

Posudek vedoucího diplomové práce
“Ideals of Banach Spaces”
(autor práce: Ondřej Smetana)

Úkolem studenta bylo nastudovat důkaz existence ideálů v neseparabilních Banachových prostorech a předvést nějaké aplikace. Připomeňme, že dle jedné z ekvivalentních podmínek je uzavřený podprostor Y Banachova prostoru X *ideál*, pokud existuje lineární spojité zobrazení $E : Y^* \rightarrow X^*$ splňující že $Ey^*|_Y = y^*$, $y^* \in Y^*$ (říkáme, že E je *Hahnův-Banachův rozšiřující operátor*), důležitým důsledkem pak je, že zobrazení $P : X^* \rightarrow X^*$, $Px^* := E(x^*|_Y)$ definuje netriviální projekci v X^* splňující $\text{Ker } P = Y^\perp$.

Student zadání práce splnil a navíc se odvážil zpracovat důkaz existence ideálů s pomocí tzv. metody elementárních modelů, což je množinově-teoretická metoda, která se zdá býti užitečným nástrojem při různých konstrukcích v neseparabilních prostorech, na druhou stranu vyžadovala od studenta osvojení si jistých netriviálních technik z logiky a teorie množin.

Hlavní přínos práce se podle mne dá shrnout do následujících bodů

- hlavním výsledkem práce je Theorem 3.5 a jeho důsledek Corollary 3.6, dle kterého kdykoliv X je neseparabilní Banachův a M vhodný model (ne nutně spočetný), pak X_M je skoro isometrický ideál v X (skoro isometrický ideál je ideál s jistými dalšími vlastnostmi navíc, podrobněji viz. Definice 3.1).
- hlavní aplikací je pak Corollary 4.13, kde je dokázáno, že “strong diameter two property”, “local diameter two property” a “Daugavet property” jsou separabilně určené vlastnosti.

Oba dva výše zmíněné výsledky jsem nikde v literatuře nezaznamenal, jsou pravděpodobně nové. Důkaz Corollary 3.6 je inspirován analogickou konstrukcí z článku [1] (kde se navíc používají jisté výsledky z článku [2]), přínos studenta je v tom, že si dal tu práci a ověřil že se důkaz dá přepsat do řeči elementárních submodelů (což dá formálně silnější tvrzení než to co je v článku [1]). Důkaz Corollary 4.13 je založen především na známých výsledcích, na Corollary 3.6 a na třech dodatečných tvrzeních, jejichž důkaz není pro odborníka zas tak obtížný (viz. Proposition 4.7, Proposition 4.8 a Proposition 4.12).

Matematická a stylistická úroveň odevzdané práce je dle mého názoru dosti vysoká, text se docela dobře čte, úroveň angličtiny i sazby v TeXu je dle mého názoru velmi dobrá, žádné matematické chyby jsem si nevšiml. Pokud bych měl zmínit nějaký neodstatek, tak snad jen že student mohl pracovat samostatněji (důkazy a znění nejdůležitějších vět vypracovával dle instrukcí vedoucího, jeho přínos byl spíše v tom, že si rozmyslel nějaké dílčí kroky). Na druhou stranu téma, tak jak jej student uchopil (tj. s použitím techniky elementárních modelů), bylo dle mého názoru dosti obtížné a studentovi se přes jisté obtíže podařilo jej se ctí zpracovat.

Závěr: Dle mého názoru předložená práce rozhodně splňuje požadavky, aby byla uznána jako diplomová práce oboru Matematická analýza.

doc. Mgr. Marek Cúth, Ph.D.
KMA MFF UK
24. 7. 2023