Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Číslo jako veličina v prostředí Vláčky v 1. a 2. ročníku ZŠ

Number as a quantity in the environment of Vláčky in the 1st and 2nd year of elementary school

Ing. Iveta Nachtmannová

Vedoucí práce:	PhDr. Jana Slezáková, Ph. D.
Studijní program:	Učitelství pro základní školy
Studijní obor:	Učitelství pro 1. stupeň

2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Číslo jako veličina v prostředí Vláčky v 1. a 2. ročníku ZŠ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

29. 11. 2023

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala své vedoucí práce, paní PhDr. Jana Slezáková, Ph. D., a to za poskytnutí konzultací a odborného vedení v průběhu zpracovávání mé diplomové práce. Dále bych také ráda poděkovala svým nejbližším, kteří mi byli oporou po celou dobu studia.

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zaměřuje na úlohy z prostředí Vláčky, jakožto jedno z izolovaných prostředí v matematice prvního stupně základních škol vyučované podle rozpracované metodiky pana prof. RNDr. Milana Hejného, CSc.. V teoretické části diplomové práce jsou objasněny principy a pojetí Hejného metodiky, důležitost izolovaných prostředí v průběhu budování představ přirozeného čísla u dětí v 1. a |2. ročníku základní školy, je vyzdviženo prostředí Vláčky jako propedeutické prostředí podstatné pro další vzdělávání dle této metody a seznamuje s manipulativní pomůckou pro toto prostředí nezbytnou, s Cuisenairovými hranoly. V teoretické části vysvětleno, které úlohy slouží k zavedení prostředí do vyučování, jsou zde objasněny důležité pojmy tohoto prostředí, popsány jednotlivé typy úloh a jejich gradace, návaznost tohoto prostředí na 3. až 5. ročník ZŠ, a v neposlední řadě jsou zde shromážděny podobné úlohy z různých pracovních sešitů, které se výše uvedenou metodikou nezabývají. Cílem praktické části bylo ověření srozumitelnosti formulací v zadání, prozkoumání žákovských řešitelských strategií a potíží, které se při řešení úloh mohou vyskytnout. Součástí praktické části diplomové práce jsou rovněž popsané vybrané typy úloh, rozbor žákovských řešitelských strategií, snaha o objasnění vzniklých obtíží a nejasností při jejich řešení, a to vše zdokumentované pomocí fotografií. Dále jsou k teoretické části připojeny přílohy, které obsahují pracovní listy předložené dětem. První pracovní list byl zadán v rámci předexperimentu, další dva pracovní listy byly po úpravách zadány v rámci realizace experimentu. Tato diplomová práce by mohla být jedním z mnoha druhů materiálů, které pomáhají učitelům při realizaci jejich hodin matematiky, bez ohledu na jimi využívanou metodou. I v případě, že se jejich metoda liší od metody popsané v této diplomové práci, mohou jednotlivé úlohy sloužit ke zpestření výuky, popř. rychlejším žákům.

KLÍČOVÁ SLOVA

Prostředí Vláčky, Cuisenairovy hranoly, gradované úlohy, řešitelské strategie, izomorfní prostředí.

ABSTRACT

This thesis focuses on the tasks from the environment Vláčky, as one of the isolated environments in the first grade mathematics of primary schools taught according to the elaborated methodology of prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.. The theoretical part of the thesis explains the principles and concepts of Milan's methodology, the importance of isolated environments in the process of building the ideas of natural number in children in the 1st and 2nd year of primary school, highlights the environment Vláčky as a propaedeutic environment essential for further education according to this method and introduces the manipulative aid necessary for this environment, the Cuisenaire prisms. The theoretical part explains which tasks are used to introduce the environment into the classroom, explains the important concepts of this environment, describes the different types of tasks and their gradations, the relation of this environment to the 3rd to 5th year of primary school, and last but not least, similar tasks from different workbooks that do not deal with the above methodology are collected here. The goal of the practical part was to check the clarity of the formulations in the assignment, to investigate the students' solving strategies and the difficulties that may occur when solving the problems. The practical part of the thesis also includes a description of selected types of problems, an analysis of students' solving strategies, and an attempt to clarify difficulties and ambiguities encountered in solving the problems, all of which documented by photographs. There are also attachments attached to the theoretical part, which contain worksheets presented to the children. The first work sheet was assigned as a part of a pre-experiment, two more work sheets were assigned as a part of the realization of the experiment, after a few adjustments. This thesis could be one of many types of materials that help teachers in realizations of their mathematics lessons, regardless of the method they use. Even if their method differs from the one described in this thesis, individual tasks can be used to make the lessons more varied or to help students learn faster.

KEYWORDS

environment Vláčky, Cuisenaire prisms, graded tasks, problém solving strategies, isomorphic environment.

Obsah

Úvod

Při studiu na Pedagogické fakultě Karlovy Univerzity v Praze jsem se v rámci předmětů matematiky v oboru Učitelství na 1. stupni prvně seznámila s prostředími Hejného metody jakožto způsobu vyučování matematiky, která mě příjemně překvapila. Prostředí na mě působila velice atraktivně a zábavně, využívala hravou formu, vzbuzovala můj zájem a touhu se jimi zabývat. Nabízela možnost úlohy gradovat dle úrovně žáků, přinášet vhled a hlubší porozumění do jednotlivých typů úloh, možnost náhledu z různých úhlů pohledu na jednotlivé matematické situace, rozvoj matematického myšlení, tvořila propedeutiku pojmů, procesů i vztahů, se kterými se děti setkávají ve formální podobě až ve vyšších ročnících, snažila se předcházet formalizmu, respektovat učení pomocí více smyslů, vycházet ze životních zkušeností dětí, která jsou jim blízká a tudíž lépe uchopitelná.

Proto, když se mi naskytla možnost prozkoumat jedno z těchto prostředí do větší hloubky, neváhala jsem ani chviličku.

Naše škola patří ke školám s tradiční výukou, pouze v 1. a 2. ročnících se většina vyučujících snaží o hravější podání výuky a o zapojení více smyslů při ní. V dalších ročnících je tento přístup bohužel ojedinělý, a na druhém stupni zcela výjimečný. To, dle mého názoru a dosavadních zkušeností, bohužel vede k formálním znalostem v matematice, uchopení matematiky pouze pamětí bez hlubšího porozumění a následné nízké úrovni nabyté matematické dovednosti aplikovat a propojovat. Také to má za následek fakt, že většina žáků mnoho nabytých matematických znalostí a dovedností opětovně zapomene, a vyučující musí být připraven, že téměř vše je potřeba znovu vysvětlovat (a to obzvláště po prázdninách) a neustále procvičovat.

Dalším důvodem mého zájmu bylo i to, že Vláčky jsou jedním z mála prostředí, které v sobě spojuje číslo jako veličinu, zde konkrétně se jedná o délku, a zároveň číslo jako počet. Takovýchto prostředí v tradičním pojetí matematiky moc nenajdeme, a to i přesto, že slouží jako propedeutika k abstraktním matematickým zápisům, které se začínají objevovat již na 1. stupni ZŠ a pracuje se s nimi v matematice i ve vyšších ročnících. Prostředí Vláčky nabízejí možnosti prolínání s dalšími prostředími, a také slibují velké množství typů úloh, ke kterým je lze v matematickém prostředí využít, a to i ve vyšších ročních na 1. stupni základní školy.

Já jsem se v této diplomové práci zaměřila na žáky 1. a 2. třídy. Bohužel do mého výzkumu zasáhla velmi nepěkným způsobem celosvětová virová infekce, takže k realizaci nakonec došlo jen s dětmi 2. ročníku. Ačkoliv je možné se na naší škole v ojedinělých případech setkat u vyučujících 1. stupně s výukou dle Hejného metody, nebylo toto prostředí zatím žádným učitelem/učitelkou zaváděno, tudíž bylo pro žáky naprosto neznámé.

Prostředí Vláčky bylo zkoncipované jako jedno z mnoha izomorfních prostředí sloužících jako propedeutika pro prostředí Dědy Lesoně, popř. jako propedeutika pro 1. ročník ZŠ v rámci vytvoření si představ o počtu objektů - pochopení skutečnosti, že jejich počet je nezávislí na barvě, tvaru, druhu či velikosti, a že je lze nahradit symboly.

V teoretické části se budu zabývat didaktickým potenciálem tohoto prostředí a prostředími příbuznými, jako je např. Děda Lesoň a Váhy. Seznámím Vás s podobnými prostředími v tradičních učebnicích matematiky jiných nakladatelaství, které v sobě pojí číslo jako veličinu i jako počet. Budu se zabývat důležitou pomůckou tohoto prostředí, která se jmenuje Cuisenarovy hranoly. Popíši gradaci úloh od mateřské školy až po 3. ročník ZŠ s návazností 4. a 5. ročníku.

V praktické části se Vám pokusím odhalit myšlenkové procesy žáků 2. ročníku při řešení vybraných vstupních úloh v prostředí Vláčky. Seznámím Vás s mými poznatky toho, co děti vnímaly jinak, než jak bylo zadáním myšleno a jaké chyby jako vyučující můžete nevědomky při tvorbě pracovních listů udělat. Najdete zde úlohy, které slouží jako zavádějící a úvodní v prostředí Vláčky v 1. ročníku, úlohy, které umožňují dětem pochopit vztahy mezi jejími jednotlivými délkami.

Cílem této práce je seznámit Vás s žákovskými strategiemi, které se objevily při řešení úloh, vysvětlit, jaké nejasnosti mohou nastat při nejednoznačných formulacích jednotlivých zadání a jejich vnímáním dětmi, někdy odlišného od záměru autora této diplomové práce. V rámci diplomové práce se také dozvíte o dalších možnostech, jakým jiným způsobem úlohy případně gradovat.

1. Teoretická část

1.1 Metodika Hejného

Svoji práci bych začala delším citátem: *„Lékem proti nevědomosti je vzdělání, které se má vštěpovati ve školách; ale tak, aby to bylo vzdělání pravé, plné, jasné a trvalé. Pravé bude, jestliže vyučujeme a učíme se jen věcem užitečným pro život; aby později nebylo důvodu k nářku: Potřebné neznáme, poněvadž jsme se naučili nepotřebnému. Plné bude, vytříbí-li se mysl k moudrosti, jazyk k výmluvnosti a ruka k obratnému provádění potřebných úkonů; to bude známá sůl života: věděti, konati a mluviti. Jasné bude, a tím i pevné a trvalé, jestliže všeho, čemu vyučujeme a jsme vyučováni, nebude temné nebo zmatené, nýbrž zřetelné, přesné a učleněné jak pět prstů na ruce. Hlavní věc při tom jest, předváděti správně smyslům věci vnímatelné tak, aby nebylo možno nepochopiti jich. Pravím a hlasitě opakuji, že tato zásada je základem všech ostatních. Neboť nemůžeme ani jednati ani mluviti moudře, jestliže dříve neporozumíme řádně všemu, co máme konati nebo o čem máme mluviti. V rozumu není nic, leč co bylo dříve ve smyslu.“* (Komenský, 1941).

Tato až prorocká slova byla vyřčena a písemně zaznamenána již v 17. století moudrým mužem. Mužem, jehož názory a vhled do tajů učení dalece předběhly svoji dobu. Tím mužem byl biskup, jazykovědec, pedagog, filosof a vychovatel Jan Ámos Komenský (1592 – 1670) a tato slova se objevila v jeho knize Orbis pictus, která byla poprvé vydaná v roce 1658 v Norimberku, latinsky a německy. J. A. Komenský již tehdy poznal, že děti se nemohou řádně a s pochopením naučit věci, které neprozkoumaly a nepochopily svými smysly, a že učení, kde tyto zkušenosti chybí je pomalé, pomíjivé a pro děti nezajímavé.

Těchto poznatků plně využívá metodika Hejného matematiky, která je postavena na učení se matematice pomocí všech smyslů a postupném objevování. Pomocí toho si děti/žáci vytvářejí představy a budují schémata.

Metodika má počátky již ve 40. letech 20. století. Důsledné rozpracování a zpracovávání poznatků pana Víta Hejného, otce Milana Hejného, přišlo po roce 1974, kdy pan Vit Hejný začal hledat příčiny neúspěchů svých žáků a důvod, proč nechtějí porozumět řešené problematice a raději se matematiku učí mechanicky – pamětně bez vhledu a pochopení. Zjistil totiž, že pokud byli žáci postaveni před nestandardní úlohy, jejich znalosti byly nedostačující. Vymýšlel pro ně proto úlohy, které standardní nebyly, takové úlohy, za pomoci kterých by si žáci vybudovali sítě mentálních matematických schémat, a které by prohloubily jejich chápání při následné diskuzi o vlastních výsledcích se spolužáky. Úlohy, jejichž vyřešením by došlo následně k automatickému zobecnění, k trvalému pochopení, a tudíž i k zapamatování si.

1.2 Principy Hejného metodiky

Metodika Hejného, jak již bylo řečeno, je založena na intuitivním objevování si matematiky dětmi, které pohání vnitřní motivace problém vyřešit, a na samostatném budování si schémat. Budování si schémat znamená budování pojmů, jevů, procesů a situací pomocí řešitelských strategií, jevů, vazeb a jejich dobrému přirozenému porozumění. Tato metoda respektuje cestu směrem od zkušeností k pojmům a plně se opírá o myšlenky pedocentrismu (Slezáková, J. a kol., 2020).

Využívají se k tomu tzv. izolovaná prostředí. Prostředí, která jsou dětem blízká, neboť vycházejí ze znalostí jejich běžného života, popř. jsou vytvořena prostředí nová, která jsou dětem postupně představována, a tudíž jim nečiní žádné potíže se v nich orientovat. Úlohy jsou v jednotlivých prostředích gradovány, čímž se jednotlivá prostředí rozšiřují, obohacují a přinášejí další hlubší podněty a plně a úměrně zatíží děti na různém stupni pochopení. Děti v každém prostředí pracují opakovaně, nabývají v nich na jistotě, svá zjištění diskutují, ověřují a potvrzují si je ve vzájemné interakci s učitelem a spolužáky. Pomocí těchto všech metod si následně všimnou, že některé principy se opakují a dochází tak k intuitivní abstrakci pojmů a jevů. Učení se matematice se pro ně stává přirozené.

Jednotlivá témata se prolínají, informace, která z jednotlivých prostředí děti získávají, spolu logicky souvisejí a v průběhu učení právě dochází k poskládání dílčích poznatků z jednotlivých prostředí a různých činností. Děti si tak na základě jednotlivých izolovaných prostředí vytvářejí komplexní představu o přirozeném čísle (kterou nutně potřebují pro další práci s čísly), o vztazích a závislostech mezi nimi a postupně dospějí k zobecnění a abstrakci. Učitel je pro děti koučem – moderátorem - průvodcem, který je jednotlivými prostředími provází, motivuje je, přivádí je zpět, pokud se cestou při objevování dostanou do slepé uličky, požaduje po nich argumentaci, vyhodnocování a diskuzi, kterou řídí. Učí je pracovat s chybou a k chybě přistupovat tak, že chyba je kamarád, prostředek, kterým se učí, a že i když úlohu nevyřeší, tak zjistí, který způsob k řešení nevede. Tím vším učí děti kriticky myslet, pracovat s názorem druhých, rozhodovat se a nést následky svého rozhodnutí, což má kromě matematiky, vliv na jejich osobní rozvoj a rozvoj kompetencí školních dle RVP ZŠ, mezi něž mimo jiné patří : motivace k celoživotnímu učení,

: všestranná, účinná a otevřená komunikace,

: schopnost spolupráce, vnímavé a citlivé vztahy k lidem,

: podpora tvořivého a logického uvažovaná a řešení problémů,

: poznávat a rozvíjet vlastní schopnosti v souladu s reálnými možnostmi.

Tím, že je matematika Hejného postavena na samostatném bádání a propojování, neustále u dětí rozvíjí abstraktní a logické myšlení, která děti uplatní při řešení Nestandardních aplikačních úloh a problémů, které jsou (dle RVP ZV 2023) důležitou součástí Matematiky a její aplikace. *V rámci těchto úloh se po žácích požaduje řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy.* (RVP ZV 2023) Hejného matematika je na tento způsob práce systematicky připravuje.

1.2.1 Představa přirozeného čísla

Aby dítě došlo k vybudování představy o přirozeném čísle, musí projít nejprve pojmotvorným procesem. Ten zahrnuje:

a) motivaci (říkanky a písničky s čísly),
b) izolované modely – dítě počítá to, co zná, co ho obklopuje, např. 3 hrušky,
c) generický model – předměty děti nepotřebují vidět přímo, nahradí je třeba prsty,
d) abstrakci – dítě si nepotřebuje objekty fyzicky znázorňovat, ví, co dané číslo představuje,
e) krystalizaci – dítě dokáže bez problémů poznat a vybrat množství ze skupiny prvků.

Dítě již v předškolním věku začíná vnímat slova, která označují počet. Nejprve číslo vnímá v souvislosti s věcí (tři autíčka) a vnímá ho jako jeden celek. Umí vhledem poznat, o kolik předmětů, jeho věcí, se jedná (dva míče, dvě autíčka, …), ale neumí zatím slova, označující počet, přenést z izolovaného modelu na jiný izolovaný model, např. převést „tři kuličky“ na „tři knoflíky“. Teprve při dostatečném množství poskytnutých izolovaných modelů „tři kuličky“, „tři knoflíky“, „tři míče“, tři bonbony“, tři prsty“, … se začíná slovo „tři“ osamostatňovat od věcí, přestává být na nich závislé a stává se samostatným pojmem.

Dítě stále ještě pro slovo „tři“ potřebuje podporu věcí, ale dokáže je již vázat na věci různé, protože chápe, že toto slovo označuje jeden stejný jev, tj. počet.

Po dostatečně dlouhé době a množství izolovaných modelů, jejichž potřeba je pro každé dítě jiná, dokáže opustit izolované modely a přejít k modelům generickým, kdy ví, že počet např. bonbonů mu při počítání nahradí třeba prsty. Následně přichází etapa, kdy se dítě vymaňuje ze zajetí věcí a je schopné řešit číselné úlohy bez nich (sčítá, odčítá, porovnává). Prsty mu již slouží jako nástroj kalkulace. Mnohost se otevírá do dalších podob – od počtu se objevuje jako operátor i jako adresa. Celý tento proces završuje etapa abstrakčně/krystalizační, kdy má dítě dobrou představu o číslech do dvaceti, která umí sčítat, odčítat a porovnávat, vhledem umí určit počet „tři“ a často i počet teček na hrací kostce, ale ještě nevnímá zákonitosti světa čísel a o číslech vyšších představu množství nemá.

Při budování představ o čísle se využívá dvou proudů – procesuálního a konceptuálního. Proud konceptuální zahrnuje vhled, proud procesuální cestu. Proud procesuální vede k proudu konceptuálnímu – neboli, opakováním procesů dojde ke zvědomení = konceptu, ale zároveň může koncept (nějaký objekt) vést k potřebě procesu (činnosti), ze kterého se pak opět dostaneme ke konceptu = poznání, jak pěkně vysvětluje pan Milan Hejný ve své „Modré knize“.

Celá metodika je tak v naprostém souladu s oblastí Matematika a její aplikace v RVP, kde se mluví o tom, že je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech. Dále se zde uvádí, že: „*Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.*“ (RVP ZV 2023). I tato věta plně vystihuje celý koncept Hejného matematiky.

1.3 Prostředí v Hejného matematice

Prostředí v Hejného matematice jsou koncipována pro učitele, který je schopen neprozradit, jakým způsobem řešit jednotlivé úlohy. Pro učitele, který pomůže najít cestu v případě, že se žáci dostanou do slepé uličky, a který ve snaze urychlit proces „poznání“ vydrží čekat a nechá žákům dostatečné množství času, pokusů a omylů k tomu, aby dosáhli opravdového a trvalého poznání. V tom tkví hlavní didaktický potenciál.

Prostředí v Hejného matematice prošla samozřejmě vývojem – některá se stala inspirací pro prostředí jiná, některá byla více propracována a některá vznikala postupem času jako dále rozvíjející. Veškerá prostředí společně pak respektují nutnost zapojení percepčního vnímání samotným žákem. Jedná se o percepce vizuální, haptické, akustické a kinestetické. Každý z nás upřednostňuje při učení jiné receptory a tím také individuální prvopočáteční vnímání. Někomu více vyhovuje zrak, jinému hmat, dalšímu sluch a někdo upřednostňuje pohyb. Každá percepce přichází do mozku pomocí jiných receptorů (oči, ruce, uši, nohy). Učitel by měl proto nabízet při výuce takové úlohy, při kterých by docházelo k postupnému či současnému zapojování všech receptorů, aby každý žák mohl uspokojit své potřeby. Čím více percepcí je při učení zapojeno, tím lépe a více dochází k pochopení a zapamatování si nových poznatků.

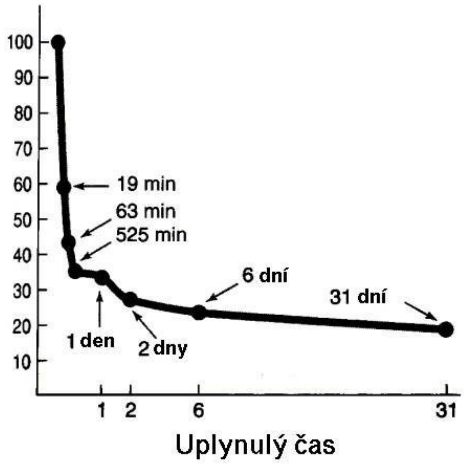
Matematika Hejného pamatuje na všechny tyto potřeby a disponuje řadou prostředí, která jsou zaměřena na jednotlivé receptory, a vzájemně je kombinuje. Jedná se tedy o multisenzoriální přístup k matematice, který je pro děti hlavně na 1. stupni velice důležitý, neboť se nacházejí ve stadiu konkrétních operací.

K jednodušším prostředím patří ta, která pracují se stabilním číslem a využívají k tomu percepce vizuální (pokud vizuálně zaznamenáváme nějaké množství, dokreslujeme obrázek) a dále percepce haptická, pokud se manipuluje s předměty. Obě tato prostředí mohou fungovat též jako prostředí pomíjivá, pokud si při vizuálním vjemu musím například pamatovat pouze to, co vidím a to, co cítím při vjemu haptickém.

Těžší prostředí jsou pak ta, která pracují s číslem pouze pomíjivě, tj. akustickým (tleskání) a kinestetickým způsobem (chůze).

Různorodost prostředí je důležitá pro již výše zmiňovaný pojmotvorný proces, kdy dítě potřebuje projít přes větší množství izolovaných modelů, k modelům generickým, následně k abstrakci a k zobecnění.

Také neustálé propojování a opakování prostředí je důležité z hlediska paměti, kdy v čase dochází k zapomínání, jak názorně vyjadřuje Ebbinghausova křivka zapomínání (viz. Obr. 1).



Obr. 1 Ebbinghausova křivka zapomínání. Zdroj: https://publi.cz/books/339/10.html

Matematika Hejného je propracovanou metodikou pro děti od předškolního věku až po 2. stupeň. Je postavena na dvou pilířích. První pilíř je zaměřen na didaktický obsah, aby umožňoval dětem vybudování si schémat matematických pojmů, procesů a vztahů. Druhý pilíř je zaměřen na principy, kterých je celkem dvanáct, a které udávají průběh vyučování.

Již ve školce se děti seznamují s prostředími, jako je: krokování, stavitelé, obrázky, schody, podlaháři, dřívka, autobus, pohádky, hranolky, bludiště, papírnictví, rodina, popeláři. Všechna prostředí jsou zaměřena na rozvoj jejich předmatematické a matematické gramotnosti, kterou následně plně využijí a naváží na ní v 1. ročníku základní školy. Zde se setkávají s prostředími autobus, barevné trojice, děda Lesoň, egyptské dělení, hadi, indické násobení, pavučiny, schody, sousedé a mnoha dalšími. Jedním z nově přidaných prostředí se stalo prostředí Vláčky, které využívá jako pomůcku Cuisenairovy hranoly.

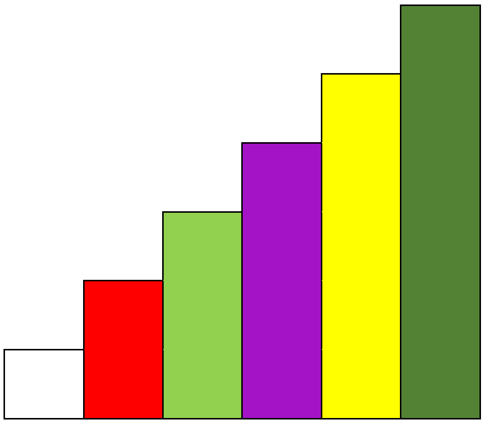
1.4 Původ pomůcky Cuisenairovy hranoly

Objevitel a autor pomůcky je belgický učitel Georges Cuisenaire žijící v letech 1891 – 1975. Původně vystudoval Královskou hudební konzervatoř, ale od 26. dubna 1912 se stal učitelem na základní škole. Zamýšlel se nad tím, jak je možné, že děti nechápou souvislosti mezi čísly v matematice, ale v hudbě počítat noty jim nečinilo potíže. Vyrobil si proto pomůcku ze dřeva – „klávesnici pro matematiku". Měla podobu kvádrů, délka jednotlivých kvádrů byla v rozmezí 1cm až 10 cm, a kvádry měly různou barvu. Poté, co se tato pomůcka začala používat ve školách, došlo ke zlomu ve vzdělávání, pomůcka se postupně rozšířila i do dalších škol a zemí a v současné době je uznávaná jako nástroj při vzdělávání se matematice.

Jeho metodu tak v současné době využívají učitelé ve více než 60 zemích světa včetně nás. Tato pomůcka nese název Cuisenairovy hranoly.

1.4.1 Cuisenairovy hranoly v předškolním vzdělávání

V mateřské škole je pro ně a prostředí používán název Hranolky. Jsou vytvořeny v šesti délkách a pro snadnější manipulaci jsou zvětšené. Základní hranolek tvoří krychle o rozměrech 4 x 4 x 4 cm v bílé barvě, následují kvádry červené barvy (8 x 4 x 4 cm), světle zelené barvy (12 x 4 x 4 cm), fialové barvy (16 x 4 x 4 cm) žluté barvy (20 x 4 x 4 cm) a tmavě zelené barvy (24 x 4 x 4 cm).



Obr. 2 Hranolky, zdroj: vlastní

Pomocí manipulace s nimi se děti učí rozvíjet pojem čísla jako počtu a délky (veličina) zároveň - porovnávají je a snaží se je podle délky uspořádat, objevují vztahy mezi jednotlivými délkami barevných hranolků. Kromě toho jim jejich barevnost pomáhá upevňovat znalost barev, pomáhá se zrakovou percepcí a odhadem. Manipulace s nimi dokáže rozvíjet kombinatorické schopnosti a podporovat přechod z 2D modelu do 3D modelu a opačně – děti mohou fyzické modely obkreslovat na čistý nebo čtverečkovaný papír a následně je fyzicky skládat nebo vybarvovat, skládat stavby dle obrázkových předloh, které mohou mít i jiné měřítko než skutečné hranolky. Pomůcku lze využít i k dalším, už známým hrám: Sova, Telefon, Běhací diktát (Hejného metoda, příručka pro MŠ, J. Slezáková a kol., 2019, s. 32). Tato pomůcka je zde tedy vyžívána v širším kontextu.

1.4.2 Cuisenairovy hranoly na 1. stupni ZŠ

Na škole základní tato pomůcka již nese název Vláčky. Cuisenairovy hranoly jsou vytvořeny v deseti délkách. Nejmenší dílek, který reprezentuje jednotku, je krychle bílé barvy o rozměrech 1 x 1 x 1 cm. Každý další je o 1 cm delší než předchozí. Nejdelší hranolek je dlouhý 10 cm. Hranolky stejné barvy mají i stejnou délku a reprezentují tudíž stejné přirozené číslo. Rozměry, barva a číselná hodnota hranolků jsou přehledně uspořádány do následující tabulky.

Rozměr hranolku	barva hranolku	přirozené číslo, které hranolek zastupuje
1 x 1 x 1	bílá	1
2 x 1 x 1	červená	2
3 x 1 x 1	světle zelená	3
4 x 1 x 1	fialová	4
5 x 1 x 1	žlutá	5
6 x 1 x 1	tmavě zelená	6
7 x 1 x 1	černá/šedá	7
8 x 1 x 1	hnědá	8
9 x 1 x 1	modrá	9
10 x 1 x 1	oranžová	10

Tab. 1 Cuisenairovy hranolky, zdroj: vlastní

I když se při práci s vláčky snažíme vyhnout tomu, aby si žáci propojili barvy s jejími číselnými hodnotami, které reprezentují, žáci si toho dříve či později všimnou. Bohužel, přechod na čísla znamená, že se ochudíme o možnosti zjednodušení při řešení zadání, a proto se i dětem snažíme vysvětlit, aby se tomu při řešení vyhýbaly.

1.5 Zavedení prostředí Vláčky

Prostředí Vláčky je zaváděno hned od 1. ročníku ZŠ. Z počátku se nevyužívají všechny délky hranolků, ale učivo se omezuje na hranolky od bílé až po tmavě zelenou barvu (maximální číselná hodnota 6).

V průběhu času jsou vláčky propojovány s prostředím Děda Lesoň, kdy se zadání z prostředí Vláčky přepisují do prostředí Dědy Lesoně, a můžeme zde nalézt i typově stejné úlohy pro obě prostředí, např. je zde podobnost při hledání rovností, dělení na stejně silné/velké skupiny, používání „masek" u Dědy Lesoně a „plachetek" u Vláčků, atd.. Pomocí nich (a dalších prostředí) se přechází na zápis rovnic. Tím, že si děti již vyzkoušely různá izomorfní prostředí, stává se přechod na zápis do rovnic dětem srozumitelný a lépe uchopitelný. Více informací naleznete v další části této práce.

V učebnicích se pro toto prostředí v zadáních objevují různé pojmy a zkratky. Jsou to především:

Vagónek = jeden hranolek, který může mít více různých barev (bílou, červenou, světle zelenou, fialovou, žlutou, tmavě zelenou, šedou, hnědou, modrou, oranžovou)

Vláček = jeden a více vagónků položených vedle sebe

B = bílý vagón

Č = červený vagónek

Z = světle zelený vagónek

F = fialový vagónek

Ž = žlutý vagónek

TZ/T = tmavě zelený vagónek

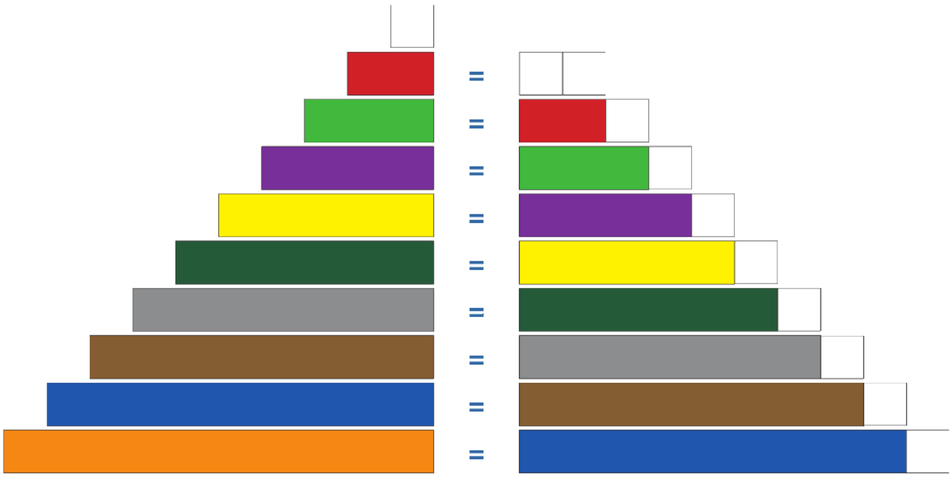
Zcela určitě se setkáte se situací, kdy žák vezme pouze jeden vagónek a bude ho zajímat, zda se jedná také o vláček. Jako vyučující musíte k tomu s dětmi zaujmout stanovisko, aby v budoucnu děti neměly s pojmy potíže. Ale vzhledem k tomu, že děti znají jednovagónkové vlaky z běžného života, doporučuji tento přístup ponechat v matematickém prostředí také, neboť na prvním stupni mají děti vycházet z vlastních zkušeností a pracovat i s možností, kdy vagónek je zároveň vláčkem.

Další situace, se kterou se v průběhu řešení úloh setkáte, je ta, kdy někdo postaví vláček, např. typu FB a jiný žák typu BF. Děti chtějí znát odpověď na otázku, zda jsou tyto vláčky stejné či nikoliv. Opět záleží na vás a na dětech, jak tuto situaci vyřešíte, ale já osobně se přikláním k různosti, neboť pokud bereme v úvahu přesah zástupnosti číslic reprezentované barvou, která tyto vláčky zastupují, a které v obecné matematice symbolizují převážně písmena, tak jednou dostaneme číslo typu *xy* a podruhé *yx*. Přesto, že nám v první fázi jde hlavně o pochopení vztahů sčítání a odčítání, tak nám tento přístup umožní daleko větší počet řešení.

1.5.1 Typy úloh

Úlohy jsou svojí náročností sestaveny tak, aby se žáci při nich nejprve seznámili s rozdílem mezi pojmy vagónek a vláček, délkami jednotlivých vagónků, dokázali odhadnout délku jednotlivých vagónků ve vztahu k ostatním, vysledovali vzájemné vztahy mezi nimi a přišli na možnosti vzájemných kombinací.

Žáci nejprve pracují s úlohami, při nichž staví vláčky bez jakékoliv upřesňující podmínky. Teprve další úlohy přinášejí stále náročnější a náročnější podmínky, popř. jejich kombinace, čímž dochází ke gradaci úloh. Žáci při nich vycházejí z pro ně známých vztahů, které jsou následující:



Obr. 3 Vztahy mezi Cuisenairovými hranolky, zdroj: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vlacky

Jednotlivé typy úloh lze popsat následovně a jsou zde seřazeny v takovém pořadí, v jakém je učebnice předkládá dětem.

1) postav z vagónků vláčky,
2) postav stejně dlouhé vláčky,
3) najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku,
4) jaký vláček je delší,

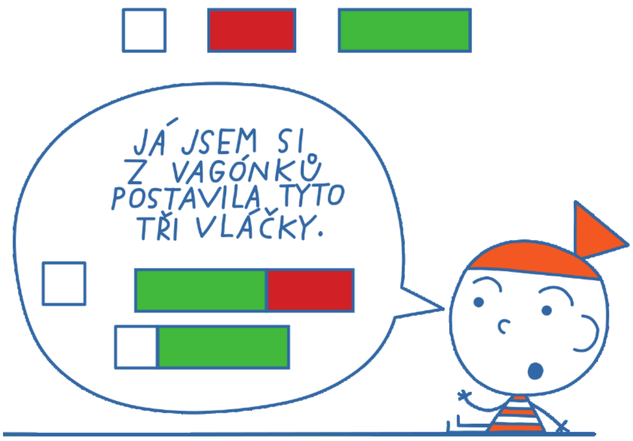
5) spoj stejně dlouhé vláčky,
6) doplň jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé,
7) odpoj jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé,
8) vytvoř dva/tři stejně dlouhé vláčky,
9) ze dvou různých vagónků postav stejně dlouhý vláček jako … – změna délky, nejprve jeden, následně délka dvou gradace množství předložených vagónků k použití, množství barev,
10) jaký vagónek je schovaný pod plachtou.

add 1) Postav z vagónků vláčky.

Tato úloha je v učebnicích pro 1. třídu ZŠ zařazena jako úvodní a představuje nejjednodušší matematickou úlohu, pomocí které je toto nové prostředí zaváděno. Žáci při ní obdrží omezené množství barevných vagónků – co do počtu i barvy. Mají k dispozici pouze vagónky v bílé, červené a zelené barvě a jejich úkolem je postavit z nich vláčky.

Tento typ úlohy jim dovoluje seznámit se s novou pomůckou a zároveň pracovat bez podmínek, pouze na základě vlastních dosavadních zkušeností z dětství při hraní si se stavebnicemi. Následně je pak žákům úloha předkládána s větším množstvím vagónků co do počtu, což umožňuje sestavit a zároveň vidět více řešení zadané úlohy.

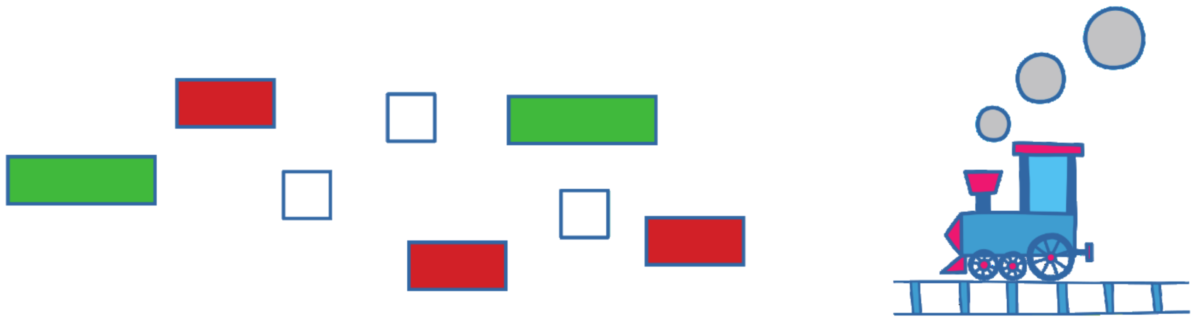
Cíl úlohy: Při řešení této úlohy se žáci seznamují s pojmy vláček, vagónek, s jejich délkami - rozpoznávají první vztahy mezi nimi, BB = Č, ČB = Z, BBB = Z (vztah délka/barva).



Obr. 4 Typ úlohy 1 – Postav z vagónků vláčky, zdroj: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vlacky

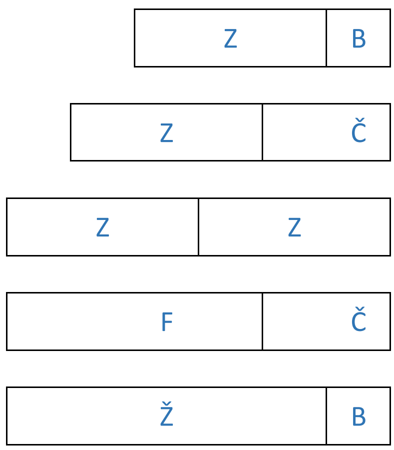
Add 2) Postav stejně dlouhé vláčky.

I tato úloha přináší dětem možnost vlastní tvorby. Je zde ale skrytá podmínka, kterou představuje množství vagónků a jejich délka. Děti musí zkombinovat vagónky tak, aby žádný vagónek nezůstal nevyužit. Cvičení nabízí několik možných řešení, která ale nemusí děti při své práci odhalit všechna a ihned. Barvy vagónků se přidávají postupně až do délky tmavě zeleného vagónku. Po dětech se v těchto úlohách požaduje, aby svá řešení nejprve vyřešily odhadem a teprve následně si je ověřily pomocí manipulace.



Obr. 5 Typ úlohy – Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vlacky

Od třetího ročníku se u tohoto typu úlohy začíná zavádět systém barevných teček a upouští se od zobrazování barvy v zadání. Úkolem dětí je vytvořit stejně dlouhé vláčky dle zadání a zapsat je pomocí barevných teček – dochází ke změně matematického jazyka.



Obr. 6 Typ úlohy – Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

Cíl úlohy: Žáci si zde vyjasňují pojetí vláčků a vagónků, zda i jeden vagónek může být vláčkem a zda různé pořadí dvou různých vagónků vytváří jiné vláčky (FB x BF), snaží se najít všechna řešení. Dalším cílem tohoto typu úlohy je, aby si děti zapamatovaly barvy jednotlivých vagónků, poznaly je vizuálně v závislosti na ostatních podle jejich délky, k čemuž slouží i hra SOVA (Petra si myslí na jeden vagónek). A v neposlední řadě tento typ úlohy nabízí propedeutiku násobilky, a to pomocí úloh, kdy mají najít vláček, který lze sestavit ze stejných vagónků.

Add 3) Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku.

Tato úloha se opírá o zkušenosti z předešlých úloh. Využívá znalostí délky jednotlivých vagónků a vztahy mezi nimi. Spočívá v tom, že ke dvěma vagónkům, které tvoří vláček, nyní hledáme pouze jednovagónkový vláček o stejné délce jako je v zadání. Úlohy obsahují nejdelší vagónek žlutý.

Cíl úlohy: Děti si v této úloze zvědomují a upevňují nabyté předešlé zkušenosti a objevují, pokud k tomu již nedošly samy, jak mohou být vagónky různě kombinovány.

Obr. 7 Typ úlohy - Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku, zdroj: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vlacky

Add 4) Jaký vláček je delší.

Další typ úlohy opět navazuje na předchozí zkušenosti a přidává matematická znaménka pro porovnávání větší, menší a rovná se. Úlohy jsou zadávány nejprve s jedním až dvěma vagónky na jedné straně a porovnávají se maximálně s jednovagónkovým vláčkem, popř. obráceně. Teprve ve 2. ročníku se objevují na obou stranách vláčky sestavené z více vagónků – maximálně ze čtyř na straně jedné a dvou na straně druhé. Nejdelším vagónkem je zde vagónek tmavě zelené barvy.

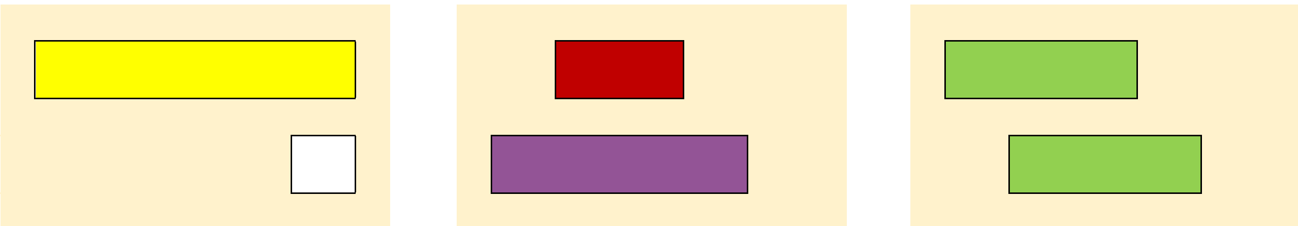
Cíl úlohy: Další úroveň k uvědomění si vztahů mezi jednotlivými délkami a postupné navádění k poznání, že pokud máme na stranách rovnice stejné vagónky, tak je můžeme odstranit, řešení se nezmění a nám se řešení zjednoduší.

Obr. 8 Typ úlohy - Jaký vláček je delší, zdroj: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vlacky

Add 5) Spoj stejně dlouhé vláčky.

Tento typ úlohy přináší změnu v grafickém uspořádání. Vláčky, které jsou zde dětem předkládány, již nejsou seřazené v jedné linii, ale jsou uspořádány nad sebou, což tuto úlohu řadí mezi náročnější a prověřuje, jak děti zvládly úlohy předešlé. Úloha může být obohacena tím, že není možné spojit všechny předložené vláčky, ať již z důvodu lichého počtu vláčků nebo proto, že k danému vláčku nelze žádný další najít. Úlohy jsou předkládány do délky vagónku žlutého a začínají jedním až dvěma vagónky v jednom poli.

Cíl: Další úroveň k uvědomění si vztahů mezi jednotlivými délkami, procvičování kombinatoriky.



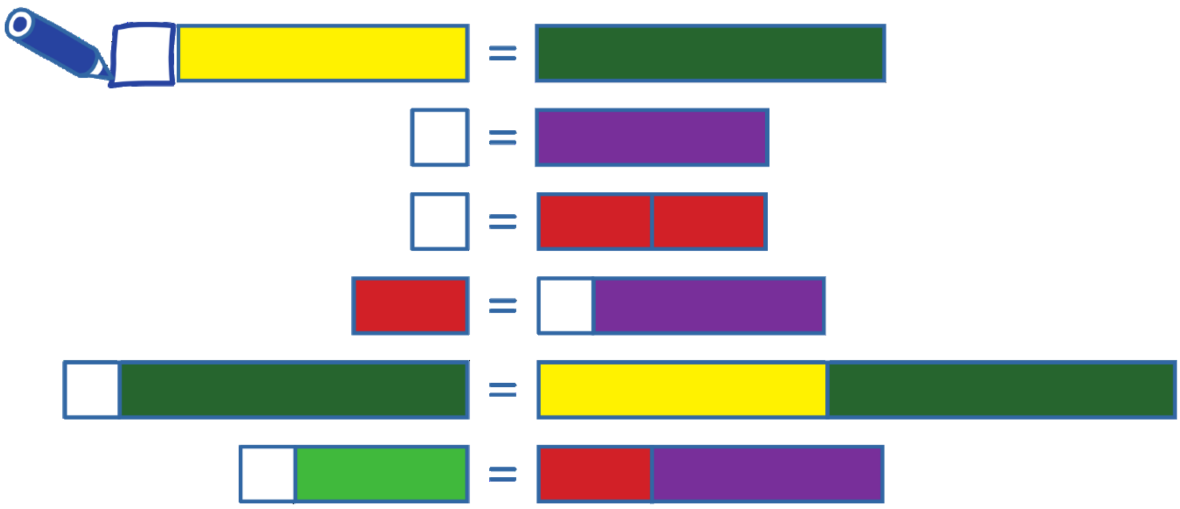
Obr. 9 Typ úlohy - Spoj stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

Add 6) Doplň jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé.

Tento typ úlohy rozšiřuje úlohu uvedenou ve čtvrtém bodě, kde se jednalo pouze o vzájemné porovnávání vláčků a propojuje ji s ostatními typy úloh, neboť jejím úkolem je také vytvořit stejně dlouhé vláčky doplněním vagónku. Při vypracovávání úlohy tohoto typu je předpokladem, že děti již mají, alespoň částečně, zvládnuté vzájemné vztahy mezi jednotlivými délkami vagónků, což by měly nacvičit na veškerých předchozích typech úloh.

Je samozřejmě dovolená i manipulace s pomůckou, neboť ještě všechny děti nebudou mít patřičný vhled. Při typech zadání, kdy se na obou stranách objevuje stejný vagónek, může děti napadnout jej odebrat, čímž se řešení úlohy zjednoduší.

Cíl: Jiná úroveň vedoucí k uvědomění si vztahů mezi jednotlivými délkami, procvičování kombinatoriky. Dalším skrytým cílem je, dojít k pochopení, že pokud odebereme na obou stranách rovnice stejnou hodnotu, tak řešení úlohy se tím nezmění, což je poznání nutné k budoucím ekvivalentním úpravám rovnic.



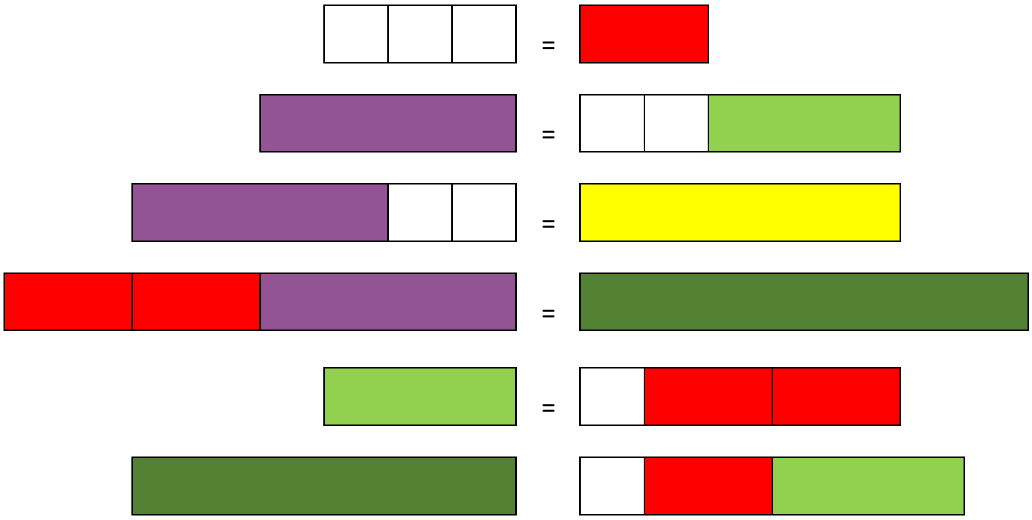
Obr. 10 Typ úlohy - Doplň jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé, zdroj: https://blog.h-mat.cz/didakticka-prostredi/vlacky

Tento typ úlohy se vyskytuje i ve třetím ročníku, ale tak jako u typů úloh „Postav stejně dlouhé vláčky", tak i tady se upouští od délkového zobrazení vagónků a nahrazují je kruhy, v nichž je napsána zkratka pro danou barvu vagónku. Úkolem je pak opět doplnit vagónek, aby platila rovnost zadání.

Add 7) Odpoj jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé.

Tento typ úlohy je inverzní úlohou k úloze v bodě 6) Doplň jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé. Tentokrát je úlohou dětí najít vagónek v rovnici, který je navíc a odstranit jej, aby došlo k úpravě rovnice tak, aby byla správná. Odpojení vagónku se provede tak, že se křížkem škrtne. Postupujeme od jednobarevných vláčků na obou stranách přes dvoubarevný vláček na pravé straně a následně na levé straně, až k tříbarevným vláčkům nejprve na levé a pak pravé straně, ale stále porovnáváme s jednobarevným jednovagónkem = vláčkem na straně druhé.

Cíl: Opětovné si zvědomování znalostí a poznatků o délkách vagónků, jejich vztazích a kombinacích.



Obr. 11 Typ úlohy - Odpoj jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé, zdroj: vlastní

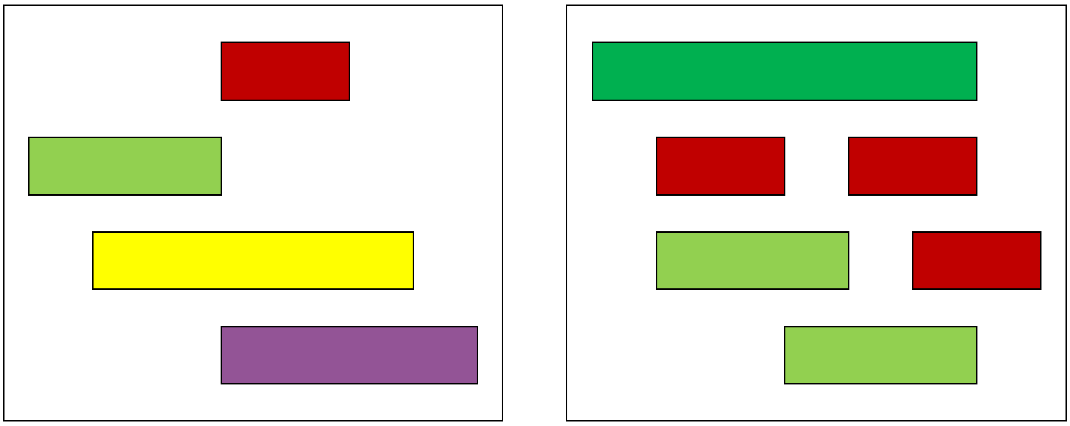
Add 8) Vytvoř dva/tři stejně dlouhé vláčky.

V této úloze lze nalézt seskupení vagónků podobné v úloze „Spoj stejně dlouhé vláčky“, ale na rozdíl od ní, kdy se k sobě spojovala jednotlivá pole, tak v tomto typu úlohy jsou v jednom poli seskupené vagónky a úkolem je, je jednou čarou rozdělit na dvě/tři stejné části.

Pro dělení na dvě stejné části se začíná počtem čtyř vagónků ve dvou barvách/délkách v jednom poli. Následují barvy tři v jednom poli a maximální počet vagónků končí na čísle pět, přičemž nejdelší vagónek je žluté barvy.

Pokud se zaměříme na dělení na tři stejné části, začínáme počtem pěti vagónků a končíme počtem šest, přičemž zde je nejdelším vagónkem vagónek tmavě zelené barvy. Je možné dát až pět různých barev do jednoho pole.

Cíl: Využití znalostí nabytých v předchozích typech úloh, procvičování kombinatorické, příprava na zlomky.



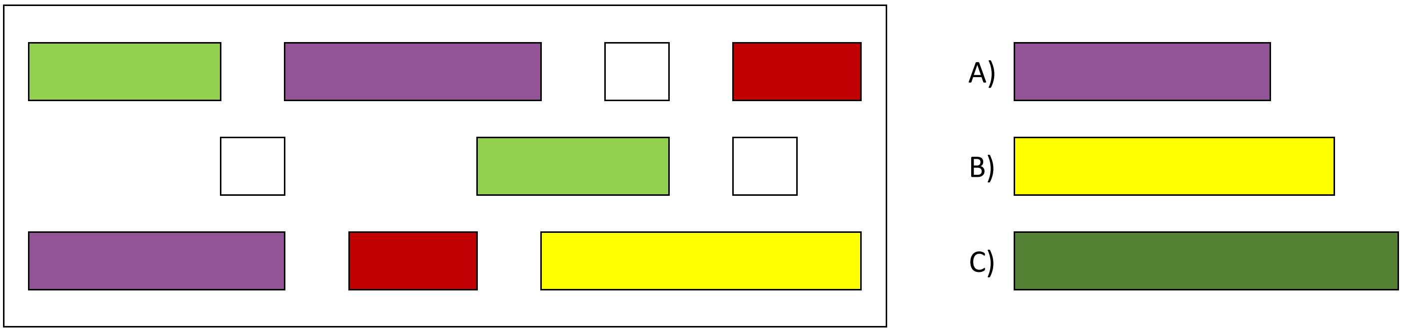
Obr. 12 Typ úlohy - Vytvoř dva/tři stejně dlouhé vláčky, zdroj: učebnice H-mat o.p.s.

Add 9) Postav stejně dlouhý vláček jako … fialový / žlutý / tmavě zelený …

K této úloze již děti musí přistupovat jako k úloze s podmínkou. Podmínka, která je jim zde předkládána, je délka vláčku, která je dána délkou jednoho vagónku, dále množství vagónků, které smějí k vyřešení úlohy použít a různost jejich délek. Děti se v této úloze snaží sestavit z vagónků vláček, který je stejně dlouhý jako vagónek v zadání. Vagónek v zadání je volen delší, popř. stejný než nabídnuté vagónky, ze kterých je výsledný vláček sestaven.

Tato úloha je inverzím typem k úloze *3) Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku*. V úloze jsou všechny vagónky v „depu“, a žák si z nich vybírá takové, které vyhovují dané podmínce a jednovláčku, který hledají. Maximální délku vagónku zde představuje vagónek tmavě zelený.

Cíl úlohy: Tato úloha využívá cílů z úloh typu postav stejně dlouhé vláčky, dále využívá vztahů mezi délkami jednotlivých vagónků. Požaduje po dětech kombinatorické myšlení, dále se snaží najít všechna možná řešení, otvírá diskuzi k významu slova „různé“, hraje si přeneseně se sudým a lichým číslem.

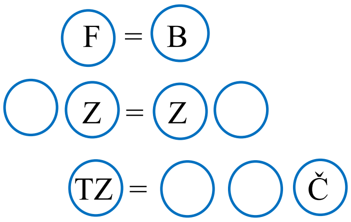


Obr. 13 Typ úlohy - Postav stejně dlouhý vláček jako …, zdroj: učebnice H-mat o.p.s.

Add 10) Jaký vagónek je schovaný pod plachtou

Tento typ úlohy je v podstatě totožný s úlohami předešlými, kdy hledáme vagónek takový, aby platila rovnost, ale zároveň přináší pro neznámý vagónek pojem „pod plachtou“. Úloha se objevuje až ve 3. ročníku a pracuje pouze se systémem barevných kruhů a písemných zkratek v nich. V rámci jedné úlohy jsou pod plachetkou pouze vagónky se stejnou barvou.

Cíl: Cílem úlohy je děti připravit na neznámou v rovnicích, která se zavádí ve 4. roč. pomocí různých obrázkových symbolů, popř. v 5. ročníku pomocí malých písmen.



Obr. 14 Typ úlohy - Jaký vagónek je schovaný pod plachtou, zdroj: učebnice H-mat o.p.s.

1.5.2 Gradace jednotlivých typů úloh

Jak již bylo uvedeno, prostředí vláčků nabízí velké množství typů úloh. Ne všechny typy je možné gradovat. Gradace v tomto prostředí znamená:

: omezené množství vagónků, které je v jednotlivých úlohách povolené,

: možnosti kombinace délek jednotlivých vagónků v rámci jednoho řešení,

: podmínky, které je nutné při řešení dodržet,

: kombinace různých podmínek,

: množství řešení, které daná úloha nabízí,

: možná neřešitelnost úlohy,

: hledání všech řešení,

: převod, do různých typů prostředí.

Soustředím se tedy na jednotlivé typy úloh ve stejném pořadí, jak je předkládá učebnice. Gradace jsou následující.

Add 1) Postav z vagónků vláčky

Jak již bylo řečeno, tato úloha slouží jako úvodní = seznamovací = zaváděcí. Není proto primárně koncipována na případnou gradaci.

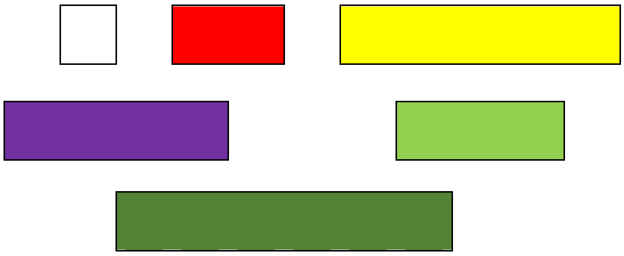
Dětem jako gradace může být předloženo jen větší množství vagónků, čímž vytvoří více kombinací. V souvislosti s tím tak může nastat potřeba řešit pojem „různost vláčků“, tedy zda vláčky v pořadí BČ a ČB jsou různé nebo ne.

Také jim můžete místo sudého počtu vagónků dát lichý počet. U některých dětí se tak můžete setkat s dotazem, který se otvírá až v typu úlohy „Postav stejně dlouhé vláčky“. Jedná se o problematiku, zda i jeden vagónek může být vláčkem. Je na učiteli, jakým způsobem tuto problematiku uchopí jak v této úloze, tak v úlohách jiných typů – k jaké vzájemné dohodě mezi učitelem a dětmi mezi sebou dojde.

Add 2) Postav stejně dlouhé vláčky

Gradací v této úloze není mnoho. Opět se jím stává množství vagónků, které mají děti k dispozici i případný lichý počet vagónků. Tato úloha však nabízí gradaci, kdy se po dětech požaduje, aby jednovláček vyjádřili pomocí pouze jednoho typu vagónku. Úloha zní např. takto:

a) Postav vláček ze tří vagónků stejně dlouhý jako 
b) Zakroužkuj, který z těchto vláčků lze postavit ze tří stejných vagónků.



Obr. 15 Typ úlohy - Postav vláček stejně dlouhý jako, zdroj: učebnice H-mat o.p.s.

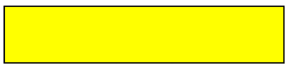
Děti se tak pomocí této gradace dostanou k poznání, na které je postavena násobilka, neboli že se jedná o postupné sčítání stejné hodnoty, dále zjistí, které delší vagónky mají souvislost s kratšími vagónky. Při vhledu, že jednotlivé délky představují také čísla, dostanou i povědomí o tom, která násobilka je s jakou propojená (tedy, že násobky dvou souvisí s násobky čtyř a osmi, že násobky tří souvisejí s násobky šesti, i že násobky pěti souvisejí s násobky deseti). Dále se dostanou ke zkušenosti s nejmenším společným násobkem. Kromě toho mohou i zjistit, že: a) sudé a sudé číslo dává opět sudé číslo,

b)sudé a liché číslo dává hodnotu lichého čísla a

c) liché a liché číslo dává hodnotu sudého čísla.

Vyšším stupněm předchozí gradace je zadání:

Postav vláček ze 3 vagónků. Dva z nich jsou stejné. Vláček je stejný jako:

a)  b) 

Obr. 16 Typ úlohy - Postav vláček stejně dlouhý jako, zdroj: učebnice H-mat o.p.s.

Tato úloha je obtížnější proto, že děti musí vhodně zvolit dva vagónky, aby délka vláčku mohla být doplněna ještě dalším, ale jinak dlouhým vagónkem na délku výsledného požadovaného vláčku. Jedná se o typ úlohy 2x + y = z. Tento typ úlohy tak vyžaduje složitější kombinatorické schopnosti.

Ještě náročnější je typ úlohy, který se objevuje až ve 3. ročníku. Tímto novým typem je dlouhý vlak, nyní složený ze dvou tmavě zelených vagónků, a navíc mají děti k dispozici pouze červené a fialové vagónky. Úlohu mají řešit tak, aby nalezly více řešení. Děti by měly mít zvnitřněné barvy, neboť 3. ročník upouští od znázorňování vagónků pomocí barev a také zmenšuje velikost vagónku vzhledem ke skutečné délce. Přichází změna matematického jazyka. V učebnici tak v zadání najdete 

tuto podobu vláčků:

Add 3) Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku

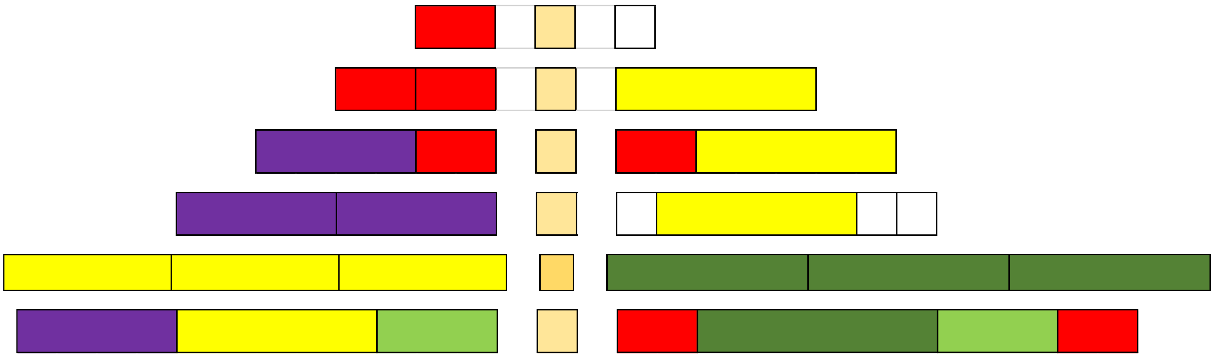
Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o inverzní úlohu k úloze předešlé, nejsou gradace v učebnicích zařazeny a nejsou ani nutné. Tento typ úlohy je navíc omezen maximální délkou vagónku, kterým je vagónek oranžové barvy.

Add 4) Jaký vláček je delší

Gradace k tomuto typu úlohy byla naznačena v předešlém textu. Jak již bylo zmíněno, nejprve se pracuje s malým počtem vagónků, které se mají vzájemně porovnávat. Jejich počet se pak následně na obou stranách navyšuje. Následující úlohy jsou seřazeny od nejsnadnější úrovně k nejtěžší.

Jaký vláček je nejdelší? Zakroužkuj a doplň znaménko >, <, =.

a)
b)
c)
d)
e)
f)

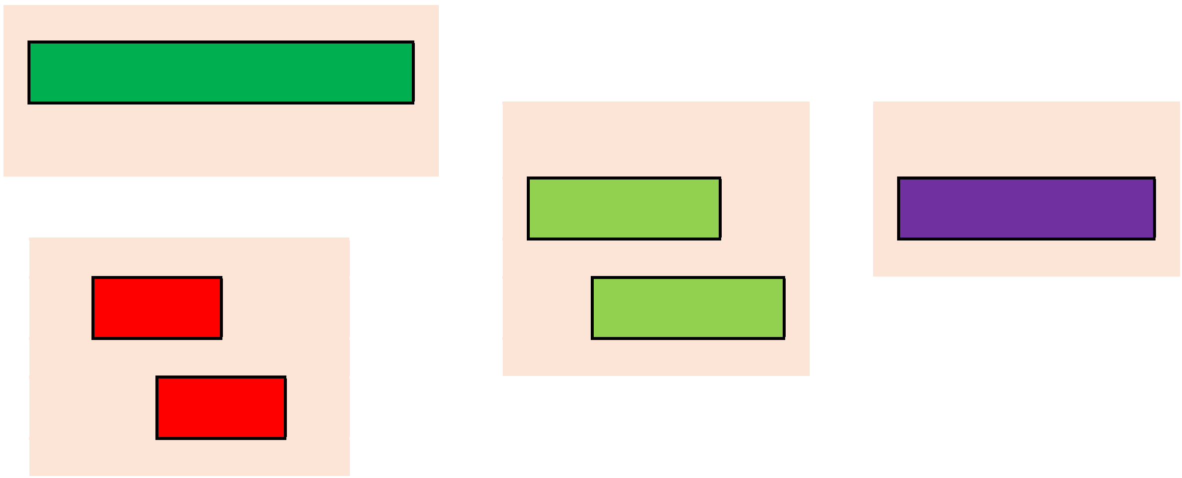


Obr. 17 Typ úlohy - Jaký vláček je delší, zdroj: učebnice H-mat o.p.s.

Add 5) Spoj stejně dlouhé vláčky

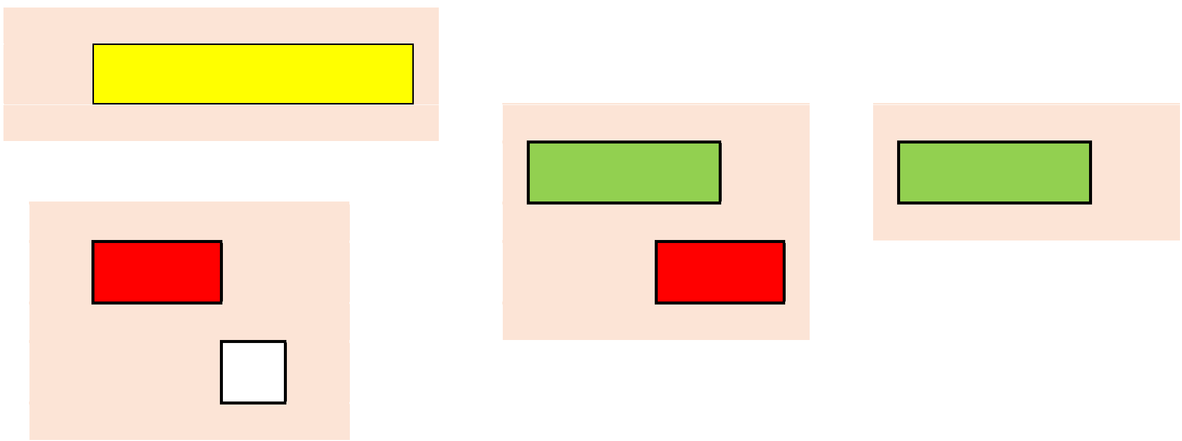
Možnosti gradace jsou naznačeny v úvodním popisu a vycházejí z předešlých úloh. Pro děti je snazší společně spojovat vláčky, které jsou kratší; barvy, které se v různých polích opakují; vláčky, které nemají více jak dvě barvy vagónků v jednom poli; jejich pole jsou blíže k sobě. Dále pokud množství polí je v sudém počtu a je možné spojit všechny nabízené možnosti. Možné gradace pak mohou být následující:

a) Nejsnazší úroveň má všechny vláčky jednobarevné, je jich lichý počet a všechna pole mají dvojici.



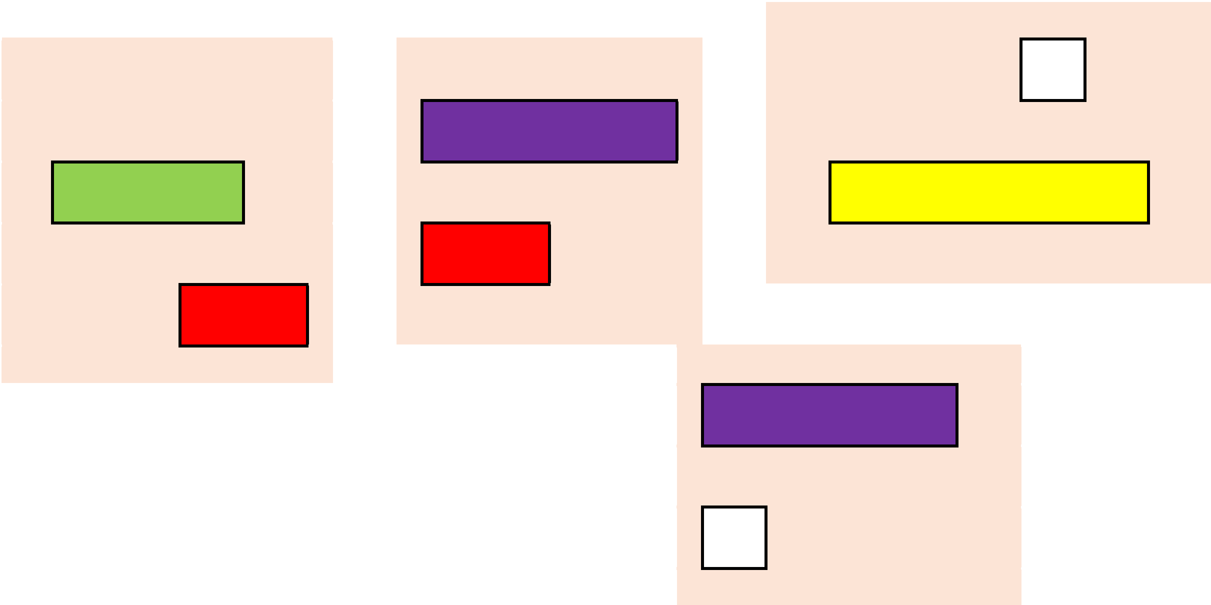
Obr. 18 Typ úlohy - Spoj stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

b) Druhou úroveň reprezentuje různá barevnost vláčků v jednotlivých polích, ale ne ve dvojicích, sudý počet polí a všechna pole mající dvojici.



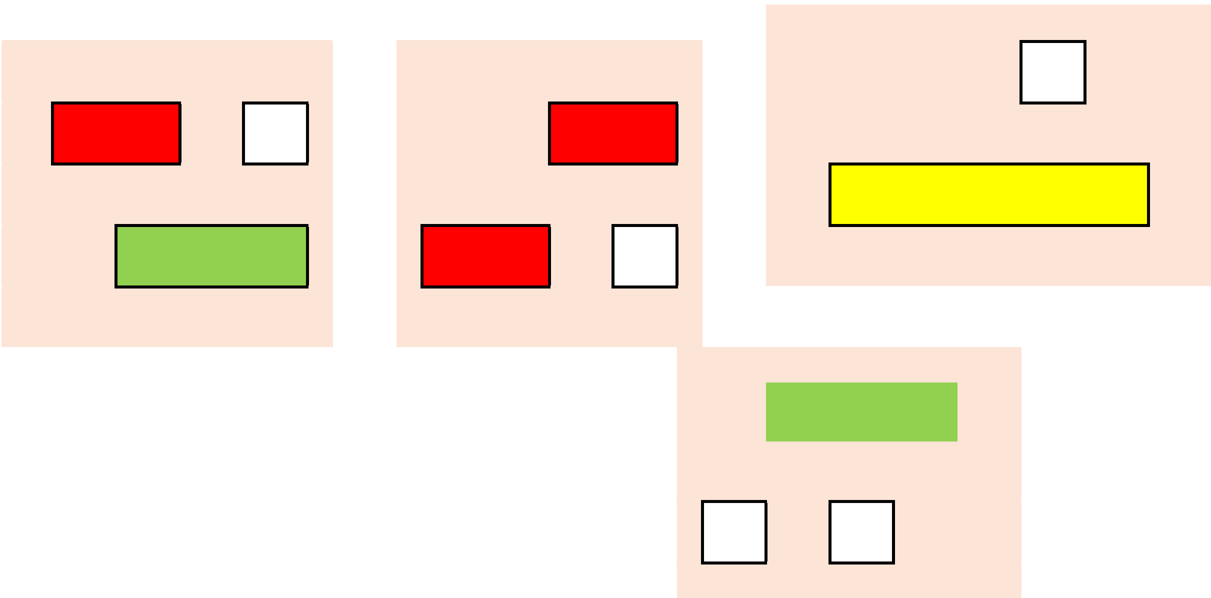
Obr. 19 Typ úlohy - Spoj stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

c) Gradace pokračuje úrovní, kdy všechna pole mají různobarevné vagónky, počet polí je sudý a všechny mají dvojici.



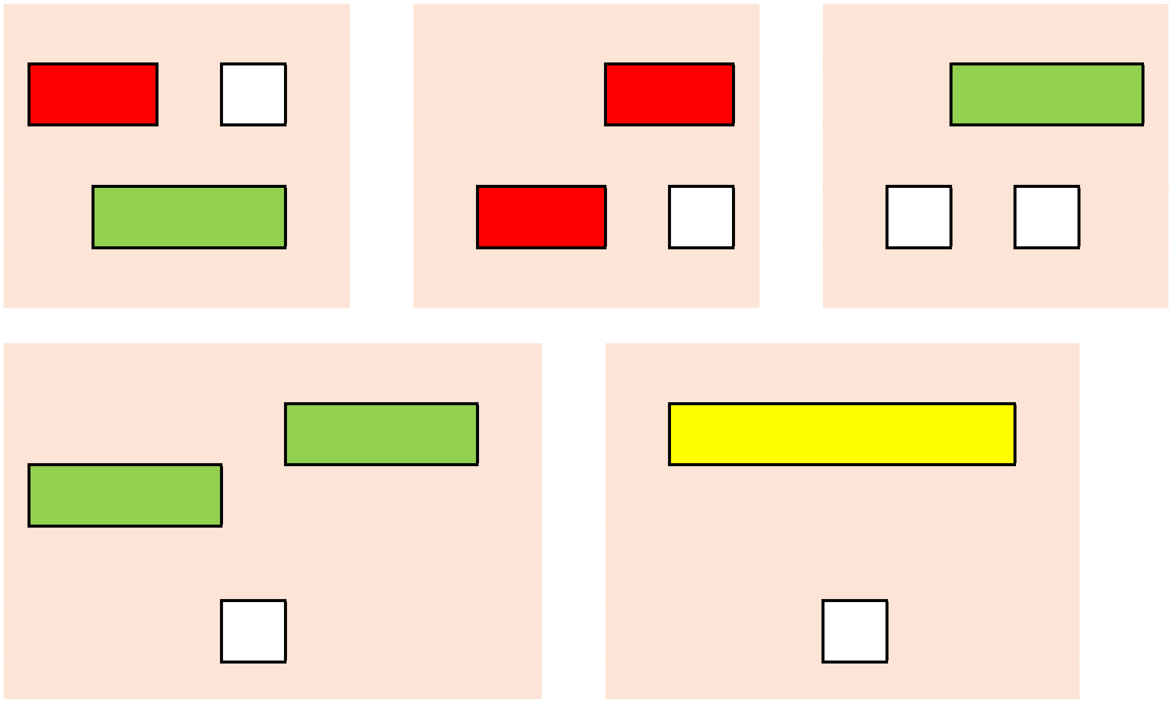
Obr. 20 Typ úlohy - Spoj stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

d) Další úrovní je varianta, kdy všechna pole mají různobarevné vagónky, počet vagónků v jednotlivých polích je větší než dva, počet polí je sudý a všechny vláčky mají dvojici.



Obr. 21 Typ úlohy - Spoj stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

e) Stupňuje ji úroveň, ve které všechna pole mají různobarevné vagónky a počet polí je lichý. V jejím rámci pak je možné kombinovat vláčky tvořené pouze jedním vagónkem nebo více vagónky, což v následujícím obrázku není předloženo.



Obr. 22 Typ úlohy - Spoj stejně dlouhé vláčky, zdroj: vlastní

f) Jako bonusová gradace by mohla být úroveň, kdy řešením nejsou pouze shodné dvojice polí, ale například shodné trojice.

Add 6) Doplň jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé

Gradace tohoto typu úlohy souvisejí s úlohou číslo čtyři „Jaký vláček je delší“, a je možné řadit je ve stejné náročnosti.

Nejprve se začíná tak, že na obou stranách je pouze jednovláček a řešením úlohy bude doplnění jednoho vagónku. Následuje taková varianta, že na jedné straně jsou dvě barvy vagónků a na druhé opět děti doplňují pouze jeden vagónek k jinému vagónku, aby dosáhly stejné délky. Dále je možné zařadit tříbarevný vláček na straně jedné a jako řešení bude opět doplnění jednoho vagónku k dalšímu vagónku do úplného vláčku na straně druhé.

Pro zvýšení obtížnosti lze po dětech požadovat, aby musely doplnit dva, popř. tři vagónky tak, aby došlo k rovnosti. Toto zadání je možné nadále gradovat, pokud místo toho, aby mohly děti doplnit jakékoliv dva/tři různé vagónky, tak po nich bude úloha požadovat jako řešení, aby našly dva (tři) stejné vagónky a aby vyhledaly všechna možná řešení.

Add 7) Odpoj jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé

Tato úloha je úlohou inverzní k úloze předešlé (Doplň jeden vagónek, aby vláčky byly stejně dlouhé). Není proto potřeba zmiňovat podrobně jednotlivé gradace, neboť jsou stejné – pouze opačné – jako v předešlém typu úlohy.

Add 8) Vytvoř dva/tři stejně dlouhé vláčky

Gradace je naznačená již v názvu úlohy. Tato úloha také kombinuje předešlé způsoby gradací.

Nejprve začínáme s úlohou, kde se v zadání požaduje vytvoření dvou stejných vláčků a ve které jsou pouze čtyři vagónky po dvojici stejných barev. Následují dvě barvy vagónků, ale jejich kombinace je taková, že jednovagónek je složitelný ze zbylé druhé barvy a počtu vagónků. Úlohu učiní obtížnější, pokud je na výběr ze tří druhů vagónků a je potřeba je vzájemně zkombinovat, ale stále se jako řešení požaduje pouze vytvoření dvou stejně dlouhých vláčků.

Řešení se stává těžším, pokud je v zadání požadováno vytvoření tří stejně dlouhých vláčků a jsou-li k dispozici nejprve jen tři různé délky vagónků. Pokud se bude zvyšovat počet různých délek vagónků, bude se úloha také stávat náročnější.

Pod nejvyšší obtížnost lze zařadit úlohu, kde by řešení bylo možné najít více a děti by měly za úkol je najít všechna. Pokud dopředu budou vědět, kolik řešení úloha má, bude práce s úlohou pro děti o něco jednodušší.

Add 9) Ze dvou různých vagónků postav stejně dlouhý vláček jako …

Tento typ úlohy lze brát jako gradační pro typ úlohy „Postav stejně dlouhé vláčky jako…“. Pokud bychom chtěli řešit gradaci, bude stejného rázu jako již zmiňovaný typ. Pro děti bude obtížnější, pokud bude výsledný vláček delší, pokud dostanou na výběr z velkého množství vagónků různých barev no a konečně, pokud nebude žádné řešení.

Add 10) Jaký vagónek je schovaný pod plachtou

Gradace u tohoto typu úlohy začíná na jednoduchém zadání. Jednoduchost spočívá v barvách, které jsou zastoupeny malými čísly (bílý, červený, světle zelený, fialový), druhá strana rovnice má pouze jednovláček a kdy děti dostanou rovnici, ve které se doplní pouze jedna neznámá na jedné straně.

V rámci gradace nejprve přecházíme do delších vagónků. Následuje varianta, kdy se na obě strany rovnice dá více vagónků a na jednu stranu k nim vagónek pod plachetkou. Nejprve se začne počtem dvou vagónků, následují tři vagónky.

Další úrovní je kombinace známých vagónků a více vagónků pod plachetkou na jedné straně rovnice. Nejprve se hledají dva vagónky pod plachetkou a následně tří vagónky pod plachetkou – v rámci jedné rovnice se předpokládá pouze jeden typ vagónků.

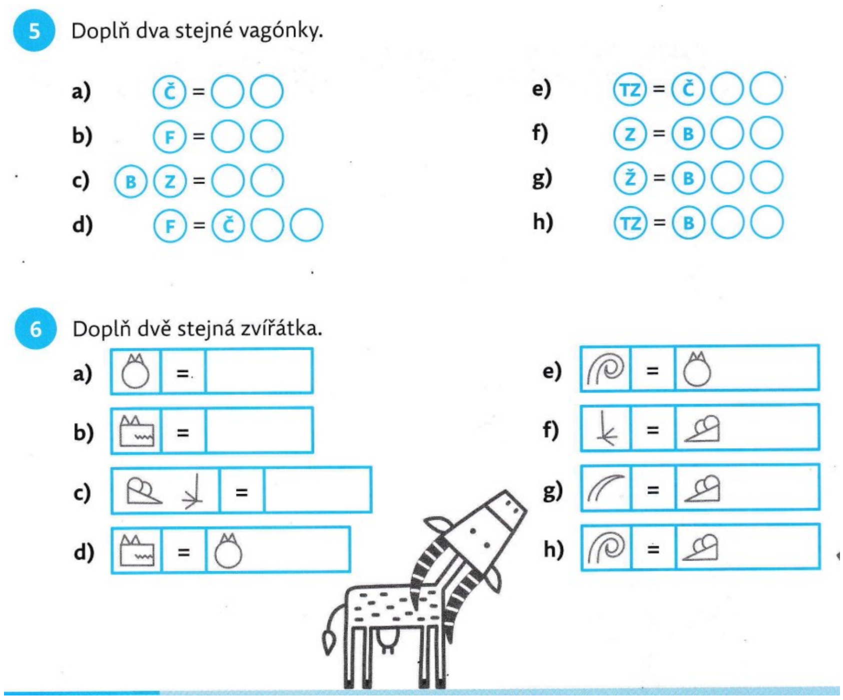
Pokud bychom chtěli úlohu gradovat, dali bychom do rovnice pod plachetky dvě neznámé. Začali bychom tím, že je obě dáme na jednu stranu rovnice. Mohli bychom pokračovat variantou, že vagónky pod plachetkou rozdělíme a na obě strany rovnice dáme jinou neznámou. V obou případech by úloha měla pouze jedno řešení.

Ještě těžší by byla úloha, kdy poslední gradace by měla ještě více řešení, a děti by musely nalézt všechna, případně by úloha žádné řešení neměla.

1.5.3 Návaznost 3., 4. a 5. ročníku

Prostředí Vláčky jsou v průběhu prvního a druhého ročníku jedním ze sémantických prostředí, které doplňují velký výběr izomorfních prostředí. Toto prostředí je propedeutickým prostředím k prostředí Děda Lesoň. Paralelu těchto dvou prostředí lze nalézt v tom, že v prostředí Vláčků má každý vagónek svoji sílu odlišenou barevně a v prostředí dědy Lesoně má svoji sílu různé zvířátko. Také délky jednotlivých vagónků se zvětšují úměrně hodnotě /síle vagónku a velikost zvířátek se zvětšuje úměrně síle/hodnotě zvířátka.

V prvním ročníku se prostředí dědy Lesoně v učebnicích nakladatelství H – mat nevyskytuje vůbec, předchází mu prostředí Vláčky. V prvním a druhém ročníku jsou pak tato prostředí izomorfní. Nenacházíme v pracovních sešitech nakladatelství H – mat žádné úlohy, které by tato prostředí cíleně spojovala. K tomu dochází teprve ve třetím ročníku, kdy jsou za sebou záměrně řazena cvičení, ve kterých žáci mohou najít paralelu při jejich řešení. Jedním z těchto cvičení je např. toto:

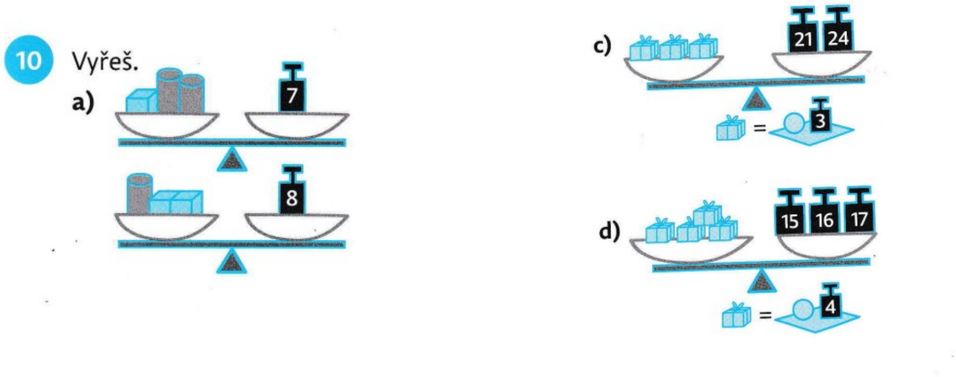


Obr. 23 Propojení dvou izomorfních prostředí, zdroj: HEJNÝ, Milan. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-8088247-22-7, s. 8.

Tomu ale předchází drobná změna matematického jazyka, kdy jsou žáci nejprve vedeni k tomu, aby barvu a délku vláčků zpočátku zaznamenávali jen pomocí barevných teček. Poté následuje další změna matematického jazyka, kdy jsou barvy zastoupeny pouze počátečním písmenem dané barvy a obdélníkový tvar vagónků zastupují kruhy s uvedeným počátečním písmenem (viz. Obr. 22).

Obě tato prostředí pak pomocí výše uvedených situací/zadání připravují spolu s dalšími prostředími (např. myšlené číslo, hadi, krokování, algebrogramy, schody, slovní úlohy, které číslo je v obálce, …) žáky na rovnicové situace, a tím ve vyšších ročnících na rovnice.

Než dojde na práci s rovnicemi, žáci již známá, výše uvedená, prostředí sami přepisují do rovnic, popř. přiřazují k zadání správně napsanou rovnici. Jejich neznámou nejprve tvoří např. vagónek pod plachetkou, maska, iniciály, velká písmena abecedy, obálka. V 5. ročníku je pak zavedeno další prostředí. Jedná se o prostředí Váhy, kde neznámou zastupuje krychle, válce, koule nebo balíčky, jak je vidět na obr. 23.



Obr. 24 Prostředí Váhy, zdroj: HEJNÝ, Milan. *Matematika 5: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2022]. ISBN 978-80-88247-32-6, s. 55.

Teprve po těchto izomorfních modelech dochází k tomu, že neznámou zastupuje malé písmeno abecedy.

Než se tedy děti dostanou v 5. ročníku k samotným rovnicím, tak projdou následujícím postupem:

1. prožitek – modelování, dramatizace situací s dětmi (např. krokování, schody),
2. manipulace – pomocí např. figurek, vláčků,
3. ikonický zápis rovnicových situací – sem patří např. šipkové zápisy, hadi, váhy,
4. matematický zápis – pomocí malých písmen abecedy.

Teprve nyní se děti dostávají k samotným rovnicím, kde neznámou mají vyjádřenou pomocí malých písmen abecedy a řeší je už skutečně jako rovnici v běžných učebnicích. Vzhledem k tomu, jak dlouhá k nim vedla cesta je předpoklad, že si s neznámou v rovnicích poradí bez větších potíží. Zda tomu tak skutečně je, by prokázal výzkum.

1.5.4 Podobné úlohy v pracovních sešitech jiných nakladatelství

V rámci této diplomové práce jsem se seznámila s pracovními sešity nakladatelství SPN – pedagogické nakladatelství, a. s., Nová škola – DUHA, NOVÁ Škola, s. r. o., Nakladatelství Fraus, s. r. o. a PRODOS, pedagogické nakladatelství.

Pracovní sešity těchto nakladatelství prakticky nenabízejí žádné alternativy zadání, kdy číslo je zároveň počtem i veličinou. Jedinou výjimku tvoří prostředí mincí, kdy děti pracují s počtem, který vyjadřuje množství mincí a veličinou, která je dána hodnotou jednotlivých mincí.

Ani tak nelze v mnoha učebnicích nalézt úlohy, které by byly zadány tímto způsobem. Většina úloh využívá mince jako prostředek ke sčítání a odčítání jejich nominálních hodnot, a také pro demonstraci a pochopení principu násobilky jako postupného sčítání, popř. pomocí nich demonstruje číselné řády desítek a jednotek.

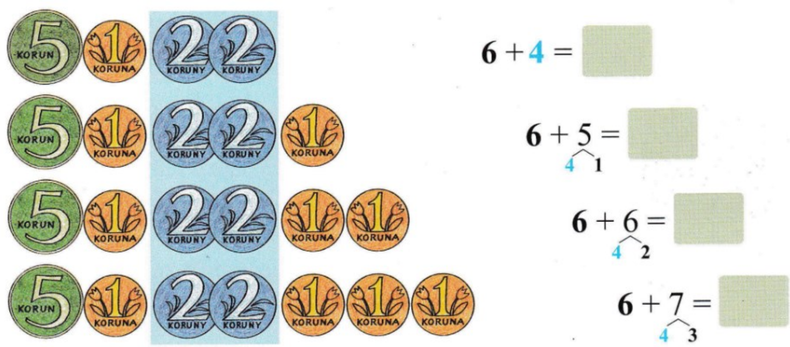
1.5.4.1 Úlohy na sčítání a odčítání

Typy úloh na sčítání a odčítání, při kterých se hodnoty mincí znázorňují i zapisují pomocí čísel a znamének se například nacházejí v pracovních sešitech nakladatelství Nová škola – DUHA:

a)

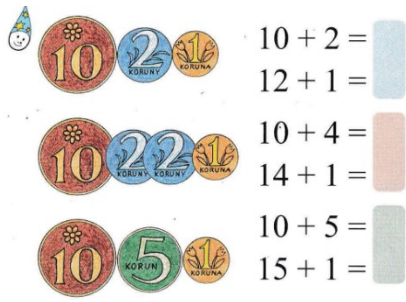
Obr. 25 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-00-1, s. 35.

b)



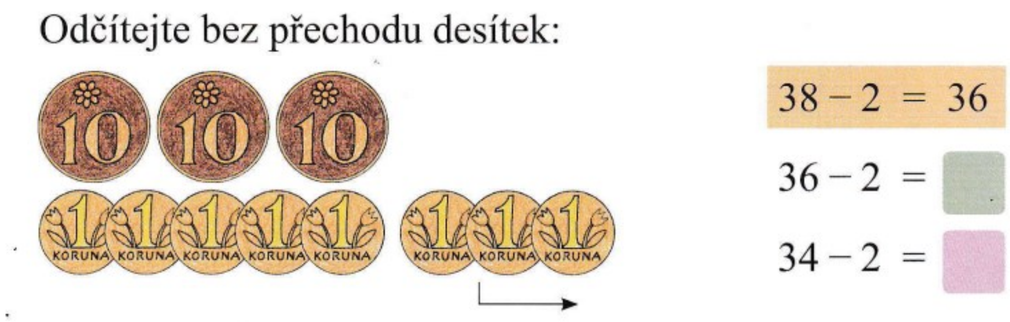
Obr. 26 Prostředí mince – sčítání s přechodem přes desítku, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-00-1, s. 32.

c)



Obr. 27 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-00-1, s. 7.

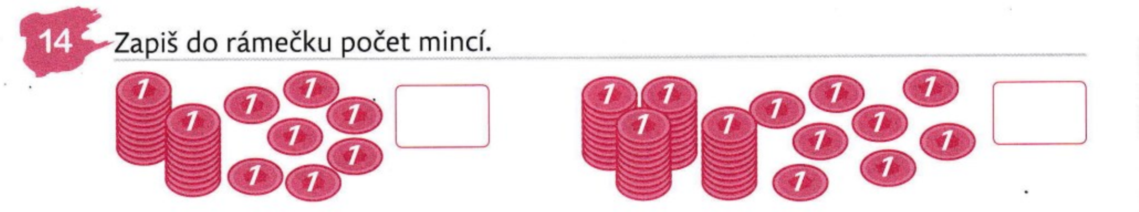
d)



Obr. 28 Prostředí Mince – odčítání, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0, s. 18.

Jiný typ úlohy využívají učebnice Nakladatelství Fraus, s. r. o. ve své řadě Matematika se čtyřlístkem, kde lze nalézt úlohy typu:

e)



Obr. 29 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: KOZLOVÁ, Marie, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Alena RAKOUŠOVÁ. *Matematika 2 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. 2. vydání. Plzeň: Fraus, 2022. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-806-8, s. 26.

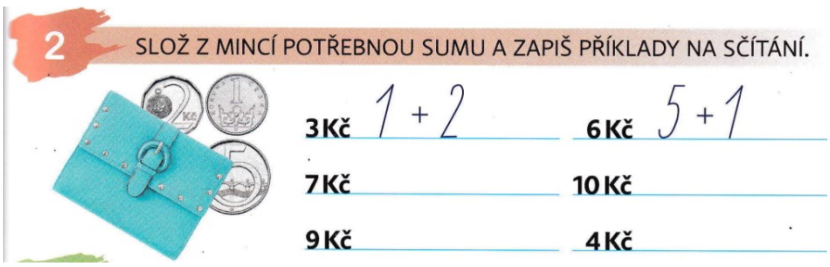
f)

Obr. 30 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: HALASOVÁ, Jitka; KOZLOVÁ, Marie; PĚCHOUČKOVÁ, Šárka a TOMŠÍKOVÁ, Jana. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. 3. vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus, 2021. ISBN 978-80-7489-672-9, s. 44.

g)

Obr. 31 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: HALASOVÁ, Jitka, Marie KOZLOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Jana TOMŠÍKOVÁ. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. 3. vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2021. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-673-6, s. 8.

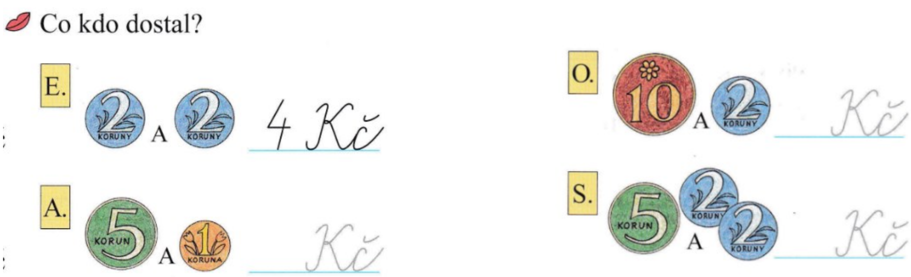
h)



Obr. 32 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: HALASOVÁ, Jitka, Marie KOZLOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Jana TOMŠÍKOVÁ. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. 3. vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2021. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-673-6, s. 17.

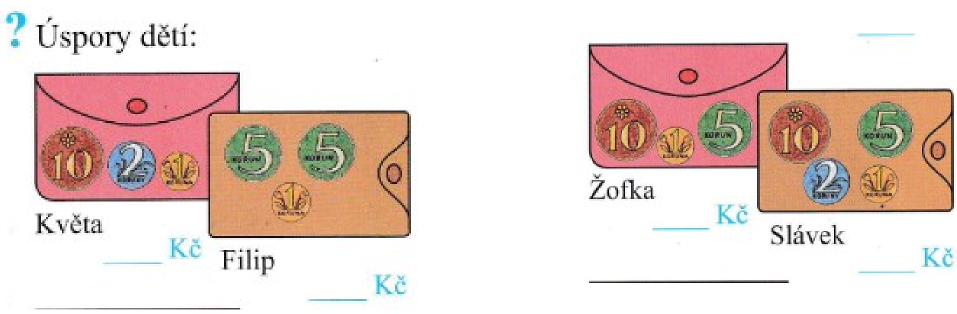
Lehce odlišnou úlohu nabízí v pracovních sešitech u NOVÁ Škola, s. r. o.:

i)



Obr. 33 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 37.

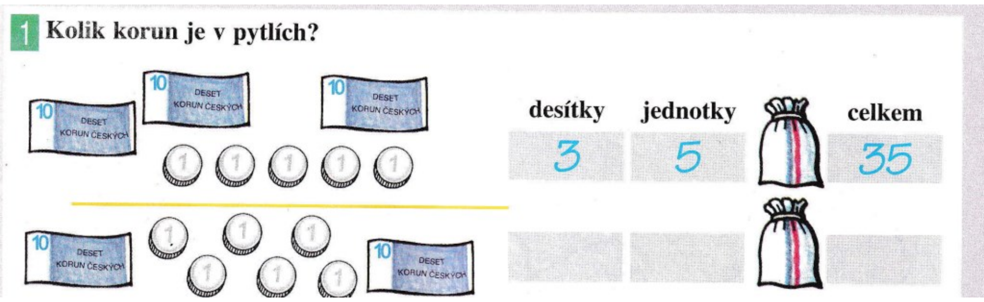
j)



Obr. 34 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 55.

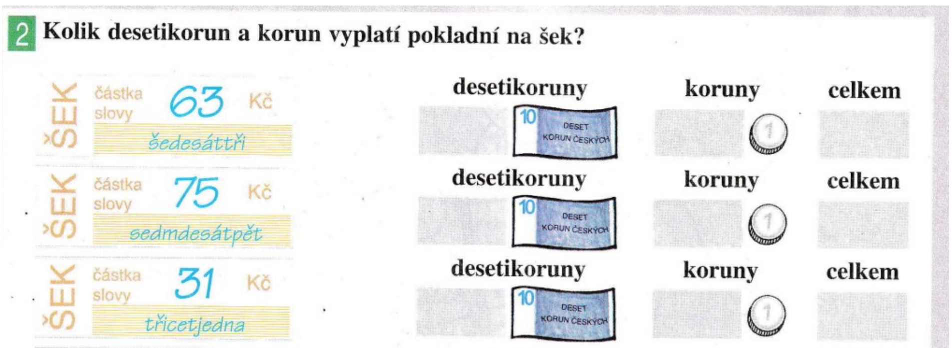
A v neposlední řadě se k těmto úlohám dá přidat i úloha z pracovních sešitů nakladatelství PRODOS, pedagogické nakladatelství, ve kterých probíhá nácvik řádů desítek a jednotek na pokladních šecích:

k)



Obr. 35 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: MIKULENKOVÁ, Hana, Josef MOLNÁR. *Matematika pro 2. ročník 2. díl.* Olomouc: PRODOS spol. s r. o., 2009. ISBN 978-80-85806-88-5, s. 9.

l)



Obr. 36 Prostředí Mince – sčítání, zdroj: MIKULENKOVÁ, Hana, Josef MOLNÁR. *Matematika pro 2. ročník 2. díl.* Olomouc: PRODOS spol. s r. o., 2009. ISBN 978-80-85806-88-5, s. 9.

1.5.4.2 Úlohy na násobení

Úlohy na násobení jsou v pracovních sešitech mnohem častější a různorodější, ale také se v pracovních sešitech velice málo opakují.

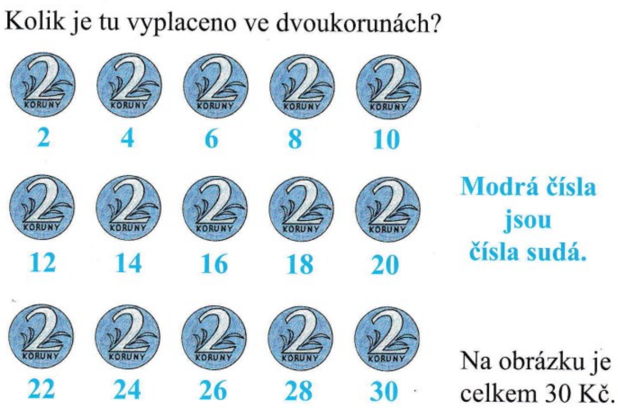
Pokud se podíváme do nakladatelství SPN – pedagogické nakladatelství, a. s., nalézá se v pracovních sešitech úloha následujícího typu:

a)

Obr. 37 Prostředí Mince – násobení, zdroj: ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2013. ISBN 978-80-7235-530-3, s. 59.

V nakladatelství NOVÁ Škola, s. r. o. se lze setkat s úlohou velice podobnou úloze předchozí.

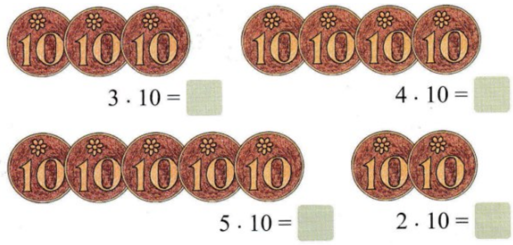
b)



Obr. 38 Prostředí Mince – násobení, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0, s. 7.

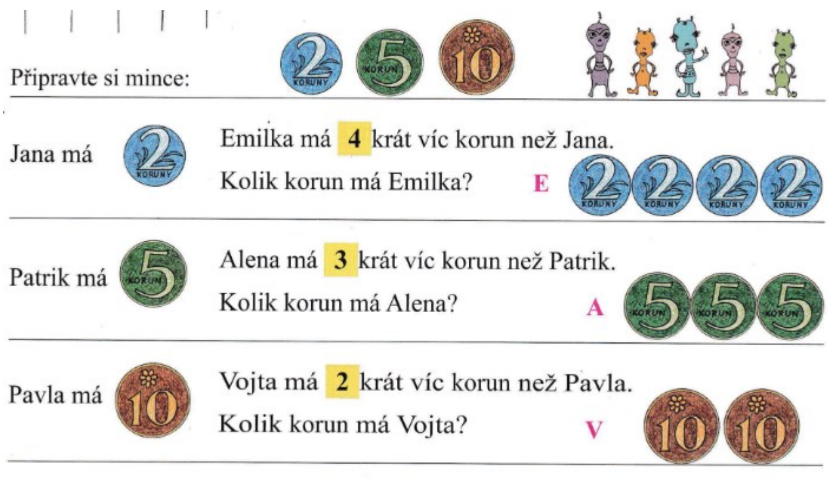
Můžeme zde nalézt i úlohu lehce pozměněnou, kdy jsou děti již přímo směrovány na použití násobilky.

c)



Obr. 39 Prostředí Mince – násobení, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0, s. 46.

Nakladatelství NOVÁ Škola, s. r. o. předkládá použití násobení také v krátkých slovních úlohách.



Obr. 40 Prostředí Mince – násobení, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0, s. 53.

U veškerých uvedených úloh nenacházíme paralelu s prostředím vláčky.

1.5.4.3 Úlohy typů podobných prostředí Vláčky

Z hlediska této diplomové práce jsou důležitější takové úlohy, ve kterých lze najít paralelu s úlohami o vláčcích. V pracovních sešitech, které jsem měla možnost zhlédnout, jsem našla úlohy typu:

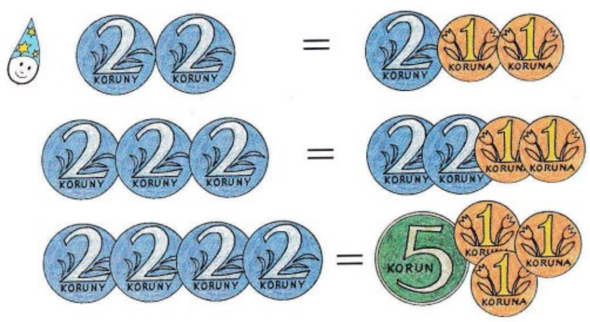
1. Postav stejně dlouhé vláčky (add 2),
2. Jaký vláček je delší (add 4),
3. Vytvoř dva stejně dlouhé vláčky (add 8),
4. Jaký vagónek je schovaný pod plachtou (add 10).

Nejvíce úloh se objevuje u typu „Postav stejně dlouhé vláčky“ a „Jaký vagónek je pod plachetkou“. Zbylé dva typy se objevují ojediněle - “Jaký vláček je delší“ a „Vytvoř dva stejně dlouhé vláčky“. Můžeme je nalézt v pracovních sešitech několika nakladatelství.

Ostatní typy úloh se mi nepodařilo nalézt.

Zaměřím se nyní na úlohy typu “Postav stejně dlouhé vláčky“. Tyto úlohy jsem našla v pracovních sešitech nakladatelství Nová škola – DUHA, NOVÁ Škola, s. r. o. a PRODOS, pedagogické nakladatelství.

Začnu prvním nakladatelstvím s pracovními sešity pro II. ročník. Úkolem dětí je k hodnotám na levé straně, kde jsou naváděny na násobilku dvou, vyplatit pomocí různých mincí stejnou hodnotu.

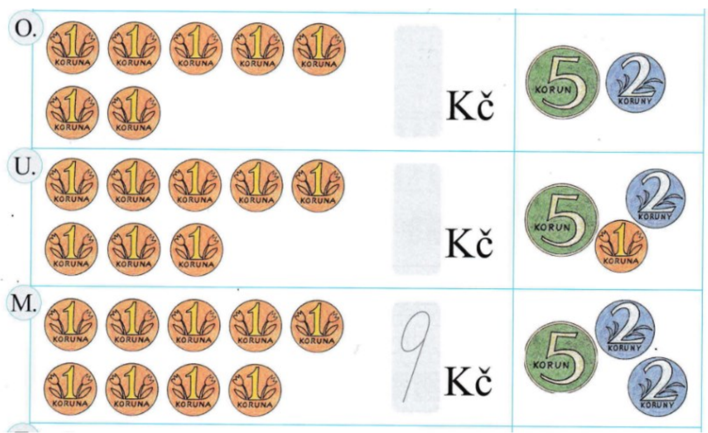


Obr. 41 Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-00-1, s. 6.

Další podobnou úlohu lze najít až v 2. díle těchto pracovních sešitů. Žáci si při ní zároveň procvičují řády desítek a jednotek. Jejich úkolem je předložené peněžní hodnoty vyplatit pomocí desetikorun a korun. Zadané peněžní hodnoty vypadají následovně.

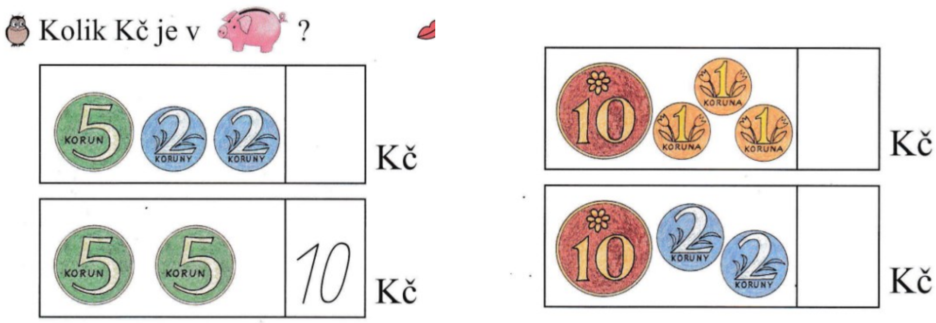
Obr. 42 Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0, s. 9.

Pokud bychom hledali další související cvičení, museli bychom přejít do jiných pracovních sešitů, jako např. do pracovních sešitů Nové školy, s. r. o., kde se na straně 19 objevuje následující úloha, ve které je úkolem dětí pozorovat, jakým způsobem se dají pomocí mincí vyplatit hodnoty od 5 do 10 korun a hledat další možnosti řešení. Zde uvádím jen část celostránkového zadání.



Obr. 43 Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 19.

Ve stejném pracovním sešitě je možné na straně 37 nalézt úlohu trošku jiného typu. Hodnotu mincí zapisují pomocí číslic. Opět uvádím, vzhledem k rozsahu, pouze část.



Obr. 44 Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 37.

A na straně 42 je typ zadání, kdy celková částka je zde vyjádřena různými hodnotami mincí. Úlohou dětí je opět pozorovat a pomocí mincí vyjádřit stejnou nominální hodnotu, ale novým způsobem.

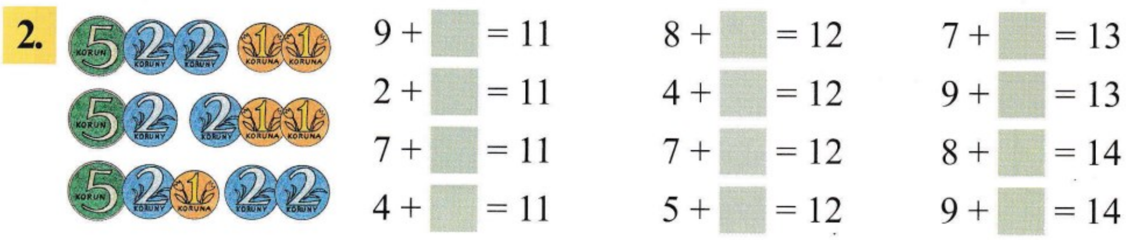
Obr. 45 Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 42.

Další úloha tzv. rozměňuje desetikorunu a děti hledají přípustné možnosti.

Obr. 46 Postav stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 52.

Tímto jsem vyčerpala úlohy typu „Postav stejně dlouhé vláčky" a dále se budu věnovat úlohám typu „Jaký vagónek je schovaný pod plachetkou". Úloh, které jsem při prohlížení pracovních sešitů našla je mnohem méně. Objevují se opět v PS Nové školy, s. r. o. ve druhém ročníku na str. 41. Není to tak úplně rovnocenná úloha, neboť neznámá hodnota není tak úplně neznámá. Hodnotu, kterou děti hledají, mají vyjádřenou pomocí mincí, které jsou navíc. Zadání zní:

K obrázkům peněz hledej příklady.

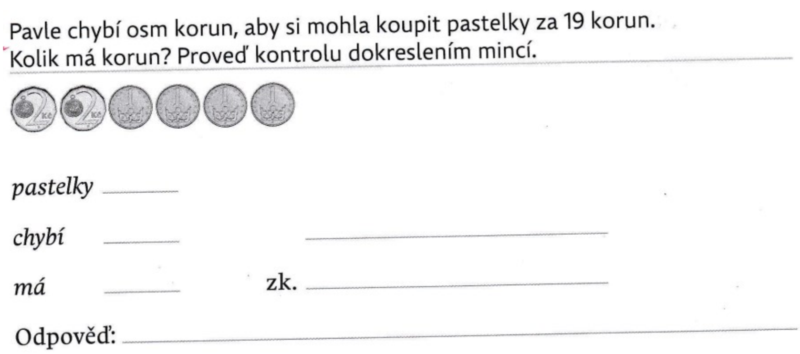


Obr. 47 Jaký vagónek je schovaný pod plachetkou, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-00-1, s. 41.

Pokračuji druhým dílem stejného ročníku jiným typem zadání, ve kterém již chybějící hodnota není ani naznačená a děti ji musí pomocí mincí zjistit, dopočítat. Kolik korun chybí do 20 Kč, 30 Kč, 40 Kč.

Obr. 48 Jaký vagónek je schovaný pod plachetkou, zdroj: ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0, s. 10.

V učebnici Nakladatelství Fraus, s. r. o. je možné se setkat se slovní úlohou, jejíž podobu uvádím níže.



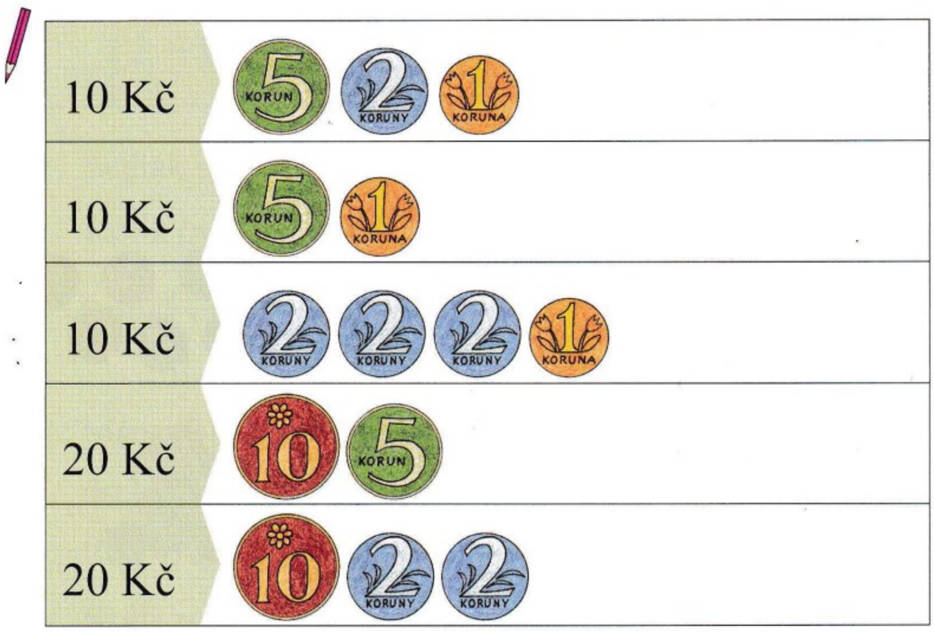
Obr. 49 Jaký vagónek je schovaný pod plachetkou, zdroj: KOZLOVÁ, Marie, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Alena RAKOUŠOVÁ. *Matematika 2 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. 2. vydání. Plzeň: Fraus, 2022. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-806-8, s. 12.

Jiný typ úlohy nabízí Nová škola - DUHA. V zadání je uvedena část do hodnoty 15 a úkolem dětí je neznámou část doplnit.

Obr. 50 Jaký vagónek je schovaný pod plachetkou, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 38.

Trochu odlišná je úloha další, která je uvedena ve stejném pracovním sešitě. Děti přímo nabádá k dokreslování, což u předchozích úloh nebylo uvedeno.

Dokreslujte mince podle toho, kolik chybí do 10 Kč (20 Kč).

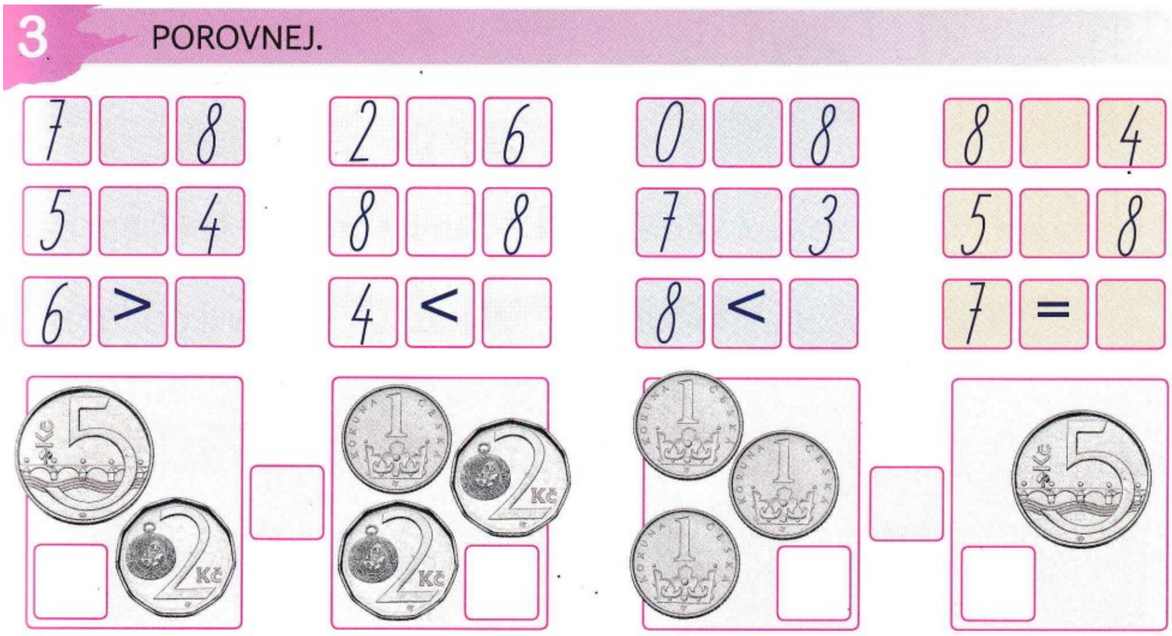


Obr. 51 Jaký vagónek je schovaný pod plachetkou, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 52.

Problém spatřuji v tom, že úlohy, které jsou takto zadané, žádným způsobem nepřipravují ději na vyjádření, jak jakýmkoliv způsobem zaznamenat neznámou hodnotu a vyjádřit zadaný problém pomocí matematického zápisu. Nikde v zadání se neobjevuje, aby děti úlohu přepsaly a neznámou tak byly nuceny vyjádřit např. pomocí počátečního písmene, zkratky, ikony či znaku.

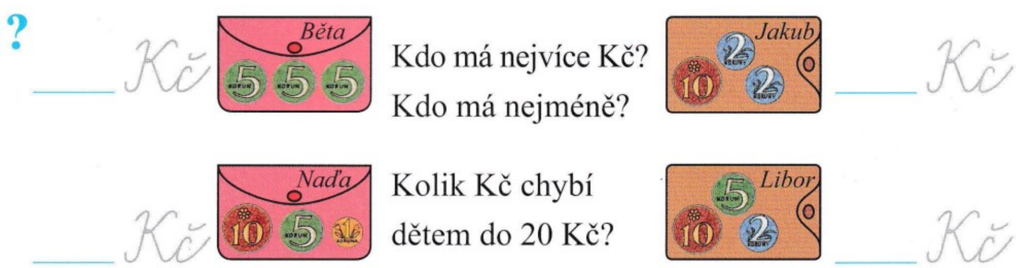
Co se týká ostatních dvou typů úloh, které jsou uvedené v úvodu této kapitoly, tak ty jsem objevila pouze ojediněle a ani v rámci jedné řady pracovních sešitů se neopakovaly.

Začnu s úlohou „Jaký vláček je delší“. Byl uveden v PS Nakladatelství Fraus, s. r. o. na str. 7. Součástí tohoto zadání je nejprve porovnávání čísel, teprve poté následuje cvičení na porovnávání mincí.



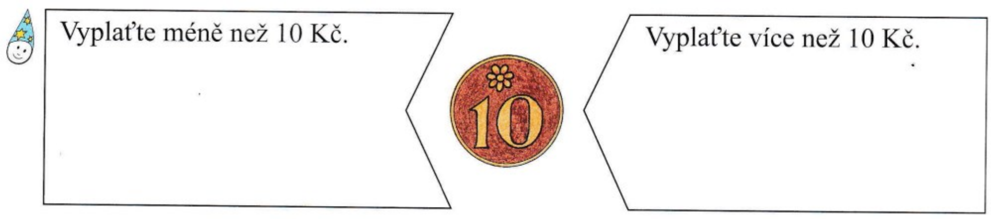
Obr. 52 Jaký vláček je delší, zdroj: HALASOVÁ, Jitka, Marie KOZLOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Jana TOMŠÍKOVÁ. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. 3. vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2021. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-673-6, s. 7.

Další úloha je v pracovním sešitě pro první ročník nakladatelství Nová Škola, s. r. o. na s. 51. Součástí úlohy je i typ „Jaký vagónek je schovaný pod plachtou“.



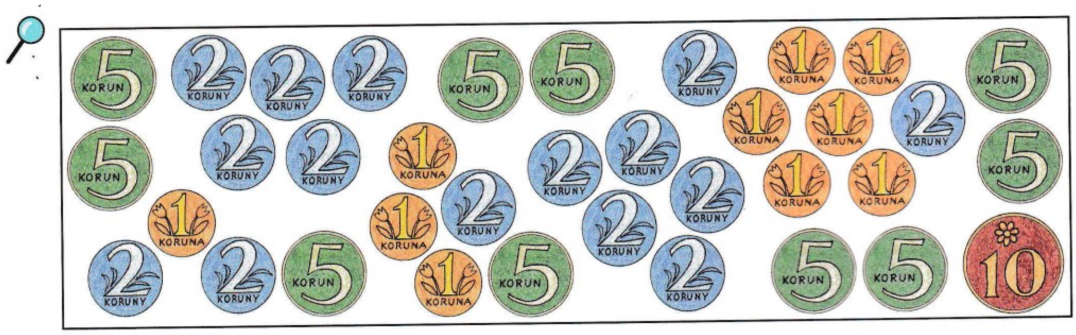
Obr. 53 Jaký vláček je delší, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 51.

Ve stejném pracovním sešitě najdeme ještě úlohu, ve které žák hledá hodnoty v mincích menší než deset a větší než deset.



Obr. 54 Jaký vláček je delší, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 59.

No a jako poslední uvádím úlohu na typ „Vytvoř stejně dlouhé vláčky“, kterou jsem našla pouze jednu jedinou. V té se pomocí čar oddělují peníze po hodnotě 10 Kč a byla v pracovním sešitě Nové školy Brno pro 1. ročník.



Obr. 55 Vytvoř stejně dlouhé vláčky, zdroj: ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2, s. 28.

2. Praktická část

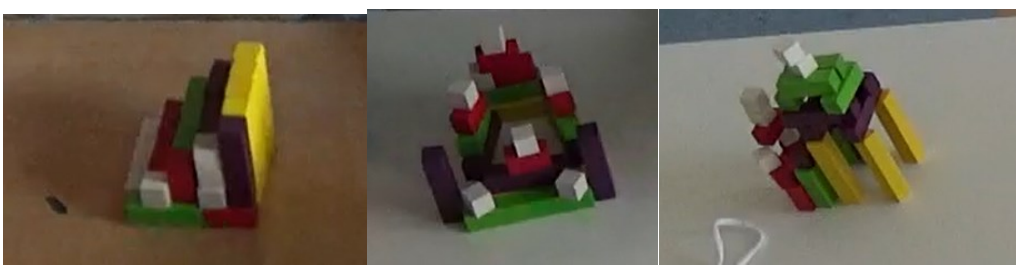
Praktická část této diplomové práce byla uskutečňována až v květnu a červnu školního roku 2020/2021. Problémem byla právě probíhající pandemie virové infekce Covid-19, která zasáhla nevhodným způsobem do průběhu celého testování a následně i doby zpracovávání této diplomové práce.

Počátek testování byl připraven na jaro školního roku 2019/2020. Školy byly bohužel na dlouhou dobu úplně uzavřeny, takže z plánovaného experimentu ve třídě prvňáčků sešlo a musel proběhnout až v dalším školním roce u druháků. Experiment tak proběhl ve třídě 2. A.

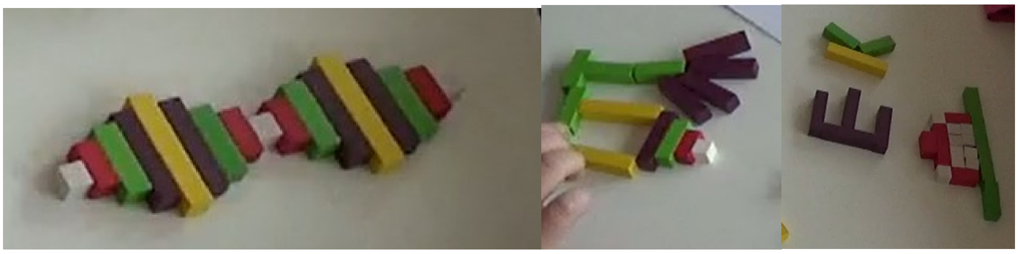
Cílem praktické části bylo prozkoumat myšlenkové procesy žáků v průběhu samostatného řešení úloh, ověřit srozumitelnost zadání a odhalit případná úskalí či nejasnosti při jejich interpretaci dětmi. Některá zadání byla zformulována odlišně od učebnic nakladatelství H-mat, o. p. s. a, některé formulace zadání byly z učebnice převzaty.

Ve třídě 2. A paní učitelka učila podle Hejného metodiky z učebnic nakladatelství Fraus. V nich se prostředí Vláčků vůbec nevyskytuje. Je v nich prostředí děda Lesoň, které měly děti v době našeho experimentu vyzkoušené ke zvířeti se silou psa. Prostředí Vláčky tak viděly prvně při experimentu. Experimentu se zúčastnilo osm dvojic dětí, objevovaly se zde jak chlapecké dvojice, tak dívčí dvojice, ale i smíšené dvojice.

Začátek experimentů začínal vždy stejně. Děti jsem si odvedla na výzkum po jedné dvojici do klidné třídy. Vždy jsme si společně popovídali o škole a následně jsem řeč stočila na pomůcku, kterou jsem dala každému žákovi vlastní. Nejprve si mohly pomůcku osahat a jen tak nezávisle stavět dle svého uvážení. Většina dětí stavěla 3D modely, některé i lineární modely – většinou iniciály vlastního jména. Postavily převážně to, co vycházelo z jejich zkušeností z období předškolního věku. Plně při tom využily různosti délek jednotlivých hranolků.



Obr. 56 Seznamování s pomůckou - 3D modely



Obr. 57 Seznamování s pomůckou - 2D modely

Tato fáze byla nutná k tomu, aby se děti lépe soustředily na následnou vlastní práci a neměly nutkání si s pomůckou neustále hrát. I přesto některým dětem trvalo delší dobu, než se odpoutaly od samotného hraní a začaly se soustředit na připravenou úlohu. Než se pustily do samostatného bádání, tak jsme si společně zavedli pojmy vláčky a vagónky. Zavedli jsme si jako úmluvu informaci, že i jeden vagónek se může státi vláčkem. K veškerým úlohám z pracovního listu měly děti k dispozici pomůcku Cuisenairovy hranolky.

2.1 Rozbor úloh

Pracovní list obsahoval šest úloh. Typy jednotlivých úloh byly seřazeny přesně v takovém pořadí, v jakém je předkládá učebnice H-mat o. p. s. pro 1. ročník. Zadání úloh i množství vagónků v jednotlivých úlohách bylo v průběhu experimentu mírně pozměněno. Zadání úloh bylo stručné a snažilo se o přesné vyjádření požadavku na zpracování. Děti obdržely celý obsah sáčku s Cuisenairovými hranolky, tudíž jich měly více, než bylo uvedeno v zadání. Před samotným plněním úkolů jsem je navedla k tomu, aby si v průběhu experimentu vždy daly stranou k práci pouze takové hranolky, které jsou v zadání pracovního listu uvedeny. I přesto děti na tuto informaci v průběhu pracovního listu často zapomínaly.

2.1.1 Postav z vagónků čtyři různé vláčky

Pracovní list začínal úlohou, která je v učebnicích použita jako zavádějící. V učebnici je tato úloha poněkud jednodušší, neboť po dětech požaduje pouze postavení vláčků a nabízí jim tři druhy vagonků ve složení bílý, červený a zelený. Učebnice dále nabízí vzorové řešení.

V mém pracovním listu byla tato úloha zadána ihned jako úloha s podmínkou, ve které se žádalo postavení předem daného počtu vláčků. Děti měly k dispozici sedm kusů vagónků:

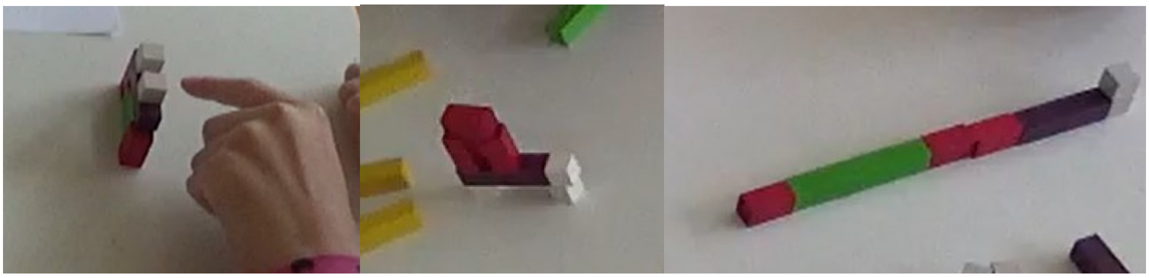
dva bílé, dva červené, dva zelené a jeden fialový. Můj pracovní list neobsahoval žádné vzorové řešení. Zadání jsem četla já, někdy bylo nutné přečíst ho i několikrát a s velkým důrazem na slovo různé.

První dvě dvojice jsem posadila proti sobě, což se v průběhu experimentu ukázalo jako nešťastná volba, neboť v okamžiku, kdy děti postavily vláčky ze dvou barevně stejných kombinací vagónků v opačném pořadí, měly pocit, že jejich řešení jsou stejná. Neuvědomovaly si, že jsou zrcadlově převrácené. Proto jsem další dvojice už posadila k lavici tak, aby seděly vedle sebe.

Očekával jsem, že děti k sobě pospojují jednotlivé vagónky taky, aby se neopakovala žádná, již vyobrazená, kombinace, a že k této úloze použijí vagónky v daném počtu, které mají k dispozici. Dále jsem očekávala, že děti nebudou žádným způsobem řešit situaci, že jeden vagónek zůstal nespojený s jiným vagónkem, neboť na možnost vláčku v podobě jednovagónku byli upozorněni před samotným zahájením.

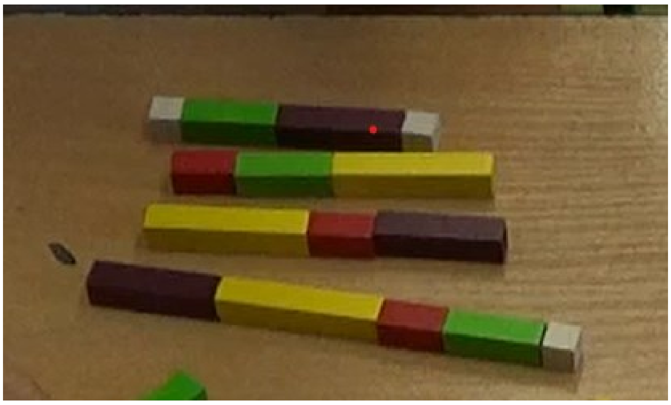
V průběhu řešení této úlohy se objevilo několik jevů.

1) Některé děti začaly stavět svá řešení ve 3D modelech tak, jak vypadají stavby předškolních dětí, vycházející z jejich vlastních poznatků. Dítě tudíž nedošlo do fáze, kdy bylo schopné abstrakce, tedy v myšlení odhlédnout od konkrétních znaků, vlastností a vzhledu skutečného předmětu – vlaku, vše zobecnit a přenést jen samotný pojem – podstatu.



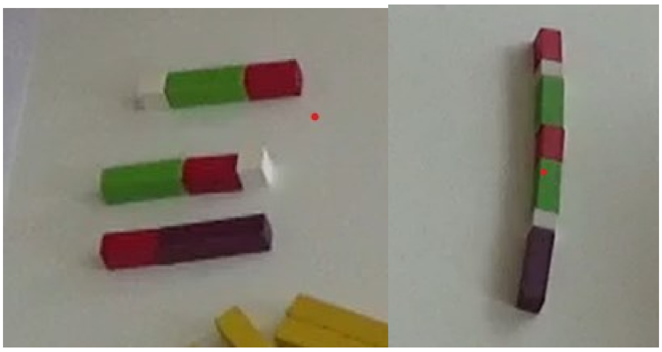
Obr. 58 Postav z vagónků čtyři různé vláčky – jev: 3D model, zdroj: vlastní

2) Ojediněle se objevil jev, kdy děti nevnímaly zadání ve formě obrázků jako nějaké omezení a stavěly vagónky podle toho, jak se jim líbily barevné kombinace z celého obsahu sáčku. Bylo by asi vhodné přidat formulaci „z těchto vagónků“.



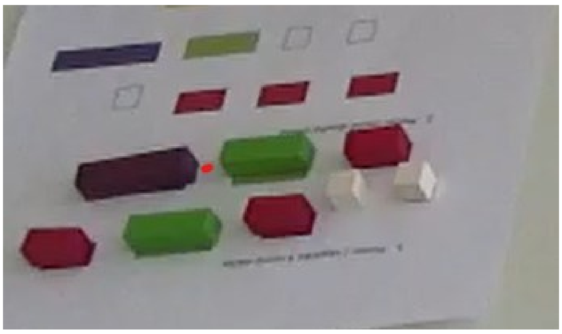
Obr. 59 Postav z vagónků čtyři různé vláčky – jev: nepřijetí omezení počtu kusů pro řešení, zdroj: vlastní

3) Dalším jevem byla skutečnost, že děti potřebovaly vědět, zda je nutné použít úplně všechny vagónky zobrazené pod zadáním. Po delším váhání došly děti samy k závěru, že ano, i když v zadání se nic takového nepíše. K tomuto rozhodnutí je přiměla skutečnost, že jsou tam vyobrazené. Jednaly tak na základě předchozích zkušeností s prací s učebnicemi a pracovními sešity, ve kterých vždy pracovaly s tím, co vše bylo v zadání uvedeno.
4) Děti nikdy nepřišly s dotazem, co si mají představit pod pojmem různosti. V průběhu plnění tohoto zadání jsem se však setkala s dětmi, které postavily vláčky typu ČZ a ZČ. Při mém dorazu, zda se jedná o různé vláčky, znejistěly a raději přestavěly i ty ostatní, aby jim tato kombinace nemohla vyjít. V tuto chvíli jsem dané řešení ponechala bez komentáře. Neviděla jsem nyní důvod pro vyjasňování si pojmu různosti, neboť děti měly i další možnosti, jak vyhovět dané podmínce.
5) Nejproblematičtějším jevem se ukázala být podmínka počtu o postavení čtyř vláčků, kterou děti v převážné většině všech provedených experimentů nedodržely. Pro to, aby došlo k jejímu zakomponování do řešení, bylo nutné text opakovaně a společně přečíst a následně provést společný rozbor obsahu věty. Tento jev přiřazuji tomu, že požadovaný počet byl zadán odlišně, a to číslovkou a nikoliv slovem. V celém zadání se vyskytovala výhradně slova. Pro ověření této teorie by musel následovat experiment, což mě při realizaci mého experimentu nenapadlo. Výsledkem řešení se tak objevovaly vláčky různého počtu od jednoho, dvou či tří.



Obr. 60 Postav z vagónků čtyři různé vláčky – jev: podmínka počtu vláčků, zdroj: vlastní

6) V prvních pracovních listech, jak již bylo zmíněno, měly děti k dispozici lichý počet vagónků. Řešení dětem, které měly tuto variantu, trvalo o poznání déle, než dětem, které dostaly již upravený pracovní list, kde jejich zadání obsahovalo o jeden červený vagónek více, tudíž pracovaly se sudým počtem. Při variantě se sudým počtem se jejich řešení opíralo o sémantické zkušenosti, vycházející ze zkresleného faktu (především kreseb v dětských knížkách), že každý vlak potřebuje lokomotivu, a také že je potřeba dané množství spravedlivě rozdělit. Při sudém počtu vagónků mohli této své utkvělé představě lépe vyhovět.
7) V menší míře docházelo k tomu, že si děti při shromažďování vagónků potřebných k zadání, stavěly reálné pomůcky na předlohu na papíře, neboť velikostně téměř odpovídala předloha skutečnosti.



Obr. 61 Postav z vagónků čtyři různé vláčky – jev: výběr množství pomůcek, zdroj: vlastní

Závěr: Zpětně jsem toto cvičení vyhodnotila na začátek jako neúměrně těžké vzhledem k tomu, že bylo zadáno jako vstupní - seznamovací, neboť jeho řešení přineslo velké množství jevů, se kterými se děti potýkaly. Pro děti nebyly v tuto chvíli všechny informace ze zadání srozumitelné a činilo jim velké potíže udržet v paměti dané podmínky důležité pro řešení této úlohy. Takovéto množství jevů se již v žádné další úloze v takovémto množství již neopakovalo.

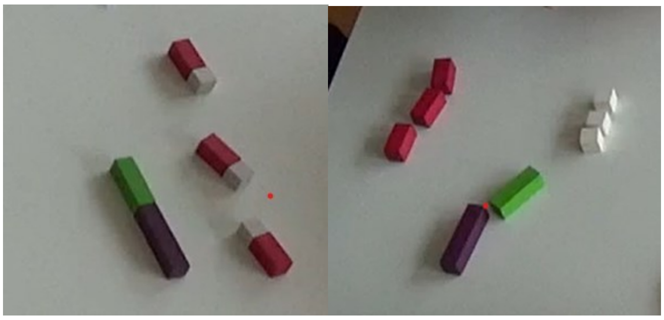
2.1.2 Postav stejně dlouhé vláčky

Tato úloha následuje v učebnici jako druhá. Text úlohy v pracovním listu je formulován shodně s pracovním sešitem. Na rozdíl od pracovního sešitu se liší v maximální možné délce použitých vagónků a v množství vagónků, které mají děti k dispozici. Pracovní sešit umožňuje použít pouze dva bílé, dva červené a dva zelené vagónky. Můj pracovní list jim nabízí tři bílé, tři červené, jeden zelený a jeden fialový. Pracovní sešit ani pracovní list zde nepředkládá vzorové řešení.

Moje zadání bylo sestavováno se záměrem, že děti vezmou nejdelší vláček jako maximální délku a k ní poté zkombinují délky zbylých vagónků tak, aby dostaly stejně dlouhé vláčky. Tento předpoklad se ukázal být chybným. Děti na tento způsob řešení přišly v ojedinělých případech. V průběhu řešení se naopak objevilo těchto několik jevů:

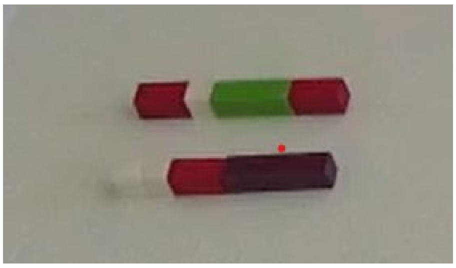
1) Děti jako řešení předložily barevné kombinace:
   a. BČ + BČ + BČ + FZ,
   b. BBB + ČČČ + ZF.

   Jev: Pojem stejnosti nebyl přenesen na délku vláčků, ale na barvy jednotlivých vagónků. To, že spojily k sobě vagónky zelené a fialové do jednoho vláčku souvisí se skutečností, že jim prostě zbyly, tak je k sobě spojily, aby vznikl vláček. Tento jev souvisí s mírou pochopení zadání. Zatím děti neměly žádné úlohy, kde by řešily pojem rovnosti, a tudíž nemohlo v tuto chvíli dojít k přenesení zkušeností z absolvovaných úloh.



Obr. 62 Postav stejně dlouhé vláčky – jev: neporozumění pojmu „stejné“, zdroj: vlastní

2) Podmínka stejnosti byla pochopena jinak, než byl původní záměr, jak bylo naznačeno v úvodu této kapitoly. Děti nevzaly fialový vagónek jako délku, podle které by všechny ostatní vláčky měly shodnou délku, ale kombinovaly vagónky metodou pokus – omyl až do té doby, než se jim ze všech povolených vagónků konečně podařilo sestavit vlaky stejně dlouhé, i když jen v počtu dva. To v žádném případě neodporuje zadání, jen předpokládanému řešení zadavatele této DP.

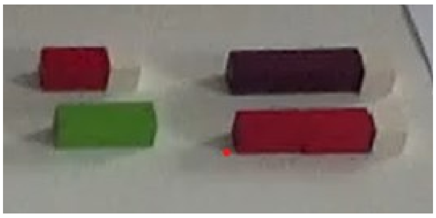


Obr. 63 Postav stejně dlouhé vláčky – jev: porozumění pojmu „stejné“ odlišně, zdroj: vlastní

3) Bohužel došlo k přenesení informace z předešlého cvičení (2.1.1). Projevilo se to tak, že děti za každou cenu potřebovaly postavit čtyři řešení, i když to zadání vůbec nezmiňuje. V rámci toho, aby došly k utkvělému řešení, braly si vagónky i mimo povolené množství, takže v hlavě jim nezůstala ukotvena žádoucí informace z předchozího cvičení, že mají pouze omezené množství, se kterým mohou úlohu řešit.

Obr. 64 Postav stejně dlouhé vláčky – jev: přenesení počtu
z předchozího cvičení, zdroj: vlastní

4) Jako dalším jevem se objevilo zkombinování zadání z předešlého cvičení týkající se počtu čtyř a nezvědomění si podmínky o stejné délce.



Obr. 65 Postav stejně dlouhé vláčky – jev: přenesení počtu
z předchozího cvičení a nepojetí pojmu „stejné“, zdroj: vlastní

Závěr: Děti se ještě v tuto chvíli nenacházely ve fázi, kdy by měly plně zvědomělý pojem stejnosti. Neměly také vytvořené žádné strategie řešení, vše řešily metodou pokus – omyl, bez pevně očekávaného výsledku. Výsledek jejich řešení byl nahodilý a mnohdy pro ně samotné překvapením.

V jednom případě jsem se zde setkala se situací, kdy jeden žák intuitivně začal chápat bílý vagónek jako jednotku délky vláčku, což následně uplatňoval při řešení dalších úloh. Jeho řešení pak byla vždy velice rychlá. Jednalo se o žáka, který hraje šachy na vysoké úrovni i s dětmi staršími o dva až tři roky.

2.1.3 Postav stejně dlouhý vláček jako …..

Jako další úlohu, kterou lze v učebnicích a pracovních sešitech najít je úloha, která již počítá se znalostí pojmu stejnosti v prostředí vláčků. V učebnici je použita formulace *„Postav stejně dlouhé vláčky jako …..“* a začíná s délkou fialového vláčku. K dispozici dětem dává vagónky v počtu tři bílé, tři červené, dva zelené. V další úloze následuje rozšíření o vagónek žlutý, ke kterému děti hledají stejně dlouhé vláčky. V pracovním sešitě pracují s vagónky bílými, červenými, zelenými a fialovým (3B, 3Č, 2Z, 1F).

V mém pracovním listu jsem zadání rozšířila o doplňující instrukce *„…… máš-li k dispozici následující vagónky. Nemusíš je použít všechny.“* A děti měly hledat vláčky odpovídající délce žlutého vagónku. Dostaly k dispozici vagónky v následujícím počtu – 7B, 3Č, 3Z, 1F, 1Ž. Na pozdějších pracovních listech jsem množství bílých vagónků zvýšila na 10 kusů. Zajímalo mě, zda budou chtít děti zkombinovat úplně všechny vagónky i přesto, že to nejde, protože v hodnotě čísel je jednotkové množství vagónků na hodnotě 34, což není dělitelné pěti (hodnota žlutého vagónku). Dále byly do úlohy záměrně vloženy dva fialové vagónky, které mohou být v této úloze zkombinovány výhradně s vagónkem bílým jen v opačném pořadí. Zajímalo mě, zda to děti použijí jako další variantu řešení.

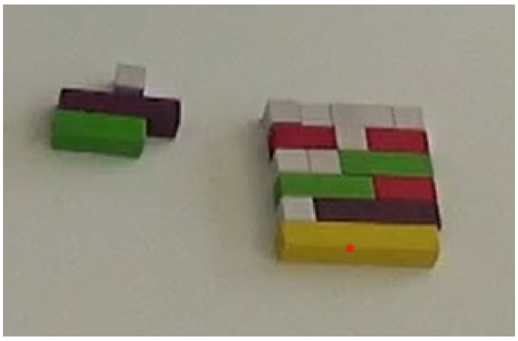
Při řešení této úlohy jsem očekávala, že děti si na předchozí úloze vyzkoušely a alespoň částečně uvědomily pojem stejnosti. Dále jsem očekávala, že děti vezmou žlutý vagónek jako požadovanou délku vláčku a budou k němu přikládáním kombinovat své varianty řešení. Také jsem u upravené varianty očekávala, že nebudou řešit, zda jim některé vagónky zbydou, protože v zadání mají přímo uvedeno, že je není třeba využít všechny. Sázela jsem také na přirozenou hravost a potřebu objevování a předpokládala jsem přirozené sestavování více variant řešení s využitím většiny vagónků a sestavení i variant opačných.

V průběhu vypracovávání této úlohy dětmi jsem zaznamenala několik jevů, které souvisely s/se:

1) *Zkušenostmi z minulých úloh.*

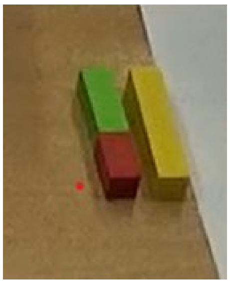
   Některé děti si zkušenosti byly schopné již po dvou úlohách přenést do dalšího cvičení, pro některé děti to bylo ještě brzy.

   Př.: Kombinaci BF s FB jsem u dětí zaznamenala jen ojediněle. Měly pocit, že toto řešení je vlastně úplně stejné, tudíž stačí jen ta jedna varianta a druhý fialový vagónek již nepoužily s argumentací, že to již nejde.



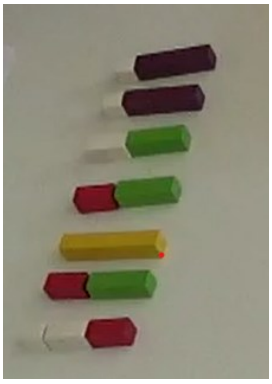
Obr. 66 Postav stejně dlouhý vláček jako ….. – jev: neujasnění si pojmu „různé“, zdroj: vlastní

2) *Pochopením a interpretací textu*.
    a. V zadání se píše pouze *postav stejně dlouhý vláček* … – žák tedy postavil pouze jedno řešení, protože v zadání je jednotné číslo a tudíž jedno řešení stačí. Což jsem následně vyhodnotila jako vlastní chybu ve formulaci zadaného úkolu. Žák plně vyhověl požadavku v zadané úloze.



Obr. 67 Postav stejně dlouhý vláček jako ….. – jev: zadání v jednotném čísle, zdroj: vlastní

    b. V zadání se nepíše, že řešením mají být různé vláčky, takže někteří postavili stejně vypadající řešení. O tuto formulaci bych při experimentu rozšířila. V pracovním sešitě to asi není nutné, neboť řešením se zabývá velké množství dětí a tudíž variant se objeví několik.



Obr. 68 Postav stejně dlouhý vláček jako ….. – jev: v zadání není pojem různosti, zdroj: vlastní

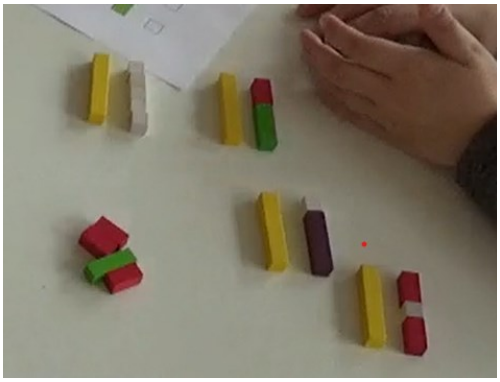
c. *nejasným uspořádáním zadání*. Vyobrazené vagónky pod zadáním, které mohou použít, vůbec nebraly na vědomí a prostě volně sestavovali řešení z hromady vagónků bez omezení. V jejich vnímání vagónky vyobrazené pod zadáním nepatřily k úloze třetí, ale byly samostatnou další úlohou.

3) *Samotnou strategií při řešení*. Děti přišly na tři způsoby.
   a. Někde do prostoru před sebe si položily žlutý vagónek, ke kterému přidávaly další kombinace. Tyto nové vláčky sestavovaly poměřováním s těmi, které tam již měly sestavené a ne se žlutým vzorovým vláčkem.

Obr. 69 Postav stejně dlouhý vláček jako ….. – jev: ujasnění si pojmu délky, zdroj: vlastní

   b. Ke vzorovému vláčku ze zadání úlohy postupně tvořily nové kombinace. Správnost délky těchto nově vzniklých vláčků ověřovaly přiložením vzorového žlutého vagónku a teprve poté si byly jisti, že úkol vyřešily správně.

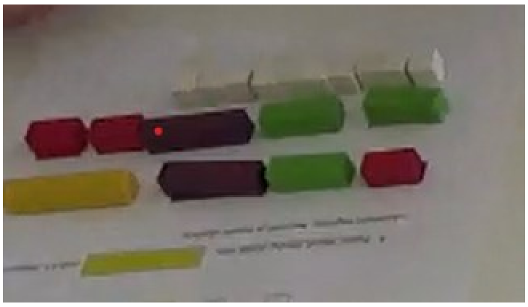
c. Další strategií bylo vždy nejprve položení žlutého vagónku a k němu přikládání nové kombinace vláčku.



Obr. 70 Postav stejně dlouhý vláček jako ….. – jev: neujasnění si pojmu délky, zdroj: vlastní

4) *Nepochopením významu barevností vláčků.*

Jev, který mě samotnou překvapil, bylo to, že si děti ověřovaly, zda žlutý vagónek, který mají k dispozici na práci (pomůcka), je stejně dlouhý jako žlutý vagónek, vyobrazení na pracovním listu v zadání. Tímto způsobem si pak následně ověřovaly i veškeré vagónky, které měly použít k práci. Při dorazu na význam barvy vagónků, proč je různá, byl uvedený důvod, aby se nepřehlédl spoj. Takže jim v tuto chvíli zůstal skryt vztah barevnosti a délky vagónků.



Obr. 71 Postav stejně dlouhý vláček jako ….. – jev neujasnění si významu barev, zdroj: vlastní

5) *Nedostatečnou vizuální percepcí.*

Pro děti bylo důležité si počet vagónků k práci ověřit. Prováděly to stejným způsobem, jako ověřovaly délky vagónků, jen na pracovní list vyskládaly takový počet vagónků, aby byly zakryty veškeré vyobrazené vagónky z pracovního listu. Příčinou tohoto způsobu ověřování by mohla být nedostatečně zahrnutá cvičení na vizuální percepci v průběhu prvního ročníku, a to jak ve formě počtu, tak i ve formě různosti předkládaných prvků.

2.1.4 Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku

V pořadí čtvrtou úlohou je úloha, která je inverzní k úloze v předchozím zadání. Děti mají sestavený vláček a jejich úkolem je k jeho délce přiřadit vagónek stejně dlouhý tak, aby délka předloženého vláčku byla shodná s přiloženým vagónkem. Tato úloha je v učebnicích H-mat také předkládána jako čtvrtý typ a text v pracovním sešitě se shoduje s textem na mém pracovním listu. Shodné je i vyobrazení ve smyslu barevnosti a názornosti váčků, jen v pracovním sešitě je menší v poměru ke skutečnosti o 1 cm u žlutého vagónku.

Předložené obrázkové verze vláčků a černé obrysy vagónků pro výsledné řešení byly na mém pracovním listu téměř stejně dlouhé jako ve skutečnosti. Obrázky na papíře byly asi o cca 4 mm kratší u žlutého vagónku, než je jeho skutečná délka, tj. rozdíl o 8%. Ve stejném provedení byly i ostatní vagónky a vláčky.

Tak jako u předchozí úlohy jsem očekávala, že si děti na lavici sestaví z fyzických vagónků naprosto shodné vláčky a k nim pak následně budou fyzicky dohledávat stejně dlouhé vagónky. Také jsem očekávala, že vypracování této úlohy bude po předešlé zkušenosti rychlejší.

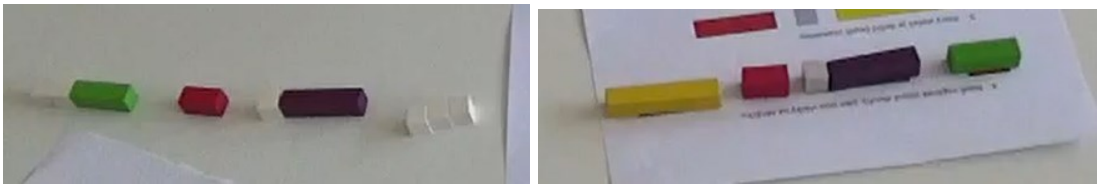
U této úlohy jsem se ale stále ještě setkávala s jevy, které se opakovaly u úloh předešlých, ale v mnohem menší míře. Téměř stejná délka pomůcky a vyobrazených vláčků sváděla opět některé děti k již zaznamenaným dvěma jevům:

a) poměřovat skutečný vagónek s délkou stejně barevného vagónku na pracovním listu,
b) ověřovat domnělé správné řešení na pracovním listu s černobílým obdélníkem, který dětem napomáhal vizuálně se správným řešením.

Znamená to, že některé děti si zatím ještě plně nepřenesly zkušenosti z předešlého cvičení, ale že mají zkušenosti se stavebnicemi, které mají v návodech pro předškolní a mladší školní věk vyobrazeny jednotlivé díly ve skutečné velikosti. Tato skutečnost se pak následně promítla do práce s Cuisenairovými hranolky.

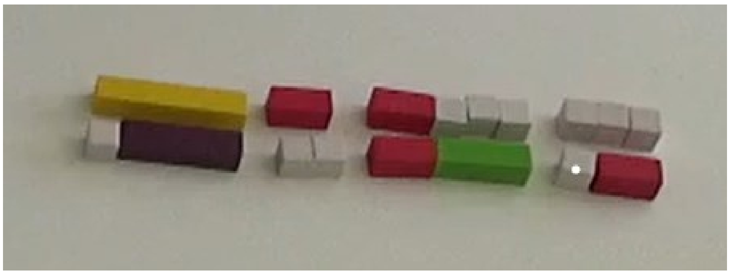
Obr. 72 Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku – jev: neujasnění si významu barev, zdroj: vlastní

Dalším jevem, i když méně častým, bylo nezapamatování si smluvních pojmů vláček a vagónek a jejich vzájemný rozdíl. U některých dětí jsem se setkala s tím, že chtěly sestavovat jinou verzi vláčků, než jim byla předložena na pracovním listu. Jednali tak na základě přenesení zkušenosti z předešlého cvičení ve smyslu toho, že před tím hledaly více řešení stejné délky vláčku.

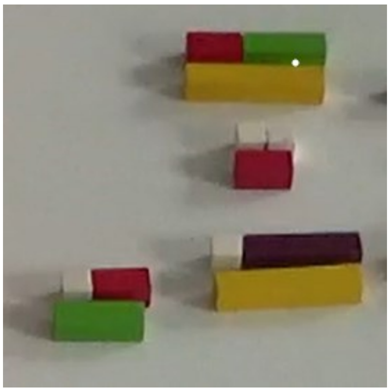


Obr. 73 Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku – jev: neujasnění si pojmů vláček a vagónek, zdroj: vlastní

Děti, které si již přenesly zkušenosti z předešlého cvičení tak nejprve ze skutečných vagónků postavily vyobrazené vláčky a k nim pak následně fyzicky dohledávaly stejně dlouhý vagónek, někteří i tu jinou variantu vláčku, jak již bylo zmíněno výše.



Obr. 74 Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku – jev: neujasnění si pojmů vláček a vagónek, zdroj: vlastní



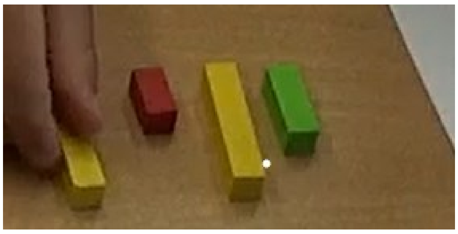
Obr. 75 Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku – jev: přenesení zkušeností z předešlých úloh, zdroj: vlastní

Na základě této úlohy jsem dospěla k názoru, že i velikost vyobrazeného zadání může být vnímána ve smyslu gradace, kterou lze použít v těchto i dalších úlohách. Pokud zadání zamýšlíme dětem ztížit, velikost vyobrazených vláčků v pracovních listech hodně zmenšíme oproti skutečnosti. Také pokud je naší snahou děti přímo dovést k tomu, aby si vyobrazená zadání zobrazovaly samy pomocí pomůcky, je lepší, když obrázky na pracovním listu neodpovídají skutečnosti.

Vyučující by si měl také rozmyslet, zda po dětech požaduje, aby výsledná řešení do pracovního listu také následně zakreslily. Pokud ano, je nutné doplnit zadání o pokyn „a stejnou barvou zakresli svoje řešení". U některých dětí jsem se setkala s tím, že řešení našly, ale nikde ho nezachytily, protože postupovaly přesně podle zadání. Nebýt kamery, která vše natáčela, ani bych si nevšimla toho, že úkol již splnily, protože vagónek přiložily k pracovnímu listu a po vyhodnocení shody jej zase zařadily mezi ostatní vagónky na stole. Naznačené řešení ve formě černobílých vagónků jsem u pozdějších pracovních listů vymazala. Zajímalo mě, zda to nějakým způsobem zasáhne do žákovské strategie při řešení.

Dospěla jsem k poznání, že to nemělo žádný vliv na způsob, jakým děti k řešení přistupovaly. Objevily se při něm všechny předchozí jevy, se kterými jsem se v této úloze již setkala.

Málokdo z dětí ale byl schopen vyřešit tento úkol bez zjevných potíží a dlouhého přemýšlení, tak jak je vidět na obr. č. 71. Tuto skutečnost připisuji tomu, jak byly úlohy řazeny za sebou a skutečnosti, že pracovaly na různých typech úloh v průběhu jedné vyučovací hodiny a měly krátký času na pochopení a vstřebání veškerých, průběžně získávaných, informací a zkušeností.



Obr. 76 Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku – přenesení zkušeností z předešlých úloh, zdroj: vlastní

2.1.5 Který vláček je delší?

Další, již pátou, typovou úlohou je úloha zaměřená na porovnávání. Než k této úloze dojdou děti ve svých pracovních sešitech, tak jim je ještě dvakrát předložena úloha typu „Postav stejně dlouhý vláček jako …..“. Zaměřuje se na vláčky až do délky tmavě zeleného vagónku. V pracovních sešitech je vzorově vyřešen první úkol, což na mém pracovním listu chybí.

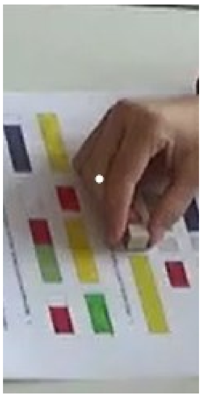
Na rozdíl od pracovních sešitů, kde je k textu „Který vláček je delší?“ připojena věta „Zakroužkuj a doplň.“, v pracovním listu byla použita doplňující věta „Doplň znaménko.“ Domnívala jsem se, že by jim nemuselo být zcela jasné, co mají doplnit, protože v žádné předešlé úloze nic takového nebylo, a ani se nesetkaly s dalšími izolovanými prostředími, kde by mohly najít podobnost.

Předpokládala jsem, že nyní je na pracovním listu uvedeno vše, co je zapotřebí ke splnění úlohy, a že dětem nebude činit žádné potíže jeho vyhotovení. Očekávala jsem, že u jednovagónkových vláčků budou děti úlohu vyřešit okamžitě na základě předchozích manipulací s vagónky, a že u vláčků složených z více vagónků si je sestaví na lavici a vzájemně porovnají. Ohledně tvaru a znalosti pojmu matematických znamének jsem žádné nejasnosti neočekávala, vzhledem k tomu, že se s nimi při hodinách matematiky běžně pracuje. I přesto jsem svůj pracovní list musela v průběhu ještě doplnit a větu „Doplň znaménko." rozšířit na „Doplň znaménko větší, menší, rovná se."

Setkala jsem se i tak s jevem, který mě přesvědčil, abych příště do zadání doplnila ještě přídavné jméno a napsala do pokynů „matematické znaménko". Jedno z dětí chtělo doplňovat tečku, vykřičník a otazník. Poměrně dlouhou dobu jsem ho pomocí otázek naváděla na znaménka matematická. Museli jsme si dokonce příslušná matematická znaménka vymodelovat pomocí Cuisenairových hranolků.

Obr. 77 Který vláček je delší? – vyjasnění pojmu znamének, zdroj: vlastní

Dalším jevem, který byl důsledkem toho, že děti neviděly vzorově vyplněný první úkol tohoto cvičení, bylo, že šedé okénko, které sloužilo na zapsání znaménka, některé děti prvotně vnímaly jako bílý vagónek, takže za sebou postupně vyskládaly všechny jednovagónky a netušily, jakým způsobem mají tuto úlohu vyřešit – co se od nich očekává, jaký se očekává výsledek řešení.

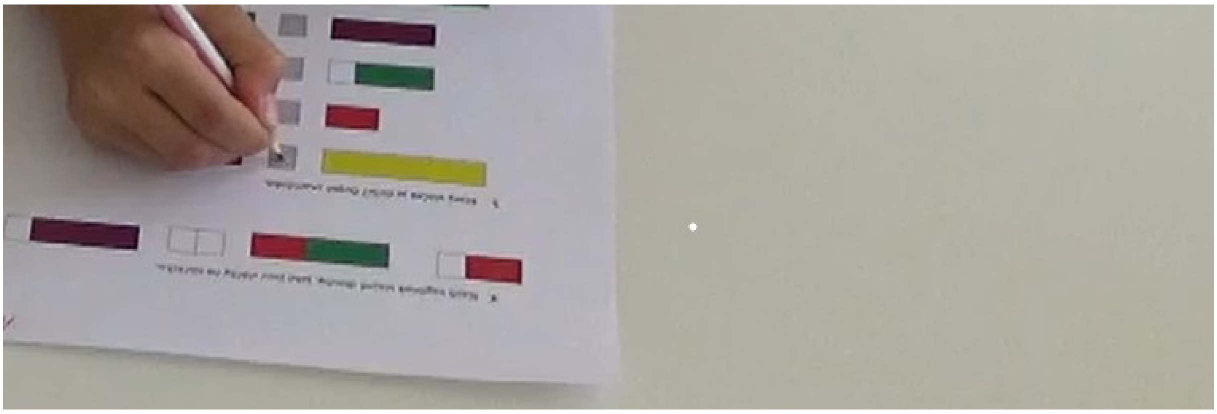


Obr. 78 Který vláček je delší? – jev: záměna šedého okénka na znaménko za bílý vagónek, zdroj: vlastní

V rámci pracovního sešitu se tento jev pravděpodobně neobjevuje, v rámci pracovních listů bych bez podobných předešlých zkušeností doporučila místo okénka připomínajícího vagónek použít např. podtržítko. Ověření této teorie by bylo předmětem dalšího výzkumu.

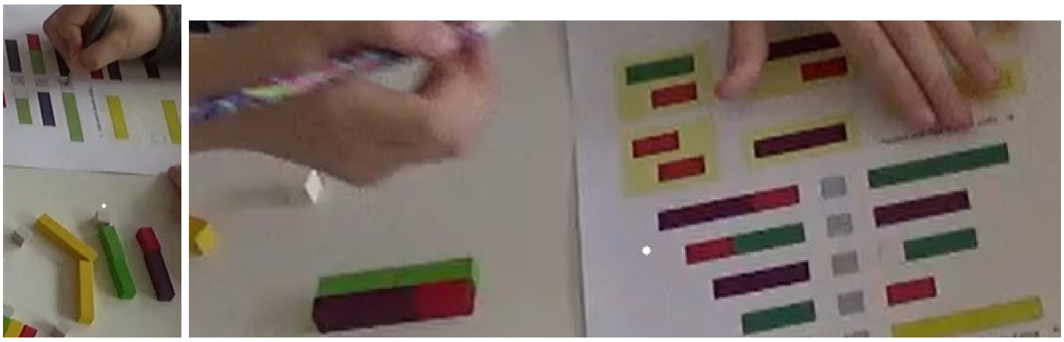
V průběhu řešení zadání tohoto typu úlohy používaly děti několik řešitelských strategií:

a) Děti ihned zapsaly matematické znaménko na dané místo – dělo se tak u jednovagónkových vláčků, kde na základě zkušeností z předešlých úloh již dokázaly ve většině případů jednoznačně určit správné řešení,



Obr. 79 Který vláček je delší? – jev: okamžitý zápis řešení, zdroj: vlastní

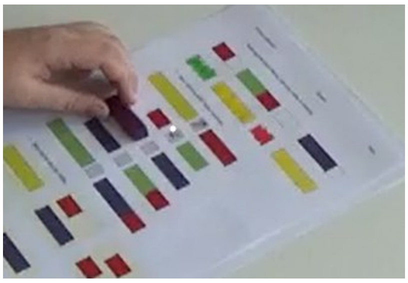
b) Porovnávání fyzických modelů z obou stran nerovnice/rovnice mezi sebou mimo prostor pracovního listu – této strategie děti využívaly u vláčků složených již ze dvou vagónků. Tento způsob strategie svědčil o pochopení možnosti a schopnosti vhodného využívání pomůcky při ověřování úlohy, pokud si děti nebyly jisté svým řešením.



Obr. 80 Který vláček je delší? – jev: vzájemné porovnávání s využitím pomůcky, zdroj: vlastní

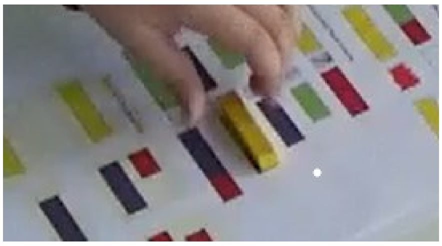
c) Přiložením jednoho fyzického modelu na obě strany rovnice/nerovnice na pracovní list. Jednaly tak na základě zkušenosti se vzájemnou délkou vagónků a zjištěním, že fyzické modely téměř odpovídají papírovému vzoru. Činily tak různým způsobem:

   a. Alespoň jedna délka vagónku je stejná jako zadání, které děti právě řeší, takže ho pro poměření přiložily na obě strany pracovního listu, jak je vidět na obr. 77. Na jedné si ověřily rozdílnost modelu od předlohy a na druhé rozdíl od předešlého vláčku. Na základě zjištění došly k závěru.



Obr. 81 Který vláček je delší? – jev: ověřování přiložením pomůcky na PL, zdroj: vlastní

   b. Délka vagónku je odlišná od zadání, které řeší. Tato taktika vychází z pochopení přibližnosti, kdy děti nepotřebují délku vědět naprosto přesně a opětovně z téměř shodného modelu a papírové předlohy. Tímto způsobem byla úloha řešena spíše v ojedinělých případech.



Obr. 82 Který vláček je delší? – jev: ověřování přiložením pomůcky na PL, zdroj: vlastní

   c. Za použití pravítka měřením obrázku na pracovním listu a následně změřením samotné pomůcky. Při této metodě nenastal absolutně žádný vhled týkající se vzájemných vztahů délek hranolků, způsobu využití pomůcky a ani nedošlo k přenesení zkušeností z předešlých úloh.

Obr. 83 Který vláček je delší? – jev: ověřování měřením s pomocí pravítka, zdroj: vlastní

2.1.6 Spoj stejně dlouhé vláčky

Jako poslední úlohu v pracovním listu měly děti vypracovat typ "Spoj stejně dlouhé vláčky". Tato úloha se svým grafickým zpracováním liší od všech ostatních úloh. Vláčky jsou v ní představeny jako rozložené vagónky, které jsou řazeny nad sebou a společně leží ve žlutém poli.

Můj pracovní list se ve formulaci zadání a zvolených podobách vláčků shoduje s pracovním sešitem H-mat. Jediný rozdíl byl v jejich množství – pracovní list obsahuje o jednu dvojici méně. Tato úloha je i v pracovním sešitě zařazena jako další, žádný jiný typ jí nepředchází.

Jako preferovaný způsob řešení jsem očekávala, že si děti sestaví jednotlivé vláčky a následně budou jejich přemísťováním po ploše ověřovat shodnost délek. Neočekávala jsem, že budou děti za tak krátkou dobu práce s vláčky schopné jednotlivá pole přiřadit bez toho, aniž by si vagónky z daného pole spojily, neboť vizuálně není vidět jejich skutečná délka a doba na zapamatování si posloupnosti barev od nejkratší po nejdelší byla v rámci jednoho experimentu příliš krátká.

V průběhu řešení jsem se setkala s překvapujícími následujícími jevy, které se objevovaly opakovaně. Byla to zejména:

a) nejasnost, zda vagónky ve žlutém poli patří k sobě a mají je vnímat jako jeden vláček – následně na to jsem změnila zadání v pracovním listu na „ Spoj ta žlutá pole, kde z vagónků vytvoříš stejně dlouhé vláčky". Po této úpravě se již při řešení úlohy nevyskytl žádný problém tohoto typu.

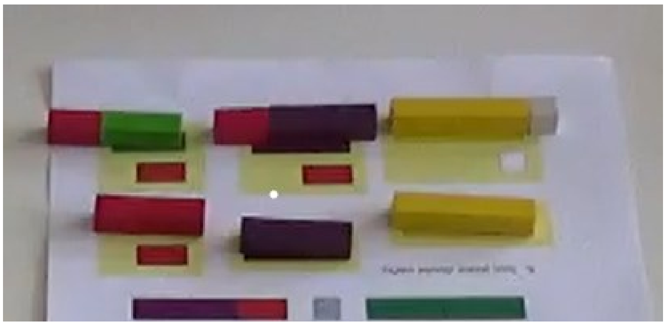
b) potřeba ověřování shodnosti délky i u zbývajících dvou polí. S potěšením jsem zjistila, že děti k sobě automaticky nespojily dvě zbývající žlutá pole, ale než je spojily, tak si správnost úvahy ověřily. Tuto skutečnost připisuji předešlé zkušenosti s metodou Hejného matematiky. Pracovní sešity ostatních nakladatelství, které jsem do této doby měla možnost zhlédnout, nejsou koncipována na možnost nulového výsledku, neboli že úloha nemá řešení.

Obr. 84 Spoj stejně dlouhé vláčky. – jev: ověřování i poslední zbylé dvojice, zdroj: vlastní

c) snaha o vytvoření druhé dvojice stejně dlouhých vláčků, ale jiných, než bylo na výběr v předloženém cvičení. U této varianty řešení nedošlo k plnému pochopení zadání a naopak došlo k nežádoucímu přenesení zkušeností z předešlých úloh, kde se hledalo více variant na základě požadavku shodnosti délky.

Obr. 85 Spoj stejně dlouhé vláčky. –jev: sestavování jiných dvojic, než je uvedeno v zadání, zdroj: vlastní

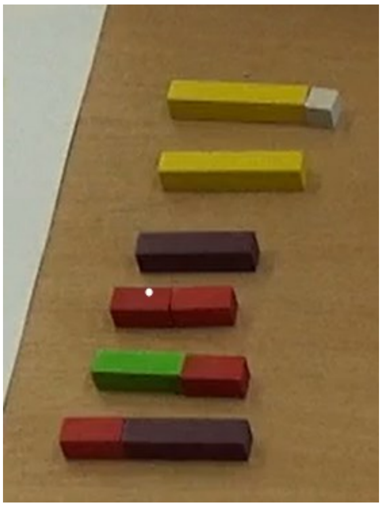
d) přetrvávající nutnost neustálého rovnání vláčků na pracovní list přesně podle předlohy z důvodu vyjasnění si množství a druhů vagónků povolených v této úloze. Stále se tak zde setkáváme se špatnou vizuální percepcí a potřebou ji nadále upevňovat.



Obr. 86 Spoj stejně dlouhé vláčky. – jev: potřeba zrakové opory, zdroj: vlastní

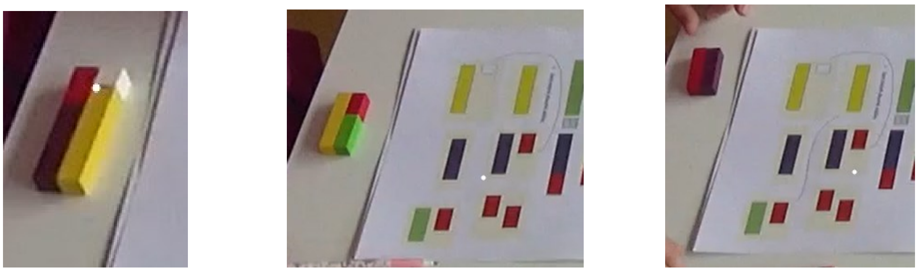
Pokud bych se zaměřila na řešitelské strategie ohledně zjišťování délky jednotlivých vláčků, objevily strategie dvě. U těchto strategií bylo již poznat, že děti takto jednají na základě předešlých zkušeností. Jednalo se o strategie:

a) děti nejprve veškeré vláčky sestavily na stole a následně je přemísťováním přiřazovaly k sobě dle délky.



Obr. 87 Spoj stejně dlouhé vláčky. – jev: poskládání všech vláčků zdroj: vlastní

b) děti nejprve vzaly jednu dvojici a k ní přímo přiřazovaly a ověřovaly dvojici druhou. Tato metoda svědčí o větší orientaci v problému a větším přehledu daných možností, neboť děti nepřiřazovaly bez rozmyslu veškeré další dvojice, ale pouze ty, které by mohly odpovídat očekávané délce vláčku. Jejich řešení proběhlo velice rychle.



Obr. 88 Spoj stejně dlouhé vláčky. – jev: přiřazování jednotlivých možností, zdroj: vlastní (tři obrázky)

Tato úloha, jakožto poslední v řadě, byla dětmi vyřešena poměrně rychle, ve srovnání s úlohami ostatními a až na drobné nejasnosti nepatřila k úlohám, které by dětem připadaly těžké a nejasné ve smyslu očekávaného řešení a jak se k němu dostat.

2.2 Reflexe předexperimentu a experimentů

Tento experiment mě samotnou velice zajímal, neboť jsem v rámci studia neměla možnost se s tímto prostředím seznámit. Děti byly na nové pomůcky a úkoly velice zvědavé a neměly žádný problém se mnou na experimentu pracovat.

Prostředí Vláčky bylo pro mě i děti zcela nové. To u mě vedlo k tomu, že jsem se musela velice soustředit na to, abych dětem správně vysvětlovala pojmy vagónek a vláček a abych tyto termíny v průběhu předexperimentu a experimentů používala správně, což se mi ne vždy podařilo bez problémů dodržet. Pokud bych se zaměřila na děti, tak u některých docházelo k neustálému zaměňování těchto pojmů a při vypracovávání úloh bylo znát, že ne všem dětem se podařilo ujasnit si, jaký je mezi nimi rozdíl.

Předpokládala jsem, že veškeré mnou předložené úlohy jsou dostatečně formulovány, a že nebude v průběhu nastávat situace, kdy by si děti zadání vysvětlily způsobem odlišným od mého záměru. Tento předpoklad se v průběhu předexperimentu i experimentů ukázal jako chybný, neboť děti nakonec úlohu vyřešily rozdílně od očekávání, ale zcela v souladu se zadáním úlohy.

Čas, který měly děti k dispozici na vypracování, byl zcela dostatečný a pohyboval se mezi 30 – 40 minutami. V rámci tohoto času jsme se stihli vzájemně seznámit, seznámit se a pohrát si s pomůckou, i si na závěr popovídat o úlohách. Z jejich pohledu byla za nejtěžší úlohu označena úloha čtvrtá, a to z toho důvodu, že zpočátku vůbec nechápali, jaký se očekává výsledek. To přiřazuji tomu, že v této úloze se na rozdíl od všech předešlých i následujících požaduje, aby děti netvořily vláčky, ale aby k vyobrazeným vláčkům našly vagónek o stejné délce. Všechny děti se ale zcela jednoznačně shodly na tom, že je práce s Cuisenairovými hranoly nesmírně bavila, a že kdyby mohly zůstat déle, rády by vypracovaly ještě další úlohy z tohoto prostředí.

Závěr

Důvodem této diplomové práce byla moje vlastní zvědavost. Úlohy, které jsou předkládány v učebnicích, a které využívají metodiku pana prof. RNDr. Milana Hejného, CSc. byla pro mě za dobu studia velice atraktivní, takže jsem neváhala ani chviličku, abych se na jedno z těchto izolovaných prostředí zaměřit podrobněji.

V rámci zpracovávání této diplomové práce jsem se opravdu měla možnost seznámit s tímto prostředím velice podrobně, ať už z hlediska přínosu pro žáky, možnostmi gradace a návazností na prostředí jiná v rámci jedné metody, tak i s jeho didaktickým potenciálem a nezbytnou pomůckou – Cuisenairovými hranoly. Také jsem měla možnost se podrobněji zaměřit na pracovní sešity různých nakladatelství a propojit si informace o tomto prostředí s úlohami naprosto odlišnými a pokusit se nalézt vzájemné podobnosti. To vše obsahuje teoretická část této diplomové práce.

V praktické části jsem se zaměřila na řešitelské strategie, pokusila jsem se odkrýt různá úskalí vyplývajících z řešení jednotlivých úloh, nalézt co nejjednoznačnější formulaci zadání těchto úloh, pojmenovat didaktické jevy, které se v průběhu předexperimentu a experimentů objevovaly, nalézt další možnosti gradace, zjistit, jak toto prostředí je přijímáno dětmi, a zda a jak jsou schopni použít a využít Cuisenairovy hranoly v rámci tohoto prostředí. To vše jsem zjišťovala v rámci předexperimentu a experimentů s dětmi, který probíhal na státní základní škole bez speciálního zaměření, ve třídě, která metodiku Hejného matematiky využívá, nezná však prostředí Vláčky. Některé úlohy by si zasloužily další výzkum, neboť jejich formulace nebyla v průběhu předexperimentu a experimentů dostatečně jednoznačně uvedena tak, aby se očekávaný žákovský výstup shodoval s předpokladem experimentátora ve smyslu shodného vnímání zadání.

Tato práce je velice přínosnou pro mě, jakožto experimentátora, ale také by se mohla stát přínosnou pro všechny, kteří přemýšlejí o jazykové stylizaci úloh, pro všechny, kteří využívají prostředí Vláčky v rámci svých hodin nebo zájmových kroužků, pro všechny, kteří hledají souvislosti tohoto izomorfního prostředí s dalšími navazujícími prostředími, pro všechny, kteří se snaží o sběr a propojování informací, pro všechny, kteří hledají podobnosti u jiných matematických úloh. Já se k této práci rozhodně vrátím a budu z ní čerpat inspiraci do vlastních hodin matematiky, pokusím se též o lepší formulaci některých zadání a začnu více využívat manipulace s pomůckami.

Jak již bylo uvedeno, tak hlavním cílem této práce bylo zaměřit se na myšlenkové procesy žáků při vypracovávání zadaných úloh, ověřit jejich srozumitelnost, popř. odhalit nejasnosti vyplývající z formulace zadání. Vzhledem k tomu, že byly jednotlivé dílčí cíle naplněny, tak autorka této diplomové práce považuje hlavní cíl také za splněný.

Seznam použitých informačních zdrojů

(1) ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-346-0.

(2) ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-370-5.

(3) ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2013. ISBN 978-80-7235-530-3.

(4) GATTEGNO, Caleb. *Now Johnny Can Do Arithmetic.* New York: Educational Solutions Worldwide Inc., 2010. ISBN 978-0-87825-223-7.

(5) HALASOVÁ, Jitka, Marie KOZLOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Jana TOMŠÍKOVÁ. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. 3. vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2021. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-672-9.

(6) HALASOVÁ, Jitka, Marie KOZLOVÁ, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Jana TOMŠÍKOVÁ. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní učebnice pro 1. ročník základní školy*. 3. vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2021. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-673-6.

(7) HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-01-2.

(8) HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-02-9.

(9) HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-03-6.

(10) HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-04-3.

(11) HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-16-6.

(12) HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-17-3.

(13) HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-18-0.

(14) HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-19-7.

(15) HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

(16) HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Třetí vydání. Pedagogická praxe (Portál). Praha: Portál, 2015. ISBN isbn978-80-262-0901-0.

(17) KOZLOVÁ, Marie, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Alena RAKOUŠOVÁ. *Matematika 2 se Čtyřlístkem: hybridní pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. 2. vydání. Plzeň: Fraus, 2022. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-806-8.

(18) MIKULENKOVÁ, Hana, Josef MOLNÁR. *Matematika pro 2. ročník 2. díl.* Olomouc: PRODOS spol. s r. o., 2009. ISBN 978-80-85806-88-5.

(19) PĚCHOUČKOVÁ, Šárka. *Přirozené číslo a manipulace s Cuisenairovými hranolky*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2018. ISBN 978-80-261-0765-1.

(20) ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-34-6.

(21) ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Brno: Nová škola Brno, [2012-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-03-2.

(22) ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-00-1.

(23) ROSECKÁ, Zdena a Eva PROCHÁZKOVÁ. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Brno: Nová škola Brno, [2011-2014]. Duhová řada. ISBN 978-80-87565-07-0.

(24) SLEZÁKOVÁ, Jana, Petra MACHALOVÁ, Eva ŠUBRTOVÁ, Mária GRAFOVÁ, Lenka RYBOVÁ a Magda MÁLKOVÁ. *Předmatematika I.: Hejného metoda : metodika pro učitele mateřských škol*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-80-88247-25-8.

(25) SWAN, Paul. *Počítání s hranolky*. Přeložila Kateřina HALTUFOVÁ. Praha: Didactive Plus, 2019. ISBN isbn978-80-270-6989-7.

Seznam použitých internetových informačních zdrojů

https://cs.wikipedia.org/wiki/Jan_Amos_Komensk%C3%BD

https://cs.wikipedia.org/wiki/Orbis_pictus

https://cs.wikipedia.org/wiki/Hejn%C3%A9ho_metoda_v%C3%BDuky_matematiky

https://www.h-mat.cz/principy

https://en-m-wikipedia-org.translate.goog/wiki/Georges_Cuisenaire?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=cs&_x_tr_hl=cs&_x_tr_pto=sc

https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=96557&view=16146

https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

https://publi.cz/books/339/10.html

Seznam příloh

Příloha č. 1 – oboustranný pracovní list - přeexperiment

Příloha č. 2 – upravený oboustranný pracovní list – experiment

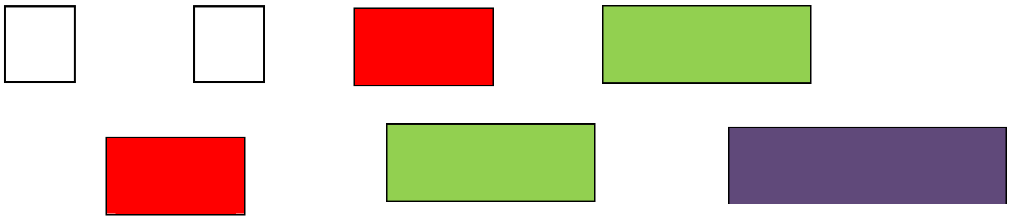
Příloha č. 3 – opětovně upravený oboustranný pracovní list – experiment

Seznam obrázků

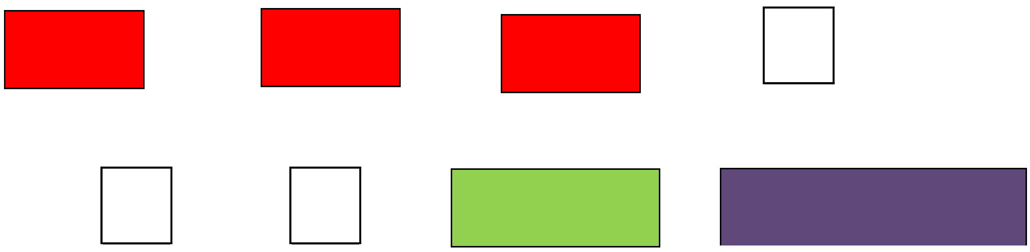
Seznam tabulek

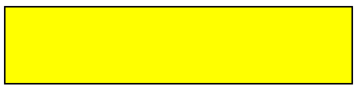
Příloha č. 1 - předexperiment

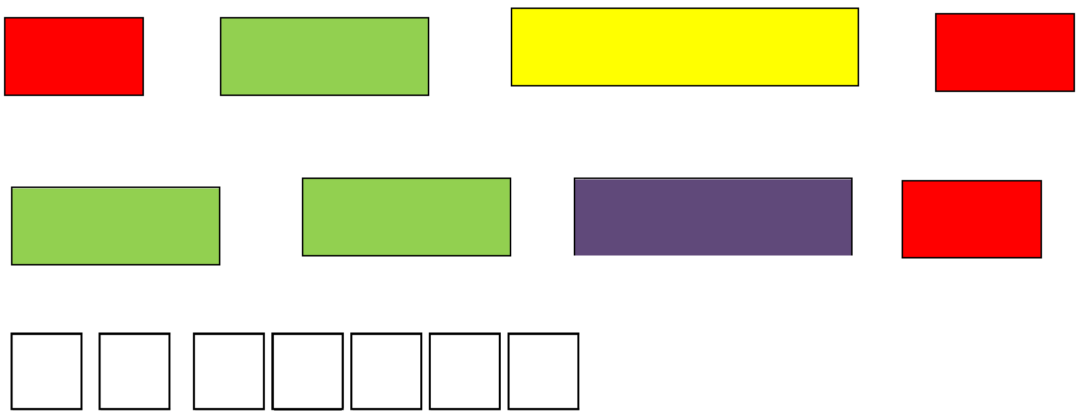
1. Postav z vagónků 4 různé vláčky.



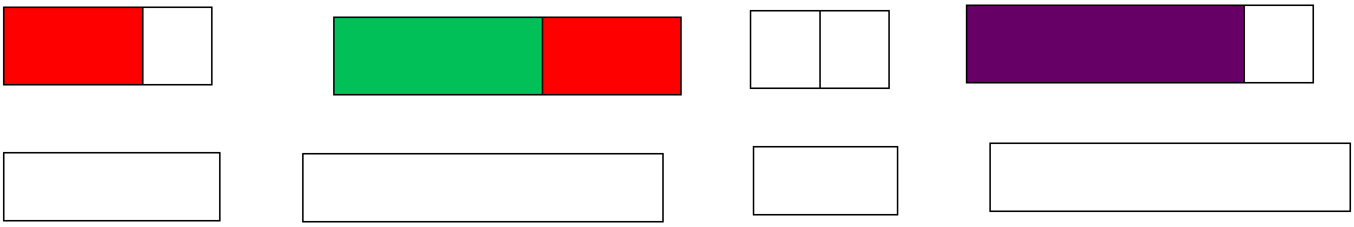
2. Postav stejně dlouhé vláčky.



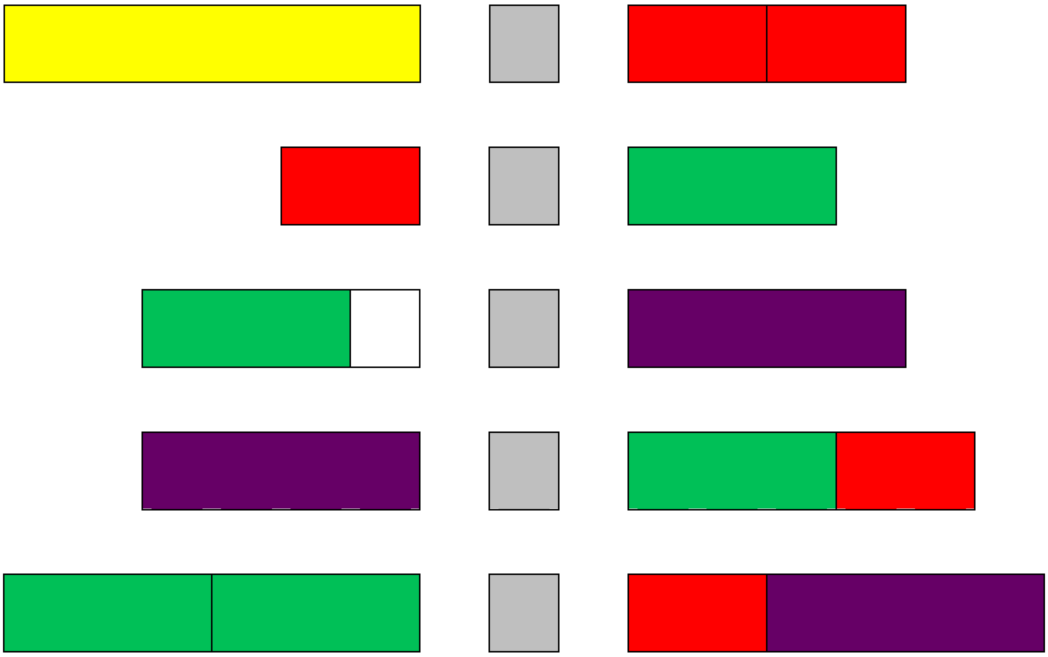
3. Postav stejně dlouhý vláček jako  máš-li k dispozici následující vagónky. Nemusíš je použít všechny.



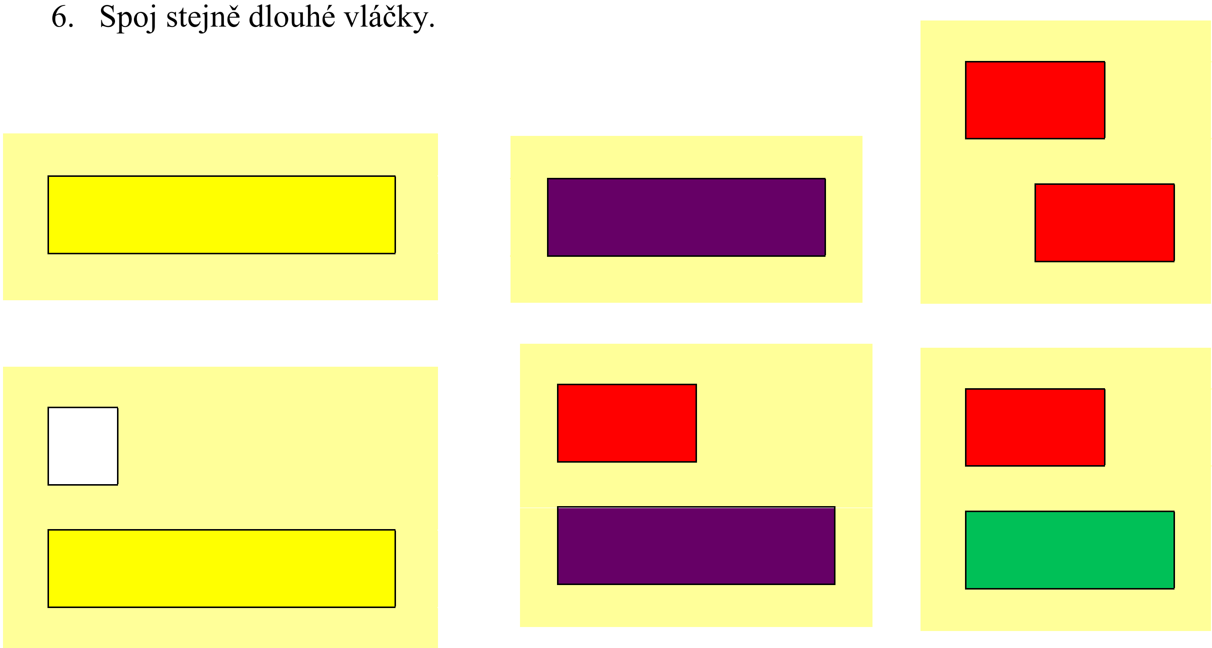
4. Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku.



5. Který vláček je delší? Doplň znaménko.

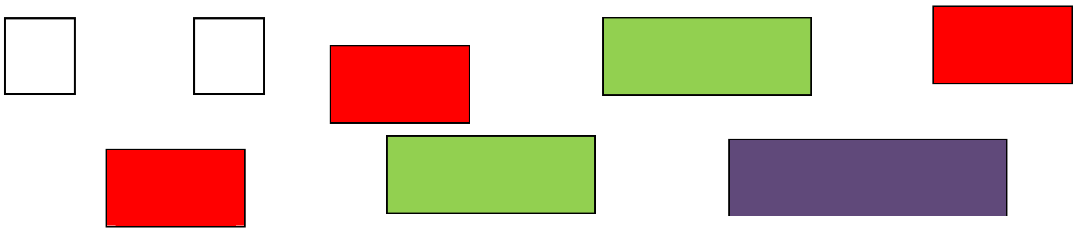


6. Spoj stejně dlouhé vláčky.

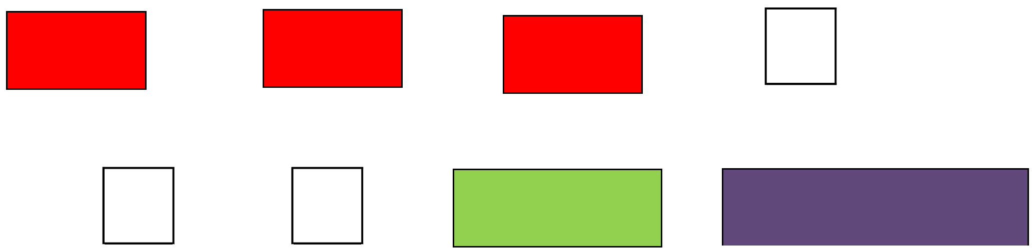


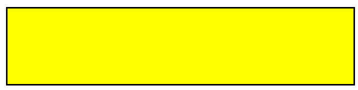
Příloha č. 2 - experiment

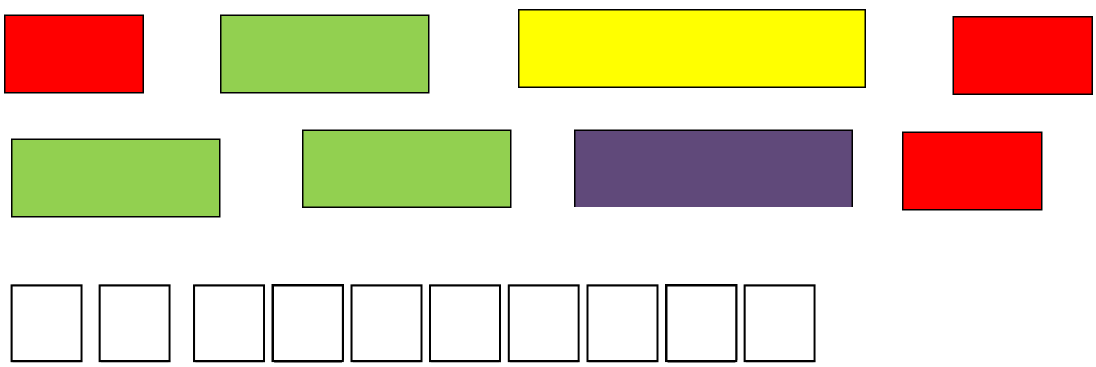
1. Postav z vagónků 4 různé vláčky.



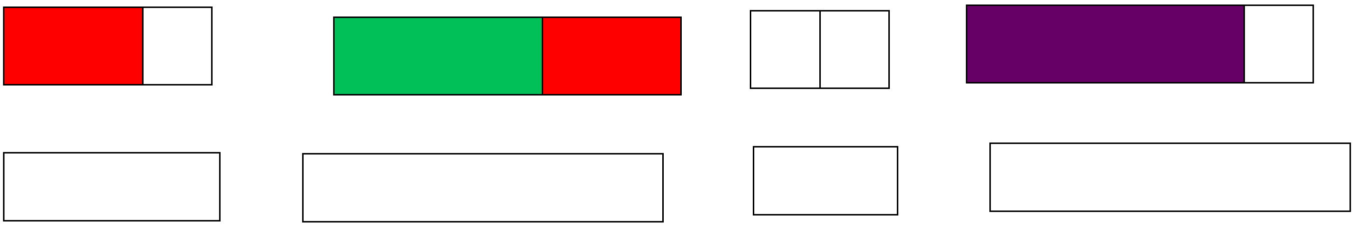
2. Postav stejně dlouhé vláčky.



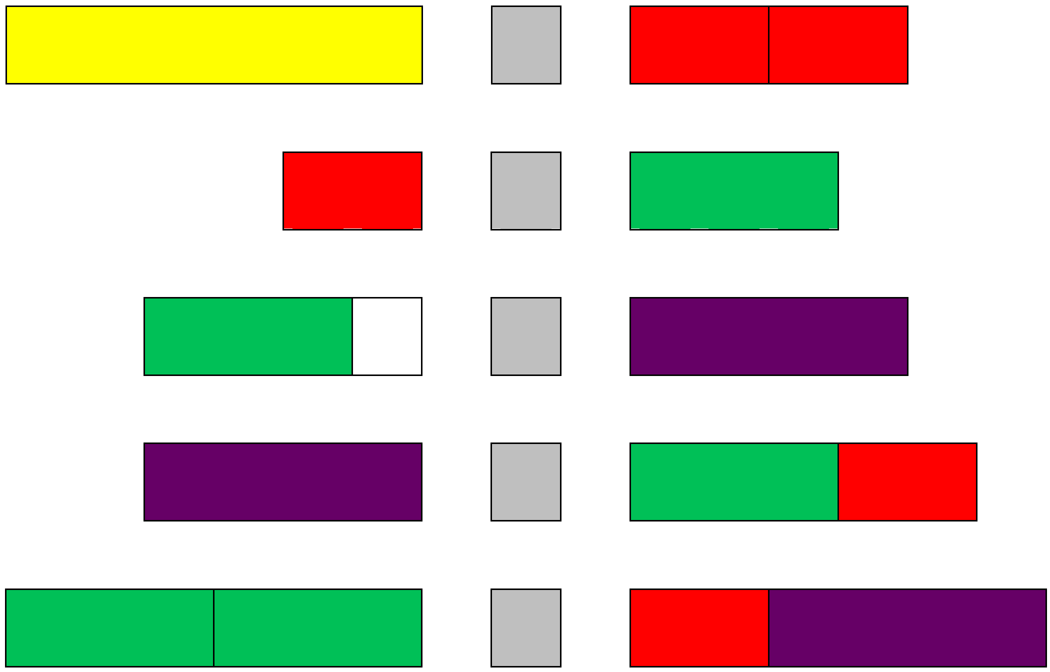
3. Postav stejně dlouhý vláček jako  máš-li k dispozici následující vagónky. Nemusíš je použít všechny.



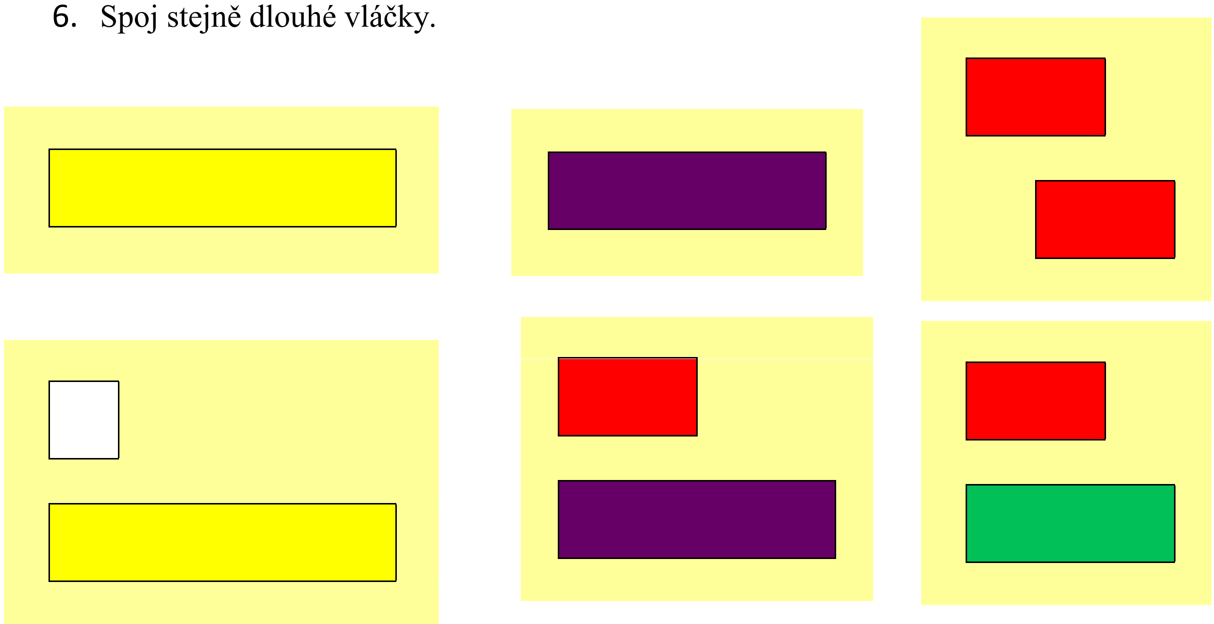
4. Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku.



5. Který vláček je delší? Doplň znaménko větší, menší, rovná se.

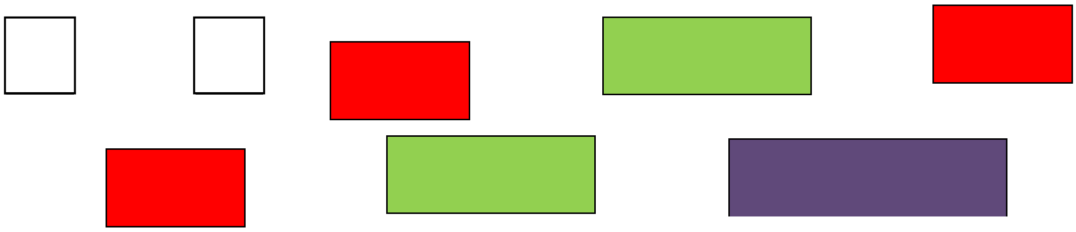


6. Spoj stejně dlouhé vláčky.

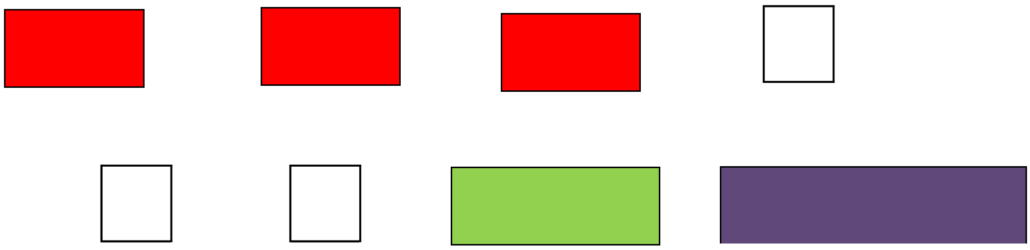


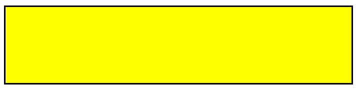
Příloha č. 3 - experiment

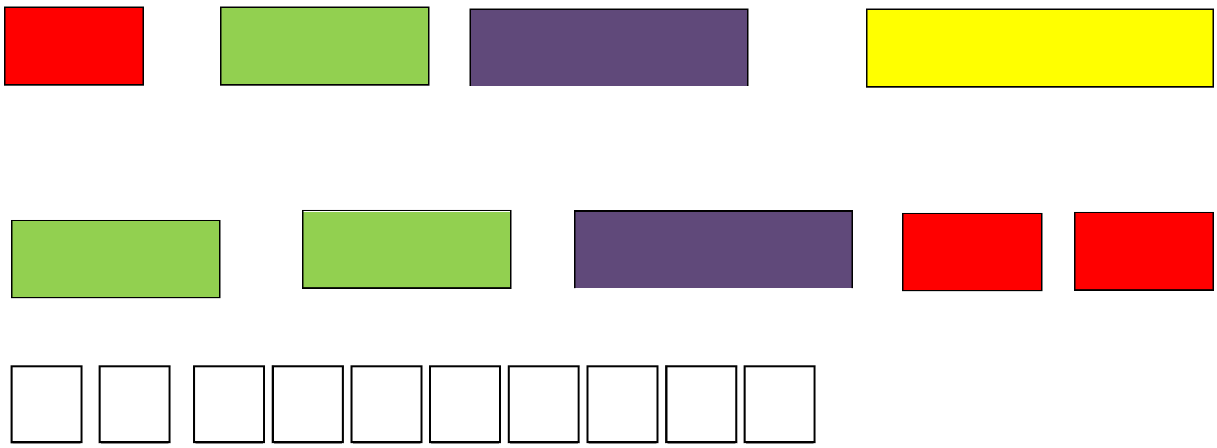
1. Postav z vagónků 4 různé vláčky.



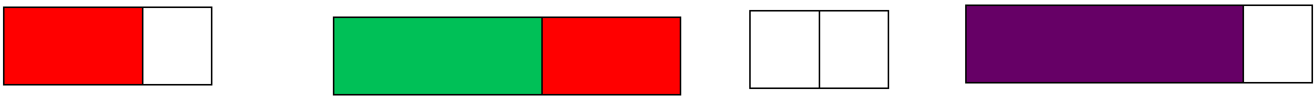
2. Postav stejně dlouhé vláčky.



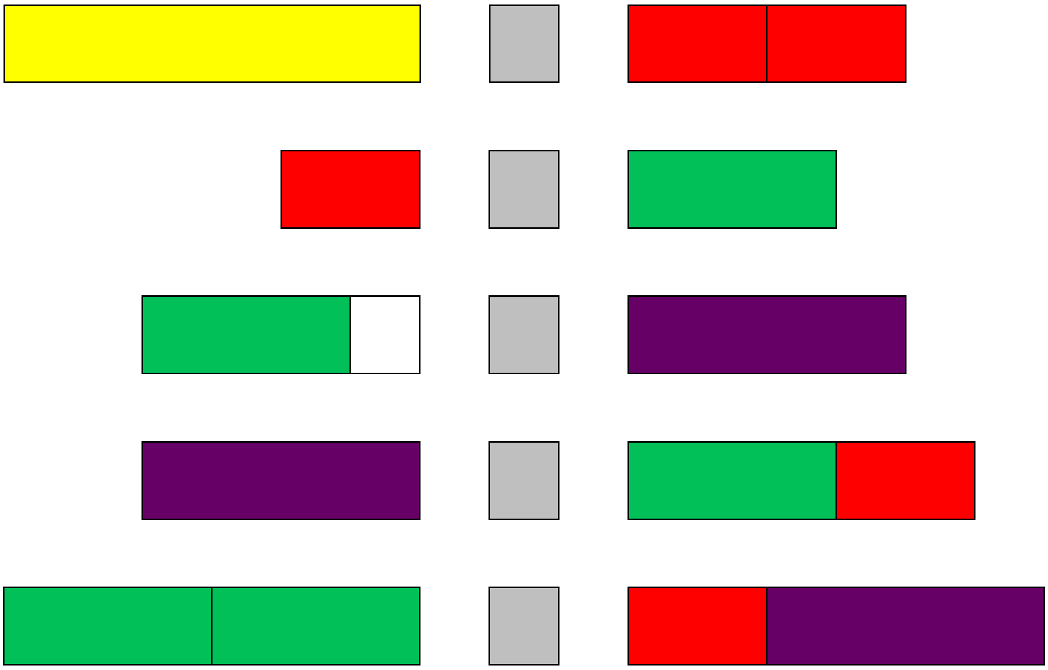
3. Postav stejně dlouhý vláček jako  máš-li k dispozici následující vagónky. Nemusíš je použít všechny.



4. Najdi vagónek stejně dlouhý, jako jsou vláčky na obrázku.



5. Který vláček je delší? Doplň znaménko větší, menší, rovná se.



6. Spoj stejně dlouhé vláčky. Spoj ta žlutá pole, kde z vagónků vytvoříš stejně dlouhé vláčky.