MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eva Šmejkalová

Filtrování a predikce procesů s diskrétním časem

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Tímto bych ráda poděkovala panu doc. RNDr. Danielu Hlubinkovi, Ph.D. za užitečné připomínky a za milý a ochotný přístup během psaní této práce.

Název práce: Filtrování a predikce procesů s diskrétním časem

Autor: Eva Šmejkalová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá filtrováním a predikcí procesů s diskrétním časem. Na začátek představíme základní značení a teorii markovských řetězců a náhodných procházek. Dále popíšeme přístup k filtračním metodám včetně doprovodných komentářů, obrázků a příkladů. Poté dokážeme jednu ze základních vět o filtračních rovnicích a grafickým i početním vyřešením dvou problémů vysvětlíme souvislosti těchto rovnic s úvodem kapitoly. Na závěr práce stručně popíšeme téma predikce a dokážeme větu, jež dále demonstrujeme na konkrétním problému.

Klíčová slova: filtrování, predikce, markovské řetězce

Title: Filtering and prediction of discrete time processes

Author: Eva Šmejkalová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis focuses on filtering and prediction of discrete time processes. We begin by introducing the elementary notations and theory of discrete-time Markov chains and random walks. We then describe the approach to filtering methods, accompanied by comments, figures and examples. After that we prove one of the fundamental theorems about filtering equations and explain the connection between these equations and the introduction of the chapter by graphically and numerically solving two problems. Finally, we end the paper with a brief description of the topic of prediction and prove a theorem that we then apply to a specific problem.

Keywords: filtering, prediction, Markov chains

Obsah

Úvod

Filtraci lze považovat za základní postup, který slouží k odstranění nežádoucího šumu. To umožňuje získat čistější a kvalitnější výstupy, které jsou přesnější a relevantnější pro další použití. Predikci můžeme vnímat jako postup, který se snaží odhadnout budoucí stav nebo výsledky na základě existujících dat a informací. To umožňuje předvídat možné scénáře a připravit se na ně.

Tato práce se bude zabývat zpracováním základní teorie k metodám filtrace a predikce náhodných procesů s diskrétním časem a vyřešením ilustrativních problémů. Předlohou je kniha Fristedt, Jain a Krylov (2007), z níž budeme čerpat značení, definice, znění vět a některá zadání problémů.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První je věnována značení a úvodní teorii speciálních typů náhodných procesů, které později využijeme v problémech, a to teorii markovských řetězců a konkrétněji i náhodných procházek.

Druhá kapitola pojednává o filtraci. První část věnujeme úvodu do filtrace, kde se zaměříme na rozbor dvourozměrného markovského řetězce a na příkladu ukážeme, že jedna složka dvourozměrného řetězce nemusí být markovský řetězec. Dále v této sekci nastíníme důležitost zavedení filtračních rovnic. Tyto rovnice jsou podrobněji představeny v druhé části kapitoly, jež se bude zabývat důkladným rozepsáním důkazů uvedeného lemmatu a věty.

V poslední, třetí části druhé kapitoly se zaměříme na řešení vybraných problémů, zejména na příklad náhodné procházky s náhodným šumem, kde nejdříve vysvětlíme řešení intuitivně, pomocí grafického řešení, a poté problém detailně vypočítáme za využití uvedené věty. Přidáním nového pozorování také vysvětlíme vhodnost použití představených filtračních rovnic a jejich efektivitu při výpočtu s novým pozorováním.

Třetí kapitola se zaměřuje na téma predikce. Stejně jako u filtrace, zde uvedeme větu s důkazem, kterou využijeme při řešení vybraného problému náhodné procházky. Opět bude také uvedeno grafické řešení pro lepší představu.

Přínosem autorky je zpřehlednění a zpřístupnění zmíněné problematiky, doplnění vysvětlujících komentářů a mezikroků v důkazech daných vět a aplikace teorie na názorných problémech z knihy Fristedt, Jain a Krylov (2007).

1. Základní pojmy, definice a tvrzení

Uvedeme nejprve definici náhodného procesu z knihy Prášková a Lachout (2020). Dále již budeme čerpat z primárního zdroje, knihy Fristedt, Jain a Krylov (2007), a zavedeme základní definice a pojmy spojené se speciálním typem těchto náhodných procesů, tj. markovskými řetězci s diskrétním časem (případ se spojitým časem v této práci nebudeme uvažovat) a zavedeme značení používaná ve zbytku textu.

Definice 1 (Náhodný proces)**.** *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor, nechť* $T \subset \mathbb{R}$*. Rodina náhodných veličin* $\{Z_t : t \in T\}$ *definovaných na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *se nazývá náhodný proces.*

1.1 Markovské řetězce s diskrétním časem

Definice 2 (Markovský řetězec s diskrétním časem)**.** *Nechť* $(Z_0, Z_1, Z_2 \dots)$ *je posloupnost náhodných veličin, které nabývají hodnot v diskrétní nejvýše spočetné množině* $\mathbb{S}$*. Řekneme, že* $(Z_n, n = 0,1,2,\dots)$ *je markovský řetězec s diskrétním časem, jestliže splňuje markovskou vlastnost*

$$P[Z_{n+1} = z_{n+1}|Z_n = z_n, \dots ,Z_0 = z_0] = P[Z_{n+1} = z_{n+1}|Z_n = z_n], \tag{1.1}$$

pro každé $n \geq 0$ *a každé* $z_0, z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{S}$ *takové, že*

$$P[Z_n = z_n, \dots ,Z_0 = z_0] > 0.$$

Markovská vlastnost (1.1) popisuje chování náhodného procesu, kdy pravděpodobnost stavu v následujícím kroku závisí jen na současném stavu, nikoliv na tom, jak se řetězec do současného stavu dostal.

Diskrétní nejvýše spočetnou množinu $\mathbb{S}$, která zahrnuje všechny možné stavy, jež může posloupnost $(Z_0, Z_1, Z_2, \dots)$ nabývat, budeme nazývat *stavový prostor*. Stavový prostor může být například konečná množina bodů na kružnici nebo množina všech kladných celých čísel.

Pro zkrácení zápisu zavedeme následující vhodné značení. Pro $n = 0, 1, \dots,$ $k = 0, 1, \dots, n$ a všechny stavy $z_i \in \mathbb{S}$ pro $i = 0, 1, 2, \dots, n$ definujeme

$$z_{[k,n]} = (z_k, \dots, z_n).$$

Konkrétně $z_{[n,n]} = z_n$ a $Z_{[k,n]} = (Z_k, \dots ,Z_n)$. Tedy (1.1) lze zapsat jako

$$P[Z_{n+1} = z_{n+1}|Z_{[0,n]} = z_{[0,n]}] = P[Z_{n+1} = z_{n+1}|Z_n = z_n]$$

pro $P[Z_{[0,n]} = z_{[0,n]}] > 0$. Pro množiny $C_k, \dots, C_n \subset \mathbb{S}$ zavádíme značení

$$C_{[k,n]} = C_k \times \dots \times C_n = \{z_{[k,n]} : z_k \in C_k, \dots, z_n \in C_n\}.$$

Definice 3. *Nechť* $n = 0, 1, 2, \dots$ *a* $z \in \mathbb{S}$*. Rozdělení náhodné veličiny* Z_n *definujeme předpisem*

$$\pi^n(z) = P[Z_n = z].$$

Pravděpodobnost $\pi^0(z) \in [0,1]$ *nazveme počáteční rozdělení náhodné veličiny* Z_0*.*

Definice 4 (Pravděpodobnost přechodu)**.** *Nechť $c, z \in \mathbb{S}$. Pravděpodobnost přechodu ze stavu c v čase n do stavu z v čase $n+1$ definujeme předpisem*

$$p_{n+1}(c, z) = P[Z_{n+1} = z | Z_n = c].$$

Následující tvrzení ukazuje, že rozdělení veličiny Z_{n+1} nezávisí na minulosti, pokud známe současný stav Z_n. Toto tvrzení bude užitečné v důkazech uvedených v dalších kapitolách.

Tvrzení 5. *Nechť $n \geq 1$, $C_0, C_1, \dots \subset \mathbb{S}$ a $z_n, z_{n+1} \in \mathbb{S}$. Pak platí*

$$\begin{aligned} &P[Z_{n+1} = z_{n+1}, Z_n = z_n, Z_{[0,n-1]} \in C_{[0,n-1]}] \\ &= P[Z_{n+1} = z_{n+1}, Z_n = z_n] P[Z_{[0,n-1]} \in C_{[0,n-1]} | Z_n = z_n] \quad (1.2) \\ &= p_{n+1}(z_n, z_{n+1}) P[Z_{[0,n-1]} \in C_{[0,n-1]} | Z_n = z_n] \pi^n(z_n) \quad (1.3) \\ &= p_{n+1}(z_n, z_{n+1}) P[Z_{[0,n-1]} \in C_{[0,n-1]}, Z_n = z_n]. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Důkaz. Toto tvrzení vychází z rovnosti

$$\begin{aligned} &P[Z_{[n+1,m]} \in C_{[n+1,m]}, Z_n = z_n, Z_{[0,n-1]} \in C_{[0,n-1]}] \\ &\quad = P[Z_{[n+1,m]} \in C_{[n+1,m]} | Z_n = z_n] P[Z_{[0,n-1]} \in C_{[0,n-1]} | Z_n = z_n] \pi^n(z_n), \end{aligned}$$

jejíž důkaz dostaneme z vlastností podmíněných pravděpodobností a věty 2.1 v knize Prášková a Lachout (2020, strana 17).

□

Definice 6 (Homogenní markovské řetězce s diskrétním časem)**.** *Markovský řetězec nazýváme homogenní markovský řetězec, jestliže platí, že*

$$p_{n+1}(c, z) = p(c, z),$$

pro všechny $c, z \in \mathbb{S}$, tudíž pravděpodobnosti přechodu ze stavu c do stavu z nezávisí na čase.

Pro takto definovanou funkci $p : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to [0,1]$ platí $\sum_{z \in \mathbb{S}} p(c,z) = 1$ pro každé $c \in \mathbb{S}$.

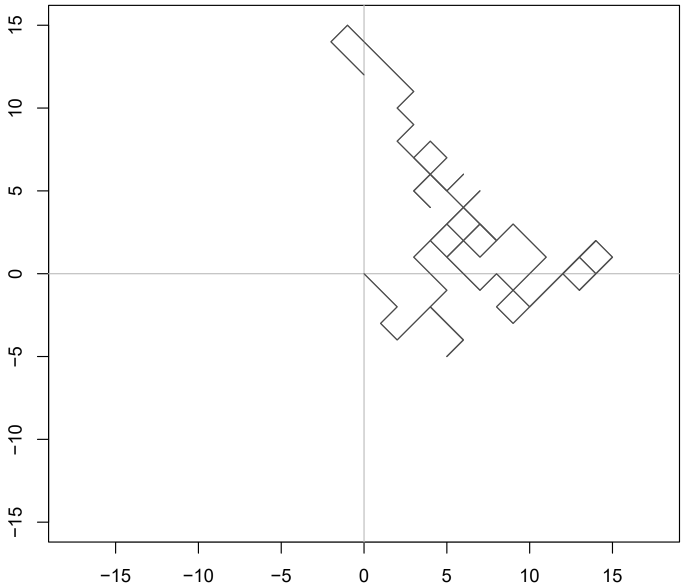
Je-li $\mathbb{S}$ konečná množina, je možné ji přepsat do tvaru $\mathbb{S} = \{1, 2, \dots, d\}$ a zavést značení

$$\pi_i^n := \pi^n(i), \quad p_{ij} := p(i,j).$$

Poté lze $\pi^n = (\pi_1^n, \dots, \pi_d^n)$ interpretovat jako d-rozměrný řádkový vektor (nebo řádkovou matici) a $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{S}}$ jako matici $d \times d$. Občas tedy používáme výrazy jako *vektor pravděpodobnosti počátečního rozdělení* a *matice přechodových pravděpodobností* (resp. přechodová matice).

1.2 Náhodná procházka

Po zbytek této práce budeme $(Z_n, n \geq 0)$ uvažovat jako homogenní markovský řetězec s diskrétním časem. Konkrétně budeme uvažovat dvourozměrné markovské řetězce. Takovéto řetězce je možné ilustrativně ukázat na příkladu *náhodné procházky*, jakožto speciálního typu markovského řetězce.



Obrázek 1.1: Symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}^2$

Definice 7 (Náhodná procházka)**.** *Nechť* $(\boldsymbol{X}_n, n = 0{,}1{,}2,\dots)$ *je posloupnost náhodných veličin na* $\mathbb{Z}^d$*. Řekneme, že*

$$(\boldsymbol{X}_n, n = 0{,}1{,}2,\dots) \tag{1.5}$$

je náhodná procházka na $\mathbb{Z}^d$ *pokud jsou náhodné veličiny*

$$\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1, \dots$$

stejně rozdělené a náhodné veličiny

$$\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1, \dots$$

jsou nezávislé. Pro $n \geq 1$ *je náhodná veličina* $\boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{X}_{n-1}$ *krok náhodné procházky v čase* n*. Hodnota* $\boldsymbol{X}_n$ *je stav náhodné procházky v čase* n *a* $\boldsymbol{X}_0$ *je počáteční stav.*

Definice 8 (Symetrická náhodná procházka)**.** *Náhodná procházka* (1.5) *na* $\mathbb{Z}^d$ *se nazývá symetrická, pokud mají náhodné veličiny* $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_0$ *a* $\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}_1$ *stejné rozdělení.*

Definice 9 (Jednoduchá náhodná procházka)**.** *Náhodná procházka* (1.5) *se nazývá jednoduchá, pokud hodnoty* $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_0$ *patří do množiny* $\{\pm e_i, i = 1,\dots,d\}$*, kde* e_i *je standardní bázový vektor v* $\mathbb{R}^d$ [1]*. Tedy náhodná procházka* (1.5) *je jednoduchá symetrická, pokud*

$$P[\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_0 = \pm e_i] = \frac{1}{2d}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

[1] Připomeňme, že standardní bázový vektor e_i je vektor, jehož i-tý prvek je roven 1 a všechny ostatní prvky jsou rovny 0.

Příklad 10. Nechť je posloupnost náhodných veličin $(X_n, n = 0,1,2,\dots)$ jednoduchá symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}$ začínající v nule a nechť je posloupnost $(Y_n, n = 0,1,2,\dots)$ nezávislá kopie $(X_n, n = 0,1,2,\dots)$, tedy jednoduchá symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}$ začínající v 0, nezávislá na $(X_n, n = 0,1,2,\dots)$.

Potom je posloupnost uspořádaných dvojic náhodných veličin $(Z_n = (X_n,Y_n),$ $n = 0, 1, 2, \dots)$ symetrická (ne však jednoduchá) náhodná procházka na $\mathbb{Z}^2$, neboť

$$(X_1 - X_0,Y_1 - Y_0),\ \ (X_2 - X_1,Y_2 - Y_1),\ \ \dots$$

jsou nezávislé a stejně rozdělené tak, že

$$P[Z_n - Z_{n-1} = \pm e_1 \pm e_2] = P[X_n - X_{n-1} = \pm 1]P[Y_n - Y_{n-1} = \pm 1] = 1/4.$$

Tato rovnost popisuje pravděpodobnost, že náhodná procházka se posune o určitý krok v daném směru, kde Z značí pohyb na diagonále.

Na obrázku 1.1 je zobrazena tato procházka s vyznačenou cestou po 100 krocích s počátkem v $Z_n = (0,0)$.

Detailněji lze pravděpodobnosti různých kroků této procházky rozepsat takto:

$$\begin{aligned}
&P[Z_n - Z_{n-1} = e_1 + e_2] = P[X_n - X_{n-1} = 1]P[Y_n - Y_{n-1} = 1] = 1/4,\\
&P[Z_n - Z_{n-1} = -e_1 - e_2] = P[X_n - X_{n-1} = -1]P[Y_n - Y_{n-1} = -1] = 1/4,\\
&P[Z_n - Z_{n-1} = e_1 - e_2] = P[X_n - X_{n-1} = 1]P[Y_n - Y_{n-1} = -1] = 1/4,\\
&P[Z_n - Z_{n-1} = -e_1 + e_2] = P[X_n - X_{n-1} = -1]P[Y_n - Y_{n-1} = 1] = 1/4.
\end{aligned}$$

2. Filtrování diskrétních markovských řetězců

2.1 Úvod do problematiky filtrace

V této kapitole se budeme zabývat situací, kde $(Z_n = (X_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots)$ je dvourozměrný homogenní markovský řetězec s hodnotami ze spočetné množiny $C = A \times B$, kde hodnoty X leží v množině A a hodnoty Y leží v množině B.

Uvažujme tedy dvojici náhodných veličin X_n a Y_n v daném čase n. X_n je nějaký proces nebo signál, jež se snažíme zjistit a měříme ho. To, co však skutečně naměříme, je pozorování Y_n, jež je signál X_n s nějakou chybou. Y_n je proto zašumělý signál, tj. nějakým způsobem nepřesné pozorování. Pro každé fixní n máme dostupnou celou historii pozorování $Y_0, \dots, Y_n$ a pomocí ní se snažíme odhadnout X_n.

Příklad 11. Představme si, že máme senzor, který každou minutu měří výšku mořské hladiny a generuje tak markovský řetězec $(Z_n = (X_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots)$, kde X_n reprezentuje výšku mořské hladiny v čase n a Y_n reprezentuje výstup senzoru.

V praxi však může být signál senzoru zkreslený šumem způsobeným vlivy prostředí a chybami měření, takže pro získání co nejpřesnějšího odhadu výšky mořské hladiny je potřeba použít filtraci. Specificky bychom zde použili filtr, který by v každém okamžiku vycházel z předchozího odhadu výšky hladiny a nového naměřeného signálu a na základě toho by odhadl aktuální výšku hladiny a výstup filtru.

Tímto způsobem bychom využili diskrétní markovský řetězec a filtraci pro získání co nejpřesnějšího odhadu výšky mořské hladiny na základě naměřených dat.

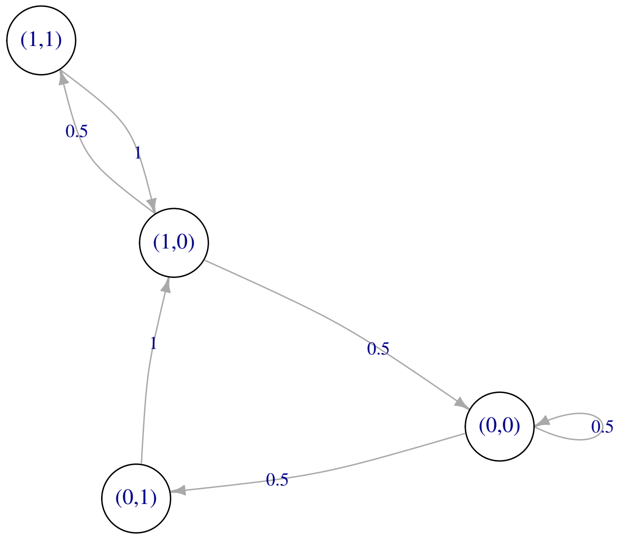
Často se lze setkat s možností, že nejen $(Z_n = (X_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots)$, ale i jeho jednotlivé složky jsou markovskými řetězci. To však není pravidlem. Ilustračně takovýto případ, kde $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ nebude markovský řetězec, ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 12. Uvažujme dvourozměrný homogenní markovský řetězec

$$(Z_n = (X_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots),$$

jehož stavový prostor je $\mathbb{S} = \{(0{,}0), (0{,}1), (1{,}0), (1{,}1)\}$ a počáteční rozdělení je rovnoměrné na množině všech stavů. Pravděpodobnosti přechodu definovány pomocí následující přechodové matice a vizuálně vysvětleny pomocí obrázku 2.1.

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|cccc} & (0{,}0) & (0{,}1) & (1{,}0) & (1{,}1) \\ \hline (0{,}0) & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ (0{,}1) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1{,}0) & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ (1{,}1) & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$



Obrázek 2.1: Dvourozměrný markovský řetězec

Posloupnost $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ není markovský řetězec z definice 2, kvůli porušení markovské vlastnosti (1.1), což lze ukázat například na

$$P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_0 = 0] \neq P[X_2 = 1 | X_1 = 1].$$

Protože je počáteční rozdělení rovnoměrné, platí $p_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^{\mathrm{T}}$. Vynásobením tohoto vektoru přechodovou maticí dostaneme $p_1 = p_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{P} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. Proto $P[X_1 = 1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$. Pravá část rovnosti potom vypadá takto:

$$P[X_2 = 1 | X_1 = 1] = \frac{P[X_2 = 1, X_1 = 1]}{P[X_1 = 1]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot 1}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5},$$

kde čitatel je součet pravděpodobností cest $(1, 0) \to (1, 1)$ a $(1, 1) \to (1, 0)$ z X_1 do X_2.
Levá část rovnosti je dále:

$$\begin{aligned} P[X_2 = 1 | X_1 = 1, X_0 = 0] &= \frac{P[X_2 = 1, X_1 = 1, X_0 = 0]}{P[X_1 = 1, X_0 = 0]} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Čitatel zde popisuje cesty z času 0 v souřadnici $(0, 0)$, jež mají nulovou pravděpodobnost přechodu do hodnoty 1 a pravděpodobnost cesty $(0, 1) \to (1, 0) \to (1, 1)$ a $(0, 1) \to (1, 0)$ z X_0 do X_1.
Markovská vlastnost (1.1) tedy neplatí a $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ není markovský řetězec.

Důležitou roli ve filtrování hrají podmíněné střední hodnoty. Máme-li k dispozici pouze pozorování $Y_{[0,n]}$, klademe si otázku, jakým způsobem můžeme využít tyto informace, abychom co nejlépe odhadli X_n.

Definice 13 (Odhad). *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny a nechť f je měřitelná funkce definovaná na množině obsahující všechny hodnoty Y. Potom $f(Y)$ je odhad X založený na hodnotě Y.*

Definice 14 (Optimální odhad). *Nechť X je reálná náhodná veličina s konečným druhým momentem. Potom odhad $g(Y)$ je optimální v kvadratickém smyslu pro dané Y, pokud g nabývá reálných hodnot a*

$$E|X - g(Y)|^2 \leq E|X - f(Y)|^2$$

pro všechny reálné odhady $f(Y)$ proměnné X.

Tvrzení 15. *Nechť Y je diskrétní náhodná veličina a X diskrétní reálná náhodná veličina s konečným druhým momentem. Potom $E(X|Y)$ je odhad s minimální střední kvadratickou chybou proměnné X, který je měřitelnou funkcí Y. Každý jiný odhad náhodné veličiny X, který je měřitelnou funkcí Y a má minimální kvadratickou chybu, se s $E(X|Y)$ shoduje skoro jistě.*

Z tohoto tvrzení plyne, že pro reálné X_n, tedy pro $A \subset \mathbb{R}$ a $a \in A$, by byl intuitivně nejlepší odhad X_n právě pomocí podmíněné střední hodnoty

$$\widehat{X_n} = E(X_n|Y_{[0,n]}) = \sum_{a \in A} aP[X_n = a|Y_{[0,n]}]. \tag{2.1}$$

Pro tento odhad a přímé použití rovnosti je však velkou nevýhodou, že pokud dostaneme nové pozorování Y_{n+1} a chceme výpočet (2.1) aplikovat dále na $n+1$ místo n, tak se $\widehat{X}_{n+1}$ musí přepočítat pro celou posloupnost dat $Y_{[0,n+1]}$.

Přirozený postup tedy bude „komprese“ informací v $Y_{[0,n]}$ zavedením funkcí

$$h_1(Y_{[0,n]}), \ldots, h_m(Y_{[0,n]}) \tag{2.2}$$

(kde m je stejné pro všechna n) tak, že dostaneme-li nové pozorování Y_{n+1}:

1. Díky nalezení vhodných funkcí (2.2) budeme schopni vypočítat nové funkce $h_1(Y_{[0,n+1]}), \ldots, h_m(Y_{[0,n+1]})$ pouze na základě funkcí (2.2) a nového pozorování Y_{n+1}.

2. Hodnotu $E(X_n|Y_{[0,n]})$ budeme moci vyjádřit pomocí určité kombinace našich funkcí (2.2) tak, že budeme potřebovat pouze těchto m hodnot funkcí, abychom našli $\widehat{X_n}$ pro každé n.

Jednou z nejjednodušších funkcí, na které můžeme ilustračně ukázat jednoduchost aktualizace novým měřením Y_{n+1}, je aritmetický průměr dosavadních pozorování. Na následujícím příkladě si ukážeme, jak by taková funkce h_1 vypadala.

Příklad 16. Uvedeme $h_1(Y_{[0,n]})$, jako jednoduchý průměr měření $Y_{[0,n]}$:

$$h_1(Y_{[0,n]}) = \frac{(Y_0 + ... + Y_n)}{(n+1)}.$$

Tato funkce zachovává informace o průměrné hodnotě měření. Dostaneme-li nové měření Y_{n+1}, funkci h_1 můžeme snadno aktualizovat bez nutnosti přepočítávat celou historii:

$$h_1(Y_{[0,n+1]}) = \frac{(n+1) \cdot h_1(Y_{[0,n]}) + Y_{n+1}}{(n+2)}.$$

2.2 Filtrace

V této části kapitoly představíme konkrétní rovnice, jež využijeme pro výpočet odhadu X_n při pozorovaném $Y_{[0,n]}$. Jak jsme již dříve uvedli, předpokládáme, že máme markovský řetězec s diskrétním časem

$$(Z_n, n = 0, 1, \dots) = \Big((X_n, Y_n), n = 0, 1, \dots\Big),$$

který je homogenní a se stavovým prostorem $C = A \times B$. Dále p značí pravděpodobnost přechodu takovou, že pro $r, u \in A$ a $s, v \in B$

$$q^{r,u}(s, v) = p((r, s), (u, v)) := P[(X_{n+1},Y_{n+1}) = (u,v)|(X_n,Y_n) = (r,s)]. \quad (2.3)$$

K důkazu filtračních vět bude potřeba uvést lemma obsahující nenormalizované filtrační rovnice. To, že jsou nenormalizované zde znamená, že jejich výstup není upravený tak, aby pravděpodobnosti všech možných stavů systému v součtu byly rovny 1. Rovnice uvedené v pozdější větě 19 již normalizované jsou.

V lemmatu uvedeme rekurzivní rovnice pro

$$\phi_n^a(b_{[0,n]}) := P[X_n = a, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]. \quad (2.4)$$

Lemma 17. *Nechť $n \geq 0$, $a, r \in A$ a $b_0, \dots, b_{n+1} \in B$ potom*

$$\phi_{n+1}^a(b_{[0,n+1]}) = \sum_{r \in A} \phi_n^r(b_{[0,n]}) q^{r,a}(b_n, b_{n+1}), \quad (2.5)$$

$$P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}] = \sum_{r,a \in A} \phi_n^r(b_{[0,n]}) q^{r,a}(b_n, b_{n+1}). \quad (2.6)$$

Důkaz. Rovnost (2.5) lze z rovnosti (2.4) rozepsat jako

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}^a(b_{[0,n+1]}) &= P[X_{n+1} = a, Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}] \\
&= P[Z_{n+1} = (a, b_{n+1}), Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}] \\
&= \sum_{r \in A} P[Z_{n+1} = (a, b_{n+1}), X_n = r, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}] \\
&= \sum_{r \in A} P[Z_{n+1} = (a, b_{n+1}), Z_n = (r,b_n), Y_{[0,n-1]} = b_{[0,n-1]}].
\end{aligned}$$

Nyní využijeme tvrzení 5, kde postupně první rovnost vychází z rovnosti (1.2), druhá z rovnosti (1.3) a třetí z rovnosti (1.4). Dále již pouze využijeme značení (2.3).

$$\begin{aligned}
&\sum_{r \in A} P[Z_{n+1} = (a, b_{n+1}), Z_n = (r, b_n), Y_{[0,n-1]} = b_{[0,n-1]}] \\
&= \sum_{r \in A} P[Z_{n+1} = (a, b_{n+1}), Z_n = (r, b_n)] P[Y_{[0,n-1]} = b_{[0,n-1]} | Z_n = (r, b_n)] \\
&= \sum_{r \in A} p\Big((r, b_n),(a, b_{n+1})\Big) P[Y_{[0,n-1]} = b_{[0,n-1]} | Z_n = (r, b_n)] P[Z_n = (r, b_n)] \\
&= \sum_{r \in A} p\Big((r, b_n),(a, b_{n+1})\Big) P[Y_{[0,n-1]} = b_{[0,n-1]}, Z_n = (r, b_n)] \\
&= \sum_{r \in A} q^{r,a}(b_n, b_{n+1}) P[X_n = r,Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}] \\
&= \sum_{r \in A} q^{r,a}(b_n, b_{n+1}) \phi_n^r(b_{[0,n]}).
\end{aligned}$$

Čímž je rovnost (2.5) dokázána.
Dále z již dokázaného

$$\phi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = P[X_{n+1} = a, Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}] = \sum_{r\in A} q^{r,a}(b_n, b_{n+1})\phi^r_n(b_{[0,n]}),$$

dostaneme součtem přes všechna $a \in A$ rovnost

$$P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}] = \sum_{r,a\in A} q^{r,a}(b_n, b_{n+1})\phi^r_n(b_{[0,n]}).$$

Čímž je dokázána i druhá rovnost (2.6).

□

Definice 18. *Nechť X_n je náhodná veličina a $Y_{[0,n]}$ je posloupnost náhodných veličin. Definujeme $\pi_n(b_{[0,n]}) = (\pi^a_n(b_{[0,n]}), a \in A)$ jako posteriorní rozdělení X_n při daném $Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}$ tak, že pro $n \geq 0, a \in A$ a $b_0, \ldots, b_n \in B$ platí*

$$\pi^a_n(b_{[0,n]}) = P[X_n = a | Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]. \tag{2.7}$$

Dále pravděpodobnost $Y_{n+1} = b_{n+1}$ za podmínky $Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}$ vyjádříme jako

$$\xi_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = P[Y_{n+1} = b_{n+1} | Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]. \tag{2.8}$$

V důkazu následující věty o filtračních rovnicích budeme několikrát dělit nebo násobit výrazy funkcemi, jež mohou nabývat hodnoty nula. Zavedeme proto úmluvu, že

$$\frac{c}{0} := 0,$$

jež bude lépe vysvětlena v pozdější poznámce 20.

Dále představíme značení tučného $\boldsymbol{\pi}_n$, pro něž platí:

$$\boldsymbol{\pi}_n = \pi_n(Y_{[0,n]}).$$

Stojí za povšimnutí, že $\pi_n(Y_{[0,n]})$ značí vektor, kdežto $\boldsymbol{\pi}^r_n = P[X_n = r | Y_{[0,n]}]$ je náhodná veličina pro konkrétní $r \in A$. Tučnost zde zdůrazňuje, že se bude jednat o náhodnou veličinu, kde náhodnost spočívá v podmínce. Dále značíme

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \xi_{n+1}(Y_{[0,n+1]}).$$

Věta 19. *Nechť $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $a, r \in A$ a $b_0, \ldots, b_{n+1} \in B$, pak platí*

$$\pi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = \frac{1}{\xi_{n+1}(b_{[0,n+1]})} \sum_{r\in A} \pi^r_n(b_{[0,n]}) q^{r,a}(b_n, b_{n+1}), \tag{2.9}$$

$$\xi_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = \sum_{r,a\in A} \pi^r_n(b_{[0,n]}) q^{r,a}(b_n, b_{n+1}). \tag{2.10}$$

Speciálně

$$\boldsymbol{\pi}^a_{n+1} = \frac{1}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}} \sum_{r\in A} \boldsymbol{\pi}^r_n q^{r,a}(Y_n, Y_{n+1}), \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \sum_{r,a\in A} \boldsymbol{\pi}^r_n q^{r,a}(Y_n, Y_{n+1}). \tag{2.12}$$

Důkaz. Všimneme si, že z definice podmíněné pravděpodobnosti plyne

$$\begin{aligned}\phi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) &= P[X_{n+1} = a, Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]\\ &= P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]P[X_{n+1} = a|Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]\\ &= P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]\pi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Z této rovnosti a lemmatu 17 vidíme, že

$$\begin{aligned}P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]\pi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) &= \phi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]})\\ &= \sum_{r\in A}\phi^r_n(b_{[0,n]})q^{r,a}(b_n, b_{n+1})\\ &= \sum_{r\in A}P[X_n = r, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]q^{r,a}(b_n, b_{n+1})\\ &= \sum_{r\in A}P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]P[X_n = r|Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]q^{r,a}(b_n, b_{n+1})\\ &= P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]\sum_{r\in A}P[X_n = r|Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]q^{r,a}(b_n, b_{n+1})\\ &= P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]\sum_{r\in A}\pi^r_n(b_{[0,n]})q^{r,a}(b_n, b_{n+1}).\end{aligned}$$

Tedy

$$P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]\pi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]\sum_{r\in A}\pi^r_n(b_{[0,n]})q^{r,a}(b_n, b_{n+1}).$$

Nyní už jen vydělíme obě strany této rovnosti výrazem $P[Y_{[0,n+1]} = b_{[n+1]}]$ a dostaneme

$$\pi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = \frac{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}{P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]}\sum_{r\in A}\pi^r_n(b_{[0,n]})q^{r,a}(b_n, b_{n+1}),$$

kde

$$\begin{aligned}\frac{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}{P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]} &= \frac{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}{P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}\\ &= \frac{1}{P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}|Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]} = \frac{1}{\xi_{n+1}(b_{[0,n+1]})},\end{aligned}$$

čímž je dokázána rovnost (2.9) pro $P[Y_{[0,n+1]} = b_{[n+1]}] > 0$. Avšak i pokud $P[Y_{[0,n+1]} = b_{[n+1]}] = 0$, pak rovnost (2.9) platí, protože potom platí i tyto rovnosti

$$\pi^a_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = 0, \qquad \xi_{n+1}(b_{[0,n+1]}) = 0, \qquad \frac{1}{\xi_{n+1}(b_{[0,n+1]})} = 0.$$

Dále rovnost (2.6) z lemmatu 17 lze rozepsat jako

$$P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}] = \sum_{r,a\in A}P[X_n = r, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]q^{r,a}(b_n, b_{n+1}).$$

Vydělme obě strany výrazem $P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]$. Levá strana je poté rovna

$$\begin{aligned}\frac{P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}]}{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]} &= \frac{P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}\\ &= P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}|Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}] = \xi_{n+1}(b_{[0,n+1]})\end{aligned}$$

a pravá strana

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]} \sum_{r,a \in A} P[X_n = r, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}] q^{r,a}(b_n, b_{n+1}) \\
&= \sum_{r,a \in A} \frac{P[X_n = r, Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]}{P[Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}]} q^{r,a}(b_n, b_{n+1}) \\
&= \sum_{r,a \in A} P[X_n = r | Y_{[0,n]} = b_{[0,n]}] q^{r,a}(b_n, b_{n+1}) \\
&= \sum_{r,a \in A} \pi_n^r(b_{[0,n]}) q^{r,a}(b_n, b_{n+1}).
\end{aligned}$$

Čímž je dokázána i druhá rovnost (2.10) a tím celá věta.

□

Poznámka 20. *Pro nějaká $b_{[0,n+1]}$ se může stát, že v rámci výpočtu budeme dělit nulou, což se může stát pouze pokud $P[Y_{[0,n+1]} = b_{[0,n+1]}] = 0$, tudíž trajektorie $b_{[0,n+1]}$ se nikdy neobjeví jako výsledek pozorování. Pro tyto trajektorie je hodnota $\pi_{n+1}^a(b_{[0,n+1]})$ irelevantní, a proto jsme mohli stanovit $\frac{c}{0} = 0$ pro jakoukoliv konstantu c.*

2.3 Vybrané problémy

V následujícím příkladě aplikujeme větu 19 na nekonkrétních hodnotách Y_n a X_n náhodné procházky na $\mathbb{Z}^2$, na které názorně ukážeme, jak kombinací vhodných funkcí dostaneme nejlepší možný odhad, tj. ukážeme bod 2 vlastností funkcí (2.2), jež byly zkonkretizovány právě ve větě 19.

Příklad 21. Mějme jednoduchou symetrickou náhodnou procházku

$$(Z_n = (X_n, Y_n), n = 0, 1, 2, \dots)$$

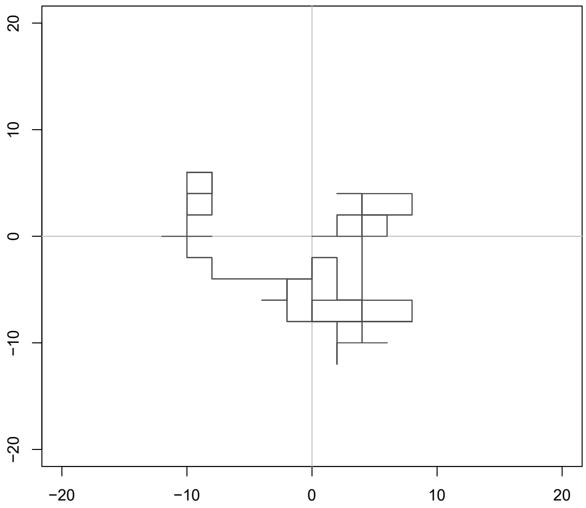
na $\mathbb{Z}^2$. Pro takovou procházku platí, že se v každém kroku náhodně rozhodneme, jestli se posuneme o jednotku v kladném nebo záporném směru na osách x a y. Přitom každý možný posun má stejnou pravděpodobnost 1/4. Toto je graficky ukázáno na grafu 2.2, jež znázorňuje cestu náhodně generované procházky po 100 krocích s počátkem v bodě $Z_n = (0, 0)$.

Nyní ukážeme, že v takovémto příkladě bude výraz na levé straně rovnosti (2.12) z věty 19 skoro jistě roven [1]

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = P[Y_{n+1} = a | Y_n] = \frac{1}{2} I_{Y_n = Y_{n+1}} + \frac{1}{4} I_{Y_n \neq Y_{n+1}}. \tag{2.14}$$

Rozlišujeme dvě možnosti, buď $Y_n = Y_{n+1}$ nebo $Y_n \neq Y_{n+1}$. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ se pohyb odehraje na ose x, na níž se posuneme o ± 1. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ se pohyb odehraje na ose y, na té se dále s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ posuneme o 1 bod nahoru a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ se posuneme o -1 bod dolů.

[1] V tomto příkladě, i dál v textu, I s dolním indexem značí indikátorovou funkci.



Obrázek 2.2: Jednoduchá symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}^2$

To lze ukázat pro $P[Y_{n+1} = a|Y_n = b]$, přičemž musí platit $|a - Y_n| = 1$.

$$P[Y_{n+1} = a|Y_n = b] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{,pro } a = b \\ \frac{1}{4} & \text{,pro } a = b + 1 \\ \frac{1}{4} & \text{,pro } a = b - 1. \end{cases}$$

Proto rovnost (2.14) platí.
Pro tento konkrétní příklad, pak rovnost (2.11) vypadá následovně

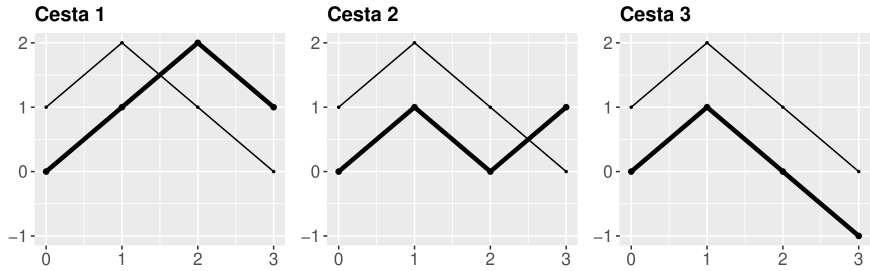
$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}^a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_n^{a-1} + \boldsymbol{\pi}_n^{a+1}) I_{Y_n = Y_{n+1}} + \boldsymbol{\pi}_n^a I_{Y_n \neq Y_{n+1}}. \tag{2.15}$$

Pokud zaznamenáme, že jsme se pohnuli na ose y, víme, že jsme se nepohnuli na ose x, tedy naše předpověď se nezmění a je stejná jako předpověď v předchozím kroku, tj. $\boldsymbol{\pi}_{n+1}^a = \boldsymbol{\pi}_n^a$.

Kdežto, když se nepohneme na ose y, víme, že jsme se museli pohnout na ose x, ale nevíme, jestli jsme do tohoto bodu přišli zprava nebo zleva, takže zprůměrujeme předchozí dvě předpovědi, tj. $\boldsymbol{\pi}_{n+1}^a = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_n^{a-1} + \boldsymbol{\pi}_n^{a+1})$.

Tuto rovnost lze ukázat nejen intuitivně, ale i pomocí věty 19:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_{n+1}^a =& \frac{1}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}} \sum_{r \in A} \boldsymbol{\pi}_n^r q^{r,a}(Y_n, Y_{n+1}), \\ \boldsymbol{\pi}_{n+1}^a =& \frac{1}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}} \pi_n^a q^{a,a}(Y_n, Y_{n+1}) I_{Y_n \neq Y_{n+1}} \\ &+ \frac{1}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}} \boldsymbol{\pi}_n^{a+1} q^{a+1,a}(Y_n, Y_{n+1}) I_{Y_n = Y_{n+1}} \\ &+ \frac{1}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}} \boldsymbol{\pi}_n^{a-1} q^{a-1,a}(Y_n, Y_{n+1}) I_{Y_n = Y_{n+1}}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.3: Cesty náhodné procházky $X_{[0,3]}$ na $\mathbb{Z}$, pro známé $Y_{[0,3]} = (1, 2, 1, 0)$

Z první části příkladu víme, že $\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \frac{1}{2} I_{Y_n = Y_{n+1}} + \frac{1}{4} I_{Y_n \neq Y_{n+1}}$. Tedy

$$\boldsymbol{\pi}^a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \boldsymbol{\pi}^a_n \frac{1}{4} I_{Y_n \neq Y_{n+1}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\pi}^{a+1}_n + \boldsymbol{\pi}^{a-1}_n) \frac{1}{4} I_{Y_n = Y_{n+1}},$$

z čehož vidíme, že i podle věty 19 rovnost (2.15) platí.

Jako další uvedeme příklad s již konkrétními hodnotami pozorování $Y_{[0,3]}$. Popíšeme na něm, jak kombinace funkcí vytvoří nejlepší odhad, i jak jednoduchá je aktualizace pomocí předchozích výpočtů. Tento příklad rozšíříme ve třetí kapitole.

Příklad 22. Nechť $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ je jednoduchá symetrická náhodná procházka na $\mathbb{Z}$, začínající v nule. Nechť $W_0, W_1, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s pravděpodobností

$$P[W_0 = \pm 1] = \frac{1}{2}.$$

Předpokládáme, že $(X_0, \dots, X_n)$ a $(W_0, \dots, W_n)$ jsou nezávislé pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. Označíme $Y_n = X_n + W_n$ a budeme hledat pravděpodobnost

$$P[X_3 = 1 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 0]. \tag{2.16}$$

Procházka se tedy bude chovat tak, že naměříme signál $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ a skutečný signál $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ má vždy hodnotu o 1 vyšší nebo nižší, než naměřené Y. Jelikož X začíná vždy v nule, na základě známé cesty $Y_{[0,3]} = (1, 2, 1, 0)$ si všimneme, že jediné možné cesty pro X jsou:

$$0 \to 1 \to 2 \to 1$$
$$0 \to 1 \to 0 \to 1$$
$$0 \to 1 \to 0 \to -1.$$

Všechny tyto možnosti jsou graficky ukázány na obrázku 2.3, kde tučná křivka značí cestu X a tenčí křivka značí cestu Y.

Zřejmě vždy v každé cestě platí $X_1 = 1$, neboť když $Y_1 = 2$, tak X_1 může být ze zadání procházky pouze v hodnotě 3 nebo 1. Dále víme, že procházka začíná v nule, tj. $X_0 = 0$ a že další krok může být od této hodnoty vzdálený pouze o jednotku. Proto dostáváme pouze tři možnosti cesty náhodné procházky X a pravděpodobnost (2.16) bude zjevně

$$P[X_3 = 1 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 0] = \frac{2}{3}.$$

Hledanou pravděpodobnost lze také vypočíst z věty 19. Podle (2.7)

$$\pi_3^1(1,2,1,0) = P[X_3 = 1|Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 0].$$

Za využití rovnosti (2.9)

$$\pi_3^1(1,2,1,0) = \frac{1}{\xi_3(1,2,1,0)} \sum_{r\in A} \pi_2^r(1,2,1) q^{r,1}(1,0). \tag{2.17}$$

Zde si uvědomíme, že r může ze zadání nabývat pouze hodnot 0 nebo 2. Proto dále stačí spočítat

$$\pi_2^0(1,2,1) = \frac{1}{\xi_2(1,2,1)} \sum_{r\in A} \pi_1^r(1,2) q^{r,0}(2,1),$$
$$\pi_2^2(1,2,1) = \frac{1}{\xi_2(1,2,1)} \sum_{r\in A} \pi_1^r(1,2) q^{r,2}(2,1).$$

Pro první rovnici $r \in \{1\}$. Pro druhou rovnici taktéž $r \in \{1\}$, neboť možnost $X_2 = 3$ nemůže nastat z $X_1 = 1$.
Dále:

$$\pi_1^1(1,2) = \frac{1}{\xi_1(1,2)} \sum_{r\in A} \pi_0^r(1) q^{r,1}(1,2).$$

Zde $r \in \{0\}$, protože víme, že procházka začíná v nule. Rovnost

$$\pi_0^0(1) = P[X_0 = 0|Y_0 = 1] = 1,$$

platí ze zadání.

Dále dopočítáme všechny hodnoty $\xi_1(1,2), \xi_2(1,2,1), \xi_3(1,2,1,0)$ a nenulové pravděpodobnosti přechodu $q^{r,a}(b_n, b_{n+1})$. Co se pravděpodobností přechodu týče, lze díky předpokladu nezávislosti posloupnosti $W_0, W_1, \ldots$ a vzájemné nezávislosti $(X_0, \ldots, X_n)$ a $(W_0, \ldots, W_n)$ ukázat, že

$$q^{0,1}(1,2) = P[X_{n+1} = 1, Y_{n+1} = 2|X_n = 0, Y_n = 1] = \frac{1}{4}.$$

Ze zadání víme, že

$$Y_{n+1} = X_{n+1} + W_{n+1} \to W_{n+1} = 1$$
$$Y_n = X_n + W_n \to W_n = 1.$$

Proto lze pravděpodobnost získat takto:

$$\begin{aligned}
q^{0,1}(1,2) &= P[X_{n+1} = 1, W_{n+1} = 1|X_n = 0, W_n = 1] \\
&= \frac{P[X_{n+1} = 1, W_{n+1} = 1, X_n = 0, W_n = 1]}{P[X_n = 0, W_n = 1]} \\
&= \frac{P[X_{n+1} = 1, X_n = 0]}{P[X_n = 0]} \cdot \frac{P[W_{n+1} = 1, W_n = 1]}{P[W_n = 1]} \\
&= P[X_{n+1} = 1|X_n = 0] \cdot \frac{P[W_{n+1} = 1] \cdot P[W_n = 1]}{P[W_n = 1]} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Toto platí pro všechny pravděpodobnosti přechodu $q^{r,a}(b_n, b_{n+1})$, jež jsou nenulové, tj. pro pravděpodobnosti, jež neporušují zadání.
Hodnoty $\xi_1(1,2), \xi_2(1,2,1), \xi_3(1,2,1,0)$ je možné dopočítat podle věty 19 jako

$$\xi_1(1,2) = \sum_{r,a \in A} \pi_0^r(0) q^{r,a}(1,2).$$

Hodnota r je zde jistě 0, protože procházka musí začít v bodě nula. Proto, jak jsme již uvedli, $\pi_0^0(1) = P[X_0 = 0 | Y_0 = 1] = 1$. Hodnota a bude zde i v dalších výpočtech značit hodnotu, do které se může X dostat z hodnoty r, což je pro tento případ $a \in \{-1, 1\}$. Pak

$$\xi_1(1,2) = \sum_{a \in A} q^{0,a}(1,2) = q^{0,-1}(1,2) + q^{0,1}(1,2) = 0 + \frac{1}{4}.$$

Pravděpodobnost $q^{0,-1}(1,2) = P[X_{n+1} = -1, Y_{n+1} = 2 | X_n = 0, Y_n = 1]$ je rovna nule, neboť X_{n+1} a Y_{n+1} nemohou být vzdálené o hodnotu větší než 1.
Dále

$$\xi_2(1,2,1) = \sum_{r,a \in A} \pi_1^r(1,2) q^{r,a}(2,1).$$

V tomto případě $r \in \{-1, 1\}$. Vypočteme tedy

$$\pi_1^{-1}(1,2) = P[X_1 = -1 | Y_0 = 1, Y_1 = 2] = 0$$

$$\pi_1^{1}(1,2) = P[X_1 = 1 | Y_0 = 1, Y_1 = 2] = 1.$$

Hodnota $a \in \{0, 2\}$, neboť nás zajímají jen nenulové pravděpodobnosti, tedy

$$\xi_2(1,2,1) = \sum_{a \in A} q^{1,a}(2,1) = q^{1,0}(2,1) + q^{1,2}(2,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Nakonec vypočteme

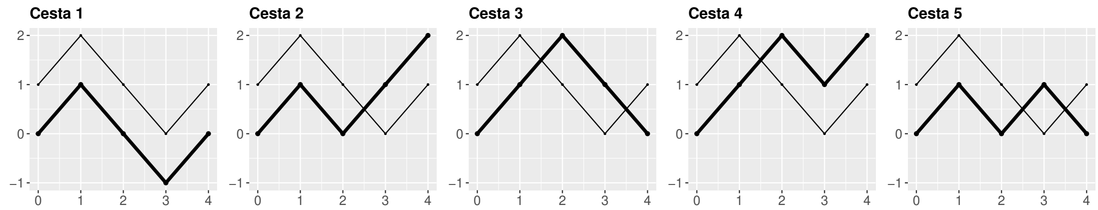
$$\xi_3(1,2,1,0) = \sum_{r,a \in A} \pi_2^r(1,2,1) q^{r,a}(1,0),$$

kde bude hodnota $r \in \{0,2\}$. Tentokrát jsou obě možnosti stejně pravděpodobné, neporušují pravidla procházky, a tudíž pro $r \in \{0, 2\}$ platí

$$\pi_2^r(1,2,1) = P[X_2 = r | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 1] = \frac{1}{2}.$$

Ještě zmíníme, že stejnou pravděpodobnost dostaneme i později výpočtem

$$\pi_2^0(1,2,1) = \frac{1}{\xi_2(1,2,1)} \sum_{r \in A} \pi_1^r(1,2) q^{r,0}(2,1) = \frac{1}{2},$$
$$\pi_2^2(1,2,1) = \frac{1}{\xi_2(1,2,1)} \sum_{r \in A} \pi_1^r(1,2) q^{r,2}(2,1) = \frac{1}{2}.$$



Obrázek 2.4: Cesty náhodné procházky $X_{[0,4]}$ na $\mathbb{Z}$, pro známé $Y_{[0,4]} = (1, 2, 1, 0, 1)$

Pro možné hodnoty $a \in \{-1, 1, 3\}$ pak

$$
\begin{aligned}
\xi_3(1,2,1,0) &= \sum_{a\in A} \pi_2^0(1,2,1)q^{0,a}(1,0) + \sum_{a\in A} \pi_2^2(1,2,1)q^{2,a}(1,0) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{a\in A} q^{0,a}(1,0) + \frac{1}{2}\sum_{a\in A} q^{2,a}(1,0) \\
&= \frac{1}{2}\Big(q^{0,-1}(1,0) + q^{0,1}(1,0)\Big) + \frac{1}{2}\Big(q^{2,1}(1,0) + q^{2,3}(1,0)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

Nyní už jen dosadíme do

$$
\begin{aligned}
\pi_3^1(1,2,1,0) &= \frac{1}{\xi_3(1,2,1,0)}\sum_{r\in A} \pi_2^r(1,2,1)q^{r,1}(1,0), && r\in\{0{,}2\} \\
\pi_2^0(1,2,1) &= \frac{1}{\xi_2(1,2,1)}\sum_{r\in A} \pi_1^r(1,2)q^{r,0}(2,1), && r\in\{1\} \\
\pi_2^2(1,2,1) &= \frac{1}{\xi_2(1,2,1)}\sum_{r\in A} \pi_1^r(1,2)q^{r,2}(2,1), && r\in\{1\} \\
\pi_1^1(1,2) &= \frac{1}{\xi_1(1,2)}\sum_{r\in A} \pi_0^r(1)q^{r,1}(1,2), && r\in\{0\}
\end{aligned}
$$

a tím dostaneme:

$$
\begin{aligned}
\pi_0^0(1) &= 1 \\
\pi_1^1(1,2) &= 4\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = 1 \\
\pi_2^2(1,2,1) &= 2\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
\pi_2^0(1,2,1) &= 2\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
\pi_3^1(1,2,1,0) &= \frac{8}{3}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\Big) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Zpětný výpočet nám dal stejný výsledek, jako naše intuitivní grafické řešení.

Pokud bychom dostali k dispozici další pozorování $Y_4 = 1$ a chtěli bychom vypočítat pravděpodobnost $P[X_4 = 0|Y_{[0,4]} = (1, 2, 1, 0{,}1)]$, z grafu 2.4 lehce vyčteme, že tato pravděpodobnost bude $\frac{3}{5}$. Pokud bychom tento výsledek chtěli ukázat pomocí věty 19, stačilo by nám dopočítat $\xi_4(1,2,1,0,1)$ a pomocí předchozích výpočtů znovu dosadit. Pak

$$\xi_4(1,2,1,0,1) = \sum_{r,a\in A} \pi_3^r(1,2,1,0)q^{r,a}(0,1),$$

kde $r \in \{-1,1\}$, protože $Y_3 = 0$ a $a \in \{-2,0,2\}$. Z předchozích výpočtů víme, že $\pi_3^1(1,2,1,0) = \frac{2}{3}$ tedy nutně $\pi_3^{-1}(1,2,1,0) = \frac{1}{3}$. Je třeba dávat pozor, jaké pravděpodobnosti přechodu jsou ze zadání možné. Potom

$$\begin{aligned}
\xi_4(1,2,1,0,1) &= \sum_{r,a\in A} \pi_3^r(1,2,1,0)q^{r,a}(0,1) \\
&= \frac{2}{3}\sum_{a\in A} q^{1,a}(0{,}1) + \frac{1}{3}\sum_{a\in A} q^{-1,a}(0{,}1) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Nyní už přímo dostaneme

$$\begin{aligned}
\pi_4^0(1,2,1,0,1) &= \frac{12}{5}\sum_{r\in A} \pi_3^r(1,2,1,0)q^{r,0}(0,1) \\
&= \frac{12}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Zavedení těchto filtračních rovnic nám skutečně zjednoduší výpočet, díky možnosti použít předchozí výsledky a aktualizovat využité rovnice pomocí nového pozorování.

3. Predikce diskrétních markovských řetězců

V této kapitole uvedeme problematiku predikce markovských řetězců. Budeme hledat hodnoty výrazu

$$\boldsymbol{\pi}^a_{n,m} = \pi^a_{n,m}(Y_{[0,m]}), \quad \text{kde} \quad \pi^a_{n,m}(b_{[0,m]}) = P[X_n = a|Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}]$$

pro $n \geq m$. Máme tedy případ, kde máme k dispozici historii zašumělého signálu $Y_{[0,m]}$ a snažíme se odhadnout skutečný signál X_n pro $n \geq m$ na základě chování předešlých známých pozorování.

Nejprve zadefinujeme potřebná značení.

Definice 23. *Nechť jsou X_n a Y_n náhodné veličiny, $Y_{[0,m]}$ posloupnost náhodných veličin, $a \in A$ a $b_0, \ldots, b_m \in B$. Potom definujeme*

$$\pi^{a,b}_{n,m}(b_{[0,m]}) = P[X_n = a, Y_n = b|Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}],$$

$$\pi^a_{n,m}(b_{[0,m]}) = \sum_{b \in B} \pi^{a,b}_{n,m}(b_{[0,m]}) = P[X_n = a|Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}].$$

Věta 24. *Nechť $a, r \in A$ a $b_0, \ldots b_m \in B$, $s \in B$. Pak platí následující rovnosti*

$$\pi^{a,b}_{n+1,m}(b_{[0,m]}) = \sum_{r \in A, s \in B} \pi^{r,s}_{n,m}(b_{[0,m]}) q^{r,a}(s,b) \quad n \geq m, \tag{3.1}$$

$$\pi^{a,b}_{m,m}(b_{[0,m]}) = \pi^a_m(b_{[0,m]}) I_{b_m = b}. \tag{3.2}$$

Důkaz. Všimneme si, že pro $P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] > 0$

$$\begin{aligned}\pi^{a,b}_{n+1,m}(b_{[0,m]}) &= P[X_{n+1} = a, Y_{n+1} = b|Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] \\ &= \frac{P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}, X_{n+1} = a, Y_{n+1} = b]}{P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}]},\end{aligned}$$

kde se pro $n = m$ nebo $n > m$ čitatel rovná

$$\begin{aligned}&\sum_{r \in A, s \in B} P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}, X_n = r, Y_n = s, X_{n+1} = a, Y_{n+1} = b] \\ &\qquad = \sum_{r \in A, s \in B} P[Z_{n+1} = (a,b), Z_n = (r,s), Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}].\end{aligned}$$

Poté použijeme tvrzení 5:

$$\begin{aligned}&\sum_{r \in A, s \in B} P[Z_{n+1} = (a,b), Z_n = (r,s), Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] \\ &= \sum_{r \in A, s \in B} P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}, Z_n = (r,s)] q^{r,a}(s,b) \\ &= \sum_{r \in A, s \in B} P[X_n = r, Y_n = s|Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] q^{r,a}(s,b) \\ &= P[Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] \sum_{r \in A, s \in B} \pi^{r,s}_{n,m}(b_{[0,m]}) q^{r,a}(s,b).\end{aligned}$$

To dokazuje rovnost (3.1) pro realizaci $Y_{[0,m]}$ s nenulovou pravděpodobností. Druhou rovnost (3.2) dokážeme tak, že

$$\pi_m^a(b_{[0,m]}) = P[X_m = a | Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}].$$

Pokud platí $b_m = b$ lze říci, že

$$\pi_m^a(b_{[0,m]}) = P[X_m = a, Y_m = b_m | Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}] = \pi_{m,m}^{a,b}(b_{[0,m]}),$$

čímž je celé tvrzení dokázáno.

□

Příklad 25. Uvažujme zadání příkladu 22. Budeme hledat pravděpodobnost

$$P[X_4 = 2 | Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 1, Y_3 = 0] = \pi_{4,3}^2(1,2,1,0).$$

Z definice 23

$$\begin{aligned}
\pi_{4,3}^2(1,2,1,0) &= \sum_{b \in B} \pi_{4,3}^{2,b}(1,2,1,0) \\
&= \pi_{4,3}^{2,-3}(1,2,1,0) + \pi_{4,3}^{2,-1}(1,2,1,0) \\
&\quad + \pi_{4,3}^{2,1}(1,2,1,0) + \pi_{4,3}^{2,3}(1,2,1,0).
\end{aligned}$$

Hodnota $b \in \{-3, -1, 1, 3\}$, ale pro -1 a -3 je pravděpodobnost přechodu rovna nule. Budeme pokračovat podle věty 24 a uvědomíme si, že známe hodnotu s, neboť $s = b_3$ pro $Y_{[0,m]} = b_{[0,m]}$, tedy $s = 0$ a proto

$$\begin{aligned}
\pi_{4,3}^{2,3}(1,2,1,0) &= \sum_{r \in A, s \in B} \pi_{3,3}^{r,s}(1,2,1,0) q^{r,2}(s,3) \\
&= \sum_{r \in A} \pi_{3,3}^{r,0}(1,2,1,0) q^{r,2}(0,3),
\end{aligned}$$

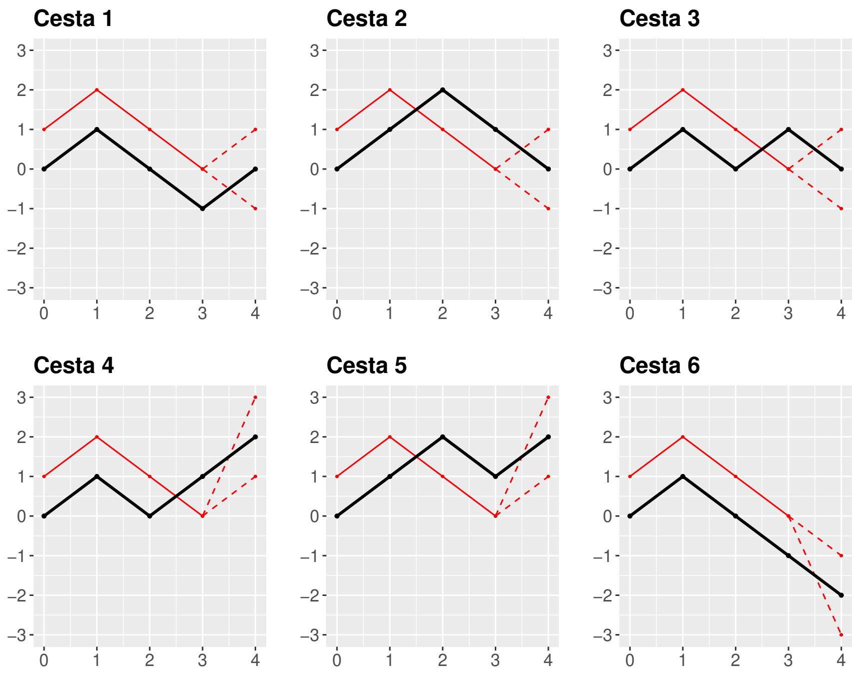
$$\begin{aligned}
\pi_{4,3}^{2,1}(1,2,1,0) &= \sum_{r \in A, s \in B} \pi_{3,3}^{r,s}(1,2,1,0) q^{r,2}(s,1) \\
&= \sum_{r \in A} \pi_{3,3}^{r,0}(1,2,1,0) q^{r,2}(0,1).
\end{aligned}$$

Podle rovnosti 3.2

$$\pi_{3,3}^{r,0}(1,2,1,0) = \pi_3^r(1,2,1,0).$$

Pokračujeme ve výpočtu, kde využijeme první z výsledků příkladu 22

$$\pi_3^1(1,2,1,0) = \frac{2}{3}.$$



Obrázek 3.1: Cesty náhodné procházky $X_{[0,4]}$ na $\mathbb{Z}$, pro známé $Y_{[0,3]} = (1, 2, 1, 0)$

Díky tomu dopočteme

$$
\begin{aligned}
\pi^{2,3}_{4,3}(1,2,1,0) &= \sum_{r \in A} \pi^r_3(1,2,1,0) q^{r,2}(0,3) \\
&= \pi^1_3(1,2,1,0) q^{1,2}(0,3) + \pi^3_3(1,2,1,0) q^{3,2}(0,3) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + 0 \\
&= \frac{2}{12},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi^{2,1}_{4,3}(1,2,1,0) &= \sum_{r \in A} \pi^r_3(1,2,1,0) q^{r,2}(0,1) \\
&= \pi^1_3(1,2,1,0) q^{1,2}(0,1) + \pi^3_3(1,2,1,0) q^{3,2}(0,1) \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + 0 \\
&= \frac{2}{12},
\end{aligned}
$$

z čehož dostáváme konečný výsledek

$$\pi^2_{4,3}(1,2,1,0) = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \frac{2}{6}.$$

Tento výsledek můžeme vidět i z obrázku 3.1, jež zobrazuje všechny možné cesty $X_{[0,4]}$. Tyto cesty $X_{[0,4]}$ jsou zobrazené tučně černě. Naše známé pozorování $Y_{[0,3]} = (1, 2, 1, 0)$ je zobrazeno červeně a nakonec přechody s nenulovou pravděpodobností z Y_3 do Y_4 jsou zobrazeny červeně čárkovaně.

Možné hodnoty X_4 jsou $\{-2, 0, 2\}$, tedy možné hodnoty Y_4 mohou být podle zadání příkladu pouze $\{-3, -1, 1, 3\}$. Existuje pouze šest možností cesty $X_{[0,4]}$, z čehož jen 2, které vedou na $X_4 = 2$. Proto je náš výpočet skutečně i dle grafického řešení právě $\frac{2}{6}$.

Závěr

V práci jsme se zabývali filtrací a predikcí a příklady s nimi spojenými. Je dobré zmínit, že tato práce pokrývá jen malou část těchto rozsáhlých témat, protože jsme se omezili na variantu náhodných procesů s diskrétním časem.

V první kapitole jsme uvedli nutné definice a značení markovských řetězců a náhodných procházek, použité ve zbylém výkladu.

V druhé kapitole jsme popsali úvod do tématu filtrace včetně dodatečných ilustračních obrázků, příkladů a komentářů. Uvedli jsme také hlavní větu o filtračních rovnicích a detailně zpracovali její důkaz. Na konci této kapitoly jsme dále vyřešili ukázkové problémy a uvedli jejich grafické řešení.

V poslední kapitole jsme stručně okomentovali pojem predikce a rozepsali důkaz věty, jež jsme použili na konkrétním problému, opět s grafickým řešením.

Seznam použité literatury

FRISTEDT, B., JAIN, N. a KRYLOV, N. V. (2007). *Filtering and Prediction: A Primer*. American Mathematical Society, Providence, R.I. ISBN 978-0-8218-4333-8.

PRÁŠKOVÁ, Z. a LACHOUT, P. (2020). *Základy náhodných procesů I.* Vydání třetí (v MatfyzPressu druhé). MatfyzPress, Praha. ISBN 978-80-7378-210-8.

Seznam obrázků