Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vývoj porozumění rovnosti u žáků 2. a 3. ročníku

Development of understanding of equality of 2nd and 3rd grade pupils

Miroslav Routa

Vedoucí práce: doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Vývoj porozumění rovnosti u žáků ve 2. a 3. ročníku potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 10. 07. 2023

Rád bych velmi poděkoval své vedoucí práce, doc. RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D., za její trpělivost, odborné vedení, cenné komentáře a navedení na téma diplomové práce. Další poděkování patří vyučujícím za možnost provést v jejich třídách potřebné výzkumy a poskytnutí rozhovorů.

ABSTRAKT

Tématem práce je vývoj porozumění rovnosti u žáků 2. a 3. ročníku základních škol. Náplň práce vychází z výzkumu v rámci projektu Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí, kterého se účastnilo více než 600 žáků. Pomocí výsledků zmíněného výzkumu provedu analýzu nejčastějších chyb a příčin, z nichž se mohly chyby vyvinout. Díky výsledkům ze dvou didaktických testů z matematiky ve dvou na sebe navazujících letech u stejných žáků mohu pozorovat, kam se vnímání rovnosti během jednoho roku posunulo.

Mým dalším cílem bude zjistit pomocí rozborů učebnic a vyslovení hypotézy ohledně používaných matematických zápisů, zda mé domněnky o důvodech chybných řešení jsou správné.

Na základě výsledků výzkumu vzniká dojem, že podstatný vliv na porozumění rovnosti má volba učebnic, podle kterých se žáci učí. Pro ověření této hypotézy provedu podrobnou analýzu učebnic všech nakladatelství, podle nichž probíhá výuka ve zkoumaných třídách. Proběhne mapování situací, v nichž se žáci setkávají s rovnicemi a dalšími úlohami, které podporují porozumění rovnosti.

Druhá hypotéza se zabývá řetězením početních operací v běžných výpočtech a ověřuje, jak tato metoda zápisu ovlivňuje vnímání rovnosti. Pro její ověření využiji složenou slovní úlohu, kterou zadám žákům a následně se budu věnovat jejich řešení. S vyučujícími v těchto třídách budu vést rozhovory o jejich vnímání takových zápisů.

V poslední části diplomové práce provedu rozhovory se žáky, kteří vyřeší stejné rovnice jako žáci v projektu. Od žáků bezprostředně po vypracování rovnic zjistím, jaké strategie řešení uplatňují a jak zápisy rovnic vnímají.

KLÍČOVÁ SLOVA

Rovnost, rovnice, porozumění, strategie, koncept, proces, metody výuky, chyba.

ABSTRACT

The topic of the thesis is the development of understanding of equality in pupils of the 2nd and 3rd year of primary schools. The thesis is based on research conducted within the project Teachers' Understanding of the Causes of School Failure and the Effectiveness of Educational Interventions, in which more than 600 pupils participated. Using the results of the aforementioned research, I will analyse the most common errors and the causes from which the errors may have developed. Thanks to the results from two didactic tests in mathematics in two consecutive years with the same pupils, I can observe where the perception of equality has shifted in one year.

My next goal will be to find out, by analyzing textbooks and hypothesizing about the mathematical notations used, whether my conjectures about the reasons for the incorrect solutions are correct.

Based on the results of the research, it seems that the choice of textbooks that students use to learn from has a significant impact on their understanding of equality. In order to test this hypothesis, I will conduct a detailed analysis of the textbooks of all publishers used for teaching in the researched classes. A mapping will be carried out of situations in which pupils encounter equations and other tasks that promote understanding of equality.

The second hypothesis deals with the chaining of numerical operations in ordinary calculations and tests how this method of notation affects the perception of equality. To test it, I will use a compound word problem, which I will give to students and then work on solving. I will interview teachers in these classes about their perceptions of such notations.

In the last part of the thesis, I will interview students who solve the same equations as the students in the project. I will find out from the pupils immediately after they have worked out the equations what solution strategies they use and how they perceive the equation notations.

KEYWORDS

Equation, understanding, strategy, concept, process, teaching methods, mistake.

OBSAH

1. ÚVOD A CÍL PRÁCE

Výběr tématu diplomové práce vzešel z práce, kterou mi nabídla katedra matematiky a didaktiky matematiky. Při ní jsem pomáhal kódovat žákovská řešení didaktických testů z matematiky v rámci výzkumu v projektu Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí. Při této práci mě zaujaly dvě rovnice, u nichž žáci velmi často chybovali. Rozhodl jsem se proto tímto jevem zabývat podrobněji, z čehož vzešel nápad na tuto diplomovou práci. Matematika mi příchodem na vysokou školu díky přístupu vyučujících a jejich metodám začala být velice blízká, což také pomohlo rozhodnutí věnovat se práci z tohoto školního předmětu.

Cílem diplomové práce je zkoumat vývoj porozumění rovnosti ve 2. a 3. ročníku. K tomu mi poslouží data ze zmíněných didaktických testů a vlastní doplňující experimenty.

Praktická část se zabývá v prvním kroku rozborem výsledků výzkumu. Vybral jsem z něj čtyři rovnice, jejichž řešení jsem podrobil analýze z různých úhlů pohledu. Zabýval jsem se jak pozicí neznámé, tak pravděpodobnými důvody různých chyb či úspěšností v souvislosti s metodou výuky matematiky nebo učebnicemi, které byly v dané třídě používány.

V dalším kroku jsem se pokusil o analýzu učebnic, podle nichž se učí žáci, kteří byli součástí projektu. Analyzoval jsem je z hlediska práce s rovností a rovnicemi. Předpokládám, že vliv učebnic na výsledky výzkumu a porozumění rovnosti je velmi podstatný. V diplomové práci se v této sekci věnuji jednotlivým tvarům zápisů rovnic a rovnicových situací, které se v učebnicích vyskytují. Sleduji, jak jejich četnost, tak zařazování do kontextů, v nichž se s nimi žáci setkají.

Ve výzkumu se u nejčastější chyby vyskytují žákovské zápisy, na základě nichž vyvodím hypotézu o procesuálním, nikoliv relačním, vnímání rovnosti u těchto žáků. Pro ověření hypotézy jsem provedl v šesti třídách experiment, který prostřednictvím složené slovní úlohy zkoumá platnost hypotézy. Tu jsem ověřil za pomoci žákovských řešení této úlohy. V těchto třídách jsem se také formou rozhovoru s vyučujícími dozvěděl, jak k jednotlivým žákovským zápisům při řešení úloh[1] přistupují.

[1] Termín *úloha* budu používat pro jeden segment cvičení. V kontextu diplomové práce může jít např. o jednu rovnici, jednu pavučinu v Hejného metodě, jednu početní pyramidu v učebnicích SPN atp.

Závěrečná část ověřuje pomocí experimentu moje domněnky ohledně chyb, které se ve výzkumu v řešení rovnic vyskytovaly. Za vhodnou jsem považoval zvolit metodu rozhovorů s žáky. Z každého ročníku jsem ve dvou třídách zadal stejné rovnice jako dostali žáci ve výzkumu, a poté od nich zjišťoval, jak postupovali při jejich řešení. V této části si tak lze udělat obrázek o tom, jakými způsoby žáci opravdu vnímají jednotlivé zápisy rovnic a jaké strategie využívají pro jejich řešení.

2. VÝZKUM VE 2. A 3. ROČNÍCÍCH ZŠ

2.1. Základní informace o výzkumu

Následující data pocházejí z výzkumu v rámci projektu Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí realizovaného PedF UK za finanční podpory z programu OPVV MŠMT, které probíhalo v červnu 2021 a 2022 ve 2. a 3. ročnících základních škol. Kromě matematiky byli v rámci tohoto projektu žáci zkoumáni i v českém jazyce a podstoupili celou řadu kognitivních testů. Další výzkumná data přinesly záznamy z pozorování výuky a rozhovory s učiteli[2]. Učitelé byli vybráni tak, aby se těšili dobré pověsti a měli nejméně tříletou zkušenost s výukou na 1. stupni ZŠ.

2.2. Charakteristika zkoumaných škol a tříd

Do tohoto výzkumu bylo zapojeno 669 žáků z 29 tříd ze 22 základních. Přibližně v polovině případů šlo o pražské školy, další jsou vybrány z různých oblastí Čech. Ve všech případech s výjimkou jedné církevní základní školy se jednalo o státní základní školy běžného typu. Pokaždé šlo o žáky ze samostatného ročníku, ve výzkumu nebyla zapojena žádná třída, v níž by se učili žáci jiných ročníků.

Do výzkumu byly zahrnuty třídy s různými metodami výuky matematiky, které se učí podle učebnic různých vydavatelství.

2.3. Charakteristika zkoumaných rovnic

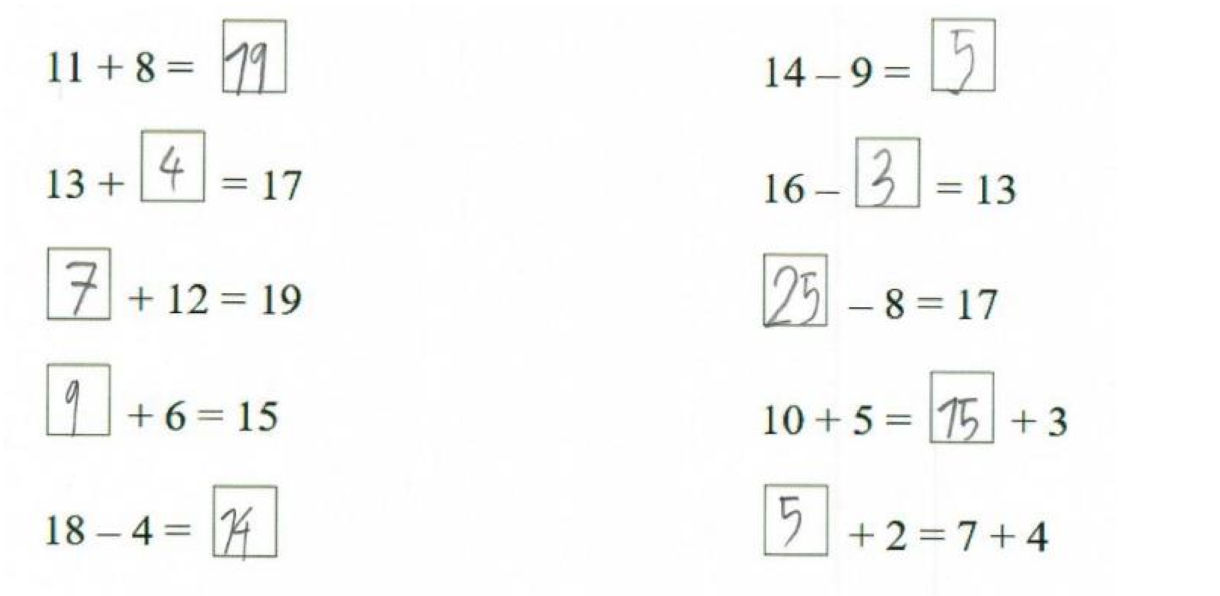
Didaktický test z matematiky tvořilo 6 úloh, jejichž obsah pokrýval základní očekávané výstupy v daném ročníku.

Druhé cvičení[3] testu bylo zaměřeno na zkoumání numerických dovedností žáků. Obsahovalo 10 dílčích úloh ve tvaru rovnic[4] zaměřených na různé jevy. Tyto rovnice měly různý tvar i počet členů, přičemž neznámá byla na různých pozicích. Konkrétní zadání těchto rovnic je uvedeno na následujícím obrázku.

[2] Přestože si jsem vědom převahy žen jako vyučujících na 1. stupni ZŠ, pro zjednodušení volím v tomto případě v celé diplomové práci generické maskulinum.

[3] Termín *cvičení* budu používat pro část učebnice nebo testu, která je definována obvykle stranou a číslem (např. cv. 2 na str. 52). Sestává z jedné nebo více úloh.

[4] všechny rovnosti dvou výrazů, které obsahují jednu nebo výjimečně více proměnných



Obr. č. 1: Druhé cvičení didaktického testu pro žáky 2. ročníku

Přímo na tomto obrázku jsou velmi dobře vidět nejčastější výsledky ve 2. ročníku. Žáci dokázali většinou správně vyřešit rovnice, které mají pouze tři členy. Všechny takové jsou koncipovány tak, že mají dva členy na levé straně a jeden na pravé. Nelze soudit, jak by se výsledky lišily např. u rovnic např. ve tvaru $a = x + b$[5], moje domněnka nicméně je, že by se výsledky moc nezměnily. Myslím, že záměnu, kdy by byl jeden člen na levé straně rovnice a dva na pravé, by žáci tolik nevnímali, protože stále tam jsou jen tři členy a z běžné výuky jsou na to žáci zvyklí. Kromě těchto osmi rovnic o třech členech se na konci cvičení vyskytují dvě rovnice s operacemi sčítání se dvěma členy na obou stranách. Konkrétně se jednalo o následující dvě:

$10 + 5 = x + 3$

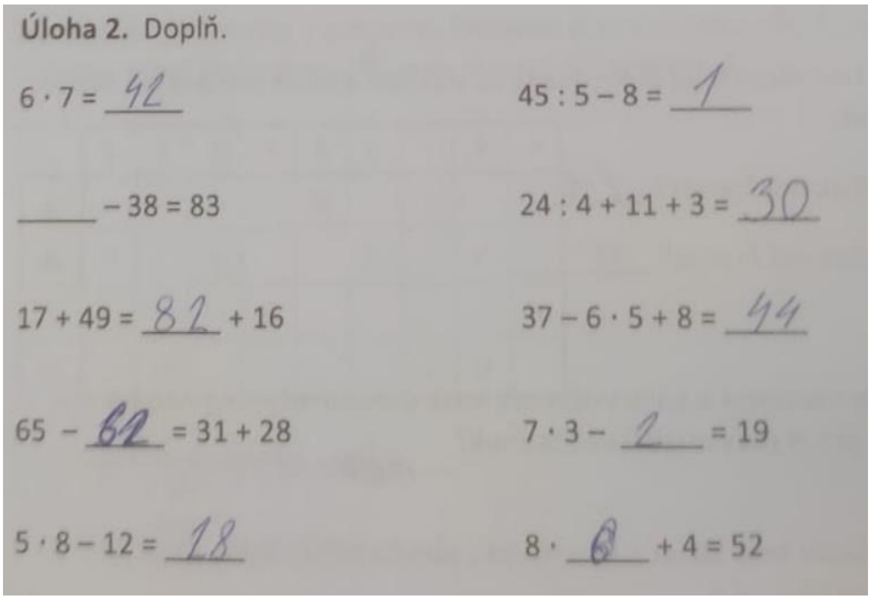
$x + 2 = 7 + 4$

Neznámá je v každé z nich situována na jiném místě. Při vyhodnocování výsledků ze 2. ročníku bylo zjištěno, že tyto rovnice dělají žákům nemalé problémy. Šlo obecně o úlohy s jednou z nejmenších úspěšností v celém výzkumu v oblasti matematiky. Ta dosahovala 24 % u první uvedené a 29 % u druhé uvedené. U ostatních rovnic, které sestávají pouze ze tří členů, taková míra neúspěšnosti zaznamenána nebyla. Pro srovnání dodávám, že rovnici s třetí největší chybovostí v této úloze, kterou byla $x – 8 = 17$, řešilo správně 75 % žáků. Na obrázku výše jsou vidět rovnice se čtyřmi členy nesprávně vyřešené. Konkrétní dvě chyby, které zde lze pozorovat, byly ty nejčastější, kterých se žáci dopouštěli.

[5] V diplomové práci budu velmi často používat podobné zápisy rovnic. V nich jsou písmeny *a, b, c* myšleny známé členy rovnice, za *x,* popř. *y, z* si představujme neznámou. Neznámá je ve skutečnosti v učebnicích i samotném testování nejčastěji vyznačena prázdnou linkou nebo prázdným čtverečkem.

Výzkum pokračoval i následující rok. Probíhal na stejných školách a ve stejných třídách, takže byli testováni titíž žáci. Díky tomu je možné relevantně srovnávat výsledky ve 2. ročníku s výsledky ve 3. ročníku. Stejně jako ve 2. ročníku, i ve 3. byly testy zadávány ke konci školního roku. Testy tedy odrážejí školní úspěšnost v téměř dokončených ročnících. I experimenty, které jsem prováděl následně sám, probíhaly v červnu.

Ve 3. ročníku se vyskytly i rovnice, které obsahovaly operace násobení či dělení, protože multiplikativní operace jsou hlavním tématem ve 3. ročníku. Dvě rovnice s aditivními operacemi a dvěma členy na každé straně nicméně byly i tak zachovány.



Úloha 2. Doplň.

6 · 7 = 42

45 : 5 − 8 = 1

___ − 38 = 83

24 : 4 + 11 + 3 = 30

17 + 49 = 82 + 16

37 − 6 · 5 + 8 = 44

65 − 62 = 31 + 28

7 · 3 − 2 = 19

5 · 8 − 12 = 18

8 · 6 + 4 = 52

Obr. č. 2: Druhé cvičení didaktického testu pro žáky 3. ročníku

Tentokrát se nejedná o poslední dvě rovnice ve cvičení. Myslím si ovšem, že tento fakt nemá na výsledky žádný vliv. Rovnice s aditivními operacemi a dvěma členy na každé straně byly následující:

$17 + 49 = x + 16$

$65 - x = 31 + 28$

Lze si povšimnout, že dvě rovnice ve 2. a 3. ročníku mají neznámou na stejné pozici, o druhé dvojici rovnic toto neplatí.

Těmito čtyřmi rovnicemi se dále bude diplomová práce zabývat. Výsledky ve výzkumu budu analyzovat právě u těchto čtyř rovnic a vzhledem k nim budou prováděny i další analýzy a ověřovány hypotézy.

2.4. Celkové výsledky

Jak vypadá úspěšnost řešení konkrétních rovnic v konkrétních školách, ukazuje následující tabulka. Usoudil jsem, že bude lepší zachovat anonymitu jednotlivých škol, aby nemohlo později dojít k žádné diskreditaci jak škol, tak popř. jejich zaměstnanců a žáků. Cílem navíc není porovnávat mezi sebou jednotlivé školy, ale pozorovat, jak se výsledky napříč školami mohou lišit. Kódy z tabulky budou používány i v následujících textech diplomové práce.

Kód školy	Učebnice	10 + 5 = x + 3	x + 2 = 7 + 4	17 + 49 = x + 16	65 - x = 31 + 28
1	1+1	4%	21%	65%	62%
2	Alter	25%	33%	42%	58%
3	Alter	4%	18%	20%	41%
4	Alter	7%	11%	9%	32%
5	Alter	0%	0%	11%	11%
6	Alter	6%	0%	15%	27%
7	Alter + Taktik	5%	0%	21%	15%
8	Alter	0%	0%	13%	21%
9	Fraus	70%	65%	58%	68%
10	Fraus	44%	63%	56%	57%
11	H-mat	30%	30%	63%	74%
12	H-mat	63%	58%	65%	65%
13	H-mat	62%	62%	53%	82%
14	H-mat	65%	60%	57%	67%
15	H-mat	68%	72%	48%	64%
16	H-mat + Dril	33%	33%	35%	57%
17	H-mat	64%	68%	36%	52%
18	H-mat	26%	41%	72%	80%
19	H-mat, 1+1	28%	33%	45%	50%
20	Matýskova	16%	16%	10%	19%
21	Matýskova	5%	19%	5%	24%
22	SPN	0%	0%	0%	30%
23	SPN	8%	17%	4%	17%
24	SPN	0%	10%	10%	15%
25	SPN	14%	21%	0%	20%
26	SPN	0%	13%	10%	20%
27	SPN + Taktik	0%	16%	4%	22%
28	Taktik	0%	0%	0%	0%
29	T-učebnice[6][7]	6%	11%	13%	19%
Celkem		**24 %**	**29 %**	**32 %**	**43 %**

Tabulka č. 1: Úspěšnosti jednotlivých úloh v jednotlivých školách

[6] Jako T-učebnice („tradiční“ učebnice) budu označovat ty, které nepracují s Hejného výukou matematiky, konkrétně jde v kontextu diplomové práce o učebnice nakladatelství SPN, Nová škola (řada Matýskova matematika), Alter, Taktik a Studio 1+1. Ostatní, které budu označovat jako HM-učebnice, jsou ty, které pracují s Hejného metodou výuky matematiky, konkrétně jde v kontextu diplomové práce o učebnice nakladatelství H-mat a Fraus (řada Matematika dle prof. Hejného).

[7] U této školy mám k dispozici pouze informaci, že šlo o T-učebnici, nevím však konkrétní nakladatelství.

U rovnic lze pozorovat celkově nárůst úspěšnosti ve 3. ročníku oproti 2. Ne ve všech školách však úspěšnost o rok později skutečně vzrostla, někde byla podobná jako ve druhém ročníku a na některých školách dokonce klesla. Nejvýraznější rozdíly ve zlepšení zaznamenala základní škola 01[8], naopak k největší propadu došlo v základní škole 17. V několika třídách také výchylka oproti druhým třídám závisela na typu rovnice, nebyla u obou stejná.

Přestože úspěšnost žáků ve třetím ročníku vzrostla, a tedy bylo méně chybných řešení co do počtu, podstatně se rozšířil jejich počet co do rozmanitosti. Tuto skutečnost přičítám tomu, že žáci pracovali s většími čísly. Myslím, že u větších čísel obecně chybují v počítání více; spíše udělají numerickou chybu. Tím, že samotné rovnice pracují s větším oborem čísel, je zde prostor pro rozmanitější řešení.

Jelikož jsem dostal informaci, podle kterých učebnic se v každé jednotlivé třídě učí, rozhodl jsem se zahrnout toto kritérium do analýzy výsledků.

Z nich vyplynulo, že jsou velké rozdíly v úspěšnosti řešení mezi třídami podle toho, zda se v nich vyučuje podle T-učebnic nebo HM-učebnic. Přehled, kolik správných řešení se u kterých rovnic vyskytlo, přináší následující tabulka:

Ročník	Úloha	Správně celkem	HM-učebnice	T-učebnice
2. ročník	10 + 5 = x + 3	23,8 %	50,0%	5,7%
	x + 2 = 7 + 4	29,1 %	53,5%	12,2%
3. ročník	17 + 49 = x + 16	31,9 %	53,3%	15,4%
	65 - x = 31 + 28	43,3 %	64,7%	26,8%

Tabulka č. 2: Úspěšnost u jednotlivých úloh na základě metod výuky matematiky

Chci dodat, že i přes velké rozdíly v úspěšnosti žáků, kteří touto metodou jsou vedení, a mezi těmi, kteří jí neprocházejí, je učebnice pouze jedním z faktorů, který může úspěšnost a i porozumění rovnosti ovlivnit. Toto tvrzení potvrzují i rozdíly v úspěšnosti mezi školami, kde se vyučuje podle stejných učebnic.

2.5. Úspěšnost podle pozice neznámé

Z výsledků plyne, že žákům se lépe řešily v obou ročnících rovnice, jež mají neznámou na levé straně.

[8] Kódy škol budou v diplomové práci nadále vycházet z *Tabulky č. 1*

Lze usuzovat, že tomuto trendu nahrávají mj. tvary rovnic, které se vyskytují v učebnicích. Ty, které nepracují s Hejného metodou matematiky, umisťují neznámou na levou stranu podstatně častěji než na pravou.
Moje zkušenost říká, že nejčastěji se žáci setkávají s rovnicemi ve tvaru $a + b = x$. Na základě toho mám tuto hypotézu: u těchto rovnic, často nazývaných jako příklady, jsou žáci zvyklí doplňovat neznámou (označovanou jako „výsledek“) na pravou stranu. Učí se tak konceptu, že na levé straně se nachází „zadání“ a na pravé straně „výsledek“. V důsledku toho pak přemýšlejí způsobem, že zadání musí odpovídat výsledku a naopak. Ve chvíli, kdy pracují s rovnicí ve tvaru $x + 2 = 7 + 4$, spočítají si, že výsledek je 11. Už při tom ví, že aby platilo, že $x + 2 = 11$, je třeba doplnit za x číslo 9. K tomu dodávám, že žáci ve 2. a 3. ročníku obvykle nepracují s x, nýbrž nejčastěji vynechaným místem v podobě prázdné linky či prázdného čtverečku.
Další teorie trochu souvisí s předchozí. Druhým důvodem vyšší úspěšnosti rovnic s neznámou na levé straně může být to, že se zápisem $a \pm x = b$ nebo $x \pm a = b$ se žáci v učebnicích občas setkávají, oproti tomu $a = b \pm x$ nebo $a = x \pm b$ se již téměř nevyskytuje. Pro žáky je tak přirozenější operace dopočítat si neznámou na levé straně než na pravé, a proto v rovnicích s neznámou na pravé straně chybují více. Jediné výjimky, které tento trend popírají, jsou ve druhém ročníku školy 01, 08 a 09, ve třetím pak 01 a 08.
Ve třídách, které se učí matematika Hejného metodou, tento trend ve druhém ročníku tak silný není. Z jedenácti škol s touto metodou má jen pět lepší výsledek u rovnic s neznámou na pravé straně. Může tomu tak být díky tomu, že se neznámá se v učebnicích častěji vyskytuje i na pravé straně společně s dalšími členy rovnosti. V mnoha případech navíc žáci ani netuší, že řeší rovnice, protože nemají tento tvar, resp. ani nejde přímo o rovnici, ale rovnicovou situaci. Této problematice se bude podrobněji věnovat kapitola o učebnicích s Hejného výukou matematiky v odstavci *Analýza učebnic.*

2.6. Nejčastější řešení

V následujících tabulkách jsou zaznamenány nejčastější řešení žáků. Tabulky jsou vystavěny takto:
V horním řádku je uvedeno, o kterou rovnici se jedná. Současně se zde nachází údaj o počtu žáků, kteří tyto rovnice v daných ročnících a kategoriích řešili.
V řádku *řešení* jsou vypsána čísla, která žáci vyplnili do políčka pro neznámou. Jako první je vždy uvedeno řešení, které je správné. Dále jsou seřazena chybná řešení podle četnosti výskytu. V tabulkách, které specifikují žáky, jež se učí nebo neučí podle Hejného metody, může toto pořadí být jiné, protože vycházejí z pořadí v první tabulce. Tím i vysvětluji, proč je v *Tabulce*

řešení žáků, kteří se neučí podle Hejného metody výuky matematiky např. uvedeno řešení *11* u rovnice $x + 2 = 7 + 4$, přestože se ani jednou u těchto žáků neobjevila. V případě, že je jako řešení uvedeno *nic*, znamená to, že žák místo pro doplnění neznámé nechal prázdné.
Poslední řádek nazvaný *Procenta* zaznamenává, kolik procent žáků z dané skupiny zvolilo dané řešení.

Rovnice	**10 + 5 = ? + 3**		**Počet žáků: 623**						
Řešení	**12**	**15**	**18**	**nic**	**2**	**jiný**			
Počet	148	297	128	12	12	23			
Procenta	23,8%	47,7%	20,5%	1,9%	1,9%	3,7%			
Rovnice	**? + 2 = 7 + 4**								
Řešení	**9**	**5**	**13**	**nic**	**1**	**18**	**11**	**jiný**	
Počet	181	292	43	30	29	16	9	23	
Procenta	29,1%	46,9%	6,9%	4,8%	4,7%	2,6%	1,4%	3,7%	
Rovnice	**17 + 49 = ? + 16**		**Počet žáků: 591**						
Řešení	**50**	**66**	**82**	**nic**	**56**	**40**	**72**	**92**	**jiný**
Počet	184	203	77	34	20	6	6	5	56
Procenta	31,9%	35,2%	13,4%	5,9%	3,5%	1,0%	1,0%	0,9%	9,5%
Rovnice	**65 - ? = 31 + 28**								
Řešení	**6**	**34**	**nic**	**59**	**16**	**14**	**124**	**62**	**jiný**
Počet	250	156	62	29	10	8	8	5	64
Procenta	43,3%	27,0%	10,7%	5,0%	1,7%	1,4%	1,4%	0,9%	10,8%

Tabulka č. 3: Řešení všech žáků

Rovnice	**10 + 5 = ? + 3**		**Počet žáků: 254**						
Řešení	**12**	**15**	**18**	**nic**	**2**	**jiný**			
Počet	127	81	26	8	3	9			
Procenta	50,0%	31,9%	10,2%	3,1%	1,2%	3,5%			
Rovnice	**? + 2 = 7 + 4**								
Řešení	**9**	**5**	**13**	**nic**	**1**	**18**	**11**	**jiný**	
Počet	136	80	10	9	7	3	0	9	
Procenta	53,5%	31,5%	3,9%	3,5%	2,8%	1,2%	0,0%	3,5%	
Rovnice	**17 + 49 = ? + 16**		**Počet žáků: 246**						
Řešení	**50**	**66**	**82**	**nic**	**56**	**40**	**72**	**92**	**jiný**
Počet	131	53	21	14	5	6	2	1	13
Procenta	53,3%	21,5%	8,5%	5,7%	2,0%	2,4%	0,3%	0,2%	5,3%
Rovnice	**65 - ? = 31 + 28**								
Řešení	**6**	**34**	**nic**	**59**	**16**	**14**	**124**	**62**	**jiný**
Počet	156	27	21	4	4	4	5	2	20
Procenta	64,7%	11,2%	8,7%	0,7%	0,7%	0,7%	0,9%	0,3%	8,3%

Tabulka č. 4: Řešení žáků, kteří se učí podle Hejného metody

Rovnice	**10 + 5 = ? + 3**		**Počet žáků: 369**						
Řešení	**12**	**15**	**18**	**nic**	**2**	**jiný**			
Počet	21	216	102	7	9	14			
Procenta	5,7%	58,5%	27,6%	1,9%	2,4%	3,8%			
Rovnice	**? + 2 = 7 + 4**								
Řešení	**9**	**5**	**13**	**nic**	**1**	**18**	**11**	**jiný**	
Počet	45	212	33	21	22	13	9	14	
Procenta	12,2%	57,5%	8,9%	5,7%	6,0%	3,5%	2,4%	3,8%	
Rovnice	**17 + 49 = ? + 16**		**Počet žáků: 345**						
Řešení	**50**	**66**	**82**	**nic**	**56**	**40**	**72**	**92**	**jiný**
Počet	53	150	56	20	15	0	4	4	43
Procenta	15,4%	43,5%	16,2%	5,8%	4,3%	0,0%	0,7%	0,7%	12,5%
Rovnice	**65 - ? = 31 + 28**								
Řešení	**6**	**34**	**nic**	**59**	**16**	**14**	**124**	**62**	**jiný**
Počet	94	129	41	25	6	4	3	3	47
Procenta	26,8%	36,8%	11,7%	4,3%	1,0%	0,7%	0,5%	0,5%	13,4%

Tabulka č. 5: Řešení žáků, kteří se neučí podle Hejného metody

Tabulka č. 3 zahrnuje všechny testované žáky, tabulky č. 4 a 5 je pak dělí mezi ty, kteří jsou a nejsou vyučováni Hejného metodou. Již jsem zmiňoval, že žáci, kteří touto metodou jsou vyučováni, dosahují násobně lepších výsledků. Proto jsem se rozhodl pro toto členění, abych tak ilustroval, o jak velké rozdíly skutečně jde.

Žáci s Hejného metodou u jedné rovnice dosáhli přesně poloviční úspěšnosti, v ostatních nadpoloviční, nejvíce pak 64,7 % u rovnice $65 - x = 31 + 28$. Ta byla nejúspěšnější i u žáků bez výuky Hejného metodou, jejich úspěšnost dosáhla ovšem pouze 26,8 %. Nejhorší výsledek byl obecně zaznamenán u rovnice $10 + 5 = x + 3$, kterou vyřešilo správně jen 23,8 % žáků. Opět zmíním žáky bez Hejného metody, z nichž správně řešil v průměru jen přibližně každý 17. žák.

2.7. Rozbor nejčastějších řešení

V této kapitole se budu věnovat rozboru nejčastějších řešení. Dopředu uvádím, že všechny uvedené důvody, proč žáci takto rovnice řešili, jsou pouze domněnky na základě konkrétních řešení. Nemohu mluvit za žádného žáka, proč rovnici vyřešil tak, jak ji vyřešil.

V dalších částech diplomové práce se budu jedné z hypotéz, která zde zazní, podrobně věnovat, protože jsem se pokusil si ji na více než stovce žáků ověřit.

Další z částí mé práce, která následně mé domněnky buď potvrdí nebo vyvrátí, budou rozhovory se žáky bezprostředně poté, co rovnice, kterým se zde věnuji, vyřešili.
Často se také odkazuji na učebnice, podle nichž se žáci učí, proto se kapitola 3 *Analýza učebnic* jejich rozboru bude věnovat a může mé předpoklady jak potvrdit, tak vyvrátit.

2.7.1. Správná řešení

Správná řešení sice nejsou většinou ta nejčastější, ale přesto jsem se rozhodl jim věnovat jako prvním; pouze u rovnice *65 - x = 31 + 28* je správné řešení (*6*) nejčastější ze všech. Výjimku pak tvoří žáci s Hejného metodou. U těch mělo správné řešení procentuálně největší zastoupení u všech rovnic.
Rovnice s takovými řešeními vypadají takto:
$10 + 5 = \underline{12} + 3$ (23,8 %)
$\underline{9} + 2 = 7 + 4$ (29,1 %)
$17 + 49 = \underline{50} + 16$ (31,9 %)
$65 - \underline{6} = 31 + 28$ (43,3 %)
Doplněná řešení jsou vyznačena podtržením. Procenta v závorce udávají, jak velká část žáků zvolila toto řešení. Tento postup budu aplikovat i v dalších kapitolách.
Správné řešení zřejmě značí, že žák rovnosti rozumí. Chápe, že je potřeba, aby se levá strana rovnala pravé. Počet správných řešení se mezi 2. a 3. ročníkem zvýšil. To bych přičetl postupnému získávání zkušeností během studia. Během třetího ročníku se žákům mohou otevřít nové typy úloh, které podpoří porozumění rovnosti.
Vrátím se zpět k nejúspěšnější rovnici *65 - x = 31 + 28.* Správně si s ní poradila necelá polovina žáků – 43,3 %. Tento výsledek bych přičetl dvěma již zmíněným faktorům. Prvním je skutečnost, že žáci rovnici řešili až ve 3. ročníku, v němž by měli mít již více zkušeností než ve 2. Druhým faktorem může být skutečnost popisovaná v kapitole *Úspěšnost podle pozice neznámé,* kdy si žák řekne, že výsledek rovnice je *59,* a aby tomu odpovídalo zadání, je nutné doplnit *6.* U rovnic s neznámou na pravé straně tento postup nemůže uplatnit tak dobře a u rovnice *x + 2 = 7 + 4* ve 2. ročníku žák nemá ještě tolik zkušeností, proto je procento správných řešení nižší.

2.7.2. Řešení ignorující poslední člen

Do této kategorie spadají řešení 15, 5, 66 a 34.
Jedná se o nejčastější chybná řešení v jednotlivých rovnicích. U všech těchto řešení platí, že by byla správná, kdyby v rovnici nebyl poslední člen. Rovnice s takovými řešeními vypadají takto:

10 + 5 = 15 + 3 (47,7 %)

5 + 2 = 7 + 4 (46,9 %)

17 + 49 = 66 + 16 (35,2 %)

65 - 34 = 31 + 28 (27,0 %)

Ze sebraných dat plyne, že ve 2. ročníku takových řešení byla skoro polovina. Ve 3. ročníku se jejich zastoupení snižuje, vliv na tuto skutečnost bude mít celková vyšší úspěšnost řešení. Roli může hrát i větší počet numerických chyb (a tedy větší počet jednotlivých řešení) nebo více metod, které žáky napadnou k řešení vzhledem k větším zkušenostem, které ale nemusí být správné.

Podrobnému popisu těchto řešení se věnuji v kapitole *Řetězení početních operací*, kde přesně popisuji, jakou strategii při řešení žáci pravděpodobně volí. Teorie, kterou jsem se rozhodl posléze i zkoumat, je tzv. řetězení. Při něm žáci rovnosti nevnímají jako relaci, kde se levá strana musí rovnat pravé, ale jako proces. Za rovnicemi s těmito řešeními se občas objevovalo rovnítko a další číslo, které bylo rovno pravé straně rovnice, zápis tedy vypadal např. takto: *10 + 5 = 15 + 3 = 18.*

Druhou možností, proč žáci volili takové řešení, může být to, že takové rovnice neznají. V takovém případě neví, co poslední člen znamená, a proč je zařazen, proto je pro ně nejjednodušší jej ignorovat.

2.7.3. Řešení sčítající všechny známé členy

Do této kategorie spadají řešení 18, 13, 82 a 124.

Další řešení, kterým se budu věnovat, jsou tato. Rovnice s nimi tak vypadají následovně:

10 + 5 = 18 + 3 (20,5 %)

13 + 2 = 7 + 4 (6,9 %)

17 + 49 = 82 + 16 (13,4 %)

65 - 124 = 31 + 28 (1,4 %)

Toto řešení je u tří ze čtyř rovnic třetí nejčastější. Tato žáky doplněná čísla se rovnají celkovému součtu všech známých členů v rovnici. Podle mého názoru k tomuto řešení žáci sahají, když neví, jak rovnici vyřešit. Toto je pak jediný způsob řešení, který je v dané situaci napadne. Oproti řešením v předchozí podkapitole žák vnímá celý zápis jako celek, žádný člen nevynechá.

Podstatně častější zastoupení těchto řešení bylo zaznamenáno u rovnic s neznámou na pravé straně. Ve 2. ročníku určitě hraje roli pozice neznámé, ale zde nedovedu odhadnout, jakou a proč je tento rozdíl tak markantní. Souviset to může s větším zvykem na neznámou na pravé straně, pro žáky je díky tomu možná přirozenější takto sečíst všechny členy.

Ve 3. ročníku se tato situace dá pravděpodobně vysvětlit použitím mínusu v rovnici. Řekl bych, že spoustu žáků se zarazí, pokud uvidí napsáno 65 - 124. Pokud se už nesetkali se zápornými čísly, dojdou nejspíše k závěru, že takový zápis nemá výsledek. I v případě, že záporná čísla znají, je možné, že se jim jejich použití v rovnici nebude líbit, a proto přikročí k jiné strategii řešení. Poslední rovnice je také jediná, v níž nejde o třetí nejčastější řešení. Číslo *124* se u ní vyskytlo jen u osmi žáků. Číslo *124* je tak až sedmým nejčastějším řešením.

2.7.4. Rovnice bez řešení

Vyskytovaly se i případy, kdy žáci políčko nebo linku pro doplnění čísla nechali prázdné.

10 + 5 = __ *+ 3* (2,4 %)

__*+ 2 = 7 + 4* (4,8 %)

17 + 49 = __*+ 16* (5,9 %)

65 - __ *= 31 + 28* (10,7 %)

Možností, proč tomu tak je, může být hned několik. Nejpravděpodobnější mi připadá varianta, že žáci nevěděli, jak dané rovnice vyřešit, a proto se rozhodli se jejich řešením dále nezabývat. Možnou variantou je i to, že si nechali řešení na později, a k rovnicím se pak již z časových důvodů nestihli vrátit, případně na ni zapomněli.

Další teorií je strach z chyby. Než aby žák zvolil chybné řešení, raději nezvolí žádné.

Variantou je i to, že žák usoudí, že rovnice nemá řešení. Žáci se s úlohami bez řešení mohli ve své školní praxi již setkat a usoudit, že tohle je jeden z takových případů.

Zajímavý je zde opačný trend oproti předchozím chybným řešením. Počet chybných řešení obecně ve 3. ročníku klesal téměř u všech jejich typů. Varianta s nevyplněným výsledkem se však ve 3. ročníku vyskytovala častěji než ve 2.

2.7.5. Řešení ignorující první člen

Pokud řešení vychází tak, jako by v rovnici zcela chyběl první člen, vypadají řešení takto:

10 + 5 = $\underline{2}$ + 3 (1,9 %)

17 + 49 = $\underline{33}$ + 16 (0,3 %)

65 - $\underline{59}$ = 31 + 28 (5,0 %)

Rovnice *x + 2 = 7 + 4* ve výčtu nemůže figurovat, protože má na prvním místě neznámou. Tato řešení se neřadí mezi již tak častá, ale stojí za zmínění.

Předpokládám, že strategie, kterou zde žáci volí, je velmi podobná jako u řešení, která neberou v potaz poslední člen. Žák pouze v tomto případě postupuje odzadu. U první uvedené rovnice tak může řešit úlohu *„tři plus něco bude pět, takže doplním dva",* přičemž neví, co má dělat s prvním členem, a tak jej nebere v potaz. U rovnice ve stejném tvaru ve 3. ročníku je to podobné, menší počet takových řešení opět může souviset s důvody, které už u poklesu chybných řešení byly popsány.

Podobně u poslední rovnice žák vyřeší součet členů na pravé straně a první člen nalevo nechává být, protože neví, jak s ním pracovat. Důvodem, proč je řešení u poslední rovnice ve 3. ročníku častější než ve 2. u první rovnice, je jeho větší jednoduchost.

2.7.6. Ostatní řešení

Dalším řešením se již budu věnovat po jednotlivých rovnicích.

V rovnici $x + 2 = 7 + 4$ se mezi častá řešení zařadila ještě čísla *1* (4,7 %)*, 18* (2,6 %) a *11* (1,4 %).

U čísla *1* a *18* mě však nenapadá, jakou strategii řešení žáci zvolili.

V případě čísla *11* odhaduji, že žáci rovnici řešili sice správným způsobem, ale vlivem chybného výpočtu došlo k chybě. Je pravděpodobné, že žákům součet čísel *7* a *4* vyšel *13*, a tak doplnili číslo *11*.

U rovnice $17 + 49 = x + 16$ stojí za zmínku řešení *56*, které se vyskytlo ve 3,5 % případů. Předpokládám, že tato chyba pramení z chyby při počítání na místě desítek; o jednu desítku se totiž liší tato odpověď od té správné.

V řešení rovnice $65 - x = 31 + 28$ došlo v 1,7 % řešení patrně k obdobné chybě, jakou popisuji u předchozí rovnice. Odpověď *16*, která se v takovémto poměru řešení objevila, se též liší o jeden řád desítek od správné odpovědi *6*.

Za významnější by se ještě dalo považovat řešení *14* (1,4 %), zde bych řekl, že může jít o kombinaci chyby stejné jako u čísla *16* a ještě chybě v řádu jednotek.

Další řešení, která se vyskytla, mají zastoupení menší než 1 %. Mohou vycházet z různých chyb, u nichž většinou nedokážu blíže odhadnout jejich původ.

2.8. Faktory ovlivňující úspěšnost řešení

Faktorů, které ovlivňují úspěšnost řešení v jednotlivých třídách, může být spoustu. Již několikrát jsem zde zmiňoval učebnice, které jsou podle faktorem nejvýznamnějším, ale zdaleka ne jediným.

2.8.1. Vyučující

Zejména na 1. stupni je ve třídě velmi důležitá osoba učitele. Protože s žáky tráví obvykle všechny nebo většinu vyučovacích hodin, jeho vliv na žáky je veliký. Roli hraje i věk žáků, ve 2. – 3. ročníku základní školy jde nejčastěji o děti ve věku 7 – 9 let. V tomto věku jsou ještě velmi ovlivnitelní.

Důležité je, jakým způsobem se žáky pracuje, protože tím získávají návyky, jak např. řešit různé problémy, což platí nejen v matematice a problematice rovnosti. Způsob práce mohou opět do značné míry ovlivnit učebnice. Na učiteli je však již všechno ostatní. Podle zákona 561/2004 Sb., § 22 a, písm. c „pedagogičtí pracovníci mají při výkonu své pedagogické činnosti právo na využívání metod, forem a prostředků dle vlastního uvážení v souladu se zásadami a cíli vzdělávání při přímé vyučovací, výchovné, speciálněpedagogické a pedagogicko-psychologické činnosti“. Vyučující tedy volí, kterým cvičením nebo úlohám se v nich bude věnovat, a jakým způsobem tak bude činit. Stejně tak se sám za sebe rozhoduje, zda žáky bude frontálně učit konkrétní řešení různých typů úloh nebo je konstruktivisticky nechá, aby žáci objevovali vlastní cestu. Učitel má vliv i na to, aby si žáci zvykli na správná řešení, která k cíli skutečně vedou, a nebudovali chybné vzorce některých postupů.

Kromě učebnic má vyučující i vliv na to, jaké další pomůcky bude používat. Může se jednat o další podporu v podobě dalších učebnic, metodik, knih, časopisů atd. V dnešní době jsou dostupné na internetu spousty materiálů v podobě např. pracovních listů nebo různých online procvičování, které je možné si stáhnout, zakoupit či jinak použít online. Kolik takového rozšiřujícího učiva žákům poskytne, je na něm. Důležitou roli hrají i pomůcky. Konkrétně rovnost se díky nim dá modelovat velmi dobře. Často stačí různé zástupné prvky v podobě např. pěnových krychlí nebo víček od PET lahví. Pokud učitel žákům takové věci poskytne, a ti si mohou různé situace vymodelovat, získávají další způsob vhledu do situací.

Mezi další faktory, které vyučující ovlivňuje, jsou formy práce. Jiný rozhled budou pravděpodobně mít žáci, kteří napříč celou třídou samostatně vyplňují učebnice v lavicích

a následně si je frontálně kontrolují, oproti žákům, kde funguje vrstevnické učení např. prací ve skupinách či diskusemi mezi nimi.
Všemi těmito kroky učitel ovlivňuje i celkový postoj žáka k matematice, který se promítá do jeho přístupu k tomuto předmětu a potenciálně i úspěchu, kterého v něm může dosáhnout.

2.8.2. Rodina

Dítě se celý život učí nejen ve škole, ale především v rodině. Rodiče a celé rodinné zázemí jsou tak dalším faktorem, který určuje míru školní úspěšnosti, jak i potvrzuje studie Hendersona a Berly (1994). Od útlého věku dítěte záleží, jak moc se mu rodiče věnují, a ve kterých oblastech jej rozvíjejí.
Ve chvíli, kdy začne dítě chodit do školy, bude záležet i na rodičích, jak se do školy připravuje, učí a a celkově si plní školní povinnosti. Rozdílné výsledky bude mít dítě, které má na tyto záležitosti doma klid, prostor a čas oproti jinému, které těmito komoditami nedisponuje. Tyto podmínky jsou však též ovlivňovány mnoha dalšími faktory, jako jsou socio-ekonomicko-kulturní status rodiny, kulturní prostředí, životní styl a celkový postoj ke vzdělání. Soubor těchto faktorů má vliv na proškolní motivaci a ve výsledku jimi často je ovlivněn školní úspěch žáka (Rendl, 2013, s. 260). Záleží i na rodičích samých, kolik času dítěti věnují, a také jakým způsobem. Pokud má v rodiči dítě „dalšího učitele“, myslím, že určitě zvýší jeho školní úspěšnost.
Roli zde hraje též genetická výbava, ačkoliv „v současné době je k biologicky ukotveným strukturám přistupováno jako k potenciálu, jehož naplnění či redukce závisí na vlivech prostředí a aktivitě jedince“ (Rendl, 2013, s. 260).
Rodiče mají též vliv na motivaci přímo vzhledem k matematice. Ti mohou svým dětem i nevědomky předávat spoustu předsudků různým poukazováním na skutečnosti, jak matematiku zvládali či naopak nezvládali oni sami. Rodiče jimi dopředu mohou dítě vystavit pocitu, že matematika je něco velmi složitého, co se dá jen obtížně překonat. Též se může prezentují některé její složky jako něco, co dítě nebude v dalším životě potřebovat (tamtéž, s. 285, 286). Podle mého názoru se ale poslední problém týká spíše až 2. stupně.
Hejný (2014, str. 44) na základě několika konkrétních příkladů tvrdí, že „že dítě není v mnoha případech třeba motivovat. Stačí vycházet vstříc jeho poznávacím potřebám.“

2.8.3. Pandemie covid-19 a online výuka

Na celkové výsledky žáků, kteří prošli výzkumem, může mít vliv i pandemie covid-19. Žáci zažili uzavření školy v 1. i 2. ročníku. Několik měsíců tak nedocházeli prezenčně do školy, ale absolvovali distanční výuku, přestože po část doby pandemie platila pro žáky těchto ročníků výjimka a mohli se vzdělávat prezenčně.

V této době, zejména během prvního uzavření škol, výuka neprobíhala v plném rozsahu a je pravděpodobné, že spoustě učiva se žáci nevěnovali tak důkladně a v takovém rozsahu, jako by tomu bylo v případě prezenční výuky.

Je tedy možné, že pokud by stejný výzkum probíhal nyní nebo za několik let (kdy již pandemii žáci nezažili ani v době, kdy chodili do mateřských škol), výsledky by byly příznivější, jelikož by žáci mohli mít lepší základy pro porozumění rovnosti.

3. ANALÝZA UČEBNIC

Průzkum, který proběhl na různých školách, zahrnuje třídy vedené různými metodami výuky matematiky, a které používají různé učebnice, se kterými žáci pracují.

Jeden z mnoha zjišťovaných údajů se týkal učebnice, které daní vyučující ve svých třídách používali. Bylo evidováno, že ve všech třídách byly použity dohromady učebnice sedmi různých nakladatelství.

Jedná se o učebnice těchto společností: H-mat, o.p.s.; Nakladatelství Fraus, s.r.o. (edice Matematika dle prof. Hejného); SPN – pedagogické nakladatelství, a. s.; Nakladatelství ALTER, s.r.o.; NOVÁ ŠKOLA, s.r.o. (edice Matýskova matematika); TAKTIK International, s.r.o., organizační složka; Studio 1+1. Dále již nebudu uvádět plné názvy společností.

Se všemi učebnicemi jsem se seznámil. Popíši a ilustruji způsob, jak jsou v učebnici zpracována témata rovnost a rovnice, a nakonec učebnice porovnám. Nebudu vůbec brát v úvahu, jak s danými učebnicemi ten který učitel pracuje. To je také omezení této analýzy.

Nejzásadnější rozdíly jsou pozorovatelné mezi HM-učebnicemi a T-učebnicemi. Způsoby vedení žáků ve výuce matematiky jsou rozdílné, úlohy jsou typově taktéž hodně odlišné.

Důležité je však zmínit, že nemám data, jak moc se vyučující ve zkoumaných třídách jednotlivých učebnic drží. Taktéž nemohu pouze na základě učebnic soudit, jak výuka matematiky v jednotlivých třídách probíhá. Ve všech případech může být výuka matematiky konstruktivistická i transmisivní. Stejně tak nevím, jaké další výukové materiály vyučující používají. Přesto ale dodávám, že ve výsledcích výzkumu jsou pozorovatelné podstatné rozdíly mezi jednotlivými třídami podle toho, zda používají HM-učebnice nebo T-učebnice.

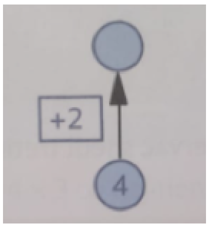
Analýzy všech učebnic jsou rozděleny do tří částí. V první části se věnuji *rovnicím ve tvaru* $a \pm b = x$, ty jsou v T-učebnicích jednoznačně nejčastější, u HM-učebnic si netroufám odhadovat, které rovnice se vyskytují nejčastěji. Druhá část analýz se zaměřuje na úlohy s *rovnicemi v ostatních tvarech*. Poslední část analyzuje všechny *ostatní rovnice se třemi členy*.

Učebnice mají také různé společné znaky. Všechny jsou ve 2. ročníku zpracovány jako pracovní učebnice, ve 3. ročníku jsou rozděleny na učebnice a pracovní sešity. Výjimkou jsou učebnice nakladatelství 1+1, které jsou takto rozděleny už ve 2. ročníku.

3.1. Interpretace pojmů rovnost, rovnice, rovnicová situace v učebnicích

Než začnu analyzovat jednotlivé učebnice, provedu přehled, co znamenají jednotlivé pojmy, které souvisí s rovnostmi, a které budu používat.

V dalším textu se bude vyskytovat termín aditivní triáda. Hejný (2014, str. 95) aditivní triády rozděluje na externí a interní a definuje je takto: „termínem externí aditivní triáda rozumíme trojici čísel (a, b, c), z nichž jedno je součtem dalších dvou. Mentální projekci tohoto objektu do vědomí člověka pak nazveme interní aditivní triáda. Přitom nespecifikujeme, které z čísel je součtem zbylých dvou.“ Žák, který vnímá tři čísla jako aditivní triádu, ví, že tato čísla nějakým způsobem k sobě patří. Např. u čísel 3, 5, 8, (3 + 5 = 8), rozumí tomu, jak ze znalosti dvou čísel triády získá třetí. Tedy jestliže zná čísla *a, b,* určí číslo *c* takto: $a + b = c$. Jestliže zná čísla *a, c,* určí číslo *b* takto: $c - a = b$. A jestliže zná čísla *b* a *c,* určí číslo takto: $c - b = a$. Když místo operace sčítání nebo odčítání budu pracovat s operací násobení nebo dělení, budu psát o multiplikativní triádě. Zápis triády např. 3 + 5 = 8 nazvu rovnicí. Pokud jedno číslo z aditivní triády není známé, a označím ho písmenem *x* a triádu zapíši $a + b = x$, nebo $a + x = c$, nebo $x + b = c$, budu mluvit o rovnici. V případě potřeby odliším, že je to rovnice se třemi členy. Budu též psát o rovnicové situaci. Dít se tak bude v případech, kdy vztah mezi třemi čísly není zapsán rovnicí, ale lze jej do ní přepsat. Příkladem je tzv. Had z jednoho z prostředí v HM-učebnici, který v ukázce níže neobsahuje znak rovnítka, ale lze jej přepsat do tvaru $4 + 2 = x$, ilustruje jednu rovnicovou situaci.



Obr. č. 3.: Rovnicová situace v podobě Hada

3.2. Nakladatelství H–mat

Učebnice nakladatelství H-mat a Fraus (HM-učebnice) mají učivo strukturováno odlišně od ostatních posuzovaných učebnic (T-učebnice). Tuto myšlenku vysvětlím, a dále se budu věnovat pouze tomu, jak různé učebnice pracují s jevy rovnosti, rovnic, případně rovnicových situací.

Struktura učiva v HM učebnicích je dána zákonitostmi poznávacího procesu v matematice, který vychází z vývojové psychologie dítěte, které jsou formulovány v Teorii generických modelů (Hejný, 2014). Autoři učebnic vždy usilují o důkladnou propedeutiku matematických pojmů prostřednictvím vlastních prožitků dítěte tak, aby se do vnímání zapojilo co nejvíce smyslů, a také, aby byly nabídnuty dva způsoby vnímání - procesuální a konceptuální. Propojením těchto dvou způsobů vnímání dojde v mysli žáka k vyšší kvalitě porozumění pojmům, vztahům, situacím, kterou badatelé E. Gray a D. Tall vyjádřili termínem procept (Gray, Tall in Hejný, 2014). Z toho důvodu je důležité matematické pojmy připravovat prostřednictvím úloh zasazených do různých didaktických prostředí (Hejný, 2014). Jedná se o sady na sebe navazující úloh ve stejném kontextu a grafice, jejichž náročnost postupně obtížnostně graduje a směřuje i několik let k hluboké matematické myšlence. Cílem práce v různých didaktických prostředích je žákům poskytnout možnost různých přístupů k matematickým pojmům, k řešení matematických úloh, k budování metakognitivních strategií, a rozvíjet tak jejich schopnost řešit problémy a matematické přemýšlení. Bohatá různorodost přístupů k pojmům podporuje tvorbu mentálních schémat pojmů v myslích žáků, což je důležitým předpokladem schopnosti orientovat se ve světě matematiky a řešit problémy.

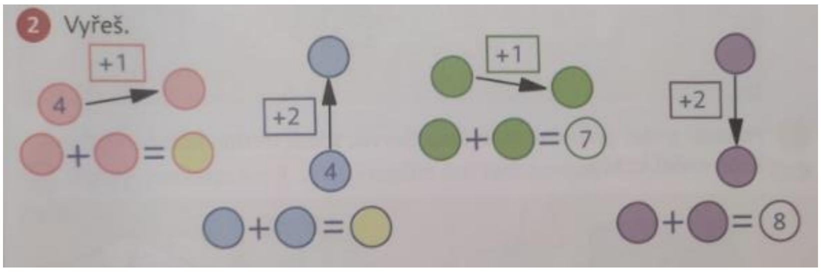
3.2.1. Rovnice ve tvaru a ± b = x:

Jsou nejčastěji se vyskytující ve všech T-učebnicích. V HM-učebnicích se naopak téměř nevyskytují cvičení jen s tímto tvarem rovnic. Neznamená to však, že by byl zanedbáván, ale vzhledem ke komplexnosti úloh, se ve většině cvičení vyskytuje více různých tvarů rovnic, do kterých lze přepsat uvedené rovnicové situace. To lze vidět i na níže přiložených obrázcích.

Se skrytými rovnicemi tvaru $a \pm b = x$ se žáci 2. ročníku setkávají v mnoha algebraických prostředích v podobě mnoha různých rovnicových situací, např. v prostředí Hadů, Krokování, Schodů, Pavučin, v Algebrogramech, Vláčcích, ale i dalších.

Na následujících obrázcích jsou vidět příklady takových cvičení. V prostředí Hadů se v kruzích buď nacházejí čísla, nebo jsou kruhy prázdné. Jimi je vyjádřena neznámá, která bude v budoucnosti označovaná jako *x*. Kruhy jsou propojeny šipkami s označením operace, kterou je třeba provádět ve směru šipky, a buď je u znaménka operace dáno číslo, nebo nic, což je opět neznámá.

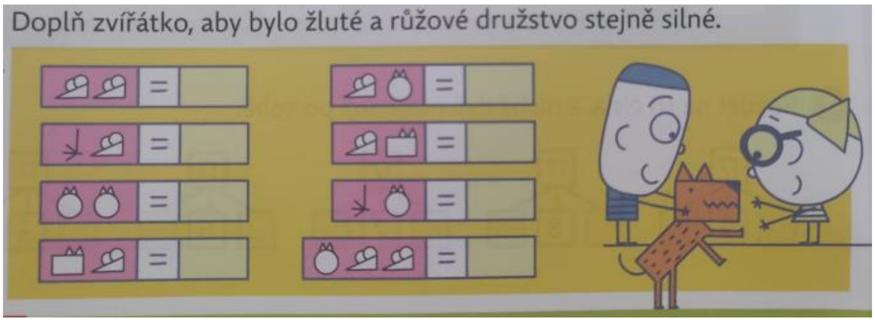
Na obrázku jde o soustavu dvou rovnic. V červeném a modrém hadovi se však žáci setkávají s rovnicovou situací, kterou lze přepsat jako $4 + 1 = x$ (červený had), resp. $4 + 2 = x$ (modrý had).



Obr. č. 4: H-mat: 2/1, str. 15[9]

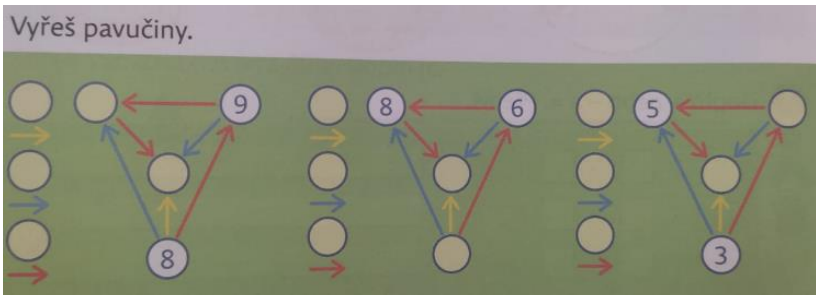
[9] Obrázky z učebnic jsou popisovány tímto způsobem: Nakladatelství: ročník/díl díl učebnice, strana. V případě zkratky PS se jedná o pracovní sešit.

V prostředí Dědy Lesoně žáci pracují se zvířaty, přičemž každé z nich má danou svoji sílu (hodnotu). Platí např., že dvě myši jsou stejně silné jako jedna kočka. Úloha na obrázku je ve svém zpracováním v tomto prostředí poměrně ojedinělá. S triádami $a \pm b = x$ se běžně se žáci u Dědy Lesoně nesetkávají. Nejčastěji žáci rozdělují zvířátka do stejně silných družstev, nebo do družstev zvířátka přidávají či je z nich odebírají, aby byla družstva vyrovnaná. Tato úloha tak dobře ilustruje, jakou variabilitou některá prostředí disponují.



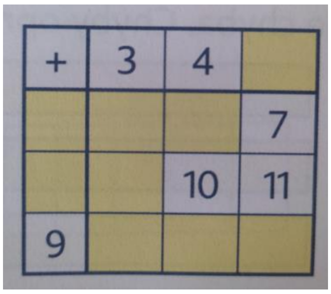
Obr. č. 5: H-mat: 2/3, str. 108

I v prostředí Pavučiny běžně žáci skrytě řeší rovnice v různých tvarech. Čtvercová pole s čísly, která jsou známá z Hadů, jsou v Pavučinách vyjádřeny různými barvami šipek. Ve směru šipky se číslo přičítá. Každé barvě šipek je přiřazeno právě jedno číslo (pokaždé jiné), v rámci jedné úlohy dvě různé barvy nemají nikdy stejnou hodnotu. V první pavučině na obrázku si žák nejdříve vyvodí, že hodnota červené šipka přičítá 1 (z triády (8, x, 9), nebo z rovnice $8 + x = 9$). Toho využije k dalšímu počítání: $9 + 1 = y$ a $10 + 1 = z$.

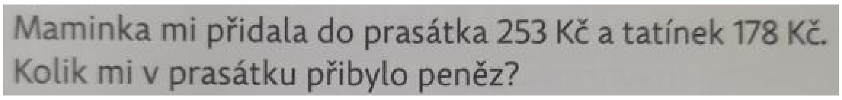


Obr. č. 6: H-mat: 2/2, str. 50

Dalšími příklady cvičení s použitím takového tvaru rovnice jsou Sčítací tabulka a slovní úloha. V prvním obrázku ve Sčítací tabulce jsou skrytě vyjádřeny např. tyto rovnice: $9 + 4 = x$, také ale $9 + x = 11$, $x + 4 = 10$.



+	3	4	
			7
		10	11
9			

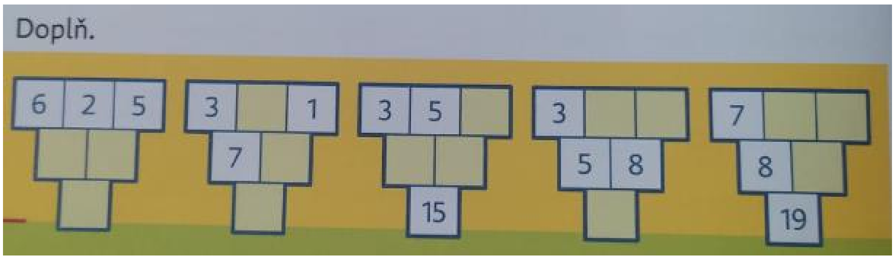


Obr. č. 7 a 8: H-mat: 2/2; str. 60; 3, str. 57

3.2.2. Ostatní rovnice se třemi členy:

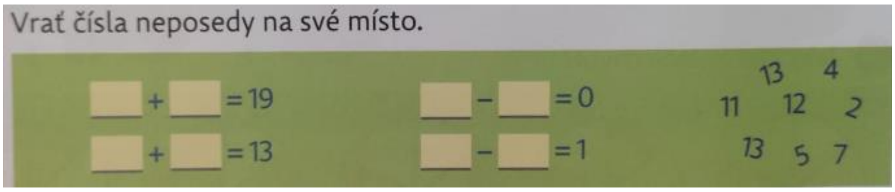
Rovnicemi v mnoha dalších tvarech se obecně HM-učebnice zabývají intenzivně. Na předchozích obrázcích tyto případy můžeme vidět u Pavučin nebo Sčítací tabulky. Vyskytují se ale i jinde, na následujících příkladech se pokusím vystihnout jejich rozmanitost.

V prostředí Součtových trojúhelníků jsou vyjádřeny úlohy, kde se součet dvou čísel vedle sebe rovná číslu pod nimi. Vyskytují se zde tak skrytě rovnice ve tvaru jak $a + b = x$, tak $a + x = b$ a $x + a = b$.



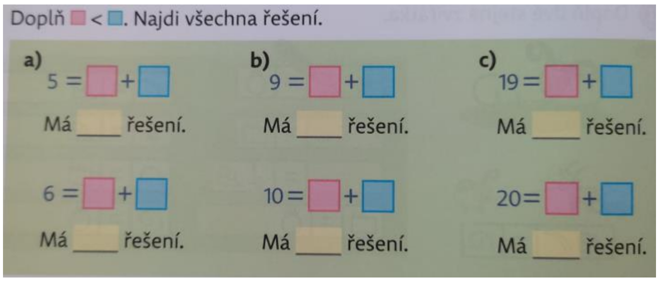
Obr. č. 9: H-mat: 2/1, str. 4

Na dalším obrázku jsou vidět tzv. Neposedové. U těch nejde o prostředí, ale metodu, jak se s různými prostředími dá pracovat. Jedná se o čísla, která žáci mají dosadit do volných míst v jednotlivých úlohách. Vyskytují se např. u Hadů nebo Součtových trojúhelníků. Zde je vidíme u triád bez kontextu. Žáci mají na výběr z omezeného souboru čísel, de facto ale dosazují dvě neznámé.



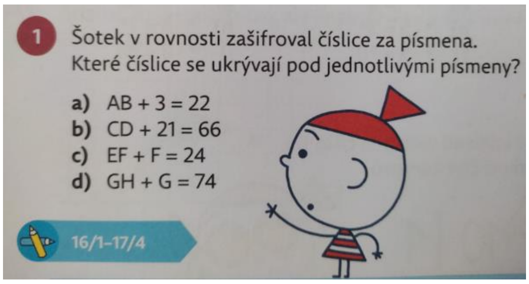
Obr. č. 10: H-mat: 2/2, str. 63

U následujícího obrázku se opět nevyskytujeme v konkrétním prostředí, ale je zde vidět další formát rovnic: $x = a + b$. V tomto případě mají navíc několik řešení.



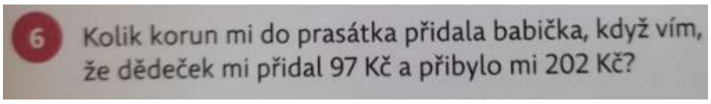
Obr. č. 11: H-mat: 2/3, str. 116

V prostředí Algebrogramů žáci poznávají neznámé ve formě písmen, ale ne v obvyklém pojetí. Zde platí, že jedno písmeno se rovná jedné číslici, nikoliv číslu. Setkáváme se jak např. s rovnicemi $x + a = b$, tak i situacemi, kdy je zde neznámých více, např. poslední úlohu $GH + G = 74$ do obecného tvaru ani přepsat nelze. Dá se říct, že zde jsou dvě neznámé na levé straně, ale ty jsou mezi s sebou provázané písmenem *G.*
U těchto úloh není neobvyklé více řešení, ostatně stejně jako v úlohách v předchozím cvičení. Žáci zde prozkoumávají různé možnosti a obvykle jim v hlavě musí proběhnout několik různých operací, které sice nejsou na papíře vidět, ale žák reálně spočítá několik rovnic u jedné úlohy. Tento potenciál prakticky žádné úlohy u T-učebnic nemají.



Obr. č. 12: H-mat: 3, str. 16

Ve slovní úloze pracuje žák s rovnicí $x + 97 = 202$. V T-učebnicích se s takovými slovními úlohami žáci de facto nesetkávají. Ve srovnání s T-učebnicemi je zde neobvyklá i sémantická struktura $O1^{10} + O2 = O3$.



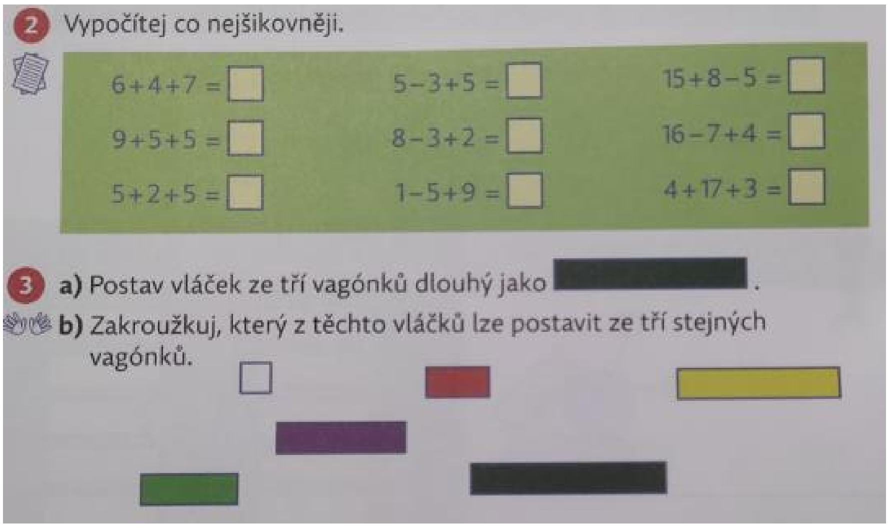
Obr. č. 13: H-mat: 2/1, str. 39

[10] Zkratku O budu používat pro číslo jako operátor. Číslo za písmenem značí pořadí operátoru v konkrétní rovnici.

3.2.3. *Rovnice s více než třemi členy:*

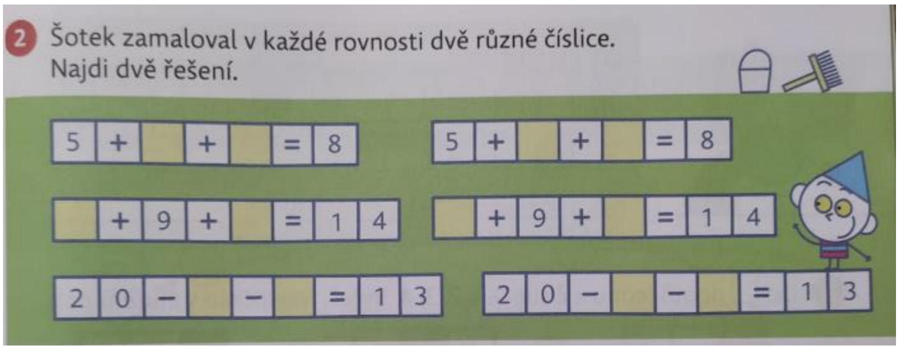
Na rovnice s více než třemi členy jsou HM-učebnice také mnohem bohatší než T-učebnice. I zde uvedu několik různých příkladů jejich použití napříč prostředími.

Pod klasicky pojatými rovnicemi jsou na obrázku umístěny Vláčky. V tomto prostředí jsou čísla vyjádřena geometricky. Navíc žáci mají k dispozici sadu barevných hranolků, pomocí nichž si mohou situace, kdy srovnávají délky vláčků, modelovat. Zde v zadání a) mají postavit ze tří vagónů vlak stejně dlouhý jako tmavě zelený vagón. Vzniká tak v tomto konkrétním případě rovnice $x + y + z = 6$. Tento vagón je stejně dlouhý jako šest nejkratších bílých, proto je na konci rovnice číslo 6. Rovnice má více řešení a vlak se dá poskládat pomocí více kombinacemi vagónů. Podobnou rovnici žáci řeší i v zadání b), liší se jen hodnota stavu na pravé straně.



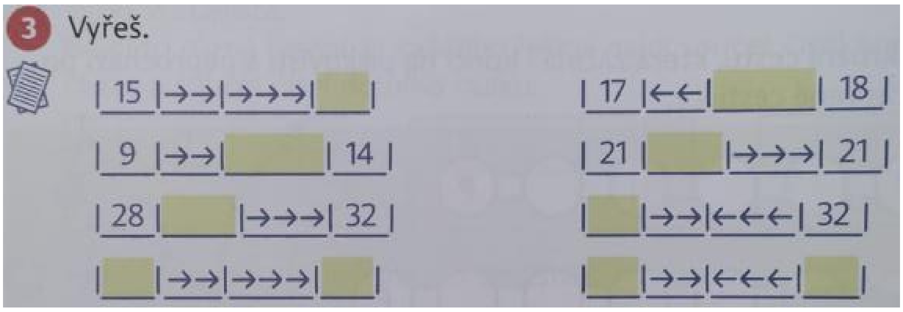
Obr. č. 14: H-mat: 2/1, str. 22

V dalším cvičení se žáci setkávají s rovnicemi se dvěma neznámými, ty tak mají více řešení.



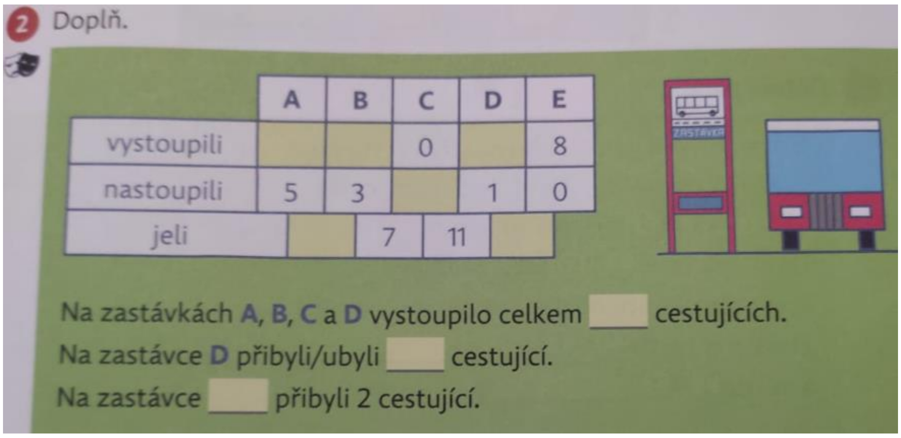
Obr. č. 15: H-mat: 2/1; str. 7

Kontext prostředí Schody na obrázku č. 16 spočívá v chození po schodech, jde o procesuální prostředí. Žák na několikátém schodu začne a pomocí jednotlivých kroků se dostane buď na schody níže nebo výše. Šipky jsou operátory změny, při šipkách doprava se žák pohybuje po schodech nahoru, doleva dolů. V prvním řádku druhého sloupce tak máme např. rovnici $17 - 2 \pm x = 18$. Neznámá se pohybuje po různých pozicích. Podobným prostředím je Krokování, v něm se ale nepracuje s číslem jako s adresou, nýbrž pouze s operátory.



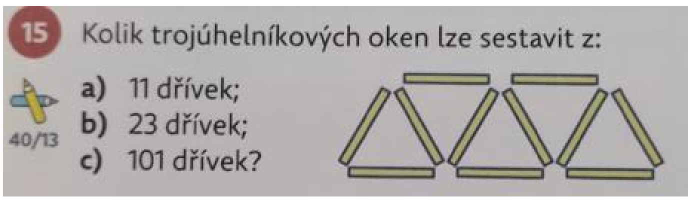
Obr. č. 16: H-mat: 2/1; str. 30

Prostředí Autobus na následujícím obrázku pracuje s kontextem, který je většině žáků dobře známý. Autobus projíždí zastávkami a na nich vystupují a nastupují lidé. Žáci tak pracují s operátory změny. V případě, že bude žák chtít např. doplnit počet vystoupivších v zastávce B, řeší rovnici $5 - x + 3 = 7$.



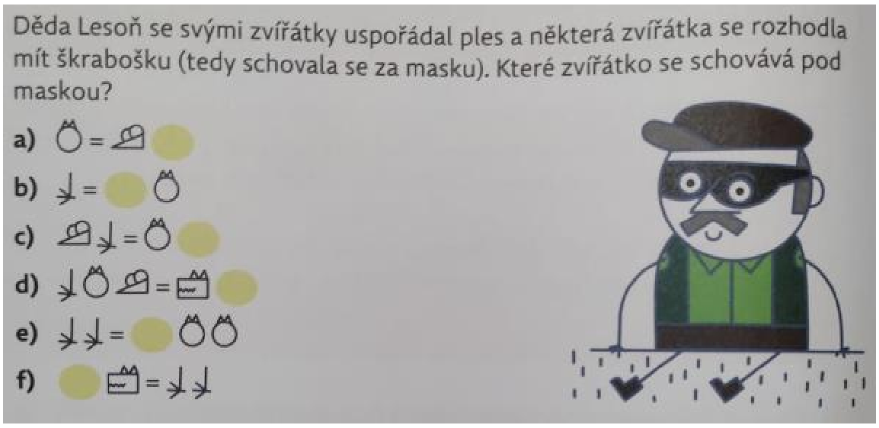
Obr. č. 17: H-mat: 2/2, str. 45

Dřívka jsou dalším prostředím, které propojuje algebru s geometrií. V úloze se žáci skrytě setkají s rovnicí $3 + 2 \cdot x = 11$ *(23, 101)*, kterou lze zjistit počet oken v řadě.



Obr. č. 18: H-mat: 3; str. 29

Na závěr zařazuji další ukázku z prostředí Děda Lesoň. Toto prostředí je asi nejpřímější průpravou na řešení rovnic, protože z něj žáci do přepisování na rovnice ve vyšších ročnících přejdou a s pojmem rovnice se v něm pracuje. Žáci musí odhalit, které zvířátko se skrývá za maskou (tzn. na místě kroužku), aby obě družstva byla stejně silná - tedy se obě strany rovnice rovnaly.



Obr. č. 19: H-mat: 3, str. 49

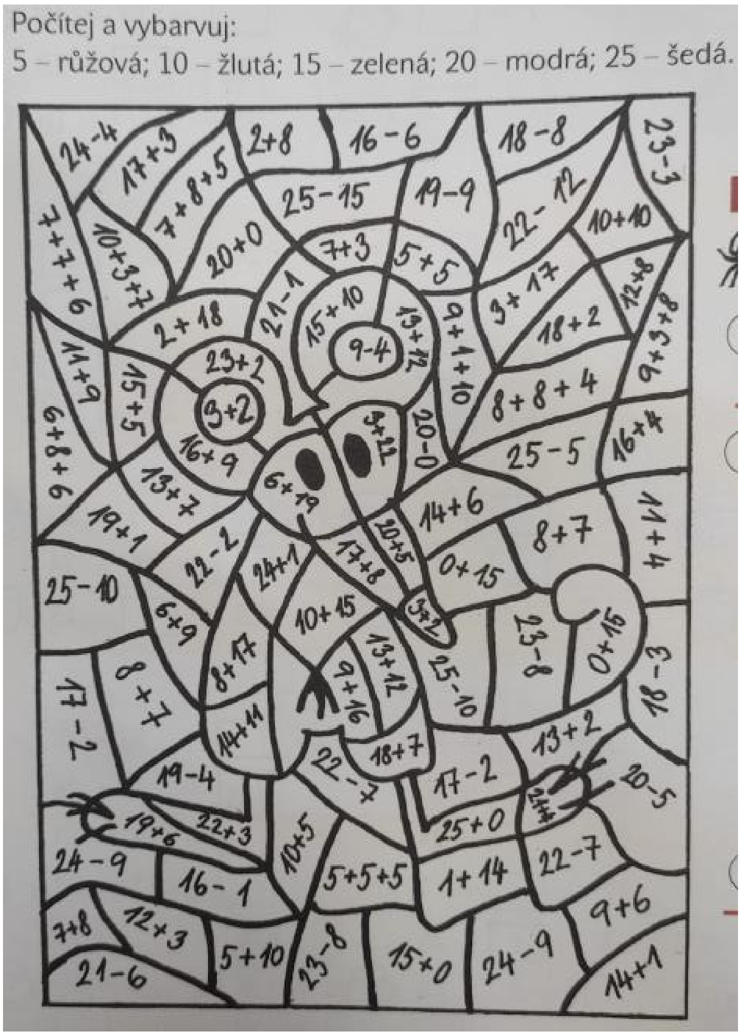
3.3. Nakladatelství Fraus – Matematika dle prof. Hejného

Koncept učebnic nakladatelství Fraus je vzhledem ke stejné výukové metodě velmi podobný jako u učebnic nakladatelství H-mat. Některá cvičení jsou dokonce úplně stejná. Proto se učebnicemi Fraus nebudu zabývat tak podrobně a uvedu menší množství příkladů různých úloh, přičemž se budu snažit zaměřit na typy úloh, které u učebnic H-mat neuvádím. Platí, že většina napsaného u H-mat funguje stejným způsobem v učebnicích Fraus.

3.3.1. Rovnice ve tvaru $a \pm b = x$:

Obdobně jako u H-mat jsou i u Frause tyto rovnice často součástí cvičení, v nichž lze najít několik různých tvarů rovnic. Samostatně se vyskytují jen málo. Navíc jsou takové rovnice zastoupeny nejčastěji v různých kontextech a především rovnicových situacích. Pracují s nimi stejná prostředí jako v H-mat.

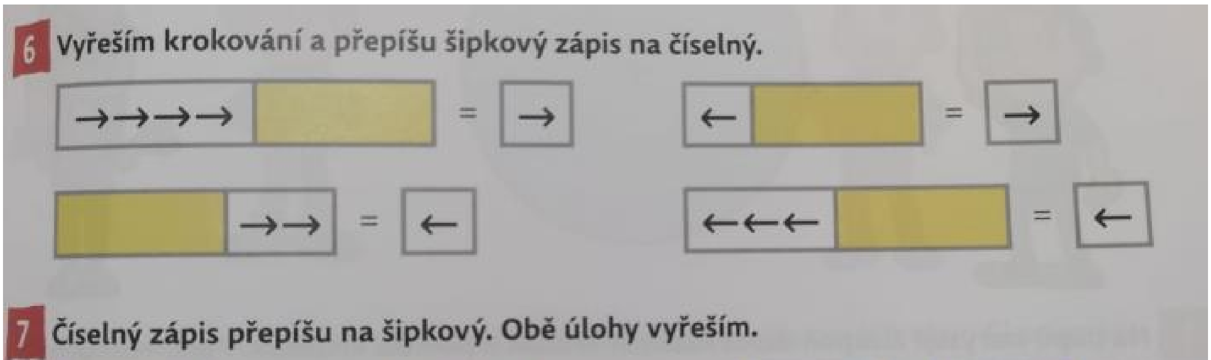
U obr. č. 20 jde o zápis $a \pm b$, který může být žákem vnímán jak ve tvaru $a \pm b = x$, tak $x = a \pm b$. V obr. č. 21 s Krokováním je vidět zahajování zapisování rovnic se zápornými hodnotami.



Obr. č. 20: Fraus: 2/1, str. 54

3.3.2. Ostatní rovnice se třemi členy:

U ostatních rovnic se třemi členy uvedu příklad z prostředí Krokování, které ještě v práci není prakticky ukázáno. Tyto úlohy ze 3. ročníku žáka provázejí zápisem rovnic se zápornými čísly. S nimi sice žáci skrytě pracují již od 1. ročníku, ale nepřepisují je do podob rovnic.



Obr. č. 21: Fraus: 3, str. 75

3.3.3. Rovnice s více než třemi členy:

S rovnicemi se třemi členy pracuje krom již uvedených např. také prostředí Barevné trojice. V něm mají žáci k dispozici několik různě barevných čísel do políček se stejnou barvou. Úkolem je, aby se povedlo umístit všechna čísla. Dá se tak říct, že žák doplňuje tři neznámé. Tvary rovnic, s nimiž se žák v tomto prostředí setká: $x + y + z = a$ nebo $a = x + y + z$.

Obr. č. 22: Fraus: 2/1, str. 38

3.4. Nakladatelství SPN

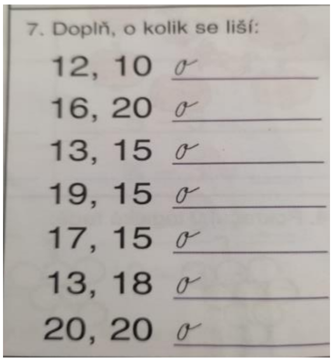
3.4.1. Rovnice ve tvaru a ± b = x:

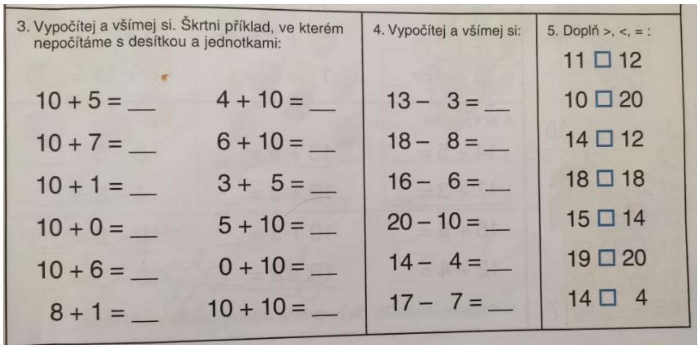
Jde o zdaleka nejčastější tvar rovnic, který se v učebnicích SPN, ale i ostatních T-učebnicích a pracovních sešitech vyskytuje. Společně s úlohami od Taktiku jsou úlohy od SPN asi graficky nejrozmanitější.

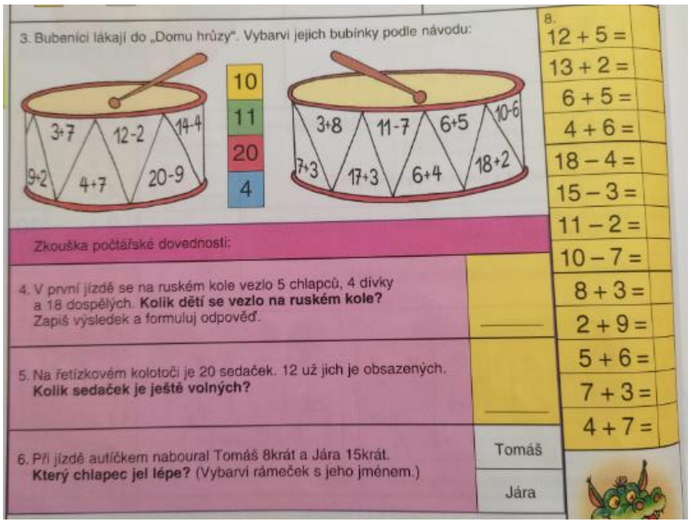
I téměř všechny slovní úlohy mají tento matematický model. Všechny číselné údaje z úloh bývají buď pouze stavy, někdy jsou použity operátory změny či porovnání. Jejich sémantickou strukturu lze většinou napsat takto: *S1*[11] + *S2* = *S3* nebo *S1* + *O1* = *S3*. Toto platí i u všech ostatních T-učebnic. Na druhou stranu u HM-učebnic se s podobnými slovními úlohami nepracuje téměř vůbec. Různost grafik[12], avšak kognitivně stejné úlohy ilustrují následující ukázky (SPN 2/1, str. 5, 8, 16, 25; uč. 3, str. 44):

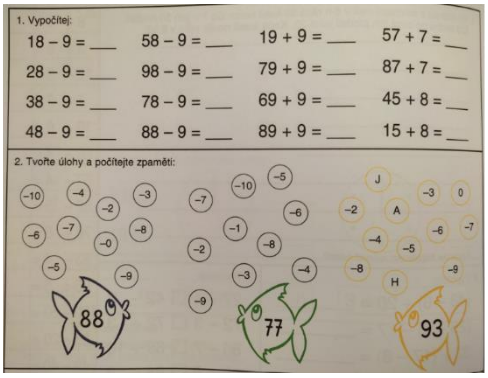
[11] Zkratku S budu používat pro číslo jako stav. Číslo za písmenem značí pořadí stavu v konkrétní rovnici.

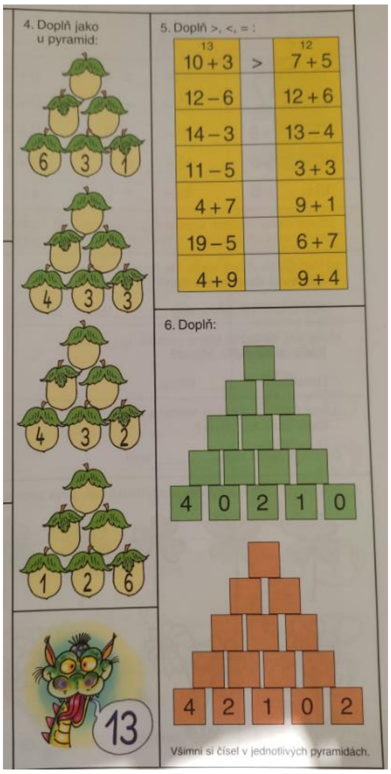
[12] Cvičení jsou v různých učebnicích zpracována různě po grafické stránce. Často jde o „sloupečky" rovnic pod sebou, někdy se ale doplňují jiným způsobem, obvykle do různých obrázků. Snahou rozličné grafiky je zatraktivnění cvičení a učebnic. Na způsob řešení jednotlivých úloh ovšem nemá grafika vliv.

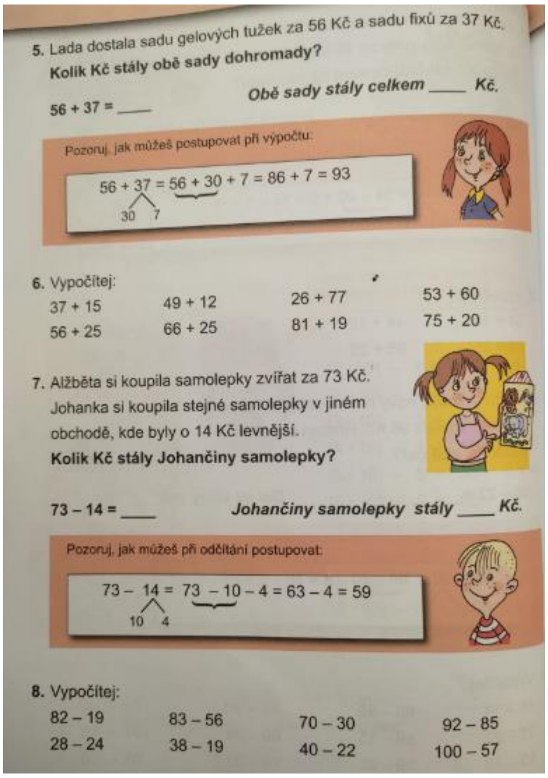












Obr. 23 – 28: SPN 2/1, str. 5, 8, 16, 25; 3, str. 44

U jednotlivých cvičení lze vidět, že úlohy jsou graficky poměrně různorodé, setkáváme se i s takovými, kde nejde přímo o rovnice, ale rovnicové situace. Soudím, že cílem je zvýšení atraktivity pro žáky a snaha je více zaujmout. Početní strategie je však stále stejná. Často jde také jen o sloupečky, kde jsou jednotlivé rovnice seřazeny pod sebou, a žáci mají doplnit výsledek. Všechny tyto úlohy slouží k rozvoji početní zběhlosti žáků - žák si má uložit do dlouhodobé paměti co nejvíce spojů a výpočty zautomatizovat. Úlohy nemají další přidanou hodnotu a další kognitivní schopnosti nerozvíjí.

Na jednom z obrázků můžeme vidět rovnicové situace v podobné grafice jako součtové trojúhelníky používané v HM-učebnicích. V učebnicích SPN jsou ale pokaždé zadány pouze výchozí hodnoty ve spodním řádku. Jiným způsobem zpracovány nikde nejsou, přestože takový potenciál mají, a početní strategie se tedy opět nijak nemění.

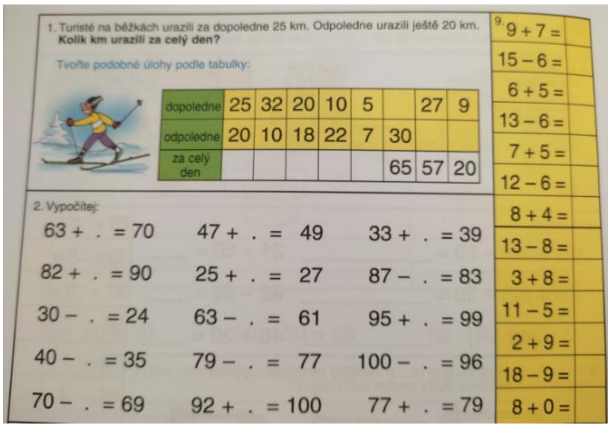
Velké množství takto zadaných rovnic vede k tomu, že žáci vnímají znaménko rovnosti jako pokyn "proveď danou operaci s čísly na levé straně a výsledek zapiš na pravou stranu rovnítka". Žák si spočítá výsledek na pravé straně a následně se snaží, aby mu levá odpovídala.

3.4.2. Ostatní rovnice se třemi členy:

V ostatních rovnicích se nejčastěji setkáváme s tvarem $a \pm x = b$. Případů, kdy se žáci setkají s neznámou na první pozici, najdeme v učebnicích SPN minimum, byť ve 2. ročníku na ně lze výjimečně narazit. Ve 3. ročníku jsem je již nenašel.

Slovní úlohy nevedou k použití tvaru $a \pm x = b$.

Ve 2. ročníku se občas pracuje s tvarem rovnic, v němž je jeden člen nalevo a dva napravo, tedy např. $x = a \pm b$. Vždy jde ale jen o případ obvyklých početních úloh, bez kontextu a atraktivní grafiky. Ve 3. ročníku tento tvar ovšem úplně zmizí a žáci s ním již vůbec nepracují.



1. Turisté na běžkách urazili za dopoledne 25 km. Odpoledne urazili ještě 20 km. **Kolik km urazili za celý den?**

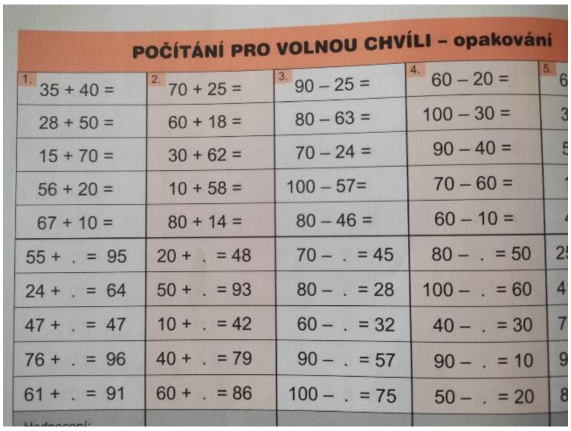
Tvořte podobné úlohy podle tabulky:

dopoledne	25	32	20	10	5		27	9
odpoledne	20	10	18	22	7	30		
za celý den						65	57	20

2. Vypočítej:

63 + . = 70	47 + . = 49	33 + . = 39
82 + . = 90	25 + . = 27	87 − . = 83
30 − . = 24	63 − . = 61	95 + . = 99
40 − . = 35	79 − . = 77	100 − . = 96
70 − . = 69	92 + . = 100	77 + . = 79

9.
9 + 7 =	
15 − 6 =	
6 + 5 =	
13 − 6 =	
7 + 5 =	
12 − 6 =	
8 + 4 =	
13 − 8 =	
3 + 8 =	
11 − 5 =	
2 + 9 =	
18 − 9 =	
8 + 0 =	



POČÍTÁNÍ PRO VOLNOU CHVÍLI – opakování

1.	2.	3.	4.
35 + 40 =	70 + 25 =	90 – 25 =	60 – 20 =
28 + 50 =	60 + 18 =	80 – 63 =	100 – 30 =
15 + 70 =	30 + 62 =	70 – 24 =	90 – 40 =
56 + 20 =	10 + 58 =	100 – 57=	70 – 60 =
67 + 10 =	80 + 14 =	80 – 46 =	60 – 10 =
55 + . = 95	20 + . = 48	70 – . = 45	80 – . = 50
24 + . = 64	50 + . = 93	80 – . = 28	100 – . = 60
47 + . = 47	10 + . = 42	60 – . = 32	40 – . = 30
76 + . = 96	40 + . = 79	90 – . = 57	90 – . = 10
61 + . = 91	60 + . = 86	100 – . = 75	50 – . = 20

Obr. 29, 30: SPN 2/2, str. 10; PS 3/1, str. 32

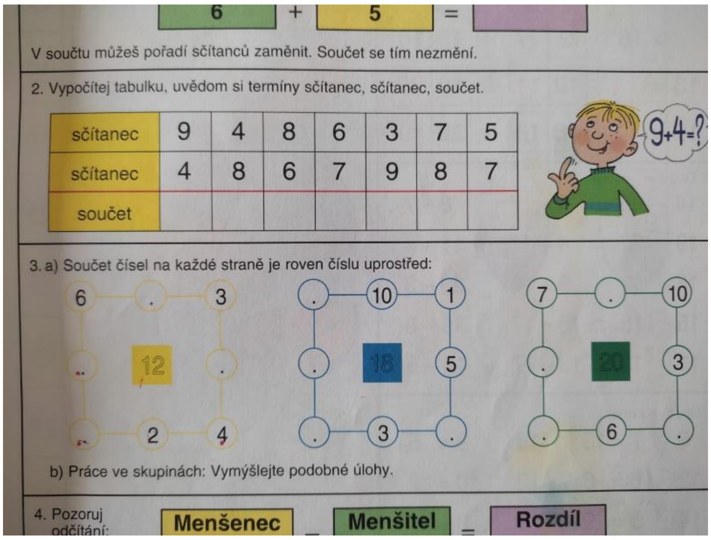
3.4.3. Rovnice s více než třemi členy:

Rovnice s více než třemi členy se v učebnicích nakladatelství SPN vyskytují. Drží se však téměř ve všech případech jediné podoby – $a \pm b \pm c = x$. V rovnicích je několik členů na levé straně a jeden na pravé. Neznámá bývá nejčastěji napravo. Takové rovnice nacházíme jak ve 2., tak 3. ročníku; ve 3. jsou v nich často zapojeny i multiplikativní operace, ve 2. často slouží k počítání se závorkami, kde z principu musí být na jedné straně minimálně tři členy.

V učebnicích se žáci během 2. a 3. nesetkají se situací, kdy by na každé straně byly alespoň dva členy, a z toho jeden z nich byl neznámou, kterou musí doplnit.

Jedinými případy, v nichž přijdou žáci do kontaktu s rovnostmi se dvěma či více členy na obou stranách, jsou několik málo cvičení ve 2. ročníku. V nich mají doplnit znaménko rovnosti či nerovnosti. Jinou zkušenost s takovými rovnicemi během zkoumaných dvou ročníků však nemají z učebnic kde získat.

(SPN 2/1, str. 36, 41, 2/2, str. 30):



6 + 5 =

V součtu můžeš pořadí sčítanců zaměnit. Součet se tím nezmění.

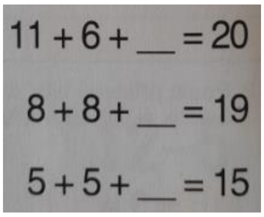
2. Vypočítej tabulku, uvědom si termíny sčítanec, sčítanec, součet.

sčítanec	9	4	8	6	3	7	5
sčítanec	4	8	6	7	9	8	7
součet							

3. a) Součet čísel na každé straně je roven číslu uprostřed:

b) Práce ve skupinách: Vymýšlejte podobné úlohy.

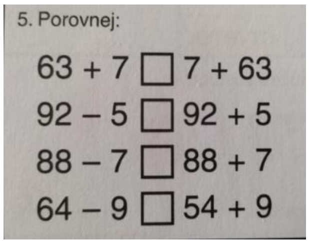
4. Pozoruj odčítání: Menšenec − Menšitel = Rozdíl



11 + 6 + __ = 20

8 + 8 + __ = 19

5 + 5 + __ = 15



5. Porovnej:

63 + 7 ☐ 7 + 63

92 – 5 ☐ 92 + 5

88 – 7 ☐ 88 + 7

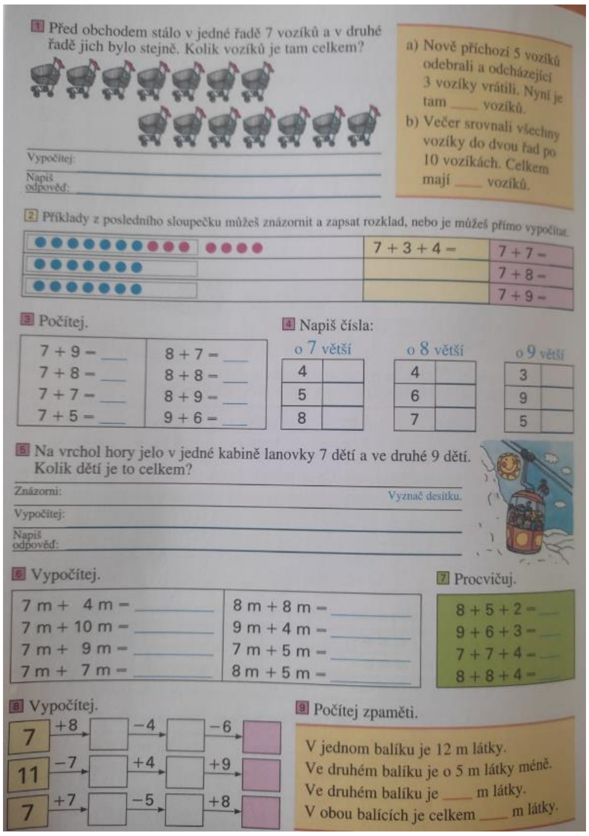
64 – 9 ☐ 54 + 9

Obr. 31 – 33: SPN 2/1, str. 36, 41, 2/2, str. 30

3.5. Nakladatelství Alter

3.5.1. Rovnice ve tvaru a ± b = x:

Rovnice tohoto typu jsou v učebnicích z nakladatelství Alter těmi nejčastějšími. Jejich nejobvyklejší podoba je právě tento zápis, kdy mají žáci jen doplnit výsledek na jejich pravou stranu. V učebnicích jsou pak k nalezení nejvíce uspořádané do sloupečků. Ve 2. ročníku se grafika u jednotlivých úloh občas ještě trochu liší, ve 3. ročníku je již hodně sjednocená do sloupečků, popř. tabulek nebo počítání pod sebou. Slovní úlohy v naprosté většině případů mají matematický model rovnic ve tvaru $a \pm b = x$. Jejich sémantickou strukturu lze většinou napsat takto: $S1 + S2 = S3$ nebo $S1 + O1 = S2$. Zejména ve 2. ročníku jsou slovní úlohy jednotně graficky připraveny pro žákovo řešení. Má připravené jednotlivé kolonky pro obrázky, znázornění, prostor pro výpočet a odpověď.



1 Před obchodem stálo v jedné řadě 7 vozíků a v druhé řadě jich bylo stejně. Kolik vozíků je tam celkem?

Vypočítej:

Napiš odpověď:

a) Nově příchozí 5 vozíků odebrali a odcházející 3 vozíky vrátili. Nyní je tam ___ vozíků.

b) Večer srovnali všechny vozíky do dvou řad po 10 vozíkách. Celkem mají ___ vozíků.

2 Příklady z posledního sloupečku můžeš znázornit a zapsat rozklad, nebo je můžeš přímo vypočítat.

	7 + 3 + 4 =	7 + 7 =
		7 + 8 =
		7 + 9 =

3 Počítej.

7 + 9 = ___	8 + 7 = ___
7 + 8 = ___	8 + 8 = ___
7 + 7 = ___	8 + 9 = ___
7 + 5 = ___	9 + 6 = ___

4 Napiš čísla:

o 7 větší		o 8 větší		o 9 větší	
4		4		3	
5		6		9	
8		7		5	

5 Na vrchol hory jelo v jedné kabině lanovky 7 dětí a ve druhé 9 dětí. Kolik dětí je to celkem?

Znázorni: Vyznač desítku.

Vypočítej:

Napiš odpověď:

6 Vypočítej.

7 m + 4 m = ___	8 m + 8 m = ___
7 m + 10 m = ___	9 m + 4 m = ___
7 m + 9 m = ___	7 m + 5 m = ___
7 m + 7 m = ___	8 m + 5 m = ___

7 Procvičuj.

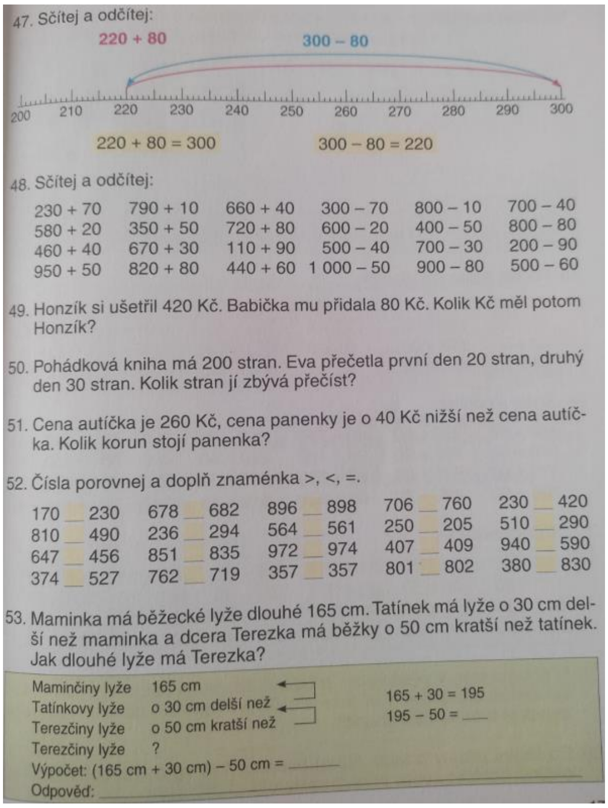
8 + 5 + 2 = ___
9 + 6 + 3 = ___
7 + 7 + 4 = ___
8 + 8 + 4 = ___

8 Vypočítej.

7 +8 → ☐ −4 → ☐ −6 → ☐
11 −7 → ☐ +4 → ☐ +9 → ☐
7 +7 → ☐ −5 → ☐ +8 → ☐

9 Počítej zpaměti.

V jednom balíku je 12 m látky.
Ve druhém balíku je o 5 m látky méně.
Ve druhém balíku je ___ m látky.
V obou balících je celkem ___ m látky.



47. Sčítej a odčítej:

220 + 80 = 300 300 − 80 = 220

48. Sčítej a odčítej:

230 + 70	790 + 10	660 + 40	300 − 70	800 − 10	700 − 40
580 + 20	350 + 50	720 + 80	600 − 20	400 − 50	800 − 80
460 + 40	670 + 30	110 + 90	500 − 40	700 − 30	200 − 90
950 + 50	820 + 80	440 + 60	1 000 − 50	900 − 80	500 − 60

49. Honzík si ušetřil 420 Kč. Babička mu přidala 80 Kč. Kolik Kč měl potom Honzík?

50. Pohádková kniha má 200 stran. Eva přečetla první den 20 stran, druhý den 30 stran. Kolik stran jí zbývá přečíst?

51. Cena autíčka je 260 Kč, cena panenky je o 40 Kč nižší než cena autíčka. Kolik korun stojí panenka?

52. Čísla porovnej a doplň znaménka >, <, =.

170 ___ 230	678 ___ 682	896 ___ 898	706 ___ 760	230 ___ 420
810 ___ 490	236 ___ 294	564 ___ 561	250 ___ 205	510 ___ 290
647 ___ 456	851 ___ 835	972 ___ 974	407 ___ 409	940 ___ 590
374 ___ 527	762 ___ 719	357 ___ 357	801 ___ 802	380 ___ 830

53. Maminka má běžecké lyže dlouhé 165 cm. Tatínek má lyže o 30 cm delší než maminka a dcera Terezka má běžky o 50 cm kratší než tatínek. Jak dlouhé lyže má Terezka?

Maminčiny lyže 165 cm
Tatínkovy lyže o 30 cm delší než
Terezčiny lyže o 50 cm kratší než
Terezčiny lyže ?
Výpočet: (165 cm + 30 cm) − 50 cm = ___

165 + 30 = 195
195 − 50 = ___

Odpověď:

Obr. 34, 35: Alter: 2/4B, str. 14; 3/2 str. 17

3.5.2. *Ostatní rovnice se třemi členy:*

Zejména ve 2. ročníku se rovnice tvaru $a \pm x = b$ objevují poměrně často. Jejich výskyt ale postupně slábne a ve 3. ročníku je u aditivních úloh už velmi výjimečný. Případy, kdy se neznámá vyskytuje na prvním místě, u aditivních rovnic v učebnicích vůbec nejsou. Zajímavé je, že u multiplikativních operací se tak děje a obecně se při násobení či dělení učebnice tvaru s neznámou na levé straně drží déle než u sčítání a odčítání. Počet takových rovnic ale též postupně klesá a ve 3. díle učebnic pro 3. ročník se s nimi žáci již de facto nesetkávají. Graficky jde vždy jen o rovnice bez vazby na reálný kontext.

Slovní úlohy ke zmíněným modelům rovnic téměř nevyzývají. Zajímavostí je popsaný námět na zadních deskách učebnice číslované 4/B, což je první z řady pro 2. ročník. Ten vyzývá učitele k přetvoření úloh tak, aby obsahovaly antisignál. Učebnice samy o sobě přitom takové úlohy neposkytují nebo tak činí ve zcela minimálním počtu případů. Žák při tvoření rovnic pro takové úlohy musí vyvinout náročnější mentální operaci.

Učebnice tento postup ilustruje na následující slovní úloze: *Jana má 9 pampelišek, Katka má o 7 pampelišek víc. Kolik pampelišek má Katka?* Vzhledem k velkému množství podobných úloh si žák pravděpodobně bude fixovat představu, že pokud se v úloze píše slovo *více*, má automaticky sčítat.

S antisignálem bude znít úloha takto: *Jana má 9 pampelišek, to je o 7 méně, než má Katka. Kolik pampelišek má Katka?* Zde si již žák musí uvědomit, že zde slovo *méně* neznamená odečítání čísel 9 a 7, jak by si mohl pomalu fixovat, ale že když jich Jana má o několik méně, Katka jich musí mít více. Ke zjištění počtu pampelišek Katky tak musí sčítat. Do rovnice by se taková úloha dala přepsat jako $x - 7 = 9$. Katka má neznámý počet pampelišek, ale o sedm méně je stejné, jako kolik jich má Jana.

S rovnicemi s jedním členem vlevo a dvěma vpravo se žáci v učebnicích nesetkávají. Z obou ročníků jsem takové rovnice našel pouze v jednom cvičení a to ve tvaru $a = b + x$.

3.5.3. Rovnice s více než třemi členy:

Více členů v rovnicích není u Alteru výjimečnost, žáci se s nimi setkávají pravidelně během obou ročníků. Zejména ve 3. ročníku jde o rovnice s kombinací aditivních a multiplikativních operací. Prakticky všechny takové rovnice ale mají všechny známé členy na levé straně a na pravé je třeba doplnit neznámou, nalezl jsem jen jedinou výjimku ve tvaru $a \cdot b + x = c$.

Případy, v nichž by na pravé straně bylo více členů než na levé nebo by na obou stranách rovnice byly minimálně dva členy se nevyskytují vůbec.

3.6. Nakladatelství Nová škola - Matýskova matematika

3.6.1. Rovnice ve tvaru $a \pm b = x$:

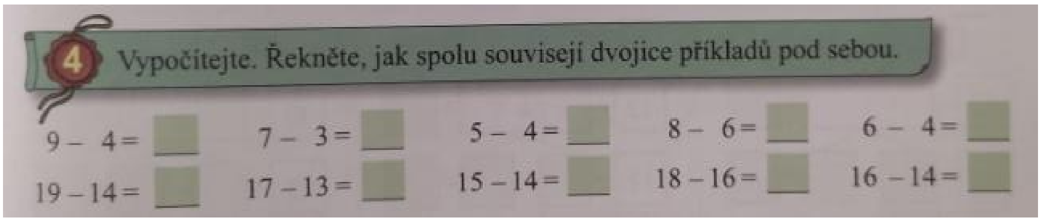
Podobně jako v ostatních T-učebnicích je tento tvar rovnic zastoupen nejvíce. Ze všech zkoumaných učebnic tato působí nejstereotypněji, leč tím i nejuceleněji. Po celou dobu se drží několika grafik, které se stále opakují a málokdy se v prostředí algebraického učiva objeví něco nového či ojedinělého.

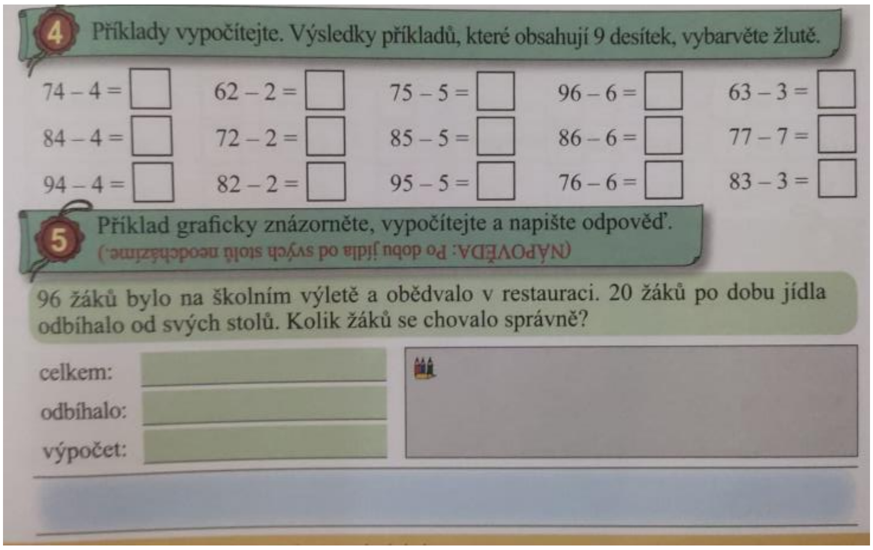
Většina těchto rovnic je podána přímo jako rovnice bez dalších grafiky a vazby na reálný kontext. Občas je přidáno např. znázornění na číselné ose nebo žáci vyplňují tabulku.

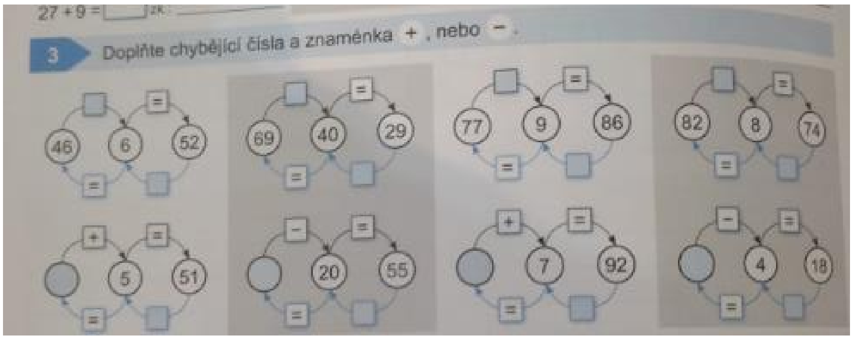
Narozdíl od ostatních se učebnice často snaží žákům dávat podobné rovnice k sobě. Žáci si při jejich řešení mají všímat vzájemných souvislostí. Mohou si tak odvozovat např. komutativitu sčítání, uvědomovat si podobnost úloh typu $7 + 2 = x$ a $17 + 2 = x$ atd.

Netradičními cvičeními ve vztahu k ostatním T-učebnicím jsou ta, v nichž mají žáci zadanou tabulku nejčastěji 3x3. V ní se sloupce identifikují číslicemi a řádky písmeny. Tabulka je vyplněna různými čísly a žáci si tak tvoří rovnice na základě zápisů typu $A1 - C2 = x$. Výrazy *A1, C2* atd. zde mají funkci adresy.

Slovní úlohy jsou stavěné také na tento tvar rovnic, podobně jako i v ostatních T–učebnicích. Ve 2. ročníku jsou pro žáky připraveny velmi polopaticky postupy pro práci s úlohami – kolonky pro zápis, znázornění, výpočet, odpověď. Jako u téměř všech ostatních, prostor pro tyto jednotlivé kroky ve 3. ročníku zůstává v pracovních sešitech, v učebnicích není.

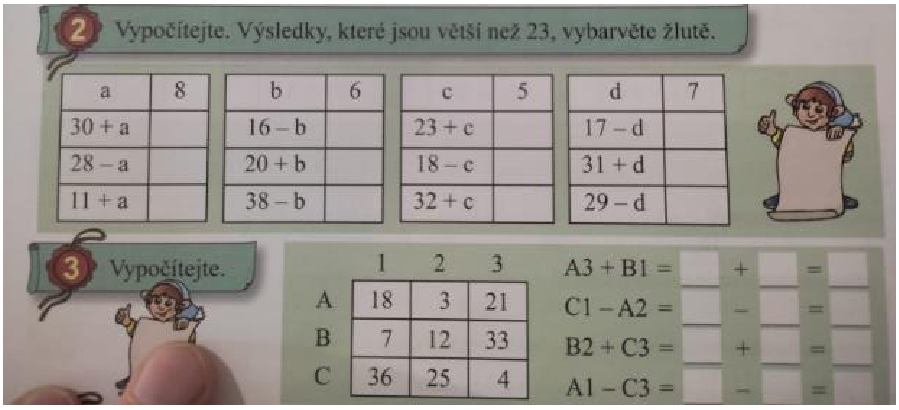






Obr. č. 36–38: Nová škola: 2/5, str. 3, 51; PS 3/1, str. 12

V učebnicích se často pracuje s neznámou ve formě písmene, což je oproti ostatním učebnicím velký rozdíl. I zde učebnice zůstává věrná jedné grafice, kterou je možné vidět na obrázku. Není bez zajímavosti, že tato neznámá je vždy na druhém místě v rovnici. Tyto úlohy obsahují učebnice pouze ve 2. ročníku, ve 3. ročníku se substituce písmena za číslo nevyskytuje. Až na konci 3. ročníku jsou v několika cvičeních použity v rovnicích geometrické tvary, jejichž hodnotu mají žáci určit.



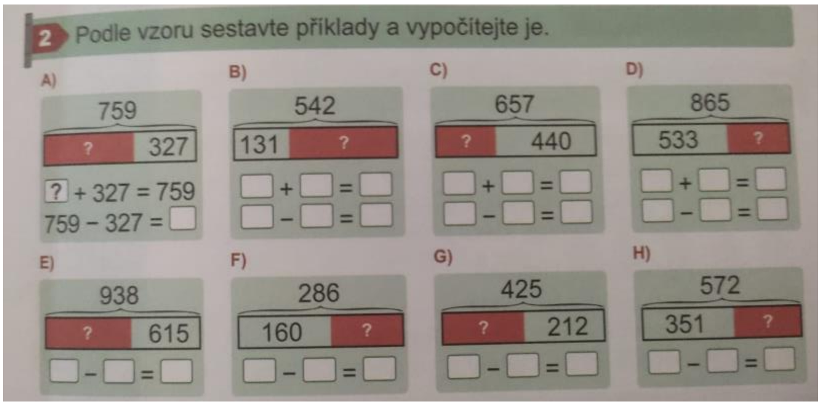
Obr. č. 39: Nová škola:2/5, str. 23

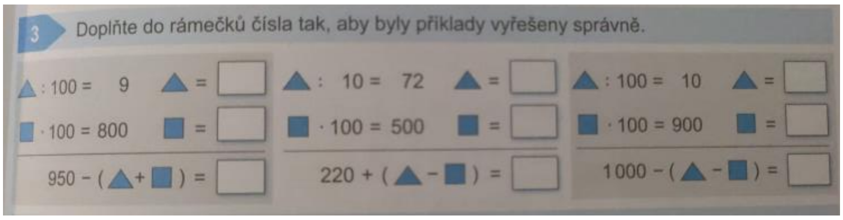
3.6.2. Ostatní rovnice se třemi členy:

Matýskova matematika podporuje i rovnice v ostatních tvarech, a to konstantně po celou dobu trvání 2. i 3. ročníku. Vždy jde však o tvary $a \pm x = b$ nebo $x \pm a = b$. Rovnice, v nichž by byl jeden člen vlevo a dva (nebo více) vpravo, se v učebnicích nenalézají vůbec.

Slovní úlohy na takové typy rovnic vystavěny nejsou.

(Nová škola: 2/5, str. 23; 3/8, str. 25; PS 3/2, str. 37):





Obr. č. 40, 41: Nová škola: 3/8, str. 25; PS 3/2, str. 37

3.6.3. Rovnice s více než třemi členy:

Rovnice s více členy se v Matýskově matematice vyskytují, a to po celé zkoumané období. Podobně jako u ostatních nakladatelství zejména ve 3. ročníku tyto rovnice často kombinují aditivní a multiplikativní operace. U všech takových rovnic se nachází všechny členy se známou hodnotou na levé straně rovnice a napravo je umístěna neznámá. Z této konvence jsem našel pouhou jednu výjimku.

Rovnice s více členy občas také slouží jako mezikrok v podobě rozkladu u počítání s vyššími čísly.

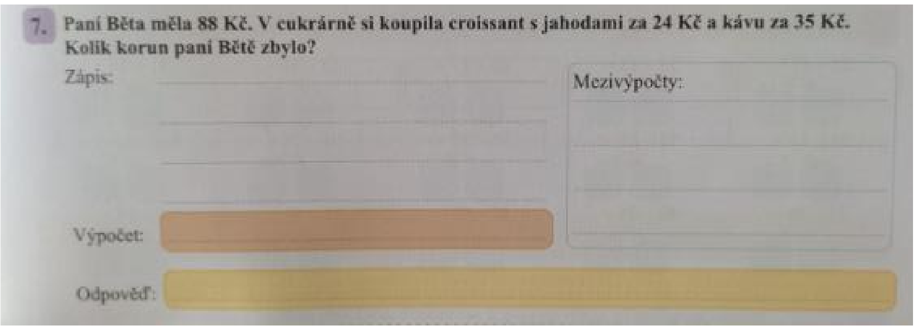
Obr. č. 42: Nová škola: PS 3/2, str. 25

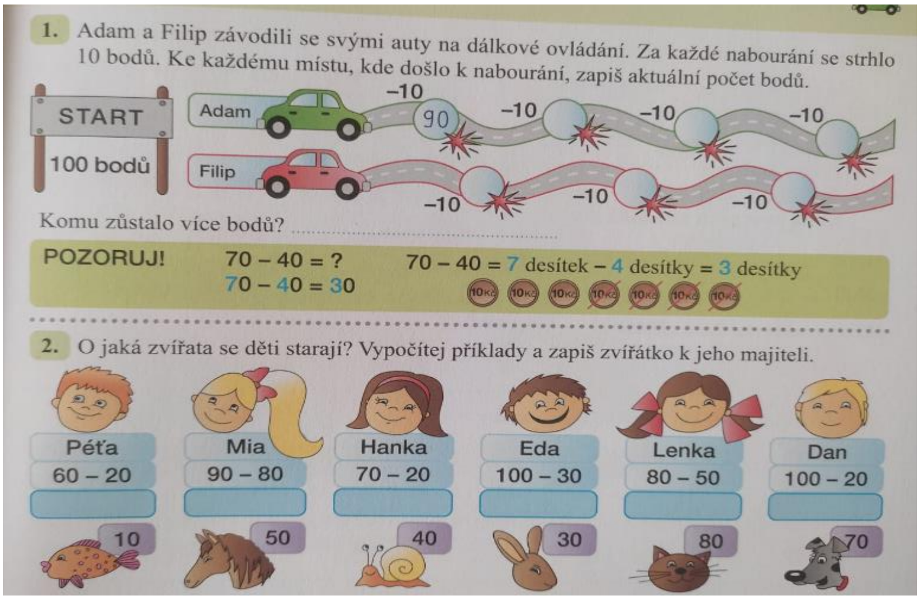
3.7. Nakladatelství Taktik

3.7.1. Rovnice ve tvaru a ± b = x:

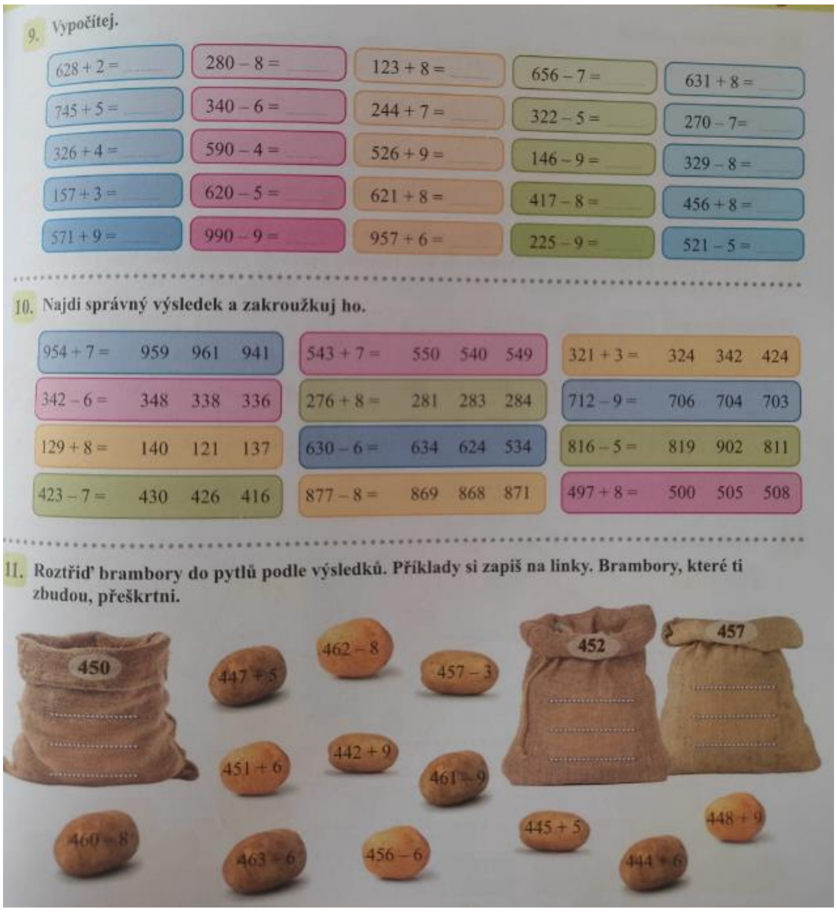
Taktik disponuje společně s učebnicemi SPN asi nejširší paletou různých grafik takovýchto rovnic. Učebnice jsou pojmenované jako hravé a na první pohled tak působí. Dokážu si nicméně představit, že přílišná barevnost a rozličnost může být pro některé žáky rušivým elementem. Např. cvičení, v nichž jsou srovnané jednotlivé rovnice ve sloupcích pod sebou, jsou různě barevné. Tímto se grafika liší od všech ostatních nakladatelství. V učebnicích najdeme také úlohy, v nichž nejsou rovnice nýbrž rovnicové situace. Nejčastěji se jedná o různé podoby pyramid nebo řetězců, které jsou podobné těm z prostředí Hadi v učebnicích využívající Hejného metodu.

Slovní úlohy míří nejčastěji také na tyto druhy rovnic a pro žáky jsou taktéž připravené postupy, jak úlohu řešit. Mají zde prostor pro zápis, výpočet, odpověď, popř. znázornění (ve 3. ročníku se tak děje jen v pracovních sešitech).





Obr. č. 43 – 45: Taktik: 2/1, str. 13, 25; PS 3/1, str. 9



9. Vypočítej.

628 + 2 =	280 – 8 =	123 + 8 =	656 – 7 =	631 + 8 =
745 + 5 =	340 – 6 =	244 + 7 =	322 – 5 =	270 – 7=
326 + 4 =	590 – 4 =	526 + 9 =	146 – 9 =	329 – 8 =
157 + 3 =	620 – 5 =	621 + 8 =	417 – 8 =	456 + 8 =
571 + 9 =	990 – 9 =	957 + 6 =	225 – 9 =	521 – 5 =

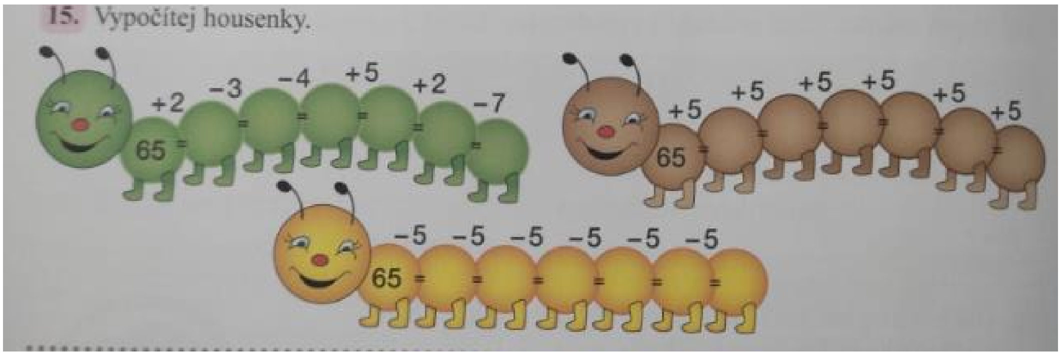
10. Najdi správný výsledek a zakroužkuj ho.

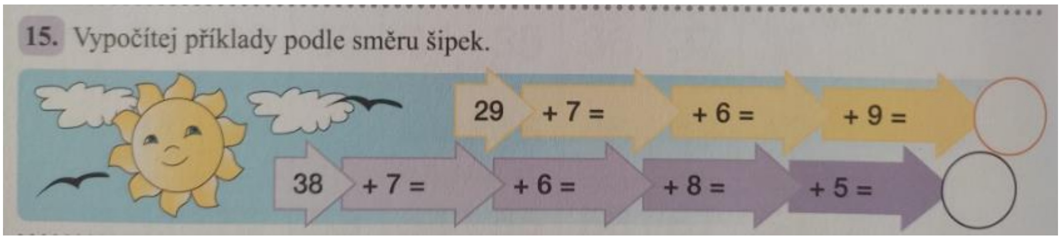
954 + 7 =	959	961	941	543 + 7 =	550	540	549	321 + 3 =	324	342	424
342 – 6 =	348	338	336	276 + 8 =	281	283	284	712 – 9 =	706	704	703
129 + 8 =	140	121	137	630 – 6 =	634	624	534	816 – 5 =	819	902	811
423 – 7 =	430	426	416	877 – 8 =	869	868	871	497 + 8 =	500	505	508

11. Roztřiď brambory do pytlů podle výsledků. Příklady si zapiš na linky. Brambory, které ti zbudou, přeškrtni.

Obr. č. 46: Taktik: PS 3/1, str. 27

V prvním díle učebnice na str. 18 a 28 se tyto rovnice postupně řetězí a vzniká tak formálně matematická chyba. Dá se odhadovat, že jde jen o další pokus graficky zatraktivnit počítání těchto rovnic na způsob, jakým to dělají např. hadi v Hejného metodě nebo i jiná cvičení v učebnicích Taktiku. V nich jsou však místo matematického znaku pro rovnost použity šipky. Vzhledem k přítomnosti znaku „=“ se zde však zapisuje formálně matematický nesmysl. V případě např. zelené housenky na obr. č 47 nám po vyplnění vznikne řetězec 65 = 67 = 64 = 60 = 65 = 67 = 60. To však není pravda, tato čísla se všechna sobě vzájemně nerovnají. Paradoxem je, že stránka s touto chybou je uvedena jako ukázková na webu nakladatelství. Chybu stejného typu můžeme vidět i na obr. č 48.

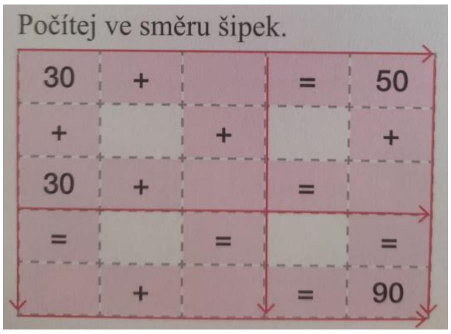


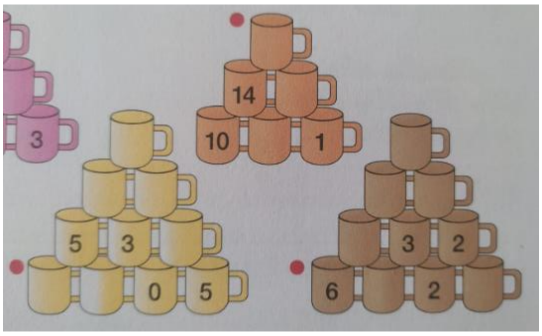


Obr. č. 47, 48: Taktik: 2/1, str. 18, 28

3.7.2. Ostatní rovnice se třemi členy:

Podobně jako u rovnic tvaru $a \pm b = x$, i u ostatních jsou použity různé grafiky včetně samostatných rovnic. Počet takových úloh se postupně snižuje, ale nezmizí úplně. Ve všech případech se nicméně setkáváme se situací, kdy jsou dva členy na levé straně rovnice a jeden na pravé. Opačný model učebnice vůbec nepoužívají.





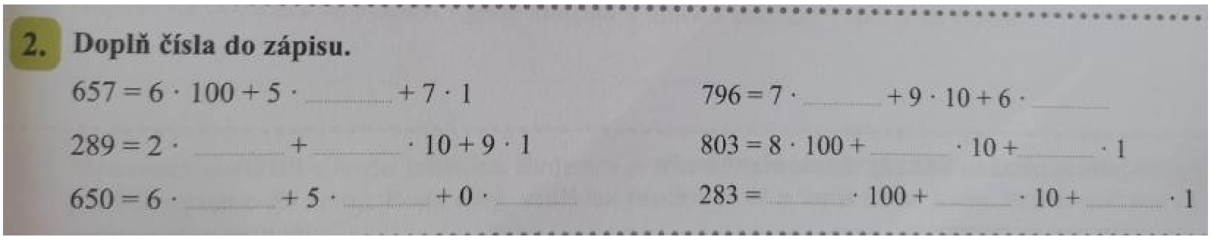
Obr. č. 49, 50: Taktik: 2/1: str. 3, 12

3.7.3. Rovnice s více než třemi členy:

S takovými rovnicemi pracuje Taktik minimálně. Vyskytují se, ale je jich méně než v ostatních analyzovaných učebnicích. Pokud zde jsou, všechny členy kromě jednoho se nachází na levé straně a jsou známy jejich hodnoty, napravo leží neznámá.

Speciálním případem takových rovnic v učebnici jsou rozklady trojciferných čísel na jednotlivé řády, které jsou vidět na obrázku. Jsou to také jediné případy rovnic, kdy je na pravé straně více členů než na levé.

Druhou výjimkou, kde se lze setkat s rovnostmi a nerovnostmi s více členy na obou stranách, jsou cvičení na porovnávání. Žáci zde ale nehledají žádnou neznámou, pouze doplňují znaménka „<, >, =“.



Obr. č. 51, 52: Taktik: PS 3/1, str. 11, 37

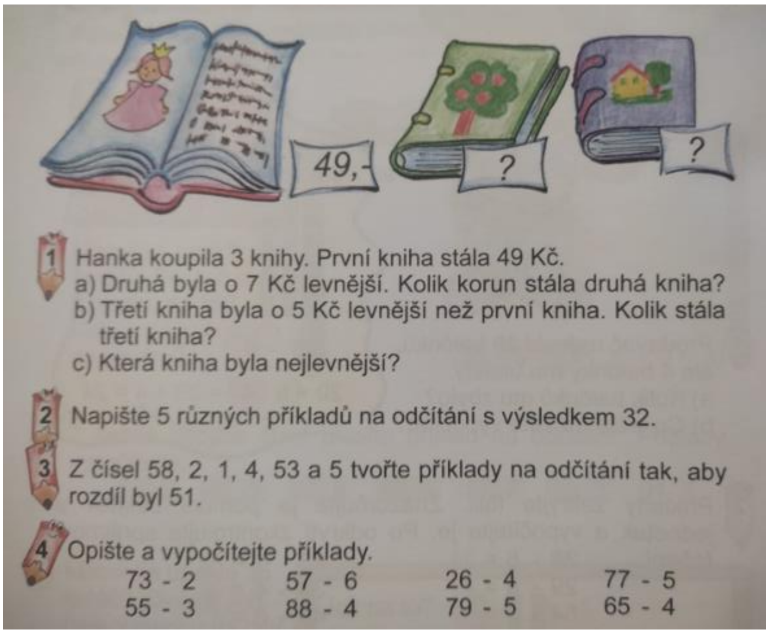
3.8. Nakladatelství Studio 1+1

3.8.1. Rovnice ve tvaru a ± b = x:

Učebnice nakladatelství Studio 1+1 nenabízí tak pestrou škálu grafik jako ostatní učebnice. Oproti ostatním učebnicím jsou zde však určité rozdíly. Učebnice pro 2. a 3. ročník (pro pracovní sešity toto neplatí) zařazují téměř pouze výrazy ve tvaru $a + b$, teoreticky je zde tedy možnost si je doplnit či třeba přepsat do sešitu jak ve tvaru $a \pm b = x$, tak $x = a \pm b$. Ba dokonce tvar $a \pm b = x$ učebnice prakticky vůbec nenabízí, takových zápisů se zde vyskytuje pouze pár – když už jsou zastoupeny, většinou jde o vysvětlení nějakého jevu, popř. žáci mají provést korekce v těchto zápisech. V pracovních sešitech takové rovnice ale najdeme.

Dalšími poměrně častými cvičeními, zejména v učebnicích, jsou taková, kde jsou pouze zadána samostatně stojící čísla a žáci z nich mají rovnici utvořit. Obvykle je určeno, zda sčítají nebo odečítají. Setkáme se i se zadáními, kde je určen výsledek a žáci mají sestavit libovolnou rovnici, která se tomuto výsledku rovná. Učebnice tak opět dávají prostor pro různé tvary zápisů rovnic. V některých případech má žák i možnost určit si náročnost úkolu.

Slovní úlohy jsou stavěné na tento tvar rovnic. Oproti většině ostatních učebnic zde žáci nemají předpřipravené kolonky či řádky na striktně dodržovaný postup.



Obr. 53: Studio 1+1: 2/2, str. 28

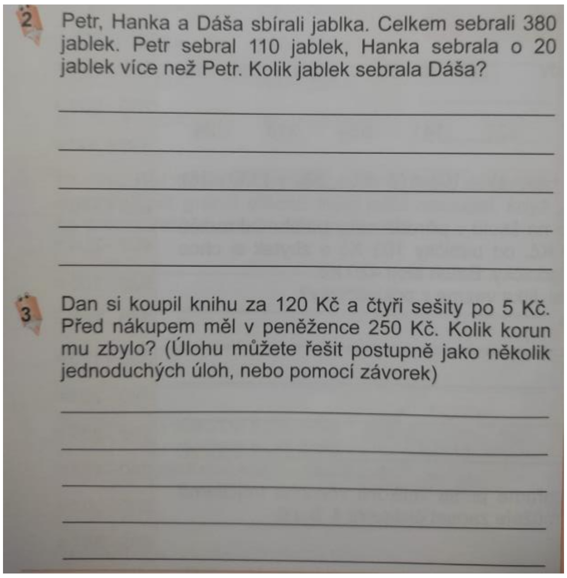
3.8.2. Ostatní rovnice se třemi členy:

Rovnice ve tvaru $a \pm x = b$ či $x \pm a = b$ učebnice nabízí, byť jich je poměrně hodně málo, zejména ve 2. ročníku jsou de facto výjimkou. Ve 3. ročníku se tato situace zlepšuje, úloh se vyskytuje více. Většinově však nemají žádnou zajímavou grafikou ani nejsou podloženy reálným kontextem a jde jen čistě o rovnice v uvedeném tvaru. Žáky provází po celou dobu 2. i 3. ročníku.

3.8.3. Rovnice s více než třemi členy:

Tyto rovnice učebnice taktéž obsahují, ale není jich moc. Ve 2. i 3. ročníku jde nejčastěji o rovnice se závorkami. Rovnic ve tvaru $a \pm b \pm c = x$ bez závorek je v učebnicích minimum. Pokud zde jsou, tak se neznámá vždy nachází na pravé straně.

Lze na ně narazit občas i ve slovních úlohách. Zatímco rovnice jsou téměř vždy ve tvaru tři a více členů vlevo a neznámá vpravo, najdeme slovní úlohy, které by se daly vyjádřit zápisem $a \pm b \pm x = c$, byť jich není moc.


2 Petr, Hanka a Dáša sbírali jablka. Celkem sebrali 380 jablek. Petr sebral 110 jablek, Hanka sebrala o 20 jablek více než Petr. Kolik jablek sebrala Dáša?

3 Dan si koupil knihu za 120 Kč a čtyři sešity po 5 Kč. Před nákupem měl v peněžence 250 Kč. Kolik korun mu zbylo? (Úlohu můžete řešit postupně jako několik jednoduchých úloh, nebo pomocí závorek)

Obr. 53: Studio 1+1 PS 3/3, str. 6

3.9. Shrnutí důležitých jevů

Pro přehlednost jsem se rozhodl všechny jevy popsané výše shrnout ještě tabulkami, z nichž bude srozumitelně viditelná četnost jednotlivých tvarů rovnic a dalších jevů, které souvisí s rovností.

Rozhodl jsem se tyto tabulky vytvořit dvě, pro každý ročník zvlášť, aby bylo možné lépe pozorovat, jak se skladba jednotlivých úloh v ročnících mění a jaké podklady z hlediska učebnic žáci v různých fázích studia mají.

V obou tabulkách se této problematice věnuji pouze u aditivních operací.

Číselná škála 0 - 10 v tabulce vyjadřují odhadem četnost výskytu. Každé číslo je rovno přibližně 10 %. R znamená, že se vyskytují rovnicové situace, které k těmto rovnicím vedou. Např. údaj 1 / 1R znamená, že v číselném zápisu se takové rovnice vyskytují cca v 10 % procentech všech úloh s rovnicemi, 1R znamená, že se vyskytují úlohy s rovnicovou situací též asi kolem 10 % případů. U všech těchto údajů je potřeba brát v potaz, že jde o zaokrouhlení a tedy čísla přibližná. Číslo 0 tak nemusí vždy nutně znamenat, že se daný jev v učebnici nevyskytuje vůbec; skutečnost může být taková, že zastoupen je, ale ve zcela minimální míře, např. dvakrát - třikrát během celého ročníku. Tyto informace jsou dostupné u analýz jednotlivých učebnic. Vypočítávat však přesnější procentuální zastoupení mi přišlo zbytečné; téma diplomové práce je jiné, než rozbor učebnic – ty jsou pouze jednou z mnoha složek, které mohou vnímání rovnosti ovlivnit a soudím, že jim byl věnován dostatek prostoru.

Tabulka je koncipována podobně jako u rozboru učebnic. V prvním sloupci se zabývá rovnostmi koncipovanými do tvaru $a \pm b = x$.

To, co v předcházejících textech popisuji jako ostatní rovnice se třemi členy, je v tabulce rozděleno podrobněji na jednotlivé druhy rovnic.

Zařadil jsem i sloupec pro rovnice, kde neznámá v zadání vyjádřena není, protože se vyskytují v některých učebnicích 3. ročníku, u Studia 1+1 jsou časté už i ve 2. ročníku. V posledních dvou sloupcích se věnuji výskytu všech rovnic potažmo rovnicových situací, které obsahují 4 nebo více členů. Ty jsou odlišeny podle pozice neznámé v rovnici, protože tuto skutečnost různé učebnice také pojímají velmi odlišně.

JEV UČEBNICE	**a ± b = x**	**a ± x = c x ± b = c**	**x = a ± b**	**a ± b**	**≥ 4 členy, x vpravo**	**≥ 4 členy, x vlevo**
H-mat	**1 / 1R**	**1 / 2R**	**0 / 1R**	**0 / 0R**	**1 / 1R**	**0 / 2R**
Fraus	**1 / 1R**	**1 / 2R**	**0 / 1R**	**0 / 0R**	**1 / 1R**	**0 / 2R**
SPN	**5 / 1R**	**2 / 0R**	**1 / 0R**	**0 / 0R**	**1 / 0R**	**0 / 0R**
Alter	**7 / 0R**	**1 / 0R**	**0 / 0R**	**0 / 0R**	**2 / 0R**	**0 / 0R**
Matýsek	**7 / 0R**	**2 / 0R**	**0/ 0R**	**0 / 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**
Taktik	**6 / 1R**	**2 / 0R**	**0/ 0R**	**0 / 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**
1+1	**3 / 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**	**5 / 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**

Tabulka č. 6: Výskyt různých tvarů rovnic v jednotlivých učebnicích ve 2. ročníku

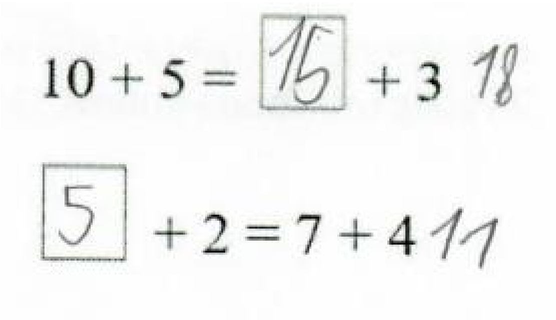
JEV UČEBNICE	**a ± b = x**	**a ± x = c x ± b = c**	**x = a ± b**	**a ± b**	**≥ 4 členy, x vpravo**	**≥ 4 členy, x vlevo**
H-mat	**1 / 1R**	**1 / 2R**	**0 / 1R**	**0 / 0R**	**1 / 1R**	**0 / 2R**
Fraus	**1 / 1R**	**1 / 2R**	**0 / 1R**	**0 / 0R**	**1 / 1R**	**0 / 2R**
SPN	**5 / 0R**	**1 / 0R**	**1 / 0R**	**2 / 0R**	**1 / 0R**	**0 / 0R**
Alter	**3 / 0R**	**1 / 0R**	**0 / 0R**	**4 / 0R**	**2 / 0R**	**0 / 0R**
Matýsek	**7 / 0R**	**2 / 0R**	**0/ 0R**	**0/ 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**
Taktik	**8 / 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**	**0/ 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**
1+1	**4 / 0R**	**1 / 0R**	**0/ 0R**	**5 / 0R**	**0 / 0R**	**0/ 0R**

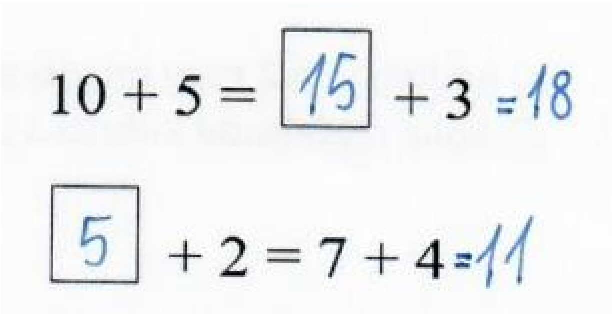
Tabulka č. 7: Výskyt různých tvarů rovnic v jednotlivých učebnicích ve 3. ročníku

4. ŘETĚZENÍ POČETNÍCH OPERACÍ

Domnívám se, že nejčastější chyby, kterých se žáci dopouštěli, pramení ze špatného vnímání rovnosti. Předpokládám, že někteří zápis rovnice vnímají jako proces, tzn. jako instrukci počítej zleva doprava. Myslím, že jej neberou jako relaci, tj. jako vazbu mezi čísly na levé a pravé straně rovnítka.

K této domněnce mě vedou zápisy, které se v žákovských řešeních často vyskytovaly. Za rovnicemi jsou dopsána rovnítka a číslo, kterému se rovná pravá část rovnice.





Obr. č. 54, 55: Ukázky řetězení ve 2. ročníku

Žáci tedy počítají postupně zleva doprava a vnímají zápis jako postup jejich myšlenkových pochodů. Ten postup je zřejmě takový: provedou výpočet předepsaný na levé straně rovnítka, výsledek zapíši hned za rovnítko na pravou stranu. Někteří žáci jsou takto hotovi a další znaky operace a číslo již neuvažují. Někteří žáci vnímají, že dopsané číslo je jakýsi mezivýsledek a použijí jej v dalším naznačeném výpočtu na pravé straně rovnítka. Dopíší další rovnítko a výsledek. Zde tedy dochází k řetězení operací - výsledek jednoho výpočtu je potřebný pro další výpočet.

S tímto jevem se žáci často setkávají u složených slovních úloh, např.: *Petr má tři autíčka, Pavel jich má o dvě více. Kolik jich mají dohromady?* V takové slovní úloze si žák může napsat $3 + 2 = 5 + 3 = 8$. Prvním výpočtem $3 + 2 = 5$ zjistí, kolik má Pavel autíček. Ve druhém kroku $5 + 3 = 8$ spočítá, kolik autíček mají oba dohromady, když k pěti Pavlovým přičte tři Petrova autíčka.

Myšlenkově je zápis v pořádku – přesně zachycuje postup, který žák používá k vyřešení úlohy. Tyto zápisy ovšem vytváří nesprávný koncept o fungování rovnosti. Záleží pak na osobě učitele, jak s takovými zápisy pracuje.

V případě, že je neznámá v levé části rovnice, je to podobné. Žák pravděpodobně neuvažuje poslední člen rovnice (tím je myšlen ten nejvíce vpravo) a vyřeší triádu, která mu bez tohoto čísla zbude. Pak už je postup a způsob přemýšlení stejný.

Žák si ani při jednom z takových postupů neuvědomuje, že jde o vazbu čtyř čísel, nikoliv jen tří.

Molina & Ambrose (2008, s. 62, 63) ve svém článku tyto teze podporují. K rovnicím ve stejném tvaru jako *10 + 5 = x + 3* uvádějí existenci studií, ve kterých žáci často za řešení považovali součet členů na levé straně rovnice. Podle nich mají žáci tendenci číst rovnici podobně jako větu. Při čtení takových „číselných vět"[13] je třeba si ji přečíst nejdříve celou, a pak se vrátit k řešení chybějící neznámé. Žáci však větu čtou postupně. Proto se nejdříve věnují součtu čísel na levé straně rovnice, který považují za výsledek, a pak pokračují teprve ve čtení věty dál.

4.1. Řetězení ve 2. ročníku

Jak řetězení vypadá v praxi, je vidět na obrázku uvedeném výše.

Pro jednoduchost budu dále rovnici *10 + 5 = x + 3* označovat jako první a rovnici *x + 2 = 7 + 4* jako druhou.

Je třeba dodat, že takové matematické zápisy, které se u řetězení objevují, nejsou formálně správné. Není tomu tak z důvodu, že *10 + 5* a *15 + 3* se sobě nerovnají, stejně jako neplatí, že *10 + 5 = 18.* Obdobný problém platí i pro druhý zápis. Je přesto možné se domnívat, že v rámci řešení některých slovních úloh, zejména složených nebo takových, kde je potřeba provést více výpočtů, žáci tyto zápisy běžně ve škole používají, jak je popsáno výše.

Řetězení, tak jak jej popisuji, je u první rovnice poměrně častým jevem. Případů, v nichž žáci dopsali do prázdného políčka číslo 15, se vyskytlo 297. V tolika řešeních tak rovnice dostala tvar *10 + 5 = 15 + 3*. U 65 z nich se objevilo řetězení, tedy za rovnicí byl dopsán zápis *„= 18“,* popř. řídce pouze *„18“.* Znamená to, že žáci řetězili u 21,8 % s řešením *15.* Dopsání *„=18“* (nebo *„18“*) je 100% spojeno s chybným řešením *15.*

U druhé rovnice (*x + 2 = 7 + 4*) je výskyt řetězení o trochu nižší – 57 žáků dopsalo *„=11“*. Přepočítáno na procenta u 19,5 % z počtu všech žáků, kteří doplnili číslo *5.* I zde platí že pokaždé, když žáci dopsali *„=11“,* vždy měli chybné řešení *5.*

Trochu častější je tedy doplnění řetězce u první rovnice, která má neznámou na pravé straně hned za rovnítkem. Zajímavé je, že doplnění zápisu u druhé rovnosti je přímo závislé na poznámce u té první. Samostatný zápis *„ =11“* se nevyskytuje vůbec nikde.

4.2. Řetězení ve 3. ročníku

Ve 3. ročníku se výše popsaná myšlenka řetězení objevovala dále. Řešení žáků úlohy *17 + 49 = x + 16*, kterou označuji dále jako třetí rovnici, byla v případě řetězení následující:

[13] v originále: „number sentences"; přeloženo autorem diplomové práce

17 + 49 = 66 + 16 = 82. Pozicí neznámé je tato rovnice ekvivalentní s první rovnicí ze 2. ročníku.

Druhou rovnicí se čtyřmi členy byla úloha *65 - x = 31 + 28*. I s řetězením pak žákovská řešení vypadala následovně: *65 - 34 = 31 + 28 = 59*. Tato rovnice není ekvivalentní s druhou rovnicí ze 2. ročníku. Označena bude jako čtvrtá.

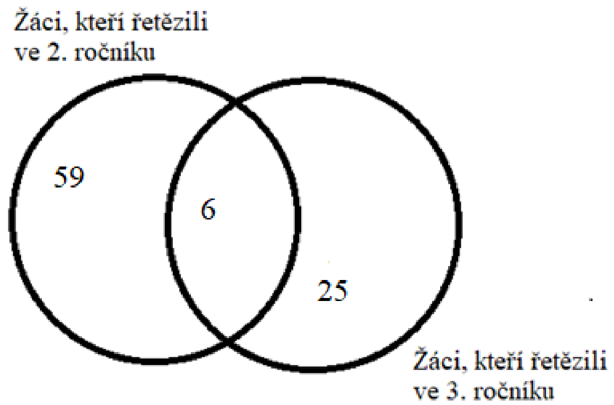
Myšlenka řetězení není ve 3. ročníku již tak častým jevem. U třetí rovnice se vyskytlo 32 případů řetězení, tedy řešení *17 + 49 = 66 + 16 = 82*. Ve 29 z nich bylo dopsáno *„ = 82“*. Tyto rovnice mají vždy na místě neznámé doplněno právě číslo 66. Dvakrát však číslo *82* nahradilo číslo *72* a jednou *62.* V těchto případech se dá předpokládat, že jde pouze o numerickou chybu, kde se žák spletl v řádu desítek. Řetězce, v nichž je doplněno *72* nebo *62*, obsahují na místě neznámé číslo *56.* Podoba celého zápisu tedy vypadá *17 + 49 = 56 + 16 = 72 (popř. 62).* Celkový počet chyb ve třetím ročníku je nižší, a nižší je i procento případů řetězení. Celkem se objevilo u 14,3 % rovnic, které měly chybné řešení *66* nebo *56.*

U čtvrté rovnice byla doplněn zápis *„ = 59“* celkem 29krát. I zde se propojil tento zápis a chybné řešení uvedené výše pokaždé, tzn. u všech řešení s dodatečným zápisem, měli žáci chybné řešení *34.*

Oproti 2. ročníku už ve 3. ale neplatí, že zápis u čtvrté rovnice je nutně vázána na existenci zápisu u třetí rovnice. Celkem 3krát se objevil zápis *„ = 59“,* aniž by se objevila *„ = 82“.*

4.3. Porovnání řetězení ve 2. a 3. ročníku

Podle výzkumných dat neplatí, že žáci, kteří používali řetězení ve 2. ročníku, jej používají i o rok později. Takový průnik byl zaznamenán pouze u šesti z nich. Všechny ostatní případy řetězení, které byly zaznamenány ve 2. ročníku, nebyly žáky ve 3. ročníku zopakovány. Z toho vyplývá i skutečnost, že je zde přibližně 25 žáků, kteří řetězení nepoužili ve 2. ročníku, zatímco ve 3. ano.



Obr. č. 56: Počty žáků, kteří použili řetězení při řešení rovnic ve výzkumu

Nelze však říci, jaký způsob myšlení uplatňují. Strategie řešení úloh mohou být velice podobné. Rozdíl může být jen v tom, zda si žák zapíše myšlenky i na papír nebo ne. Může se stát, že ve své strategii řešení řetězení použije taky. V takovém případě si může např. říci, že *„15 a 3 je dohromady 18, ale není tu na to políčko, tak to sem psát nebudu“.* Jedná se samozřejmě pouze o teorii, jak žák může přemýšlet.

Co však platí, že žáci, kteří použili řetězení ve 3. ročníku, a měli tedy chybné řešení, měli nesprávně i rovnice ve 2. ročníku. Existuje pouze jediná výjimka, kdy jedna žačka měla správně první rovnici, přestože ve 3. ročníku použila řetězení u obou rovnic.

Žáků, kteří používali řetězení, bylo vždy ve třídě málo a jejich počet v jednotlivých třídách byl obvykle velmi podobný v obou letech nebo byl ve 3. ročníku nižší. Výjimkou z tohoto pravidla je Škola 23, v níž ve 2. ročníku řetězení nepoužil žádný žák, zatímco o rok později to byli rovnou 4. Výsledky ve výzkumu se v této škole mezi oběma ročníky prakticky nezměnily – pouze ve třetím ročníku je u třetí rovnice o 4 procentní body menší úspěšnost, než u první, což je reálně rozdíl jednoho žáka.

4.4. Stanovení hypotézy

Řetězení a chybné řešení rovnic se ukázalo jako stoprocentně provázané. Tedy žáci, kteří tento chybný zápis používají, pak řeší "procesuálně", což znamená, že výsledek výpočtu na levé straně rovnice hned zapíší za rovnítko a pak počítají dál a doplní další rovnítko a výsledek prostřední části zápisu. Chtěl jsem se proto přesvědčit, že žáci, kteří řetězení využívají i v jiných kontextech – v tomto případě při řešení složené slovní úlohy – budou v řešení rovnic chybovat. Je třeba dodat, že v době, kdy jsem se rozhodl realizovat tento experiment, nedisponoval jsem ještě daty ze 3. ročníku, neboť ta byla teprve vyhodnocována.

Domníval jsem se, že používání takových řetězců, kde žáci zaznamenávají proces, se vyskytuje např. u řešení složených slovních úloh. To jsou takové, kde je nutné provést více než jeden výpočet. U těch se nabízí, aby si žáci zaznamenávali jednotlivé výpočty a navazovali je na sebe. Tento jev jsem se rozhodl v několika třídách zkusit ověřit.

Mým cílem bylo zjistit, zda koresponduje četnost používání procesuálních zápisů rovností s porozuměním formálnímu zápisu rovnosti.

Formulace hypotézy: Žáci, kteří používají při složených slovních úlohách procesuální zápis ve formě na sebe navazujících rovností, jej uplatňují i při řešení rovnic.

V případě řetězení u slovních úloh a očekávaného stejného postupu u rovnic, jsou očekávána tato řešení:

1. rovnice – řešení 15
2. rovnice – řešení 5
3. rovnice – řešení 66
4. rovnice – řešení 34

Taková řešení budu i nadále označovat jako očekávaná, v dalších textech budu s tímto termínem pracovat.

Za velmi důležité považuji dodat, že ne každé takové řešení nutně musí souviset s řetězením.

4.5. Způsob ověřování hypotézy

Proces ověřování hypotézy probíhal ve druhé polovině června 2022. Rozhodl jsem se pro tento účel navštívit několik škol, kde bych mohl experiment provést. Výběr probíhal za pomoci vedoucí diplomové práce, která mi zprostředkovala kontakty na těchto školách. Všichni oslovení vyučující byli ochotni mi věnovat čas a třídu k experimentu poskytnout. Vyplynulo tak 6 tříd, v nichž experiment probíhal – 01, 14, 19, 24, 25, 26. Jde o školy s různými výsledky ve výzkumu.

Ve školách, kde ověřování hypotézy probíhalo, četnost poznámek za rovnostmi dosahovala těchto hodnot. V době výzkumu jsem tato data měl pouze z 2. ročníku, nicméně tento experiment proběhl v době, kdy žáci již téměř ukončovali 3. ročník.

Následující tabulka ukazuje četnost řetězení v jednotlivých třídách, kde ověřování hypotézy proběhlo. Pokud je uvedeno ve sloupci *"= 18"* a řádku Jes. 3.A *4*, znamená to, že v rovnicích $10 + 5 = x + 3$ čtyři žáci doplnili za tuto rovnici zápis *"= 18"*. Stejným způsobem funguje i zbytek tabulky. Druhý sloupec se tedy věnuje řetězení u druhé rovnice atp.

Škola	"= 18"	"= 11"	"= 82"	"= 59"
01	6	6	1	1
14	1	1	0	0
19	2	2	0	0
24	4	3	5	3
25	0	0	0	0
26	5	4	1	1

Tabulka č. 8: Výskyt řetězení u jednotlivých úloh na jednotlivých školách

Vzhledem k domněnce, že tyto řetězce nejčastěji mohou vznikat u složených slovních úloh, jsem takovou zadal i žákům. Ti dostali zadanou slovní úlohu a takové množství času, které potřebovali na její vypracování. Žáky jsem požádal, aby uvedli na pracovní list všechny výpočty, které provedou.

Znění úlohy: *Maruška si zašla do obchodu, kde si koupila sušenky za 17 korun a velkou čokoládu za 49 korun. Spočítala si, kolik utratí, a rozhodla se přikoupit ještě limonádu za 16 korun. Kolik celkem utratila peněz?*

Úloha pracuje se stejnými čísly, jako třetí rovnice, byť se zde jedná o jinou rovnost. Jedním zápisem se dá zapsat $17 + 49 + 16 = 82$. V případě řetězení je očekáván takovýto zápis: $17 + 49 = 66 + 16 = 82$.

Jelikož je důležité, jak s takovými zápisy pracují učitelé, následoval poté i krátký rozhovor s nimi.

Dotazy, které jsem plánoval vyučujícím položit:

1) Setkáváte se s takovýmto postupem, kdy si žáci napíšou první rovnici, a ve chvíli, kdy dostanou další informaci, připojí si k ní další číslo a pokračují v počítání? (k této otázce jsem měl i vizuální podklad, učitelkám jsem ukázal řetězec $17 + 49 = 66 + 16 = 82$, aby bylo dostatečně jasné, o čem mluvím).

2) Přijde Vám takový způsob zápisu v pořádku? Proč ano, proč ne?

Je možné, že vzhledem k výpovědím učitelek bude potřeba některé dotazy modifikovat nebo se vhodně doptat.

4.6. Pohled vyučujících na řetězení v souvislosti s výskytem ve třídách

Rozhovory s vyučujícími proběhly poté, co žáci vyřešili slovní úlohy a odevzdali řešení. Ukázkový řetězec jsem měl připravený, nepoužíval jsem pro rozhovory řešení žáků, ani jsme je společně nijak neanalyzovali.

Rozhovory uvádím v podobě, ve které proběhly. Úvodní otázka je v přepisu zkrácena. Všechny rozhovory jsem si nahrával, tudíž jde o jejich autentický přepis.

Pod rozhovorem provádím analýzu toho, jak moc koresponduje výpověď paní učitelky s výsledky a postupy žáků.

Při uvození řeči jsou použita písmena U jako učitel a E jako experimentátor, tedy já.

4.6.1. Škola 24

E: Setkáváte se s těmito postupy?

U: Ano, potkávám se s tím.

E: Jak se vám to líbí, jak s tím pracujete, je to v pořádku?

U: Já myslím, že třeba tenhle mezikrok, pro ty děti, co to hned neumí najednou ty příklady napsat, že jim to pomáhá, že si takhle napíšou ten mezikrok, že je to pro ně jednodušší, takhle že si napíšou výsledek a k tomu ještě přičtou, že pro některé je těžké ty tři příklady rovnou, že by sečetly. Takhle je to pro ně jednodušší. Ty děti, co jsou jako lepší v matematice, tak ty zvládnou všechny tři rovnou sečíst, ale těm, co to jde hůře, tak těm to pomáhá takovýhle mezikrok.

E: Dobře, takže i souhlasíte s tím, aby takovýhle postup používali?

U: Jo.

E: Připadá Vám formálně v pořádku?

U: Za mě je to v pořádku.

Paní učitelka tedy postup schvaluje a výsledky žáků korespondují s touto výpovědí. Ve výzkumu se řetězení vyskytovalo průměrně u čtyř dětí, což je nejvíce ze všech tříd, kde rozhovory proběhly. Ve 2. ročníku měla u obou rovnic přibližně polovina žáků řešení, které by řetězení odpovídalo. Ve 3. ročníku se tento podíl ještě zvětšuje, u třetí rovnice mělo výsledek *66* celkem 15 žáků z 19. U čtvrté jich bylo 12, kteří doplnili řešení *32*.

Jak jsem psal již výše, zdaleka ne všechna taková řešení však musí nutně souviset s řetězením. To je nutné brát v potaz i u dalších srovnání. Ve slovní úloze se v tomto ročníku řetězení objevilo jednou.

4.6.2. Škola 25

E: Setkáváte se s těmito postupy?

U: Občas se objeví, ale snažíme se udělat si vždycky dva příklady z toho, jakože rozdělit si to.

E: Z jakého důvodu to rozdělujete?

U: No protože ta rovnice nedává smysl, když se to zapojí na tom, když se to jako připojí k tomu příkladu, tak už to nedává smysl.

Ze všech tříd, kde probíhalo ověřování hypotézy, je tato jediná, u které se ve výzkumu řetězení vůbec nevyskytlo. K řešení slovní úlohy jej použila jedna žákyně. To téměř odpovídá výpovědi paní učitelky, která jej neschvaluje. Řešení, která by s řetězením korespondovala, se ve 2. ročníku vyskytla u první rovnice 4, u druhé 8, přičemž testováno bylo 14 žáků. Ve 3. ročníku to byla 4 řešení u obou rovnic, testováno bylo pouze 10 žáků.

S výpovědí paní učitelky koresponduje i postup zvolený žáky při řešení slovní úlohy – 15 ze 18 žáků k řešení zvolilo dvě samostatné rovnice (*17 + 49 = 66* a *66 + 16 = 82*). Pouze dva žáci shrnuli všechna čísla do jedné rovnice *17 + 49 + 66 = 82.*

4.6.3. Škola 26

E: Setkáváte se s těmito postupy?

U: Ano, setkávám se s tím docela často a vlastně vysvětluju na tabuli potom, že se musí rovnat levá strana pravé a vlastně tenhle zápis není možný. Musí se vlastně znova výsledek opsat znovu a vlastně přičíst potom další sčítanec, ale opakuje se to pořád a pořád.

E: Takže opakuje se to, pracujete na tom, a tenhle způsob zápisu se vám nelíbí.

U: Ano, nelíbí, protože ta rovnost neplatí.

Řetězení se ve výzkumu objevilo ve 2. ročníku v pěti resp. čtyřech případech, zatímco ve 3. už se tak stalo pouze v jednom u obou rovnic (u stejného žáka). Dá se tedy předpokládat, že důraz paní učitelky na nutnost rovnosti mezi levou a pravou stranou v tomto směru slaví úspěch. Očekávaných řešení ve 2. ročníku bylo 11 u první rovnice, 8 u druhé rovnice, přičemž žáků bylo testováno 10. Ve 3. ročníku šlo z 10 žáků o 5 očekávaných řešení u třetí rovnice a 6 u čtvrté. Radu, že se musí levá strana rovnat pravé, si k srdci zatím moc žáků nevzalo. U všech rovnic se objevila maximálně dvě správná řešení, přičemž jedno má na svědomí vždy stejný žák.

4.6.4. Škola 19

E: Setkáváte se s těmito postupy?

U: Hm, určitě, setkáváme.

E: Jak se Vám tenhle způsob zápisu osobně zamlouvá?

U: Já na tom nějak nebazíruju, jak to zapíšou. Jsem ráda, že tam je prostě zapsaný nějaký postup řešení, ale nechávám to čistě na nich, jak si to zapisují. Někdo si to maluje, někdo si to zapisuje, takže jako matematicky to neplatí, ale je to v pohodě za mě, vidím tam jejich postup řešení, to je pro mě důležité. Přesto, že to jako… *(Větu nechá nedokončenou.)*

E: Takže vidíte v tom, že to není úplně v pořádku?

U: Samozřejmě, není to v pořádku matematicky, ale vidím tam to, jak to dítě řešilo tuhletu úlohu.

Paní učitelka si sice uvědomuje, že tento zápis není správný, ale žáky nechává, aby jej používali, pokud tak činí. Navzdory tomu se zdá, že pro porozumění rovnosti to v této třídě není taková překážka. Je třeba si uvědomit, že nevím, jak s rovnostmi jinak paní učitelka pracuje.
Slovní úlohu takto řešila jedna žákyně. Ve výzkumu se řetězení objevilo ve 2. ročníku dvakrát u obou rovnic, ve 3. ročníku vůbec.
Ve 2. ročníku se totiž objevilo očekávaných řešení kolem 50 % – 8, resp. 9 ze 16 žáků. Ve 3. tento počet ale velmi výrazně klesl. U třetí rovnice očekávaná řešení byla pouze 3 a u čtvrté dokonce žádné (úspěšnost řešení rovnice byla ovšem 50%).

4.6.5. Škola 01

E: Setkáváte se s těmito postupy?
U: Někdy. Když si třeba děláme Hejného nebo takhle, ale většinou při takovýchto slovních úlohách to neděláme. Takhle ne. Někdo si to takhle dělá, já je nechám, ať si rozhodnou sami, ale prakticky vlastně jsem je naučila takový jako postup, aby se snažili prostě postupovat krok za krokem. Takže nejdřív si vlastně vypočítají tu první fázi a pak ten druhej. Takže by byly určitě dva příklady samostatně.
E: Jak se Vám ten zápis líbí? Přijde vám v pořádku?
U: Mně jo, ale myslím si, že kdybych jim to ze začátku takovýmhle způsobem předložila, aby to takhle počítali, tak spousta dětí, ty chytrý v uvozovkách si s tím poradí, ale pak jsou tam děti, který podle mého si to potřebují rozdělit prostě, větu po větě, bod po bodu a dělat si to jakoby postupně. Je tam spousta dětí, který to nedaj takhle.
E: Dobře, zdá se vám ten zápis v pořádku formálně?
U: *(Asi 12 sekund přemýšlí.)* Nevím, co by na to řekly ty děti s poruchou, no. Ale jo, je to v pořádku.

Přestože paní učitelka dává žákům naprostou volnost v postupech, které používají, řetězení u žáků není rozšířené a jeho četnost se snižuje. Ze šesti případů u obou rovnic ve 2. ročníku kleslo na jeden případ u obou rovnic v ročníku 3. Současně jej paní učitelka ani nevnímá jako něco nesprávného. Ve slovní úloze řetězení nepoužil ani jeden žák.
Ve 2. ročníku se u první rovnice objevilo 17 očekávaných řešení, u druhé rovnice jich bylo 13, a to ze 23 žáků. Ve 3. ročníku tento počet výrazně klesl na 4 řešeni u třetí rovnice a 5 u čtvrté rovnice, přičemž se výzkumu zúčastnilo více žáků. Bylo jich 26.

4.6.6. Škola 14

E: Setkáváte se s těmito postupy?

U: Asi tak u třeba pěti ze třídy že si to jako dělají různé mezisoučty, ale že bychom jim to dávali přímo my takový příklady, to jako ne.

E: Jak se Vám tenhle způsob zápisu zamlouvá?

U: No oni jako když mají takováhle čísla, tak většinou si to napíšou pod sebe…

Jak se vám to ale líbí? Je podle vás takový způsob řešení v pořádku nebo není? A z jakého důvodu?

U: Tak mě jako z principu nevadí, když si to takhle zapíšou a oni vědí, k čemu to číslo patří a jsou schopní dojít k tomu výsledku. Já jenom potřebuju vědět, jestli tomu to dítě rozumí a ví co sčítá a odčítá, ale jakou formou zápisu si to zapíše, tak já jim už jako úplně nepodsouvám. Takže podle mě je to v pořádku.

I zde paní učitelka nechává volnost žákům v tom, jaké zápisy používají a řetězení nevnímá jako něco špatného. V této třídě dochází k zajímavému fenoménu. Přestože ve výzkumu se řetězení objeví pouze jednou u obou rovnic ve 2. ročníku a ve 3. již vůbec, celkem 3 žáci jej zvolili k řešení slovních úloh. Přesto se ale i očekávaných řešení se vyskytlo minimum. Ve 2. ročníku to bylo po 5 při 20 testovaných dětech, ve 3. ročníku dokonce 1, resp. 2 při počtu 21 dětí. Zde je tedy rozpor asi nejjednoznačnější ze všech tříd.

4.7. Řetězení v řešení slovních úloh u vybraných žáků

Ukázalo se, že řetězení není žáky běžně používaná metoda. Těch, kteří ji využili, bylo ve všech šesti třídách celkem devět. Výsledky těchto žáků ve výzkumu jsou ale velmi rozmanité.

Dva žáci, kteří v experimentu k ověření hypotézy použili ve slovní úloze řetězení, nelze dále hodnotit ve vztahu k výzkumu školní neúspěšnosti, protože se jej ani v jednom z ročníků nezúčastnili.

Ukázalo se, že žáci, kteří použili ve slovních úlohách řetězení, nemusí nutně chybovat při řešení rovnic. Ze zbývajících sedmi žáků jeden zaznamenal správné řešení u všech rovnic v obou ročnících, další dva měli správná řešení u obou úloh ve třetím ročníku. Je třeba dodat, že vzhledem k tomu, že výzkum školní neúspěšnosti probíhal dřív než tento experiment, lze říci, že řetězení ve slovních úlohách neovlivnilo řešení rovnic.

Pouze jeden žák, který použil řetězení při řešení slovní úlohy, jej použil i v řešení rovnic, a to ve 3. ročníku; nikdo z těchto žáků tedy řetězení nepoužil ve 2. ročníku.

Zajímavá je nesourodost výsledků u těchto žáků, jejich řešení jsou velmi rozmanitá – jsou zde pouze dvě žačky, které mají stejná řešení všech rovnic.
Postupně analyzuji výsledky sedmi žáků, kteří řetězení ve slovních úlohách použili a zároveň se zúčastnili výzkumu školní neúspěšnosti. Jména žáků jsou pro tyto účely změněna.

4.7.1. Artur – Škola 24

Artur měl jako jediný z těchto sedmi žáků slovní úlohu chybně vyřešenou z důvodu špatného postupu. Někteří další žáci sice dospěli také k chybnému výsledku, ale podle postupu se zdá, že numerickou chybou. Číslo 16, které reprezentovalo cenu přikoupené limonády, odečetl. Jeho zápis tedy vypadá následovně: *17 + 41 = 66 - 16 = 50.* Tomuto zápisu předchází ještě jiný: *17 + 41 = 66* Zajímavá je i chyba, kdy si sice napsal místo čísla *49* číslo *41,* ale evidentně počítal s číslem *49.*
Jde současně o jednoho ze dvou žáků, kteří ve 2. ročníku zkoumané rovnice nevyřešili vůbec nijak, okénka pro vyplnění ponechal prázdná a na papíře nejsou vidět ani žádné zápisy. V celém výzkumu školní neúspěšnosti měl však ve 2. ročníku nadprůměrné výsledky.
Ve 3. ročníku rovnice řešil tak, jak bych vzhledem k řešení slovní úlohy očekával. Doplnil číslo *66* do třetí rovnice a *34* do čtvrté rovnice, udělal tak nejčastější chyby, které se vyskytovaly a k nimž řetězení vede. Artur ostatně za rovnice zápisy *„= 82“* a *„= 59“* také dopsal. Ze všech sedmi žáků, kterým se v této analýze věnuji, byl jediný, který řetězení použil jak u slovní úlohy, tak u rovnic.
U Artura pravděpodobně existuje souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic.

4.7.2. Bartoloměj – Škola 24

Bartoloměj slovní úlohu vyřešil správně, zápis vypadal přesně, jak jsem při řetězení předpokládal: *17 + 49 = 66 + 16 = 82.*
Bartoloměj doplnil do řešení první rovnice číslo *18,* do druhé *9.* U každé z rovnic tedy pravděpodobně zvolil jinou strategii řešení. V první, dá se předpokládat, sečetl hodnoty všech známých členů a výsledek doplnil do prázdného políčka. To svědčí o neporozumění matematického zápisu. Vzhledem k tomu, že žáci strávili téměř rok doma za počítačem vlivem pandemie, a mnoho procvičování bylo na rodičích, se pravděpodobně s takovými zápisy nesetkali. Ve druhém případě Bartoloměj zvolil zřejmě správný postup, protože i řešení je správné.

Ve 3. ročníku už tolik úspěšný nebyl, řešení *64* a *34* poukazují na stejný postup jako u řešení složené slovní úlohy.
U Bartoloměje pravděpodobně existuje souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic.

4.7.3. Cecilka – Škola 25

Tato žákyně slovní úlohu vyřešila správně, zápis vypadal stejně jako u Bartoloměje. Ve druhém ročníku měla u první rovnice řešení *18,* u druhé rovnice *13.* Obě řešení se shodují se součtem všech známých členů v rovnicích. Tuto strategii si Cecilka částečně přenesla i do třetího ročníku. U třetí rovnice uvedla jako řešení *82,* což je opět součet všech známých členů. Do čtvrté rovnice však doplnila výsledek *62.* Ten se vyskytl celkově pouze v pěti případech a zde nedokážu určit, jakým způsobem k němu žáci došli. Mohlo by jít o špatně sečtená čísla 31 a 28, ovšem jde pouze o domněnku.
U Cecilky se tak neprokázala souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic.

4.7.4. Dáša – Škola 19

Dáša má slovní úlohu vyřešenou sice chybně, ale vlivem numerické chyby. Její zápis vypadá následovně, přičemž před číslem *66* je ještě začmáráno jasně čitelné číslo *67:*
17 + 49 = 66 + 16 = 72.
U první rovnice Dáša zvolila řešení *15,* u druhé *5.* Jde o očekávaná řešení, která vznikají vlivem procesuálního řešení rovnic, jak bylo popsáno. Ve třetím ročníku ale již obě rovnice vyřešila správně.
U Dáši může existovat souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic na základě řešení z 2. ročníku, nicméně je schopna rovnice vyřešit správně.

4.7.5. Ema – Škola 14

Tato žákyně též vyřešila slovní úlohu chybně, ale pouze vlivem numerické chyby, když 66 a 16 sečetla jako 83.
Všechny rovnice vyřešila zcela totožně jako Dáša.
U Emy může existovat souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic na základě řešení z 2. ročníku, nicméně je schopna rovnice vyřešit správně.

4.7.6. Felix – Han. 3.C

Felix jako jeden z mála všech žáků a jediný z těchto sedmi zakomponoval do výpočtu i koruny. Krom toho neřešil úlohu tak, jak byla postupně zadávána, ale čísla si prohodil, jak jemu vyhovovalo. Jeho zápis tedy vypadá následovně:

17 + 16 = 33 KORUN + 49 KORUN = 82 KORUN UTRATILA. Do výpočtu zakomponoval rovnou i odpověď na řešení celé slovní úlohy.

Řešení všech rovnic má však správně. Mezi těmito žáky je jediný.

U Felixe se neprokázala souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic.

4.7.7. Gita - Han. 3.C

Tato žákyně vyřešila slovní úlohu správně, její zápis je stejný jako u Bartoloměje a Cecilky.

Ve 2. ročníku si s rovnicemi ovšem neporadila vůbec, políčka pro řešení zůstala v jejím případě prázdná. Obecně v celém výzkumu o Gitě platilo v obou ročnících, že spoustu úloh vůbec nevyplnila.

Ve 3. ročníku se u rovnic řešení ovšem věnovala. U třetí rovnice zapsala číslo *40,* u čtvrté *16.* Celkově jde o poměrně neobvyklé hodnoty, byť ne zcela ojedinělé. U obou se ale dá předpokládat správný postup řešení rovnice s chybným výsledkem. Obě čísla se totiž liší přesně o 10 od správných řešení. Je tedy možné, že žákyně zvolila správný postup řešení, ovšem v obou případech se přepočítala právě o jednu desítku.

U Gity se neprokázala souvislost mezi řetězením u složené slovní úlohy a řešením rovnic.

4.8. Celkové vyhodnocení hypotézy

Výsledkem experimentu je, že hypotéza ve znění *„žáci, kteří používají při složených slovních úlohách procesuální zápis ve formě na sebe navazujících rovností, jej uplatňují i při řešení rovnic“* neplatí.

Vzorek žáků, kteří zápis v podobě řetězení používali, je poměrně malý. Tím se i ukázalo, že tento způsob zápisu se tak často ve třídě nevyskytuje, aby ve velkém počtu ovlivňoval řešení rovnic. Z celkových sedmi žáků, jež použili řetězení ve slovní úloze, se jen u dvou prokázalo pravděpodobné propojení ve způsobu řešení slovních úloh a rovnic. Tři žáci navzdory použití řetězení při řešení slovní úlohy, vyřešili rovnice správně. Poslední dva žáci sice rovnice vyřešit nedokázali, ale zvolili jiný postup než při řešení slovní úlohy.

5. ŽÁKOVSKÉ INTERPRETACE ŘEŠENÍ ROVNIC

Protože všechny dosavadní podklady jsou pouze domněnkami a názory, rozhodl jsem se, že provedu další experiment ohledně řešení rovnic a porozumění rovnosti. Tentokrát jsem využil školy, v níž jsem zaměstnán, abych žákům 2. a 3. ročníků zadal stejné cvičení, jako měli žáci ve výzkumu školní neúspěšnosti. Mým cílem bylo zjistit prostřednictvím rozhovorů bezprostředně po vyřešení rovnic, jak budou interpretovat svá řešení.

Do tohoto experimentu již nebylo možné zapojit učitelky z daných tříd a to z důvodu, že jde o mé kolegyně z práce. S některými z nich ve třídách, kde experiment proběhl, učím, a tím jsou ovlivněné mými názory, protože ví, čím se v diplomové práci zabývám a o problematice s nimi diskutuji. Proto si myslím, že by tímto byly rozhovory natolik zkreslené, že by neměly žádnou vypovídací hodnotu. Dalším důvodem je, že cílem byly opravdu rozhovory s dětmi.

5.1. Průběh experimentu

Experiment probíhal ve druhé polovině června 2023 na Základní škole profesora Švejcara v Praze 12.

Odehrál se ve dvou třídách každého z ročníků.

Ve 2. ročníku byla vybrána jedna třída, která se učí matematiku Hejného metodou, a jedna, která touto metodou prochází pouze okrajově. Žáci v této třídě se touto metodou primárně nevzdělávají, ale v jejich výuce jsou občas použity prvky z některých prostředí Hejného metody. Z algebraických, které mohou na porozumění rovnosti mít vliv, jsou to zejména Barevné trojice, Hadi a Pavučiny.

Ve 3. ročníku byl výběr podobný, pouze druhá ze tříd nemá zkušenost s Hejného metodou vůbec.

Celkově se experimentu zúčastnilo 53 žáků 2. ročníku a 35 žáků žáků 3. ročníku.

Žákům bylo předloženo celé cvičení tak, jak jej měli žáci ve výzkumu školní neúspěšnosti, aby podmínky byly co nejvíce podobné. Žáci byli informováni, že jejich práce nebude nijak hodnocena a že jde pouze o informace pro mě. Žádal jsem je, aby pracovali každý sám za sebe neopisovali, protože nejde o to mít vše správně, ale zjistit, jakým způsobem pracují. Dozvěděli se, že následně s některými z nich povedu krátký rozhovor.

Klíčem k výběru žáků k rozhovorům byly jejich výsledky. Ke každé dvojici řešení jsem chtěl mít minimálně jeden rozhovor z každé třídy, spíše jsem jich ale dělal více, kdyby se strategie žáků lišily. Současně jsem ale rozhovor nedělal se všemi žáky, jelikož jsem usoudil, že by se strategie hodně opakovaly. Dalším důvodem byla časová náročnost. Dvojicí řešení v tomto případě myslím kombinaci výsledků u obou zkoumaných rovnic. Pokud tedy Žák 1 má řešení *12* a *9* (obě správně)*,* Žák 2 *15* a *5* (obě chybně) a Žák 3 *15* a *9* (jedno správně, jedno chybně), zajímají mě všichni tři žáci, přestože řešení Žáka 3 je obsaženo už i u předchozích dvou. Žák 3 ale zvolil pravděpodobně u každé rovnice jinou strategii řešení a může být zajímavé pozorovat myšlenky žáka, který u jedné rovnice zvolí správnou strategii a u druhé chybnou. Pokud se některé dvojice řešení objevovaly vícekrát, jsem buď žádal učitelky, aby mi vybraly žáky, kteří by je zajímali nebo jsou hodně upovídaní, aby se mi s nimi rozhovor vedl dobře, nebo jsem se ve třídách, kde jsem žáky znal, snažil je vybírat podle toho, jak silní podle mého názoru v matematice jsou, a zařadit jak ty silnější, tak ty slabší.

Experimentální otázka: *Proč jsi doplnil(a) do těchto dvou rovnic tahle čísla? Jak jsi postupoval(a), jak jsi nad tím přemýšlel(a)?* V případě potřeby se budu různě doptávat podle situace.

Všechny rozhovory jsem si nahrával, uvádím tedy jejich autentický přepis. Úvodní otázku a poděkování za rozhovor nepřepisuji, protože jsou pokaždé stejné. Každý rozhovor tak začíná první odpovědí žáka.

Při uvození řeči jsou použita písmena Ž jako žák a E jako experimentátor, tedy já.

5.2. Rozhovory se žáky 2. ročníku

U tohoto výzkumu sice popisuji, že jsou zde žáci tříd s odlišnými metodami výuky matematiky, ale protože k tomuto bylo napsáno již dost, rozhodl jsem se je zde nerozlišovat a u žáků nebude uvedeno, ze které třídy jsou.

Pro lepší přehlednost znovu uvádím, kterými rovnicemi se žáci ve 2. ročníku zabývali:

$10 + 5 = x + 3$

$x + 2 = 7 + 4$

Při vedení rozhovorů jsem pozoroval, že většina žáků potvrzovala moje domněnky o tom, jak zápis rovnice vnímají, a které strategie používají pro jejich řešení u jednotlivých výsledků. Potvrzují se moje hypotézy o správných řešeních i nejčastějších chybách, jak jsem je popsal v kapitole *Rozbor nejčastějších řešení.*

***Žákyně 01 - řešení* 12 *a* 9**

Ž: Že 10 + 5 je 15 a tady jsem když je tam jenom ta trojka, tak jsem od tý patnáctky odečetla tu trojku a zbylo mi 12, takže 12 + 3 je 15.

E: A ten druhý?

Ž: U toho druhýho je tady 7 + 4, to je 11, a tam jsem to udělala taky, že od tý jedenáctky jsem odečetla tu dvojku, co tam je, a zbylo mi 9.

E: Aha, takže ty teda víš, že co potřebuješ, aby na obou stranách…?

Ž: Bylo stejně.

***Žák 02 - řešení* 12 *a* 9**

Ž: *(Nejprve popisuje druhou rovnici.)* Tady že je 9, a 9 + 2 je 11 a 7 + 4 je taky 11.

E: Dobře, a ta před tím?

Ž:Tady jsem dal 10 a 5 je 15 a 12 + 3 je taky 15.

E: Aha, a co jsi si u toho tedy říkal?

Ž: Že mi na obou stranách musí vyjít stejně.

***Žák 03 - řešení* 12 *a* 9**

Ž: Protože tady tohle je patnáct, deset plus pět je patnáct, což se má rovnat dvanáct plus tři, což je taky patnáct

E: A u toho druhého?

Ž: Devět plus dva je jedenáct a tohle… Sedm plus čtyři je taky jedenáct.

***Žákyně 04 - řešení* 12 *a* 9**

Ž: Že vlastně vím, že 12 + 3 je 15.

E: A co to znamená? K čemu ti to, že je to 15?

Ž: *(Asi 10 sekund neodpovídá).*

E: Řekni mi, jak jsi doplnila tu dvanáctku, co jsi si říkala, když jsi přemýšlela tady nad tím číslem, jak jsi postupovala, jestli si vzpomeneš.

Ž: No vlastně vím, že dva plus tři je pět.

E: No jasně…

Ž: Takže 12 + 3 je patnáct.

E: A proč je tady pro tebe důležitá ta patnáctka?

Ž: Protože to je vlastně výsledek.

E: Výsledek čeho?

Ž: Příkladu.

E: Tady toho na začátku myslíš? (ukazuji na levou část rovnice)

Ž: Hm, jo.

E: A tady ta devítka, na tu jsi přišla jak? (ukazuji na její řešení druhé rovnice)

Ž: Protože… To je taky výsledek toho příkladu.

E: Aha… Takže teda tahle část je kolik? (ukazuji na pravou část rovnice)

Ž: 9: 11

E: A tím pádem jsi chtěla, aby tohle (levá část) byla taky 11, rozumím tomu dobře?

Ž: Hm, hm, ano.

***Žák 05 - řešení* 12 *a* 9**

Ž: No… Protože vím, že 10 + 5 = 15 a ten výsledek musí jakoby příklad, kde musí být plus 3. A když si dám 15 - 3, tak je to 12. A 12 + 3 je teda pak těch 15 a je to výsledek.

E: A ten druhý?

Ž: Jsem si spočítala 7 + 4, že je 11, protože a abych věděla výsledek, tak jsem dala mínus 2 a to je 9, takže 9 + 2 a 7 + 4 = 11.

***Žákyně 06 - řešení* 12 *a* 9**

Pozn.: u této žákyně jsem pojal podezření, že opisuje od své spolužačky, ještě během řešení jsem ji požádal, ať píše řešení podle sebe, že mi nezáleží na správnosti. Po rozhovoru tento můj dojem ještě zesílil, ale stoprocentně tvrdit, že jsou výsledky opsané, nemohu. Moje nepochopení žákyně u první rovnice může být opravdu jen nepochopením z mé strany a řešení u druhé rovnice si skutečně pamatovat nemusí, přestože byla první, kdo mi ze třídy rozhovor poskytl. Jde nicméně o faktor, který je třeba vzít v potaz i ve výsledcích celého testování, který jsem si neuvědomil. Pravdou je, že zkreslení výsledků opisováním bude pravděpodobně zcela minimální, a navíc je zde možnost, že se bude vyrovnávat opisováním jak správných, tak chybných řešení.

Ž: Protože tady má být 2… Tady má být 15.

Kde má být 15?

Ž: No protože tady, to se rovná 15 *(ukazuje na levou část rovnice)*, a tady má být 2 *(ukazuje na políčko s doplněnou 12).*

E: Tomu nerozumím, kde má být 2?

Ž: *(Asi 5 sekund přemýšlí.)* Tady… Tak tam má být 2 = 5.

E: Ale ty tady máš 12…?

Ž: *(Asi 10 sekund neodpovídá.)*

E: Nerozumím, proč tedy máš tady 12? Když jsi sem doplnila těch 12, tak co jsi si myslela nebo na co jsi myslela?

Ž: Že tady ta jednička znamená jako 15 a ta dvojka jako plus dva.

Tomu vůbec nerozumím… No dobře, tak se tě zeptám, proč máš u té druhé tu devítku? (Přemýšlí skoro 20 sekund). To už si nevzpomenu.

***Žákyně 07 - řešení* 15 *a* 5**

Ž: No já tohle brala vlastně jako příklad, potom jsem to jakože tady jsem si myslela… *(zkráceno)* …ale tady že jsem jako napsala 15, protože 10 + 5 = 15 a…

E: A ta trojka tam vzadu?

Ž: Tam by mělo být = 18 podle mě, ale nenapsala jsem to tam a jenom nevím proč.

E: Dobrá, a u toho druhého jsi postupovala jak?

Ž: No tady jsem postupovala, že jsem se nejdřív koukla na ty čísla vlastně, a potom jsem viděla, že se to musí rovnat 7. A co, když tam máme dvojku, když mám 7 - 2 = 5, takže jsem tam doplnila 5. A tady… *(ukazuje na pravou stranu rovnice)* 2 + 4… Teda 7 + 4, tak to je 11, ale to jsem tam taky nepsala.

E: Aha, takže bys pokračovala, že 7 + 4 = 11?

Ž: No, jo, ale nepsala jsem to tam.

***Žák 08 - řešení* 15 *a* 5**

E: Otázka

Ž: Takže jsem si počítal, kolik je 10 + 5.

E: Spočítal jsi si kolik je 10 + 5?

Ž: Jo.

E: A to jsi tam doplnil teda?

Ž: Jo.

E: A u toho druhého?

Ž: Že 2… Jsem si spočítal 7 a odebral jsem si od sedmičky dva… A ten zbytek tak jsem napsal sem.

E: Dobře. A ta čísla tady na konci, ta trojka s tou čtyřkou? Ty ti tam nepřekážely, ty jsi neřešil?

Ž: Ne.

***Žák 09 - řešení* 15 *a* 5**

Ž: No protože já jsem úplně nevěděl… Jakože… Protože kdyby tam bylo… Protože 10 + 5 je 15 a + 3 je 18. Ale… Tady je, že se to má rovnat 7 + 2. Takže já jsem to nepochopil. Tak jsem si myslel, že je to nový příklad.

E: Takže jak jsi postupoval, jak jsi došel tady k té patnáctce?

Ž: No, že 10 + 5 je 15.

E: A s tou trojkou…?

Ž: S tou jsem nedělal nic.

E: Dobře, a tady k té pětce? Jaký byl tvůj postup?

Ž: Nooo, to bylo jakože 5 + 2 je 7?

E: Aha, a tady s tou čtyřkou…?

Ž: To jsem taky nevěděl. Jako s tou trojkou.

***Žák 10 - řešení* 15 *a* 5**

Ž: Přišel jsem k nim tak, že jsem si spočítal, kolik je 10 + 5. Tak jsem tam dal 15.

E: A u toho druhého?

Ž: Jsem si spočítal, že tam je + 2 a musí se to rovnat 7, a 5 + 2 = 7. Tak proto jsem tam doplnil 5.

E: A co ta čísla na konci, ta trojka a čtyřka?

Ž: To mi trošku nedávalo smysl.

E: Takže protože ti to nedávalo smysl, tak jsi to neřešil?

Ž: Jo.

***Žák 11 - řešení* 15 *a* 5**

Ž: Já jsem postupoval tak, že jsem si dal 10 + 5 je 15, ale to + 3, to jsem moc nechápal. Takže jsem to neřešil. A potom jsem si dal 5 + 2 je 7 a 4, to jsem taky zase nevěděl… A už to chápu!

E: Co tě teď napadlo?

Ž: 7 + 3 je… 11… Takže semka… Ne… Jedenáctka… To by pořád nedávalo moc rozum. Hm…

E: Řekni mi, co tě napadlo, prosím.

Ž: Napadlo mě, že bych semka dal nějaký výsledek… Nebo spíš dal bych semka osmičku *(ukazuje na políčko pro neznámou)*. Protože 8 + 2 = 11 a tohle je 11 jakoby.

E: Takže teď bys to udělal takhle?

Ž: Jo.

***Žákyně 12 - řešení* 15 *a* 5**

Ž: Pozn.: u tohoto řešení se objevilo řetězení.

Ž: Já jsem přemýšlela, že jsem jako 10 + 5 je 15 a potom 15 + 3 je 18.

E: Jo, takže jsi šla takhle postupně. A tady u toho druhého?

Ž: Já jsem počítala jako kolik se rovná 7. Jako 2 + kolik je 7. A pak jako že 7 + 4 je 11.

***Žák 13 - řešení* 2 *a* 9**

Ž: No, 2 + 3 bude 5 a 5 + 5 bude 10, tak tam aby bylo 2 + 3 musím doplnit 2.

E: Jo tys teda dopočítával do té pětky, rozumím tomu dobře?

Ž: Jo.

E: A s desítkou… To jsi počítal že 5 + 5 je 10.

Ž: No jo!

E: A u toho druhého?

Ž: No, že 7 + 4 je 11, tak to druhý musí být asi taky 11, když je tady rovná se.

***Žák 14 - řešení* 2 *a* 5**

Ž: Že jsem nad tím přemejšlel, já jsem tomuhle jako úplně nerozuměl, tak jsem nad tím přemejšlel… A pak jsem si řekl, že tajto by mohl bejt příklad a tajto by mohlo bejt… Že tajto plus tajto bude rovnat tajto.

E: Aha, takže že 3 + ten čtvereček bude těch 5?

Ž: Jo.

E: A tu desítku…?

Ž: No to jsem vůbec nevěděl.

E: A to druhé?

Ž: No že 2 + 5 je 7 a… Taky jsem vynechal tu čtyrku.

***Žákyně 15 - řešení* 18 *a* 9**

Ž: Mně přišlo dobrý tam dát 18 proto, protože 10 + 5 = 15 a tady je ještě + 3, takže jsem tam dala 18.

E: A u toho druhého?

Ž: No… *(přemýšlí asi 5 sekund)* To jsem si řekla, že když tady vidím že 7 + 4, tak a rovná se to 11, tak se to tu taky musí rovnat 11. Aby to bylo jako že stejný.

E: Takže jsi zjistila jak, že tam bude ta devítka?

Ž: No tak, že 9 + 2 je vlastně 11 a 7 + 4 je taky 11 a to vlastně stejný a u nás v matice tohleto znamená, jako že to musí být stejný znamýnko, jako že to musí být stejný číslo.

***Žák 16 - řešení* 18 *a* 5**

Ž: No já jsem nad tímhle postupoval, že 10 + 5 je 15 a + 3 je 18. Tadycto jsem dal jako 5 + 2 = 7.

E: A ta čtyřka tam na konci?

Ž: *(Asi 10 sekund přemýšlí).* Tu jsem vynechal.

***Žák 17 - řešení* 18 *a* 5**

Ž: Já jsem tady ty dvě jako že jsem si spočítal… Tady jsem si zapoměl… Se mi to spletlo asi s osmičkou ta pětka, a tak jsem tam asi napal 18. A tady jsem řekl…

E: Počkej, já tě ještě zarazím. Ty jsi teda počítal 10 + 8?

Ž: No asi jo.

E: A co s tou trojkou tady na konci?

Ž: To jsem moc nevěděl.

E: Opravil bys to teď, napsal bys to jinak, když víš, že je tam pětka?

Ž: Dal bych tam 15.

E: A tady u toho?

Ž: Tady bysem to nechal, protože 5 + 2 = 7, protože jsem si říkal, že jsem si to jako otočil 7 – 2 je 5.

E: A tu čtyřku zase teda…?

Ž: S tou nevím.

***Žák 18 - řešení* 18 *a* 13**

Ž: No že jsem si spočítal 10 + 5 = 15. A z tý patnáctky jsem si vypočítal tu trojku, vypočítal jsem, že je to 18, tak ten výsledek jsem napsal sem.

E: Jako dohromady všechno?

Ž: Ano.

E: A u toho druhého?

Ž: Tam jsem postupoval sedmičkou, vypočítal jsem si + 4. Eeee, + 4… 10, 11… 11 a + 2 jsem dal 11, 12, 13 a ten výsledek jsem napsal sem.

***Žákyně 19 - řešení* 18 *a* 13**

Ž: Že 10 + 5 = 15 a 15 + 3 = 18.

E: Takže jsi to sečetla všechno dohromady, jo? A u toho druhého?

Jsem udělala, že 7 + 4 = 11 a 11 + 2 = 13.

***Žák 20 - řešení* 15 *a* 18**

Ž: Protože 10 + 5 je 15 a 15 + 3 je 18 *(a ukazuje na čtverec pro neznámou ve druhé rovnici).*

E: Aha, takže ty jsi spojil jakoby dohromady ty dva příklady?

Ž: Jo.

E: A co s tím zbytkem tady pak?

Ž: Nevím.

E: S tím jsi si nevěděl rady?

Ž: Ne, to jsem nevěděl.

***Žákyně 21 - řešení* 10 *a* 9**

Ž: *(Přemýšlí asi 20 sekund.)*

E: Nejdřív mi řekni, proč tady máš tu desítku vyplněnou.

Ž: Protože já jsem to nechápala.

E: Dobře, ale tak tu desítku jsi tam napsala z nějakého důvodu, ne? Nějak jsi se k ní dostala.

Ž: Že jsem ji viděla napsanou tady *(ukazuje na číslo* 10 *na začátku rovnice).*

E: Jo že jsi ji viděla tady, jak jsi ji opsala?

Ž: *(Kýve hlavou, že ano.)*

E: A tady u toho druhého?

Ž: *(Přemýšlí opět asi 25 sekund).* 7 + 2.

E: 7 + 2 že je 9? A tu čtyřku tady? Tu jsi neřešila?

Ž: *(Kýve, že ne).*

5.3. Shrnutí rozhovorů žáků 2. ročníku

Díky rozhovorům se žáky 2. ročníku jsem si potvrdil moje nejčastější hypotézy. V případě správných řešení žáci věděli, že je třeba, aby se dva výrazy na obou stranách rovnítka sobě vzájemně rovnaly (Žáci 01 – 05, 13, 15).

Vyskytly se 2 speciální případy, kdy mi Žákyně 06 nebyla schopna vysvětlit svůj postup a Žákyně 21 k jednomu správnému řešení došla shodou náhod.

V kapitole *Rozbor nejčastějších řešení* se věnuji takovým, při nichž žáci pravděpodobně ignorují jeden člen rovnosti, buď první nebo poslední. Experiment potvrdil, že pokud žáci s jedním z členů nepracují, nejčastěji opravdu neví, co s ním mají dělat. Z toho důvodu s ním vůbec nepočítají (Žáci 07 – 11, 14, 16, 17). Objevil se ale i jeden případ řetězení (Žákyně 12).

U řešení *18* v první rovnici (Žáci 15 – 19) a *13* ve druhé (Žáci 17 — 19) se potvrdilo, že žáci sčítají všechny členy rovnice dohromady

V jednom případě, (Žák 13), pomohlo číslo *10* na začátku tomu, že si tento žák trochu pohrál se znaménky a jeho řešení bylo procesem, v němž postupoval zleva doprava, aniž by nějaký člen vynechal nebo si potřeboval nějaký doplnit.

Se zcela originálním řešením přišel Žák 20, který poslední dvě rovnice spojil do jedné a se zbytkem druhé rovnice již nepočítal. Postupoval procesuálně jako při řetězení, ale místo, aby řešení *18* zapsal za první rovnici, jako všichni ostatní, doplnil ji na začátek druhé rovnice na místo neznámé. Se zbytkem rovnice už poté nepočítal. Ve výzkumu školní neúspěšnosti mimochodem u této rovnice ($x + 2 = 7 + 4$) neměl ani jeden žák.

5.4. Rozhovory se žáky 3. ročníku

Postup rozhovorů bude stejný jako u 2. ročníku.

Pro lepší přehlednost i zde uvedu, kterými rovnicemi se žáci ve 2. ročníku zabývali:

$17 + 49 = x + 16$

$65 - x = 31 + 28$

Ve 3. ročníku taktéž žáci během rozhovorů potvrzovali to, co jsem si o jednotlivých řešeních myslel a mé hypotézy o jednotlivých chybách se postupně ukazovaly jako pravdivé.

***Žák 22 - řešení* 50 *a* 6**

Ž: Tak… Když jsem řekl, že tady 17 + 49, tak jsem si vzal tu sedmičku, přičetl 1 a tady jsem odečetl 1, takže tady jsem měl 16 a tady 50. Když jsem měl tady 50, tady 16, takže jsem přičetl tu desítku, což bylo… 60. A potom jsem si přičetl tu šestku. Takže jsem věděl, to… Že… To je 66. A když tady mám 16, tak vím že 66 tak jsem… Aha. Takže tadycto bych teď napsal 40.

E: A proč bys tam napsal 40?

Ž: Protože… Ne, počkat. Řekl jsem si 50 + 16 je 66. Takže… To mám asi správně.

E: Takže teda aby obojí bylo těch 66 jsi počítal potom, ano?

Ž: Ano.

E: A tady u toho druhého?

Ž: Tak když jsem si řekl, že… Mám třicítku, a tady dvacítku, tak jsem si řekl že 30 + 20 je 50 a 1 + 8 = 9 a 50 + 9 = 59. Takže jsem hned věděl, že 65 - 6 = 59.

***Žák 23 - řešení* 50 *a* 6**

Ž: Já jsem nejdřív vypočítal to 17 + 49, což jsem si vypočítal, že je 66 a to… Potom jsem si řekl, že 66 - 16 je 50.

E: A ten druhý?

Ž: Taky jsem si nejdřív spočítal to 31 + 28 což je 59 a 65 - 6 je 59.

***Žákyně 24 - řešení* 50 *a* 6**

E: Otázka

Ž: No já jsem si řekla, že 30 + 20 je 50 a 8 + 1 je 9 a 50 + 9 je 59.

E: Aha, a mě zajímá ta šestka, jak jsi k ní přišla?

Ž: Tak já jsem si to odpočítala, že 65, 64, 63, 62, 61, 60 a 59.

E: Aha, takže do té 59 jsi to dopočítala?

Ž: Ano.

E: A tady prosím ta padesátka vznikla jak?

Ž: Já jsem si nejdřív spočítala, že todlecto je 66. A pak jsem si řekla, že když o tohle je nižší než tohle, tak že tam musí být o jedno vyšší tohleto číslo.

***Žák 25 - řešení* 66 *a* 6**

Ž: 17 + 49 je 66.

E: A ta šestnáctka?

Ž: *(Asi 20 sekund přemýšlí.)*

E: Pracoval jsi s ní nějak?

Ž: Ne.

E: Tak jo, v pohodě, to se nemusíš bát říct. A ten druhý?

Ž: 31 + 28 =... *(Asi 10 sekund přemýšlí).* 59. A 65 - 6 = 59.

***Žákyně 26 - řešení* 66 *a* 6**

Ž: Já si řekla, že… Sečetla jsem si tohle a řekla jsem si mínus 16 a… To je 66 a pak jsem tam napsala tu šedesátšestku.

E: Aha, takže 17 + 49 - 16 = 66, rozumím tomu dobře, to je ten tvůj postup?

Ž: Jo.

E: Aha, a ten druhý příklad?

Ž: No, zase jsem sečetla tohle… Takže 59. No a řeknu si 66 a mínus 59… To je 6, takže jsem tam napsala šestku.

***Žákyně 27 - řešení* 56 *a* 6**

Ž: No já jsem to první moc nepochopila, ale potom jsem si spočítala tyhle dva *(ukazuje na levou část rovnice)* a potom jsem tam přidala tenhleten *(ukazuje na* + 16 *na pravé straně).*

E: Jo, že jsi teda sečetla tyhlety všechny dohromady a vyšlo ti 56?

Ž: Hm, jo.

E: A u toho druhého?

Ž: *(Přemýšlí asi 15 sekund.)*

E: Jak jsi přišla na tu šestku?

Ž: No, že jsem si spočítala tyhlety *(ukazuje na pravou část rovnice)* a potom jsem co mi vyšlo z tadytoho, tak jsem jakoby, že jsem tenhle příklad jako spočítala a potom jsem… A ten příklad, co byl tady, dala jako mínus z tadytoho příkladu.

E: Počkej, takže tady ti teda vyšlo…? Kolik?

Ž: To mi vyšlo 59.

E: A pak jsi teda s tím 59 naložila jak?

Ž: Hm, pak jsem to jakoby dala mínus 65. A vyšlo mi 6.

***Žák 28 - řešení* 66 *a* 34**

Ž: *(Přemýšlí skoro 10 sekund).* Spočítal jsem, kolik je 40 + 10, to je 50… + 9 je 59 + 7 je 66.

E: A s tou šestnáctkou jsi nějak pracoval?

Ž: Ne.

E: A ten druhý?

Ž: Jsem spočítal, kolik se rovná… Kolik jako 65… Kolik mínus = 31, tak jsem spočítal 34.

E: A tu dvacetosmičku jsi zase neřešil?

Ž: Nevěděl jsem.

***Žákyně 29 - řešení* 66 *a* 34**

Pozn.: u tohoto řešení se objevilo řetězení.

Ž: No já jsem si nějak to vypočítala, první jsem si vypočítala tyhlety dva příklady a potom jsem tady jakoukoliv se to rovná tyhlety dva a dala jsem to 66 + 16.

E: Abych to pochopil, jako že teda 17 + 49 je 66?

Ž: Jo.

E: A s tou šestnáctkou jsi teda pracovala jakým způsobem?

Ž: Hm, no, asi nijakym.

E: Tam máš pak těch 82.

Ž: *(Přemýšlí asi 10 sekund.)* Teď jsem si uvědomila, že je to 56. A plus 16 je 72.

E: A ten druhý?

Ž: Já jsem si vypočítala 65 nebo kolik mi chybí do… Když mám 65, tak… Kolik mi chybí do 65, když mám 31, tak kolik mi chybí to 65, tak jsem si myslela, že to je 34 a potom jsem to tady to udělala, jsem dala plus 28.

***Žák 30 - řešení* 66 *a* 34**

Pozn.: u tohoto řešení se objevilo řetězení.

Ž: 17 + 49 to bude 66 + 16 to bude 82. A tady je 65… Ne, tuto je 31… Mínus 65 to bude 34… Plus 65 - 34 to bude 31 a 31 + 28, to bude 59.

***Žák 31 - řešení* 72 *a* 34**

Ž: U tý sedmnáctky jsem dal 17 + 49, jsem si řekl že to je… Še… Desááát… Ne, počkat… Jo… 66. Ne… 56. Co? Nejdřív jsem si řekl, že 17 + 49 je 66. A plus 16 je 72.

E: Takže jsi sečetl všechna čísla dohromady. A u toho druhého?

Ž: Tam jsem udělal 65 - 34… Ne. 65 a řekl jsem si, že to musí vycházet 31, takže jsem si tam musel dát 34 a potom jsem dal…

E: S tou dvacetosmičkou jsi dělal co? Pokud něco?

Ž: Nene.

***Žák 32 - řešení* 72 *a* 34**

Ž: Jako že jsem… Tady jsem počítal 17 + 49 a plus jako ještě 16.

E: A tady u toho druhého?

Ž: No, tady mi vyšlo, že by to mělo být 31, tak jsem ze 65 odečetl 34.

E: A ta dvacetosmička, s tou jsi nějak pracoval?

Ž: Ne.

***Žák 33 - řešení* 66 *a* 51**

Ž: Protože… Tenhle nebo tenhle?

E: Oba dva. Začni třeba tímhle, tu sedmnáctku.

Ž: Protože 17 + 49 je 66.

E: A ta šestnáctka tam?

Ž: Jo… A + 16 je 82.

E: Aha. Což není tak důležitý, ale když jsi měl tohle před sebou, tak jsi nějak pracoval s tou šestnáctkou?

Ž: No, to jsem nevěděl.

E: A ten druhý?

Ž: No, 65 - 51, tak se rovná 31.

E: A s tou dvacetosmičkou jsi zase nijak nepracoval?

Ž: Ne.

***Žákyně 34 - řešení* 66 *a* 17**

Ž: Řekla jsem si 17… Ne, řekla jsem si 10 + 40, to je 50 a pak jsem si řekla… Pak jsem odečetla z tý sedmičky tu šestku, takže jsem si řekla, že 50 + 10 je 60 a pak 66.

E: A co s tou šestnáctkou tady?

Ž: Asi jsem jí taky měla sečíst?

E: To se mě teď ptáš? Na to já ti neodpovím. Chápu to teda dobře, že jsi nevěděla co s ní, tak jsi s ni nepracovala?

Ž: Nevěděla jsem jako moc, co s ní, jak to mám spočítat.

E: A ten druhý?

Ž: Já jsem si sečetla tady ty dva příklady... To mi vyšlo 59... A aby mi to vyšlo 59, tak jsem dala mínus 17.

E: Že 65 - 17 by bylo 59?

Ž: Jojo.

***Žákyně 35 - řešení* 82 *a* 34**

Ž: No já jsem u toho postupovala tak, že 17 + 49, jsem si to spočítala a pak jsem si dala to rovná se, ale pak jsem si řekla, že tam je ještě to 16, tak že to k tomu připočteme a to bude těch 82.

E: A ten druhý?

Ž: U toho druhýho jsem si moc nevěděla rady, tak jsem se to pokusila spočítat, ale vůbec mi to nešlo, tak jsem poprosila kámoše a ten mi to trošku vysvětlil a pak jsem to takhle vypočítala.

E: A víš teda proč tam máš tu 34.

Ž: Ani moc ne.

5.5. Shrnutí rozhovorů žáků 3. ročníku

I rozhovory se žáky 3. mě utvrdily ve správnosti mých hypotéz u jednotlivých řešení. Pokud řešení bylo správné, žáci věděli proč tak má vypadat. (Žáci 22 – 27).

Stejně jako ve 2. ročníku se potvrdilo, že některé členy žáci ignorují, protože neví, jak s nimi pracovat (Žáci 25, 29 – 35).

Objevily se opět i dva případy řetězení (Žáci 29 – 30). Žákyně 29 tuto skutečnost při rozhovoru nejprve nereflektovala, pak udělala ještě numerickou chybu.

U řešení *82* v první rovnici se potvrdil součet všech známých členů rovnice (Žákyně 35). Stejnou strategii zvolili i další dva (Žáci 31, 32). Ti při počítání udělali numerické chyby, proto jejich řešení byla odlišná. Numerické chyby ovlivnily řešení i v dalších čtyřech případech (Žáci 28, 29, 33, 34).

6. ZÁVĚR

Diplomová práce měla za cíl pozorovat vývoj porozumění rovnosti ve 2. a 3. ročníku. V rozboru didaktických textů jsem porovnával výsledky u jednotlivých rovnic v těchto ročnících a pozoroval, jak se výsledky zlepšovaly. Jako velmi podstatná se projevila pozice neznámé v rovnicích, ta má na výsledky výrazný vliv.

Faktorů, které porozumění rovnosti ovlivňují, je celá řada. V části věnované analýze učebnic se ukázalo, jak jsou některé z těchto výukových materiálů chudé na různé tvary rovnic. Velmi dobře z analýzy však vyšly učebnice využívající Hejného metodu, které žákům poskytují mnoho kontextů. Žáci se v nich setkávají s mnoha rovnicovými situacemi a rovnicemi v mnoha tvarech. Zajímavé, a pro mě překvapivé, bylo i zjištění, že v některých učebnicích dochází spíše k redukci rozmanitosti používaných tvarů rovnic.

V další části diplomové práce jsem si stanovil hypotézu, která se nakonec nepotvrdila. Na základě zápisů, které se vyskytly v didaktických testech, jsem usoudil, že někteří žáci vnímají rovnice jako proces. Domníval jsem se, že se to děje kvůli jednomu druhu způsobu zápisů, který jsem nazval řetězení. Experiment, v němž jsem sledoval žákovská řešení složené slovní úlohy však tuto moji hypotézu nepotvrdil. Z rozhovorů s vyučujícími v těchto třídách vyplynulo, že ne všichni při strategiích řešení dbají na matematicky formálně správný zápis nebo si jeho nesprávnost neuvědomují. Tato skutečnost však měla vliv na žáky jen v některých třídách.

V analýze nejčastějších chyb, které žáci při řešení rovnic dělali, jsem vyslovil mnoho domněnek, proč ke kterým chybám dochází. Abych si ověřil jejich správnost, rozhodl jsem se pro druhý experiment. Přibližně stovce žáků jsem předložil stejné rovnice, jako řešili žáci v didaktických testech. Během rozhovorů proběhlých bezprostředně po vyřešení jsem zjistil, že moje domněnky vycházejí z pravdivých základů.

Celkově je možné konstatovat, že porozumění rovnosti mezi 2. a 3. ročníkem základních škol se zlepšuje.

7. ZDROJE

Odborné zdroje:

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

Henderson, A. T., Berla, N. (Eds.) (1994). A New Generation of Evidence: *The family is critical to student achievement.* Washington: National Committee for Citizens in Education.

MOLINA, M., & AMBROSE, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/46593005

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

Ostatní zdroje:

Zákon č. 561/2004 Sb. Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). In: Zákony pro lidi [online]. AION CS, 2010-2023 [cit. 2023-12-02]. Dostupné z: https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561

Učebnice:

BALEJOVÁ, Renata, Martina HUBKOVÁ, Ivona ŠPAČKOVÁ, Zuzana ŠVIHLOVÁ a Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ. *Hravá matematika 3: pro 3. ročník ZŠ.* 3. vydání. Praha: Taktik, 2019-. ISBN 978-80-7563-364-4.

BALEJOVÁ, Renata, Martina HUBKOVÁ, Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ a Zuzana ŠVIHLOVÁ. *Hravá matematika 3: pro 3. ročník ZŠ*. Praha: Taktik, 2016. ISBN 978-80-87881-69-9.

BALEJOVÁ, Renata, Martina HUBKOVÁ, Ivona ŠPAČKOVÁ, Zuzana ŠVIHLOVÁ a Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ. *Hravá matematika 3: pro 3. ročník ZŠ*. 3. vydání. Praha: Taktik, 2019-. ISBN 978-80-7563-362-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace.* Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-232-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace.* Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-233-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-234-7.

BOMEROVÁ, Eva a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Druhé vydání. Ilustroval Karel HEJKAL. Plzeň: Fraus, 2020. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-569-2.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2013. ISBN 978-80-7235-527-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2013. ISBN 978-80-7235-530-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-405-4.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 2014-. ISBN 978-80-7235-536-5.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 2014-. ISBN 978-80-7235-643-0.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára, Miloš NOVOTNÝ a František NOVÁK. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Páté vydání. Brno: Nová škola, 2020-. Duhová řada. ISBN 978-80-7600-152-7.

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika*. Vyd. 10. Ilustroval Zdeněk MILER, ilustroval Kateřina LOVIS-MILER. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-260-6.

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika*. Vydání desáté. Všeň: Alter, 2020. ISBN 978-80-7245-383-2.

FALTINOVÁ, Magdaléna, Lenka PÍTOVÁ, Zuzana ŠVIHLOVÁ, Ivona ŠPAČKOVÁ a Jana OLŽBUTOVÁ. *Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV.* 3. vydání. Praha: Taktik, 2020. ISBN 978-80-7563-282-1.

HEJNÝ, Milan a kol. *Matematika 2.* Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-16-6.

HEJNÝ, Milan a kol. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-17-3.

HEJNÝ, Milan a kol. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-88247-18-0.

HEJNÝ, Milan a kol. *Matematika 3*: Hejného metoda. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-80-88247-21-0.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 2. Ilustroval Lenka PROCHÁZKOVÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-207-1.

LANDOVÁ, Vlasta, Hana STAUDKOVÁ a Věra TŮMOVÁ. *Matematika*. Vyd. 10. Ilustroval Olga ČECHOVÁ. Všeň: Alter, 2011. ISBN 978-80-7245-257-6.

NOVOTNÝ, Miloš, František NOVÁK a Alena Bára DOLEŽALOVÁ. *Matýskova matematika.* Druhé vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2015-. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-747-6.

NOVOTNÝ, Miloš, František NOVÁK a Alena Bára DOLEŽALOVÁ. *Matýskova matematika.* Druhé vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2015-. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-683-7.

NOVOTNÝ, Miloš, František NOVÁK a Alena Bára DOLEŽALOVÁ. *Matýskova matematika.* Druhé vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2015-. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-683-7.

NOVOTNÝ, Miloš, František NOVÁK a Jarmila HRDINOVÁ. *Matýskova matematika.* Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2015. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-663-9.

NOVOTNÝ, Miloš, František NOVÁK a Jarmila HRDINOVÁ. *Matýskova matematika.* Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2015. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-664-6.

NOVOTNÝ, Miloš a František NOVÁK. *Matýskova matematika*. Třetí vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2019-. Duhová řada. ISBN 978-80-7600-078-0.

NOVOTNÝ, Miloš a František NOVÁK. *Matýskova matematika*. Třetí vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2019-. Duhová řada. ISBN 978-80-7600-079-7.

POTŮČKOVÁ, Jana a Vladimír POTŮČEK. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Vydání čtvrté. Brno: Studio 1+1, 2012. ISBN 978-80-86252-575.

POTŮČKOVÁ, Jana a Vladimír POTŮČEK. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Vydání čtvrté. Brno: Studio 1+1, 2012. ISBN 978-80-86252-582.

POTŮČKOVÁ, Jana a Vladimír POTŮČEK. *Matematika: pro 2. ročník základní školy.* Vydání čtvrté. Brno: Studio 1+1, 2012. ISBN 978-80-86252-599.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky: pro 2. ročník základní školy*. 4. vydání. Brno: Studio 1+1, 2009. ISBN 978-80-86252-04-9.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky: pro 2. ročník základní školy*. 4. vydání. Brno: Studio 1+1, 2009. ISBN 978-80-86252-05-6.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky: pro 2. ročník základní školy*. 4. vydání. Brno: Studio 1+1, 2009. ISBN 978-80-86252-06-3.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky: pro 2. ročník základní školy*. 4. vydání. Brno: Studio 1+1, 2009. ISBN 978-80-86252-06-3.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Opravené vydání podle RVP. Brno: Studio 1+1, 2007. ISBN 978-80-86252-13-1.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Opravené vydání podle RVP. Brno: Studio 1+1, 2007. ISBN 978-80-86252-14-8.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky pro 3. ročník základní školy*. Vydání třetí. Brno: Studio 1+1, 2008. ISBN 978-80-86252-15-5.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky pro 3. ročník základní školy*. Vydání čtvrté. Brno: Studio 1+1, 2014. ISBN 978-80-86252-16-2.

POTŮČKOVÁ, Jana. *Procvičovací sešit z matematiky pro 3. ročník základní školy*. Vydání čtvrté. Brno: Studio 1+1, 2014. ISBN 978-80-86252-17-9.

ŠVIHLOVÁ, Zuzana, Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ a Ivona ŠPAČKOVÁ. *Hravá matematika 3: pro 3. ročník ZŠ.* 4. vydání. Praha: Taktik, 2021-. ISBN 978-80-7563-363-7.

VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka, Martina HUBKOVÁ, Magdaléna FALTINOVÁ, Zuzana ŠVIHLOVÁ, Ivona ŠPAČKOVÁ a Jana OLŽBUTOVÁ. *Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. 3. vydání. Praha: Taktik, 2020. ISBN 978-80-7563-283-8.