



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Karolína Ploužková

**Asymetrické modelování volatility  
ve financích**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí mojí práce RNDr. Jitce Zichové, Dr. za mimořádnou ochotu, trpělivost, cenné rady a čas, který mi v průběhu vypracování věnovala. Taktéž bych ráda poděkovala mé rodině a kamarádům, kteří mě podporovali nejen během psaní práce, ale v průběhu celého studia.

Název práce: Asymetrické modelování volatility ve financích

Autor: Karolína Ploužková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá modelováním volatility ve financích. Cílem práce je seznámit čtenáře s modely, které se k tomu dají využít. Zaměřujeme se zde na modely GARCH a EGARCH. U obou modelů uvádíme jejich definici a zkoumáme stacionaritu, existenci nepodmíněných momentů a korelační strukturu. Dále přibližujeme GED rozdělení, které se při modelování volatility využívá. V praktické části práce jsou ukázány simulace procesů pro různé volby parametrů, vyšetřována přesnost odhadů parametrů a na závěr je provedena aplikace modelu GARCH a EGARCH na logaritmické výnosy akcií společnosti Apple.

Klíčová slova: Stacionarita, GARCH, EGARCH, autokorelační funkce, volatilita, GED rozdělení

Title: Asymmetric volatility modelling in finance

Author: Karolína Ploužková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis deals with modelling volatility in finance. The aim of the thesis is to introduce the models that can be used to this purpose. We focus on the GARCH and EGARCH models. For both models, we present their definition and investigate stationarity, the existence of unconditional moments and the correlation structure. We also present the GED distribution that is used in volatility modelling. In the practical part of the thesis, we show process simulations for different choices of parameters, investigate the accuracy of the parameter estimates, and finally perform an application of the GARCH and EGARCH models to the logarithmic returns of the Apple stocks.

Keywords: Stacionarity, GARCH, EGARCH, autocorrelation function, volatility, GED distribution

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Základní pojmy</b>	<b>3</b>
1.1 Stacionarita . . . . .	3
1.2 Autokovarianční a autokorelační funkce . . . . .	4
1.3 Základní modely . . . . .	4
<b>2 Zavedení modelu GARCH</b>	<b>7</b>
2.1 Model ARCH . . . . .	7
2.1.1 ARCH( $q$ ) . . . . .	8
2.2 Model GARCH( $p, q$ ) . . . . .	9
2.3 GARCH(1,1) . . . . .	11
2.3.1 Existence nepodmíněných momentů . . . . .	11
2.3.2 Korelační struktura . . . . .	13
<b>3 Zavedení modelu EGARCH</b>	<b>15</b>
3.1 Model EGARCH( $p, q$ ) . . . . .	15
3.2 EGARCH(1,1) . . . . .	16
3.2.1 Existence nepodmíněných momentů . . . . .	17
3.2.2 Korelační struktura . . . . .	21
<b>4 Pravděpodobnostní rozdělení</b>	<b>23</b>
4.1 Rozdělení GED . . . . .	23
4.2 Speciální případy . . . . .	24
4.2.1 Výpočty hustot . . . . .	24
4.2.2 Výpočty střední absolutní hodnoty $z$ . . . . .	28
<b>5 Numerická studie</b>	<b>30</b>
5.1 Momenty a korelace . . . . .	30
5.1.1 GARCH(1,1) . . . . .	30
5.1.2 EGARCH(1,1) . . . . .	34
5.2 Simulace procesů . . . . .	38
5.3 Přesnost odhadů parametrů . . . . .	42
5.4 Aplikace na reálná data . . . . .	45
<b>Závěr</b>	<b>50</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>51</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>52</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>53</b>
<b>A Přílohy</b>	<b>54</b>
A.1 První příloha . . . . .	54

# Úvod

Finanční trhy jsou složité a nepředvídatelné systémy, které jsou ovlivněny mnoha faktory, jako jsou ekonomické události, politická rozhodnutí, nebo změny preferencí investorů. Jedním z klíčových prvků finančních trhů je volatilita. Volatilita je ukazatel, který nám říká, jak moc se ceny daného aktiva, jako jsou akcie, komodity nebo měny, mění nebo kolísají za určité časové období. Vyšší volatilita znamená, že ceny mají větší rozsah pohybu, zatímco nižší volatilita indikuje relativně stabilní ceny. Vyšší volatilita je také často spojována s vyšším rizikem. To znamená, že vysoká volatilita může znamenat zvýšenou pravděpodobnost větších ztrát nebo zisků. Modelování volatility se stalo klíčovým nástrojem pro investory, analytiky a ekonomy, kteří se snaží lépe porozumět pohybům na trzích a efektivně řídit rizika svých investičních portfolií.

Právě problematice modelování volatility je věnována tato práce. Zaměřuje se především na studium modelů GARCH a EGARCH. Proces GARCH je nejpoužívanější k modelování volatility, proces EGARCH umožňuje zachytit její asymetrické chování. Práce je členěna do pěti kapitol, z nichž první čtyři jsou teoretické a poslední, pátá kapitola, praktická. V první kapitole představíme základní pojmy, které jsou stěžejní pro správné pochopení základních principů modelování volatility. Uvedeme zde nejjednodušší modely, které v dalších kapitolách následně rozšíříme na modely, pomocí kterých lze modelovat volatilitu. Druhá kapitola zabývá především modelem  $GARCH(p,q)$ . Zavedeme jeho obecnou rovnici a budeme zkoumat stacionaritu. Následně jej zjednodušíme na  $GARCH(1,1)$ , kde se zaměříme na existenci nepodmíněných momentů a korelační strukturu tohoto procesu. Ve třetí kapitole představíme  $EGARCH(p,q)$  jako zobecnění  $GARCH(p,q)$ . Uvedeme si rozdíly mezi těmito modely, obecnou rovnici, pomocí které se modeluje volatilita a budeme zkoumat stacionaritu. V zjednodušeném  $EGARCH(1,1)$  se budeme opět, jako u  $GARCH(1,1)$ , zabývat existencí nepodmíněných momentů a korelační strukturou. Ve čtvrté kapitole si představíme rodinu pravděpodobnostních rozdělení GED, kterou se řídí standardizovaná rezidua z modelů GARCH a EGARCH. Uvedeme si speciální případy rozdělení, které patří do rodiny GED a následně to i dokážeme.

Praktickou částí této práce je numerická studie obsažena v páté kapitole. Tuto kapitolu dále budeme členit na čtyři podkapitoly. V první podkapitole, pomocí vzorců z teoretické části, počítáme momenty a korelace pro zavedené modely s různě zvolenými hodnotami parametrů. V druhé podkapitole pak budeme zkoumat, jak tyto volby parametrů ovlivňují volatilitu, a ukážeme to na konkrétních simulacích modelů. Ve třetí kapitole studujeme přesnost odhadů parametrů. A na závěr, ve čtvrté podkapitole, provedeme aplikaci zavedených modelů na reálná data. Budeme zkoumat ceny akcií společnosti Apple v určitém časovém období a posuzovat, který z modelů je pro modelování volatility logaritmických výnosů odvozených od cen akcií této společnosti vhodnější. Praktická část je prováděna za pomoci statistického softwaru R.

# 1. Základní pojmy

V této práci se budeme zabývat zkoumáním speciálních modelů časových řad používaných ve financích.

**Definice 1.1** (Náhodný proces, Prášková (2004)). *Nechť  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor,  $T \subset \mathbb{R}$ . Rodina náhodných veličin  $\{X_t, t \in T\}$  definovaných na  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se nazývá náhodný proces. Speciálně, pokud  $T \subset \mathbb{Z}$ , mluvíme o náhodném procesu s diskretním časem.*

*Poznámka.* Náhodný proces s diskretním časem se též nazývá náhodná posloupnost nebo časová řada.

Abychom mohli zavést modely popisující volatilitu, musíme definovat základní pojmy, které se při modelování využívají.

## 1.1 Stacionarita

U časových řad sledujeme stacionaritu, která vyjadřuje určitou stabilitu dané časové řady.

**Definice 1.2** (Striktní stacionarita, Cipra (2008)). *Řekneme, že časová řada  $\{y_t\}$  je striktně stacionární, jestliže její pravděpodobnostní rozdělení je v čase neměnné, tj. jestliže pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  a pro  $h \in \mathbb{Z}$  platí, že vektor  $(y_{t_1}, \dots, y_{t_k})$  má stejné rozdělení jako vektor  $(y_{t_1+h}, \dots, y_{t_k+h})$ .*

Striktně stacionární časová řada má invariantní vůči posunu v čase celé pravděpodobnostní rozdělení. Uvedeme ještě méně přísnou definici stacionarity, u které stačí, aby střední hodnota, rozptyl a kovariance zůstávaly v průběhu času neměnné.

**Definice 1.3** (Slabá stacionarita, Cipra (2008)). *Řekneme, že časová řada  $\{y_t\}$  s konečnými druhými momenty je slabě stacionární, pokud pro libovolná  $s, t \in \mathbb{N}$  a  $h \in \mathbb{Z}$  platí:*

$$E(y_t) = \mu, \\ cov(y_s, y_t) = E[(y_s - \mu)(y_t - \mu)] = cov(y_{s+h}, y_{t+h}),$$

*tedy také  $var(y_t) = \sigma_y^2$ .*

Jinými slovy, stačí aby časová řada byla invariantní vůči posunům v čase pouze v rámci momentů do druhého řádu. Pokud je  $\mu = 0$ , hovoříme o kovarianční stacionaritě.

*Poznámka.* Má-li časová řada  $\{y_t\}$  konečné druhé momenty, pak striktní stacionarita implikuje slabou stacionaritu. Má-li navíc řada všechna konečně rozměrná rozdělení normální, pak jsou oba typy stacionarity ekvivalentní.

*Poznámka.* Pod pojmem stacionární budeme dále uvažovat slabou stacionaritu.

## 1.2 Autokovarianční a autokorelační funkce

Pro analýzu časových řad se využívá autokorelační funkce, která je důležitá pro identifikaci modelů a předpovídání budoucích hodnot. K zavedení autokorelační funkce budeme nejprve definovat autokovarianční funkci.

**Definice 1.4** (Autokovarianční funkce, Cipra (2008)). Autokovarianční funkce (*autokovariance*) *stacionární časové řady*  $\{y_t\}$  pro zpoždění  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  je

$$\gamma_k = \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)].$$

**Definice 1.5** (Autokorelační funkce, Cipra (2008)). Autokorelační funkce (*autokorelace*) *stacionární časové řady*  $\{y_t\}$  pro zpoždění  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$  je

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2} = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(y_t) \text{var}(y_{t-k})}}.$$

U časové řady s výrazně nenulovými autokorelacemi lze minulé hodnoty využít k predikci hodnot budoucích.

## 1.3 Základní modely

Abychom mohli zavést modely GARCH a EGARCH, potřebujeme nejprve uvést model ARMA. Jedná se o smíšený proces klouzavých součtů (MA) a autoregrese (AR). Proto si nejprve zadefinujeme tyto výchozí procesy. U všech uvedeme podmínky stacionarity, základní momenty a autokorelační funkci podle Cipra (2008).

**Definice 1.6** (Lineární proces, Cipra (2008)). Lineární proces je definován jako nekonečná řada

$$y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \varepsilon_t = \psi(B) \varepsilon_t, \quad (1.1)$$

kde  $\varepsilon_t$  je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem  $\sigma^2 < \infty$  (tzv. bílý šum),  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  jsou parametry a  $B$  je operátor zpětného posunutí.

Lineární proces existuje právě tehdy, když mocninná řada  $\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i x^i$  konverguje pro  $|x| \leq 1$ .

**Definice 1.7** (Proces klouzavých součtů, Cipra (2008)). Proces  $\{y_t\}$  definovaný předpisem

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (1.2)$$

kde  $\varepsilon_t$  je bílý šum a  $\theta_1, \dots, \theta_q$  jsou parametry, nazýváme proces klouzavých součtů řádu  $q$ .

Z anglického „moving average“ značíme tento proces MA( $q$ ). Lze jej zapsat ve tvaru  $y_t = [1 + \theta(B)] \varepsilon_t$ , kde  $\theta(x) = \sum_{i=1}^q \theta_i x^i$ . Jedná se o lineární proces, který je při libovolné volbě parametrů vždy stacionární s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma_y^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$ .



Jeho autokorelační funkce je tvaru

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{pro } k = 1, \dots, q, \\ 0, & \text{pro } k > q. \end{cases}$$

**Definice 1.8** (Autoregresní proces, Cipra (2008)). *Proces  $\{y_t\}$  definovaný předpisem*

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1.3)$$

kde  $\varepsilon_t$  je bílý šum a  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  parametry, nazýváme autoregresní proces řádu  $p$ .

Z anglického „autoregression“ značíme tento proces  $AR(p)$ . Lze jej zapsat ve tvaru  $[1 - \varphi(B)]y_t = \varepsilon_t$ , kde  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^p \varphi_i x^i$ . Proces  $AR(p)$  je stacionární, pokud všechny kořeny  $x_1, \dots, x_p$  polynomu  $1 - \varphi(x)$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Jeho střední hodnota je pak nulová, rozptyl

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}$$

a jeho autokorelační funkce splňuje rovnici

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{pro } k > 0.$$

*Poznámka.* Pokud  $E(y_t) \neq 0$  má rovnice stacionárního procesu  $AR(p)$  tvar

$$y_t = \omega + \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

a

$$E(y_t) = \frac{\omega}{1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p}.$$

**Definice 1.9** (Smíšený proces ARMA, Cipra (2008)). *Smíšený proces řádu  $p$  a  $q$  značený jako  $ARMA(p, q)$  je definovaný předpisem*

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (1.4)$$

*Lze jej zapsat ve tvaru*

$$[1 - \varphi(B)]y_t = [1 + \theta(B)]\varepsilon_t. \quad (1.5)$$

Je to stacionární proces, pokud všechny kořeny  $x_1, \dots, x_p$  polynomu  $1 - \varphi(x)$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině a zároveň pokud polynomy  $1 - \varphi(x)$  a  $1 + \theta(x)$  nemají společné kořeny. Má nulovou střední hodnotou a jeho autokorelační funkce splňuje

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{pro } k > q.$$

*Poznámka.* Opět pro  $E(y_t) \neq 0$  má rovnice stacionárního procesu  $ARMA(p, q)$  tvar

$$y_t = \omega + \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

$$[1 - \varphi(B)]y_t = \omega + [1 + \theta(B)]\varepsilon_t.$$

Speciálně pro  $p = q = 1$  máme v procesu ARMA(1,1)

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1} \quad \text{pro } k > 1, \quad (1.6)$$

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} \quad \text{pro } k > 1, \quad (1.7)$$

$$\rho_1 = \frac{(1 + \varphi_1 \theta_1)(\varphi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1 \theta_1} \quad \text{pro } k = 1. \quad (1.8)$$

Rozšířením těchto procesů jsou procesy ARCH a GARCH.

## 2. Zavedení modelu GARCH

Rozptyl je mírou variability například u finanční časové řady výnosů z cených papírů apod. Pokud jsou výnosy nekonstantní, může být jejich rozptyl také nekonstantní. Rozptyl může být ovlivněn mnoha faktory, jako jsou změny ekonomického prostředí, změny v obchodních podmínkách, změny v politické situaci. Nekonstantní rozptyl však může být problematický pro některé metody analýzy finančních časových řad. Základní modely, například procesy AR, MA a ARMA, totiž předpokládají konstantní rozptyl a nezhledňují změny variability výnosů. V takovém případě mohou být výsledky analýzy dat zkreslené a nedostatečně přesné. Uvedeme proto proces GARCH, který nekonstantní rozptyl předpokládá, a je pro modelování finančních časových řad vhodnější.

Model GARCH je zobecněním modelu ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity), tedy autoregresního modelu s podmíněnou heteroskedasticitou, který je hojně využíván v analýze finančních časových řad. Nejprve zavedeme model ARCH, který následně zobecníme.

*Poznámka.* Podmíněnou heteroskedasticitou rozumíme skutečnost, že podmíněný rozptyl náhodné veličiny není konstantní.

### 2.1 Model ARCH

Základní myšlenkou procesů ARCH je modelovat rozptyl časové řady pomocí autoregresní funkce vlastních minulých hodnot. Budeme uvažovat náhodný proces  $\{y_t\}$  s diskrétním časem ve tvaru

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Označme

$$\mu_t = E(y_t | \Phi_{t-1}),$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}(y_t | \Phi_{t-1}),$$

kde  $\Phi_{t-1}$  je  $\sigma$ -algebra generovaná veličinami  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ , představující informaci známou v čase  $t-1$ .

**Definice 2.1** (Proces ARCH, Rossi (2004)). *Proces  $\{\varepsilon_t\}$  se řídí modelem ARCH, pokud*

$$E(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = 0, \quad (2.2)$$

$$E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) = \text{var}(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2, \quad \text{pro } t = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

kde podmíněný rozptyl netriviálně závisí na  $\sigma$ -algebře  $\Phi_{t-1}$ .

*Poznámka.* Z (2.1) je zřejmé, že  $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ .

Proces  $\{\varepsilon_t\}$  budeme modelovat pomocí posloupnosti nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin  $\{z_t\}$ , které tvoří tzv. *standardizovaný proces*  $k$   $\varepsilon_t$ , kde

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t},$$

$$E(z_t | \Phi_{t-1}) = 0,$$

$$\text{var}(z_t | \Phi_{t-1}) = 1.$$

Předpokládejme nadále  $z_t \sim N(0,1)$ , nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, přičemž  $z_t$  je nezávislé se  $\sigma_t^2, t = 1, 2, \dots$ . Pak zřejmě  $\varepsilon_t | \Phi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$ .

### 2.1.1 ARCH( $q$ )

Nyní se podíváme na konkrétní specifikaci podmíněného rozptylu (2.3). Model ARCH( $q$ ) představil v roce 1982 americký ekonom R.F. Engle. Modeluje se jím podmíněný rozptyl  $\sigma_t^2$  pomocí zpožděných hodnot chybového procesu  $\{\varepsilon_t\}$ :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad (2.4)$$

kde musí platit  $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$ , aby bylo zaručeno  $\sigma_t^2 > 0$ .

Odvodíme, že (2.4) lze přepsat do tvaru AR( $q$ ). Označme

$$v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 \left( \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) = \sigma_t^2 (z_t^2 - 1). \quad (2.5)$$

Ukážeme, že  $E(v_t) = 0$  a  $v_t$  jsou nekorelované.

$$E(v_t) = E(\varepsilon_t^2) - E(\sigma_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1})] - E(\sigma_t^2) = 0 \text{ podle (2.3),}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(v_t, v_{t-k}) &= E(v_t v_{t-k}) - E(v_t) E(v_{t-k}) \\ &= E\{E[(v_t v_{t-k}) | \Phi_{t-1}]\} \\ &= E\{E[v_t(\varepsilon_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) | \Phi_{t-1}]\} \\ &= E\{(\varepsilon_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2) E(v_t | \Phi_{t-1})\}. \end{aligned}$$

Poslední krok vyplývá z toho, že  $\varepsilon_{t-k}^2 - \sigma_{t-k}^2$  je pro  $k > 0$  funkcí podmínky. Dále

$$\begin{aligned} E(v_t | \Phi_{t-1}) &= E[(\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) | \Phi_{t-1}] = E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) - E(\sigma_t^2 | \Phi_{t-1}), \\ E(\varepsilon_t^2 | \Phi_{t-1}) &= \text{var}(\varepsilon_t | \Phi_{t-1}) = \sigma_t^2, \\ E(\sigma_t^2 | \Phi_{t-1}) &= \sigma_t^2 E[1 | \Phi_{t-1}] = \sigma_t^2. \end{aligned}$$

Po dosazení máme  $\text{cov}(v_t, v_{t-k}) = 0$ , tedy  $v_t$  jsou nekorelované.

Nyní můžeme s využitím (2.5) psát (2.4) ve tvaru

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_t^2 + v_t = \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + v_t, \quad (2.6)$$

kde  $B$  je operátor zpětného posunutí a  $\alpha(x) = \sum_{i=1}^q \alpha_i x^i$ . Jedná se tedy o proces AR( $q$ ) pro  $\varepsilon_t^2$ . Proces  $\{\varepsilon_t\}$  je podle Rossi (2004) slabě stacionární právě tehdy, když

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i = \alpha(1) < 1. \quad (2.7)$$

Pokud je  $\varepsilon_t$  slabě stacionární, pak

$$E(\varepsilon_t^2) = \text{var}(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i} = \frac{\omega}{1 - \alpha(1)}.$$

## 2.2 Model GARCH( $p, q$ )

Výše definovaný proces ARCH nyní zobecníme na proces GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity), kde se v rovnici podmíněného rozptylu (2.4) k zpožděným hodnotám procesu  $\{\varepsilon_t^2\}$  přidají ještě zpožděné hodnoty podmíněného rozptylu. Následně ukážeme souvislost s procesy ARCH( $\infty$ ) a ARMA.

Model GARCH uvedl T. Bollerslev (1986), který vycházel z práce Engle (1982). Tento proces se často používá pro modelování finančních dat, jako jsou například výnosy z cenných papírů, ceny akcií nebo měnové kurzy. Můžeme pomocí něj získat predikce budoucí volatility, což je užitečné pro různé aplikace například v oblasti risk managementu.

Opět uvažujme proces

$$\begin{aligned} y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= z_t \sigma_t, \\ z_t &\sim N(0,1), \text{ nezávislé pro } t = 1, 2, \dots, \\ z_t &\text{ nezávislé se } \sigma_t^2, t = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.8}$$

**Definice 2.2** (Proces GARCH( $p, q$ ), Rossi (2004)). Proces GARCH( $p, q$ ) je definován podmínkami (2.8) a rovnicí podmíněného rozptylu ve tvaru

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + \beta(B) \sigma_t^2, \tag{2.9}$$

kde  $p \geq 0$ ,  $q > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , pro  $i = 1, \dots, q$  a  $\beta_j \geq 0$ , pro  $j = 1, \dots, p$ .

*Poznámka.* Polynomy  $\alpha(x)$  a  $\beta(x)$  jsou tvaru

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_{i=1}^q \alpha_i x^i, \\ \beta(x) &= \sum_{i=1}^p \beta_i x^i. \end{aligned}$$

Pro  $p = 0$  se model redukuje na ARCH( $q$ ). Necht' platí

- (i) Kořeny polynomu  $1 - \beta(x)$  leží vně jednotkového kruhu a  $\omega \geq 0$ .
- (ii) Polynomy  $\alpha(x)$  a  $1 - \beta(x)$  nemají společné kořeny.

GARCH model pak můžeme z rovnice (2.9) přepsat do tvaru ARCH( $\infty$ ) následovně

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 - \beta(B) \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2, \\ \sigma_t^2 [1 - \beta(B)] &= \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2, \\ \sigma_t^2 &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \alpha(B) [1 - \beta(B)]^{-1} \varepsilon_t^2, \\ \sigma_t^2 &= \left[ 1 - \sum_{i=1}^p \beta_i \right]^{-1} \omega + \delta(B) \varepsilon_t^2, \\ \sigma_t^2 &= \omega^* + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \varepsilon_{t-k}^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde  $\omega^* \geq 0$ ,  $\delta_k \geq 0$ , aby  $\sigma_t^2 \geq 0$ . Podmínka (i) zaručuje, že  $\omega^*$  bude kladné a konečné.

Lze ukázat, že posloupnost  $\{\varepsilon_t^2\}$  se v GARCH modelu řídí procesem ARMA( $m, p$ ), kde  $m = \max(p, q)$ ,  $\alpha_j = 0$  pro  $j > q$ ,  $\beta_j = 0$  pro  $j > p$ . Rovnici (2.9) můžeme s využitím (2.5) ekvivalentně přepsat jako

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon_{t-j}^2 + v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i}, \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_t^2 = \omega + [\alpha(B) + \beta(B)] \varepsilon_t^2 + [1 - \beta(B)] v_t, \quad (2.12)$$

$$[1 - \alpha(B) - \beta(B)] \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)] v_t.$$

To je podle (1.5) a následující poznámky proces ARMA( $m, p$ ) s bílým šumem  $v_t$  a nenulovou střední hodnotou.

Bollerslev (1986) uvádí nutnou a postačující podmínku pro slabou stacionaritu procesu GARCH.

**Věta 2.1.** *Proces GARCH( $p, q$ ), definovaný podmínkami (2.8), rovnicí (2.9) a podmínkami (i), (ii), je slabě stacionární s  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $\text{var}(\varepsilon_t) = \omega([1 - \alpha(1) - \beta(1)]^{-1})$  a  $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  pro  $t \neq s$  právě tehdy, když  $\alpha(1) + \beta(1) < 1$ .*

*Důkaz.* Rozepsán v Bollerslev (1986). □

V procesu GARCH( $p, q$ ) dále máme

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(2)} &= \text{cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) \\ &= \text{cov}\left(\omega + \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \varepsilon_{t-j}^2 + v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i}, \varepsilon_{t-k}^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \text{cov}(\varepsilon_{t-j}^2, \varepsilon_{t-k}^2) + \text{cov}\left(v_t - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i}, \varepsilon_{t-k}^2\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde  $m = \max(p, q)$ ,  $\alpha_j = 0$  pro  $j > q$  a  $\beta_j = 0$  pro  $j > p$ . Pokud je  $k$  dostatečně velké, pak je poslední člen rovnice (2.13) nulový. Dostaneme tedy, podle Bollerslev (1986),

$$\gamma_k^{(2)} = \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \gamma_{k-j}^2, \quad k \geq p + 1. \quad (2.14)$$

Z (2.14) dokážeme zapsat autokorelační funkci kvadrátů

$$\rho_k^{(2)} = \frac{\gamma_k^{(2)}}{\gamma_0^{(2)}} = \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) \rho_{k-j}^2, \quad k \geq p + 1. \quad (2.15)$$

Abychom mohli dále studovat momenty procesu GARCH, což je obecně složité, přejdeme k nejjednoduššímu případu GARCH(1,1).

## 2.3 GARCH(1,1)

Nejjednodušší, ale velmi často používaný proces GARCH(1,1) je dán podmínkami (2.8) a rovnicí

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (2.16)$$

kde  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ .

Z věty 2.1 plyne, že proces je stacionární právě tehdy, když  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ .

### 2.3.1 Existence nepodmíněných momentů

V článku Bollerslev (1986) je odvozena momentová struktura procesu  $\{\varepsilon_t\}$ .

**Věta 2.2.** *Pro proces GARCH(1,1), definovaný podmínkami (2.8) a rovnicí (2.16), je nutná a postačující podmínka pro existenci 2m-tých momentů náhodných veličin  $\varepsilon_t$  ve tvaru*

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, m) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1, \quad (2.17)$$

kde  $a_0 = 1$ ,  $a_j = \prod_{i=1}^j (2i - 1)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . 2m-tý moment může být vyjádřen rekurzivně

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = a_m \left[ \sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \omega^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1}. \quad (2.18)$$

*Důkaz.* Proveden v Bollerslev (1986). □

Ze symetrie rozdělení veličin  $\varepsilon_t$  dostáváme, že pokud 2m-té momenty existují, pak

$$E(\varepsilon_t^{2m-1}) = 0.$$

Abychom mohli vypočítat druhý a čtvrtý moment, potřebujeme si vyjádřit (2.17) pro  $m = 0, 1, 2$ .

Pro  $m = 0$ :

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, 0) = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{0-j} = \binom{0}{0} a_0 \alpha_1^0 \beta_1^0 = 1. \quad (2.19)$$

Pro  $m = 1$ :

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, 1) = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{1-j} = \binom{1}{0} a_0 \alpha_1^0 \beta_1 + \binom{1}{1} a_1 \alpha_1 \beta_1^0 = \beta_1 + \alpha_1. \quad (2.20)$$

Pro  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_1, \beta_1, 2) &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{2-j} = \binom{2}{0} a_0 \alpha_1^0 \beta_1^2 + \binom{2}{1} a_1 \alpha_1 \beta_1 + \binom{2}{2} a_2 \alpha_1^2 \beta_1^0 \\ &= \beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_1^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Z věty 2.2 a (2.20) víme, že druhé momenty existují, pokud  $\beta_1 + \alpha_1 < 1$ . Analogicky z (2.21) plyne, že čtvrté momenty existují, pokud  $\beta_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1^2 < 1$ .

Za těchto předpokladů spočítáme druhý a čtvrtý moment a špičatost procesu  $\{\varepsilon_t\}$ .

Pro  $m = 0$  :  $\mathbf{E}(\varepsilon_t^0) = 1$ .

Pro  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) &= a_1 \left[ \sum_{n=0}^0 a_n^{-1} \mathbf{E}(\varepsilon_t^{2n}) \omega^{1-n} \binom{1}{1-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, 1)]^{-1} \\ &= 1 [a_0^{-1} \mathbf{E}(\varepsilon_t^0) \omega^1 \binom{1}{1} \mu(\alpha_1, \beta_1, 0)] [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, 1)]^{-1} \\ &= \frac{\omega}{1 - \beta_1 - \alpha_1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pro  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\varepsilon_t^4) &= a_2 \left[ \sum_{n=0}^1 a_n^{-1} \mathbf{E}(\varepsilon_t^{2n}) \omega^{2-n} \binom{2}{2-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right] [1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, 2)]^{-1} \\ &= 3 \frac{a_0^{-1} \mathbf{E}(\varepsilon_t^0) \omega^2 \binom{2}{2} \mu(\alpha_1, \beta_1, 0) + a_1^{-1} \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) \omega^1 \binom{2}{1} \mu(\alpha_1, \beta_1, 1)}{1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, 2)} \\ &= 3 \frac{\omega^2 + \omega(1 - \beta_1 - \alpha_1)^{-1} \omega 2(\beta_1 + \alpha_1)}{1 - (3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2)} \\ &= 3 \frac{\omega^2(1 - \beta_1 - \alpha_1) + \omega^2(2\beta_1 + 2\alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \\ &= 3 \frac{\omega^2(1 + \beta_1 + \alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nyní z (2.22) a z (2.23) máme špičatost procesu GARCH(1,1).

$$\begin{aligned} \kappa_4(\varepsilon) &= \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_t^4)}{[\mathbf{E}(\varepsilon_t^2)]^2} = 3 \frac{\omega^2(1 + \beta_1 + \alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \cdot \frac{(1 - \beta_1 - \alpha_1)^2}{\omega^2} \\ &= 3 \frac{(1 + \beta_1 + \alpha_1)(1 - \beta_1 - \alpha_1)}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2} \\ &= 3 \frac{1 - \alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2} \\ &= 3 \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Z (2.24) dostáváme

$$\frac{\mathbf{E}(\varepsilon_t^4)}{[\mathbf{E}(\varepsilon_t^2)]^2} > 3. \quad (2.25)$$



Jedná se tedy o špičatější rozdělení než normální, tzv. leptokurtické. To znamená, že hustota má těžší chvosty než u normálního rozdělení se špičatostí rovnou 3. Takové pravděpodobnostní chování je typickou vlastností finančních časových řad.

### 2.3.2 Korelační struktura

Dále budeme studovat korelační strukturu procesu  $\{\varepsilon_t^2\}$ . Z (2.11) plyne, že GARCH(1,1) lze psát jako ARMA(1,1)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}.$$

Z (2.13) máme

$$\gamma_k^{(2)} = \text{cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = (\alpha_1 + \beta_1) \text{cov}(\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-k}^2) + \text{cov}(v_t - \beta_1 v_{t-1}, \varepsilon_{t-k}^2). \quad (2.26)$$

Ukážeme, že poslední sčítanec na pravé straně rovnice (2.26) je nulový pro  $k \geq 2$ . Využijeme (2.5) pro vyjádření  $\varepsilon_{t-k}^2$ .

$$\begin{aligned} \text{cov}(v_t - \beta_1 v_{t-1}, \varepsilon_{t-k}^2) &= \text{cov}(v_t - \beta_1 v_{t-1}, v_{t-k} + \sigma_{t-k}^2) = \\ &= \text{cov}(v_t, v_{t-k}) + \text{cov}(v_t, \sigma_{t-k}^2) - \beta_1 \text{cov}(v_{t-1}, v_{t-k}) - \beta_1 \text{cov}(v_{t-1}, \sigma_{t-k}^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Z nekorelovanosti veličin  $v_t$  víme

$$\text{cov}(v_t, v_{t-k}) = 0 \text{ pro } k \geq 1, \quad (2.28)$$

$$\text{cov}(v_{t-1}, v_{t-k}) = 0 \text{ pro } k \geq 2. \quad (2.29)$$

Opět vyjádřením z (2.5) dostaneme

$$\begin{aligned} \text{cov}(v_t, \sigma_{t-k}^2) &= \text{cov}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1), \sigma_{t-k}^2] \\ &= \text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)\sigma_{t-k}^2] - \text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)] \text{E}[\sigma_{t-k}^2]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Z nezávislosti  $z_t^2$  a  $\sigma_t^2$  v (2.8) dostaneme

$$\text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)] = \text{E}(\sigma_t^2) \text{E}(z_t^2 - 1) = \text{E}(\sigma_t^2)[\text{var}(z_t) - 1] = 0, \quad (2.31)$$

neboť  $z_t \sim N(0,1)$ . Po dosazení do (2.30) máme

$$\text{cov}(v_t, \sigma_{t-k}^2) = \text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)\sigma_{t-k}^2] = \text{E}\{\text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)\sigma_{t-k}^2 | \Phi_{t-k-1}]\}.$$

Vzhledem k (2.16) je  $\sigma_{t-k}^2$  funkcí podmínky a můžeme tedy psát

$$\text{cov}(v_t, \sigma_{t-k}^2) = \text{E}\{\sigma_{t-k}^2 \text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1) | \Phi_{t-k-1}]\},$$

kde  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$  nezávisí na podmínce pro  $k \geq 1$  a  $(z_t^2 - 1)$  nezávisí na podmínce, neboť  $z_t$  jsou nezávislé. Odtud máme

$$\text{cov}(v_t, \sigma_{t-k}^2) = \text{E}\{\sigma_{t-k}^2 \text{E}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)]\} = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.32)$$

Analogicky

$$\begin{aligned}\text{cov}(v_{t-1}, \sigma_{t-k}^2) &= \text{cov}[\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}^2 - 1), \sigma_{t-k}^2] \\ &= \text{E}[\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}^2 - 1)\sigma_{t-k}^2] \\ &= \text{E}\{\sigma_{t-k}^2 \text{E}[\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}^2 - 1)|\Phi_{t-k-1}]\}.\end{aligned}$$

Opět z rovnice (2.16) vidíme, že  $\sigma_{t-1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2$  nezávisí na podmínce pro  $k \geq 2$ ,  $(z_{t-1}^2 - 1)$  také nezávisí na podmínce, tedy máme

$$\text{cov}(v_{t-1}, \sigma_{t-k}^2) = \text{E}\{\sigma_{t-k}^2 \text{E}[\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}^2 - 1)]\} = 0, \quad k \geq 2. \quad (2.33)$$

Z rovnic (2.28), (2.29), (2.32) a (2.33) je  $\text{cov}(v_t - \beta_1 v_{t-1}, \varepsilon_{t-k}^2) = 0$  pro  $k \geq 2$ . Tedy autokovarianční funkce kvadrátů procesu  $\{\varepsilon_t\}$  je

$$\text{cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2) = (\alpha_1 + \beta_1) \text{cov}(\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-k}^2), \quad k \geq 2. \quad (2.34)$$

Vycházeli jsme z vyjádření procesu GARCH(1,1) ve tvaru ARMA(1,1) pro  $\varepsilon_t$  a dostali jsme analogii vztahu (1.6). Platí i analogie vztahu (1.7) a (1.8) a lze psát

$$\rho_k^{(2)} = (\alpha_1 + \beta_1) \rho_{k-1}^{(2)}, \quad k > 1, \quad (2.35)$$

$$\rho_1^{(2)} = \frac{(1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)) \alpha_1}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1}, \quad k = 1. \quad (2.36)$$

### 3. Zavedení modelu EGARCH

Model GARCH má některá omezení. Například volatilita má tendenci růst v reakci na "špatné zprávy" (nadměrné výnosy nižší než očekávané) a klesat v reakci na "dobré zprávy" (nadměrné výnosy vyšší než očekávané). GARCH modely však předpokládají, že pouze velikost, nikoliv pozitivita či negativita nepředvídaných nadměrných výnosů určují volatilitu  $\sigma_t^2$ . Pokud je rozdělení  $z_t$  symetrické, tak podle Nelson (1991) je zítřejší změna rozptylu podmíněně nekorelovaná s dnešními nadměrnými výnosy. Pokud napíšeme  $\sigma_t^2$  jako funkci zpožděných  $\sigma_t^2$  a zpožděných  $z_t^2$ , je zřejmé, že podmíněný rozptyl je invariantní vůči změnám znaménka náhodných veličin  $z_t$ . Navíc  $\varepsilon_{t-j}^2 = z_{t-j}^2 \sigma_{t-j}^2$  nejsou nezávislé stejně rozdělené.

Asymetrické modely nám poskytují vysvětlení pro tzv. pákový efekt, tedy pro to, že neočekávaný pokles ceny například u akcií zvyšuje volatilitu více než stejně velké neočekávané zvýšení ceny.

#### 3.1 Model EGARCH( $p, q$ )

Asymetrický proces EGARCH( $p, q$ ) představený v článku Nelson (1991) vysvětluje volatilitu  $\sigma_t^2$  v závislosti jak na velikosti, tak na znaménku zpožděných standardizovaných reziduí  $z_t$ .

**Definice 3.1** (Proces EGARCH( $p, q$ ), Rossi (2004)). Proces EGARCH( $p, q$ ) je definován podmínkami (2.8) a rovnicí podmíněného rozptylu ve tvaru

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{i=1}^q \alpha_i [\phi z_{t-i} + \psi(|z_{t-i}| - \mathbf{E} |z_{t-i}|)], \quad (3.1)$$

kde  $\alpha_1 = 1$ .

*Poznámka.* Parametry  $\omega$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  zde nejsou omezeny, aby byly nezáporné.

Označme

$$g(z_t) = \phi z_t + \psi(|z_t| - \mathbf{E} |z_t|). \quad (3.2)$$

Z (2.8) plyne, že  $\{g(z_t)\}$  je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s nulovou střední hodnotou. Obě její složky, tedy  $\phi z_t$  i  $\psi(|z_t| - \mathbf{E} |z_t|)$  mají také nulovou střední hodnotu. Pro  $0 < z_t < \infty$  je  $g(z_t)$  lineární se směrnici  $\phi + \psi$ , a pro  $-\infty < z_t \leq 0$  je  $g(z_t)$  lineární se směrnici  $\phi - \psi$ .  $g(z_t)$  tedy umožňuje procesu podmíněného rozptylu  $\{\sigma_t^2\}$  reagovat asymetricky na růst a pokles cen akcií.

Abychom mohli uvést podmínky stacionarity, přepíšeme si rovnici procesu EGARCH( $p, q$ ) (3.1) následovně:

Označme

$$\alpha(x) = \sum_{i=2}^q \alpha_i x^{i-1},$$

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^p \beta_i x^i.$$

Pak lze psát vzhledem k tomu, že  $\alpha_1 = 1$  ze (3.1)

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) [1 - \beta(B)] &= \omega + [1 + \alpha(B)] g(z_{t-1}), \\ \ln(\sigma_t^2) &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + [1 + \alpha(B)] [1 - \beta(B)]^{-1} g(z_{t-1}), \\ \ln(\sigma_t^2) &= \left[ 1 - \sum_{i=1}^p \beta_i \right]^{-1} \omega + \delta(B) g(z_{t-1}), \\ \ln(\sigma_t^2) &= \omega^* + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i g(z_{t-1-i}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ve vyjádření (3.3) je podle článku Nelson (1991)  $\delta_1 = 1$  a podle (1.1) je  $\ln(\sigma_t^2) - \omega^*$  lineární proces s bílým šumem  $g(z_{t-1})$ . S tím souvisí podmínka stacionarity, kterou uvádí Nelson (1991).

**Věta 3.1.** *Nechť v modelu (3.1) platí (2.8) a (3.3) a necht' aspoň jeden z parametrů  $\phi$ ,  $\psi$  je nenulový. Pak jsou náhodné procesy  $\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$ ,  $\{\exp(-\frac{\omega^*}{2})\varepsilon_t\}$  a  $\{\ln(\sigma_t^2) - \omega^*\}$  striktně stacionární právě tehdy, když  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 < \infty$ .*

*Důkaz.* Rozepsán v Nelson (1991). □

Jak lze vidět při odvození vztahu (3.3), rovnici (3.1) lze zapsat ve tvaru

$$[1 - \beta(B)] \ln(\sigma_t^2) = \omega + [1 + \alpha(B)] g(z_{t-1}).$$

Tedy  $\ln(\sigma_t^2)$  je podle (1.5) a následující poznámky proces ARMA( $p, q-1$ ) s bílým šumem  $g(z_{t-1})$  a nenulovou střední hodnotou. Předpokládejme, že polynomy  $1 - \beta(x)$  a  $1 + \alpha(x)$  nemají společné kořeny. Proces  $\{\ln(\sigma_t^2)\}$  je stacionární právě tehdy, když všechny kořeny polynomu  $1 - \beta(x)$  leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. To zaručí i stacionaritu procesů  $\{\exp(-\omega^*)\sigma_t^2\}$ ,  $\{\exp(-\frac{\omega^*}{2})\varepsilon_t\}$ .

## 3.2 EGARCH(1,1)

Podívejme se nyní na proces EGARCH(1,1) definovaný podmínkami (2.8) a rovnicí podmíněného rozptylu ve tvaru

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + g(z_{t-1}), \tag{3.4}$$

kde  $g(z_{t-1}) = \phi z_{t-1} + \psi(|z_{t-1}| - \mathbf{E}|z_{t-1}|)$ .

Pokud  $\mathbf{E}(z_t^2) < \infty$  a  $\text{var}(g(z_t)) < \infty$ , tak z vyjádření ve tvaru ARMA(1,0) = AR(1) plyne, že proces (3.4) je stacionární právě tehdy, když  $|\beta_1| < 1$ .

### 3.2.1 Existence nepodmíněných momentů

V této sekci se budeme zabývat zkoumáním existence nepodmíněných momentů procesu (3.4), které jsou uvedeny v článku He a kol. (2002). Budeme uvažovat striktně stacionární proces  $\{\varepsilon_t\}$ . Z (3.4) dostáváme

$$\sigma_t^2 = \exp\{\omega + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + g(z_{t-1})\} = \exp\{\omega\} \exp\{g(z_{t-1})\} \sigma_{t-1}^{2\beta_1}. \quad (3.5)$$

**Věta 3.2.** *Uvažujme proces EGARCH(1,1) definovaný (3.4) a podmínkami (2.8) s  $|\beta_1| < 1$ . Předpokládejme, že  $E[\exp\{mg(z_t)\}] < \infty$  pro libovolné  $m > 0$  a  $E|z_t|^{2m} < \infty$ . Pak  $2m$ -tý moment náhodných veličin  $\varepsilon_t$  existuje a je tvaru*

$$\mu_{2m} = E(\varepsilon_t^{2m}) = E|z_t|^{2m} \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} E[\exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_t)\}]. \quad (3.6)$$

*Důkaz.* Pro  $m = 2$ ,  $E[\exp\{2g(z_t)\}] < \infty$  implikuje  $E(g(z_t))^2 < \infty$ . Z podmínky  $|\beta_1| < 1$  plyne, že proces  $\{\varepsilon_t\}$  je striktně stacionární. Umocněním (3.5) na  $m > 0$  dostáváme

$$\sigma_t^{2m} = \exp\{m\omega\} \exp\{mg(z_{t-1})\} \sigma_{t-1}^{2m\beta_1}. \quad (3.7)$$

Dosadíme podle (3.7) za  $\sigma_{t-1}^{2m}$  a máme

$$\sigma_t^{2m} = \exp\{m\omega(1 + \beta_1)\} \exp\{m[g(z_{t-1}) + \beta_1 g(z_{t-2})]\} \sigma_{t-2}^{2m\beta_1^2}.$$

Dalším dosazováním dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_t^{2m} &= \exp\left\{m\omega \sum_{i=0}^{n-1} \beta_1^i\right\} \exp\left\{m \sum_{i=1}^n \beta_1^{i-1} g(z_{t-i})\right\} \sigma_{t-n}^{2m\beta_1^n} \\ &= \exp\left\{m\omega \frac{1 - \beta_1^n}{1 - \beta_1}\right\} \prod_{i=1}^n \exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_{t-i})\} \sigma_{t-n}^{2m\beta_1^n}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Z podmínky stacionarity  $|\beta_1| < 1$  a pro  $n \rightarrow \infty$  v (3.8) získáváme

$$\sigma_t^{2m} = \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} \exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_{t-i})\}. \quad (3.9)$$

Označme

$$a_i = \exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_{t-i})\}. \quad (3.10)$$

Podle předpokladu  $E[\exp\{mg(z_t)\}] < \infty$  pro  $m > 0$ . Z toho vyplývá, že  $E(a_i) < \infty$  pro  $i = 1, 2, \dots$ . Postačující podmínkou pro  $\prod_{i=1}^{\infty} E(a_i) < \infty$  je  $\sum_{i=1}^{\infty} |E(a_i) - 1| < \infty$ . Rozvineme  $a_i$  pomocí Taylorovy řady kolem  $\beta_1^{i-1} = 0$ . Dostaneme

$$a_i = 1 + mg(z_{t-i})\beta_1^{i-1} + O(|\beta_1^{i-1}|^2).$$

Potom vzhledem k tomu, že  $E[g(z_t)]$  nezávisí na čase, lze psát

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |E(a_i) - 1| &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| m\beta_1^{i-1} E[g(z_t)] + O(|\beta_1^{i-1}|^2) \right| \\ &\leq m E[g(z_t)] \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_1^{i-1}| + \sum_{i=1}^{\infty} \left| O(|\beta_1^{i-1}|^2) \right| < \infty, \end{aligned}$$

jelikož  $|\beta_1| < 1$ . Z (3.9) a (2.8) pak je

$$\begin{aligned}\mu_{2m} &= \mathbf{E}(\varepsilon_t^{2m}) = \mathbf{E}|z_t|^{2m} \mathbf{E}(\sigma_t^{2m}) \\ &= \mathbf{E}|z_t|^{2m} \exp\{m\omega(1-\beta)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[ \exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_t)\} \right].\end{aligned}$$

□

Povšimněme si, že podmínka stacionarity  $|\beta_1| < 1$  nezávisí na  $m$ . Tudíž pokud  $|\beta_1| < 1$  a všechny momenty náhodných veličin  $z_t$  a  $\exp\{g(z_t)\}$  existují, potom existují také všechny momenty náhodných veličin  $\varepsilon_t$ .

Odvodíme, jak bude vypadat  $\mathbf{E}|z_t|^{2m}$ . Podle (2.8)  $z_t \sim N(0,1)$ , tedy

$$\mathbf{E}|z_t|^{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} |z|^{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^{2m} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz.$$

Použijeme substituci  $u = \frac{z^2}{2}$ ,  $z = (2u)^{\frac{1}{2}}$ ,  $du = zdz$ ,  $dz = (2u)^{-\frac{1}{2}} du$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|z_t|^{2m} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2u)^m e^{-u} (2u)^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2u)^{m-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{m-1+\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Nyní z (3.11) můžeme přepsat (3.6) do tvaru

$$\mu_{2m} = \mathbf{E}(\varepsilon_t^{2m}) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \exp\{m\omega(1-\beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[ \exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_t)\} \right].\quad (3.12)$$

**Důsledek 3.1.** *Uvažujme proces (3.4) za platnosti (2.8) a předpokládejme, že  $\mathbf{E}|z_t|^4 < \infty$ . Dále předpokládejme, že  $\mathbf{E}[\exp\{g(z_t)\}]$  a  $\mathbf{E}[\exp\{2g(z_t)\}]$  existují, a že platí  $|\beta_1| < 1$ . Potom špičatost náhodných veličin  $\varepsilon_t$  je*

$$\kappa_4(\varepsilon) = \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_t^4)}{[\mathbf{E}(\varepsilon_t^2)]^2} = \kappa_4(z) \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}]}{(\mathbf{E}[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}])^2},\quad (3.13)$$

kde  $\kappa_4(z) = \frac{\mathbf{E}(z_t^4)}{[\mathbf{E}(z_t^2)]^2}$  je špičatost náhodných veličin  $z_t$ .

*Důkaz.* Důsledek dokážeme pomocí dosazení  $m = 1$  a  $m = 2$  do (3.12).

Pro  $m = 1$ :

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mathbf{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) \exp\{\omega(1-\beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[ \exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\} \right] \\ &= \exp\{\omega(1-\beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E} \left[ \exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\} \right].\end{aligned}$$

Pro  $m = 2$ :

$$\begin{aligned}\mu_4 = \mathbf{E}(\varepsilon_t^4) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma(5/2)\exp\{2\omega(1-\beta_1)^{-1}\}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right] \\ &= 3\exp\{2\omega(1-\beta_1)^{-1}\}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right].\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\kappa_4(\varepsilon) &= \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_t^4)}{[\mathbf{E}(\varepsilon_t^2)]^2} = \frac{3\exp\{2\omega(1-\beta_1)^{-1}\}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right]}{\left(\exp\{\omega(1-\beta_1)^{-1}\}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\left[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right]\right)^2} \\ &= 3\frac{\exp\{2\omega(1-\beta_1)^{-1}\}}{[\exp\{\omega(1-\beta_1)^{-1}\}]^2}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\left[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right]}{\left(\mathbf{E}\left[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right]\right)^2}.\end{aligned}$$

Jelikož z (3.11)

$$\kappa_4(z) = \frac{\mathbf{E}(z_t^4)}{[\mathbf{E}(z_t^2)]^2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]^2} = 3,$$

dostáváme

$$\kappa_4(\varepsilon) = \kappa_4(z)\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\left[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right]}{\left(\mathbf{E}\left[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}\right]\right)^2}.$$

□

**Důsledek 3.2.** *Za předpokladů z důsledku 3.1 platí  $\kappa_4(\varepsilon) > \kappa_4(z) = 3$ .*

*Důkaz.* Označme podle (3.10) pro  $m = 1$

$$a_{i,1} = \exp\left\{\beta_1^{i-1}g(z_{t-i})\right\}. \quad (3.14)$$

Pak máme z (3.13)

$$\kappa_4(\varepsilon) = \kappa_4(z)\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}(a_{i,1}^2)}{[\mathbf{E}(a_{i,1})]^2}.$$

Podle Jensenovy nerovnosti je  $\mathbf{E}(a_{i,1}^2) > [\mathbf{E}(a_{i,1})]^2$  pro libovolné  $i$  a odtud plyne tvrzení.

□

Model (3.4) dále zjednodušíme. Položme  $\psi = 0$ , tedy  $g(z) = \phi z_t$ . Připomeňme, že dle (2.8) máme  $z_t \sim N(0,1)$ .

*Poznámka.* Momentová vytvořující funkce náhodné veličiny  $X$  je definovaná předpisem  $M_X(t) = \mathbf{E} e^{tX}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Pro  $X \sim N(0,\sigma^2)$  máme  $M_X(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$ .

**Důsledek 3.3.** Uvažujme proces (3.4) za platnosti (2.8) a  $g(z_t) = \phi z_t$ . Pak platí

$$\mu_{2m} = E(\varepsilon_t^{2m}) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}(m\phi)^2 (1 - \beta_1^2)^{-1}\right\}. \quad (3.15)$$

*Důkaz.* Označme podle (3.10)

$$\alpha_i = \ln(a_i) = m\beta_1^{i-1}g(z_{t-i}) = m\beta_1^{i-1}\phi z_{t-i}.$$

Vzhledem k tomu, že  $z_t \sim N(0,1)$ , platí

$$\alpha_i \sim N\left(0, m^2\phi^2\beta_1^{2(i-1)}\right).$$

Pak  $E[\exp\{\alpha_i\}] = E(a_i)$  je hodnota momentové vytvořující funkce náhodné veličiny  $\alpha_i$  v bodě 1, to znamená

$$E[\exp\{\alpha_i\}] = E(a_i) = E[\exp\{m\beta_1^{i-1}g(z_t)\}] = \exp\left\{\frac{1}{2}m^2\phi^2\beta_1^{2(i-1)}\right\}.$$

Z (3.9) pak dostáváme

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^{2m}) &= \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} E[\exp\{\alpha_i\}] \\ &= \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \prod_{i=1}^{\infty} E(a_i) \\ &= \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}(m\phi)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{2(i-1)}\right\} \\ &= \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}(m\phi)^2 (1 - \beta_1^2)^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

Po dosazení do (3.12) máme

$$\mu_{2m} = E(\varepsilon_t^{2m}) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \exp\{m\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}(m\phi)^2 (1 - \beta_1^2)^{-1}\right\}.$$

□

**Důsledek 3.4.** Za předpokladů z důsledku 3.3 platí

$$\kappa_4(\varepsilon) = \kappa_4(z) \exp\{\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}. \quad (3.16)$$

*Důkaz.* Důsledek dokážeme pomocí dosazení  $m = 1$  a  $m = 2$  do (3.15).

Pro  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E(\varepsilon_t^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) \exp\{\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\right\} \\ &= \exp\{\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\right\}. \end{aligned}$$



Pro  $m = 2$ :

$$\begin{aligned}\mu_4 = \mathbf{E}(\varepsilon_t^4) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma(5/2) \exp\{2\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}(2\phi)^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\right\} \\ &= 3 \exp\{2\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\{2\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}.\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\kappa_4(\varepsilon) &= \frac{\mathbf{E}(\varepsilon_t^4)}{[\mathbf{E}(\varepsilon_t^2)]^2} = 3 \frac{\exp\{2\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\{2\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}}{\left(\exp\{\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\left\{\frac{1}{2}\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\right\}\right)^2} \\ &= 3 \frac{\exp\{2\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\{2\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}}{\exp\{2\omega(1 - \beta_1)^{-1}\} \exp\{\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}} \\ &= 3 \exp\{\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}.\end{aligned}$$

Jelikož víme, že  $\kappa_4(z) = 3$ , dostáváme

$$\kappa_4(\varepsilon) = \kappa_4(z) \exp\{\phi^2(1 - \beta_1^2)^{-1}\}.$$

□

### 3.2.2 Korelační struktura

Autokorelace procesu  $\{\varepsilon_t^2\}$  v modelu EGARCH(1,1) jsou odvozeny v článku He a kol. (2002).

**Věta 3.3.** *Uvažujme proces EGARCH(1,1) definovaný (3.4) a podmínkami (2.8). Předpokládejme, že  $\mathbf{E}|z_t|^4 < \infty$ ,  $\mathbf{E}[|z_t|^2 \exp\{g(z_t)\}] < \infty$ ,  $\mathbf{E}[\exp\{2g(z_t)\}] < \infty$  a platí  $|\beta_1| < 1$ . Pak autokorelační funkce procesu  $\{\varepsilon_t^2\}$  je tvaru*

$$\begin{aligned}\rho_k^{(2)} &= \left( \mathbf{E}|z_t|^2 \mathbf{E}[|z_t|^2 \exp\{\beta_1^{k-1}g(z_t)\}] \prod_{i=1}^{k-1} \mathbf{E}[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}] \right. \\ &\quad \cdot \left. \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[\exp\{(1 + \beta_1^k)\beta_1^{i-1}g(z_t)\}] - \left(\mathbf{E}|z_t|^2\right)^2 \prod_{i=1}^{\infty} \left(\mathbf{E}[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}]\right)^2 \right) / \\ &\quad \left( \mathbf{E}|z_t|^4 \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[\exp\{2\beta_1^{i-1}g(z_t)\}] - \left(\mathbf{E}|z_t|^2\right)^2 \prod_{i=1}^{\infty} \left(\mathbf{E}[\exp\{\beta_1^{i-1}g(z_t)\}]\right)^2 \right)\end{aligned}$$

pro  $k \geq 1$ .

*Důkaz.* Rozepsán v článku He a kol. (2002) pro autokorelaci procesu  $\{|\varepsilon_t|^{2m}\}$ , v našem případě je věta formulována pro  $m = 1$ .

□

Podívejme se dále na speciální případ modelu (3.4), ve kterém  $z_t \sim N(0,1)$  a  $g(z_t) = \phi(z_t)$ .

**Důsledek 3.5.** *Uvažujme proces EGARCH(1,1) definovaný (3.4) a podmínkami (2.8), kde  $g(z_t) = \phi(z_t)$ . Pak autokorelační funkce procesu  $\{\varepsilon_t^2\}$  je dána předpisem*

$$\rho_k^{(2)} = \frac{[1 + \phi^2 \beta_1^{2(k-1)}] \exp\{\phi^2 \beta_1^k (1 - \beta_1^2)^{-1}\} - 1}{3 \exp\{\phi^2 (1 - \beta_1^2)^{-1}\} - 1}, \quad \text{pro } k \geq 1.$$

*Důkaz.* Je proveden v článku He a kol. (2002).

□

## 4. Pravděpodobnostní rozdělení

Doposud jsme předpokládali, že standardizovaná rezidua  $z_t = \varepsilon_t/\sigma_t$  v modelech GARCH a EGARCH mají normované normální rozdělení. Nyní tento předpoklad zobecníme.

### 4.1 Rozdělení GED

Nelson (1991) předpokládá, že standardizovaný proces  $z_t \sim GED(\nu)$ . GED (Generalized Error Distribution) je symetrická rodina rozdělení používaných v modelování finančních časových řad. Obsahuje například speciální případy normálního a Laplaceova rozdělení. Hustota rozdělení GED je tvaru

$$f(z) = \frac{\nu \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{z}{\lambda}\right|^\nu\right]}{\lambda 2^{(1+1/\nu)}\Gamma(1/\nu)}, \quad -\infty < z < \infty, \quad 0 < \nu \leq \infty, \quad (4.1)$$

kde  $\nu$  je parametr těžkosti chvostů a

$$\lambda = \sqrt{2^{-\frac{2}{\nu}} \frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}}. \quad (4.2)$$

Pro  $z_t \sim GED(\nu)$  platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z_t) &= 0, \\ \text{var}(z_t) &= 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\mathbf{E}(z_t) = 0$ , jelikož  $zf(z)$  je lichá funkce na intervalu  $(-\infty, \infty)$  a tedy  $z_t \sim GED(\nu)$  má všechny liché momenty nulové. Platnost vztahu  $\text{var}(z_t) = 1$  ověříme následovně

$$\begin{aligned} \text{var}(z_t) &= \mathbf{E}(z_t)^2 - [\mathbf{E}(z_t)]^2 = \mathbf{E}(z_t^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{\nu \exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{z}{\lambda}\right|^\nu\right]}{\lambda 2^{(1+1/\nu)}\Gamma(1/\nu)} dz = 2 \int_0^{\infty} z^2 \frac{\nu \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^\nu\right]}{\lambda 2^{(1+1/\nu)}\Gamma(1/\nu)} dz \\ &= 2 \frac{\nu}{\lambda 2^{(1+1/\nu)}\Gamma(1/\nu)} \int_0^{\infty} z^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^\nu\right] dz. \end{aligned}$$

Provedeme substituci

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^\nu, \quad z = (2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda, \\ du &= \frac{1}{2\lambda^\nu} \nu z^{\nu-1} dz, \\ dz &= \frac{2\lambda^\nu}{\nu z^{\nu-1}} du = \frac{(2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda}{\nu u} du. \end{aligned}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}\text{var}(z_t) &= \frac{\nu}{\lambda 2^{\frac{1}{\nu}} \Gamma(1/\nu)} \int_0^\infty [(2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda]^2 \frac{(2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda}{\nu u} e^{-u} du \\ &= \frac{2^{\frac{2}{\nu}} \lambda^2}{\Gamma(1/\nu)} \int_0^\infty u^{\frac{2}{\nu}} \frac{u^{\frac{1}{\nu}}}{u} e^{-u} du \\ &= \frac{2^{\frac{2}{\nu}} \lambda^2}{\Gamma(1/\nu)} \int_0^\infty u^{\frac{3}{\nu}-1} e^{-u} du = \frac{2^{\frac{2}{\nu}} \lambda^2}{\Gamma(1/\nu)} \Gamma(3/\nu).\end{aligned}$$

Po dosazení (4.2) máme

$$\text{var}(z_t) = \frac{2^{\frac{2}{\nu}} \lambda^2}{\Gamma(1/\nu)} \Gamma(3/\nu) = \frac{2^{\frac{2}{\nu}} 2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma(1/\nu)}{\Gamma(1/\nu) \Gamma(3/\nu)} \Gamma(3/\nu) = 1.$$

## 4.2 Speciální případy

Volbou parametru  $\nu$  lze ukázat, která rozdělení patří do rodiny GED. Pro

- $\nu = 2$ :  $z_t \sim N(0,1)$  ... normované normální rozdělení,
- $\nu = 1$ :  $z_t \sim L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ... Laplaceovo rozdělení,
- $\nu = \infty$ :  $z_t \sim R(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  ... rovnoměrné rozdělení.

### 4.2.1 Výpočty hustot

Položme nejprve  $\nu = 2$ . Z (4.2) máme

$$\lambda = \sqrt{2^{-1} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}/2}} = 1.$$

Dosazením do (4.1) získáváme

$$f(z) = \frac{2 \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2\right]}{2^{(1+1/2)} \Gamma(1/2)} = \frac{2 \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2\right]}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{\exp\left[-\frac{|z|^2}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}},$$

což odpovídá tomu, že  $z_t \sim N(0,1)$ .

Pro  $\nu = 1$  chceme ukázat, že  $z_t$  mají Laplaceovo rozdělení. Ukažme si nejprve, jak vypadá hustota tohoto rozdělení. Anděl (2011) uvádí

$$f(z) = \frac{1}{2b} \exp\left[-\frac{|z - \mu|}{b}\right], \quad -\infty < z < \infty, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad b > 0. \quad (4.4)$$

Značíme  $z_t \sim L(\mu, b)$  a platí

$$\begin{aligned}E(z_t) &= \mu, \\ \text{var}(z_t) &= 2b^2.\end{aligned} \quad (4.5)$$

Z (4.2) máme pro  $\nu = 1$

$$\lambda = \sqrt{2^{-2} \cdot \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Dosazením  $\lambda$  do (4.1) dostáváme

$$f(z) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \left|\frac{z}{1/2\sqrt{2}}\right|\right]}{\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2^2 \cdot \Gamma(1)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot |z|\right]}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\exp\left[-\sqrt{2} \cdot |z|\right]}{\frac{2}{\sqrt{2}}}.$$

Vidíme, že hustota rozdělení GED pro volbu parametru  $\nu = 1$  odpovídá hustotě Laplaceova rozdělení (4.4) s parametry  $\mu = 0$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ze (4.5) vidíme, že i zde platí vztahy pro momenty (4.3).

Podívejme se ještě, jak bude vypadat hustota pro volbu parametru  $\nu = \infty$ . Pro  $\Gamma$ -funkci zde budeme uvažovat následující vyjádření převzaté z Rektorys (2000)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x \exp(cx)} \cdot \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{x}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)}, \quad (4.6)$$

kde  $c = 0.577215665$  je Eulerova konstanta.

Limitu hustoty rozdělení GED (4.1) pro  $\nu \rightarrow \infty$  si můžeme pro zjednodušení rozložit jako

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z) = \frac{1}{2} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\nu}{\Gamma(1/\nu)} \cdot \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda 2^{\frac{1}{\nu}}} \cdot \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left|\frac{z}{\lambda}\right|^{\nu}\right] \quad (4.7)$$

a počítat postupně jednotlivé limity. Z (4.6) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\nu}{\Gamma(1/\nu)} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \nu \cdot \frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{c}{\nu}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\nu n}} \left(1 + \frac{1}{\nu n}\right) \right] \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{c}{\nu}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\nu n}} \left(1 + \frac{1}{\nu n}\right) \right] \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dále z (4.2) a (4.6) máme

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda 2^{\frac{1}{\nu}}} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2^{-\frac{2}{\nu}} \cdot \frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)} \cdot 2^{\frac{1}{\nu}}}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\Gamma(3/\nu)}{\Gamma(1/\nu)}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\exp(\frac{c}{\nu}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\nu n}} \left(1 + \frac{1}{\nu n}\right)}{3 \exp(\frac{3c}{\nu}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{\nu n}} \left(1 + \frac{3}{\nu n}\right)}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 1 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Konečně

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left|\frac{z}{\lambda}\right|^{\nu}\right] &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left|\frac{z}{\sqrt{2^{-\frac{2}{\nu}} \frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}}}\right|^{\nu}\right] \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{\Gamma(3/\nu)}{\Gamma(1/\nu)}\right)^{\frac{\nu}{2}} |z|^{\nu}\right]. \end{aligned}$$

Podle předešlých úprav je zřejmé

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |z| \sqrt{\frac{\Gamma(3/\nu)}{\Gamma(1/\nu)}} = |z| \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \text{ pro } |z| < \sqrt{3}.$$

V tom případě

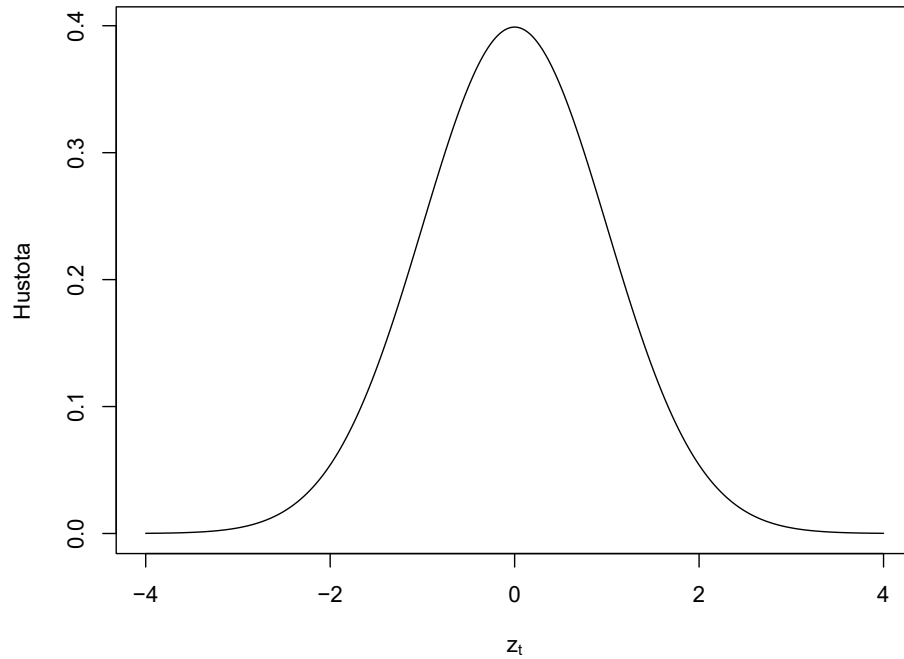
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp \left[ - \left( |z| \sqrt{\frac{\Gamma(3/\nu)}{\Gamma(1/\nu)}} \right)^\nu \right] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \exp \left[ - \left( \frac{|z|}{\sqrt{3}} \right)^\nu \right] = e^0 = 1. \quad (4.10)$$

Shrnutím (4.7)-(4.10) dostaneme

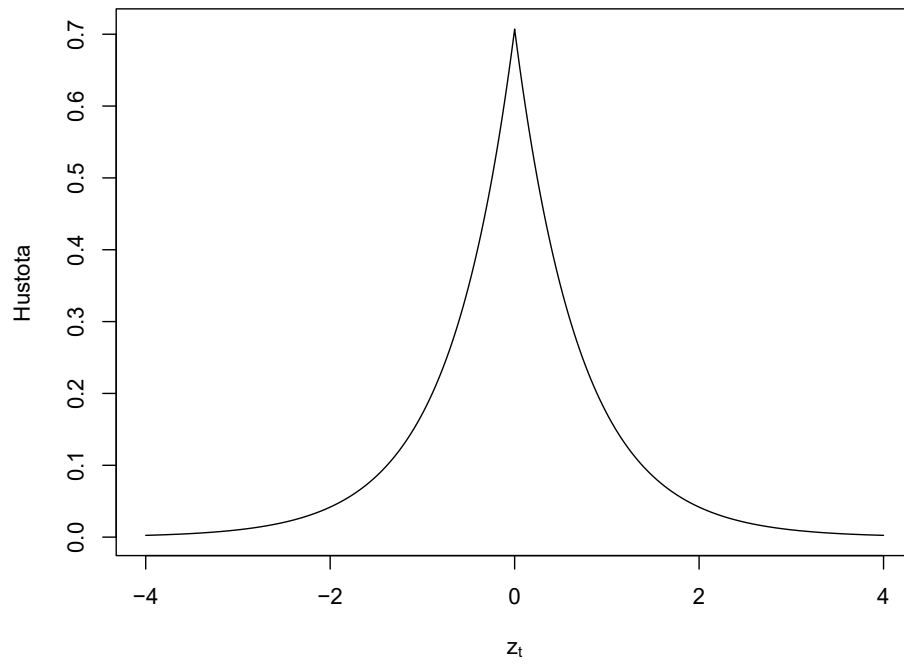
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ pro } z \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

což je hustota rozdělení  $R(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

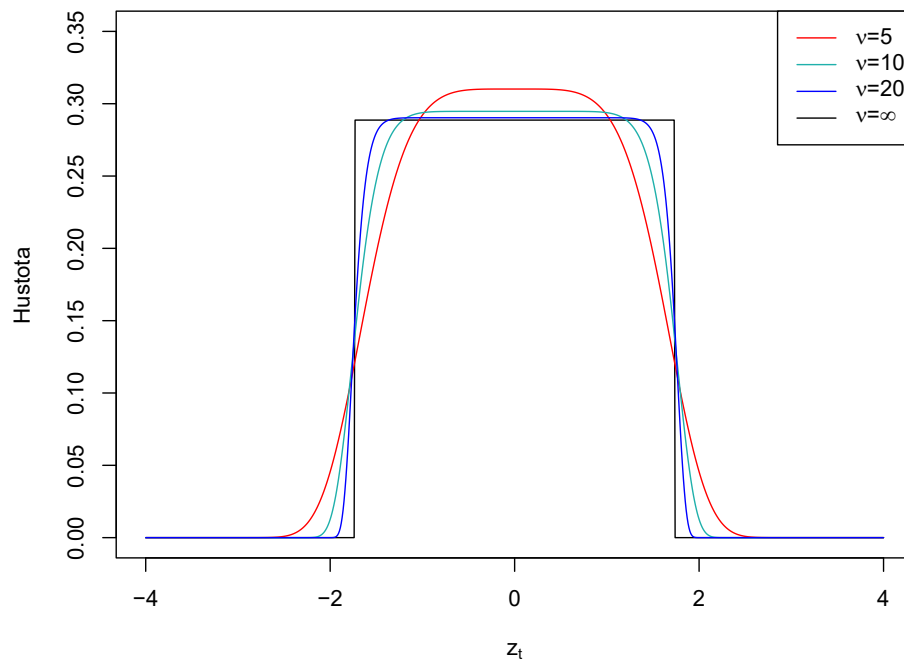
Podívejme se nyní, jak budou jednotlivé hustoty vypadat. Na obrázku 4.3 můžeme vidět rychlost přiblížení hustoty rozdělení  $GED(\nu)$  k hustotě  $R(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  pro rostoucí  $\nu$ . Všimněme si, že pro volbu  $\nu = 20$  je hustota již velmi podobná hustotě rovnoměrného rozdělení.



Obrázek 4.1: Hustota  $N(0,1)$ .



Obrázek 4.2: Hustota  $L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .



Obrázek 4.3: Hustota  $R\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$  s vyobrazením hustot  $GED(\nu)$  pro  $\nu = 5, 10, 20$ .

## 4.2.2 Výpočty střední absolutní hodnoty $z$

Dále se podíváme, jak pro jednotlivá rozdělení vypadají  $E |z_t|$ , které se využívají v rovnici modelu EGARCH (3.1).

Nejprve pro  $z_t \sim N(0,1)$  máme

$$\begin{aligned} E |z_t| &= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{|z|^2}{2} \right\} dz \\ &= \int_{-\infty}^0 -z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(-z)^2}{2} \right\} dz + \int_0^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz. \end{aligned}$$

Provedeme substituci  $u = z^2/2$ ,  $du = z dz$ .

$$E |z_t| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} [-e^{-u}]_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (4.11)$$

Pro  $z_t \sim L(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  máme

$$\begin{aligned} E |z_t| &= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{\exp \left\{ -\sqrt{2}|z| \right\}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |z| \exp \left\{ -\sqrt{2}|z| \right\} dz \\ &= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} z \exp \left\{ -\sqrt{2}z \right\} dz. \end{aligned}$$

Provedeme substituci  $u = \sqrt{2}z$ ,  $dz = \frac{1}{\sqrt{2}} du$ .

$$E |z_t| = \sqrt{2} \int_0^{\infty} \frac{u}{\sqrt{2}} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} u e^{-u} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4.12)$$

Pro  $z_t \sim R(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

$$E |z_t| = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{|z|}{2\sqrt{3}} dz = 2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} z dz = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (4.13)$$

Obecně pro  $z_t \sim GED(\nu)$  je

$$\begin{aligned} E |z_t| &= \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{\nu \exp \left[ -\frac{1}{2} \left| \frac{z}{\lambda} \right|^\nu \right]}{\lambda 2^{(1+1/\nu)} \Gamma(1/\nu)} dz = 2 \int_0^{\infty} z \frac{\nu \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z}{\lambda} \right)^\nu \right]}{\lambda 2^{(1+1/\nu)} \Gamma(1/\nu)} dz \\ &= 2 \frac{\nu}{\lambda 2^{(1+1/\nu)} \Gamma(1/\nu)} \int_0^{\infty} z \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z}{\lambda} \right)^\nu \right] dz. \end{aligned}$$



Provedeme substituci

$$u = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\lambda} \right)^\nu, \quad z = (2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda,$$

$$du = \frac{1}{2\lambda^\nu} \nu z^{\nu-1} dz,$$

$$dz = \frac{2\lambda^\nu}{\nu z^{\nu-1}} du = \frac{(2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda}{\nu u} du.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |z_t| &= \frac{\nu}{\lambda 2^{\frac{1}{\nu}} \Gamma(1/\nu)} \int_0^\infty (2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda \frac{(2u)^{\frac{1}{\nu}} \lambda}{\nu u} e^{-u} du \\ &= \frac{\nu 2^{\frac{2}{\nu}} \lambda^2}{\lambda 2^{\frac{1}{\nu}} \nu \Gamma(1/\nu)} \int_0^\infty u^{\frac{2}{\nu}-1} e^{-u} du = \frac{\lambda 2^{\frac{1}{\nu}}}{\Gamma(1/\nu)} \Gamma(2/\nu). \end{aligned}$$

Po dosazení (4.2) máme

$$\mathbb{E} |z_t| = 2^{-\frac{1}{\nu}} \sqrt{\frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}} 2^{\frac{1}{\nu}} \frac{\Gamma(2/\nu)}{\Gamma(1/\nu)} = \Gamma(2/\nu) \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1/\nu)\Gamma(3/\nu)}}. \quad (4.14)$$

Nyní z (4.14) ověříme  $\mathbb{E} |z_t|$  pro speciální volby parametru  $\nu$ .

Pro  $\nu = 2$ :

$$\mathbb{E} |z_t| = \Gamma(1) \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}} = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\Gamma(1/2)\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

což odpovídá (4.11).

Pro  $\nu = 1$ :

$$\mathbb{E} |z_t| = \Gamma(2) \frac{1}{\sqrt{\Gamma(1)\Gamma(3)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

což odpovídá (4.12).

Pro  $\nu = \infty$  s využitím (4.6):

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(2/\nu)}{\sqrt{\Gamma(1/\nu)\Gamma(3/\nu)}} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{\nu} e^{\frac{c}{\nu}} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{\nu n}} \left(1 + \frac{1}{\nu n}\right) \frac{3}{\nu} e^{\frac{3c}{\nu}} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{3}{\nu n}} \left(1 + \frac{3}{\nu n}\right)}}{\frac{2}{\nu} e^{\frac{2c}{\nu}} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2}{\nu n}} \left(1 + \frac{2}{\nu n}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

což odpovídá (4.13).

# 5. Numerická studie

V této kapitole se budeme věnovat číselným výpočtům, simulacím časových řad v konkrétně specifikovaných modelech a aplikací modelů na reálná data. Všechny výstupy ze softwaru R (R Core Team, 2023), které v této kapitole zmiňujeme, jsou v elektronické příloze A.1.

## 5.1 Momenty a korelace

V první podkapitole se zaměříme na numerické výpočty momentů a korelací náhodných veličin  $\varepsilon_t^2$  v procesech GARCH(1,1) a EGARCH(1,1) při různě zvolených hodnotách parametrů.

### 5.1.1 GARCH(1,1)

Nejprve si ukážeme jak budou vypadat sudé momenty veličin  $\varepsilon_t$  a autokorelace veličin  $\varepsilon_t^2$  v procesu GARCH(1,1) pro konkrétní volby parametrů  $\alpha_1$  a  $\beta_1$ . Uvažujme stále  $z_t \sim N(0,1)$  a  $\omega = 1$ . Jako první volbu položíme  $\alpha_1 = 0.1$  a  $\beta_1 = 0.8$ . Podle (2.17) z věty 2.2 ověříme podmínku existence čtvrtého momentu náhodných veličin  $\varepsilon_t$ . Dosazením do (2.21) máme

$$\mu(0.1, 0.8, 2) = 0.8^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 0.8 + 3 \cdot 0.1^2 = 0.83 < 1,$$

tedy nutná a postačující podmínka pro existenci čtvrtého momentu náhodných veličin  $\varepsilon_t$  je splněna, což nám zaručí i existenci druhého momentu.

S využitím (2.22) a (2.23) můžeme druhý a čtvrtý moment náhodné veličiny  $\varepsilon_t$  spočítat

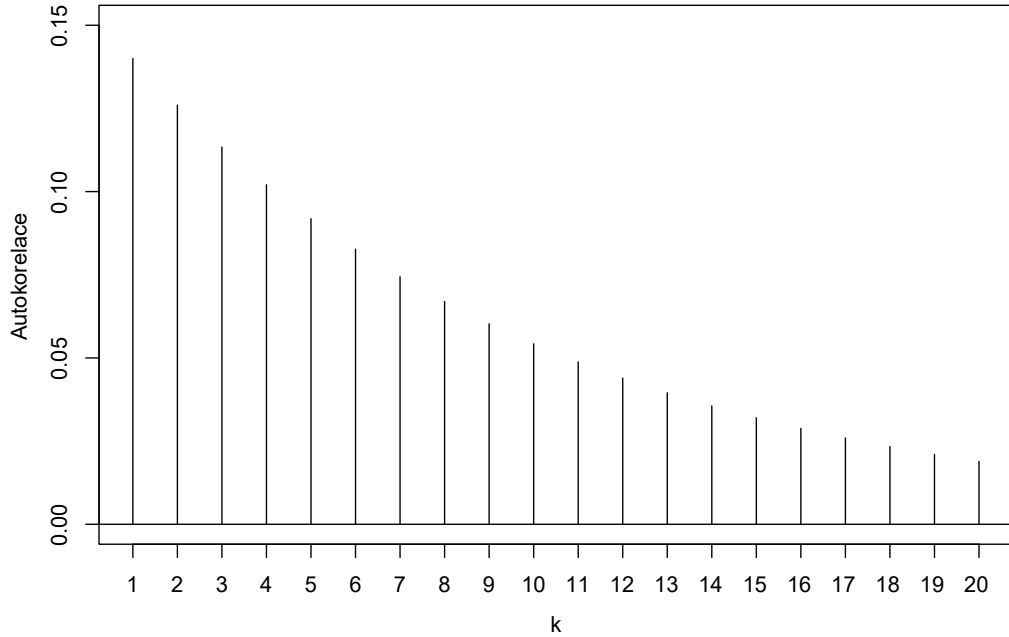
$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= \frac{\omega}{1 - \beta_1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - 0.8 - 0.1} = 10. \\ E(\varepsilon_t^4) &= 3 \frac{\omega^2(1 + \beta_1 + \alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \\ &= 3 \frac{(1 + 0.8 + 0.1)}{(1 - 0.8 - 0.1)(1 - 0.83)} \\ &= 335.29. \end{aligned}$$

Dále máme

$$\kappa_4(\varepsilon) = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = \frac{335.29}{10^2} = 3.35.$$

Z (2.36) spočítáme ještě autokorelaci náhodných veličin  $\varepsilon_t^2$  a  $\varepsilon_{t-1}^2$

$$\rho_1^{(2)} = \frac{(1 - 0.8(0.1 + 0.8)) \cdot 0.1}{1 - 0.8^2 - 2 \cdot 0.1 \cdot 0.8} = 0.14.$$



Obrázek 5.1: Autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  v modelu GARCH(1,1) s parametry  $\omega = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.1$  a  $\beta_1 = 0.8$ .

V obrázku 5.1 vidíme autokorelace procesu  $\{\varepsilon_t^2\}$  do zpoždění  $k = 20$ , které byly napočítány podle (2.36) a (2.35). S rostoucím  $k$  se hodnoty autokorelací zmenšují, což vyplývá z (2.35).

Zvolme nyní  $\alpha_1 = 0.4$  a  $\beta_1 = 0.5$ . Nejprve opět podle (2.17) ověříme postačující podmínku existence čtvrtého momentu veličin  $\varepsilon_t$  dosazením do (2.21)

$$\mu(0.4, 0.5, 2) = 0.5^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.4^2 = 1.13 > 1,$$

tedy (2.17) není splněno a jelikož se jedná o nutnou podmínku, tak veličiny  $\varepsilon_t$  nemají čtvrtý moment. Pokud bychom jej počítali podle (2.23), dostaneme

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4) &= 3 \frac{\omega^2(1 + \beta_1 + \alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \\ &= 3 \frac{(1 + 0.5 + 0.4)}{(1 - 0.5 - 0.4)(1 - 1.13)} \\ &= -438,46. \end{aligned}$$

Obdrželi jsme záporné číslo, což je v rozporu s vlastnostmi sudých momentů. Zkusme ověřit alespoň existenci druhého momentu dosazením do (2.20)

$$\mu(0.4, 0.5, 1) = 0.5 + 0.4 = 0.9 < 1.$$

Podmínku máme splněnou, druhý moment existuje a podle (2.22) je roven

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \beta_1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - 0.4 - 0.5} = 10.$$

Pro volbu  $\alpha_1 = 0.8$  a  $\beta_1 = 0.1$  dostáváme z (2.21)

$$\mu(0.8, 0.1, 2) = 0.1^2 + 2 \cdot 0.8 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.8^2 = 2.09 > 1,$$

tedy podmínka existence čtvrtého momentu je opět porušena. Podle (2.20)

$$\mu(0.8, 0.1, 1) = 0.1 + 0.8 = 0.9 < 1.$$

Druhý moment existuje a je roven

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \beta_1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - 0.8 - 0.1} = 10.$$

Jelikož poslední dvě volby parametrů nesplňovaly podmínku existence čtvrtých momentů, zkusme nyní zvolit parametry blíže první volbě, pro kterou podmínka splněna byla. Například  $\alpha_1 = 0.2$  a  $\beta_1 = 0.7$ .

$$\mu(0.2, 0.7, 2) = 0.7^2 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.2^2 = 0.89 < 1.$$

Vidíme, že pro tuto volbu je podmínka splněna, a podíváme se tedy, jak budou vypadat momenty náhodné veličiny  $\varepsilon_t$ .

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \beta_1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - 0.7 - 0.2} = 10.$$

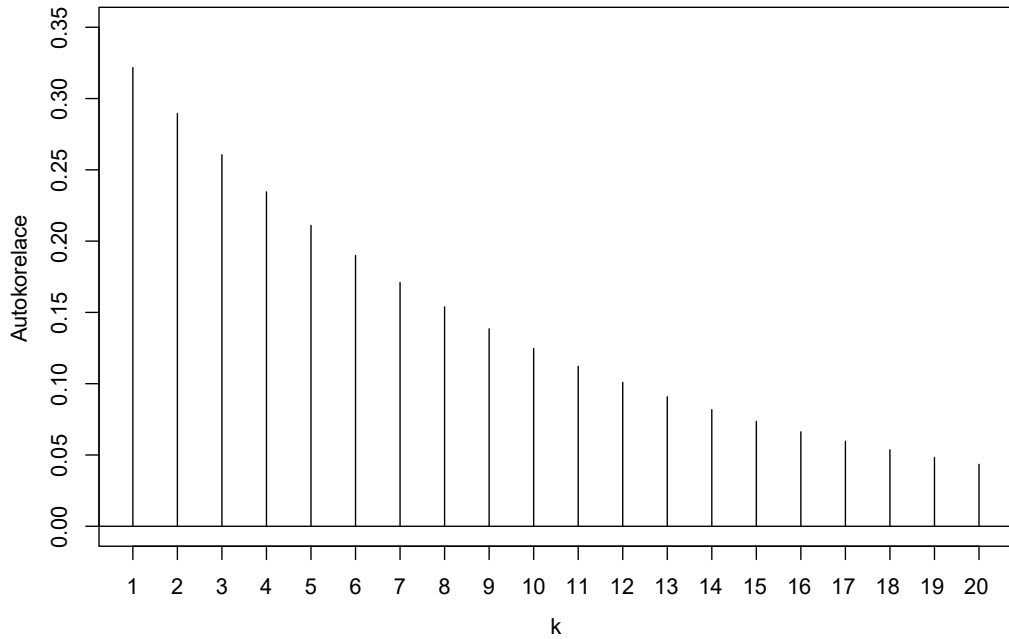
$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4) &= 3 \frac{\omega^2(1 + \beta_1 + \alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \\ &= 3 \frac{(1 + 0.7 + 0.2)}{(1 - 0.7 - 0.2)(1 - 0.89)} \\ &= 518.18. \end{aligned}$$

Dále

$$\kappa_4(\varepsilon) = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = \frac{518.18}{10^2} = 5.18$$

a autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  a  $\varepsilon_{t-1}^2$  je podle (2.36)

$$\rho_1^{(2)} = \frac{(1 - 0.7(0.2 + 0.7)) \cdot 0.1}{1 - 0.7^2 - 2 \cdot 0.2 \cdot 0.7} = 0.32.$$



Obrázek 5.2: Autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  v modelu GARCH(1,1) s parametry  $\omega = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.2$  a  $\beta_1 = 0.7$ .

Zkusme nyní položit  $\alpha_1 = 0.3$  a  $\beta_1 = 0.6$ .

$$\mu(0.3,0.6,2) = 0.6^2 + 2 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.3^2 = 0.99 < 1.$$

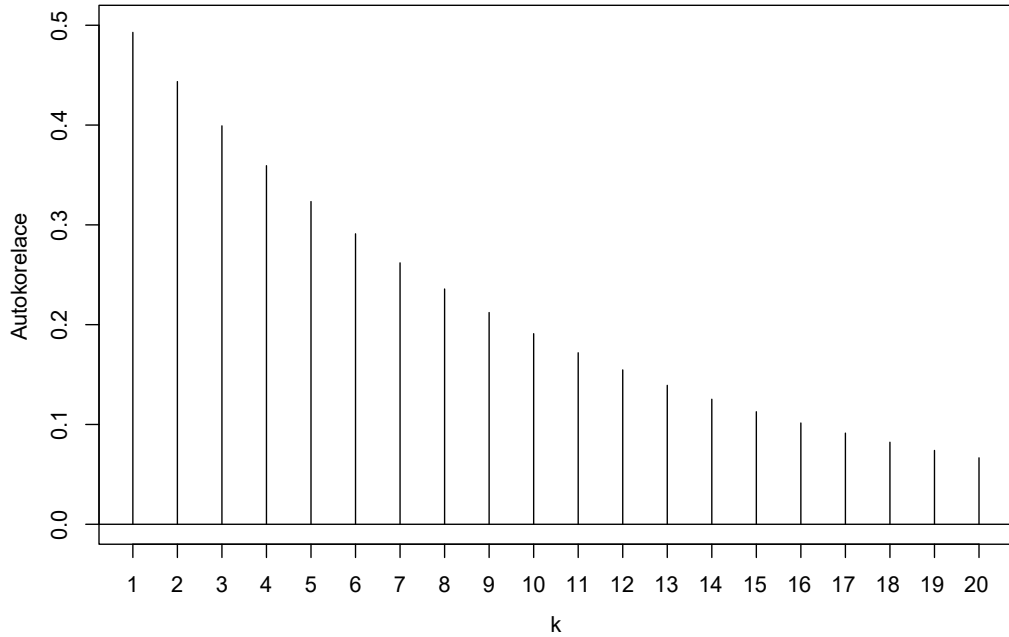
I zde je podmínka existence čtvrtého momentu splněna, avšak už máme hodnotu velmi blízkou 1, což odpovídá faktu, že pro  $\alpha_1 = 0.4$  a  $\beta_1 = 0.5$  podmínka již splněna není. Z (2.22) a (2.23) dostáváme

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \beta_1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - 0.6 - 0.3} = 10.$$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4) &= 3 \frac{\omega^2(1 + \beta_1 + \alpha_1)}{(1 - \beta_1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \\ &= 3 \frac{(1 + 0.6 + 0.3)}{(1 - 0.6 - 0.3)(1 - 0.99)} \\ &= 5700. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} \kappa_4(\varepsilon) &= \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} = \frac{5700}{10^2} = 57, \\ \rho_1^{(2)} &= \frac{(1 - 0.6(0.3 + 0.6)) \cdot 0.3}{1 - 0.6^2 - 2 \cdot 0.3 \cdot 0.6} = 0.49. \end{aligned}$$



Obrázek 5.3: Autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  v modelu GARCH(1,1) s parametry  $\omega = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.3$  a  $\beta_1 = 0.6$ .

Rychlost poklesu autokorelací v obrázcích 5.2 a 5.3 je stejně jako v obrázku 5.1 dána násobením faktorem  $\alpha_1 + \beta_1 = 0.9$ , jak vyplývá z (2.35).

Pro lepší přehlednost si zobrazíme výše napočítané výsledky v tabulce.

$\alpha_1$	$\beta_1$	$E(\varepsilon_t^2)$	$E(\varepsilon_t^4)$	$\kappa_4(\varepsilon)$	$\rho_1^{(2)}$
0.1	0.8	10	335	3.35	0.14
0.2	0.7	10	518	5.18	0.32
0.3	0.6	10	5700	57.00	0.49

Tabulka 5.1: Výsledky výpočtů pro GARCH(1,1),  $z_t \sim N(0,1)$ ,  $\omega = 1$ .

Vidíme, že s růstem parametru  $\alpha_1$  a poklesem parametru  $\beta_1$  při zachování konstantního součtu  $\alpha_1 + \beta_1$ , a tedy dle (2.22) konstantní  $E(\varepsilon_t^2)$ , se zvětšuje špičatost náhodných veličin  $\varepsilon_t$  a autokorelace dvojic  $\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-1}^2$ . Pro  $\alpha_1 = 0.4, \beta_1 = 0.5$  již  $\varepsilon_t$  nemají čtvrtý moment.

### 5.1.2 EGARCH(1,1)

Podívejme se nyní, jak budou vypadat sudé momenty veličin  $\varepsilon_t$  a autokorelace veličin  $\varepsilon_t^2$  v procesu EGARCH(1,1) pro konkrétní volby parametrů.

Stále uvažujme  $z_t \sim N(0,1)$  a volme  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$  a  $\psi = 0$ . Z rovnice (3.4) dostaneme

$$\ln(\sigma_t^2) = \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + z_{t-1}.$$

Ověřme z věty 3.2, zda pro volbu  $m = 2$  čtvrtý moment náhodných veličin  $\varepsilon_t$  existuje. Všimněme si, že  $E[\exp\{2z\}]$  je momentová vytvořující funkce náhodné veličiny  $z$  v bodě  $t = 2$ . Zároveň víme, že  $z \sim N(0,1)$ , a momentová vytvořující funkce je tedy tvaru  $M_Z(t) = \exp[t^2/2]$ . Pro  $t = 2$  dostáváme

$$M_Z(2) = E[\exp\{2z\}] = e^2 < \infty.$$

Druhá část podmínky vyžaduje  $E|z_t|^4 < \infty$ , což je splněno díky předpokladu  $z_t \sim N(0,1)$ . Tedy obě části podmínky existence čtvrtého momentu jsou splněny. Povšimněme si, že podmínky nezávisí na volbě parametru  $\beta_1$ , tedy momenty budou existovat pro libovolnou volbu tohoto parametru.

Položme nejprve  $\beta_1 = 0.8$ . Z důsledku 3.3 si ukážeme, jak budou pro tuto volbu momenty vypadat.

Pro  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \mu_2 = E(\varepsilon_t^2) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) \exp\left\{\frac{1}{2}(1 - 0.8^2)^{-1}\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}(1 - 0.8^2)^{-1}\right\} \\ &= 4.01. \end{aligned}$$

Pro  $m = 2$ :

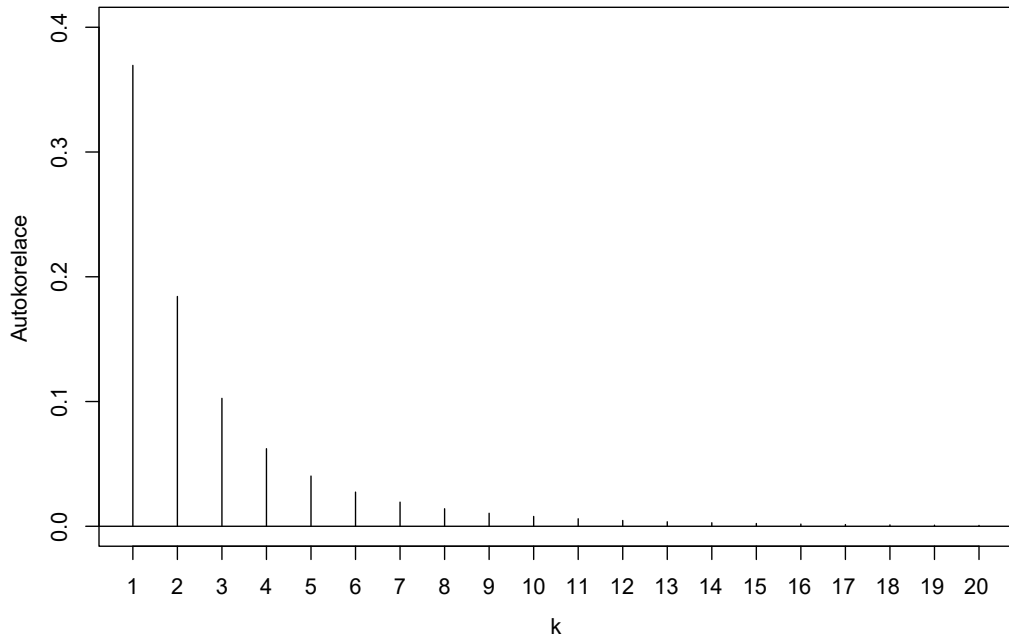
$$\begin{aligned} \mu_4 = E(\varepsilon_t^4) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma(5/2) \exp\left\{\frac{1}{2}4(1 - 0.8^2)^{-1}\right\} = 3 \exp\left\{2(1 - 0.8^2)^{-1}\right\} \\ &= 776.01. \end{aligned}$$

Z důsledku 3.4 spočítáme, jak bude vypadat špičatost procesu  $\{\varepsilon_t\}$ .

$$\kappa_4(\varepsilon) = \kappa_4(z) \exp\left\{(1 - 0.8^2)^{-1}\right\} = 3 \exp\left\{(1 - 0.8^2)^{-1}\right\} = 48.25.$$

Z důsledku 3.5 dokážeme zapsat, jak bude vypadat autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  pro  $k=1$ .

$$\begin{aligned} \rho_1^{(2)} &= \frac{(1 + 0.8^0) \exp\{0.8^1(1 - 0.8^2)^{-1}\} - 1}{3 \exp\{(1 - 0.8^2)^{-1}\} - 1} = \frac{2 \exp\{0.8(1 - 0.8^2)^{-1}\} - 1}{3 \exp\{(1 - 0.8^2)^{-1}\} - 1} \\ &= 0.37. \end{aligned}$$



Obrázek 5.4: Autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  v modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\phi = 1$  a  $\beta_1 = 0.8$ .

Na obrázku 5.4 vidíme, že hodnoty autokorelací se velmi rychle zmenšují a pro zpoždění  $k = 10$  a vyšší jsou téměř nulové.

Pro volbu  $\beta_1 = 0.5$  obdobně dostaneme

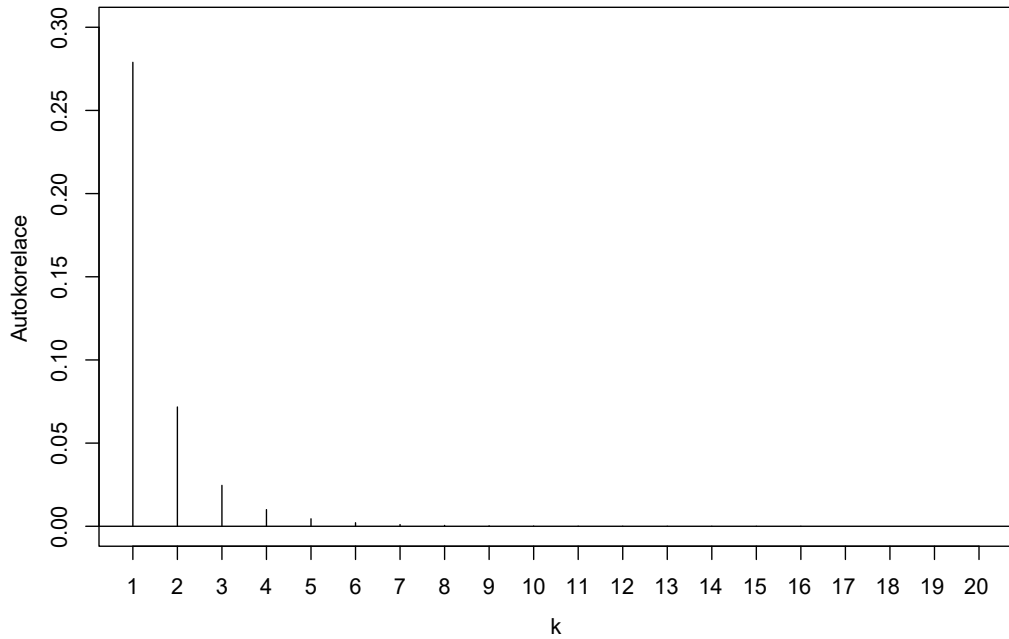
$$\mu_2 = E(\varepsilon_t^2) = \exp\left\{\frac{1}{2}(1 - 0.5^2)^{-1}\right\} = 1.95.$$

$$\mu_4 = E(\varepsilon_t^4) = 3 \exp\left\{2(1 - 0.5^2)^{-1}\right\} = 43.18.$$

$$\kappa_4(\varepsilon) = 3 \exp\left\{(1 - 0.5^2)^{-1}\right\} = 11.38.$$

$$\rho_1^{(2)} = \frac{2 \exp\left\{0.5(1 - 0.5^2)^{-1}\right\} - 1}{3 \exp\left\{(1 - 0.5^2)^{-1}\right\} - 1} = 0.28.$$





Obrázek 5.5: Autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  v modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\phi = 1$  a  $\beta_1 = 0.5$ .

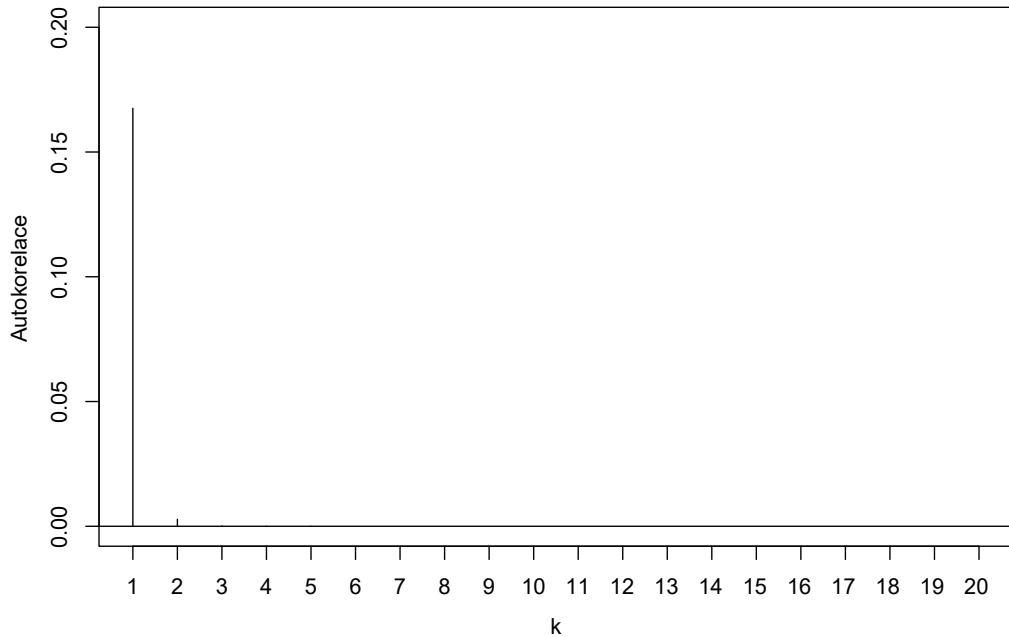
Pro volbu  $\beta_1 = 0.1$  dostaneme

$$\mu_2 = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \exp\left\{\frac{1}{2}(1 - 0.1^2)^{-1}\right\} = 1.66.$$

$$\mu_4 = \mathbb{E}(\varepsilon_t^4) = 3 \exp\left\{2(1 - 0.1^2)^{-1}\right\} = 22.62.$$

$$\kappa_4(\varepsilon) = 3 \exp\left\{(1 - 0.1^2)^{-1}\right\} = 8.24.$$

$$\rho_1^{(2)} = \frac{2 \exp\left\{0.1(1 - 0.1^2)^{-1}\right\} - 1}{3 \exp\left\{(1 - 0.1^2)^{-1}\right\} - 1} = 0.17.$$



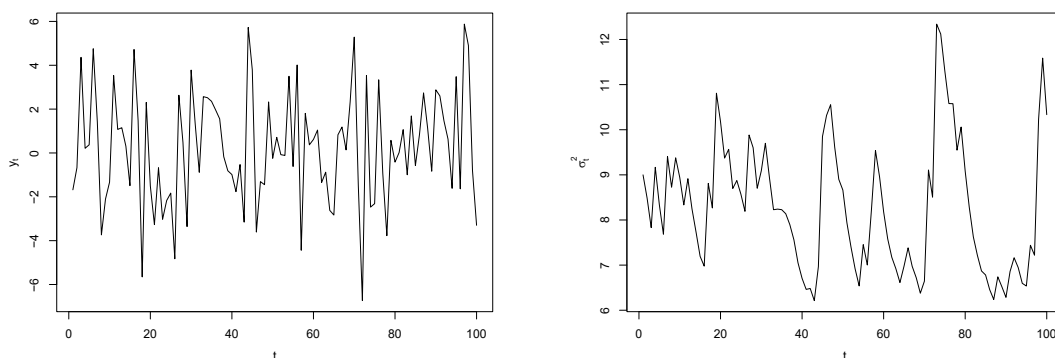
Obrázek 5.6: Autokorelační funkce veličin  $\varepsilon_t^2$  v modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $\phi = 1$  a  $\beta_1 = 0.1$ .

Když porovnáme obrázky 5.4, 5.5 a 5.6, vidíme, že autokorelace veličin  $\varepsilon_t^2$  v procesu EGARCH(1,1) nabývají nižších hodnot pro menší parametr  $\beta_1$ . Čím menší  $\beta_1$ , tím rychleji hodnoty autokorelací také klesají. Jak můžeme vidět na obrázku 5.6, hodnoty autokorelací pro  $\beta_1 = 0.1$  jsou pro  $k \geq 2$  takřka nulové. Špičatost veličin  $\varepsilon_t$  s klesajícím  $\beta_1$  klesá.

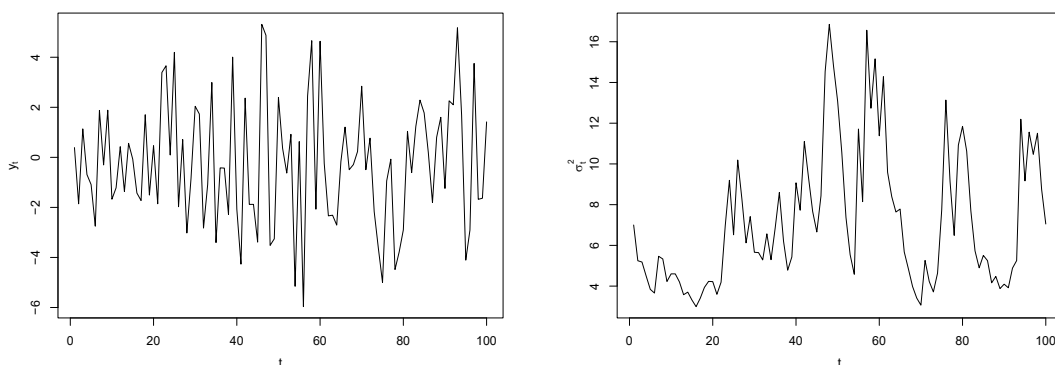
## 5.2 Simulace procesů

V této podkapitole si pomocí statistického softwaru R (R Core Team, 2023) ukážeme simulace řad délky 100 z procesu GARCH(1,1) a procesu EGARCH(1,1). Uvažujeme procesy s nulovou střední hodnotou, a tedy podle (2.1) generujeme řady  $y_t = \varepsilon_t$ . Budeme zkoušet volit různé hodnoty parametrů a rozdělení veličin  $z_t$  a zkoumat, jaký mají na průběh řady vliv. Pro každou nasimulovanou řadu budeme také modelovat její volatilitu  $\sigma_t^2$ . Využijeme k tomu funkce `ugarchspec` a `ugarchpath` z balíčku `rugarch` v prostředí R. Je důležité zde mít na paměti, že hodnoty zkoumaných časových řad jsou náhodné, tedy pokud bychom jakoukoli z těchto řad vygenerovali opakovaně, obdrželi bychom jiný výsledek. Obrázky níže jsou tedy pouze ilustrací, jak mohou dané řady vypadat.

Nejprve se zaměříme na proces GARCH(1,1). Zde ukážeme, jak budou vypadat vybrané časové řady  $y_t$  a jejich volatilita  $\sigma_t^2$  pro parametry, které jsme uváděli v kapitole 5.1 a které splňovaly podmínku existence čtvrtých momentů.



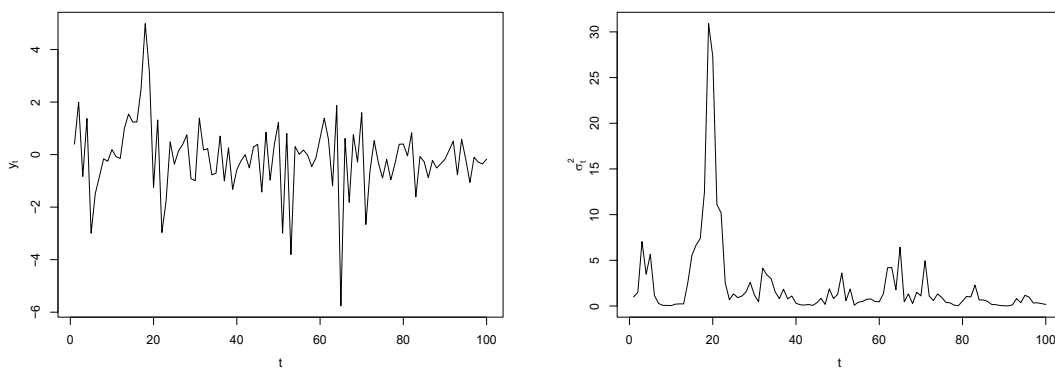
Obrázek 5.7: Simulace řady a volatilita modelu GARCH(1,1) s parametry  $\omega = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.1$  a  $\beta_1 = 0.8$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .



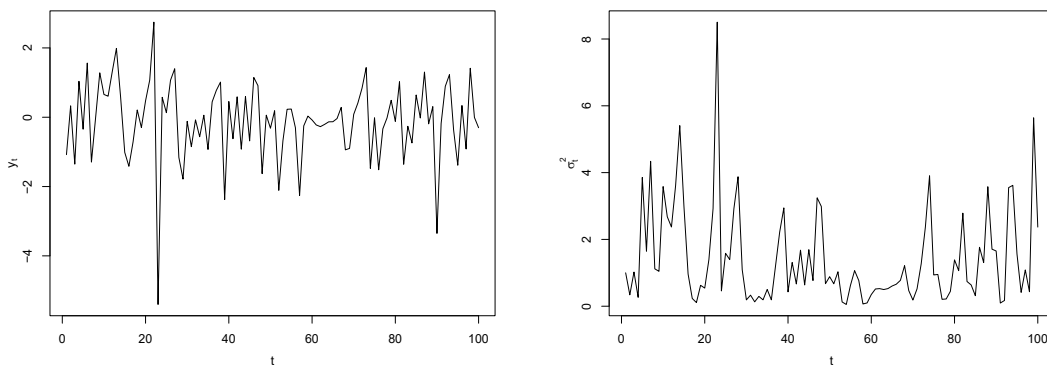
Obrázek 5.8: Simulace řady a volatilita modelu GARCH(1,1) s parametry  $\omega = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.3$  a  $\beta_1 = 0.6$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .

Dále si ukážeme časové řady a jejich volatilitu z procesu EGARCH(1,1). Nejprve se zaměříme na proces EGARCH(1,1) s pevnými parametry  $\omega$ ,  $\phi$  a  $\psi$ , kde  $z_t \sim N(0,1)$  a budeme zkoumat jaký má vliv parametr  $\beta_1$ .

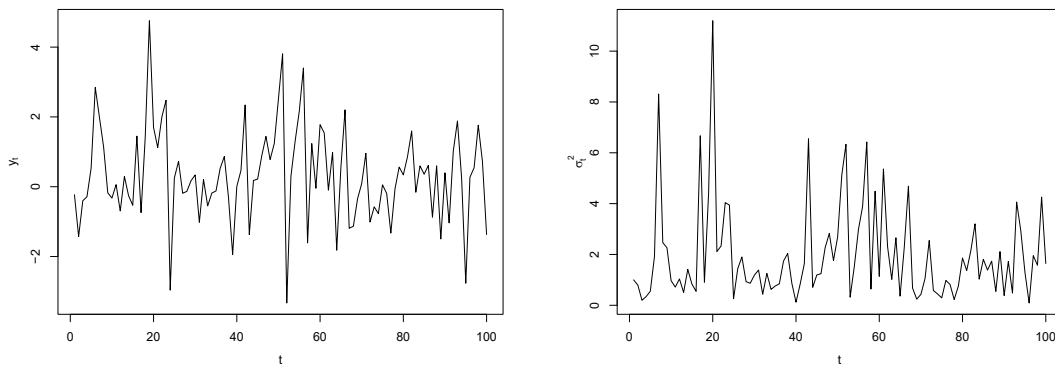
Podíváme-li se na rozsah hodnot v obrázcích 5.9, 5.10 a 5.11, můžeme si všimnout, že pro vyšší hodnotu  $\beta_1$  se jak řada  $y_t$ , tak její volatilita  $\sigma_t^2$  chovají stabilněji, než pro nižší hodnotu. Ve všech třech obrázcích se většina hodnot simulované řady  $y_t$  nachází v intervalu  $(-2; 2)$ . Pro  $\beta_1 = 0.1$  je více hodnot mimo tento interval než pro  $\beta_1 = 0.8$ , ale rozpětí hodnot  $y_1, \dots, y_{100}$  je menší než pro  $\beta_1 = 0.8$ . Volatilita  $\sigma_t^2$  se většinou hodnot nachází v intervalu  $(0; 5)$ . Opět pro  $\beta_1 = 0.1$  ve srovnání s  $\beta_1 = 0.8$  vykazuje více hodnot mimo  $(0; 5)$ , ale menší rozpětí.



Obrázek 5.9: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$ ,  $\psi = 0$  a  $\beta_1 = 0.8$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .

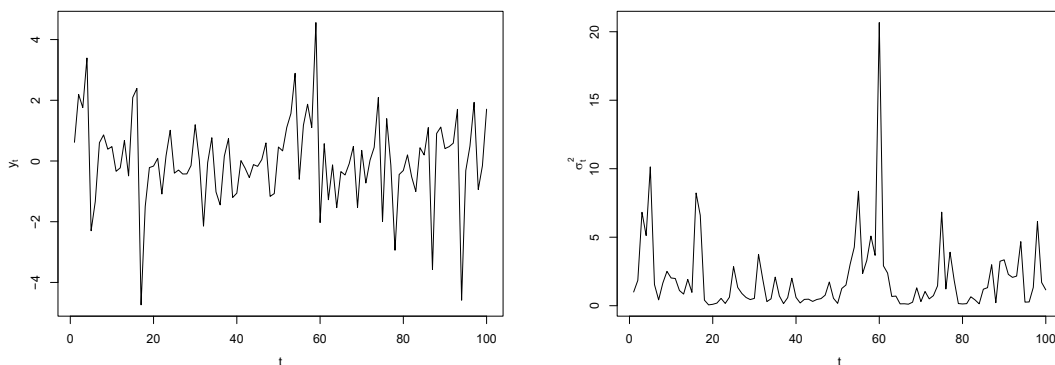


Obrázek 5.10: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$ ,  $\psi = 0$  a  $\beta_1 = 0.5$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .

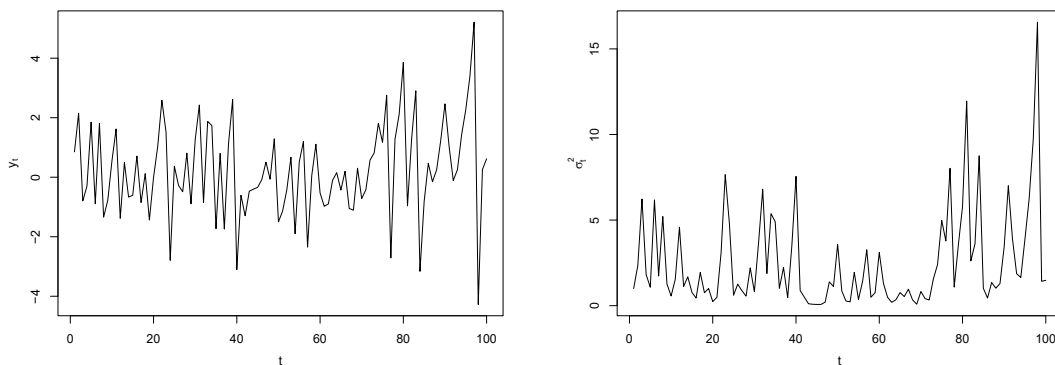


Obrázek 5.11: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$ ,  $\psi = 0$  a  $\beta_1 = 0.1$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .

Nyní zvolíme pevné  $\beta_1$  a zaměříme se na to, jak řadu a její volatilitu ovlivňuje rozdělení náhodné veličiny  $z_t$ . Můžeme to zkoumat na obrázcích 5.10, 5.12 a 5.13. Připomeňme, že normované normální rozdělení je GED rozdělení s parametrem 2 a  $L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  je GED rozdělení s parametrem 1. Zkoumáme tedy vliv parametru GED rozdělení. Z obrázků můžeme vidět, že pro GED rozdělení s vyšším parametrem hodnoty volatility dosahují častěji vyšších hodnot. Tedy u Laplaceova rozdělení ( $GED(1)$ ) kolísají směrem nahoru z pozorovaných grafů nejméně, u normálního rozdělení ( $GED(2)$ ) o něco více, a u rozdělení  $GED(10)$  již znatelně více než u předchozích rozdělení. Na chování řady  $y_t$  nemá parametr rozdělení GED výrazný vliv.



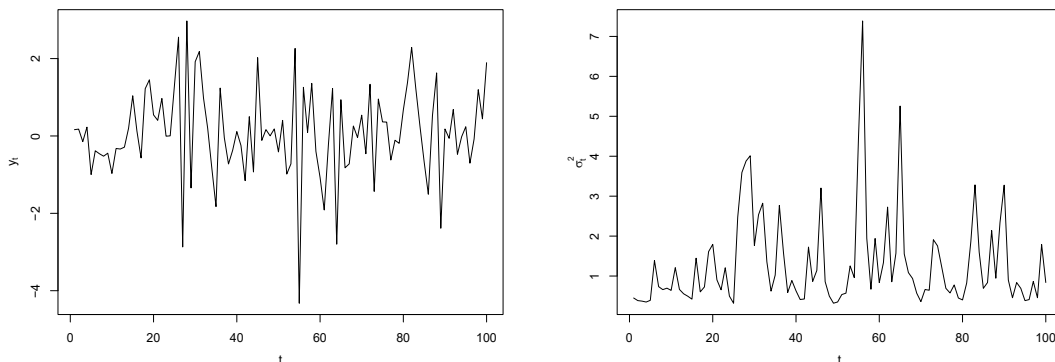
Obrázek 5.12: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$ ,  $\psi = 0$  a  $\beta_1 = 0.5$ ,  $z_t \sim L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .



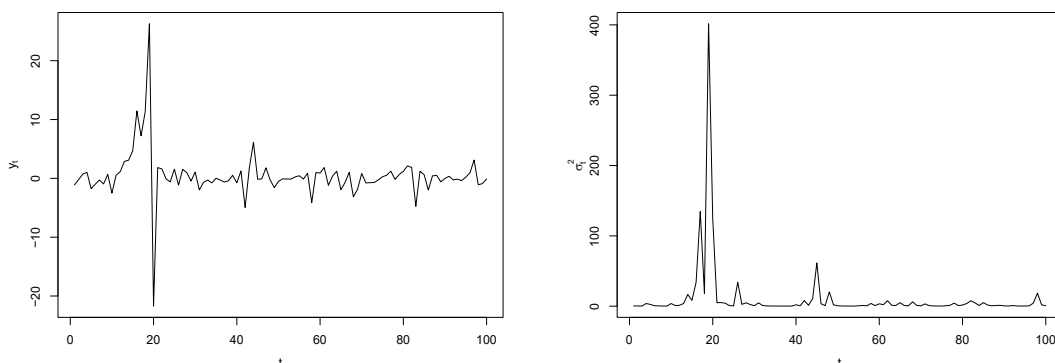
Obrázek 5.13: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$ ,  $\psi = 0$  a  $\beta_1 = 0.5$ ,  $z_t \sim GED(10)$ .

Na závěr se podíváme, jaký vliv mají na řadu  $y_t$  a její volatilitu  $\sigma_t^2$  parametry  $\phi$  a  $\psi$ . Budeme tedy nyní uvažovat pevné  $\beta_1$  a  $z_t \sim N(0,1)$ . Vygenerované řady můžeme vidět na obrázcích 5.10, 5.14 a 5.15. Doposud jsme u všech obrázků uvažovali buď  $\phi$  nebo  $\psi$  nulové. V obrázku 5.15 jsme však zvolili oba tyto parametry

nenulové a hned na první pohled je vidět extrémní výkyv volatility. Na ostatních obrázcích se volatilita pohybovala v rozmezí jednotek, zde se dostáváme v ojedinělých extrémech do stovek. Tomu odpovídají i výrazně větší extrémy v řadě  $y_t$  v obrázku 5.15.



Obrázek 5.14: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 0$ ,  $\psi = 1$  a  $\beta_1 = 0.5$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .



Obrázek 5.15: Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry  $\omega = 0$ ,  $\phi = 1$ ,  $\psi = 1$  a  $\beta_1 = 0.5$ ,  $z_t \sim N(0,1)$ .

### 5.3 Přesnost odhadů parametrů

Dále se podíváme na odhady parametrů procesu GARCH(1,1) a procesu EGARCH(1,1) a na to, jak jsou tyto odhady přesné ve srovnání s námi volenými parametry. V tabulkách 5.2-5.6 můžeme vidět odhady parametrů, které jsme získali v softwaru R (R Core Team, 2023) pomocí funkce `ugarchfit`. Funkci jsme aplikovali na simulované řady, z kapitoly 5.2, a to konkrétně na řady  $y_t$  z obrázků 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 a 5.11. Opět tedy uvažujeme pouze  $z_t \sim N(0,1)$ .

Podívejme se nejprve na odhady parametrů procesů GARCH(1,1). Ty můžeme vidět v tabulkách 5.2 a 5.3. Přiblížení odhadů ke skutečným hodnotám parametrů je zde uspokojivé.

	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$
Skutečná hodnota	1.0000	0.1000	0.8000
Odhad	0.9233	0.1224	0.7872

Tabulka 5.2: Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu GARCH(1,1).

	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$
Skutečná hodnota	1.0000	0.3000	0.6000
Odhad	1.1578	0.3463	0.5394

Tabulka 5.3: Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu GARCH(1,1).

Nyní prozkoumáme odhady parametrů u procesů EGARCH(1,1) uvedené v tabulkách 5.4, 5.5 a 5.6. V tabulce 5.5 můžeme vidět velmi přesný odhad parametru  $\omega$ , také odhad  $\psi$  zde vychází nejlépe. Naopak parametr  $\phi$  je zde vychýlený o 0.2, zatímco v tabulce 5.4 je odhad tohoto parametru vychýlen pouze o 0.06.

	$\omega$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$
Skutečná hodnota	0.0000	0.8000	1.0000	0.0000
Odhad	-0.0500	0.7395	0.9425	-0.1838

Tabulka 5.4: Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu EGARCH(1,1).

	$\omega$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$
Skutečná hodnota	0.0000	0.5000	1.0000	0.0000
Odhad	0.0026	0.4554	1.2064	-0.1507

Tabulka 5.5: Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu EGARCH(1,1).

	$\omega$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$
Skutečná hodnota	0.0000	0.1000	1.0000	0.0000
Odhad	-0.0339	0.0303	0.8440	-0.4286

Tabulka 5.6: Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu EGARCH(1,1).

Hodnoty odhadů závisejí na konkrétní simulaci časové řady. Abychom dokázali přesnost odhadů lépe posoudit, budeme generovat pro každý model 100

řad, v každé řadě spočítáme odhady parametrů, které následně zprůměrujeme a spočítáme jejich výběrové směrodatné výběrové odchyly.

	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$
Skutečná hodnota	1.0000	0.1000	0.8000
Průměr odhadů	0.6125	0.0582	0.8854
Směrodatná odchylka	1.1876	0.0936	0.1937

Tabulka 5.7: Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu GARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchyly odhadů.

	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$
Skutečná hodnota	1.0000	0.3000	0.6000
Průměr odhadů	1.0723	0.2519	0.6346
Směrodatná odchylka	1.0138	0.1687	0.2453

Tabulka 5.8: Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu GARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchyly odhadů.

V tabulkách 5.7 a 5.8 můžeme vidět výsledky, které jsme obdrželi po zprůměrování odhadů ze 100 simulací v modelu GARCH(1,1). V tabulce 5.7 si můžeme všimnout, že průměry odhadů již nejsou tak přesné jako odhad z jedné řady v tabulce 5.2. Obzvláště u parametru  $\omega$  dostáváme nepřesný odhad. Naopak v tabulce 5.8 vidíme, že odhady napočítané ze 100 simulací jsou pro tuto volbu parametrů srovnatelně kvalitní ( $\alpha_1$ ) či přesnější ( $\omega$ ,  $\beta_1$ ) než v tabulce 5.3. Vychýlení průměrovaných odhadů parametrů  $\alpha_1$  a  $\beta_1$  nepřesahuje v obou modelech hodnotu 0.1.

Stejným způsobem se nyní podíváme i na přesnost odhadů v EGARCH(1,1) modelu.

	$\omega$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$
Skutečná hodnota	0.0000	0.8000	1.0000	0.0000
Průměr odhadů	-0.0115	0.7830	1.0565	-0.0560
Směrodatná odchylka	0.0428	0.0458	0.1672	0.1778

Tabulka 5.9: Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu EGARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchyly odhadů.

	$\omega$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$
Skutečná hodnota	0.0000	0.5000	1.0000	0.0000
Průměr odhadů	-0.0317	0.5149	0.9950	-0.1276
Směrodatná odchylka	0.0719	0.1118	0.1956	0.2660

Tabulka 5.10: Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu EGARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami směrodatné odchyly odhadů.



	$\omega$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$
Skutečná hodnota	0.0000	0.1000	1.0000	0.0000
Průměr odhadů	0.0054	0.2098	0.9463	-0.0821
Směrodatná odchylka	0.3425	0.2679	0.3019	0.5184

Tabulka 5.11: Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu EGARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchylky odhadů.

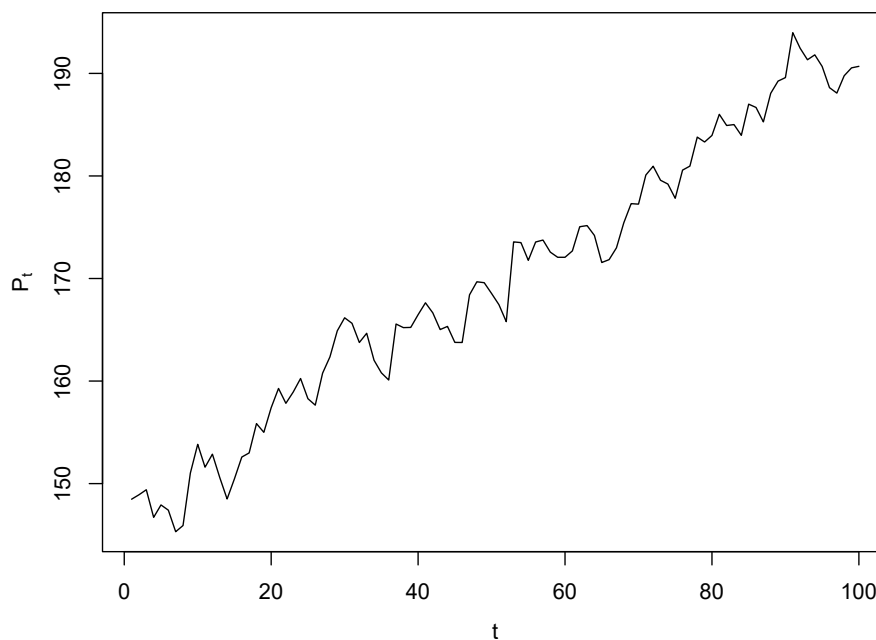
Nejpřesnější průměrné odhady parametrů  $\beta_1$  a  $\phi$  můžeme vidět v tabulce 5.10. Pro tento model ale dostáváme méně přesný průměrný odhad pro parametr  $\psi$ . Porovnáním tabulek 5.9, 5.10 a 5.11 zjistíme, že nejpřesnější průměrný odhad pro parametr  $\psi$  máme v tabulce 5.9, tedy v modelu EGARCH(1,1) s volbou parametru  $\beta_1 = 0.8$ . V tomto modelu máme také nejmenší směrodatné odchylky u všech odhadů. Naopak nejméně přesné odhady a zároveň i nejvyšší směrodatné odchylky můžeme vidět v tabulce 5.11.

## 5.4 Aplikace na reálná data

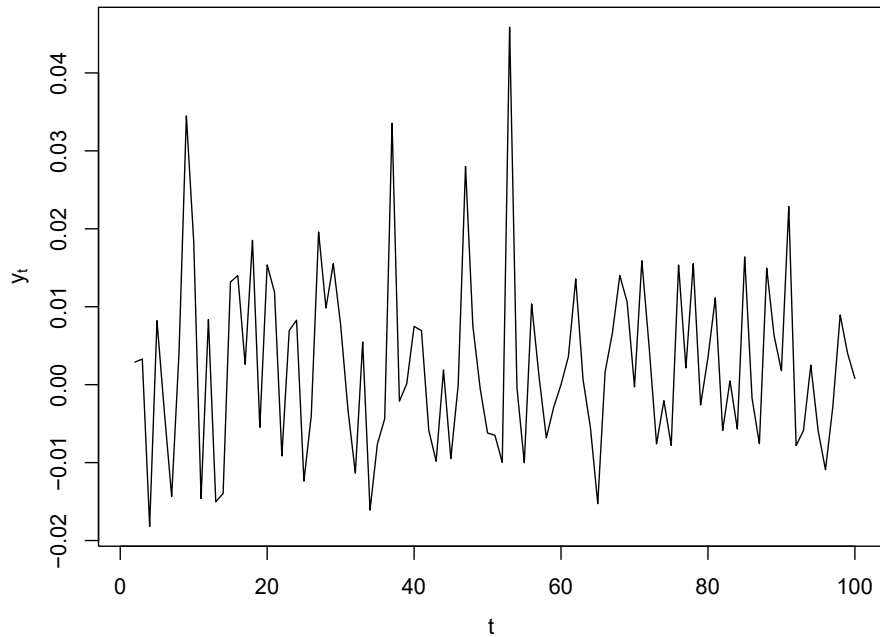
V této kapitole se budeme věnovat aplikaci modelů GARCH(1,1) a EGARCH(1,1) na konkrétní finanční data. Budeme uvažovat ceny akcií společnosti Apple od 16.7.2023 100 obchodních dní dozadu. Jak vidíme v obrázku 5.16 řada není stacionární, proto přejdeme k logaritmickým výnosům. Máme tedy

$$y_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}),$$

kde  $P_t$  je cena akcie společnosti Apple v čase  $t$ .



Obrázek 5.16: Cena  $P_t$  v čase  $t$ .



Obrázek 5.17: Logaritmičké výnosy  $y_t$  v čase  $t$ .

V obrázku 5.17 lze vidět již stacionární řadu logaritmičkých výnosů  $y_t$ .

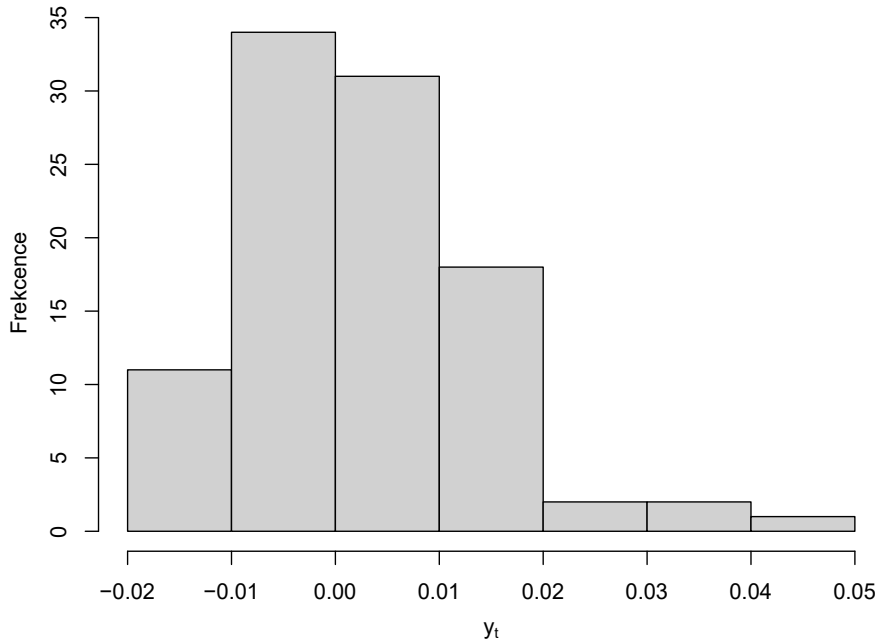
S využitím statistického softwaru R (R Core Team, 2023) se můžeme podívat na některé vlastnosti dat  $y_t$ , což nám umožní správně specifikovat model, který budeme na data aplikovat.

Minimum	-0.0202
1. kvartil	-0.0042
Medián	0.0008
Průměr	0.0010
3. kvartil	0.0068
Maximum	0.0194

Tabulka 5.12: Popisné charakteristiky dat  $y_t$  získané pomocí funkce `summary`.

Šikmost	4.3027
Špičatost	0.7289

Tabulka 5.13: Šikmost a špičatost dat  $y_t$  získané pomocí funkcí `kurtosis` a `skewness` z balíčku `moments`.



Obrázek 5.18: Histogram dat  $y_t$ .

Z hodnoty špičatosti, která je větší než 3, jak vidíme v tabulce 5.13 a histogramu v obrázku 5.18, můžeme usoudit, že data nepocházejí z normálního rozdělení. To potvrdil i Shapiro-Wilkův test, provedený v softwaru R (R Core Team, 2023), s  $p$ -hodnotou 0.01. Zároveň v tabulce 5.12 vidíme, že jak průměr, tak medián dat  $y_t$  jsou velmi blízké hodnotě 0. Budeme tedy uvažovat modely GARCH(1,1) a EGARCH(1,1) s nulovou střední hodnotou, kde  $z_t \sim GED(\nu)$ .

Pomocí funkce `ugarchfit` v softwaru R (R Core Team, 2023) odhadneme parametry obou modelů a zároveň u každého modelu zvláště i parametr  $\nu$ . Dostaneme následující odhady

	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\phi$	$\psi$	$\nu$
GARCH(1,1)	0.00000	0.00003	0.99574	—	—	1.46992
EGARCH(1,1)	-0.34901	—	0.95682	-0.28454	-0.26671	2.03018

Tabulka 5.14: Odhady parametrů modelů GARCH(1,1) a EGARCH(1,1) aplikovaných na logaritmické výnosy akcií společnosti Apple získané pomocí funkce `ugarchfit`.

Dle (2.16) a tabulky 5.14 dostaneme rovnici GARCH(1,1) modelu

$$\sigma_t^2 = 0.00003\varepsilon_{t-1}^2 + 0.99574\sigma_{t-1}^2,$$

kde  $z_t \sim GED(1.47)$ .

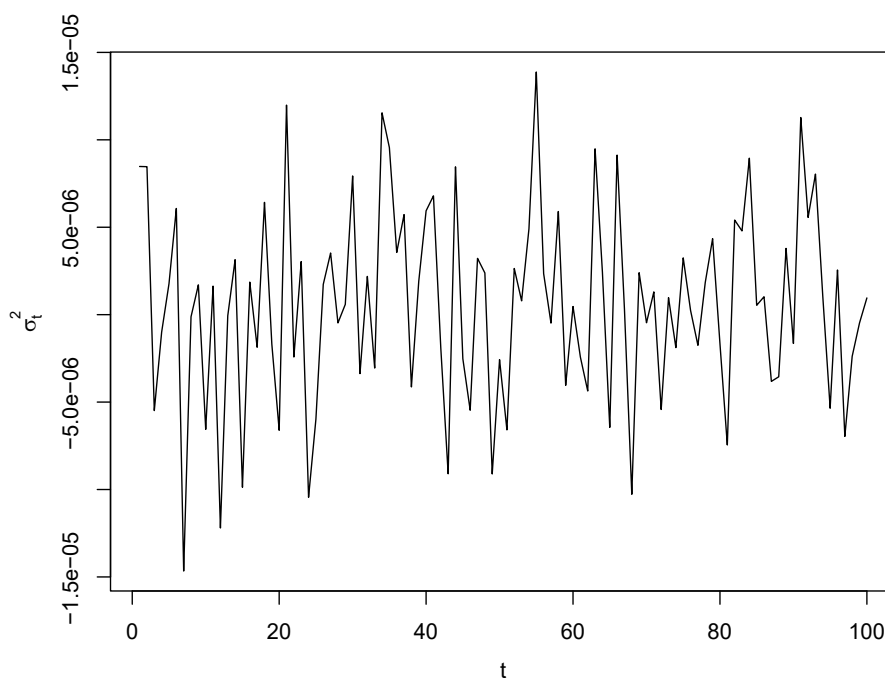
Pro EGARCH(1,1) máme dle tabulky 5.14 a (3.4)

$$\ln(\sigma_t^2) = -0.34901 + 0.95682 \ln(\sigma_{t-1}^2) - 0.28454 z_{t-1} - 0.26671(|z_{t-1}| - \mathbb{E}|z_{t-1}|),$$

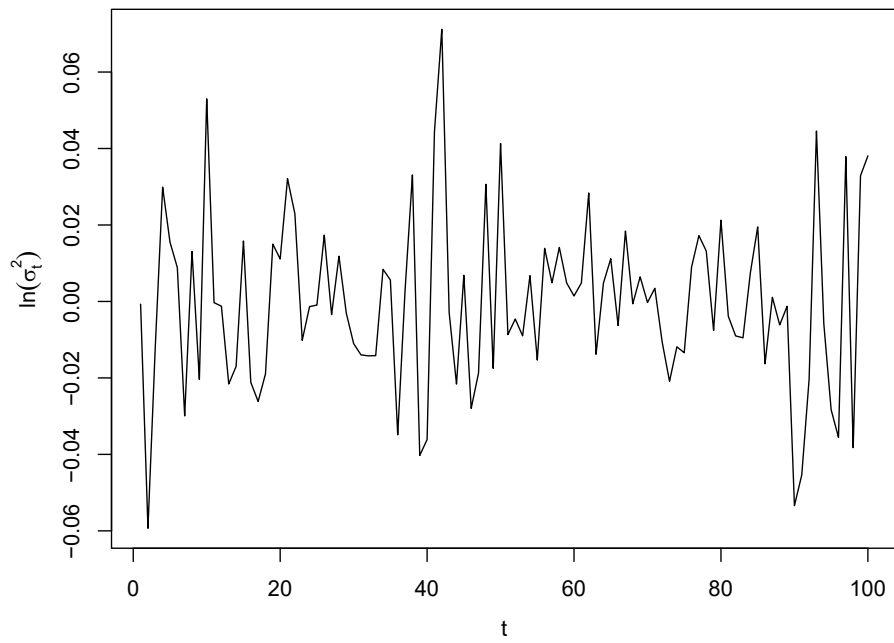
kde  $z_t \sim GED(2.03)$ .

V softwaru R (R Core Team, 2023) také dokážeme zjistit hodnoty Akaikeho informačního kritéria AIC a porovnat pomocí nich zkoumané modely. Model EGARCH(1,1) má menší hodnotu AIC ( $-6.1224$ ) než model GARCH(1,1) ( $-5.9699$ ), což nasvědčuje tomu, že bychom spíše preferovali EGARCH(1,1), neboť nižší hodnota AIC znamená kvalitnější model pro daná data (viz např. Cipra (2008)). Preference modelu EGARCH je potvrzena i tím, že odhadnutý model GARCH téměř nespĺňuje podmínku stacionarity  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ .

Na závěr se podívejme, jak by řady volatilit  $\sigma_t^2$ , respektive  $\ln(\sigma_t^2)$ , logaritmických výnosů generované z těchto modelů vypadaly.



Obrázek 5.19: Řada generovaná z modelu GARCH(1,1) s odhadnutými parametry z tabulky 5.14 pomocí funkce `ugarchsim`.



Obrázek 5.20: Řada generovaná z modelu EGARCH(1,1) s odhadnutými parametry z tabulky 5.14 pomocí funkce `ugarchsim`.

# Závěr

V této bakalářské práci jsme se věnovali modelování volatilitu pomocí dvou klíčových modelů - GARCH a EGARCH. Oba modely jsme podrobně popsali v teoretické části práce. V ucelené formě a sjednoceném značení z citovaných zdrojů jsme uvedli jejich rovnice, podmínky stacionarity a zkoumali její korelační strukturu a existenci nepodmíněných modelů. Podrobná odvození byla provedena zejména pro modely GARCH(1,1) a EGARCH(1,1). V práci také představujeme rodinu rozdělení GED, kterou se řídí standardizovaná rezidua. Oproti studované literatuře zde navíc uvádíme výpočty hustot pro jednotlivé volby parametrů GED rozdělení, čímž dokazujeme, že normální, Laplaceovo a rovnoměrné rozdělení jsou speciálními případy GED rozdělení. Dále jsme také pro jednotlivá rozdělení provedli výpočty střední absolutní hodnoty standardizovaných reziduí, které jsou zapotřebí při modelování pomocí modelu EGARCH.

V praktické části jsme využili znalosti získané v teoretické části a podívali se na to, jak vypadají momenty a korelační struktura pro modely s různě zvolenými parametry. Ukázali jsme, pro jaké volby parametrů momenty existují a pro jaké již nikoli. To jak parametry modelů ovlivňují volatilitu, jsme si názorně předvedli na simulacích vygenerovaných pomocí softwaru R. Zabývali jsme se také odhadováním parametrů modelů a jejich přesností. Výsledky jsme přehledně ukázali v jednotlivých tabulkách. Na závěr jsme získané vědomosti uplatnili na modelování logaritmických výnosů akcií společnosti Apple.

Tato práce přispívá k lepšímu porozumění modelování volatilitu, což je klíčový prvek pro úspěšné investování a řízení portfolií.

# Seznam použité literatury

- ANDĚL, J. (2011). *Základy matematické statistiky*. Třetí vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. Ekopress, s.r.o, Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 987–1007.
- HE, C., TERÄSVIRTA, T. a MALMSTEN, H. (2002). Moment structure of a family of first-order exponential GARCH models. *Econometric Theory*, **18**(4), 868–885.
- NELSON, D. (1991). Conditional heteroscedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, **59**, 347–370.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2004). *Základy náhodných procesů II*. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0971-1.
- R CORE TEAM, 2023. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- REKTORYS, K. (2000). *Přehled užitečné matematiky*. Sedmé vydání. Prometheus, Praha. ISBN 80-7196-180-9.
- ROSSI, E. (2004). Lecture notes on GARCH models. *University of Pavia*.

# Seznam obrázků

4.1	Hustota $N(0,1)$ . . . . .	26
4.2	Hustota $L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . . . . .	27
4.3	Hustota $R\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ s vyobrazením hustot $GED(\nu)$ pro $\nu = 5, 10, 20$ . . . . .	27
5.1	Autokorelační funkce veličin $\varepsilon_t^2$ v modelu GARCH(1,1) s parametry $\omega = 1, \alpha_1 = 0.1$ a $\beta_1 = 0.8$ . . . . .	31
5.2	Autokorelační funkce veličin $\varepsilon_t^2$ v modelu GARCH(1,1) s parametry $\omega = 1, \alpha_1 = 0.2$ a $\beta_1 = 0.7$ . . . . .	33
5.3	Autokorelační funkce veličin $\varepsilon_t^2$ v modelu GARCH(1,1) s parametry $\omega = 1, \alpha_1 = 0.3$ a $\beta_1 = 0.6$ . . . . .	34
5.4	Autokorelační funkce veličin $\varepsilon_t^2$ v modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \psi = 0, \phi = 1$ a $\beta_1 = 0.8$ . . . . .	36
5.5	Autokorelační funkce veličin $\varepsilon_t^2$ v modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \psi = 0, \phi = 1$ a $\beta_1 = 0.5$ . . . . .	37
5.6	Autokorelační funkce veličin $\varepsilon_t^2$ v modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \psi = 0, \phi = 1$ a $\beta_1 = 0.1$ . . . . .	38
5.7	Simulace řady a volatilita modelu GARCH(1,1) s parametry $\omega = 1, \alpha_1 = 0.1$ a $\beta_1 = 0.8, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	39
5.8	Simulace řady a volatilita modelu GARCH(1,1) s parametry $\omega = 1, \alpha_1 = 0.3$ a $\beta_1 = 0.6, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	39
5.9	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 1, \psi = 0$ a $\beta_1 = 0.8, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	40
5.10	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 1, \psi = 0$ a $\beta_1 = 0.5, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	40
5.11	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 1, \psi = 0$ a $\beta_1 = 0.1, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	40
5.12	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 1, \psi = 0$ a $\beta_1 = 0.5, z_t \sim L\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . . . . .	41
5.13	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 1, \psi = 0$ a $\beta_1 = 0.5, z_t \sim GED(10)$ . . . . .	41
5.14	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 0, \psi = 1$ a $\beta_1 = 0.5, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	42
5.15	Simulace řady a volatilita modelu EGARCH(1,1) s parametry $\omega = 0, \phi = 1, \psi = 1$ a $\beta_1 = 0.5, z_t \sim N(0,1)$ . . . . .	42
5.16	Cena $P_t$ v čase $t$ . . . . .	45
5.17	Logaritmické výnosy $y_t$ v čase $t$ . . . . .	46
5.18	Histogram dat $y_t$ . . . . .	47
5.19	Řada generovaná z modelu GARCH(1,1) s odhadnutými parametry z tabulky 5.14 pomocí funkce <code>ugarchsim</code> . . . . .	48
5.20	Řada generovaná z modelu EGARCH(1,1) s odhadnutými parametry z tabulky 5.14 pomocí funkce <code>ugarchsim</code> . . . . .	49



# Seznam tabulek

5.1	Výsledky výpočtů pro GARCH(1,1), $z_t \sim N(0,1)$ , $\omega = 1$ . . . . .	34
5.2	Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu GARCH(1,1). . . . .	43
5.3	Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu GARCH(1,1). . . . .	43
5.4	Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu EGARCH(1,1). . . . .	43
5.5	Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu EGARCH(1,1). . . . .	43
5.6	Porovnání odhadů parametrů s jejich skutečnými hodnotami v procesu EGARCH(1,1). . . . .	43
5.7	Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu GARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchylky odhadů. . . . .	44
5.8	Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu GARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchylky odhadů. . . . .	44
5.9	Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu EGARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchylky odhadů. . . . .	44
5.10	Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu EGARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami směrodatné odchylky odhadů. . . . .	44
5.11	Porovnání odhadů napočítaných ze simulací 100 řad z procesu EGARCH(1,1) s jejich skutečnými hodnotami a směrodatné odchylky odhadů. . . . .	45
5.12	Popisné charakteristiky dat $y_t$ získané pomocí funkce <code>summary</code> . . .	46
5.13	Šikmost a špičatost dat $y_t$ získané pomocí funkcí <code>kurtosis</code> a <code>skewness</code> z balíčku <code>moments</code> . . . . .	46
5.14	Odhady parametrů modelů GARCH(1,1) a EGARCH(1,1) aplikovaných na logaritmické výnosy akcií společnosti Apple získané pomocí funkce <code>ugarchfit</code> . . . . .	47

# A. Přílohy

## A.1 První příloha

Elektronická příloha obsahuje kód ze softwaru R, který jsme vytvořili při zpracování praktické části.