006, str. 5)

Učitel by měl pozitivně reagovat na chyby a na žáky se za chyby nezlobit. Používat chyby k diskusi a k vysvětlení správného postupu a také zdůrazňovat, že chyby jsou součástí učení. Je důležité se vyvarovat odsouzení žáků za jejich chyby, nepřiměřeného zdůraznění chyb, ale i nepoužívání chyb jako příležitosti k učení. Studie autorů Gardeeho a Brodieové (2021) dokazuje, že zkušenosti žáků s přístupy jejich učitelů k chybám do jisté míry ovlivnily jejich identifikaci s matematikou. O tom, jak učitelé mluví o chybách a jak s nimi posléze nakládají, z toho pak vychází jejich názory na žáky a jejich uvažování v matematice. Správná práce učitele s chybou i mylnými představami může být podnětnou situací.

Concept cartoons mohou nejen vyvolávat nápady žáků, a být tak cenným nástrojem pro rozvoj řešitelských přístupů, ale pokud obsahují i mylnou představu, žáci se ochotněji zapojí do diskuse, protože nehrozí, že zažijí neúspěch či odsudek ze strany vrstevníků.

2.8.2 Matematická diskuse

Concept cartoons jsou vynikajícím nástrojem pro podporu matematické diskuse, tedy diskuse nad řešeními matematických úloh nebo výměny názorů na matematické téma. Může se jednat o skupinovou diskusi nebo třeba i diskusi ve dvojicích, při které se žáci snaží přijít na řešení problému a prezentují své názory na dané téma. Cílem diskuse je posunout pochopení tématu a snáze nalézt správné řešení.

Studie Sepenga a Webba (2012) prezentuje pozitivní výsledky ve třídách, kde byla technika matematické diskuse úspěšně implementována ve srovnání s kontrolní skupinou. Dle autorů analýza dat získaných z pre-testů a post-testů odhalila statisticky významný rozdíl mezi skupinou s intervencí a kontrolní skupinou. Skupina, u které byla implementována do výuky matematická diskuse, si vedla lépe při řešení problémů než kontrolní skupina. Intervenční strategie měla pozitivní vliv na dovednosti žáků při řešení slovních úloh. Dále autoři uvádí, že v pre-testu měli žáci tendenci nesprávně používat nadbytečné informace v zadání úlohy, nýbrž v post-testu se tato tendence u experimentální skupiny snížila. Výsledky studie ukazují, že zařazení diskuse při výuce slovních úloh v matematice má pozitivní vliv na výkonnost žáků při řešení problémů, ale také na jejich schopnost promyslet si kontext a zvolit potřebné informace.

Metodický materiál typu Porovnávání s využitím *concept cartoons* integruje všechny zmíněné principy podnětné výuky a konstruktivistického vyučování (diskuse, samostatné a kritické myšlení, práce s chybou, diagnostika porozumění, aktivní činnost žáků apod.) a převádí teorii do praxe, čímž se stává cenným nástrojem pro učitele.

2.8.3 Oborové a pedagogické znalosti

Concept cartoons mohou klást otázky, které by učitele nenapadly, a rozšiřují tím jeho oborové znalosti. Umožňují učitelům vidět hodnotu výuky formou dialogů či diskusí s jejich třídou a pomáhají rozvíjet jejich pedagogické dovednosti.

Samková (2016) se věnovala ve svém výzkumu využití *concept cartoons* jako nástroje pro diagnostiku pedagogických znalostí budoucích učitelů. *Concept cartoons* ukazují různé názory dětí na danou situaci a slouží jako model diskuse ve třídě. Cílem bylo zjistit neformální znalosti studentů před vstupem do kurzu didaktiky matematiky. Výsledky této studie ukázaly, že *concept cartoons* jsou i vhodným diagnostickým nástrojem pro zkoumání pedagogických znalostí budoucích učitelů. Ve srovnání s dalšími diagnostickými nástroji jako například videozáznamy z hodin matematiky mají *concept cartoons* nespornou výhodu: možnost připravit obsah bublin záměrně, ke zvolenému účelu. Tato možnost umožňuje prozkoumat znalosti budoucích učitelů hlouběji a odhalit důležité aspekty znalostí učitelů, které by v reálné situaci mohly zůstat neodhaleny (Samková & Hošpesová, 2015).

Někteří učitelé, po dlouholetém působení v praxi, chtějí provést změny ve svém vyučování, ale nejsou si jisti jak. Protože jsou *concept cartoons* dlouhodobě úspěšným didaktickým nástrojem ve výuce, mohou je učitelé vyzkoušet jako prostředek ke změně své výuky. Žáci na ně reagují ve většině případů pozitivně, a poskytují tak učiteli pozitivní zpětnou vazbu, učitel tento nástroj začne používat častěji a změna je evoluční (Naylor & Keogh, 2013).

2.9 *Concept cartoons* a Bloomova taxonomie

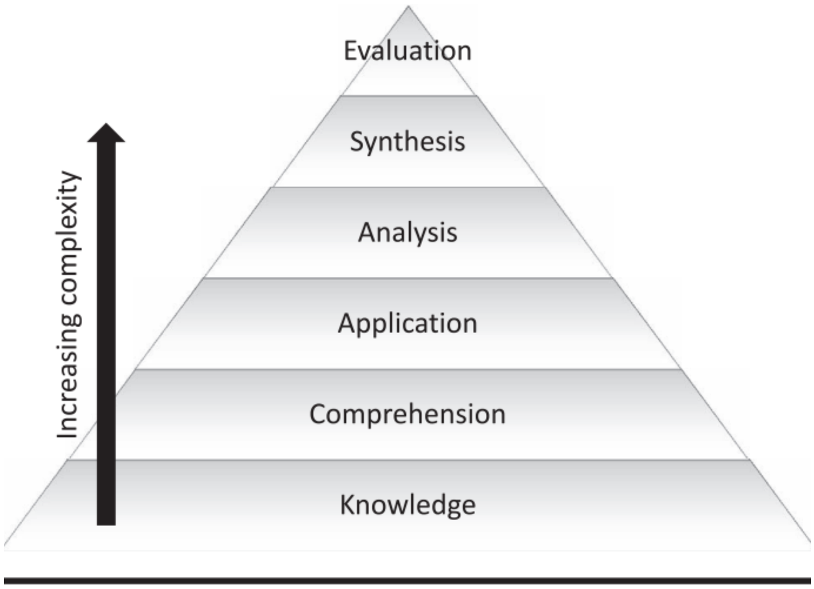
Bloomova taxonomie vzdělávacích cílů je klasifikační systém, který se používá k porovnávání a hodnocení vzdělávacích cílů a aktivit. Taxonomie popisuje šest úrovní kognitivního procesu, které jsou založeny na schopnosti učení a uvažování: pamatování, porozumění, aplikace, analyzování, syntéza a hodnocení (Adams, 2015). Je důležitým nástrojem, protože umožňuje učitelům a školám stanovit jasné a srozumitelné cíle pro učení a vzdělávání. Tyto cíle mohou být použity k určení vhodných aktivit a metod pro dosažení konkrétního výstupu. Taxonomie také umožňuje učitelům hodnotit a posoudit úroveň dosahovaného učení a případně přizpůsobit své metody, aby dosahovali vyššího výstupu. Kromě toho taxonomie pomáhá žákům rozvíjet kritické myšlení a učení na vyšší úrovni, což je pro jejich další profesní a osobní rozvoj důležité.

Praktická část diplomové práce obsahuje porovnávání řešení dvou fiktivních žáků.

Aktivitu obsahující porovnávání řešení lze zařadit do úrovně analyzování v Bloomově taxonomii vzdělávacích cílů (obrázek 3). Úroveň analyzování se zaměřuje na schopnost rozkládat informace na menší části, identifikovat vztahy mezi nimi a hodnotit jejich relevanci pro dosažení cíle. Porovnávání řešení v *concept cartoons* vyžaduje schopnost rozebrat a porovnat různé možnosti řešení a určit, které z nich je správné a vhodné, a to na základě kritérií a cílů.

Následnou diskusi o tom, které řešení kreslených postaviček je vhodnější, či kde udělaly postavičky chybu a z jakého důvodu, bych zařadila na úroveň hodnocení. Úroveň hodnocení se zaměřuje na schopnost posuzovat a hodnotit informace, nápady a řešení na základě určitých kritérií a standardů. Porovnávání řešení jiných žáků se svým a následná diskuse o vhodnějším postupu vyžadují schopnost hodnotit a vyhodnocovat různé možnosti a určit, která z nich je nejlepší. Tyto aktivity tedy vyžadují vysokou úroveň kritického uvažování a jsou vhodné do úrovně hodnocení.

Slovní úlohy vyučované ve škole tradiční cestou obvykle dosahují úrovně porozumění či aplikace v Bloomově taxonomii kognitivních cílů. Tyto úrovně se zaměřují na schopnost žáka rozumět a používat informace a nápady ve vztahu k cíli. Řešení slovních úloh vyžaduje, aby žák porozuměl významu informací a aplikoval je na konkrétní situaci.



Obrázek 3 – Bloomova taxonomie kognitivních cílů (Adams, 2015). Zdola: pamatování, porozumění, aplikování, analyzování, syntéza a hodnocení

3 Praktická část

3.1 Metodologie

3.1.1 Úvod do metodologie

Kvalitativní výzkum představený v této práci má charakter výukového experimentu a vedle hlavního cíle, kterým je rozvoj dovednosti žáků řešit slovní úlohy, se snažím vylepšit své profesní schopnosti a dovednosti jako učitelka matematiky. Součástí výukového experimentu je tedy i analýza a reflexe mé pedagogické praxe. Byla jsem v roli výzkumníka a zároveň v roli učitele, tudíž jsem se přímo účastnila zkoumaných procesů.

Kvalitativní výzkum se opírá o sesbíraná data, která se skládají z přípravy na hodinu, terénního zápisu v průběhu hodiny, doplněného o zápis a reflexi hodiny sepsané po vyučování, kopií žákovských prací a žákovského shrnutí hodiny.

3.1.2 Výběr a popis školy

Výzkum implementace slovních úloh na druhém stupni základní školy probíhal na 21. základní škole v Plzni v druhém pololetí školního roku 2021/2022.

21. základní škola je zřizována městem Plzeň a v současné době má okolo 820 žáků (na prvním a druhém stupni). Svým zaměřením se jedná o školu poskytující vzdělávání s rozšířenou výukou jazyků dle vzdělávacího programu „Brána jazyků otevřená“. Vyučuje se zde anglický jazyk, francouzský a německý jazyk a nepovinně ruský jazyk. V současné době je do vyučování zařazena i bilingvní výuka v prvním ročníku. Škola dosahuje velmi dobrých výsledků především v jazykových olympiádách (francouzský jazyk) (Novotná, 2022).

3.1.3 Popis souboru testovaných žáků

Žáci, kteří pokračují školní docházkou na druhém stupni základní školy, jsou v 6. ročníku znovu rozděleni do tří paralelních tříd podle druhého zvoleného jazyka (například kombinace anglický jazyk – německý jazyk, nebo anglický jazyk – francouzský jazyk aj.) Třídy, do kterých jsou žáci rozřazeni, musí splňovat genderová kritéria, poměr dívek a chlapců ve třídě musí být srovnatelný. Podobně to platí pro školně zdatné žáky a žáky s podpůrnými opatřeními. Na druhý stupeň zmiňované školy přicházejí nově žáci z okolí Plzně, z menších obecních škol. Třídy se v 6. ročníku nově formují.

Výukový experiment probíhal na druhém stupni ZŠ v 7. a 8. ročníku. Vzhledem k tomu, že byla nutná anonymizace dat o žácích, třídy jsou popsány jako celky. Výukový experiment byl proveden ve třech třídách, ve kterých jsem učila, nebo které jsem měla možnost suplovat. Třídy označím 7.1, 7.2, 8.1.

V třídě 7.1 vyučuji matematiku a fyziku druhým rokem – od přechodu žáků na druhý stupeň. Třída obsahuje 27 dětí, 13 děvčat a 14 chlapců. Průměr třídy z matematiky za 1. čtvrtletí roku 2022 byl 1,60. Jedná se o rozmanitou třídu. Nachází se zde nadaní a šikovní žáci, ale také žáci, kteří potřebují k práci více času. Před distanční výukou jsem řešila to, že někteří žáci pracovali velmi rychle a v hodinách se poté, když měli vše hotové, nudili (zlobili, povídali si apod.). Problém jsem řešila přípravou logických hádanek a těžších úloh z různých IQ testů, olympiád, které jsem rychlejším žákům po vypracování látky z hodiny dávala. Žáky připravené hádanky a logické úlohy bavily, snažili se vše mít brzy hotové, aby už mohli řešit něco dalšího.

Z 27 žáků třídy 7.1 bych zařadila (pouze dle subjektivního názoru) cca 10 žáků do kategorie v matematice kreativních, zvídavých a nadaných žáků bez potřeby „nacvičeného“ postupu, kterým velmi vyhovují Hejného úlohy založené na řešení nestandardních úloh a budování sítě mentálních matematických schémat. Tito žáci jsou v hodinách aktivní a rádi prezentují svá řešení a diskutují se spolužáky. Na rozdíl od tříd 7.2 a 8.1 jsou žáci v této třídě obeznámeni s nestandardními i otevřenými úlohami.

S třídou 7.2 jsem měla možnost se ve školním roce 2021/2022 setkávat při hodinách zeměpisu. Třída se skládá z 26 žáků, z nichž je 13 dívek a 13 chlapců. V matematice jsem zaznamenala, že žáci jsou vedeni k procvičování a správnému zápisu. Mají všechny úlohy a výsledky přehledně zapsané a snaží se důsledně dodržovat stanovené postupy. Někteří žáci se obávají škrtnout něco, co si zapsali, a raději nechají všechny kroky a výsledky v písemkách. Mám pocit, že někteří žáci z této třídy potřebují více podnětů k vymýšlení svých vlastních řešení a nejsou tak kreativní jako někteří z mých žáků v jiných třídách. Přestože jsou žáci z této třídy dobře naučeni na správný zápis a postupy, někdy se zdá, že jim chybí schopnost aplikovat matematické postupy na nestandardní úlohy.

Na závěr popíšu třídu 8.1, kterou jsem měla možnost učit v roce 2021/2022 fyziku. Jedná se o skupinu žáků, kteří jsou poměrně aktivní a mají dle mého názoru široký rozhled, ale zároveň jsou někdy dosti neorganizovaní. Třída obsahuje 25 žáků, z toho 10 dívek a 15 chlapců. V průběhu výuky jsem si s nimi vytvořila dobrý vztah, dokážeme spolu dobře komunikovat a tvořit příjemnou atmosféru ve třídě. Co se týče výuky fyziky, třída je v dobrém tempu, stíháme plnit všechny náležitosti a vysvětluji jim složitější fyzikální koncepty tak, aby jim dobře porozuměli. Někteří žáci se aktivně účastní výuky, střídají se v otázkách a snaží se spolupracovat s ostatními spolužáky. V matematice byli žáci oproti tematickým plánům pozadu, a to kvůli dlouhodobé absenci jejich učitelky matematiky. Díky tomu jsem se dostala k možnosti častěji suplovat třídu 8.1 na matematiku a vyzkoušet s nimi i metodické materiály.

3.1.4 Vlastní pedagogická praxe

Jako učitelka matematiky na 2. stupni základní školy jsem působila 2 roky a 4 měsíce. Má pedagogická praxe na 21. základní škole v Plzni začala 1. 5. 2020 a trvala do 31. 8. 2022. Své povinné praxe v rámci studia na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy jsem plnila právě na 21. základní škole v Plzni a pak na Střední odborné škole ve Strakonicích. Během studií jsem poskytovala jak soukromé doučování jednotlivců, tak doučování jednotlivců organizované 21. základní školou v Plzni a také Pedagogickou fakultou Univerzity Karlovy pod vedením Antonína Jančaříka.

Ve výuce matematiky nemám prozatím nalezené své zaručené postupy a metody, ale snažím se aplikovat znalosti nabyté v hodinách didaktiky matematiky a inspiruji se rozbory videonahrávek z různých zemí světa (např. japonskými hodinami). Snažím se využívat konceptu konstruktivistické výuky (ráda bych se zdokonalovala v tomto směru) a v matematice pravidelně začleňuji úlohy z učebnic matematiky Hejného metodou pro 2. stupeň ZŠ (máme učebnice A, B, C, D) nebo tipů z webu Hejného metoda (dostupné z: https://www.h-mat.cz/2stupen). Na 21. ZŠ v Plzni Hejného metodu na druhém stupni vyučující matematiky nepoužívají. Tematické plány jsou vytvořeny dle učebnic Matematika od autorů Odvárka a Kadlečka z nakladatelství Prometheus.

Má pedagogická praxe v době výukového experimentu byla krátká, pouze dvouletá, proto jsem očekávala, že má implementace slovních úloh dle metodických listů může být zatížená chybou, která by se zkušenějším učitelům nemusela stát. Proto je součástí této diplomové práce i osobní reflexe.

3.1.5 Výběr úloh a příprava experimentu

Úlohy pro pilotáž byly vybrány z metodického materiálu typu Porovnávání poskytnutého Naďou Vondrovou z Katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy tak, aby zapadaly do tematického plánu daného ročníku.

Pro první pilotáž jsem vybrala slovní úlohu Irena, dále úlohy Plachetnice a Dojíždění. Všechny slovní úlohy korespondovaly s tematickými plány 7. ročníku. Nejednoznačná formulace slovní úlohy Irena, dle mého názoru dávala příležitost pro diskusi a rozvoj komunikační kompetence žáků. Úloha Plachetnice následovala po tématu přímé a nepřímé úměrnosti. Úloha mě zaujala pro své dlouhé zadání s nadbytečnými nečíselnými informacemi a zároveň je vhodným procvičením přímé úměrnosti. Poslední úloha Dojíždění obsahuje mnoho nadbytečných informací a klíčový číselný údaj zadaný slovně (pětina času). V této úloze také žáci převádí jednotky času, což pro nás byl přesah i do předmětu fyzika, kde převody jednotek žáci v 6. a 7. ročníku procvičují. Použití poměru je také součástí tematických plánů 7. ročníku. Zadání úloh uvádím níže:

Irena: Irena řeší test. Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek, při kontrole pak ještě další šestinu. Dohromady tak vyřešila 22 otázek. Z kolika otázek se skládá celý test?

Plachetnice: Firma Sea4you provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?

Dojíždění: Pan Novák má novou, dobře placenou práci na protilehlém konci města u elektrotechnické firmy Elektra. Každý den musí projet kopcovité serpentiny a cestou tam překonat i značné převýšení. Jako technik si spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu drahocenného času méně než cesta na jeho novém trekingovém kole. Město bylo bohatě protkáno sítí cyklistických stezek a výborně fungovaly i autobusové linky. Protože bylo slunečné počasí, prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém novém kole. Na svých prvních cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut, což se mu zdálo být zbytečně moc. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?

Materiál se skládá ze dvou částí: z části pro učitele a z části, která je určena k vytištění pro žáky (příklad je na obrázku 4 a 5).

Část pro učitele obsahuje zadání slovní úlohy, podrobný popis slovní úlohy a vysvětlení, z jakého důvodu může být pro žáky úloha obtížná (nejednoznačná formulace, nadbytek informací aj.), dále otázky k jazykovým charakteristikám, které slouží pro lepší pochopení struktury slovní úlohy a upřesnění významu některých slov. Dále materiál obsahuje rozbor porovnání řešení dvou karikatur/fiktivních kreslených postaviček založených na konceptu *concept cartoons* (obrázek 1). V závěru metodického listu najdeme tipy na další návaznou práci.

Část pro žáky obsahuje zadání slovní úlohy a řešení dvou fiktivních postaviček. Dle metodického doporučení jsem žákům nejprve prezentovala zadání úlohy a následně až porovnávání řešení kreslených fiktivních postaviček.

Firma Sea4you provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?

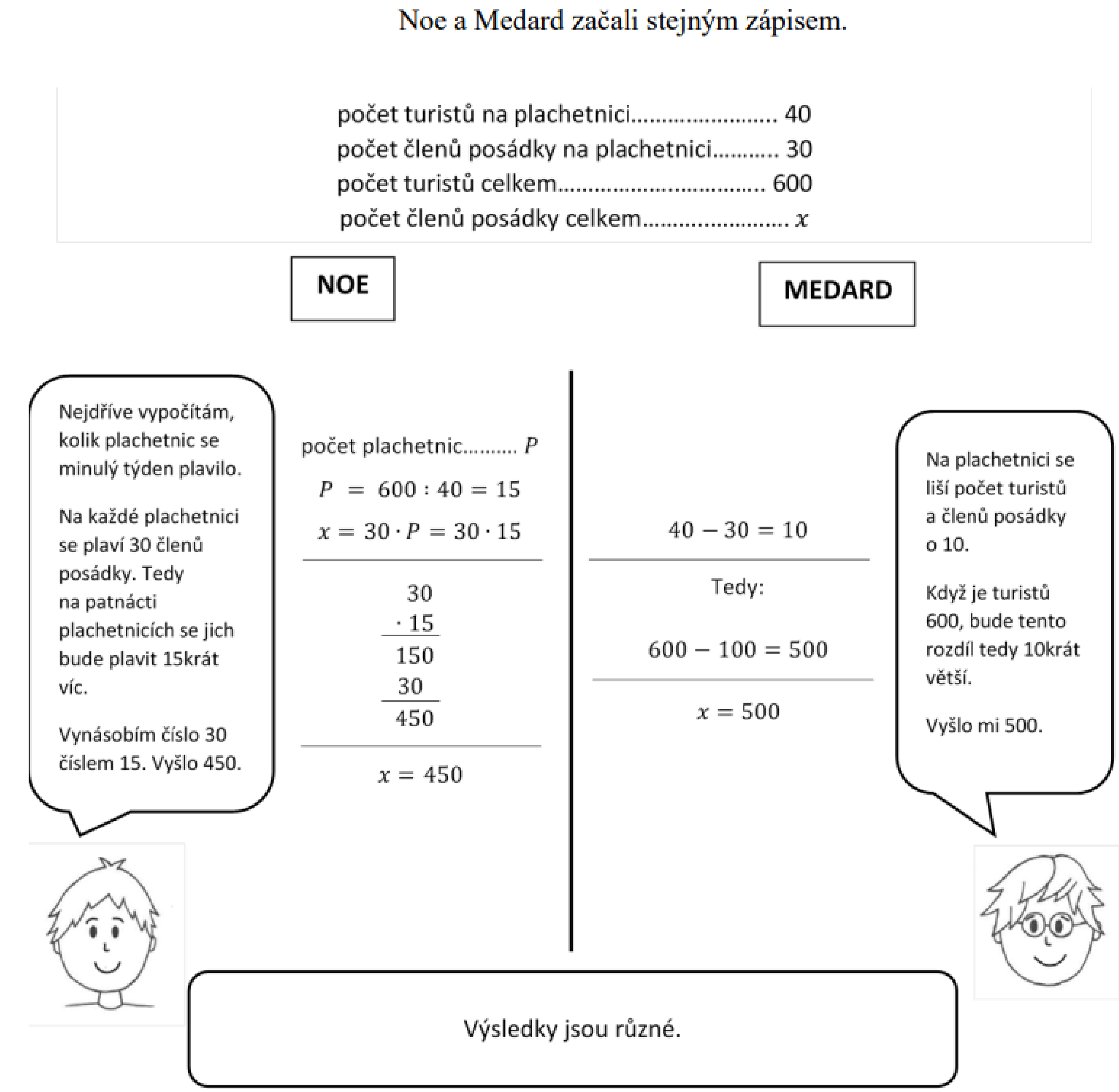
Obrázek 4 – Zadání slovní úlohy Plachetnice. Zdroj: Metodický materiál typu Porovnávání

3.1.6 Způsob implementace slovní úlohy

Každá slovní úloha byla naplánována na celou vyučovací hodinu (45 min), s přihlédnutím na opakování potřebných znalostí na začátku vyučovací hodiny.

Postup byl zvolen dle návodu metodického materiálu. Vyučovací hodina byla rozdělena do tří částí:

- Společný rozbor textu úlohy
- Porovnávání řešení
- Společná práce a shrnutí



Obrázek 5 – Porovnávání řešení. Zdroj: Metodický materiál typu porovnávání

Metodický materiál doporučuje ještě další návaznou práci, protože je důležité, aby si žáci poznatky, které získali v průběhu hodiny, ještě upevnili tím, že je sami použijí v nějakém kontextu.

První část: Společný rozbor textu úlohy

První část je adresována jak učitelům matematiky, tak učitelům českého jazyka (metodické materiály jsou určeny i pro tandemovou výuku učitelů obou předmětů). Obsahuje jazykové charakteristiky, které směřují na podnětnou výuku formou diskuse, a to v hodině českého jazyka či matematiky. Cílem je, aby žáci dostatečně porozuměli kontextu i jazykovým charakteristikám, a mohli si tak vytvořit situační model úlohy. Pro správné řešení je podstatné, aby žák porozuměl informacím a tomu, jaké jsou mezi nimi vztahy.

Po konzultaci s učitelkou českého jazyka jsem se rozhodla začlenit do výuky i otázky jazykového charakteru. S ohledem na tematické plány daných ročníků a s využitím cenných rad a zkušeností učitelky českého jazyka jsem zvolila podobné či stejné otázky jako v materiálu určeného pro pilotáž. Důraz jsem plánovala klást i na otázky k metakognici, např. „Myslíš si, že úlohu dokážeš vyřešit?“, které jsem ze svého pohledu považovala za neméně důležité.

Druhá část: Pokus o řešení

Žáci jsou vyzváni, aby úlohu individuálně řešili či se ji pokusili řešit. Cílem této části je, aby lépe porozuměli hypotetickému řešení kreslených postaviček předloženému v následující části. Snahu žáků jsem plánovala podporovat otázkami/cvičeními typu: „Podtrhni informace, které jsou nadbytečné pro řešení úlohy.“

Třetí část: Porovnávání řešení

Tato část je klíčová. Žákům jsou do dvojic rozdána řešení kreslených postaviček. Mohou to být správná i nesprávná řešení či jejich kombinace. Cílem aktivity je navodit proces porovnávání. K tomuto procesu žáky navádíme vhodnými otázkami typu: „Porovnej řešení kreslených postaviček se svým řešením úlohy.“, „Kdo řeší úlohu správně?“, „K jakému postupu se přikláníš?“. Tato část byla implementována nejprve prací ve dvojicích a poté formou společné třídní diskuse. Žáci následně písemně shrnují své myšlenky do sešitu.

Bylo náročné zachytit, jak žáci řešení porovnávali, protože bylo pro žáky těžké adekvátně zapsat své myšlenky. Bohužel jsem nemohla kvůli GDPR použít video či audionahrávky, aby bylo možné získat více informací o práci žáků. Tak došlo k tomu, že jsem řadu cenných nápadů nezaznamenala.

Čtvrtá část: Společná práce a shrnutí

Každá úloha je zaměřena na jinou problémovou část slovních úloh (přemíra informací, dlouhý text, nejednoznačné zadání). Cílem poslední části je, aby si žáci uvědomili poselství dané úlohy a hodiny matematiky. Autoři metodického materiálu doporučují navazující práci, např. vytvoření podobných úloh samotnými žáky či v dalších hodinách zopakování představených strategií (např. řešení pomocí obrázku).

3.2 Průběh a stručné vyhodnocení výukových experimentů

3.2.1 První hodina ve třídě 7.1

Pro první implementaci jsem zvolila slovní úlohu s názvem Irena (příloha 1), která obsahovala zlomky. Tematické plány 6. ročníku obsahují téma zlomků v průběhu měsíců září až listopad a v 7. ročníku se zavádějí celá čísla a racionální čísla, tj. nadále se se zlomky pracuje i v průběhu celého roku.

Žáci dostali zadanou slovní úlohu:

„Irena řeší test. Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek, při kontrole pak ještě další šestinu. Dohromady vyřešila 22 otázek. Z kolika otázek se skládá celý test?“ (Vondrová a kol., 2019, s. 171).

Nejprve si měli úlohu opsat do sešitu a poté samostatně přečíst. Následovala první část práce s metodickým listem, jazykové otázky a otázky k metakognici. Každou společně, ve dvojicích i samostatně probranou otázku si žáci měli zapsat do sešitu. Některé žákovské odpovědi jsou uvedené níže (obrázek 6). Postupně se vyjádřím k jednotlivým otázkám.

- Myslíš si, že úlohu dokážeš vyřešit?

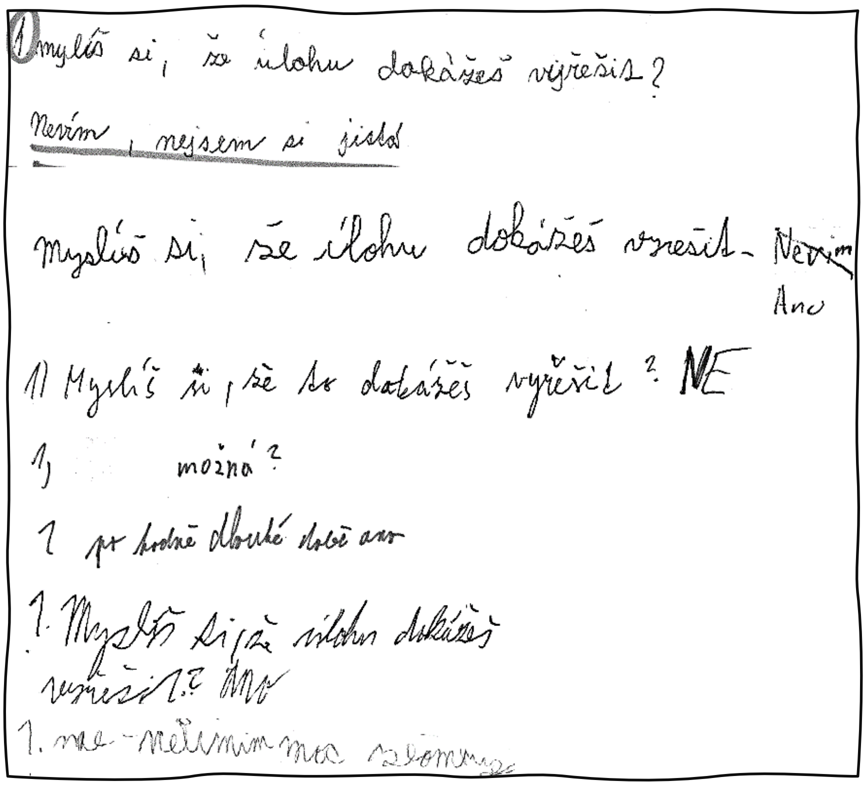
40 % žáků uvedlo, že úlohu nedokáže vyřešit, a následně úlohu vyřešilo 52 % žáků. Zjištění poukazuje na malé sebevědomí žáků v matematice. U některých žáků byla vidět nejistota (obrázek 6), zda úlohu dokážou vyřešit („Možná?“, „Nevím, nejsem si jistá.“ „Ne, neumím moc zlomky.“), ještě před samotným pokusem. Tato otázka mi ukázala důležitost posilování žákovského sebevědomí a také nepřímo důležitost správné práce s chybou.

Tabulka 1 – Odpovědi na otázku k metakognici

Dokážeš úlohu vyřešit?			Žákovská řešení		
Počet žáků	25	100 %	Počet žáků	25	100 %
Ano	10	40 %	Vyřešil/a	13	52 %
Ne	11	44 %	Nevyřešil/a	2	9 %
Nevím	4	16 %	Pokusil/a se o řešení, ale nevyřešil/a	10	39 %

Dále následovaly otázky:

- Je Ti text jasný?
- Je zadání slovní úlohy jednoznačné?



Obrázek 6 – Vybrané žákovské odpovědi na otázku k metakognici

Tabulka 2 – Jednoznačnost zadání slovní úlohy. Žákovské odpovědi

Je zadání slovní úlohy jednoznačné?		
Počet žáků	25	100 %
Ano	3	12 %
Ne	14	56 %
Nevím	5	20 %
Nevím, co znamená slovo jednoznačné	3	12 %

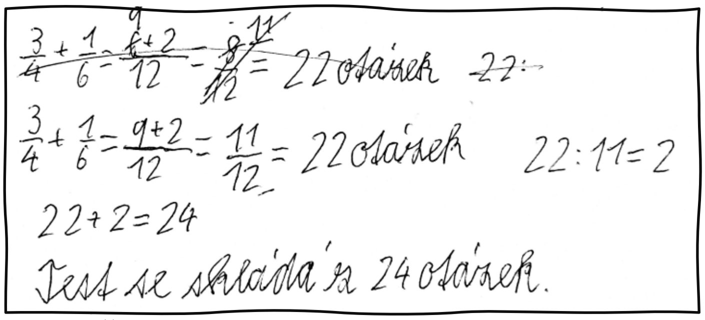
Autoři metodického materiálu uvádějí, že zadaná slovní úloha je typickou úlohou se znaky nedořečenosti a neexplicitnosti. Nejednoznačná formulace souvětí předpokládala dvojí výklad úlohy. Nadpoloviční většina žáků danou nejednoznačnost odhalila díky vhodně položené otázce (očekávali zádrhel). Využili jsme příležitost k diskusi a doplnili souvětí tak, aby bylo zadání jednoznačné. Zvolili jsme možnost „další šestinu ze všech otázek“. Neočekávaným překvapením pro mě bylo zjištění, že 3 žáci nevěděli, co znamená slovo jednoznačný.

Jazykové otázky:

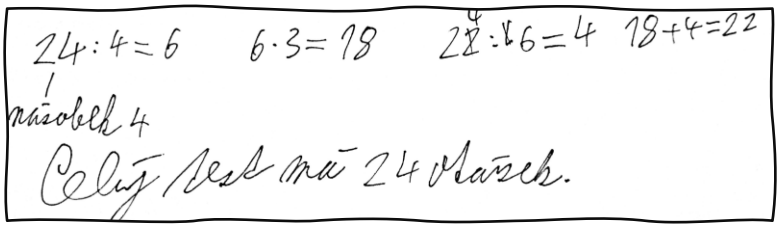
- Do úseku textu *při kontrole pak ještě další šestinu* lze beze změny smyslu slovesa z předchozí věty nejspíš doplnit sloveso a) dořešila, b) vyluštila, c) objasnila, d) posoudila.
- Najdi slovesa vida nedokonavého.

Žáci s jazykovými otázkami neměli problém. Zatím v českém jazyce vid dokonavý a nedokonavý neprobírali, ale ihned pochopili, o co se jedná a otázky zodpověděli správně. Celá tato část nám zabrala přibližně 15 minut.

Po jazykových otázkách následoval pokus o vyřešení úlohy. Žákům jsem nechala 10 minut na řešení úlohy a průběžně kontrolovala, zda jsou již hotoví. Úlohy na obrázku 7 až 11 jsem vybrala řešení, která si zaslouží pozornost. Na obrázku 7 je znázorněna jedna ze správných strategií, jak vyřešit slovní úlohu. Z didaktického hlediska je zde zajímavé použití symbolu „rovná se“ jakožto symbolu rovnosti dvou objektů "$\frac{11}{12}$ z neznámého počtu otázek = 22“, ale také aritmetického postupu.

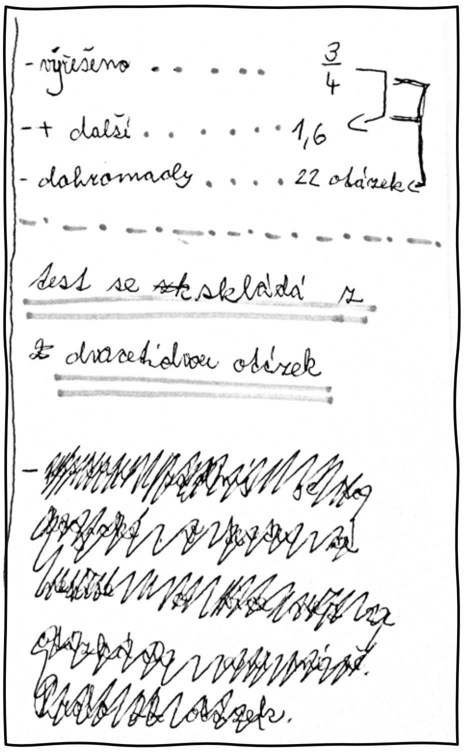


Obrázek 7 – Úloha Irena. Žákovské řešení č. 1

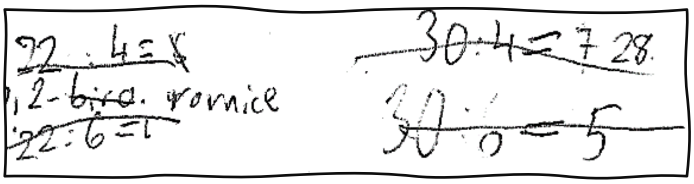


Obrázek 8 – Úloha Irena. Žákovské řešení č. 2

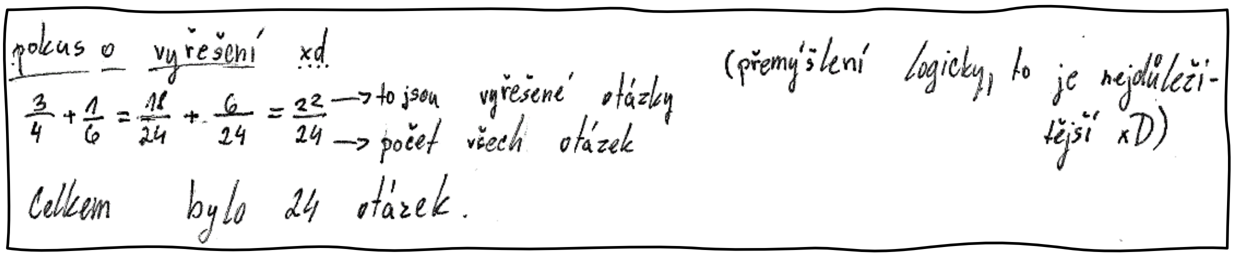
Na obrázku 8 si žák „tipnul“ číslo 24, protože dle jeho vysvětlení bylo násobkem čísla 4 a $\frac{3}{4}$ ze všech otázek je 18 otázek a $\frac{1}{6}$ jsou 4 otázky. Dohromady mu vyšlo 22 otázek, stejný počet, jaký je napsán v zadání. Tento způsob řešení bych zařadila mezi experimentování, které je v matematice také potřeba. Žák porozuměl konceptu úlohy, ale také měl štěstí, že vše vychází na první pokus. Mezi další příklad experimentování lze zařadit žákovské řešení č. 4 (obrázek 10), kde po několika pokusech žák svou snahu vzdává. Jako poslední uvádím řešení, které není správné a kde si žákyně nevytvořila správný situační model slovní úlohy (obrázek 9). Když jsem se zeptala na postup, jak dospěla k odpovědi „Test se skládá z dvaceti dvou otázek.“, odpověděla: „Postup žádný, je to logické, v textu se nepíše o více než dvaceti dvou otázkách ani méně. Proto dvacet dva otázek.“



Obrázek 9 – Úloha Irena. Žákovské řešení č. 3



Obrázek 10 – Úloha Irena. Žákovské řešení č. 4



Obrázek 11 – Úloha Irena. Žákovské řešení č. 5

Žákyně (obrázek 11) udělala chybu v násobení při převodu zlomků $\frac{3}{4}$ a $\frac{1}{6}$ na společný jmenovatel, ale následně počítala s číslem 6, jako by to bylo číslo 4. Avšak úvahu při řešení slovní úlohy zvolila správnou: 22 vyřešených otázek se rovná $\frac{22}{24}$. Své řešení podpořila slovy: „Přemýšlení logicky, to je nejdůležitější. Stačí použít selský rozum.“ Žákyně i přes chybu (troufám si říct pouze v zápisu čísla) slovní úloze rozuměla a viděla, jak nalezne výsledek.

Následně jsem žákům do dvojic předložila kopie pracovního listu, kde bylo řešení Kazi a Bivoje, a vyzvala jsem je: „Pozorně si přečtěte řešení Kazi a Bivoje. Je vaše řešení stejné nebo podobné jako řešení postaviček? Které z představených řešení je pro vás lepší a proč?“ Na porovnávání řešení jsem nechala 10 minut. Žáci nejprve porovnali své řešení s řešením postaviček a poté ve dvojicích diskutovali o tom, které z představených řešení je pro ně tzv. lepší a proč. Při rozdávání pracovního listu jsem zaznamenala posměšné reakce některých žáků na jména Kazi a Bivoj. Jména jsou to netypická, znají je pouze z bájí a pověstí, tudíž vzbudila nepřiměřenou reakci ve třídě.

Žáci ještě neuměli pracovat s rovnicemi, pomocí kterých úlohu řešil Bivoj, tudíž Bivojovo řešení pro ně bylo komplikované. Většinově zvolili jako lepší strategii k vyřešení slovní úlohy Kazi: „Lepší na pochopení.“, „Kazi, Bivoj to počítal nějak divně.“, „Moc to Bivojovo nechápu.“, „Kazi, protože rovnice jsme se neučili.“, „Kazi, nemám rád rovnice.“, „Kazi, je jednodušší.“, „Kazi, začala jsem sčítat zlomky jako první.“, „Kazi to vyřešila přehledněji.“.

Závěrem hodiny jsme shrnuli práci s materiálem. V případě řešení Kazi jsem zdůraznila možnost použít schéma, které žákům může pomoci v řešení úlohy. Dále jsem žákům položila otázku (odpovědi níže), jak se jim dnes v hodině matematiky pracovalo. Celá tato závěrečná část trvala 5 minut.

Souhrnně lze říci, že žáci neměli při práci s metodickým materiálem potíže. Jejich pozornost vydržela po celou dobu práce (40 minut). K tomu mohlo přispět i to, že materiál je uzpůsobený tak, aby se střídaly jednotlivé úkoly i otázky na porozumění s jazykovou částí, porovnáváním řešení, s individuální prací žáka (řešení úlohy), dále i práce ve dvojících a třídní diskuse. Na otázku: „Jak se mi dnes pracovalo?“ žáci odpovídali: „Skvěle.“, „Šlo to, až na to, že tam byla čeština a matika.“, „Dobře, bavilo mě to – naučil jsem se vypočítat příklad.“, „Bylo to lehké = volná hodina.“, „Pracovalo se mi dobře, protože jsem zpátky.“

(Z karantény zpět ve škole.), „Kromě mé nejistoty a schopnosti věci nepochopit, nebo nad nimi až moc přemýšlet, ale jo asi vcelku dobrý.“, „80 % dobře, 20 % špatně.“, „Dobře, měla jsem to skoro dobře.“.

Pro mě byla práce s metodickým materiálem hodnotná a obohacující. Navrhované otázky i struktura materiálu dle mého názoru přispěly k lepšímu porozumění zadání slovní úlohy. Pozitivně hodnotím také to, že s tímto typem úloh na porovnávání žáci nezažívají neúspěch. I přestože žákyně nevyřešila úlohu, pracovalo se jí dobře („Dobře, měla jsem to skoro dobře.“) a řešení zpracovala podle Kazi.

Ve srovnání s mou běžnou vyučovací hodinou jsem pozorovala, že úroveň zapojení žáků, motivace k učení, komunikace a subjektivní pocit byli lepší. Žáci se do hodiny zapojovali častěji (především při diskusi ve dvojicích při porovnávání řešení), více komunikovali a dle odpovědi na otázku: „Jak se mi dnes pracovalo?“ byl jejich pocit z této hodiny pozitivní. Motivace k učení se vyhodnocuje obtížně, avšak dle mého subjektivního názoru byli žáci motivováni více díky novému (a tím pro ně zajímavému) konceptu hodiny. Jedinou výtku mám sama na sebe, že jsem nevyužila potenciálu návazných úloh (např. zadat žákům další podobnou úlohu do příští hodiny, nebo jako domácí úkol).

3.2.2 Druhá hodina ve třídě 7.1

Jako druhou jsem si zvolila úlohu s názvem Plachetnice (příloha 1), která obsahuje velké množství nadbytečných informací. Má strukturu přímé úměrnosti, se kterou jsme se již v 7. ročníku v hodinách matematiky setkali. Úloha je však formulována tak, že na první pohled žáci nemusí strukturu přímé úměrnosti odhalit. Dále obsahuje srozumitelný, ne však žákům příliš blízký kontext. Někteří neměli možnost se plavit na plachetnici, plachetnici mohou znát např. jen z filmů. Žáci dostali do dvojic papír s vytištěnou zadanou slovní úlohou:

„Firma Sea4you provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?“ (Vondrová a kol., 2019, s. 394–395).

Nejprve si zadání přečetli ve dvojicích a poté dostali úkol:

- Vyškrtni v textu pasáže, které nepotřebuješ znát k vyřešení úlohy. Úlohu zkrať tak, abys nevynechal žádné informace, které jsou potřebné pro vyřešení úlohy, a zároveň abys odstranil všechny informace nadbytečné.

Některé žákovské odpovědi jsou na obrázku 12. Úloha obsahovala pouze tři číselné údaje, tudíž najít potřebné informace k vyřešení úlohy žákům nedělalo velké potíže. Většinově vyškrtali všechny údaje až na: 40 turistů, 30 členů posádky, 600 turistů, kolik členů posádky? I přesto se některým (obrázek 13) podařilo údaje poplést (zde bych dodala, že se tak stalo zřejmě kvůli malému soustředění).

Dále následovaly jazyková otázky zvolené dle metodického materiálu a otázka na představu plachetnice:

- Jak si představuješ luxusní plachetnici? (Ilustrace viz obrázek 14)
- Rozhodni o každém tvrzení, zda jednoznačně vyplývá ze zadání úlohy, či nikoli.

  A) Na každého turistu na jedné plachetnici připadá 30 členů posádky.

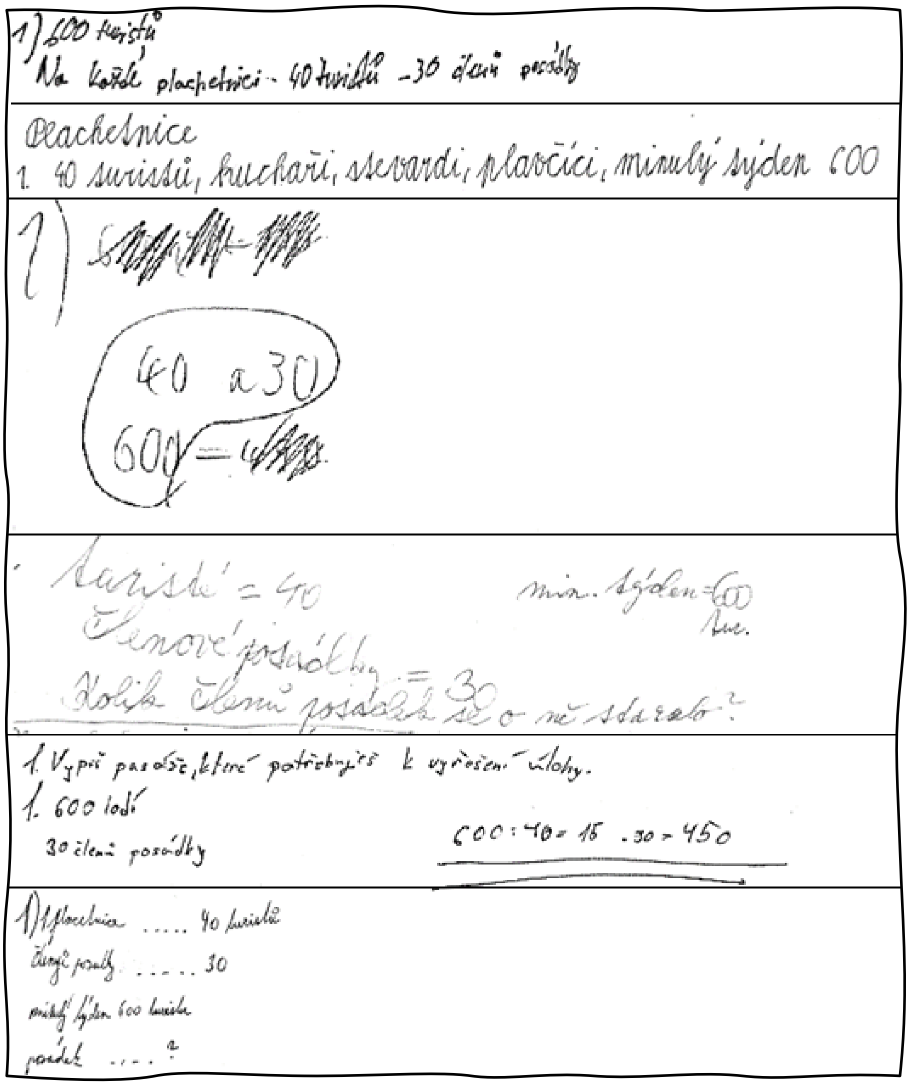
  B) Na péči o 40 turistů na jedné lodi je třeba 30 členů posádky.

  C) Minulý týden se turisté plavili na celkem 15 luxusních plachetnicích.

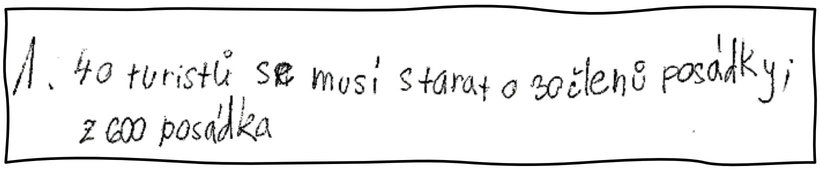
  D) O zákazníky se stará celkem pět různých profesí.

O pravdivosti jednotlivých tvrzení jsme rozhodovali společně formou hlasování (nabízelo se hlasování kvůli odpovědím ano/ne). Náhodně vybraný žák se správným řešením vysvětlil svou odpověď třídě a následně si spolužáci napsali správnou odpověď, jak lze vidět na obrázku 15.

Po rozebrání jazykové stránky úlohy (potřebné informace, pravdivá tvrzení) následoval pokus o samostatné řešení slovní úlohy. Jazyková stránka úlohy společně s kreslením či popisem plachetnice trvala přibližně 12 minut. Žáci se úkolu zkrátit úlohu zmocnili ve dvojicích, a byli tak rychlejší než při práci samostatně. Na samotné řešení jsem žákům nechala opět kolem 10 minut. Někteří byli velmi rychle hotovi, ale čekala jsem na všechny žáky ve třídě.

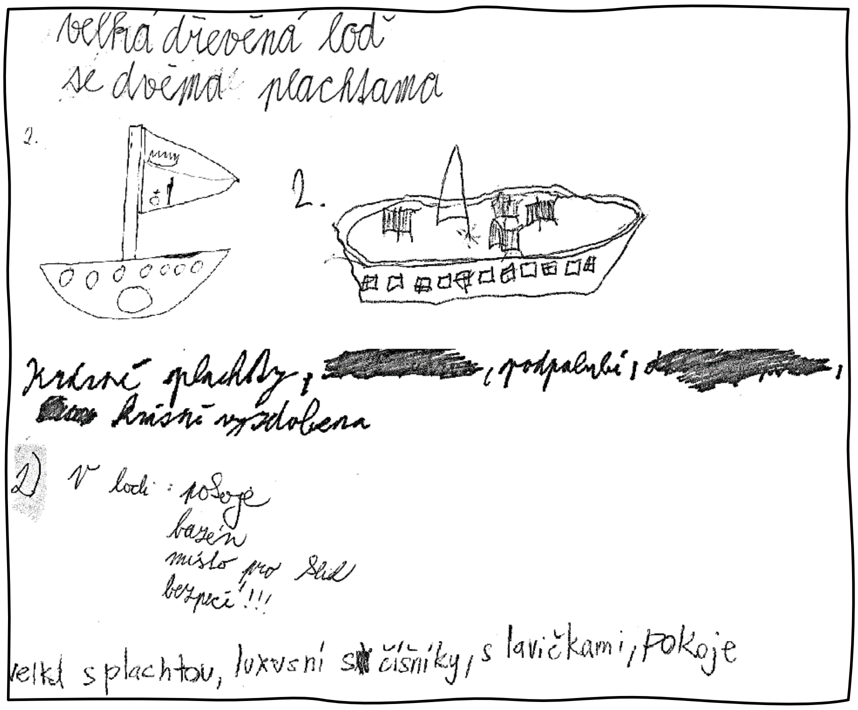


Obrázek 12 – Plachetnice. Důležité údaje k vyřešení sl. úlohy. Vybrané žákovské odpovědi

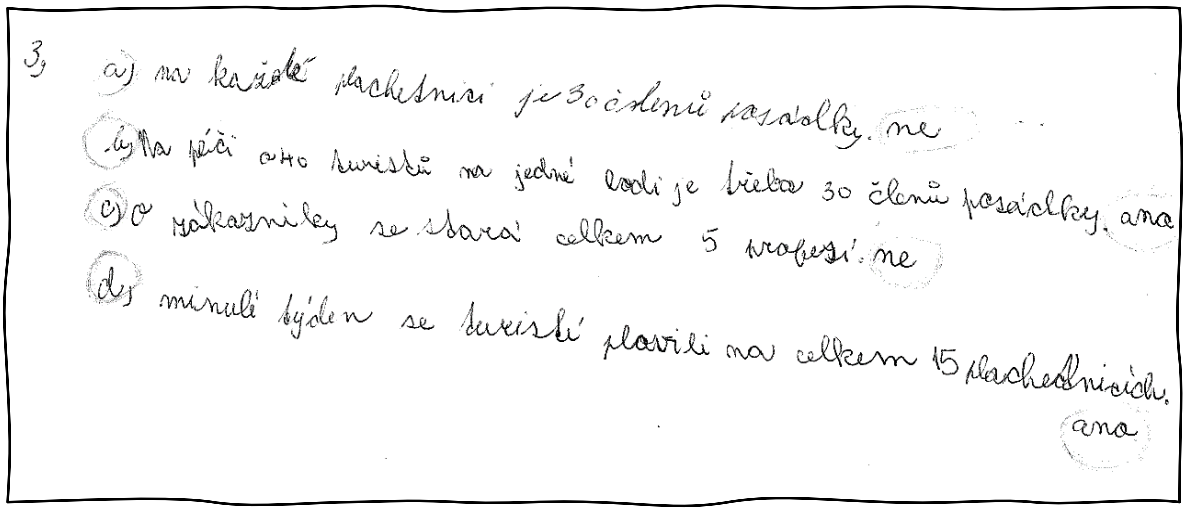


Obrázek 13 – Plachetnice Důležité údaje k vyřešení sl. úlohy. Chybná žákovská odpověď

Přibližně po 10 minutách jsme zkontrolovali řešení úlohy Plachetnice. Některá žákovská řešení lze nalézt na obrázkách 16 a 17. Při analýze žákovských řešení úlohy jsem si všimla, že někteří žáci nepoužívají správný zápis „rovná se“ v kontextu rovnosti (obrázek 16). Místo toho, aby tento symbol používali v případě rovnosti dvou objektů, stran rovnice apod., používají ho jako symbol pro pokračování, algebraickou operaci nebo něco jiného.

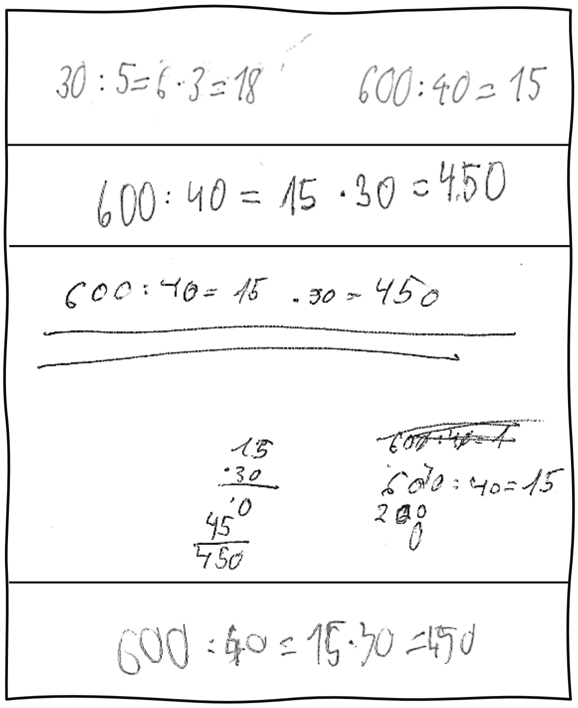


Obrázek 14 – Představa luxusní plachetnice. Vybrané žákovské odpovědi

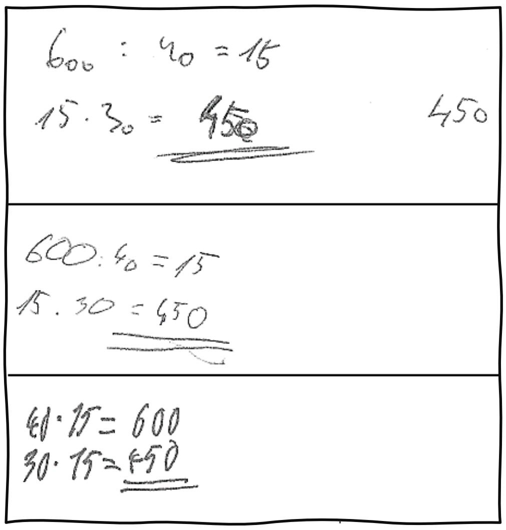


Obrázek 15 – Plachetnice. Rozhodni o každém tvrzení, zda jednoznačně vyplývá ze zadání sl. úlohy. Příklad žákovského řešení

Tento zápis by mohl bránit žákům v úspěšném řešení slovních úloh v budoucnosti a měli bychom mu věnovat více pozornosti, aby se žáci naučili porozumět matematické symbolice a zápisům. Práce obsahující správný zápis výpočtu jsou uvedeny na obrázku 17.



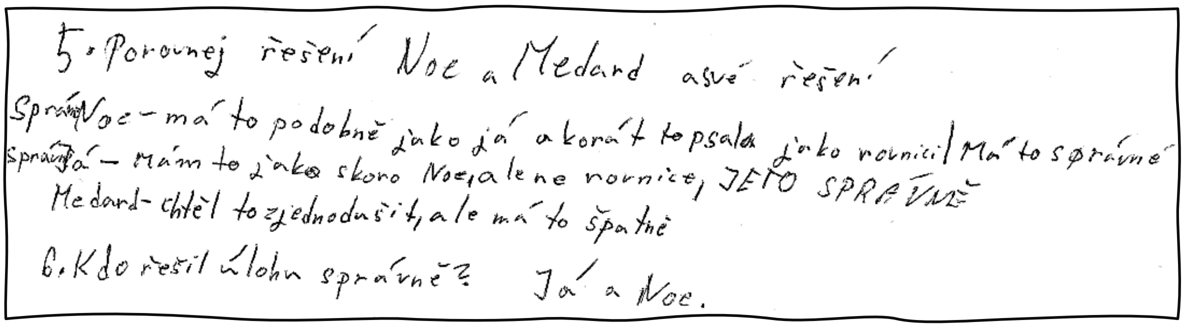
Obrázek 16 – Žákovské práce



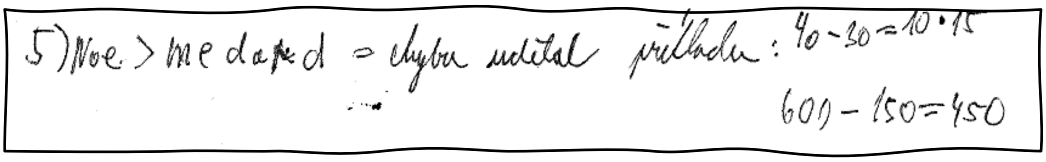
Obrázek 17 – Žákovské práce

Poté jsme přistoupili k procesu porovnávání řešení Noe a Medarda. Výsledky postaviček byly různé, tak jsem žákům nechala více času. Aktivita nám zabrala 15 minut. Netypická jména Noe a Medard opět vzbudila lehký rozruch ve třídě.

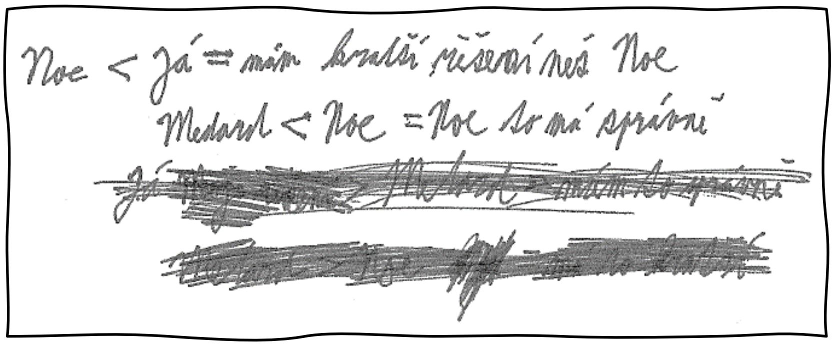
V této úloze je nutné pochopit princip přímé úměrnosti a poměru. Noe úlohu řeší správně, když uvažuje, že počet členů posádky bude odpovídat nějakému násobku počtu turistů, kteří se plavili minulý týden. Na druhou stranu Medard chybně předpokládá lineární vztah mezi počtem turistů a členů posádky, který se mění pouze o konstantní hodnotu. Medard nepoužil správně poměr a pouze odečetl čísla. Tato chyba je dle metodických materiálů u žáků poměrně častá, ale v průběhu hodiny jsem se s touto chybou nesetkala. Obrázky 18, 19 a 20 ilustrují, jak žáci porovnávali řešení.



Obrázek 18 – Plachetnice. Porovnávání řešení č. 1



Obrázek 19 – Plachetnice. Porovnávání řešení č. 2



Obrázek 20 – Plachetnice. Porovnávání řešení č. 3

V tomto případě žáci neměli problém se samotným řešením úlohy, ale s tím, jak vysvětlit, že řešení Medarda je chybné. Jeden žák uvedl: „Myslím si, že [řešení] Medarda je méně logičtější než Noe, ale uvažoval také dobře. Více $40 - 30 = 10$, ale pak nechápu, že skončil na 100.“ Medard své řešení vysvětluje takto: „Na plachetnici se liší počet turistů a členů posádky o 10. Když je turistů 600, bude tento rozdíl tedy 10krát větší. Vyšlo mi 500.“ Žáci většinově nerozuměli, jak Medard přišel na tvrzení „Když je turistů 600, bude tento rozdíl 10krát větší.“. Další žák se snažil toto řešení vysvětlit následovně: „Medard udělal chybu, že odečetl turisty od posádky, ale zapomněl na počet lodí.“, jiný řekl: „Proč by odečítal turisty od posádky?“

Na otázku, jak se mi dnes pracovalo, odpovídali žáci následovně: „Pracovalo se mi dobře.“, „Bylo to super, protože jsme dělali něco zajímavého a učitelka nám pomáhala, když jsme to potřebovali.“, „Myslím, že to byla docela dobrá hodina, i když jsem se musel hodně soustředit.“, „Ušlo.“, „Docela jsem se nudila, protože už jsme všechno uměli.“, „Měl jsem trochu problém se soustředit, protože jsem myslel na něco jiného, ale nakonec jsem si to užil.“, „Dneska bylo fajn, moc jsme se nenudili a povedlo se mi všechno.“.

Odezva žáků byla tedy spíše pozitivní. Jejich pozornost vydržela téměř celou vyučovací hodinu. Kromě toho byli někteří žáci nadšeni z kreslení luxusní plachetnice, což bylo přínosem pro jejich kreativitu (obrázek 14). Nicméně, i když tuto hodinu zvládli dobře, stále potřebují další trénink a podporu, aby si na práci s těmito materiály zvykli. Především v části porovnávání se objevily odpovědi, které nesouvisely s úkolem nebo byly velmi povrchní, bez zájmu o porozumění rozdílnosti řešení. Uvedu některé příklady odpovědí na otázku „Které řešení [Noe nebo Medarda] je lepší a proč?“: „Noe je inteligentnější.“, „Medard neumí počítat.“, „Noe má větší mozek.“. Tyto komentáře se objevily v menším množství, ale mé očekávání bylo, že žáci zkusí porovnat řešení analytičtěji.

Úroveň zapojení, motivace k učení, komunikace a subjektivní pocit žáků byly shodné s první pilotní hodinou. Můj subjektivní pocit z použití metodických materiálů se ještě zlepšil. Cítila jsem se jistější a měla jsem více času se pohybovat ve třídě a kontrolovat práci žáků či moderovat jejich diskusi.

3.2.3 Třetí hodina ve třídě 7.1

Pro třetí vyučovací hodinu zaměřenou na slovní úlohy z metodického materiálu jsem pro žáky připravila vytištěné otázky k úloze i samotnou úlohu (obrázek 21) tak, aby mohli v textu podtrhávat, či vyškrtávat nadbytečné informace. Úloha s názvem Dojíždění (příloha 1) je určena pro 7. a 8. ročník, protože obsahuje velké množství informací, zadání úlohy je dlouhé a žáci musí ovládat převody jednotek času i poměr. I přestože žáci úlohu nemuseli přepisovat do sešitu a na otázky odpovídali přímo (po diskusi zapsali, co si myslí, že je nejvhodnější), úloha nám zabrala celou vyučovací hodinu.

Úloha Dojíždění zní takto:

„Pan Novák má novou, dobře placenou práci na protilehlém konci města u elektrotechnické firmy Elektra. Každý den musí projet kopcovité serpentiny a cestou tam překonat i značné převýšení. Jako technik si snadno spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu drahocenného času méně než cesta na jeho novém trekingovém kole. Město bylo bohatě protkáno sítí cyklistických stezek a výborně fungovaly i autobusové linky. Protože bylo slunečné počasí, prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém kole. Na svých prvních cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut, což se mu zdálo být zbytečně moc. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?“ (Vondrová a kol., 2019, s. 375).

Žáci si nejprve úlohu přečetli samostatně a poté ji jeden dobrovolník přečetl všem. Dále jsme pokračovali dle obrázku 21 jazykovými otázkami. Otázky 1 až 5 nám zabraly 20 minut.

1) Uveď synonyma, kterými bys v tomto textu mohl nahradit slova: protilehlém, serpentiny, drahocenného, protkáno.
   Žáci odpovídali např. protilehlém – opačném, protějším, vzdáleném, druhém; serpentiny – zatáčky, hory, ostré zatáčky, strmé a prudké zatáčky, klikatice, kopce, klikaté cesty, prudké zatáčky; drahocenného – vzácného, drahého, cenného; protkáno – propleteno, propojeno, rozmístěno, zasíťováno, provázáno, spojeno.
2) Napiš svými slovy, co znamená slovo převýšení. Své řešení ověř ve slovníku nebo na internetu. Opět uvádím některá žákovská řešení: rozdíl výšek dvou bodů, když jsme ve výšce např. 346 m. n. m. a stoupáme na 546 m. n. m., tak 200 m je převýšení, 2 body jsou v jiné nadmořské výšce, náhlá změna tlaku a n. m. výšky v dvou rozdílných bodech, když pomalu stoupáš výš, vyjíždět stále výš a níž, do kopce a z kopce. Nakonec jsme se shodli na definici: rozdíl výšek dvou bodů.
3) Vyjádři číslem slovo pětina.

Zapsat číslem slovo „pětina“ nedělalo žákům žádné potíže. Ve výuce matematiky v 7. ročníku se věnujeme problematice poměru, procent a desetinných čísel. Žáci jsou v této oblasti matematiky podle mého názoru dobře připraveni a dokáží s těmito matematickými pojmy pracovat. Přesto se objevily některé problémy (obrázek 22). Všechna řešení jsme s žáky diskutovali (0,2; 20 %; $\frac{1}{5}$), přesto někteří zapsali „Zlomek, desetinné číslo, procento.“, „Procenty, desetinná čísla.“ Zajímavý je zápis 1 : 5, který jsme v hodině nediskutovali.

Zápisu jsem si všimla až zpětně, protože se daný žák nepřihlásil. Zápis 1 : 5 není správný pro vyjádření čísla pětina, jelikož se jedná o poměr dvou čísel. Na obrázku 22 jsou uvedené i chybné odpovědi jako např. 1,5 či 5 %. Zde žákovi zápis $\frac{1}{5}$ připomínal 1,5; zřejmě má problém s chápáním zlomků a může být pro něj obtížné porozumět matematickým konceptům souvisejícím se zlomky, poměry a procenty.

Pan Novák má novou, dobře placenou práci na protilehlém konci města u elektrotechnické firmy Elektra. Každý den musí projet kopcovité serpentiny a cestou tam překonat i značné převýšení. Jako technik si snadno spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu drahocenného času méně než cesta na jeho novém trekingovém kole. Město bylo bohatě protkáno sítí cyklistických stezek a výborně fungovaly i autobusové linky. Protože bylo slunečné počasí, prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém kole. Na svých prvních cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut, což se mu zdálo být zbytečně moc. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?

opačném klikatice

1) Uveď synonyma, kterými bys v tomto textu mohl nahradit slova: protilehlém, serpentiny, drahocenného, protkáno. propojeno

vzácného

2) Napiš svými slovy, co znamená slovo převýšení. Své řešení pak ověř ve slovníku nebo na internetu. výškové

3) Vyjádři číslem slovo pětina.

$\frac{1}{5}$ 0,2

4) Jaký způsob cesty do práce je pro pana Nováka časově výhodnější?

MHD

5) Podtrhni ty části úlohy, které jsou pro její řešení nadbytečné. Přeformuluj úlohu tak, aby vyjadřovala stejnou situaci, ale byla stručnější.

6) Řeš slovní úlohu.

6·60= 360+10= 370:5=74 minut · 4 = 296 = 4 h 56 min

7) Porovnej své řešení a řešení Hektora a Achila.

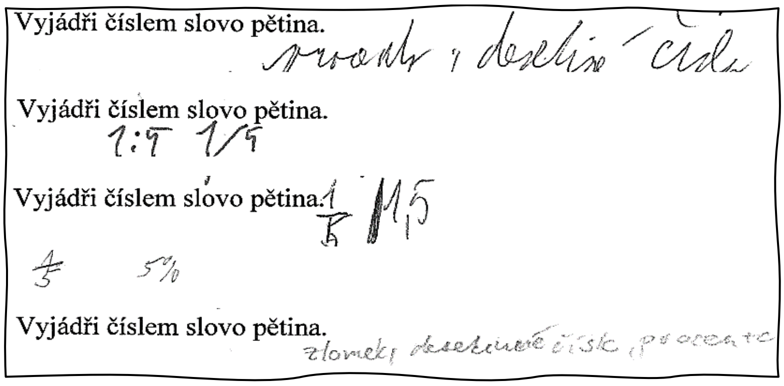
Hektora Achila se to snažili počítat rovnicí, já to počítal klasickým příkladem

Obrázek 21 – Zadání pracovního listu k úloze Dojíždění. Žákovské řešení

4) Jaký způsob cesty do práce je pro pana Nováka časově výhodnější? Na tuto otázku všichni odpovídají městská hromadná doprava (MHD)
5) Podtrhni ty části úlohy, které jsou pro její řešení nadbytečné. Přeformuluj úlohu tak, aby vyjadřovala stejnou situaci, ale byla stručnější.

   Zde mám zkušenost, že žáci podtrhávali spíše méně textu a některé nadbytečné údaje v úloze ponechali. Uvádím řešení jedné žákyně:

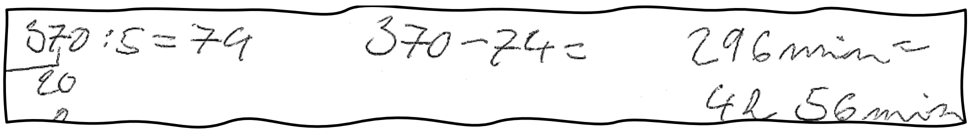
Pan Novák má práci na protilehlém konci města. Snadno si spočítal, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o celou pětinu času méně než cesta na kole. Několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na svém kole. Na svých cestách strávil přesně 6 hodin a 10 minut. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?



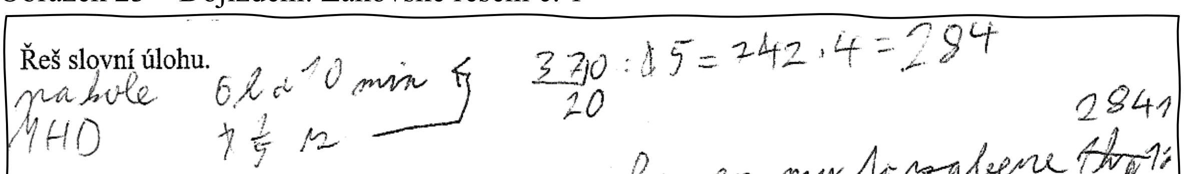
Obrázek 22 – Dojíždění. Vybrané chybné žákovské odpovědi

Díky využití metodických materiálů se mi podařilo odhalovat chyby v porozumění zlomkům, desetinným číslům a procentům mezi žáky.

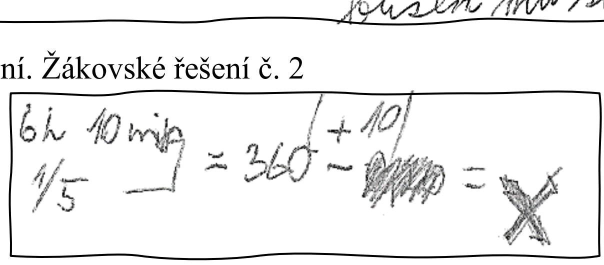
Po rozebrání jazykové stránky úlohy opět následoval pokus o samostatné vyřešení slovní úlohy (obrázek 23 až 27), na které měli žáci 10 minut.



Obrázek 23 – Dojíždění. Žákovské řešení č. 1

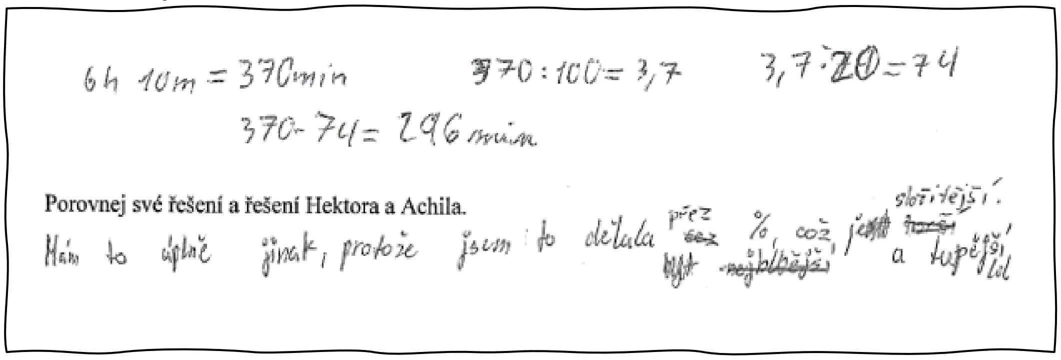


Obrázek 24 – Dojíždění. Žákovské řešení č. 2



Obrázek 25 – Dojíždění. Žákovské řešení č. 3

Obrázek 26 – Dojíždění. Žákovské řešení č. 4



Obrázek 27 – Dojíždění. Žákovské řešení č. 5

S řešením slovní úlohy žáci neměli problémy. Poté dostali nakopírovaný list s řešením Hektora a Achila a měli porovnat své řešení s jejich a řešení Hektora a Achila navzájem. Na tuto aktivitu jsme měli vyčleněný zbytek hodiny (15 minut).

Obě kreslené postavičky Hektor i Achiles vyřešily slovní úlohu správně. Hektor spočítal, že na každých 5 minut na kole připadají 4 minuty strávené v MHD. Achiles se zaměřil na fakt, že pan Novák tráví v MHD čtyři pětiny celkového času. V této úloze se žáci nemohli shodnout na tom, které řešení je takzvaně lepší. Měli za úkol porovnat své řešení a řešení Hektora a Achila a snažit se oběma řešením porozumět. Zde zmíním, že diskuse o vhodnosti řešení byla velká a žáci se rozdělili do dvou skupin – první preferovala řešení Hektora a druhá řešení Achila. Argument pro Hektorovo řešení byla především absence zlomků a shodnost s jejich výpočtem „Lepší je Hektor, začátek počítání jsem měla stejný.“. Argument pro Achilovo řešení byl také shodnost s jejich řešením, např. „Achiles, protože to dělal stejně jako já.“, „Zvolil bych řešení Achila, protože je lehčí a kratší a pro výpočet nepotřebujeme kalkulačky.“.

V závěru hodiny jsem stihla položit důležitou otázku, jak se žákům s materiálem pracovalo. Na otázku, jak se mi dnes pracovalo, žáci odpovídali: „Bylo to dnes celkem fajn, ale trochu náročné. Ty převody jednotek jsou někdy zmatené.“, „Byla to celkem v pohodě práce.“, „Bylo zajímavé vidět, jak různě můžeme řešit stejnou úlohu.“, „Trochu těžké, ale nakonec se mi podařilo úlohu vyřešit.“, „Museli jsme hodně přemýšlet.“, „Bylo to zábavné, ale někdy trochu matoucí.“, „Dobrý.“, „Už jsem unavený z celého dne ve škole, takže se mi pracovalo hůř.“, „Práce byla super! Bavilo mě porovnávat řešení s ostatními a diskutovat o tom, které je správné.“

Práci žáků s metodickými materiály lze opět hodnotit pozitivně. Avšak předtištěná úloha a k ní předtištěné otázky nebyly účinnější než původní práce s metodickými materiály, protože někteří žáci pokračovali dopředu a byla tím narušena třídní diskuse. Jednalo se především o otázky 1 až 5, kdy jsem potřebovala, aby žáci dávali pozor a účastnili se diskuse. Např. u odpovědí na první otázku několik žáků nedávalo pozor a pracovali dopředu na řešení úlohy, i když na řešení měli vyčleněný další čas. Proto doporučuji, aby se používal předchozí postup postupného odhalování otázek a společné práce.

3.2.4 Implementace úlohy Irena v jiných třídách

Slovní úlohu s názvem Irena (příloha 1) jsem během suplování vyzkoušela i v paralelní třídě 7. ročníku a také v jedné třídě 8. ročníku. To mi poskytlo i možnost srovnání, jak budou pracovat žáci, které matematiku učili jiní učitelé.

Třída 7.2

Pro implementaci v paralelním 7. ročníku jsem použila stejné otázky a stejné schéma, jaké jsem měla připravené pro předchozí třídu. Hodinu jsem měla rozdělenou na tři části: jazyková část a rozbor úlohy, žákovské řešení, porovnání řešení Kazi a Bivoje. Rozbor a jazykové otázky trvaly cca 15 minut, na řešení jsem žákům nechala čas 10 minut a na porovnávání také. Ve zbylé části hodiny jsme probrali subjektivní pocity při práci s materiálem. Vzhledem k tomu, že žáci paralelní třídy 7. ročníku nejsou zvyklí na matematickou spolupráci se mnou (jako jejich učitelkou) a mají zkušenosti s jinou implementací slovních úloh, byl pro ně metodický list náročný. Avšak jazykové otázky a rozbor úlohy žákům nedělaly problémy. Pracovali ve dvojicích a řešení jsme si vždy zkontrolovali. Otázky 1 až 5 mají všichni.

1) Myslíš si, že úlohu dokážeš vyřešit?
2) Je vám text jasný?
3) Je text jednoznačný?
4) Najdi slovesa vidu nedokonavého.

5) Do úseku textu *při kontrole pak ještě další šestinu* lze beze změny smyslu slovesa z předchozí věty nejspíš doplnit sloveso a) dořešila, b) vyluštila, c) objasnila, d) posoudila.

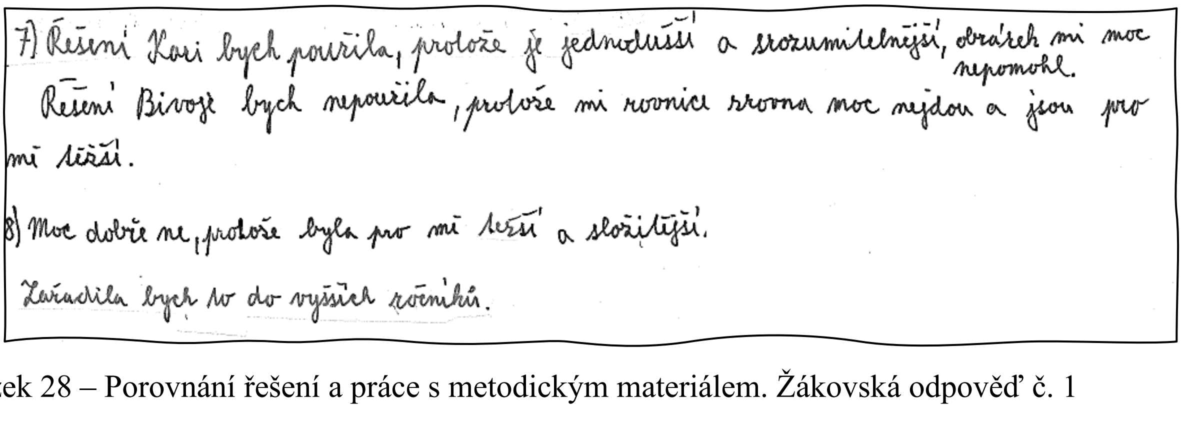
Následovalo samostatné řešení úlohy, které pro žáky nebylo příliš snadné. Někteří se o řešení nepokusili (4).

Poté jsem žákům do dvojic rozdala kopii řešení dvou fiktivních postaviček Kazi a Bivoje s komentářem: „Prohlédněte a přečtěte si řešení Kazi a Bivoje. Je vaše řešení stejné nebo podobné s někým z nich? Které řešení se vám zdá vhodnější? Pomohl vám v pochopení řešení obrázek uvedený v kopii?“

Na obrázcích 28 až 34 lze vidět příklady porovnávání řešení Kazi a Bivoje. V hodině jsem zaznamenala, že obrázek některým žákům pomohl, avšak většina v řešení uvádí, že jim obrázek nepomohl. S třídou 7.1 mají žáci shodnou preferenci řešení Kazi: „Rovnice neumím.“, „Rovnice jsme se neučili.“, „Bivoj – těžší, delší, neučili jsme se.“, „Bivojovo řešení je spíše pro starší ročníky.“

V následující části uvádím reakce žáků na otázku: Jak se mi dnes pracovalo? Přestože v této kapitole neuvádím samotné řešení žáků, považuji za důležité zahrnout reakce žáků na metodický materiál, protože poskytují informace o tom, jak si žáci vysvětlují a přijímají slovní úlohu.

Na obrázcích 28 až 34 lze vidět, že žáci vyjádřili názor, že slovní úloha je pro 7. ročník náročná a že by ji měli řešit až v 8. ročníku.


7) Řešení Kazi bych použila, protože je jednodušší a srozumitelnější, obrázek mi moc nepomohl.
Řešení Bivoje bych nepoužila, protože mi rovnice zrovna moc nejdou a jsou pro mi těžší.
8) Moc dobře ne, protože byla pro mi težší a složitější.
Zařadila bych to do vyšších ročníků.

Obrázek 28 – Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 1

7) Kazi = podle mě je to srozumitelnější, obrázek mi moc nepomohl

Bivoj = spíše pro starší ročníky

8) složité

ano, ale spíše od 8.-9. tříd

Obrázek 29 – Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 2

7) Lépe to řešil Kazi. Přijde mi, že to řešil
jednodušeji a pochopitelněji. Bivoj to dělal
složitěji a byly tam rovnice, které jsme se
neučili. Obrázek a Kaziho mi nepomohl.

Kazi - obrázek, + řešení
Bivoj - rovnice, +

8) Složité, do výuky bych to nezařadila,
kdybych ji měla zařadit tak až do 8. či
9. ročníku. Zadání bylo nesrozumitelné.

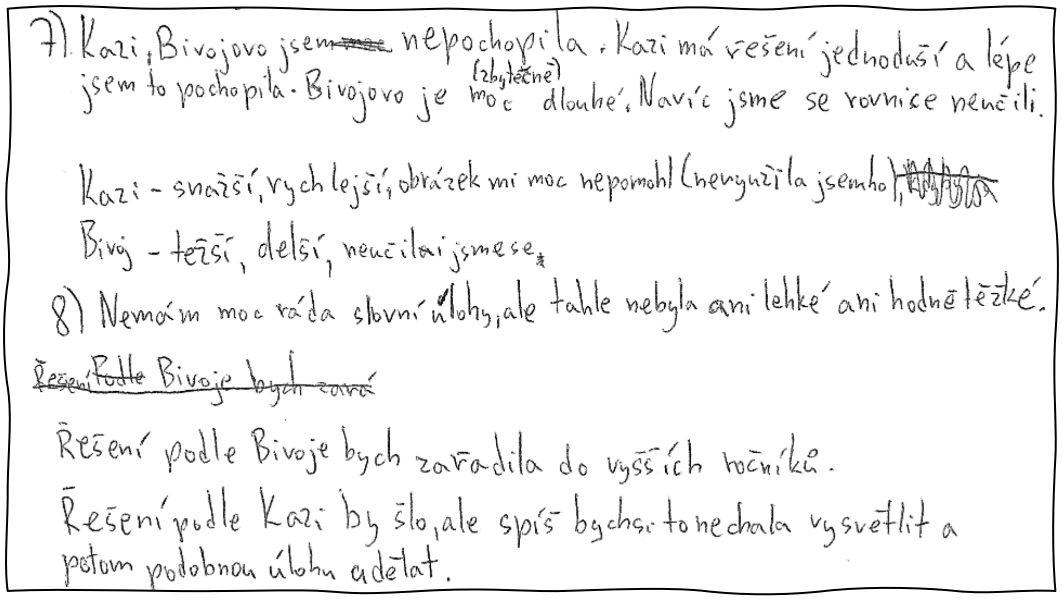
Obrázek 30 – Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 3

7) lépe to podle mě řešil KAZI. protože to bylo srozumitelnější a jednodušší.
Obrázek mi moc nepomohl.

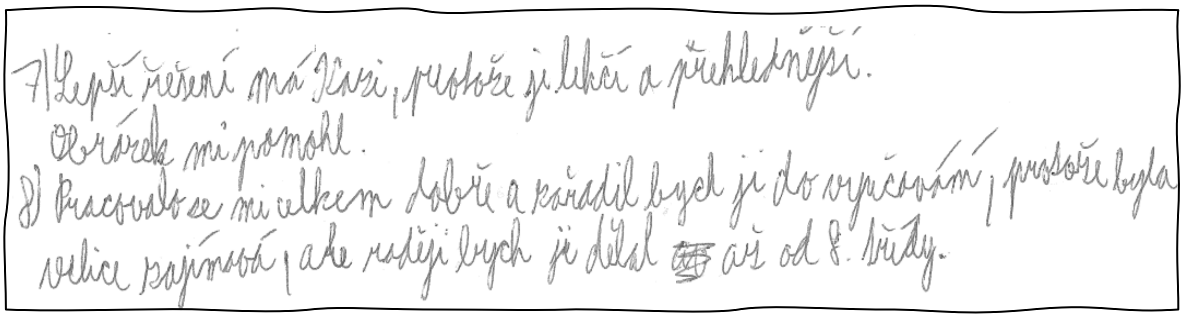
8) pro mě to bylo hodně složité a nová věc, ve se v matematice používá i cizí
jazyk.

ANO, ale do vyšších ročníků.

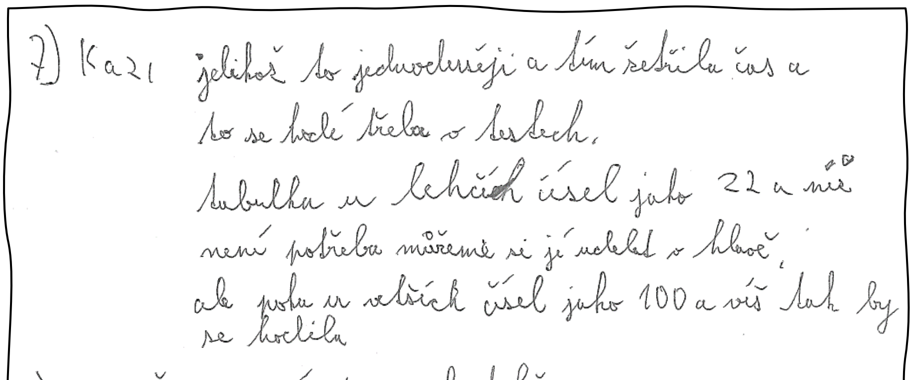
Obrázek 31 – Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 4



Obrázek 32 – Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 5



Obrázek 33 - Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 6



Obrázek 34 – Porovnání řešení a práce s metodickým materiálem. Žákovská odpověď č. 7

Třída 8.1

Žáci v osmém ročníku následovali stejnou posloupnost metodických kroků, jako byla popsána výše (první hodina ve třídě 7.1). Po prvním kroku, kterým bylo vysvětlení zadání a jeho jednoznačnost, následovala práce s úkoly z českého jazyka (15 minut). Poté se žáci pokusili vyřešit slovní úlohu (10 minut), kterou následně porovnali se svými spolužáky a s využitím kreslených postaviček *concept cartoons* diskutovali o řešení (15 minut).

Nejednoznačnost zadání všichni žáci odhalili. „Je mi to celkem jasné, ale přijde mi, že tam něco chybí.“, „Z části, není jednoznačný.“, „Ne, není.“

S jazykovými otázkami nebyly žádné potíže. Následovalo samostatné řešení úlohy. V tomto kroku jsem nezaznamenala u žáků problémy. Uvádím typický postup žáků, i když dva žáci se pokusili slovní úlohu vyřešit použitím procent:

Zápis: Čtení … 3/4

Kontrola … 1/6

Dohromady … 22

Test …?

Výpočet: 3/4 + 1/6 = 11/12

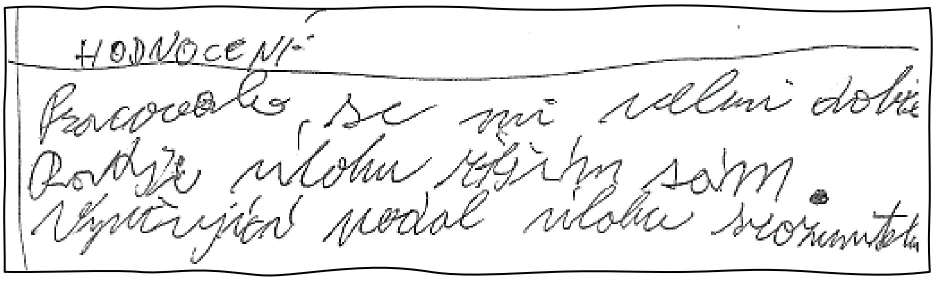
11/12 testu … 22 otázek

1/12 testu … 2 otázky 22+2=24

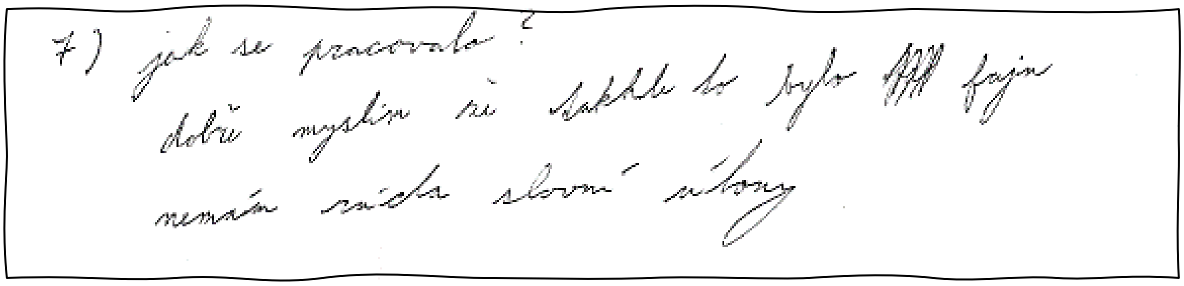
Žáci se aktivně zapojili do práce s metodickým materiálem a vyjádřili se, že se jim tato hodina velmi líbila. Zřejmě vzhledem k tomu, že jsou starší než žáci 7. ročníku, byli více samostatní a schopni lépe diskutovat. Zde nemohu přímo vyhodnotit zkoumané faktory (úroveň zapojení, motivace k učení, komunikace), protože nemám mnoho zkušeností s touto třídou během hodin matematiky, avšak subjektivní pocit žáků ohledně této hodiny byl pozitivní.

V osmém ročníku byla prezentovaná slovní úloha obecně lépe přijata než běžné slovní úlohy (obrázek 35–37). Nicméně, někteří žáci (obrázek 38) projevili nejistotu ohledně své schopnosti úlohu vyřešit. Žákyně píše: „Nedala bych to asi sedmému ročníku. Nejsem zastáncem slovních úloh, proto bych to nehodnotila moc kladně.“ Je třeba poznamenat, že tato úloha byla autory primárně určená pro žáky šestého a sedmého ročníku. Žáci, kteří manifestovali negativní postoj ke slovní úlohám obecně, komentovali ten způsob zadání a porovnávání řešení pozitivně. Např: „Nemám moc rád slovní úlohy, ale tato byla docela dobrá.“, „Tohle bylo dobré cvičení.“, „Nemám ráda slovní úlohy, ale takhle to bylo fajn.“, „Bylo to zajímavé.“.

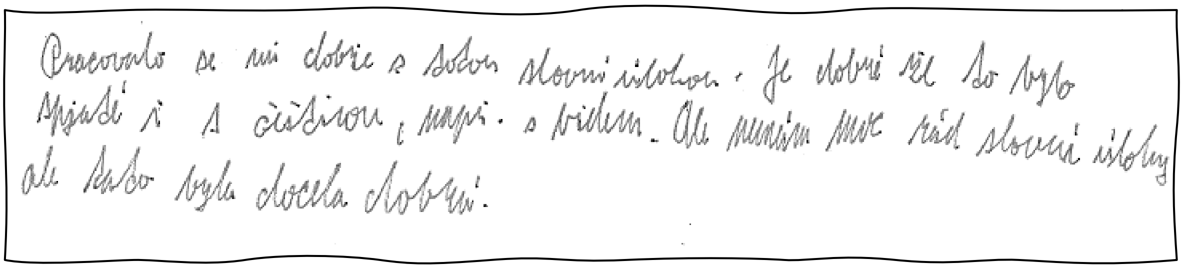
Dále v osmém ročníku, v porovnání se sedmým ročníkem, již netypická jména Kazi a Bivoj nezpůsobila žádný rozruch; žáci to nijak nekomentovali.



Obrázek 35 – Práce s metodickým materiálem. Žákovské hodnocení č. 1



Obrázek 36 – Práce s metodickým materiálem. Žákovské hodnocení č. 2



Obrázek 37 – Práce s metodickým materiálem. Žákovské hodnocení č. 3

6) Nedala bych to asi ~~[illegible]~~ sedmému ročníku. Nejsem zastáncem domácích úloh, proto bych to nehodnotila moc hladně.

Obrázek 38 – Práce s metodickým materiálem. Žákovské hodnocení č. 4

4 Výsledky výukových experimentů a jejich diskuse

4.1 Zhodnocení průběhu a výsledků výukových experimentů

V tomto oddíle zhodnotím průběh všech pěti výukových experimentů.

U všech jsem pozorovala, že žáci projevovali vysokou úroveň zájmu a angažovanosti při práci s metodickými materiály. Také jejich subjektivní pocit ohledně „nové“ výuky slovních úloh byl pozitivní, jak dokládají jejich komentáře v kapitole 3. Můžeme se také opřít o otázku, kterou dostali na závěr výuky žáci všech tříd (N=64): „Jak se vám líbila nová metoda výuky slovních úloh, kterou jsme vyzkoušeli v rámci těchto hodin matematiky?“ Žáci na ni písemně odpovídali. Na výběr bylo z pěti možností:
A) Velmi se mi líbila, B) Líbila se mi, C) Nevím/neutrální, D) Nelíbila se mi, E) Vůbec se mi nelíbila.

Z 64 přítomných žáků odpovědělo 25 žáků (39 %), že se jim nová metoda výuky slovních úloh velmi líbila. Dalších 20 žáků (31 %) odpovědělo, že se jim metoda líbila. 10 žáků (16 %) bylo neutrálních ohledně práce s metodickým materiálem, 5 žáků (8 %) uvedlo, že se jim metoda nelíbila, a 4 žáci (6 %) odpověděli, že se jim metoda vůbec nelíbila. Odpovědi naznačují, že využití metodických materiálů typu Porovnávání založených na konceptu *concept cartoons* mohou být účinným nástrojem k motivaci žáků, ke zvýšení úrovně zapojení žáků do vyučování i zlepšení subjektivního pocitu ze slovních úloh. Zjištění je v souladu se studií Rakoušové (2011), že oblíbenost slovních úloh závisí na jejich vhodné implementaci.

V 7. ročníku jsem zaznamenala u některých žáků menší obtíže s porozuměním úkolu a vynucením si vlastního postupu, což bylo možná způsobeno jejich nižším věkem a zkušenostmi. Naopak v 8. ročníku jsem si všimla, že žáci práci s metodickým materiálem lépe chápou a jsou schopni si s úkolem samostatně poradit. Domnívám se, že vyspělost a větší zkušenosti těchto žáků jsou důležitými faktory, které k tomu přispěly. Kromě toho jsem shledala, že převážná většina žáků měla na metodický materiál pozitivní reakce, což potvrzuje, že tato forma výuky má potenciál být účinnou a zajímavou pro žáky.

V rámci výukového experimentu bylo pozorováno, že mezi třídami 7.1, 7.2 i 8.1 existují rozdíly v reakci na poskytnutý metodický materiál. Třída 7.1 materiál přijala dobře a aktivně se zapojovala do řešení úloh. Žáci této třídy neprojevili žádnou nespokojenost s náročností úloh a byli ochotni se s nimi vyrovnat. Naopak třída 7.2 vyjádřila názor, že některé úlohy by byly vhodnější pro vyšší ročníky. Jeden z žáků komentoval metodický materiál pozitivně (obrázek 34), avšak reflektoval, že pro spolužáky může být slovní úloha náročná. Z psychologického a pedagogického hlediska je zajímavé pozorovat, jak se žáci dokáží vypořádat s náročností úlohy a jaký přístup k jejímu řešení zaujmou.

Ve třídě 7.1 jsem také vyzkoušela předtištěné zadání slovní úlohy společně s otázkami, abych zjistila, zda tato metoda přinese větší efektivitu ve výuce. Představa byla, že žáci budou mít přehled o úlohách a otázkách dopředu, a tím se více budou soustředit na samotné řešení a porozumění materiálu. Avšak mé zkušenosti mě přivedly k závěru, že předtištěná verze nebyla lepší než původní postupné odhalování otázek a úkolů. Jedním z hlavních problému předtištěné verze bylo to, že někteří žáci se dostali v úlohách a otázkách dále než ostatní. Tím došlo k narušení třídní diskuse, protože žáci, kteří byli rychlejší, již měli odpovědi připravené předem. To vedlo k tomu, že pomalejší žáci neměli možnost přispět do diskuse nebo se vyjádřit k daným otázkám. Tato nerovnoměrnost v postupu práce negativně ovlivnila interakci a spolupráci ve třídě. Naopak původní postup postupného odhalování otázek se osvědčil jako lepší volba. Postupné odhalování otázek vytvářelo prostor pro vzájemnou podporu, spolupráci a aktivní účast všech žáků. I když žáci zvládli práci s předtištěnou verzí dobře, nepozorovala jsem žádné zlepšení ve srovnání s původním postupem.

Zároveň pro mě diplomová práce sloužila jako diagnostický nástroj žákovských poznatků, a tím i mého vyučování. Na zpracování experimentu jsem si vyčlenila více času a mohla analyzovat žákovské chyby (symbol „rovná se“, porozumění zlomkům aj.). Při zpracovávání diplomové práce jsem si všimla toho, že někteří žáci nesprávně používají symbol „rovná se“. Podle zahraničního výzkumu (Knuth, 2006) mohou mít žáci v 13 letech již značné znalosti v oblasti matematiky a většina z nich by měla být schopna správně používat symbol rovnosti. Nicméně vývoj chápání matematických konceptů se může u různých jedinců lišit a závisí také na pedagogických metodách, které byly v minulosti ve třídě používány (Baroody & Ginsburg, 1983; Eichhorn a kol., 2018). Žáci v 7. ročníku zatím nebyli seznámeni s rovnicemi a může u nich převládat operační chápání rovnosti oproti relačnímu (Vondrová, 2019). V osmém ročníku by mělo dojít k reedukaci v této oblasti. Dále jsem si v rámci diplomové práce všimla určitých žákovských chyb v porozumění a zápisu zlomků. Mezi tyto chyby patřilo například zapsání zlomku jedna pětina jako 1,5. Analýza těchto chyb mi umožnila identifikovat specifické obtíže a zaměřit se na ně v dalším vyučování. Tyto poznatky mohou vést ke zlepšení výuky i ke zlepšení matematických dovedností žáků. Diplomová práce a vyhodnocení práce s metodickými materiály jsou pro mě cenným diagnostickým nástrojem a prostředkem k posilování žákovských poznatků a zlepšení mého vyučování.

4.2 Metodické materiály a využití *concept cartoons*

Vzhledem k časovým omezením a prioritám v dodržování tematického plánu jsem se, jako začínající učitel, nedostala k dostatečnému zajištění následné práce, která by navazovala na metodické materiály. Může se tak stát, že žáci mohou zapomenout na způsoby řešení a dovednosti, které jsme společně získali během popsaných hodin. Do budoucna bych si měla vyhradit dostatečný čas na plánování a zajištění následné práce, která by umožnila žákům upevnit a aplikovat jejich nové znalosti a dovednosti.

Dalším možným rizikem, které při práci s materiály pozoruji, je omezená škála představených řešení kreslenými postavičkami (dvě různá řešení), která představuje výzvu v rámci následné společné diskuse a shrnutí řešení ve třídě. Během práce ve dvojicích by žáci měli porovnávat vlastní řešení s řešeními postaviček a vyhodnocovat jejich vhodnost či správnost. Avšak, vzhledem k omezenému časovému úseku 45 minut, nelze v diskusi zahrnout všechna různá řešení, která žáci představí.

Mám jediné doporučení k metodickým materiálům pro tvůrce, a sice to, že je vhodné zvážit výběr jiných jmen pro kreslené postavičky použité v materiálu, neboť některá z nich, jako například Hektor, Achiles, Bivoj, Noe či Medard mohou vyvolávat u žáků nežádoucí emoční reakce, jako například úsměv či výsměch, a tím narušovat proces vzdělávání. Doporučuji zvolit pro kreslené postavičky jména běžnější a méně výrazná, která nebudou žáky rušit a zároveň budou plnit svůj účel. V mém případě došlo k nežádoucí reakci v 7. ročníku a v 8. již ne.

4.3 Analýza a reflexe mého pedagogického působení

Pro mě (jako učitelku) byla práce s metodickými materiály velmi přínosná. Díky materiálům jsem mohla pozorovat, jak žáci spolupracují a diskutují, což mě „osvobodilo“ od role učitele jakožto nositele znalostí a umožnilo mi to být moderátorkou vzdělávacího procesu. Mým úkolem bylo pokládat otázky a usměrňovat žáky, pokud se od tématu příliš odchýlili. Žáci si sami konstruovali své znalosti pomocí řešení kreslených postaviček a diskusí ve dvojících nebo se svými spolužáky. Celkově mě práce s těmito materiály bavila a materiály mi ulehčily pracovní i mentální zátěž.

Výzvou pro mě byla klíčová část porovnávání. Bylo pro mě těžké žáky směrovat tím „správným“ směrem, tak aby jejich argumentace nebyla pouze povrchní, jako např. „Řešení Noe je lepší, protože je lehčí.“, „Lepší, protože to počítá jako já.“, „Kazi nemá mozek.“. Tyto situace pro mě představovaly výzvu a potřebovala bych více času na práci s metodickými materiály, abych využila skutečný potenciál této jejich klíčové části.

Další výzvou (spíše do budoucnosti) je vytvoření a použití návazné práce, tedy úloh, ve kterých se použije podobné schéma.

Naopak dobře se mi pracovalo s otázkami k jazykovým charakteristikám. Pokud jsem si nebyla jista, jestli žáci znají např. vid dokonavý a nedokonavý, na který byla v práci otázka, konzultovala jsem to s paní učitelkou na český jazyk. Otázky nám pomohly porozumět úloze a materiál byl podrobně napsaný, takže otázky nedělaly těžkosti ani mně, učitelce matematiky. Doporučení úlohu rozdělit na dvě části a první část implementovat v hodině českého jazyka a druhou část v hodině matematiky nesdílím. V podmínkách 21. ZŠ, kde bylo více učitelů matematiky i českého jazyka, by byla náročná domluva. Také ne vždy mohou obě části sedět do tematických plánů dané třídy.

Celkově bych řekla, že zavedení *concept cartoons* do výuky matematiky bylo pro mě obohacující a užitečné. Tento typ úloh mi umožňuje přiblížit matematiku žákům způsobem, který je pro ně srozumitelný a přístupný, a zároveň lze předpokládat, že rozvíjí jejich kritické myšlení a schopnost porovnávat a argumentovat.

5 Závěr

Cíl diplomové práce byl splněn. Provedla jsem ověření praktické implementace metodického materiálu založeného na typu Porovnávání a využívajícího konceptu *concept cartoons* v hodinách matematiky a zachytila jsem reakce žáků na daný typ úloh. Dále jsem na základě pozorování žáků v hodinách a analýzy jejich práce zhodnotila možné přínosy a rizika práce s těmito materiály.

Výukové experimenty ukázaly, že využití metodického materiálu typu porovnávání založeného na konceptu *concept cartoons* může být efektivní metodou pro výuku slovních úloh. Implementace metodického materiálu umožňuje žákům aktivní účast ve výuce, rozvíjení komunikačních schopností a zvyšování důvěry ve vlastní schopnosti. Z dotazníkového průzkumu vyplývá, že většina žáků byla s touto metodou výuky spokojena.

Někteří žáci, kteří manifestují negativní postoj k slovním úlohám, vykazovali vůči hodině věnované slovním úlohám řešených pomocí metodického materiálu typu Porovnávání neutrální až pozitivní reakce. Někteří z nich se dokonce vyjádřili, že hodina byla příjemná (především v 8. ročníku).

Používání *concept cartoons* ve školním prostředí může pomoci rozvíjet kritické myšlení a analytické schopnosti žáků. Porovnávání různých řešení v mých experimentech vedlo k diskusím a spolupráci, což napomáhá lepšímu porozumění matematice. Je také důležité zdůraznit, že využití této metody může pomoci žákům překonat obavy z chyb a neúspěchu, což jsem také pozorovala. Tento nástroj umožňuje vidět, že existuje více způsobů, jak řešit problém, a že je přirozené se mýlit. Tento přístup může vést ke zvýšení sebevědomí žáků a jejich ochotě se zapojit do diskusí a zkoušet nové přístupy k řešení problémů.

Využití *concept cartoons* může být užitečným nástrojem pro výuku matematiky, protože umožňuje žákům vidět a porovnat různá řešení úlohy. To může vést k diskusi a spolupráci, což může vést k lepšímu porozumění matematice. V Bloomově taxonomii je porovnávání na velmi vysoké úrovni, což znamená, že tato aktivita může pomoci žákům rozvíjet kritické myšlení a analytické schopnosti.

Také propojení matematiky s českým jazykem zvyšuje důležitost znalosti českého jazyka. Například žáci musí být schopni číst matematické texty a porozumět jim, porozumět matematickým symbolům a být schopni jasně vyjádřit své myšlenky pomocí matematického jazyka. Když žáci pracují se slovními úlohami, musí použít své znalosti matematiky a češtiny současně, což může být náročné. Komentář jednoho žáka k práci s materiálem: „Pro mě to bylo hodně složité a nová věc, že se v matematice používá i český jazyk.“. Celkově lze říci, že propojení matematiky s českým jazykem a využití *concept cartoons* mohou být velmi efektivním způsobem, jak zlepšit výuku matematiky a rozvíjet kritické myšlení u žáků. To je důležité, protože matematika je klíčovou disciplínou, která má mnoho praktických aplikací v různých oblastech.

Concept cartoons mohou pomoci přiblížit matematiku běžnému životu tím, že se zaměřují na řešení problémů a situací, které jsou běžné v každodenním životě. Tyto situace mohou být například spojeny s nákupem, plánováním cest, práce s měřeními nebo řešením finančních problémů. V každodenním životě se matematika aplikuje v mnoha různých situacích. Například při plánování rozpočtu a nákupu potravin se používají základní matematické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení. Při řízení auta se používají matematické koncepty, jako jsou rychlost, vzdálenost a čas. Při měření a stavbě věcí se používají různé geometrické a algebraické koncepty. Většina lidí používá matematiku v každodenním životě neustále, ačkoliv si to mnohdy ani neuvědomují. Používání *concept cartoons* může pomoci žákům vidět, jak jsou matematické koncepty spojeny s každodenním životem a jak mohou být užitečné při řešení různých situací. To může vést ke zvýšení motivace a zájmu o matematiku, protože žáci vidí, jak jsou tyto koncepty relevantní a praktické.

Nadále bych se chtěla ve své pedagogické praxi věnovat implementaci těchto materiálů do výuky a zároveň bych je ráda doporučila všem svým kolegům. *Concept cartoons* jsou univerzální a mohou být použity pro jakýkoli předmět, ve kterém je potřeba řešit slovní úlohy a podobné problémy.

Výsledky mého výzkumu mohou být ovlivněny mou nedostatečnou zkušeností jako učitelky, ale to neznamená, že by tato metoda nemohla být úspěšnější v rukou zkušenějšího vyučujícího. Výsledky by také mohly být ovlivněny specifickými vlastnostmi a schopnostmi žáků mé třídy, a proto by bylo dobré v budoucnosti experimentovat s tímto typem úloh s různými skupinami žáků. Celkově bych tedy doporučila, aby se vyučující otevřeli novým metodám a nástrojům a neváhali experimentovat. Učitelé by měli být kreativní a flexibilní a měli by se neustále učit nové věci, aby mohli poskytnout žákům co nejlepší vzdělání.

6 Seznam použitých informačních zdrojů

Adams, N. E. (2015). Bloom’s taxonomy of cognitive learning objectives. *Journal of the Medical Library Association: JMLA*, *103*(3), 152–153.

Anton, H. (2010). *Elementary linear algebra*. 10th ed. Hoboken, NJ: Wiley. ISBN 978-04-70432-05-1.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, *84*(2), 191–215.

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, *84*(2), 199–212.

Dweck, C. S. (2000). *Self theories: their role in motivation, personality and development*. London: Taylor & Francis. ISBN: 978-1-84169-024-7.

Eichhor, M. S., Perry, L. E., & Brombacher, A. (2018). Student‘s Early Grade Understanding of the Equal Sign and Non-Standard Equations in Jordan and India. *International Journal of Research in Education and Science*, *4*(2), 655–669.

Eisenmann, P., Přibyl, J., Novotná, J., Břehovský, J., & Cihlář, J. (2017). Volba heuristických strategií v závislosti na věku. *Scientia in educatione, 8*(2), 21–38.

Eisenmann, P., Novotná, J., & Přibyl. J. (2015). Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In Vondrová, N. (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2015. Sborník příspěvků* (s. 9–22). Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-843-1.

Gardee, A., & Brodie, K. (2022). Relationships between teachers’ interactions with learner errors and learners’ mathematical identities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(1), 193–214.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers: Maximizing impact on learning*. London: Routledge, ISBN 978–0–415–69014–0.

Havlíčková, R. (2020). Vliv atraktivity kontextu matematické slovní úlohy na řešitelský proces. *Scientia in educatione, 11*(1), 2–21.

Hejný, M. (2003). Anatómia slovnej úlohy o veku. *Disputationes scientificae Universitatis Catholicae in Ružomberok*, *3*(3), 21–32.

Hejný, M., Jirotková, D., & Kratochvílová, J. (2006). *Práce s chybou jako strategie rozvoje klíčových kompetencí žáka.* Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001) *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál. ISBN 80-7178-581-4.

Keogh, B., & Naylor, S. (1999). Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. *International Journal of Science Education*, *21*(4), 431–446.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, *37*(4), 297–312.

Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-307-3.

Naylor, S., & Keogh, B. (2013). Concept cartoons: what have we learnt? *Journal of Turkish Science Education, 10*(1), 3–11.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh. Kapitoly z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN: 80-7290-011-0.

Novotná, J. (2004). Matematické objevování založené na řešení úloh. In Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 357–366). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN: 80-7290-189-3.

Novotná, L. (2022). Úspěchy žáků v krajských kolech předmětových olympiád ve školním roce 2021/2022. *Plzeňský kraj [online].* Plzeň: Novotná Ludmila, 30.5.2022. [Cit. 1.2.2023]. Dostupné z: https://www.plzensky-kraj.cz/uspechy-zaku-v-krajskych-kolech-predmetovych-olym-1

Polya, G. (2004). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. With a new foreword by John H. Conway.* Princeton & Oxford: Princeton University Press, ISBN-13: 978-0-691-11966-3.

Rakoušová, A. (2011). Postoje žáků k řešení slovních úloh. In Janík, T., Knecht, P., & Šebestová, S. (Eds.), *Smíšený design v pedagogickém výzkumu: Sborník příspěvků z 19. výroční konference České asociace pedagogického výzkumu* (s. 439–445). Brno: Masarykova univerzita.

Dostupné z: http://www.ped.muni.cz/capv2011/sbornikprispevku/rakousova.pdf

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (2021) [online]. Praha: MŠMT [cit. 22. 3. 2023]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

Samková, L. (2016). Concept Cartoons as a representation of practice. In Buchbinder, O., & Kuntze, S. (Eds.), *Mathematics Teachers Engaging with Representations of Practice. A Dynamically Evolving Field* (pp. 71–93). Hamburg: Springer. ISBN: 978-3-319-70594-1.

Samková, L., & Hošpesová, A. (2015). Using Concept Cartoons to investigate future teachers knowledge. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.), *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3241–3247). Praha: Universita Karlova, Pedagogická fakulta. hal-01291784.

Sepeng, P., & Sigola, S. (2013). Making sense of errors made by learners in mathematical word problem solving. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, *4*(13), 325–333.

Sepeng, P., & Webb, P. (2012). Exploring mathematical discussion in word problem-solving. *Pythagoras*, *33*(1), 1–8.

Stehlíková, N. (2004). Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (s. 11–21). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN: 80-7290-189-3.

Stehlíková, N. (2007). Charakteristika kultury vyučování matematice. In Hošpesová, A., Stehlíková, N., & Tichá, M. (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 13–48). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. ISBN 978-80-7394-052-2.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *52*(1), 1–16.

Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN: 978-80-7603-109-8.

Vondrová, N. (2020). Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet. *Učitel matematiky, 28*(2), 66–93.

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií.* Praha: Karolinum. ISBN: 978-80-246-4516-2.

Vondrová, N., Šmejkalová, M., Novotná, J., Havlíčková, R., Páchová, A., Smetáčková, I., Sigmundová, A., Hirschová, M., & Chvál, M. (2020). *Slovní úlohy ve výuce matematiky a českého jazyka: Metodický materiál pro učitele.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

6 Seznam příloh

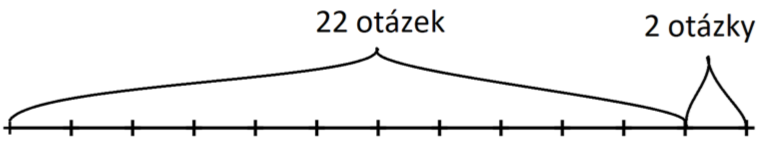
Příloha 1 – Ukázka metodických materiálů použitých v diplomové práci. Zdroj: Metodický materiál typu Porovnávání

Irena řeší test. Během prvního čtení vyřešila tři čtvrtiny všech otázek, při kontrole pak ještě další šestinu. Dohromady tak vyřešila 22 otázek. Z kolika otázek se skládá celý test?

KAZI

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$$

$\frac{11}{12}$ testu .... 22 otázek
$\frac{1}{12}$ testu .... 2 otázky
celý test .... 24 otázek



Nejdříve sečtu tři čtvrtiny a jednu šestinu. Vyjde mi jedenáct dvanáctin.

Těchto jedenáct dvanáctin testu odpovídá 22 otázkám. Nakreslím si obrázek. Dostávám 24 otázek.

BIVOJ

počet otázek v testu...... x

$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}x=22 \quad | \cdot 12$$

$$(12)\cdot\frac{3}{4}x+(12)\cdot\frac{1}{6}x=22\cdot(12)$$

$$9x+2x=264$$

$$11x=264 \quad | : 11$$

$$x=24$$

Počet všech otázek v testu si označím neznámou x.

Sestavím rovnici podle zadání úlohy.

Abych se zbavil zlomků, vynásobím obě strany rovnice číslem 12.

Jako řešení úlohy dostávám 24. Test se skládá z 24 otázek.

Firma Sea4you provozuje luxusní plachetnice pro výlety na moři poblíž Turecka, Chorvatska nebo v okolí řeckých ostrovů. Na každé plachetnici vypravené na moře se plaví 40 turistů, o které se musí pečlivě a zodpovědně starat 30 členů posádky, většinou složené z uklízečů, údržbářů, kuchařů, plavčíků a stevardů. Protože tento způsob trávení dovolené se stal v poslední době velmi oblíbeným, minulý týden se plavilo na lodích celkem 600 po zážitcích toužících turistů. Kolik členů posádek se o ně staralo?

Noe a Medard začali stejným zápisem.

počet turistů na plachetnici....................... 40
počet členů posádky na plachetnici........... 30
počet turistů celkem................................ 600
počet členů posádky celkem........................ x

NOE

Nejdříve vypočítám, kolik plachetnic se minulý týden plavilo.

Na každé plachetnici se plaví 30 členů posádky. Tedy na patnácti plachetnicích se jich bude plavit 15krát víc.

Vynásobím číslo 30 číslem 15. Vyšlo 450.

počet plachetnic......... P

$P = 600 : 40 = 15$

$x = 30 \cdot P = 30 \cdot 15$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \cdot\ 15 \\ \hline 150 \\ 30\ \ \\ \hline 450 \end{array}$$

$x = 450$

MEDARD

$40 - 30 = 10$

Tedy:

$600 - 100 = 500$

$x = 500$

Na plachetnici se liší počet turistů a členů posádky o 10.

Když je turistů 600, bude tento rozdíl tedy 10krát větší.

Vyšlo mi 500.

Výsledky jsou různé.

Pan Novák má novou práci. Spočítal si, že cesta městskou hromadnou dopravou (MHD) mu zabere o pětinu času méně než cesta na kole. Prvních několik dní jezdil pan Novák do práce i zpět na kole. Na cestách strávil přesně 6 hodin a deset minut. Kolik času by pan Novák strávil na cestách, kdyby tyto dny jezdil MHD?

HEKTOR

$$6\text{ h }10\text{ min} = 6 \cdot 60\text{ min} + 10\text{ min} = 370\text{ min}$$

MHD (min)	Kolo (min)
4	5
x	370

$\cdot k$ $\cdot k$

$$k = 370 \div 5 = 74$$

$$x = 4 \cdot k = 4 \cdot 74\text{ min} = 296\text{ min}$$

$$x = 4\text{ hod }56\text{ min}$$

Nejdříve si vyjádřím v minutách, kolik času strávil pan Novák na cestách.

Za každých 5 minut na kole ušetřím s MHD minutu. Tedy na 5 minut na kole připadají 4 minuty v MHD.

Jedná se o přímou úměrnost, proto 370 minutám na kole odpovídá 296 minut v MHD.

Kdyby jezdil pan Novák MHD, strávil by na cestách 4 hodiny a 56 minut.

ACHILES

cesta na kole.......... 6 h 10 min

cesta MHD = $\frac{4}{5}$ cesta na kole

1 ....6 h 10 min = 5 h 70 min

$\frac{1}{5}$ .... (5 h 70 min) ÷ 5 = 1 h 14 min

$\frac{4}{5}$ .... (1 h 14 min) · 4 = 4 h 56 min

$\cdot 4$ $\cdot 4$

Pokud cesta MHD zabere o pětinu méně času než cesta na kole, znamená to vlastně, že zabere celkem čtyři pětiny ze 6 hodin a 10 minut.

Aby se mi s časem cesty na kole lépe počítalo, převedu si ho na 5 hodin a 70 minut.

Vypočítám nejdříve jednu pětinu. Poté hodnotu, která přísluší jedné pětině, vynásobím čtyřmi.

Kdyby jezdil pan Novák MHD, strávil by na cestách 4 hodiny a 56 minut.