

## POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Název:** Deep learning for the solution of differential equations

**Autor:** Matěj Vais

### SHRnutí OBSAHU PRÁCE

Práce se zabývá tzv. fyzikálně informovanými neuronovými sítěmi (PINN) pro řešení diferenciálních rovnic a jejich srovnáním s metodou konečných prvků. Práce nejprve stručně shrnuje podstatu neuronových sítí a fyzikálně informovaných neuronových sítí. Dále shrnuje základy metody konečných prvků. Tyto dvě techniky jsou pak srovnány na třech testovacích případech obyčejných diferenciálních rovnic - lineární, nelineární a singularně-perturovaná.

### CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

**Téma práce.** Téma práce je svou náročností přiměřené bakalářské práci. Zadání práce bylo splněno.

**Vlastní příspěvek.** Student shrnul základní myšlenky fyzikálně informovaných neuronových sítí, implementoval je s použitím existující knihovny a provedl srovnání s metodou konečných prvků

**Matematická úroveň.** Práce je místy psaná ne příliš rigorózně – některé značení není definované (proč se složky bias vektorů  $b^1$  značí jako  $b_{i1}^1$ ? Co je  $\mathcal{P}_1$  v Sekci 1.5.2?), chybí předpoklady (je  $\Omega$  v (1.8) libovolná podmnožina  $\mathbb{R}$ ?), vyskytují se chyby (v definici gradient descent metody Sekci 1.3 má být  $\theta_i$  místo  $\theta$ , v popisku Figure 1.1 má na konci být  $W^2, b^2$ ), nekonzistence (pokud v (1.10) používáme vícerozměrné značení pro integraci přes hranici, pak není prostor  $H_0^1$  korektně definován – tyto funkce nejsou nulové všude na  $\partial\Omega$  ve více dimenzích). Neuronové sítě jsou zavedené velmi stručně (1,5 strany včetně obrázku) a bez předchozí znalosti tématu nepřilíš srozumitelně.

Dále v práci chybí řada více či méně podstatných detailů. Jak se v numerických experimentech počítají složky pravé strany  $f_i$  v (1.13) – kvadraturami? Jaký řešič byl použit pro řešení výsledných soustav lineárních rovnic? Jaké jsou výpočetní časy PINN vs FEM u uvedených numerických experimentů?

**Práce se zdroji.** Často k tvrzením bez důkazu chybí citace (“It is a known fact that ...”). Článek Kingma & Ba byl publikován v roce 2014, ne 2017, a měl by být citován s plnými bibliografickými údaji.

**Formální úprava.** Práce často působí dojmem, že byla napsána ve spěchu a bez korektury, je zde poměrně velké množství překlepů a chyb vzniklých opravováním textu (“the the”, “the in the”, “alos”, “We will show try to show”, ...). Jinak je celková úroveň angličtiny dobrá, až na občasné gramatické chyby (“so call” místo “so-called”, “looking at similar problem”, “the matrix 1.12 equation”, ...).

### PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY

1. Poprosil bych alespoň o základní srovnání výpočetního času neuronových sítí oproti metodě konečných prvků.

2. PINN jsou z principu nelineární aproximací. Není to na závadu u lineárních problémů? Podle mě se to projevuje např. tím, že metoda Adam je extrémně citlivá na hodnotě  $a$  u pre-trainingu. Přijde mi, že je ta vysoká závislost daná tím, že parametry předtrénované sítě se budou velmi lišit pro různé hodnoty  $a$ . U lineární aproximace lineárního problému by se při změně  $a$  získané řešení jen celkově přenásobilo vhodnou konstantou, u nelineární metody získám zcela jiné parametry.
3. Jen připomínka – není nutné odpovídat u obhajoby: Pro singulárně-perturovanou úlohu se srovnává speciálně upravená PINN (rozdělení oblasti na vnitřek a mezní vrstvu) s neupravenou metodou konečných prvků. Bylo by fér srovnávat s obdobně modifikovanou metodou konečných prvků (analogie BL-PINN jsou tzv. Šiškinovy sítě).

## ZÁVĚR

Celkově práce zpracovává pěkné téma a přes uvedené výhrady, které souvisí spíše s formální stránkou práce, **doporučuji práci uznat jako bakalářskou.**

V Praze dne 5.9.2023

doc. RNDr. Václav Kučera, Ph.D.