Oponentský posudek bakalářské práce
Název: *Pojem interpretace axiomatických teorií*
Autor: Jan Štefanišin
Obor: Logika, FF UK

Obsah. Práce se týká pojmu interpretace teorií. Autor pracuje s různorodými zdroji, vč. klasických [TMR53]. Příklady zkoumaných teorií pocházejí hlavně z fragmentů teorie PA či obecněji z teorií využívajících jazyk aritmetiky. Autor se hlásí ke zkoumání primárních pramenů a rekonstrukci tvůrčích záměrů, vzájemných vlivů apod., což je cenný protipól technické práce v logice.

První kapitola přináší motivační příklady, zavádí pojmy interpretace a interpretovatelnosti teorií, ukazuje, že interpretovatelnost je reflexivní a tranzitivní (1.5), že implikuje relativní bezespornost (1.6) a přenáší podstatnou nerozhodnutelnost (1.8).

Druhá kapitola se týká interpretovatelnosti ve slabé aritmetické teorii R, která je podstatně nerozhodnutelná. Text je přehledem interpretací různých variant teorie R. Autor čerpá z článku [JS83], ovšem s přihlédnutím k dalším pracem. Text kapitoly je uveden historickým exkurzem k pracem Tarského, Mostowského a Robinsona [TMR53], Julie Robinson [Rob49] a dalších autorů, osvětlujícím význam diskutovaných výsledků.

Kapitola 3 spěje k prezentaci důkazu lokální interpretace teorie $I\Delta_0$ v Q (3.12), což je výsledek [HP93]. Začátek kapitoly se však vrací k počátkům omezené aritmetiky, tj. Nelsonově [Nel86], a k její Pudlákově recenzi. Autorův důkaz využívá mezikrok přes teorii Q^+. Je vypracován důkaz řezové interpretace Q^+ v Q s přispěním předchozích písemných poznámek vedoucího práce. Obsahem sekce 3.3, tvořící jádro autorovy samostatné práce, je tedy konstrukce řezu jistých vlastností, včetně aplikace Solovayova postupu k dosažení uzavřenosti na aritmetické operace. Sekce 3.4 pak obsahuje kýžený důkaz z [HP93].

Kapitola 4 předkládá metodu (4.6) prokázání neinterpretovatelnosti, na základě knihy [Šve02] vč. cvičení v ní uvedených. Konkrétně se dokazuje, že teorie diskrétního uspořádání DO není interpretovatelná v teorii následníka (příklad 4.7) ani v teorii celočíselného sčítání, zavedené v této kapitole (příklad 4.9).

Autor také upozorňuje na chybu v jednom z cvičení ve [Šve02] (pozn. pod čarou s. 7).

Hodnocení. Předloženou práci považuji za přiměřeně obsáhlou, odpovídající zadání a celkem čtivě zpracovanou. Oceňuji jak vlastní formální práci autora v dokazování jednotlivých kroků v obsáhlejších důkazech, zejména v kapitole 3, tak srozumitelný přehled, který vytvořil s přihlédnutím k mnoha různým zdrojům. Nedostatky, pokud vím, jsou spíše drobnějšího rázu vůči celkovému rozsahu a vyznění. Několik jich uvádím níže na s. 2.

Práci *doporučuji k obhájení*. Předběžně navrhuji hodnocení známkou 1 nebo 2.

29. 8. 2023 v Praze
RNDr. Zuzana Haniková, Ph.D.
Ústav informatiky AV ČR, v.v.i.

Vybrané připomínky:

1. Nejspíš nerozumím autorově komentáři k využití interpretovatelnosti jako “možnosti srovnávat teorie jinak než pouhou relativní konzistencí”, v úvodu a znovu na s. 7. Věta 1.6 naopak tyto dva možné vztahy mezi teoriemi dává do souvislosti a autor v komentáři k ní i zmiňuje, že “spolu interpretovatelnost a relativní konzistence úzce souvisí”. Bylo by tedy zajímavé vědět, co se míní slovem “jinak”.

2. S. 9: s poznámkou “část ... důkazu využívá předpoklad, že obor interpretace není prázdný, vidíme tedy, že tento předpoklad je nezbytný, aby interpretace přenášely bezespornost a chovaly se jako uspořádání” asi nelze úplně souhlasit. Předpoklad je nezbytný pro důkaz tak, jak byl proveden. Odůvodnit, že se bez nich neobejdou ani případné jiné důkazy daných tvrzení, by mohlo vyžadovat další argument.

3. S. 13 a následující: nezdá se mi použití $\leq$ a $\leq'$. V zápisu interpretace R v R_0 na předposledním řádku důkazu věty 2.1 má být nejspíš $\leq'$ (odhlížím od toho, že tento zápis typově neodpovídá autorově definici interpretace). Navíc, co je $\leq'$ na s. 14 v zápisu “$\leq'$ je primitivní konstanta”? Tento symbol se jinak ve znění věty ani důkazu neobjevuje.

4. Důkaz věty 4.2 byl patrně proveden pouze pro verzi bez parametrů, oproti její obecnějšímu formulaci. Podstatnější připomínku k počtu proměnných mám k formulaci na s. 29 o důsledcích eliminovatelnosti kvantifikátorů. S. 25 uvádí “Teorie SUCC dovoluje eliminaci kvantifikátorů. Pro každou formuli v jejím jazyce existuje formule ekvivalentní, která neobsahuje žádné kvantifikátory.” Taková definice připouští, že “ekvivalentní” formule má odlišný počet proměnných. Pak by ovšem “ekvivalentní” formule bez kvantifikátorů na str. 29 by nemusela definovat množinu, jak se tvrdí, ale (jen obecněji) relaci.

5. Překlepy a drobnosti:
- s. 4 ‘$x < z$’ má být ‘$x < y$’
- s. 9 ‘specifikace axiomu’ má být ‘axiom specifikace’
- s. 10 ‘Nechť T a S jsou obě teorie’ lépe ‘Nechť T a S jsou teorie’
- s. 10 pozn. pod čarou, vhodné připojit k *prvnímu* výskytu termínu
- s. 11 ‘Tarskéhojeho’; navíc chybí citace Tarského prací s uvedenými výsledky
- s. 16 ‘nepredikavistů’
- s. 16 ‘definice kvantifikuje přes všechny formule’ žádné formule, ani kvantifikaci přes ně, nevidím
- s. 17 ‘když tuto teorii o schéma indukce’; ‘důkaz toho to lze najít’; ‘podle tohoto autorů článku’
- s. 24 $[b, x] \in R$ má být $<$
- s. 25 dole – opravdu se v termu mohou vyskytovat logické spojky?
- s. 26 počet výskytů konstanty 0 na jeden – lze se jí zbavit úplně?
- s. 29 ‘v příkladu 4.6’ má být ‘4.7’

Aniž to má vliv na hodnocení práce, autor se mohl též pokusit zodpovědět přirozenou otázku, zda lze interpretovat Q v R. To např. vzhledem k Nelsonově programu: bylo by možné volit jako výchozí teorii R namísto Q? Zdá se mi, že k tomu i je v práci potřebný aparát.