MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Alžběta Neubauerová

Lobačevského geometrie

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání se sdruženým studiem Deskriptivní geometrie se zaměřením na vzdělávání

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D. za jeho vstřícný přístup a trpělivost. Děkuji za pomoc při výběru tématu a za veškeré připomínky. Největší díky patří za zapůjčení vhodné literatury, kterou by jinak bylo nejen těžké vybrat, ale hlavně sehnat. Také bych toto místo chtěla využít pro poděkování za poutavé a přínosné hodiny během celého našeho bakalářského studia.

Dále bych chtěla poděkovat své sestře Kateřině Petře Neubauerové, která byla pokusným králíkem, zda je práce pro středoškoláky opravdu pochopitelná tak, jak já si představuji. Díky za všechny cenné postřehy, které jsi mi dala, i když ses měla učit na maturitu a přijímačky, nebo si užívat zasloužených prázdnin.

V neposlední řadě bych chtěla poděkovat svému příteli Jonáši Havelkovi. Děkuji za korektury a připomínky k práci, pomoc s TeXáním a za dokopávání, jinak by tahle práce možná vůbec nevznikla. Velké díky za podporu při celém mém studiu.

Název práce: Lobačevského geometrie

Autor: Alžběta Neubauerová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem této bakalářské práce je přiblížit téma Lobačevského geometrie studentům středních škol. V první kapitole se zaměříme na historii objevu Lobačevského geometrie díky snahám o důkaz Eukleidova pátého postulátu. V druhé kapitole osvětlíme základní pojmy, ve třetí kapitole uvedeme a dokážeme vybraná tvrzení z absolutní geometrie. Čtvrtá kapitola se věnuje tvrzením, která jsou s pátým postulátem ekvivalentní. Jejich negací pak, spolu se znalostmi z kapitoly o absolutní geometrii, získáme v páté kapitole některá tvrzení z Lobačevského geometrie. V závěrečné kapitole si představíme Poincarého model poloroviny, čímž získáme názornější představu o tvrzeních, která jsme vybudovali v předchozí kapitole.

Klíčová slova: neeukleidovské geometrie; Lobačevského geometrie; eukleidovská geometrie

Title: Lobachevskian geometry

Author: Alžběta Neubauerová

Department: The Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., The Department of Mathematics Education

Abstract: The aim of this bachelor's thesis is to introduce the topic of Lobachevskian geometry to secondary school students. In the first chapter, we focus on the history of the discovery of Lobachevskian geometry due to attempts to prove Euclid's fifth postulate. In the second chapter we explain the basic terms, in the third chapter we list and prove chosen theorems from absolute geometry. The fourth chapter deals with theorems that are equivalent to the fifth postulate. By negating them, together with the facts from the chapter on absolute geometry, we obtain several theorems from Lobachevskian geometry in the fifth chapter. In the final chapter, we introduce Poincaré's model of the half-plane and thus gain more vivid idea about the theorems that we built in the previous chapter.

Keywords: non-Euclidean geometry; Lobachevskian geometry; Euclidean geometry

Obsah

Úvod

Ještě tomu není ani 200 let, co Nikolaj Ivanovič Lobačevskij publikoval své poznatky o nově objevené geometrii, kterou na jeho počest nazýváme Lobačevského geometrie. Příběh jejího objevu však začíná již kolem roku 300 př. n. l., kdy Eukleidés sepisuje svou knihu Základy. V nich totiž formuluje pět postulátů, jakýchsi základních stavebních kamenů geometrie, a právě ten pátý pak trápil celé generace matematiků. Celá staletí se totiž snažili dokázat, že pro vybudování známé (tzv. eukleidovské) geometrie stačí jen první čtyři postuláty a že pátý už z nich lze odvodit.

Až na počátku 19. století se nezávisle na sobě povedlo Carlu Friedrichu Gaussovi, Jánosi Bolyaimu a Nikolaji Ivanovičovi Lobačevskému udělat velký myšlenkový krok, oprostit se od reálného světa, od veškeré známé geometrie, a tak se před nimi otevřel nový geometrický svět, kde trojúhelníky mají součet vnitřních úhlů menší než 180°, neexistují podobné trojúhelníky ani přímky, které by od sebe byly stále stejně vzdálené, nebo kde třeba nemůžeme sestrojit trojúhelník o libovolně velkém obsahu. To jsou jen některá z překvapivých tvrzení z geometrie, které se na počest jednoho z jejích objevitelů říká *Lobačevského geometrie*.

Právě s některými těmito výsledky jsem se setkala již na gymnáziu a pokládala jsem si otázky: Jak je tohle možné? Co dalšího z běžné geometrie nemusí platit? A jak to spolu všechno souvisí? Tato práce je určena dalším středoškolákům (ale nejen jim), kteří se také s těmito informacemi setkali a pokládají si stejné otázky. Nebo si prostě jen rádi rozšiřují své obzory nad rámec školních osnov.

Nabízí se otázka, proč se takovou geometrií vůbec zabývat. Důvodů je spousta. Lobačevského geometrie se pro nás stane prostředkem, kterým nahlédneme pod pokličku moderní matematiky:

- Díky tomu, že náš příběh začíná u Eukleidových Základů, si povíme o axiomatizaci geometrie. To pro čtenáře může být přínosné proto, že takto se dnes přistupuje k mnoha odvětvím v matematice.

- Objev Lobačevského geometrie přinesl změnu v přístupu k pravdivosti tvrzení, což byl velký krok k moderní matematice.

- Matematika byla dlouho chápána hlavně jako nástroj pro aplikované vědy jako je třeba fyzika nebo astronomie. Nyní ji chápeme jako samostatnou vědu, která si klade vlastní otázky a řeší vlastní problémy. Nevyžaduje se, aby řešení matematických problémů mělo „praktické využití“, ačkoliv pro mnoho abstraktních teorií se přeci jen nakonec využití najde. Lobačevského geometrie může být pěkným příkladem tohoto jevu, a to včetně toho, že nakonec našla uplatnění. Lze ji využít např. při výpočtu některých neurčitých integrálů nebo jako nástroj pro studium speciální teorie relativity. Lobačevského geometrii můžeme objevit také v umění, např. v mozaikách nizozemského umělce M. C. Eschera. [Tihlaříková, 2010]

- Abstraktní koncept, kterým Lobačevského geometrie je, může čtenáři posloužit jako cvičení pro rozvoj abstraktního myšlení.

- Neeukleidovské geometrie, kam se Lobačevského geometrie řadí, jsou téma oblíbené i u laické veřejnosti. Díky tomu se můžete na internetu dočíst mnoho nepřesných či zavádějících informací. Když si v tom však uděláte jasno, takové informace vás už nezmatou.

- A pokud vás žádný z uvedených bodů nepřesvědčil, myslím, že o Lobačevského geometrii má smysl mluvit už jen proto, že její objev vyřešil otázku, jak to tedy je s tím pátým postulátem, která trápila matematiky celá dvě tisíciletí.

Historie objevu Lobačevského geometrie je tedy zřejmě dlouhá, napínavá a dá nám skvělý úvod do celé problematiky. Proto jí věnujeme první kapitolu. Díky tomu se seznámíme s pojmy, které si objasníme ve druhé kapitole.

Abychom na závěr mohli společně objevit některá tvrzení z Lobačevského geometrie, musíme napřed prozkoumat absolutní geometrii, ze které Lobačevského geometrie vychází, a eukleidovskou geometrii. Těm se proto budeme věnovat ve třetí a čtvrté kapitole. V následující kapitole pak konečně odvodíme tvrzení z Lobačevského geometrie, po které si jistě budete klást otázku, jak si to všechno představit. Na to se pokusí odpovědět kapitola šestá.

Pro některé čtenáře to možná bude první setkání s „vysokoškolskou matematikou“, která se, jak mi jistě každý, kdo nastoupí ke studiu matematiky na Matfyzu, potvrdí, od středoškolské matematiky velmi liší. Nejen, že se zaobíráme abstraktnějšími koncepty, ale také často neklademe tolik důraz na intuici a procvičování jako na střední škole, ale spíš na formální budování stylu „definice–věta–důkaz“.

Definicím, tvrzením a jejich důkazům se nevyhýbá ani tato práce, snaží se však čtenáři jejich pochopení co nejvíce ulehčit. Všechny důkazy, které jsem převzala především z knihy Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie (Kutuzov, 1953), byly zpřehledněny a doplněny o chybějící mezikroky. Orientaci v důkazech a ilustracích k nim by mělo zlepšit využití barev označující např. jednotlivé geometrické objekty. V práci nechybí vysvětlení klíčových pojmů ze středoškolské matematiky. Místo *dva pravé úhly* píšeme 180°. Pro jednoduchost volím stupňovou míru a ne obloukovou (pokud to lze), se kterou nejsou studenti středních škol tolik zvyklí pracovat jako se stupni.

Závěrem bych ráda zmínila další publikace, ze kterých jsem kromě [Kutuzov, 1953] čerpala a které můžu doporučit. Obsáhlou kapitolu o historii Lobačevského geometrie najdete v knize Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského (Pavlíček, 1953), stručnější, avšak velice pěknou pak v knize Stavba Lobačevského planimetrie (Gatial a Hejný, 1969). V části o Hilbertově axiomatizaci vycházím z The Foundations of Geometry (Hilbert, 1950). Informace o kategoriích pravdy v matematice jsou převzaty ze stejnojmenné publikace (Drábek a Šilarová, 2001).

1. Historie vzniku Lobačevského geometrie

1.1 Pátý postulát

Náš příběh začíná okolo roku 300 př. n. l. ve starověké Alexandrii, kde matematik Eukleidés sepisuje svou knihu Základy. V ní shrnuje všechny tehdejší poznatky z matematiky. Hlavně z planimetrie (geometrie v rovině, dále budeme psát pouze geometrie), ale věnuje se třeba i poměrům, prvočíslům, iracionálním číslům nebo stereometrii (geometrii v prostoru). Pořadí, ve kterém poznatky uvádí, není náhodné. Snaží se postupovat od jednodušších tvrzení ke složitějším. Každé tvrzení dokazuje pomocí předchozích, dříve dokázaných, jednodušších tvrzení.

Pokud k dokázání nějakého tvrzení potřebuji jednodušší tvrzení a k jejich dokázání další jednodušší tvrzení atd., je jasné, že tenhle postup se musí někde zastavit. Musí existovat nějaká tvrzení, která prostě budeme považovat za platná, aniž bychom je dokazovali. Takovým základním tvrzením v matematice říkáme *axiomy.*

Eukleidés dospěl k pěti axiomům, ze kterých zvládl vybudovat všechnu tehdy známou geometrii. Těchto pět axiomů je známých také jako pět Eukleidových postulátů. Jsou to tyto [Šír, 2011, str. 115, upraveno]:

1. Nechť se požaduje, aby bylo možno vést přímou čáru z každého bodu do každého bodu.

2. A omezenou přímou čáru souvisle prodloužit přímým směrem.

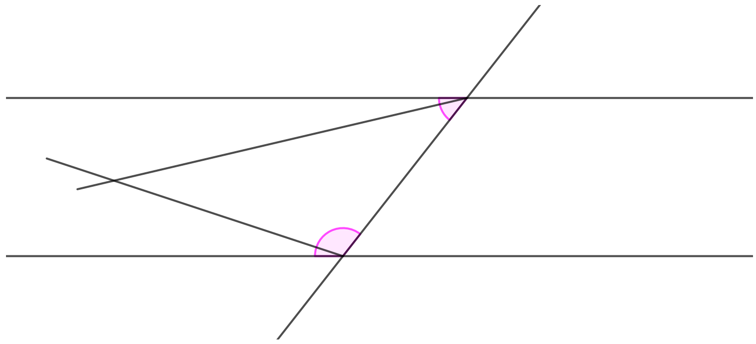
3. A pro každý střed a každý rozestup narýsovat kruh.

4. A aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.

5. A jestliže nějaké dvě přímé čáry protne jiná přímá čára tak, že vytvoří na jedné straně vnitřní úhly menší než dva pravé, pak aby se tyto přímé čáry, budou-li protaženy do nekonečna, setkaly na té straně, na které jsou úhly menší než dva pravé.

První čtyři axiomy jsou krátké a přímočaré. Oproti nim zní pátý postulát poněkud komplikovaně. Pojďme si rozebrat, co nám říká: Na obrázku 1.1 je růžovou barvou vyznačena dvojice vnitřních úhlů, jejichž velikost je dohromady rovna 180°, tedy dvěma pravým úhlům. Pátý axiom říká, že pokud je součet velikostí takto vytvořených úhlů menší než 180°, pak už se přímky na dané straně protnou. Zřejmě, pokud by byl jejich součet větší než 180°, budou mít součet menší než 180° úhly k nim vedlejší, a tedy se přímky protnou „na druhé straně“.

Právě komplikovanost znění pátého postulátu vedla celé generace matematiků k tomu, že věřili, že axiomy jsou pouze čtyři a pátý postulát lze pomocí nich dokázat, tedy že není axiomem. Chtěli ukázat, že všechno, co v geometrii platí (včetně pátého postulátu), lze dokázat jen z prvních čtyř axiomů. Jinými slovy, že pátý axiom nepřidává do geometrie nic nového a že geometrie vybudovaná z prvních čtyř i ze všech pěti axiomů bude stejná.



Obrázek 1.1: Ilustrace pátého postulátu.

1.2 Eukleidovská geometrie

Myšlenka axiomů se používá dodnes, a to nejen v geometrii. Mnoho odvětví matematiky se snaží o tzv. axiomatizaci, tedy mít seznam axiomů (a nějakých *primitivních pojmů*), ze kterých lze daný obor vybudovat.

Nicméně v geometrii se ukázalo, že Eukleidových pět postulátů nestačí. Protože se se základními geometrickými vztahy setkáváme již od útlého věku, nenapadlo by nás je nějak rozporovat nebo zdůrazňovat. A něco takového se stalo i Eukleidovi. Některé věci explicitně nezmínil, nedefinoval, a přesto je používal. [Hlavatý, 1926, kapitola I, oddíl 2].

Pokud si chcete umět představit, jaký typ tvrzení mám na mysli, je to např. *Jestliže body A, B, C leží na jedné přímce a bod B leží mezi body A a C, pak leží také mezi body C a A.* [Hilbert, 1950, přeloženo] Zdá se to jasné, že? Jasné je nám to proto, že to odpovídá naší zkušenosti s reálným světem. Ale až budeme budovat Lobačevského geometrii, která našemu světu neodpovídá, chceme mít vše poctivě zavedené, abychom v našich myšlenkách neudělali chybu.

Zřejmě tedy bylo potřeba sestavit nový systém axiomů. Dodnes nejznámější a nejpoužívanější systém axiomů představil v roce 1899 německý matematik David Hilbert. Jeho systém obsahuje 20 axiomů rozdělených do pěti skupin:

I. axiomy incidence (7 axiomů)

II. axiomy uspořádání (5 axiomů)

III. axiom rovnoběžnosti

IV. axiomy shodnosti (6 axiomů)

V. axiom spojitosti

Např. výše zmíněné tvrzení o poloze bodů A, B a C je první z axiomů uspořádání. Nás ale nejvíc bude zajímat třetí skupina axiomů – axiom rovnoběžnosti. Tato skupina obsahuje jen jediný axiom a tím je právě Eukleidův pátý postulát. V práci budeme dále hovořit o pěti postulátech, protože tak se odvíjel historický příběh vzniku neeukleidovské geometrie. Nicméně vše, co si o pátém postulátu řekneme, můžeme formulovat pro třetí skupinu Hilbertových axiomů, a tím mít vše formálně zavedené i z pohledu dnešní matematiky.

Geometrii, kterou vybudujeme z pěti Eukleidových postulátů (resp. z Hilbertových dvaceti axiomů), budeme nazývat *eukleidovská geometrie.* Je to ta geometrie, se kterou se setkáváme už od první třídy a která odpovídá reálnému světu. Vlastně je to jediná geometrie, se kterou se na základní a střední škole můžete setkat. Proto je obtížné si představit, jaká jiná geometrie může existovat.

Když však pochopíme, jak je eukleidovská geometrie budovaná a jaké vlastnosti nám přináší který axiom, snadno pochopíme, co nového nám přinesly snahy o důkaz pátého postulátu. Stejně jako před Lobačevským se před námi otevře nová, *neeukleidovská* geometrie, kterou na jeho počest nazýváme *Lobačevského geometrie.*

1.3 Ekvivalence výroků

V další části našeho příběhu budou důležitá tvrzení, která jsou s Eukleidovým pátým postulátem ekvivalentní. Proto si teď připomeneme, co znamená, že jsou výroky ekvivalentní.

Říkáme, že výroky A a B jsou ekvivalentní (značíme $A \Leftrightarrow B$), jestliže výrok A implikuje výrok B (z výroku A vyplývá výrok B) a zároveň výrok B implikuje výrok A, neboli

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

V našem případě budeme mít tvzení A a B. Budeme-li považovat za pátý postulát tvzení A, musí být možno pomocí něj (a ostatních postulátů) dokázat tvrzení B a naopak. Intuitivně, musí být jedno, které z ekvivalentních tvrzení zvolíme jako pátý postulát, vždy musíme vybudovat stejnou (eukleidovskou) geometrii.

Tvrzení, která jsou s pátým postulátem ekvivalentní, potrápila nejednoho matematika při snahách o důkaz pátého postulátu. Kolikrát už to totiž vypadalo, že se důkaz podařilo najít. Bohužel, důkaz byl vždy chybný. Jaké byly nejčastější příčiny?

- Použití tvrzení, které je ekvivalentní s pátým postulátem.
- Snaha chápat pravdivost geometrických výsledků ve smyslu korespondenční pravdy (viz sekce 1.4).

Často byla chyba právě v tom, že matematik využil nějaké tvrzení, které je s pátým postulátem ekvivalentní, aniž by si tuto ekvivalenci uvědomil. Tím tedy budoval geometrii stále z pěti axiomů, a ne ze čtyř. Pak není divu, že vybudoval eukleidovskou geometrii a měl pocit, že našel hledaný důkaz.

My se později k tvrzením, která jsou s pátým postulátem ekvivalentní, vrátíme, takže uvidíte, že ekvivalence tvrzení nebývá vidět na první pohled. Bude to pro nás ale skvělý zdroj informací o tom, co nám z pěti axiomů budovaná geometrie přináší, a to nám pomůže nahlédnout do vlastností geometrie neeukleidovské.

Co se určování pravdivosti týká, právě objev Lobačevského geometrie v něm způsobil velký pokrok, proto se na pravdivost tvrzení podíváme podrobněji v následující sekci.

1.4 Hledání důkazu a pravdivost tvrzení

Matematická *věta* má *předpoklady*, ze kterých vyplývá *tvrzení*. Jedná se tedy o implikaci $A \Rightarrow B$, kde A jsou *předpoklady* a B *tvrzení*. Jeden z postupů, který byl při snahách o důkaz pátého postulátu využíván, byl důkaz sporem, který je založen na ekvivalenci formulí $A \wedge \neg B$ a $\neg(A \Rightarrow B)$. Máme tedy předpoklady A a negaci tvrzení B a snažíme se ukázat, že platí zároveň, což však vede ke *sporu*. Tedy platí negace $\neg(A \wedge \neg B)$, která je ekvivalentní s větou ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$, kterou jsme chtěli dokázat. Ekvivalenci $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ lze snadno dokázat pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Tabulka 1: Tabulka pravdivostních hodnot – důkaz sporem.

Dále je potřeba zmínit důležitou věc: geometrie vždy byla oborem, kde si šlo veškeré poznatky ověřit prakticky – prostě si to narýsujeme, změříme a je to. Tedy jestli je nějaké geometrické tvrzení pravdivé či ne, to posoudíme podle toho, zda odpovídá reálnému světu a našim zkušenostem. Tomuto *typu pravdivosti* se říká *korespondenční pravda.* [Drábek a Šilarová, 2001]

Když už se tedy nějaký matematik pokusil dokázat pátý postulát touto cestou, brzy si myslel, že nalezl spor, protože získal tvrzení, které odporovalo jeho zkušenosti.

Nejspíš první, kdo si uvědomil, že bude potřeba se oprostit od reálného světa a řídit se při určování pravdivosti pouze vybudovanou teorií, byl Carl Friedrich Gauss. Pravdivost tvrzení určoval podle toho, zda si neodporovalo s některým z axiomů nebo z nich získaných tvrzení, ne podle intuice či dosavadních zkušeností. To byl velký posun – od korespondenční pravdivosti k pravdivosti *sémantické.* Bez tohoto posunu by nemohlo dojít k objevu Lobačevského geometrie.

1.5 Gauss

Carl Friedrich Gauss je jistě jeden z největších matematiků všech dob. Tento německý velikán žil mezi lety 1777 a 1855 a svou stopu zanechal nejen v mnoha odvětvích matematiky, ale třeba i v astronomii. Je po něm pojmenováno mnoho matematických tvrzení i objektů – možná už jste slyšeli o Gaussově křivce. Nebo až se budete věnovat ve škole komplexním číslům, budete je graficky zakreslovat do Gaussovy roviny.

Gaussovu genialitu dokresluje historka, která o něm koluje: Učitel na základní škole si chtěl na chvilku odpočinout od svých žáčků. Zadal jim tedy úkol sečíst všechna čísla od 1 do 100. Předpokládal, že jim tento úkol zabere celou hodinu. Jaké bylo jeho překvapení, když malý Gauss po chvilce přišel se správnou odpovědí! Uvědomil si totiž, že sečtením prvního a posledního čísla, druhého a předposledního atd. získá stále stejnou hodnotu: $1 + 100 = 2 + 99 = ... = 101$. Takových dvojic čísel je $100/2 = 50$. Gaussovi tedy stačilo jen vynásobit $50 \cdot 101$ a výsledek 5050 byl na světě.

Nyní už ale zpět k důkazu pátého postulátu. Samozřejmě i Gauss změřil síly s tímto matematických problémem. Pokusil se o důkaz sporem. Vzal si tedy negaci pátého postulátu a snažil se najít spor. Bezúspěšně. Geometrie, která vznikala z prvních čtyř axiomů a negace pátého axiomu byla sice zvláštní, neodpovídala geometrii, na kterou jsme zvyklí a která odpovídá světu kolem nás. Ale sama sobě nikde neodporovala, žádná ze získaných tvrzení nebyla navzájem ve sporu.

Gauss si uvědomil, že takováto geometrie dává smysl. Nikdy o ní ale žádnou práci nepublikoval, své poznatky nikdy nezveřejnil. Proč? Možná se bál nepochopení a výsměchu. Kniha Trýznivé tajemství (Vopěnka, 2003) zase představuje možnost, že o neeukleidovské geometrii napsat nesměl, protože musel zachovat zednářské tajemství, které mu bylo svěřeno a které ho k neeukleidovské geometrii přivedlo. Nikdy už se s jistotou nedovíme, jaký byl jeho důvod, jisté ovšem je, že o neeukleidovské geometrii věděl. Zachovala se totiž jeho korespondence, ze které to jasně plyne.

1.6 Bolyai a Lobačevskij

Matematik, který jako další došel až k objevu neeukleidovské geometrie a který navíc své poznatky publikoval, byl János Bolyai (čti *bójaj*), maďarský matematik, který žil mezi lety 1802 a 1860. Jeho otec byl Farkas Bolyai (1775–1856), taktéž významný maďarský matematik a hlavně spolužák a dobrý přítel Carla Friedricha Gausse. Farkas Bolyai a Gauss se během studií společně snažili o důkaz pátého postulátu. Byl to ale až Farkasův syn János, který si uvědomil, že marné pokusy o důkaz sporem vytvářejí nový geometrický svět. Když v roce 1832 Farkas publikoval své matematické dílo Tentamen, jeho syn János k němu napsal Appendix, přílohu, ve které shrnul své poznatky o neeukleidovské geometrii.

Jánosův Appendix ale zůstal matematickou veřejností více méně nepovšimnut. Pokud ho přeci jen někdo četl, nejspíš si pomyslel, že se tento neznámý mladý matematik zbláznil. Gauss samozřejmě o Appendixu věděl, Farkas a János žádali Gausse o názor, ještě než Tentamen vyšel. Gauss zaslal Farkasovi dopis, ve kterém Jánosovy objevy chválí, ale také píše, že všechny tyto poznatky objevil již před mnoha lety. Tato korespondence je jeden ze zdrojů, díky kterému víme, že Gauss o neeukleidovské geometrii věděl. János měl ale pocit, že se ho tímto Gauss snaží připravit o jeho objev.

Když János neuspěl s neeukleidovskou geometrií, zaměřil se na další velké matematické problémy. Bohužel, zvolené problémy byly nad jeho síly, János se tedy za svého života nijak výrazně neprosadil. Zemřel v chudobě ve věku 57 let. Gausse přežil o pět let, svého otce o čtyři.

Ve stejné době, tedy ve druhé polovině 20. let 19. století, se ale neeukleidovská geometrie objevila v mysli ještě jednoho matematika. Tím byl Nikolaj Ivanovič Lobačevskij, ruský matematik, profesor a později rektor Kazaňské univerzity, který žil mezi lety 1792 a 1856. I on se rozhodl své myšlenky publikovat, konkrétně to bylo v roce 1829 v časopise Věstník Kazaňské univerzity.

Na rozdíl od Appendixu příspěvek Lobačevského nezůstal nepovšimnut. Zůstal ale nepochopen. Existují dokonce recenze, kde si jejich autor myslí, že si z nich Lobačevskij dělá legraci, když seriózně publikuje geometrii, která „nedává smysl“.

Již nyní víme, že na její objev se bylo třeba oprostit od reálného světa, její tvrzení tedy nebudou odpovídat tomu, na co jsme zvyklí. Až si později představíme některé výsledky *Lobačevského* geometrie, budete to moci posoudit sami.

1.7 Význam objevu Lobačevského geometrie

Je určitě třeba zmínit dva přínosy objevu Lobačevského geometrie:

Zaprvé, objev Lobačevského geometrie vyřešil dilema několika generací matematiků, zda je pátý postulát opravdu axiomem, nebo je dokazatelný z prvních čtyř postulátů. Vzhledem k tomu, že podle toho, jak pátý postulát zvolíme, dostaneme buď eukleidovskou, nebo Lobačevského geometrii, tak pátý postulát rozhodně nelze dokázat s pomocí prvních čtyř axiomů. Je tedy také axiomem a jak jsme již zmínili, využívá ho i dnes všeobecně uznávaná Hilbertova axiomatizace.

Zadruhé, aby mohla být objevena, bylo třeba přestat vyhodnocovat pravdivost tvrzení na základě našich zkušeností a přejít k *sémantické pravdivosti*, což změnilo celou filozofii matematiky.

2. Základní pojmy

Eukleidovská geometrie, neeukleidovská geometrie, Lobačevského geometrie... Abychom si v těchto a dalších důležitých pojmech udělali jednou pro vždy jasno, shrneme si je přehledně v této kapitole.

Eukleidovská geometrie

Ta geometrie v rovině, kterou známe ze školy a kterou popsal David Hilbert svými pěti skupinami axiomů. V našem historickém příběhu je to ta geometrie, kterou se snažil vybudovat Eukleidés ze svých pěti postulátů. Není nutné brát axiomy v původním znění, je možné některý z postulátů nahradit tvrzením, které je s ním ekvivalentní. Stále získáme stejnou geometrii. Některá tvrzení ekvivalentní s pátým Euklidovým postulátem (Hilbertovým axiomem rovnoběžnosti) si představíme ve čtvrté kapitole.

Lobačevského geometrie

Pokud vyměníme Hilbertův axiom rovnoběžnosti za jeho negaci, vybudujeme z ní a ze zbylých čtyř skupin axiomů geometrii, kterou na počest Nikolaje Ivanoviče Lobačevského nazýváme Lobačevského geometrie. Protože je to geometrie, která není eukleidovská, můžeme se setkat i s pojmem *neeukleidovská geometrie*. V této práci to budou synonyma.

Absolutní geometrie

Všimněme si, že čtyři skupiny axiomů jsou společné pro eukleidovskou i Lobačevského geometrii. Tedy i některá tvrzení budou mít tyto dvě geometrie společné. Geometrii, kterou vybudujeme z Hilbertových axiomů, pokud odebereme axiom rovnoběžnosti, nazýváme absolutní, nebo také *neutrální geometrie*.

Pangeometrie

Když vyjdeme z absolutní geometrie a přidáme k ní pátý postulát, získáme eukleidovskou geometrii. Když k ní přidáme negaci pátého postulátu, získáme Lobačevského geometrii. A žádná další možnost už není, pátý postulát buď platí, nebo neplatí, žádnou jinou geometrii jako nadstavbu absolutní geometrie vybudovat nemůžeme. Lobačevskij tuto „veškerou možnou geometrii“, tj. geometrii eukleidovskou společně s geometrií neeukleidovskou (Lobačevského), nazývá pangeometrie. [Smith, 1984, str. 362]

3. Absolutní geometrie

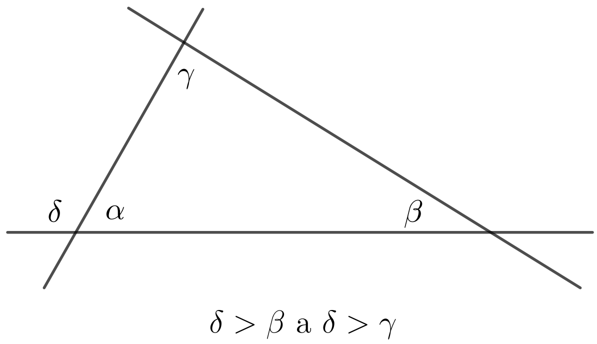
Nyní si představíme několik tvrzení, která platí v absolutní geometrii, a tedy i v obou geometriích, které z ní získáme přidáním pátého postulátu či jeho negace – v geometrii eukleidovské i neeukleidovské. Díky tomu se setkáme s prvními tvrzeními, která platí v Lobačevského geometrii.

Za pravdivá považujeme v matematice jen ta tvrzení, která lze dokázat. Navíc důkaz nám kromě ověření, že je to, co říkáme, skutečně pravda, často přináší i hlubší pochopení daného tvrzení. Proto si tvrzení nejen uvedeme, ale i dokážeme.

Definice a tvrzení a jejich důkazy, které najdete v této kapitole, pochází z knihy Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie (Kutuzov, 1953), odkud byly převzaty s úpravami, důkazy byly zpřehledněny, doplněny o chybějící mezikroky a obrázky byly opatřeny barvami, které snad napomůžou lepšímu pochopení.

Tvrzení 1. *Vnější úhel trojúhelníku je větší než kterýkoli jeho vnitřní úhel, který s ním není vedlejší.*

Vnější úhel trojúhelníku je úhel, který je vedlejší s některým jeho úhlem vnitřním. Na obrázku 3.1 můžeme vidět vnější úhel δ, který je vedlejší k vnitřnímu úhlu α. Tvrzení 1 nám říká, že tento úhel je větší než úhly β a γ.



Obrázek 3.1: Vnější úhel δ je vedlejší úhel k vnitřnímu úhlu α.

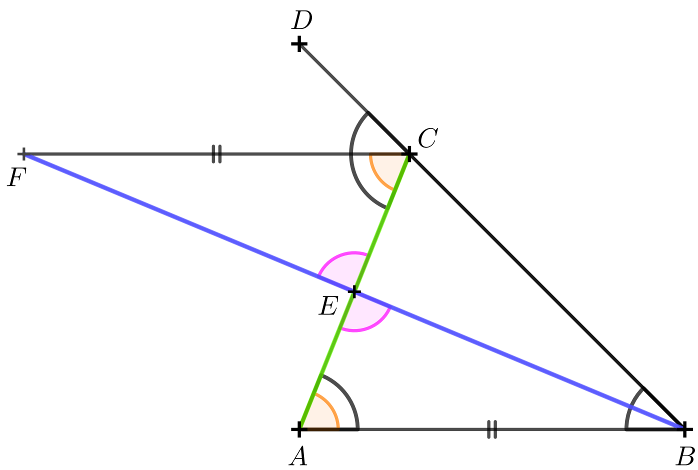
Toto tvrzení formuloval a dokázal Eukleidés ve svých Základech jako svou šestnáctou větu [Servít, 1907]. I Eukleidés ve svých Základech napřed uváděl tvrzení, ke kterým nepotřeboval pátý postulát, tedy tvrzení z absolutní geometrie.

Tvrzení 1 si nyní dokážeme. Zvolíme si libovolný trojúhelník ABC a budeme chtít ukázat požadovanou vlastnost. K tomu využijeme shodné trojúhelníky, protože pro jejich příslušné úhly platí, že mají stejnou velikost, což se nám bude hodit:

Důkaz. Mějme trojúhelník ABC. Na polopřímce BC zvolme mimo úsečku BC bod D (viz obrázek 3.2). Budeme chtít ukázat, že úhel DCA je větší než úhly BAC a ABC.

Střed úsečky AC označme E. Platí tedy $|AE| = |EC|$. Na polopřímce BE zvolme bod $F \neq B$ tak, aby $|BE| = |EF|$. Úhly AEB a CEF jsou vrcholové úhly, proto mají stejnou velikost. Trojúhelníky ABE a CFE jsou tedy shodné podle věty *sus*, protože se shodují ve dvou stranách a úhlu, který svírají. Shodné trojúhelníky mají stejně dlouhé všechny odpovídající si strany a stejně velké všechny odpovídající si úhly. Proto dále platí, že:

$$|AB| = |CF|,$$
$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle FCE|,$$
$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle CFE|.$$



Obrázek 3.2: K důkazu tvrzení 1.

Platí:

$$|\sphericalangle DCE| > |\sphericalangle FCE|.$$

Protože $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DCA|$ a $|\sphericalangle FCE| = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BAC|$, ukázali jsme, že

$$|\sphericalangle DCA| > |\sphericalangle BAC|,$$

což jsme chtěli dokázat. Obdobně bychom ukázali, že $|\sphericalangle DCA| > |\sphericalangle ABC|$. Našli bychom střed strany BC atd.

□

Vpravo na konci předchozího odstavce jste si mohli všimnout malého čtverečku. Ten v matematice označuje konec důkazu, a tím přehledně odděluje tvrzení a jeho důkaz od zbytku textu. Díky čtverečku např. víte, že tento komentář už k samotnému důkazu nepatří.

Další tvrzení, které si uvedeme, bude hovořit o rovnoběžkách. Proto bychom si měli ujasnit, co znamená, že jsou přímky rovnoběžné:

Definice 1 (Rovnoběžky)**.** *O dvou různých přímkách řekneme, že jsou rovnoběžné, jestliže leží v jedné rovině a nemají žádný společný bod.*

U této definice bych chtěla zdůraznit dvě věci. Zaprvé, všimněme si, že tato definice považuje za rovnoběžky pouze dvě různé přímky, které splňují dané podmínky, i když my jsme ze školy nejspíš zvyklí považovat za rovnoběžky i dvě přímky, které splývají.

Zadruhé, jistě vás napadá, že rovnoběžky, jak je znáte, by šlo určitě definovat i jinak, třeba jako přímky, které mají od sebe stále stejnou vzdálenost (jinými slovy jsou ekvidistantní). Proč jsme nevyužili této definice? Naše definice nepracuje s pojmem vzdálenosti, což je určitě složitější pojem než průsečík dvou přímek. V matematice se často snažíme pracovat s minimem potřebných pojmů a ukazuje se, že velkou část geometrie lze vybudovat i bez pojmů jako vzdálenost a velikost. Této geometrii říkáme *afinní geometrie*. I v ní bychom rádi definovali rovnoběžky a pomocí naší definice to udělat můžeme, protože nevyužívá pojem vzdálenosti.

To byla ale spíš poznámka na okraj k tomu, jak „funguje matematika“. Existuje totiž jeden mnohem zásadnější důvod, proč chceme využít naši definici 1: definice pomocí stále stejné vzdálenosti v Lobačevského geometrii nefunguje. Lze totiž ukázat, že existence dvou ekvidistantních přímek je ekvivalentní s pátým postulátem a tudíž v Lobačevského geometrii takové přímky neexistují. [Pavlíček, 1953]

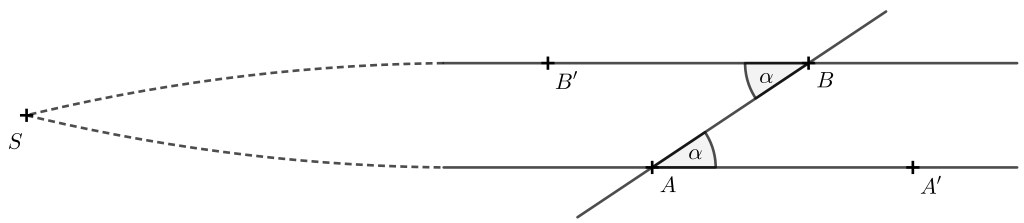
V tomto textu se proto dále budeme řídit definicí 1. A nyní už ke slibovanému tvrzení o rovnoběžkách:

Tvrzení 2. *Ke každé přímce lze bodem, který na ní neleží, vést alespoň jednu rovnoběžku.*

Než se pustíme do důkazu, uvědomme si, že tvrzení 2 nám neříká nic o tom, kolik těchto rovnoběžek je, jen že vždy alespoň jedna existuje. Počet rovnoběžek se později ukáže jako jeden z rozdílů mezi eukleidovskou a neeukleidovskou geometrií.

Důkaz tvrzení provedeme konstruktivně – ukážeme, jak takovou rovnoběžku sestrojit. Že se opravdu bude jednat o rovnoběžku, ukážeme sporem. K získání sporu pak použijeme tvrzení 1:

Důkaz. Mějme zadanou přímku AA' a bod B, který na ní neleží. Body A a B proložme přímku. Bodem B pak veďme přímku BB' tak, aby střídavé úhly $A'AB$ a $B'BA$ měly stejnou velikost (viz obrázek 3.3).



Obrázek 3.3: K důkazu tvrzení 2.

Přímky AA' a BB' jsou zřejmě navzájem různé. To, že nemají žádný společný bod, můžeme ukázat sporem: Předpokládejme, že společný bod mají, třeba v polorovině ABB'. Tento průsečík označme S. Podívejme se na trojúhelník ABS. Úhel $A'AB$, který je vnějším úhlem tohoto trojúhelníku, je ale stejně velký jako úhel $B'BA$, který je vnitřním úhlem tohoto trojúhelníku. To je ale ve sporu s tvrzením 1. Proto přímky AA' a BB' nemají žádný společný bod a jsou tedy rovnoběžné.

□

Tvrzení 3. *Součet vnitřních úhlů trojúhelníku nemůže být větší než 180°.*

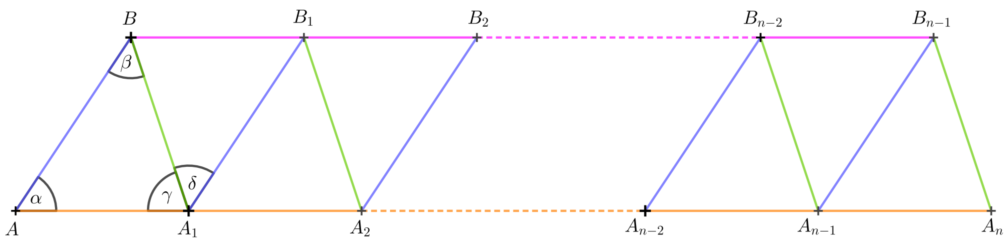
Tvrzení 3 nám opět nic neříká o tom, jaký je součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku, jestli 180°, nebo méně. Jen že to nemůže být více než 180°. Opět se ukáže, že jedna z možností bude platit v eukleidovské geometrii a druhá v neeukleidovské.

Důkaz povedeme ve třech krocích:

1. Sestrojíme si vhodně několik přímo shodných trojúhelníků.
2. Tím nám vzniknou další trojúhelníky, o kterých ukážeme, že jsou shodné.
3. Ukážeme, že součet úhlů v trojúhelníku nemůže být větší než 180°, tuto část důkazu povedeme sporem.

Důkaz.

1. Mějme trojúhelník ABA_1 a označme po řadě jeho vnitřní úhly α, β a γ jako na obrázku 3.4. Nanesme na polopřímku AA_1 body $A_2, A_3, ..., A_n$ (kde n je libovolné přirozené číslo větší než 1) tak, aby $|AA_1| = |A_1A_2| = ... = |A_{n-1}A_n|$. Nad každou touto úsečkou sestrojme trojúhelník, který je přímo shodný s trojúhelníkem ABA_1, tak, že platí $|AB| = |A_1B_1| = ... = |A_{n-1}B_{n-1}|$ a $|A_1B| = |A_2B_1| = ... = |A_nB_{n-1}|$.



Obrázek 3.4: K důkazu tvrzení 3.

2. Tím jsme získali trojúhelníky $B_1A_1B, B_2A_2B_1, ..., B_{n-1}A_{n-1}B_{n-2}$. Ukažme, že jsou všechny shodné podle věty *sus*. Víme, že mají dvě stejně dlouhé strany, a to $|AB| = |A_1B_1| = ... = |A_{n-1}B_{n-1}|$ a $|A_1B| = |A_2B_1| = ... = |A_nB_{n-1}|$. Ještě tedy musíme ukázat, že jsou shodné i úhly, které svírají: $|\sphericalangle BA_1B_1| = \delta = 180° - \gamma - \alpha = |\sphericalangle B_1A_2B_2| = ... = |B_{n-2}A_{n-1}B_{n-1}|$. Ze shodnosti dostáváme $|BB_1| = |B_1B_2| = ... = |B_{n-2}B_{n-1}|$.
3. Nyní ukážeme sporem, že součet všech vnitřních úhlů v trojúhelníku nemůže být větší než 180°. Předpokládejme opak, tedy že

$$\alpha + \beta + \gamma > 180°.$$

Velikost přímého úhlu je 180°, proto platí

$$\alpha + \delta + \gamma = 180°.$$

Když tuto rovnost odečteme od nerovnosti výše, získáme

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha + \beta - \delta + \gamma - \gamma &> 180^\circ - 180^\circ,\\ \beta - \delta &> 0^\circ,\\ \beta &> \delta.\end{aligned}$$

Trojúhelníky ABA_1 a B_1A_1B se shodují ve dvou stranách – strana A_1B je společná pro oba trojúhelníky a $|AB| = |A_1B_1|$. Úhly β a δ jsou úhly těmito stranami sevřené. Protože proti většímu úhlu leží vždy delší strana ([Servít, 1907], 19. věta), musí být strana AA_1, která leží proti úhlu β, delší než strana BB_1, která leží proti úhlu δ, tj.

$$|AA_1| > |BB_1|.$$

Dále platí, že pokud dva dané body spojím libovolnou lomenou čarou, bude její délka větší než délka úsečky, která je těmito body určena. To vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti, kterou Eukleidés dokázal bez využití pátého postulátu jako 20. větu svých Základů [Šír, 2011]. Proto

$$|AA_1| + ... + |A_{n-1}A_n| < |AB| + |BB_1| + ... + |B_{n-2}B_{n-1}| + |B_{n-1}A_n|.$$

Protože některé délky v této nerovnosti jsou stejné, můžeme si ji zjednodušit a upravit:

$$\begin{aligned}n \cdot |AA_1| &< |AB| + (n-1) \cdot |BB_1| + |B_{n-1}A_n|,\\ n \cdot |AA_1| &< |AB| + n \cdot |BB_1| - |BB_1| + |B_{n-1}A_n|,\\ n \cdot |AA_1| - n \cdot |BB_1| &< |AB| - |BB_1| + |B_{n-1}A_n|,\\ n \cdot (|AA_1| - |BB_1|) &< |AB| + |BA_1| - |BB_1|.\end{aligned}$$

Protože $|AA_1| > |BB_1|$, máme na levé straně n-násobek nějakého kladného reálného čísla, označme jej a. Z trojúhelníkové nerovnosti máme $|AB| + |BA_1| > |AA_1|$, a protože $|AA_1| > |BB_1|$, dostáváme

$$|AB| + |BA_1| > |BB_1|.$$

Proto i na pravé straně nerovnosti máme nějaké kladné reálné číslo, označme jej b. Naše nerovnost má nyní tvar $n \cdot a < b$ a platí pro libovolné přirozené n větší než 1.

Tím ale nastává spor. Jistě totiž existuje nějaké přirozené číslo $n > 1$, pro které už bude hodnota $n \cdot a$ větší než b, a naše nerovnost tedy nebude platit. To si můžeme představit třeba tak, že máme úsečku délky b a úsečku délky a, ke které přičítáme úsečky délky a, než bude delší než úsečka délky b. To jistě někdy nastane, a tak jsme našli spor s tím, že nerovnice platí pro libovolné přirozené $n > 1$.

Tím pádem byl náš předpoklad, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je větší než 180°, chybný. Dokázali jsme tedy, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je menší nebo roven 180°.

□

4. Ekvivalentní vyjádření pátého postulátu

V první kapitole jsme si povídali o historii vzniku Lobačevského geometrie díky snaze ukázat, že pátý Eukleidův postulát není axiom, ale lze ho dokázat z prvních čtyř Eukleidových postulátů. Zmínili jsme, že důkaz byl často chybný proto, že jeho autor vyšel správně pouze z prvních čtyř postulátů, ale během důkazu začal pracovat s nějakým tvrzením, které je s pátým postulátem ekvivalentní (a neuvědomil si to třeba proto, že to bylo něco naprosto zřejmého, co v geometrii přece „musí platit“, viz *korespondenční pravda* zmíněná v sekci 1.4). Tedy vlastně pracoval s pěti postuláty. Pak je jasné, že pátý postulát ve standardním znění snadno dokázal a měl pocit, že nalezl hledaný důkaz.

Díky tomu známe mnoho tvrzení, která jsou s pátým postulátem ekvivalentní. Níže si některá z nich vyjmenujeme a vybraná si dokážeme nebo alespoň naznačíme myšlenku jejich důkazu.

Uvedená tvrzení platí v eukleidovské geometrii. Co je ale pro nás důležitější, můžeme je chápat také jako tvrzení, které neplatí v neeukleidovské geometrii. Připomínám, že neeukleidovskou geometrii budujeme z absolutní geometrie přidáním negace pátého postulátu (Hilberova axiomu rovnoběžnosti). Je jedno, jaké jeho „znění“ zvolíme. Ať si vybereme libovolné ekvivalentní tvrzení a pátý postulát jím nahradíme, stále budeme potřebovat jeho negaci pro vybudování neeukleidovské geometrie.

4.1 Výčet tvrzení ekvivalentních s Eukleidovým pátým postulátem

Uvedená tvrzení jsou (s úpravami) převzatá z publikací [Kutuzov, 1953], [Pavlíček, 1953] a přeložena ze stránky [Wikipedia contributors, 2023].

- K dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku.
- Existují dvě přímky, které jsou od sebe stále stejně vzdáleny, tj. které jsou ekvidistantami.
- Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180°.
- Existuje alespoň jeden trojúhelník, jehož součet vnitřních úhlů je roven 180°.
- Součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je roven téže konstantě.
- Existují dva trojúhelníky, které jsou podobné, ale nejsou shodné.
- Existuje trojúhelník o libovolném obsahu.
- Platí kosinová věta.

- Platí Pýthagorova věta.[1]
- Libovolnými třemi body, které neleží v jedné přímce, lze proložit kružnici.
- Pokud jsou ve čtyřúhelníku tři úhly pravé, pak čtvrtý úhel je také pravý.
- Existuje alespoň jeden čtyřúhelník, který má všechny úhly pravé.
- Existuje alespoň jeden čtyřúhelník se součtem vnitřních úhlů 360°.
- Délka strany pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice je rovna velikosti jejího poloměru.
- Pokud jsou dvě přímky rovnoběžné s přímkou třetí, pak jsou rovnoběžné i navzájem.
- Dvě přímky, které nemají společný bod, tvoří s libovolnou přímkou, která je obě protíná, dvojice sobě rovných střídavých úhlů.
- Každým vnitřním bodem úhlu (ostrého) lze vést alespoň jednu přímku, která protne obě ramena úhlu mimo vrchol.

4.2 Důkazy některých ekvivalentních tvrzení

Poznámka úvodem: vybrané důkazy nejsou těžké na pochopení, ale mohou být zdlouhavé. Protože znalost důkazů není nutná pro pochopení další kapitoly, je možné je vynechat.

Důkazy všech tvrzení kromě tvrzení 4 jsou převzaty z [Kutuzov, 1953], opět s úpravami, které mají za cíl důkaz zpřehlednit a doplnit o chybějící mezikroky.

Tvrzení 4. *K dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku.*

Toto je asi nejčastější ekvivalentní tvrzení. Je totiž kratší a názornější než Eukleidovo znění pátého postulátu, takže se s ním můžete setkat dokonce častěji než s Eukleidovým zněním. Proto se někdy pátému postulátu říká také *postulát o rovnoběžkách* (a proto je v Hilbertově axiomatizaci pátý postulát označován jako axiom rovnoběžnosti). Jak toto tvrzení odvodit popisuje [Hlavatý, 1926] v kapitole 1.2.

Připomeňme si, že originální znění říká, že pokud součet úhlů, které jsou na obrázku 1.1 označeny růžově, je menší než 180°, pak se příslušné přímky protnou. Stejně tak jsme si promysleli, že se přímky protnou, pokud bude součet růžových úhlů větší než 180°.

Co se stane, když bude součet růžových úhlů právě 180°? Ze své zkušenosti s eukleidovskou geometrií víme, že právě tehdy, když toto nastane, se přímky

[1] Pýthagorova věta je speciálním případem kosinové věty. Vezměme si pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Když do kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ dosadíme $\gamma = 90°$, dostaneme $\cos 90° = 0$, tudíž výraz $-2ab\cos\gamma = 0$ a zbude nám Pýthagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$. Tím jsme ukázali, jak z kosinové věty vyvodit Pýthagorovu větu.

Je tedy překvapivé, že Pýthagorova věta je ekvivalentní s kosinovou větou, přestože je Pýthagorova věta jejím speciálním případem. Je tomu tak proto, že kosinovou větu lze odvodit z Pýthagorovy věty (s užitím goniometrických funkcí).

neprotnou, tedy nebudou mít společný bod a tudíž podle definice 1 budou přímky rovnoběžné. Eukleidés toto formálně dokazuje ve svých Základech jako 27. větu [Servít, 1907]. Důkaz se opírá o podobné myšlenky jako důkaz tvrzení 2, proto si ho zde podrobněji uvádět nebudeme.

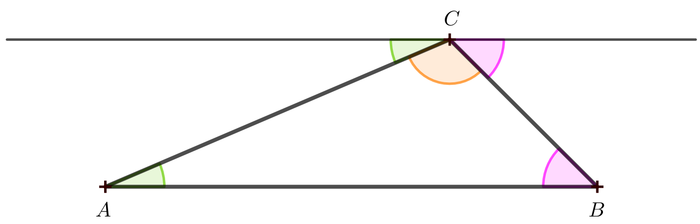
Tvrzení 5. *Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven 180°.*

To, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, je znalost ze základní školy. My nyní ukážeme, že je to tvrzení ekvivalentní s postulátem o rovnoběžkách, a proto platí pouze v eukleidovské geometrii.

Důkaz. Protože chceme ukázat ekvivalenci, musíme ukázat obě implikace:

i) *Jestliže bodem, který na dané přímce neleží, lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, pak je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku 180°.*

Mějme trojúhelník ABC a vrcholem C veďme rovnoběžku se stranou AB, viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

Přímý úhel při vrcholu C má velikost 180°. Tedy součet zeleného, oranžového a růžového úhlu je 180°. Zelený úhel při vrcholu C je střídavý úhel k zelenému úhlu při vrcholu A, stejně tak růžový úhel při vrcholu C je střídavý úhel k růžovému úhlu při vrcholu B. Protože příslušné přímky jsou rovnoběžné, mají stejně barevné úhly stejnou velikost. Tady využíváme axiomu o rovnoběžkách.

Protože zelený, oranžový a růžový úhel při vrcholu C mají dohromady 180°, i součet zeleného, oranžového a růžového vnitřního úhlu trojúhelníku bude 180°.

ii) *Jestliže je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku 180°, pak lze k zadané přímce vést bodem, který na ní neleží, právě jednu rovnoběžku.*

Hned na začátku poznamenejme, že když ukážeme toto tvrzení, dokážeme ekvivalenci tvrzení o součtu úhlů v trojúhelníku a postulátu o rovnoběžkách, o kterém už jsme ukázali, že je ekvivalentní s Eukleidovým pátým postulátem. Ukážeme tedy, že všechna tři tvrzení jsou navzájem ekvivalentní.

K důkazu budeme potřebovat jedno pomocné tvrzení, tzv. lémma:

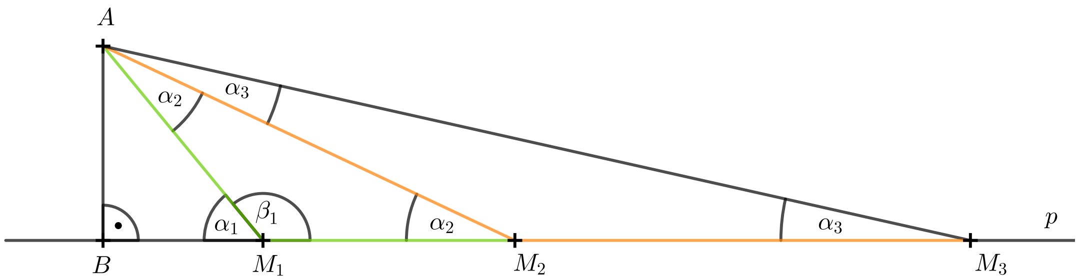
Lémma 6. *Je dána přímka p a bod A, který na přímce p neleží. Označme B patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku p. Pokud dostaneme zadaný ostrý úhel $\varepsilon > 0°$, pak existuje na přímce p bod M takový, že $|\sphericalangle BMA| < \varepsilon$.*

Důkaz. Ukážeme, jak takový bod M zkonstruovat. Zvolme na přímce p libovolně bod M_1 různý od bodu B. Pokud $|\sphericalangle BM_1A| < \varepsilon$, tak bod M ztotožníme s bodem M_1 a máme hotovo.

Pokud $|\sphericalangle BM_1A| \geq \varepsilon$, tak na polopřímmce BM_1 nalezneme bod M_2 takový, že $|AM_1| = |M_1M_2|$. Označme α_2 shodné úhly v rovnoramenném trojúhelníku AM_1M_2, zbývající úhel trojúhelníku AM_1M_2 označme β_1 a úhel k němu vedlejší α_1. Podle tvrzení 3 je součet úhlů v trojúhelníku $2 \cdot \alpha_2 + \beta_1 \leq 180°$. Zároveň $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$. Z toho dostáváme vztah $2 \cdot \alpha_2 \leq \alpha_1$, tedy $\alpha_2 \leq \frac{\alpha_1}{2}$.

Analogicky můžeme najít bod M_3 na p tak, že $|AM_2| = |M_2M_3|$. Označme α_3 shodné úhly v rovnoramenném trojúhelníku AM_2M_3. Pak platí $\alpha_3 \leq \frac{\alpha_2}{2} \leq \frac{\alpha_1}{2^2}$. Po n-tém kroku získáme vztah $\alpha_n \leq \frac{\alpha_1}{2^n}$. Tímto postupem tedy získáváme stále menší úhly. Jistě tedy existuje takové přirozené číslo n, abychom po n krocích tímto postupem získali úhel, který už je menší než zadané ε.

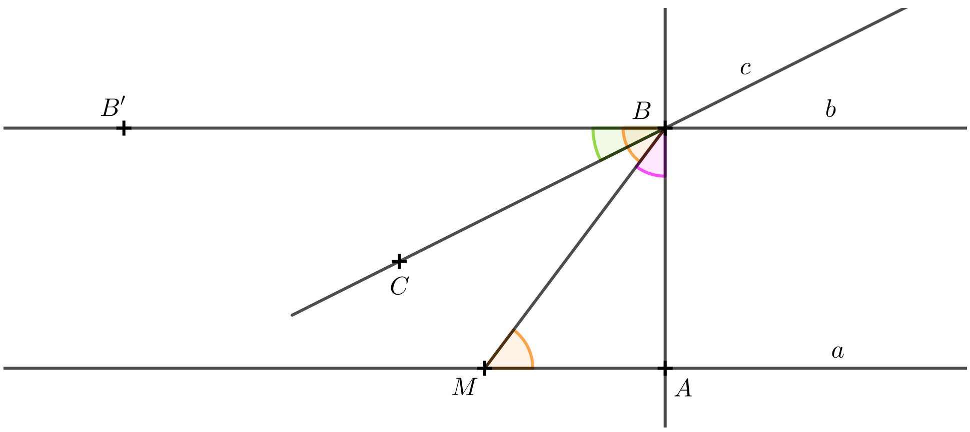
□



Obrázek 4.2: Ilustrace lémmatu 6.

Všimněme si, že jsme v důkazu lémmatu nikde nepoužili rovnoběžky, jen několik tvrzení z absolutní geometrie. A nyní už k důkazu samotného tvrzení:

Předpokládáme, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°, a chceme ukázat, že k dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést jen jednu rovnoběžku. Jedna rovnoběžka existuje určitě a umíme ji sestrojit, obojí známe z kapitoly o absolutní geometrii. Tyto dvě rovnoběžky označme a a b jako na obrázku 4.3. Na přímce b zvolme bod B. Budeme chtít ukázat, že každá další přímka c procházející bodem B už protíná přímku a, takže s ní není rovnoběžná.



Obrázek 4.3: Obrázek k důkazu druhé implikace tvrzení 5.

Spusťme kolmici z bodu B, její průsečík s přímkou a označme A. (Existenci této přímky máme zaručenou díky postupu konstrukce z tvrzení 2 – úhel α na obrázku 3.3 by byl pravý.) Nyní zvolme na přímce b bod B' různý od bodu B. Pro jednoduchost provedeme důkaz jen pro ty přímky c, které prochází pravým úhlem $B'BA$. (Hraniční přímky jsou přímka b, o které víme, že rovnoběžná je, a kolmice z bodu B, která naopak rovnoběžná není. Pro přímky „na druhé straně“ by byl důkaz veden úplně stejně.)

Označme C bod přímky c, který leží uvnitř úhlu $B'BA$. $|\sphericalangle B'BC| < |\sphericalangle B'BA|$, $\sphericalangle B'BC$ je tedy úhel ostrý. Zvolme bod M na přímce a v polorovině ABB' různý od bodu A. Tím nám vznikne pomocný pravoúhlý trojúhelník ABM. Protože vycházíme z předpokladu, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$, je součet velikostí úhlů $|\sphericalangle AMB| + |\sphericalangle MBA|$ roven $90°$. Protože i součet úhlů $|\sphericalangle MBB'| + |\sphericalangle MBA|$ je roven $90°$, platí $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle MBB'|$. Z předchozího lémmatu víme, že velikost oranžového úhlu při vrcholu M, a tedy i stejně velkého oranžového úhlu při vrcholu B, lze libovolně zmenšit. Tedy určitě lze pomocný trojúhelník ABM zvolit tak, aby přímka c procházela jeho vnitřním úhlem $|\sphericalangle MBA|$, a tedy už nutně protínala protilehlou stranu AM, a tudíž i přímku a, což jsme chtěli dokázat.

□

Tvrzení 7. *Součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je roven téže konstantě.*

Toto tvrzení neříká, jaký je součet vnitřních úhlů trojúhelníku, jen že je to pro všechny trojúhelníky stejné číslo.

Chceme ukázat, že i toto tvrzení je ekvivalentní s ostatními tvrzeními. Stačí tedy ukázat jeho ekvivalenci s jedním z těchto tvrzení. Zvolíme si součet vnitřních úhlů trojúhelníku je roven $180°$.

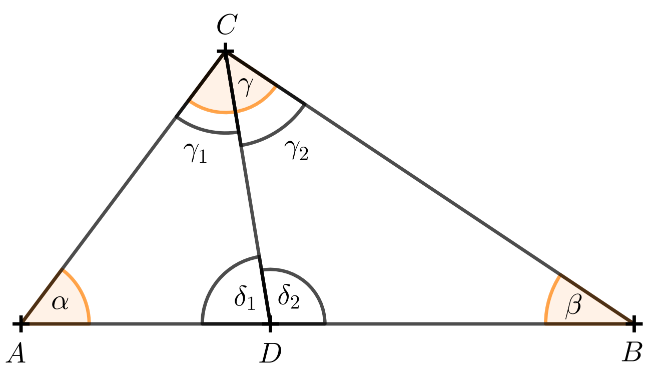
Důkaz. Opět musíme ukázat obě implikace:

i) *Jestliže je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku roven 180°, pak je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku roven téže konstantě.*

To platí zřejmě, ona společná konstanta pro všechny trojúhelníky je $180°$.

ii) *Jestliže je součet vnitřních úhlů trojúhelníku roven téže konstantě, pak je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku roven 180°.*

Mějme trojúhelník ABC, jeho vnitřní úhly označme po řadě α, β a γ. Zvolme bod D uvnitř strany AB. Úsečka CD nám rozdělí trojúhelník ABC na dva trojúhelníky ACD a BCD. Jejich zbývající vnitřní úhly označme po řadě γ_1, δ_1, resp. γ_2, δ_2 (viz obrázek 4.4).



Obrázek 4.4: Obrázek k důkazu druhé implikace tvrzení 7.

Předpokládáme, že součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku je roven téže konstantě, označme ji k. Pak platí:

$$\begin{aligned}
\alpha + \gamma_1 + \delta_1 &= k, \\
\beta + \gamma_2 + \delta_2 &= k, \\
\alpha + \beta + \gamma &= k, \\
\delta_1 + \delta_2 &= 180^\circ.
\end{aligned}$$

Sečtením prvních dvou rovnic a dosazením ze čtvrté rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 &= 2k, \\
\alpha + \beta + \gamma + 180^\circ &= 2k, \\
k + 180^\circ &= 2k, \\
180^\circ &= k.
\end{aligned}$$

Konstanta k tedy musí být rovna 180°, čímž máme tvrzení 7 dokázáno.

$\square$

5. Lobačevského geometrie

Možná je zvláštní, že se k jádru tématu dostáváme až na konci práce, ale právě díky znalostem, které jsme získali v předchozích kapitolách, si nyní společně budeme moci odvodit zajímavé výsledky, které platí v Lobačevského geometrii.

5.1 Odvození tvrzení

Některá tvrzení z Lobačevského geometrie známe již z kapitoly o absolutní geometrii. Dále víme, že Lobačevského geometrii získáme z prvních čtyř eukleidových postulátů a negace pátého postulátu (přesněji z negace Hilbertova axiomu rovnoběžnosti a nezměněných zbylých čtyř skupin axiomů). V předchozí kapitole jsme si představili celý seznam tvrzení, která jsou s pátým postulátem ekvivalentní. Protože je jedno, které z tvrzení si vybereme jako pátý axiom, musí v Lobačevského geometrii platit negace všech těchto ekvivalentních tvrzení.

Proto si nyní znegujeme vybraná tvrzení z předchozí kapitoly a podíváme se, jaké výsledky získáme.

5.2 Rovnoběžky

Jedno z tvrzení, které je ekvivalentní s pátým postulátem, tvrdí: K dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku. Pojďme se společně podívat na jeho negaci. Když negujeme tvrzení, které tvrdí *existuje právě jedna rovnoběžka*, pak jeho negace musí pokrýt všechny ostatní možnosti. Negací tedy je, že *ke každé přímce lze bodem, který na dané přímce neleží, vést buď žádnou rovnoběžku, nebo dvě a více rovnoběžek.*

Z kapitoly o absolutní geometrii ale víme, že alespoň jedna rovnoběžka vždy existuje. Takže v Lobačevského geometrii bude platit, že k dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést dvě a více rovnoběžek.

5.3 Součet vnitřních úhlů trojúhelníku

Hned několik našich ekvivalentních tvrzení hovořilo o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku. Pokud v eukleidovské geometrii existuje alespoň jeden trojúhelník, jehož součet vnitřních úhlů je roven 180°, znamená to, že v Lobačevského geometrii neexistuje trojúhelník, jehož součet vnitřních úhlů je 180°. Platí tedy, že *součet vnitřních úhlů trojúhelníku je menší než 180° nebo větší než 180°*. Vzpomeňme opět na kapitolu o absolutní geometrii. Z té víme, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku nemůže být větší než 180°. Zbývá nám tedy jediná možnost: součet vnitřních úhlů trojúhelníku je menší než 180°.

Další tvrzení ekvivalentní s pátým postulátem říká: součet vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je roven téže konstantě. Negací je, že *součet úhlů není roven téže konstantě*. Když to dáme dohromady s předchozím, tak součet vnitřních úhlů v trojúhelníku v neeukleidovské geometrii není nějaké pevné číslo menší než 180° stejné pro všechny trojúhelníky, ale trojúhelníky mají různý součet vnitřních úhlů.

Jak to bude se součtem vnitřních úhlů v čtyřúhelníku? Každý čtyřúhelník můžeme získat složením dvou vhodných trojúhelníků. V eukleidovské geometrii mají vnitřní úhly v trojúhelnících součet 180°, a tedy součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je vždy 360°. Jelikož v neeukleidovské geometrii je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku menší než 180°, je nutně součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku menší než 360°. Stejný závěr bychom získali z ekvivalentního tvrzení existuje alespoň jeden čtyřúhelník se součtem vnitřních úhlů 360°. Jeho negace by říkala, že takový čtyřúhelník neexistuje, nebo také, že *součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku je menší než 360° nebo větší než 360°*. Z kapitoly o absolutní geometrii získáme pouze první možnost.

5.4 Podobnost trojúhelníků

Další z ekvivalentních tvrzení nám říká, že existují dva trojúhelníky, které jsou podobné, ale nejsou shodné. V neeukleidovské geometrii tedy bude platit tvrzení pokud jsou dva trojúhelníky podobné, pak už jsou nutně shodné. Jak si to představit?

Pro podobné trojúhelníky platí, že mají shodné vnitřní úhly, musí mít tedy i stejný součet jejich velikostí. V eukleidovské geometrii se to projevuje tak, že když trojúhelník zvětšíme nebo zmenšíme, velikost jeho úhlů (a tedy i jejich součet) se nezmění. A tedy všechny takové zvětšené a zmenšené trojúhelníky budou navzájem podobné.

Negace našeho tvrzení říká, že toto v Lobačevského geometrii neplatí. Znamená to, že změnou velikosti trojúhelníku měníme i jeho vnitřní úhly (a tím i součet jejich velikostí), tudíž zvětšený či zmenšený trojúhelník není s původním podobný. Trojúhelníky jsou tedy podobné, jen pokud jsou stejně velké, tudíž jsou nejen podobné, ale i shodné, což je přesně to, co říká naše negace.

5.5 Obsah trojúhelníku

Z ekvivalentních tvrzení víme o obsahu toto: existuje trojúhelník o libovolném obsahu. To nás v eukleidovské geometrii nijak nepřekvapí. V Lobačevského geometrii tím pádem platí negace tohoto tvrzení, tedy že neexistuje trojúhelník o libovolném obsahu. Již nyní můžeme tušit, že by obsah trojúhelníku v Lobačevského geometrii mohl souviset se součtem vnitřních úhlů v trojúhelníku, protože víme, že změnou velikosti trojúhelníku se mění i součet jeho vnitřních úhlů. Abychom mohli do této problematiky více nahlédnout, seznámíme se s tvrzeními, která již z našich ekvivalentních tvrzení nevyvodíme.

Jelikož je součet vnitřních úhlů v trojúhelníku menší než 180°, bude rozdíl 180° a součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku vždy kladný. Tento rozdíl je předmětem následující definice [Kutuzov, 1953, str. 77, upraveno]. Aby byl však *defekt* číslem kompatibilním s dalšími výpočty, je třeba zde pracovat s hodnotou π místo 180°:

Definice 2 (Defekt)**.** *Číslo δ, které se rovná rozdílu mezi π a součtem vnitřních úhlů v trojúhelníku, se nazývá defekt tohoto trojúhelníku.*

O defektu a jeho vztahu s obsahem trojúhelníku uvádí [Kutuzov, 1953, upraveno] následující tvrzení, která si uvedeme bez důkazu:

1. Jestliže trojúhelník rozdělíme jednou úsečkou na dva trojúhelníky, pak součet jejich defektů bude roven defektu původního trojúhelníku.

2. Dva trojúhelníky, které mají stejný defekt a shodnou jednu stranu, mají stejný obsah.

3. Obsahy dvou trojúhelníků, které se shodují v jedné straně, jsou v témže poměru jako jejich defekty.

Poslední tvrzení můžeme snadno zobecnit pro libovolné trojúhelníky. Vždy můžeme pro dva trojúhelníky sestrojit třetí, který bude mít jednu stranu shodnou s prvním trojúhelníkem a druhou s druhým. Pak je obsah prvního (označme S_1) a třetího (S_3) trojúhelníku ve stejném poměru, jako jejich defekty (δ_1, δ_3), stejně tak obsah druhého (S_2) a třetího trojúhelníku je ve stejném poměru jako defekt druhého (δ_2) a třetího (δ_3) trojúhelníku. Tedy:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{\delta_1}{\delta_3},$$
$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\delta_2}{\delta_3}.$$

Poměry upravíme:

$$\frac{S_1}{\delta_1} = \frac{S_3}{\delta_3},$$
$$\frac{S_2}{\delta_2} = \frac{S_3}{\delta_3}.$$

Odtud platí

$$\frac{S_1}{\delta_1} = \frac{S_3}{\delta_3} = \frac{S_2}{\delta_2},$$

snadnou úpravou pak dostaneme, že poměr obsahů prvního a druhého trojúhelníku je stejný jako poměr jejich defektů:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}.$$

Tím jsme ukázali tvrzení, že:

Tvrzení 8. *Obsahy dvou libovolných trojúhelníků jsou ve stejném poměru jako jejich defekty.*

Zároveň jsme ale (v předposlední rovnosti) ukázali i další tvrzení, které nám bude charakterizovat vztah obsahu a defektu trojúhelníku:

Tvrzení 9. *Poměr obsahu ku defektu trojúhelníku je konstanta nezávislá na volbě trojúhelníku.*

Pokud tuto konstantu označíme k^2 (tak je to zvykem, protože stejná konstanta k se vyskytuje i jinde v Lobačevského geometrii) a obsah trojúhelníku označíme S, můžeme stručně psát

$$\frac{S}{\delta} = k^2,$$
$$S = k^2\delta.$$

Označíme-li vnitřní úhly v trojúhelníku α, β a γ, můžeme defekt zapsat jako

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

náš výsledný vzoreček pro obsah trojúhelníku tedy bude:

$$S = k^2[\pi - (\alpha + \beta + \gamma)].$$

Nyní už si snadno promyslíme, že čím více se součet vnitřních úhlů v trojúhelníku blíží hranici π, tím víc se defekt blíží k 0, a tedy i obsah trojúhelníku se blíží 0. Naopak, čím více se součet vnitřních úhlů v trojúhelníku blíží 0, tím více se defekt blíží π a obsah se blíží hodnotě πk^2. Tuto hodnotu nikdy nepřekročí, potvrdili jsme tedy naši negaci, že neexistuje trojúhelník libovolné velikosti. My sice nevíme, kolik je přesně k^2, rozhodně však v Lobačevského geometrii neexistuje trojúhelník s obsahem větším než πk^2.

Dále z toho můžeme vyvodit to, že když trojúhelník zmenšujeme (jeho obsah „jde k 0“), součet jeho vnitřních úhlů se bude zvětšovat, a naopak, když trojúhelník zvětšujeme, součet jeho vnitřních úhlů se bude zmenšovat.

6. Modely Lobačevského geometrie

Teď si asi kladete otázku, jak si takové neintuitivní výsledky představit. Nejste první, kdo si takovou otázku položil. Pokud máme axiomatizovanou teorii, chceme si ji nějak *modelovat*, tedy chceme najít vhodné známé objekty, které nám budou reprezentovat objekty z nové teorie. Pro model Lobačevského geometrie budeme hledat geometrické objekty, které budou splňovat Hilbertovy axiomy incidence, uspořádání, shodnosti a spojitosti a negaci axiomu rovnoběžnosti.

Vřele doporučuji čtivý článek s názornými obrázky [Řeháček, 2022]. Věřím, že i když nebudete rozumět zmíněným vysokoškolským pojmům, přesto získáte alespoň nějakou názornou představu o Lobačevského geometrii. Jen pozor, článek hovoří i o *sférické geometrii.* V kapitole 2 jsme uvedli, že pro nás budou neeukleidovská a Lobačevského geometrie synonyma. Připustíme-li však i geometrie, které nejsou nadstavbou absolutní geometrie, zjistíme, že existují i další neeukleidovské geometrie.

Objevitelem další takové geometrie je Bernhard Riemann (1826–1866), významný německý matematik, žák C. F. Gausse. Krom jiných odvětví matematiky se věnoval i geometrii a podíval se na ni pohledem *diferenciální geometrie*, která je založená na *diferenciálním počtu*, který se na střední škole probírá nanejvýš tak ve výběrových seminářích, proto nebudeme zabíhat do žádných detailů. Důležité je, že pomocí diferenciální geometrie B. Riemann získal neeukleidovskou geometrii, kterou na jeho počest nazýváme *Riemannova geometrie.* Představit si ji můžeme jako geometrii na sféře (tedy na povrchu koule), přímky jsou zde reprezentovány hlavními kružnicemi (tj. kružnicemi se středem ve středu koule a poloměrem rovným poloměru koule).

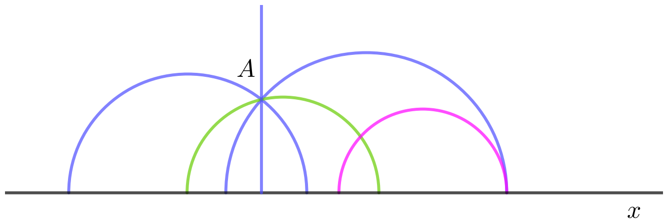
Proč jsme o ní neslyšeli už dříve? Právě proto, že Riemannova geometrie není budována jako nadstavba absolutní geometrie. Ale protože se opět jedná o geometrii, která není eukleidovská, bývají Lobačevského a Riemannova geometrie společně označované jako *neeukleidovské geometrie.*

Německý matematik Felix Klein (1849–1925) rozdělil geometrie dle součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku na tři typy [Hlavatý, 1926, str. 21]:

- *Parabolické geometrie*, kde mají trojúhelníky součet vnitřních úhlů 180°. Mezi ně se řadí i eukleidovská geometrie.
- *Hyperbolická geometrie*, kde mají trojúhelníky součet vnitřních úhlů menší než 180°, tedy je to jiný název pro Lobačevského geometrii.
- *Eliptická geometrie*, kde mají trojúhelníky součet vnitřních úhlů větší než 180°. Jedná se o jiný název pro Riemannovu geometrii.

Nyní už ale zpět k Lobačevského geometrii a jejím modelům. Dále mohu doporučit knihu Stavba Lobačevského planimetrie (Gatial a Hejný, 1969), která popisuje modely Lobačevského geometrie velice formálně, takže může být obtížná na čtení, ale neobsahuje vysokoškolské pojmy a navíc si pochopení můžete procvičit na řadě doprovodných příkladů.

Protože jen modely Lobačevského geometrie by vydaly na samostatnou publikaci, zmíním tu jen jeden, a to *Poincarého model poloroviny*. Lobačevského geometrie je geometrie v rovině. Tuto rovinu nám bude reprezentovat, jak název napovídá, polorovina nad souřadnicovou osou x bez této osy (tedy body s kladnou y-ovou souřadnicí). Body této poloroviny nám budou reprezentovat body z Lobačevského geometrie. Přímky z Lobačevského geometrie pak budeme reprezentovat kružnicemi se středem na ose x, případně přímkami kolmými k ose x (takovou přímku si můžeme představit také jako kružnici se středem na ose x, jen s nekonečným poloměrem). Uvažujeme ovšem jen ty části kružnic, které leží nad osou x. Příklad přímek můžete vidět na obrázku 6.1.



Obrázek 6.1: Příklad přímek v Poincarého modelu poloroviny.

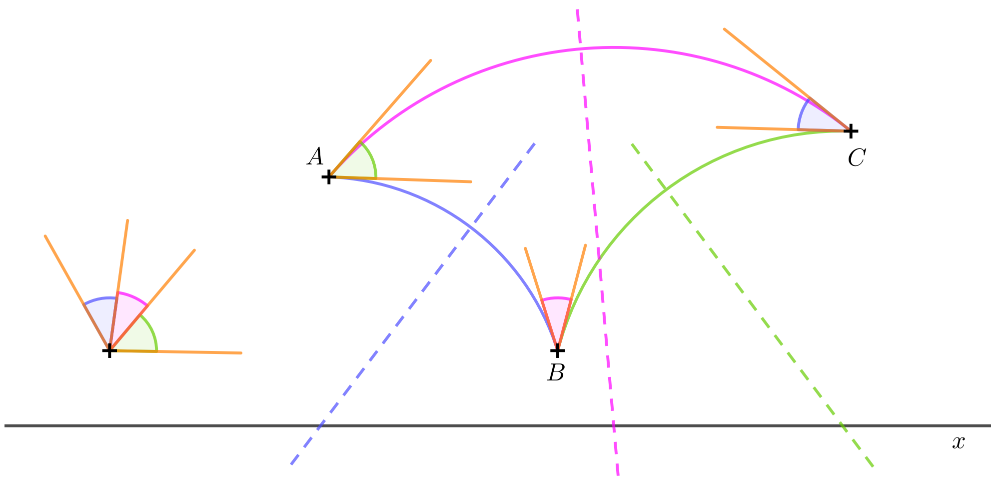
Modře a zeleně jsou znázorněné přímky, které prochází bodem A, naopak růžová přímka bodem A neprochází. Zelená a růžová přímka mají společný bod, jsou tedy různoběžné. Naopak žádná z modrých přímek s růžovou přímkou společný bod nemá, takže jsou podle definice 1 rovnoběžné. Ano, úplně vpravo má modrá půlkružnice společný bod s růžovou půlkružnicí na ose x, ale připomeňme, že osa x už není součástí modelu roviny, tedy i tato přímka je s danou přímkou rovnoběžná. Přesto můžeme mít pocit, že je tato rovnoběžka jakýmsi způsobem speciální, že se jedná o „hraniční rovnoběžku", což je něco, co v eukleidovské geometrii nemáme. V Lobačevského geometrii však lze rozlišit dva typy rovnoběžek: *souběžky* a *rozběžky*. Souběžky jsou právě tyto hraniční případy rovnoběžek, které v Poincarého modelu poloroviny reprezentují kružnice, které mají společný bod pouze na ose x. Ostatní rovnoběžky pak nazýváme rozběžky. [Křížová, 2008]

Tím jsme ukázali, že v tomto modelu platí, že k přímce lze bodem A, který na ní neleží, vést více než jednu rovnoběžku.

Pojďme si ještě ukázat, jak vypadá v tomto modelu trojúhelník. Zvolme libovolné tři různé body a nyní chceme každé dva spojit úsečkou. Tu nám bude představovat část oblouku kružnice opět se středem na ose x.

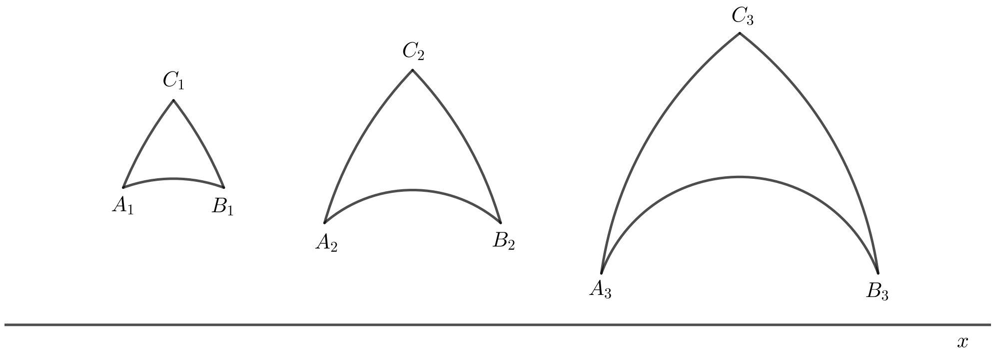
Jak sestrojit kružnici, která má střed na dané přímce a má procházet dvěma danými body? Připomínám, že teď se jedná o běžnou konstrukci v eukleidovské geometrii. Kružnici už sestrojíme snadno, pokud známe její střed. Střed je takový bod, který má od všech bodů kružnice stejnou vzdálenost. Musí být tedy stejně vzdálen i od našich dvou daných bodů, označme je A a B. Co tvoří množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných bodů A a B? Osu úsečky AB. Střed kružnice tedy bude průsečík osy x a osy úsečky AB. Pokud budeme analogicky postupovat i pro zbylé dvojice bodů, získáme trojúhelník, viz obrázek 6.2.

Jaký je součet jeho vnitřních úhlů? Úhel, který svírají dvě kružnice, určíme jako úhel jejich tečen ve společném bodě. Tyto tečny jsou naznačeny oranžově. Nalevo můžeme vidět, že součet vnitřních úhlů v tomto konkrétním trojúhelníku je menší než 180°, což souhlasí s tím, co jsme si o Lobačevského geometrii odvodili.



Obrázek 6.2: Trojúhelník a jeho součet vnitřních úhlů v Poincarého modelu.

Dále jsme si v minulé kapitole odvodili, že zvětšováním trojúhelníku se zmenšuje součet jeho vnitřních úhlů, a naopak zmenšováním hodnota součtu roste až k hranici 180°, které však nedosáhne. Jak se to projevuje v Poincarého modelu, si můžeme prohlédnout na obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Trojúhelníky v Poincarého modelu poloroviny.

O obsahu trojúhelníku jsme dále říkali, že existuje nějaká hranice, přes kterou se nedostane. Z obrázku 6.3 si můžeme zkusit odvodit intuitivní odůvodnění, proč to v Poincarého modelu poloroviny platí. Zvětšením trojúhelníku se zvětší i jeho obsah. Zároveň se ale zmenší součet velikostí vnitřních úhlů a tudíž bude trojúhelník „víc vykousnutý“. A čím bude větší, tím bude mít menší součet vnitřních úhlů a tím bude víc „vykousnutý“. Obsah tedy bude stále růst, ale kvůli „vykousnutí“ se bude zvětšovat méně a méně. Tedy čím blíže bude součet vnitřních úhlů k nule, tím bližší nule bude i přírůstek obsahu.

Seznam použité literatury

Drábek, J. a Šilarová, M. (2001). *Kategorie pravdy v matematice.* První vydání. Pedagogické centrum Plzeň, Plzeň. ISBN 80-7020-095-2.

Gatial, J. a Hejný, M. (1969). *Stavba Lobačevského planimetrie.* Mladá fronta, Praha.

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry.* reprint edition. Open Court Publishing Company, LaSalle, Illinois.

Hlavatý, V. (1926). *Úvod do neeukleidovské geometrie.* Jednota československých matematiků a fysiků, Praha.

Kutuzov, B. V. (1953). *Lobačevského geometrie a elementy základů geometrie.* První vydání. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha.

Křížová, K. (2008). Neeuklidovská geometrie. Bakalářská práce. Dostupné z `https://is.muni.cz/th/175713/prif_b/bp.pdf`. [Online; navštíveno 16. 7. 2023].

Pavlíček, J. B. (1953). *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha.

Servít, F. (1907). *Eukleidovy Základy.* JČMF, Praha.

Smith, D. E. (1984). *A Source Book in Mathematics.* Dover; Illustrated edition. ISBN 978-0486646909.

Tihlaříková, M. (2010). History of applications of hyperbolic geometry. Diplomová práce. Dostupné z `https://is.muni.cz/th/gp6aa/disertace.pdf`. [Online; navštíveno 16. 7. 2023].

Vopěnka, P. (2003). *Trýznivé tajemství.* První vydání. Práh, Praha. ISBN 80-7252-088-1.

Wikipedia contributors (2023). Parallel postulate — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Parallel_postulate&oldid=1118333542`. [Online; navštíveno 28. 4. 2023].

Řeháček, J. (2022). Matykání: Neeukleidovské modelky. `https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-neeukleidovske-modelky`. [Online; navštíveno 8. 7. 2023].

Šír, Z. (2011). *Řecké matematické texty.* První vydání. OIKOYMENH, Praha. ISBN 978-80-7298-308-7.