

Posudek oponenta na diplomovou práci

Autor: Ondřej Smetana

Název práce: *Ideals of Banach Spaces*

Diplomová práce Ondřeje Smetany se zabývá existencí ideálů v obecných Banachových prostorech, tj. podprostorů s jistými speciálními vlastnostmi. Práce je členěna do čtyř kapitol a úvodu. V úvodu kromě stručného představení věci samotné autor zmiňuje i něco málo z historie tohoto pojmu (a pojmů souvisejících), která začíná už v roce 1984 prací Nigela Kaltona. V první kapitole autor představuje některé pojmy a výsledky, které později používá; zejména je dokázána věta obsahující tři různé charakterizace ideálů. Dále se zde probírají potřebné základní znalosti limity posloupnosti podle ultrafiltru. Druhá kapitola probírá množinově-teoretickou metodu tzv. „vhodných elementárních modelů“, která umožňuje „pohodlně“ konstruovat množiny „uzavřené na jisté vlastnosti“. Tato obecná metoda se v různých obměnách vyskytuje v mnoha partiích abstraktní matematiky, přičemž zde použitá varianta byla (pokud je mi známo) vyvinuta zdejší školou, jmenovitě W. Kubišem, O. Kalendou a M. Cúthem. Ve třetí kapitole jsou dokázány hlavní výsledky práce, zejména existence netriviálních ideálů s dodatečnými vlastnostmi. Například, pro libovolnou podmnožinu S Banachova prostoru X je zkonstruován (tzv. skoro izometrický) ideál $Y \subseteq X$ splňující $\text{dens } Y \leq \max\{|S|, \omega\}$. Další důsledek říká, že duál libovolného neseparabilního Banachova prostoru obsahuje netriviální spojitou projekci P (ve smyslu nekonečných dimenzí $\text{rng}(P)$ a $\text{Ker}(P)$). Čtvrtá kapitola obsahuje několik aplikací získaných výsledků na konkrétní témata spadající spíše do geometrie Banachových prostorů, zejména *diameter two property* (každý netriviální řez jednotkové koule má průměr 2) a tzv. *Daugavet property*.

Nyní se zmíním o formálních aspektech. Oceňuji, že práce je psána vcelku kvalitní angličtinou, na které je nicméně znát, že některé pasáže byly převzaty a jiné nikoliv. Citace jsou v zásadě v pořádku, ocenil bych ale podrobnější informace o tom, odkud byly převzaty jednotlivé důkazy, jestli jsou adaptovány autorem apod. Štábní kultura i sazba v L^AT_EXu jsou zcela v pořádku, práce také neobsahuje mnoho překlepů. Na druhou stranu je podle mého názoru potřeba říci, že je psána poměrně dost strohým stylem, přičemž i složitější momenty důkazů jsou občas opatřeny velmi stručnými argumenty. Jakožto práce kvalifikační by měla především prokazovat plné autorovo porozumění, o kterém je možné (i když ne nutné) mít v některých bodech jisté pochybnosti. Důkazy převzaté z knih psaných profesionály pro profesionály nejsou nezbytně vhodné i do diplomové práce. Vzhledem k hloubce probírané teorie je nemalá část práce ve své podstatě kompilační, přičemž autor čerpal z různých zdrojů; tomu také přičítám poněkud nevyrovnaný styl jazykový i argumentační (některé důkazy jsou naopak rozepsány více apod.).

Práce přináší nové výsledky, které i pro neznalce teorie ideálů v Banachových prostorech přináší netriviální a zajímavé aplikace; je ovšem třeba říci, že se významnou měrou opírá o už známé věci. Na druhou stranu se ovšem jedná o hlubokou a poměrně složitou teorii, která je v současné době daleko od standardní látky probírané v univerzitních kurzech, takže není snadné do ní v omezeném čase plně proniknout. Kromě zřejmého originálního přínosu této práce je tedy třeba ocenit, že se autor s tímto nelehkým úkolem důstojně vypořádal a studovanou problematiku dostatečně zvládl.

Moje hlavní výtku se týká stylu použití metody modelů, neboť právě v těchto bodech je nejvíce cítit výše zmíněná nepatřičná stručnost. Moje vlastní zkušenost s prací v kontextu modelů obsahuje situace, kdy i velmi zkušení matematici žádali podrobnější vysvětlení a kdy jsem zároveň sám zjistil, že nemusí být lehké odpovědět, popř. jsem si díky těmto dotazům uvědomil mezery ve vlastním porozumění. Má osobní zkušenost se nevztahuje na autora, v práci mi nicméně skutečně chybí podrobnější komentáře k metodě vhodných modelů, vysvětlení, proč věci fungují i pro formule rozšířeného jazyka teorie množin (zahrnujícího různé slovní zkratky) apod. Dále měly být aspoň základní příklady těchto postupů opravdu podrobně rozepsány, aby neseznámený čtenář dostal příležitost do věci proniknout postupně (a zároveň jasný pocit, že autor si je svými tvrzeními jist). Pro znalce tématu se chci zmínit zejména o tom, že autor nikdy nekomentuje nutnost ověřit, že objekty dosazené za volné proměnné

absolutních formulí jsou prvky modelu; málokdy je také zmíněna potřeba absolutnosti subformulí. Kromě toho měla být věnována větší péče úpravě vět převzatých z různých zdrojů do jednotného kontextu práce.

Další komentáře: Autor by se při obhajobě měl stručně vyjádřit k připomínce označeným „■“. Seznam všech konkrétních připomínek by byl zbytečně dlouhý a v případě zájmu mohu své komentáře nabídnout soukromě. Kromě nevhodných formulací, značení či drobných nevýznamných nepřesností jsem narazil na několik snadno opravitelných přehlédnutí v důkazech. Zde je několik konkrétních případů.

- Lemma 2.18 (ii) – není mi jasné, proč S má být spočetná. V úvodu ke kapitole (str. 16) se jasně říká, že se neomezujeme pouze na spočetné modely; šlo by zobecnit přidáním příslušného kardinálu do modelu. V důkazu téhož bodu lemmatu chybí zmínka o tom, že $N \in M$.
- V důkazu Lemmatu 2.20 se píše, že $\mathbb{R} \not\subseteq M$, což podle mě není jasné. (Zdá se, že lemma bylo převzato z článku, který se omezuje na spočetné modely, což zde neděláme.) Podobných případů jsem našel více.
- V závěru důkazu Lemmatu 2.21 se v absolutní formuli vyskytuje na pozici volné proměnné B_X ; nikde ovšem není dokázáno, že by muselo být $B_X \subseteq M$. Tento problém lze ovšem snadno spravit, jde ale o opomenutí.
- Dole na str. 23 se zdá, že do seznamu absolutních formulí (který je a musí zůstat konečný) přidáváme pro každé $i \in \mathbb{N}$ jednu formuli. Tento problém jde obejít a možná mi něco uniká; bez dalšího komentáře to nicméně vypadá jako chyba.
- Lemma 3.4 má ve své formulaci „for a suitable model...“ a od Věty 3.5 dál se objevuje správnější formulace (z novějších článků) formulaci „for every suitable model“. Zdá se zřejmé, že tato nekonzistence vzešla z poněkud slepého přejímání formulací vět z různých zdrojů.
- Formule (*) na str. 35: není jasné, proč neříká přímo lineární nezávislost S ; zdá se mi, že se za tím skrývá podobně složitý argument. Pokud pro to je nějaký důvod, možná měl být uveden.

Závěr: Kromě drobnějších problémů (z nichž jsem některé zmínil) práce trpí pouze příliš uvolněnou prací s modely, z níž podle mě plynou některá opomenutí, popřípadě promarněné příležitosti argumenty lépe vysvětlit. Práce nicméně obsahuje nové zajímavé a zábavné výsledky a dává velmi dobrý smysl jako celek. Můj celkový dojem je *výborný*, kvůli výše uvedenému je však možno uvažovat i o hodnocení *velmi dobře*.

Oponent
Martin Rmoutil