Posudek na magisterskou diplomovou práci

Bc. Ondřeje Váši

Differential equations with eigenvalue in boundary conditions

Předložená diplomová práce se věnuje studiu asymptotiky vlastních čísel pro Stokesův problém s Navierovou okrajovou podmínkou, přičemž na pravé straně této podmínky je člen $\lambda\mathbf{u}$, kde λ je vlastním číslem dané úlohy. Úloha je uvažována v omezené oblasti s hranicí třídy C^2 v n-dimenzionálním prostoru, kde $n = 2$ nebo $n = 3$.

Cílem práce je ukázat, že neklesající posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_k\}$ má asymptotické chování pro $k \to \infty$ jako $k^{1/(n-1)}$. Hlavní myšlenky práce je následující: autor přeformuluje úlohu jako úlohu na vlastní čísla vhodného samoadjungovaného kompaktního operátoru. Poté nalezne explicitní vztah pro vlastní čísla pro speciální úlohu formulovanou na krychli (resp. čtverci) a poté ukáže, že na obecné množině je posloupnost vlastních čísel kontrolována shora vhodnou konstantou závisející jen na Ω a vlastními hodnotami dané speciální úlohy, a pro dolní odhad využije výsledků práce [1] ze seznamu literatury pro Steklovův problém.

Práce je technicky poměrně náročná, samotné výpočty vlastních funkcí a vlastních čísel pro úlohu na speciální oblasti prováděl autor použitím softwaru Wolfram Mathematica. Ve dvou dimenzích by možná šlo výpočet provést ručně, ale ve třech dimenzích si to neumím představit. Další poměrně náročnou částí je ukázat, že tato asymptotika dává horní odhad na chování vlastních čísel. Je založený na studiu úlohy na válci a poté na na malé části oblasti Ω, přičemž je potřeba obecně křivou hranici narovnat a provést korekce pomocí variant Bogovského operátoru z důvodu zachování nulové divergence.

Celý tento výpočet horního odhadu, i když je kombinací postupů, které jsou v teorii PDR známy, lze považovat za velmi netriviální přínos autora práce. Pokud jde o dolní odhad, tam šlo poměrně přímočaře využít známých výsledků. Protože horní i dolní odhad dává stejnou asymptotiku pro velká k, je dokázáno asymptotické chování vlastních čísel dané úlohy.

Práce je psaná anglicky, obsahuje sice malé množství jazykových či matematických překlepů, vzhledem k délce práce je jich ale minimum. Samotná angličtina je na slušné úrovni, i když je zde trochu prostor na vylepšení některých formulací.

Přínos autora spatřuji především v pečlivé analýze speciální úlohy na krychli (respektive čtverci) a pečlivé vyjasnění horního odhadu chování vlastních čísel pro úlohu na obecné omezené oblasti; jde tedy o většinu textu, který vzhledem k délce 66 stran splňuje či spíše překračuje očekávání kladená na diplomovou práci.

Práci proto doporučuji uznat jako diplomovou práci a domnívám se, že by si zasloužila po drobných úpravách publikaci v mezinárodním časopise. Mám k ní pouze několik drobných technických připomínek a jednu otázku k zamyšlení, které jsou formulovány níže.

- V průběhu celé práce jsou slabé formulace psány pro funkce s komplexními hodnotami, přestože všechny prostory funkcí jsou zavedeny jako reálné a hned na počátku je vyjasněno, že příslušná vlastní čísla jsou reálná. Proč jsou tedy všude uvažovány komplexní funkce, jak alespoň plyne z toho, že na mnohých místech se objevuje značení pro komplexně sdruženou hodnotu?

- Formulace okrajové podmínky (2.10) mi nepřipadá úplně šťastná, protože tiše předpokládá, že $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$, což není nikde komentováno.

- Proč se ve Větě 14 pracuje s q'? Nezdá se, že by se s touto hodnotou někde pracovalo.

- V Lemmatu 41 se pracuje s Ω, Ω_1 a Ω', přičemž se zdá poslední dvě značení odpovídají tomu samému objektu. Nebo jsem něco přehlédl? V důkazu se pak pracuje se třemi válci, přičemž se mi zdá, že je třeba, aby $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega_4$, přičemž nemůže nastat rovnost, což není řečeno.

Na závěr bych se rád do diskuze zeptal, zda by nešlo oslabit předpoklady na oblast Ω. Zdá se, že by mohlo dostačovat, aby Ω byla třídy $C^{1,1}$, přičemž pro horní odhad vlastně stačí, aby existovala nějaká malá část hranice, která je třídy C^2 a pro zbytek stačí lipschitzovská hranice. Nebo je potřeba $C^{1,1}$ všude? Pokud jde o dolní odhad, tam se využívá výsledků Sandgrena, kde bych ale také čekal, že $C^{1,1}$ hranice stačí, možná stačí i méně, to by ale vyžadovalo pečlivé přečtení této práce, která vzhledem k době svého vzniku (první polovina padesátých let) pracovala s poněkud jinou definicí hladkosti hranice.

V Praze dne 30. srpna 2023 Prof. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., DSc.