Posudek oponenta na bakalářskou práci
Autor: Matyáš Valkoun
Název práce: *Ekvidekomposabilita*

Bakalářská práce studenta Matyáše Valkouna se zabývá tzv. stejnou rozložitelností mnohoúhelníků v rovině. Jednoduše řečeno, dva mnohoúhelníky jsou stejně rozložitelné, jestliže jeden z nich lze rozstříhat na menší mnohoúhelníky, jejichž přeskládáním (bez překryvů) vznikne mnohoúhelník druhý. Je známo, že dva mnohoúhelníky jsou v tomto vztahu, právě když mají stejný obsah; to je tvrzení tzv. Wallace-Bolyai-Gerwienovy věty, která je hlavním tématem práce.

Práce je rozdělena do tří kapitol. Stručná první kapitola uvádí základní pojmy včetně axiomatické definice obsahu. Ve druhé kapitole je vysvětlena a z větší části dokázána Wallace-Bolyai-Gerwienova věta. Je toho docíleno pomocí explicitních synteticky geometrických popisů některých potřebných pomocných rozkladů; kapitola dále obsahuje několik dalších rozkladů, které pro důkaz věty nejsou potřebné. Závěrečná třetí kapitola čtenáře velmi stručně seznamuje s ideou důkazu skutečnosti, že analogické tvrzení v dimenzi 3 neplatí.

Po formální stránce je práce v pořádku. Až na několik drobných chyb je práce psána dobrou češtinou, štábní kultura je bezvadná, práce je kvalitně vysázena v LaTeXu a obsahuje řadu pěkných a přehledných obrázků. Citace jsou také v pořádku. Trochu mi chybí popis cílové skupiny čtenářů, ale u tohoto tématu to asi není nutné; nicméně i z tohoto aspektu odvozuji, že práce nemá ambici být prací didaktickou v užším slova smyslu (v širším smyslu je téměř každá práce didaktická, neboť se snaží něco vysvětlit, předat). Není-li práce zaměřena didakticky, je ovšem potřeba její přidanou hodnotu hledat jinde: konkrétně v jejím matematickém obsahu. S tím souvisí další odstavec.

Práce je vcelku stručná a ačkoliv svým rozsahem odpovídá požadavkům kladeným na bakalářskou práci, matematika v ní zkompilovaná je jednoduchá a obsahuje mnoho slovních komentářů a obrázků. Je proto škoda, že ani ono lehké téma není v práci dotaženo do konce, což je moje hlavní výtka: zejména *chybí klíčový důkaz tranzitivity* relace stejné rozložitelnosti. Ten sice není *úplně* triviální, práce by ho však snadno unesla; v každém případě je lehké ho aspoň neformálně vysvětlit. Těžko se mi hledají rozumné důvody pro toto zanechání práce v neuceleném stavu.

Další komentáře: Autor by se při obhajobě měl stručně vyjádřit k připomínkám označeným „■“.

- V celé práci (kromě seznamu literatury) je chybně uvedeno jméno jednoho ze tří autorů hlavního výsledku: správně je „Gerwien“.

- Téměř v celé práci se znovu a znovu omílá, že pracujeme s objekty v rovině ρ. Je to poněkud rušivé. Například formulace Vět 1 a 2 explicitně zmiňují, že hovoří o mnohoúhelnících v rovině ρ, přitom o žádných jiných mnohoúhelnících se v práci nemluví (s výjimkou neformální a krátké Kapitoly 3). Že je jakýkoliv mnohoúhelník obsažen v rovině ρ, navíc plyne už ze samotné jeho definice (Def. 1.1.4).

- V práci chybí čárky před „a tak“, „a proto“ nebo „a protože“ – zejména v těch případech, kdy jsou obě slova od sebe oddělená. Například na čtyřech řádcích pod Obr. 1.2 jsou hned dva takové případy chybějící čárky. Naopak v práci často přebývají čárky před „nebo“, „či“ apod.

- Definice 1.1.2 zavádí *sebeneprotínající se lomenou čáru.* Jako matematik a současně člověk, který má rád svou řeč, se nemohu proti tomuto termínu nevzbouřit. Je běžné lomenou čáru považovat za křivku, a u křivek se běžně používá termín „prostá“. Pokud se z nějakého důvodu chceme tomuto termínu vyhnout (nevím proč bychom měli), pak určitě ne „sebeneprotínající se“, ale aspoň „neprotínající se“, popř. „sebeneprotínající“ (v posledním případě tedy bez onoho redundantního „se“).

- Nad Definicí 1.1.1 a dále též na str. 5 se píše o *jednoduché souvislosti*, která nikde není nijak přiblížena; vzhledem k celkové elementární úrovni, na které je práce psána (což samo o sobě není problém), bych čekal, že tento termín bude aspoň stručně představen, popř. nahrazen neformálním slovním opisem. Zejména to působí zvláštně pod definicí mnohoúhelníku 1.1.4, kde se píše „Tak jak jsme si přáli, každý mnohoúhelník zavedený v definici výše tvoří jednoduše souvislou množinu.“

- ■ Předposlední bod na str. 5, tedy definice vnitřního úhlu, je matoucí. Uvedené vyjádření se zdá naznačovat, že značení $\sphericalangle ABC$ nemá jasně definovaný význam. Soudím tak z toho, že se autor úhly, které by značením měly být jasně určené, snaží dále specifikovat. Problém je tedy v tom, že ono značení patrně podle autora není jednoznačné, může označovat dva různé úhly. Měla být zavedena jasná konvence.

  Dále, a to je důležitější, i pokud se smíříme s výše zmíněnou nejednoznačností symbolu úhlu, definice vnitřního úhlu v práci je patrně chybná. Snadno si lze představit nekonvexní mnohoúhelník, jehož některý vnější úhel splňuje definici vnitřního úhlu uvedenou v práci.

- V Definici 1.1.5 je zavedeno značení $d(X, Y)$ pro vzdálenost dvou bodů roviny X a Y, ovšem hned následující poznámka toto značení ruší a nahrazuje ho symbolem $|XY|$. Asi by bylo přehlednější v definici rovnou použít značení dále používané v práci.

- V Definici 1.1.6 je nevhodná závorka „(nebo naopak obrazem U' je právě U)“. Definici je správné zformulovat pouze jednosměrně (a jednoznačně tak, aby bylo naprosto jasné, co k definici patří a co ne). Posléze je možné učinit triviální pozorování, že jde o symetrickou relaci (pomocí inverzního zobrazení – což v práci není nikde zmíněno).

- Pod Definicí 1.1.6 se píše, že shodné mnohoúhelníky se liší svým *umístěním*. To ale nemusí být pravda: ve formulaci patrně chybí slovo „různé“. Dále mi není příliš jasné, co autor myslí slovem „umístění“; píše se zde totiž, že se dva různé shodné mnohoúhelníky liší ***pouze*** svým umístěním. Já ovšem mohu jmenovat řadu věcí v nichž se mohou lišit: například můžeme najít přímku, kterou jeden z nich protíná a druhý ne, popř. ji protínají oba, ale pouze jeden z obou průniků je nekonečný atd., dále se liší třeba souřadnicemi vrcholů. Jsou tedy všechny podobné výpovědi součástí obsahu tajemného slova „umístění“?

  Dále se zde píše, že „Otočený, posunutý či „překlopený“ n-úhelník je shodný.“ A já se ptám: s čím je shodný? Shodnost je relace dvou objektů, žádný objekt tedy není shodný sám o sobě.

  Samozřejmě v zásadě ta vyjádření chápu, snažím se zde ale poukázat na jejich nepřesnost. Kde je to možné, autor by se měl vyjadřovat přesně.

- Ve druhém odstavci na str. 7 se píše o axiomech shodnosti. Ty však nebyly nikde zmíněny, naopak shodnost je definována pomocí jediného výroku. Není mi tedy jasné, co zde autor myslí.

- V posledním odstavci na str. 7 se píše, že „Mnohoúhelníky, které mají společný vrchol nebo mají společné části svých obvodů [...] definici [nepřekrývajících se mnohoúhelníků] též vyhovují.“ Jistě není třeba dlouze vysvětlovat, že toto není pravda; měla být zvolena jiná formulace. V matematické práci je potřeba klást větší důraz na přesnost.

- Definice 1.2.2 nedává jednoznačný pojem obsahu, jak se píše hned v první odrážce pod definicí. Vzhledem k tomu, že v rovině uvažujeme (eukleidovskou) vzdálenost, nic nám nebrání v bodě (iii) definice za E vzít přímo čtverec o délce strany 1. V ten moment už bude definice jednoznačná a bude zbytečné se zmiňovat o relativitě obsahu (čtvrtá odrážka pod definicí). Ta je sice zajímavá v momentě, kdy rovinu nechápeme jako $\mathbb{R}^2$ a není v ní dáno měřítko, s obsahem této práce však takové úvahy zřejmě nesouvisí.

Dále se ve třetí odrážce pod definicí píše, že hodnota obsahu může být i nula. To ale podle definic zavedených v této práci není pravda, obsah má pouze kladné hodnoty.

- Na str. 9 nad Definicí 1.3.1 je potřeba vypustit „jsou po dvou disjunktní“. Jakmile jsou totiž dva mnohoúhelníky disjunktní, platí to i pro jejich hranici, nemohou mít tedy společný ani jeden vrchol, tím méně část obvodu atd.
- Nad Definicí 1.3.2 se píše, že „být ekvidekomposabilní znamená mít společný rozklad“. To ovšem a priori není pravda. Pokud se předem nedomluvíme, že „mít společný rozklad“ znamená přesně „být ekvidekomposabilní“, pak je potřeba k tomu slovnímu spojení přistupovat skrze běžné významy slov; pojďme to tedy zkusit: Mají-li dva mnohoúhelníky *společný rozklad*, pak tedy existuje *jeden* rozklad, který je současně rozkladem jednoho i druhého mnohoúhelníku. Ovšem rozklad je podle definice prostě několik konkrétních mnohoúhelníků (nikoliv „modulo shodnost“), takže jediný možný závěr je, že oba rozkládané mnohoúhelníky jsou ve skutečnosti identické (tj. nikoliv pouze shodné, tím méně pouze shodně rozložitelné). A priori je tedy „mít společný rozklad“ stejná relace jako identita. Nic nám samozřejmě nebrání se dohodnout, že tím (vcelku přirozeným) slovním spojením budeme myslet něco jiného, taková dohoda však v práci chybí.
- Nechápu první větu na str. 10. S čím je ekvidekomposabilní?
- Proč chybí důkazy reflexivity a symetrie? (K chybějícímu důkazu tranzitivity se vyjadřuji výše.)
- Na samém začátku oddílu „Stejný obsah ekvidekomposabilních mnohoúhelníků“ na str. 11 postrádám odkaz na Větu 1.
- Str. 13, konec prvního odstavce: „se tak *stanou* ekvivalentními“ – podle mě už ekvivalentní jsou, bez ohledu na to co, kdy a jak dokážeme.
- Str. 15 dole: definice výšky je špatně pro tupoúhlý trojúhelník. V takovém případě navíc není správně ani závorka definující délku výšky (vzdálenost některých vrcholů od protilehlých stran je v tupoúhlém trojúhelníku větší než příslušná výška).

■ Předpoklad Lemmatu 2 má být asi $2|AB| \geqslant |EF| \geqslant |AB|$. Důkaz lemmatu navíc ani slovem tento předpoklad nezmiňuje.

■ Důkaz Lemmatu 3: opět má přehozené role úseček AB a EF ve všech nerovnostech. Kromě toho bych poznamenal, že je zbytečné řešit zvlášť případ (i), tam totiž stačí, aby si oba obdélníky vyměnily své role. BÚNO tedy můžeme předpokládat, že $|EF| > |AB|$. Situace, kdy $2|AB| \geqslant |EF|$ je postižena Lemmatem 2, jediný zbylý případ je tedy $2|AB| < |EF|$

■ Na předposledním řádku důkazu Důsledku 2.1 je shodná rozložitelnost shodných mnohoúhelníků zdůvodněna reflexivitou ekvidekomposability. To je chybné zdůvodnění ve všech případech, kdy ony shodné mnohoúhelníky nejsou navíc totožné. Nejsou-li totožné, existuje nějaká netriviální shodnost P, která zobrazuje jeden na druhý. S její pomocí okamžitě ukážeme ekvidekomposabilitu obou mnohoúhelníků, protože k jejímu důkazu stačí jediný dílek a shodnost P. Toto nicméně není reflexivita; definice reflexivity je, že každý element je v relaci sám se sebou – ovšem shodné objekty nejsou nutně identické. Stejná chyba se vyskytuje i v důkazu samotné Wallace-Bolyai-Gerwienovy věty.

V této souvislosti chci ještě zmínit, že kromě tranzitivity se v důkazech samozřejmě opakovaně používá také *symetrie* ekvidekomposability. Autor to však (narozdíl od triviální a chybně interpretované reflexivity) nikde nezmiňuje, a působí to tedy dojmem, že si toho nevšiml.

- Důkaz Věty 3 o triangulaci mnohoúhelníků mi připadá (i) poněkud zmatený a hlavně (ii) neúplný. Ad (i), osobně to vidím tak, že stačí najít jedinou úhlopříčku, která leží uvnitř našeho mnohoúhelníku. Ta ho rozdělí na dva menší, na něž mohu aplikovat indukční předpoklad. Ad (ii), právě tato klíčová část, tj. existence aspoň jedné úhlopříčky, která je celá obsažena v mnohoúhelníku, není podle mě pořádně vysvětlená. V důkazu se vyjmenují tři možné případy a), b), c); hned po tomto výpisu se uvádí, že za jistých okolností, totiž nastane-li případ c), můžeme najít jinou úhlopříčku, pro niž nastane a) nebo b). Rád bych znal zdůvodnění tohoto tvrzení, o jehož pravdivosti sice nepochybuji, ale důkaz (bez nějaké formy kruhové argumentace) mě v rychlosti nenapadl.

- Není mi příliš jasný význam Sekce 2.4. Na první pohled to vypadá prostě jako bonusové konstrukce pro zajímavost. Wallace-Bolyai-Gerwienova věta totiž okamžitě implikuje všechna tvrzení v této sekci.

  Po hlubším zamyšlení může čtenáře napadnout, že ve světě syntetické geometrie (který ovšem nebyl autorem jmenován jako rámec pro zdejší úvahy) nemusí být snadné (ani možné) zkonstruovat čtverec daného obsahu, ani spočíst obsah daného mnohoúhelníku. Samozřejmě, pokud jsme oprávněni nakreslit úsečku libovolné reálné délky, tento problém mizí. Nebo snad tyto věci nějak souvisí s axiomatickým zavedením obsahu z Definice 1.2.2? Rád bych k tomu slyšel nějaké vysvětlení.

  Vůbec už nechápu Důsledek 3.2, k jehož důkazu stejně používáme podstatnou část W.-B.-G. věty (tj. Důsledek 3.1), ovšem pouze jednou místo dvakrát, jako v důkazu věty samotné. Používáme i tranzitivitu. Takže všechny těžké věci zde stejně použijeme, a důkaz tedy není v důsledku o nic jednodušší než důkaz samotné WBG věty. Proč tedy tuto hlavní větu neaplikovat rovnou?

- Důsledek 3.3: plurál od „jenž“ (neživotný mužský rod) je „jež“ (v životném případě „již“).

- Důsledek 3.3: zde už je v předpokladech dáno, že oba trojúhelníky mají stejný obsah. Tím pádem je WBG věta podle mě aplikovatelná už bez námitek.

- Důsledek 3.4: Důkaz je zde naznačen pouze pro konvexní mnohoúhelník; není vysvětleno, jak by se mělo postupovat v nekonvexním případě, přičemž lze čekat, že to bude složitější. Tvrzení ostatně plyne z WBG věty. Chceme-li se vyhnout použití hlavní věty, lze toto tvrzení snadno odvodit také z Důsledku 3.2.

- Poznámka na str. 27: „exhaustační“ zní poněkud zvláštně, setkal jsem se pouze s výrazem „exhaustivní“.

- Str. 28 nahoře: když takovýto vzorec uvádíme explicitně (nic proti tomu), je vhodné lépe okomentovat, odkud se vzal. Minimálně by bylo hezké zmínit, jaké konkrétní mnohostěny se používají k vyčerpávání našeho jehlanu.

- Str. 29: samozřejmě chápu, že jde pouze o náznak, ale nebylo by špatné v definici operace na G zmínit také případ, kdy se oba sčítance liší v obou složkách.

Závěr: Práce pana Valkouna splňuje požadavky kladené na bakalářskou práci a má navíc některé přednosti, o nichž jsem se zmínil, zejména pěknou úpravu a celkovou úroveň textu. Její matematický obsah ovšem není nijak komplikovaný, přičemž trpí řadou drobných i méně drobných nedostatků (chybné či nejasné formulace, drobné matematické chyby, občas zvláštní struktura) a hlavně je zcela zbytečně nedotažený (absence důkazu tranzitivity relace ekvidekomposability). Vzhledem k tomu, že práce v podstatě není didakticky zaměřená, čekal bych více matematiky. Bude tedy záležet na průběhu obhajoby, jestli se přikloním k hodnocení *dobře*, nebo *velmi dobře*.

Oponent
Martin Rmoutil