Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Relace a jejich využití

Relations and their applications

Markéta Čulíková

Vedoucí práce:	prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání

2023

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Relace a jejich využití potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, 4. 12. 2023

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá relacemi a jejich využitím. První kapitola shrnuje úvodní teoretické poznatky nutné k porozumění tématu relace: prvek, množina, uspořádané dvojice a kartézský součin. U všech těchto pojmů zavádí důležité definice a shrnuje související znalosti. Druhá kapitola definuje pojem relace a operace mezi nimi. Zahrnuje různé způsoby grafického znázornění relací a jejich výhody a nevýhody. Zavádí pojem relace v množině a vysvětluje vlastnosti této relace a z nich plynoucí speciální typy relací. Definuje také pojmy zobrazení a funkce. Třetí kapitola poukazuje na relace v lidském životě – ve vztazích a ve hrách, ve školním učivu a v logických hádankách. U těchto relací jsou určeny jejich vlastnosti. Znalost relací a jejich vlastností je zde využita k usnadnění řešení logických úloh a k hlubšímu porozumění problémů. Práce nabízí také dvě sady úloh. První obsahuje základní úlohy z tématu množiny, uspořádané dvojice, kartézský součin a relace, druhá se zabývá zjišťováním vlastností relací. Bakalářská práce je souhrnem znalostí o relacích.

KLÍČOVÁ SLOVA

množina, uspořádaná dvojice, kartézský součin, relace, vlastnosti relace v množině, ekvivalence, tolerance, uspořádání, relace ve školské matematice, relace v životě

ABSTRACT

The thesis deals with relations and their applications. The first chapter summarizes the introductory theoretical knowledge that is necessary for understanding the topic relations: an element, set, ordered pairs, Cartesian Product. The important definitions are introduced for all of these concepts and the related information is summarized within this chapter. The second chapter defines the concept of relations and operations on them. It includes various types of graphical representations of relations and their advantages and disadvantages. The concept of relation on a set and the properties of this relation alongside with some special types of relations derived from them are introduced in this chapter. The concepts of function are also defined in this part of the thesis. The third chapter indicates the relations that appear in real life - in relationships and games, in curriculum and puzzles. The properties of those relations are determined and the knowledge of relations and their properties is used to facilitate the solution of logical problems. It also supports gaining deeper understanding of those problems. The thesis includes two groups of tasks. The first one covers elementary tasks related to the topic of sets, ordered pairs, Cartesian Product and relations. The second part is concerned with determining the properties of relations. Thus, the thesis is the summary of knowledge of relations that is extended by the possibility of their application in real life.

KEYWORDS

set, ordered pair, Cartesian Product, relation, properties of relations on set, equivalence relation, tolerance relation, ordering, relations in school mathematics, relations in real life

Obsah

Úvod

Lidé jsou relacemi obklopeni a často jejich vlastnosti využívají, aniž by si to uvědomovali a znali teoretický základ tohoto tématu. Problematika relací je dle mého názoru přínosná nejen ze stránky matematické, ale také díky velmi široké škále situací, v nichž se lze s relacemi v běžném životě setkat. Toto jedinečné propojení matematiky a každodenního života mě vedlo k výběru tématu této bakalářské práce, které zní *Relace a jejich využití*. Práce se snaží relace uchopit z různých hledisek, nevynechává samozřejmě ani matematickou výuku na základní škole, při níž se žáci s relacemi setkávají, ačkoli tento pojem neznají. Při řešení matematických úloh ale často z důvodu nedostatečného či chybného vnímání vlastností relací vyplývají nejasnosti v zápisu a často i chybná řešení. Na to by tato práce mimo jiné chtěla upozornit.

Bakalářská práce je členěna do čtyř hlavních kapitol. Úvodní dvě kapitoly jsou ryze teoretické. První kapitola shrnuje a upevňuje základní pojmy potřebné k pozdějšímu zavedení pojmu relace, tedy *množiny*, *uspořádané dvojice* a *kartézský součin*. Druhá kapitola zavádí pojem *relace.* Jsou zde popsány různé způsoby grafického znázornění relací a operace mezi relacemi. Důkladněji je poté rozveden pojem *relace v množině* včetně jejích vlastností. Na závěr teoretické části jsou popsány speciální typy relací: *zobrazení* a *funkce*. Třetí kapitola zachycuje, kde se lze s relacemi setkat. Představuje některé relace z běžného života – z mezilidských vztahů a ze společenských her, shrnuje nejznámější relace z učiva základních škol nejen v matematice a aplikuje teoretické poznatky uvedené v předchozích dvou kapitolách. U relací ve školské matematice poukazuje na několik základních problémů, s nimiž se žáci při užívání relací potýkají. Je zde také využita znalost relací pro řešení logických problémů. Čtvrtá kapitola je souborem úloh řešených pomocí poznatků z teoretické části této práce a je doplněna o výsledky těchto úloh.

Jelikož tato práce čerpá z různých odborných zdrojů, jsou všechny citované definice pro snazší čtenářovu orientaci a pro přehlednost přeznačeny tak, aby bylo symbolické značení a názvosloví v celé bakalářské práci jednotné.

Bakalářská práce *Relace a jejich využití* si tedy klade za cíl shrnout důležité základní poznatky o relacích a jejich vlastnostech. Zároveň poukazuje na důležitost znalosti a pochopení relací a jejich vlastností (ačkoli bez nutné znalosti daných pojmů a odborné teorie) pro každodenní potřebu ve školské matematice, potažmo běžném životě. Také uvádí několik možností aplikace znalosti relací a jejich vlastností k řešení logických úloh. Spíše teoretický charakter této práce je tak podpořen i praktickým využitím.

1 Úvodní pojmy

V této kapitole budeme definovat pojmy *množiny*, *prvky* a *kartézský součin*, které poté využijeme k definici pojmu *relace*.

1.1 Množiny

Veselý (1963) přirovnává pojem *množina* k pojmu *souhrn* či *soubor*. Zároveň vysvětluje, že se každá množina skládá z konkrétních či abstraktních předmětů, které lze od sebe rozlišit – ty se nazývají *prvky množiny*.

Každá množina je přesně určená prvky, které obsahuje. O každém prvku lze jednoznačně říci, zda do množiny patří, či nikoli. Pokud prvek x patří do množiny A, používáme značení $x \in A$ a říkáme, že x *náleží* A, případně x *je prvkem/elementem* A. Situaci, kdy prvek x do množiny A nepatří, značíme $x \notin A$ a říkáme, že x *nenáleží* A, případně x *není prvkem/elementem* A .

Množiny, které mají konečný počet prvků, se nazývají *konečné*. Množiny mající nekonečně mnoho prvků se nazývají *nekonečné*.

Množiny lze určit například pomocí výčtu prvků. Množinu A_1 obsahující prvky 4, 6 a 8 zapisujeme $A_1 = \{4, 6, 8\}$, množinu A_2 sestávající z prvků 3 a 5 zapisujeme $A_2 = \{3, 5\}$ a množinu A_3 čtyř kamarádek $A_3 = \{Jana, Martina, Petra, Eliška\}$.

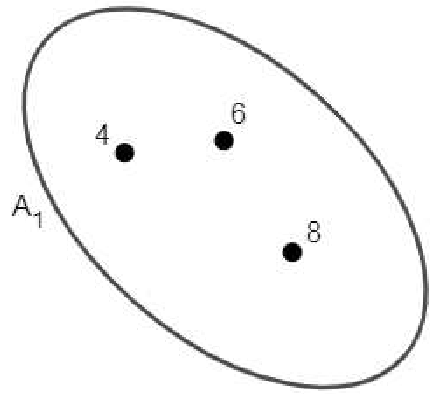
Jako poněkud univerzálnější způsob zápisu množin uvádějí Kästner a Göthner (1986) určení množiny pomocí vlastnosti, kterou mají společnou pouze všechny prvky množiny. Množinu B_1 obsahující prvky 4, 5, 6, 7, 8 a 9 zapíšeme pomocí výrokové formy například takto: $B_1 = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 10\}$, množinu B_2 všech prvočísel větších než 13 zapíšeme $B_2 = \{x: x \text{ je prvočíslo } \wedge x > 13\}$, množinu B_3 všech reálných řešení rovnice $x^2 + 2x + 3 = 0$ zapisujeme $B_3 = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2x + 3 = 0\}$ a zápis množiny B_4 mající za prvky kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 8x + 15 = 0$ vypadá takto: $B_4 = \{x: x^2 - 8x + 15 = 0\}$.

Při bližším prozkoumání množiny $B_3 = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 2x + 3 = 0\}$ je zřejmé, že neexistuje žádné číslo, které by bylo jejím prvkem, neboť daná kvadratická rovnice nemá reálný kořen.

Definice 1. Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme *prázdnou množinou* a označujeme ji symbolem $\emptyset$ (Kästner & Göthner, 1986, str. 9). [1]

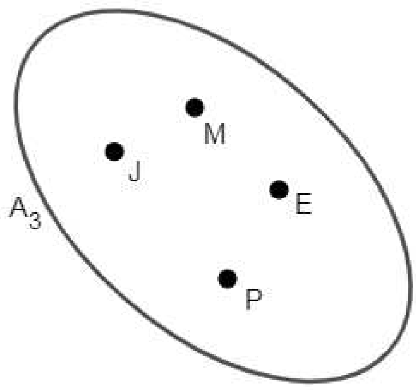
Množina B_3 je tedy *prázdnou* množinou, neboli $B_3 = \emptyset$. Pokud bychom ale uvažovali množinu $C = \{\emptyset\}$, ta prázdnou množinou není – obsahuje jeden prvek, a to právě prázdnou množinu. Pokud množina není *prázdná*, tedy obsahuje-li jeden či více prvků, nazývá se *neprázdnou* množinou.

Množiny lze také schematicky znázornit pomocí obrázku. Například množinu A_1 zobrazuje Obrázek 1.



Obrázek 1: Schéma množiny ***A₁***

Množinu kamarádek A_3 pak lze zobrazit obdobně (Obrázek 2), pro přehlednost ale místo celých jmen používáme pouze jejich počáteční písmena.



Obrázek 2: Schéma množiny ***A₃***

[1] Prázdná množina se v některých zdrojích značí { }. Pro účely této práce budeme ale využívat značení $\emptyset$.

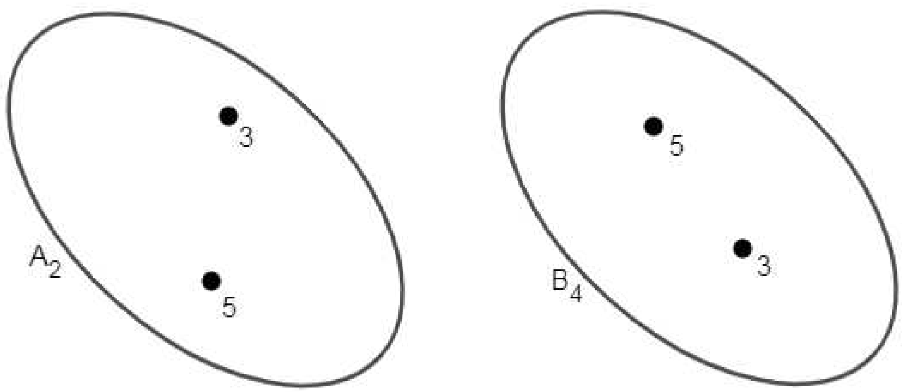
Dvě či více množin lze porovnávat a definovat jejich vzájemný vztah. Na tyto vztahy mezi množinami se nyní zaměříme.

1.1.1 Vztahy mezi množinami

Jedním z nejzákladnějších množinových vztahů je *rovnost* dvou (či více) množin. Ta se definuje takto:

Definice 2. Nechť A a B jsou dvě neprázdné množiny. A a B se nazývají sobě *rovné*, právě když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B, a naopak – každý prvek množiny B prvkem množiny A, tj. $A = B$, právě když pro všechna x platí $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Prázdné množiny se navzájem rovnají (Kästner & Göthner, 1986, str. 10).

Příklad rovnosti dvou množin uvádíme na množinách $A_2 = \{3, 5\}$ a $B_4 = \{x: x^2 - 8x + + 15 = 0\}$. Ačkoli mají tyto dvě množiny odlišný zápis, rovnají se, neboť obsahují stejné prvky. Rovnost těchto množin je zřejmá i z jejich grafického znázornění (Obrázek 3).



Obrázek 3: Rovnost množin A_2 a B_4

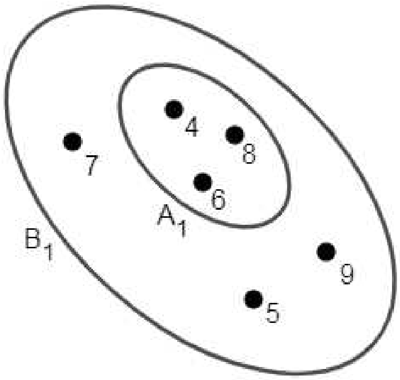
Mezi vztahy dvou (či více) množin patří i pojem *být podmnožinou*. Tento vztah se definuje takto:

Definice 3. Nechť A a B jsou množiny. Pak se A nazývá *podmnožinou* B (symbolicky: $A \subseteq B$), právě když každý prvek A patří také do B, tj. $A \subseteq B$, právě když pro každé x platí: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Speciálně se A nazývá *vlastní podmnožinou* B právě když platí: $A \subseteq B$ a $A \neq B$ (Kästner & Göthner, 1986, str. 12).

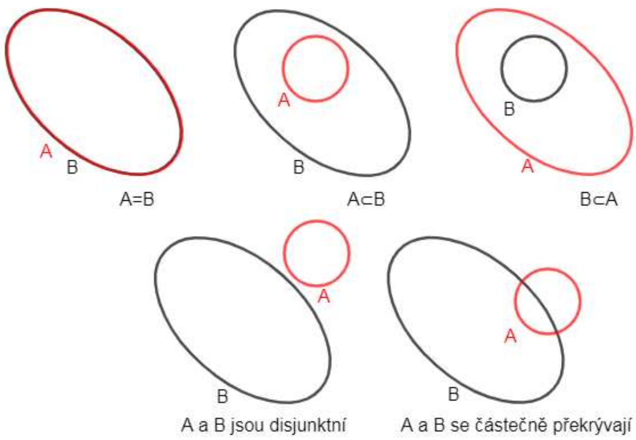
Značení vztahu A je *vlastní podmnožinou* B není jednotné. Pro účely této bakalářské práce volíme značení $A \subset B$.

Z předchozích dvou definic je zřejmé, že pokud je $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$, pak $A = B$. A naopak, když $A = B$, pak zřejmě i $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$. Dále platí, že každá množina je zároveň svou vlastní podmnožinou. Prázdná množina je zřejmě vlastní podmnožinou jakékoli neprázdné množiny.

Příklad vztahu *být podmnožinou* uvádíme na množinách $A_1 = \{4, 6, 8\}$ a $B_1 = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x < 10\}$. Množina A_1 je *podmnožinou* množiny B_1 ($A_1 \subseteq B_1$), neboť prvky 4, 6 a 8 množiny A_1 náleží i množině B_1. Množiny B_1 a A_1 se ale nerovnají, neboť v množině B_1 leží i prvky, které nenáleží množině A_1. Množina A_1 je tedy *vlastní podmnožinou* množiny B_1 ($A_1 \subset B_1$), což je opět jasně zřetelné i při grafickém znázornění těchto množin (Obrázek 4).



Obrázek 4: Podmnožina $A_1 \subset B_1$



Obrázek 5: Vztahy množin

Dalším možným vztahem dvou množin je případ, kdy dané množiny nemají žádný společný prvek. Takové množiny se nazývají *disjunktní*. Mají-li dané množiny nejméně jeden společný prvek, ale každá z nich obsahuje alespoň jeden další prvek neležící v druhé množině, obě množiny se *částečně překrývají.*

Dle Kästnera a Göthnera (1986) nastává tedy pro vzájemný vztah dvou libovolných množin A a B jeden z následujících případů (Obrázek 5, pro přehlednost zde a v následujících obrázcích značíme množiny pouze schematicky bez prvků): $A = B$, $A \subset B$, $B \subset A$, A a B jsou disjunktní, nebo se A a B částečně překrývají.

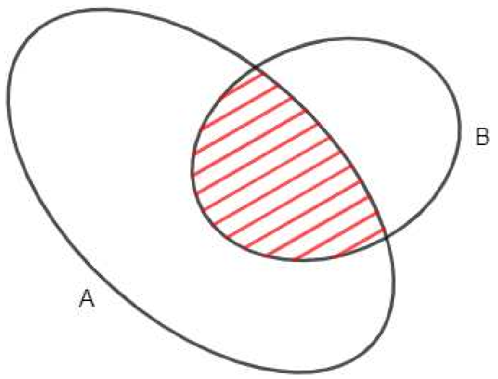
1.1.2 Množinové operace

Mezi množinami lze provádět různé množinové operace. První základní operací je *průnik.*

Definice 4. *Průnikem množin* A, B nazýváme množinu $A \cap B$ definovanou vztahem $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ (Balcar & Štěpánek, 1986, str. 39).

Průnik dvou množin A a B zobrazuje Obrázek 6.

Disjunktní množiny mají prázdný průnik. Také průnik dvou množin, z nichž alespoň jedna je prázdná, je prázdný.



Obrázek 6: Průnik $A \cap B$

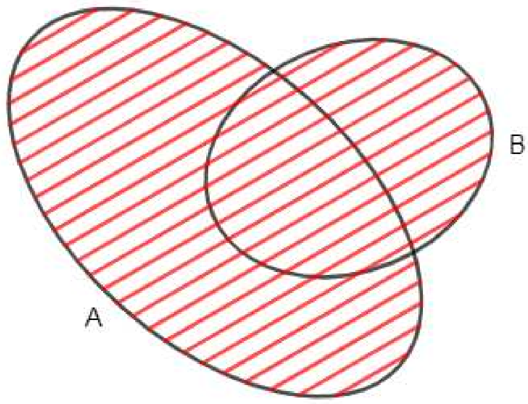
Další operací mezi množinami je *sjednocení*.

Definice 5. *Sjednocení množin* A, B je množina $A \cup B$ definovaná vztahem $A \cup B =$ $= \{x : x \in A \vee x \in B\}$ (Balcar & Štěpánek, 1986, str. 41).

Sjednocení množin A a B náleží tedy všechny prvky množiny A a všechny prvky množiny B (Obrázek 7). Sjednocení a průnik množin jsou komutativní a asociativní operace, tedy $\forall A, B, C$:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

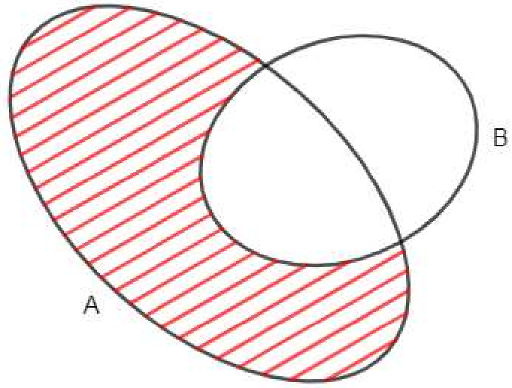
Tyto operace lze provádět se dvěma či více množinami. Sjednocení množin C_1, ..., C_n, kde $n > 2$, značíme $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ a průnik množin C_1, ..., C_n, kde $n > 2$, značíme $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$.



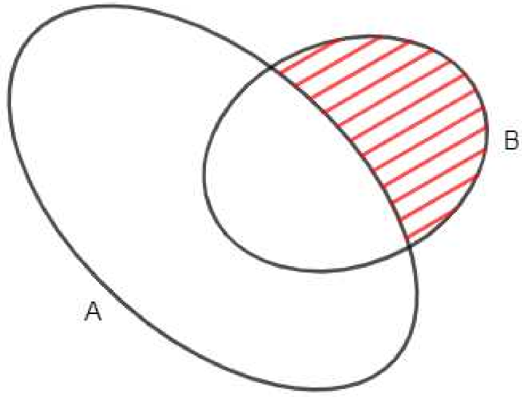
Obrázek 7: Sjednocení *A* ∪ *B*

Neméně důležitou operací mezi množinami je jejich *rozdíl*.

Definice 6. *Rozdílem množin* A, B nazýváme množinu $A \setminus B$, pro kterou platí: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ (Balcar & Štěpánek, 1986, str. 39).



Obrázek 8: Rozdíl množin *A* \ *B*



Obrázek 9: Rozdíl množin *B* \ *A*

Rozdíl $A \setminus B$ množin A a B ukazuje Obrázek 8. Rozdíl dvou různých množin není komutativní, tedy pro $A \neq B$ platí: $A \setminus B \neq B \setminus A$. Obrázek 8 znázorňující rozdíl množin $B \setminus A$ se od grafického znázornění $A \setminus B$ (Obrázek 9) evidentně liší.

S rozdílem dvou množin souvisí *doplněk množiny*. Základní množina Z je taková množina, jejíž podmnožinou je B.

Definice 7. Uvažujme rozdíl $Z \setminus B$ základní množiny Z a množiny B. Tato množina se často nazývá *doplněk množiny B vzhledem k Z* a značí se B'_Z (Kästner & Göthner, 1986, str. 18).

Doplněk množiny B vzhledem k Z lze zapsat také jako $B'_Z = \{x : x \in Z \wedge x \notin B\}$, neboli do doplňku množiny B vzhledem k základní množině Z patří všechna x, která patří do Z, ale nepatří do B.

Pro pozdější pochopení *rozkladu množiny podle ekvivalence* zavádíme tuto definici:

Definice 8. Jsou-li B_i podmnožiny množiny A ($i = 1, 2, 3, \ldots$; případně i nekonečně mnoho), nazývá se množina $\omega = \{B_i\}$ všech těchto podmnožin *rozklad množiny A na třídy*, právě když současně platí:

(1) Každé $x \in A$ náleží jen do jedné z množin B_i.

(2) Libovolné dvě z těchto podmnožin jsou si buď rovny, nebo jsou disjunktní: $B_i \neq B_j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

(3) Žádná z podmnožin není prázdná: $B_i \neq \emptyset$ pro všechna i.

Podmnožiny B_i z ω se pak nazývají *třídy rozkladu ω množiny A* (Kästner & Göthner, 1986, str. 40).

1.2 Uspořádané dvojice

Odvárko (1972) uvádí, že v běžném životě i v matematice se často setkáváme s dvojicemi objektů, přičemž záleží na tom, v jakém pořadí jsou tyto objekty/prvky uvedené. Například: $\frac{3}{8}$ vs. $\frac{8}{3}$, 9^4 vs. 4^9, $8 - 5$ vs. $5 - 8$ nebo i *Petr Pavel* vs. *Pavel Petr* (ve smyslu křestního jména a příjmení). Takové dvojice jsou *uspořádané*. Formálně je popisuje následující definice:

Definice 9. Nechť A a B jsou neprázdné množiny. Každá dvojice $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$, se nazývá *uspořádaná dvojice prvků množin* A a B. Dvě uspořádané dvojice $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$ se rovnají, právě když $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$ (Kästner & Göthner, 1986, str. 24).

Obdobně lze definovat i *uspořádané n-tice*, s tím rozdílem, že uspořádané n-tice obsahují n uspořádaných prvků z n množin.

1.3 Kartézský součin

Definice kartézského součinu je zásadní pro zavedení pojmu relace.

Definice 10. Nechť A a B jsou neprázdné množiny. [...] Množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$, se nazývá *kartézský součin $A \times B$ množin A a B*: $A \times B = \{[x, y]: x \in A \text{ a } y \in B\}$ (Kästner & Göthner, 1986, str. 24).

Například kartézský součin $A_1 \times A_2$ množin $A_1 = \{4, 6, 8\}$ a $A_2 = \{3, 5\}$ z kapitoly 1.1 lze tedy zapsat takto: $A_1 \times A_2 = \{[4, 3], [4, 5], [6, 3], [6, 5], [8, 3], [8, 5]\}$.

1.3.1 Grafické znázornění kartézského součinu

Kartézský součin lze graficky znázornit, a to několika způsoby. Některá tato grafická znázornění, konkrétně tabulku, kartézský graf a šachovnicový graf, ukážeme na kartézském součinu $A_1 \times A_2$ množin A_1 a A_2 z kapitoly 1.1. V každém z grafů je pro názornost červeně zvýrazněna dvojice $[8, 3]$.

Tabulka

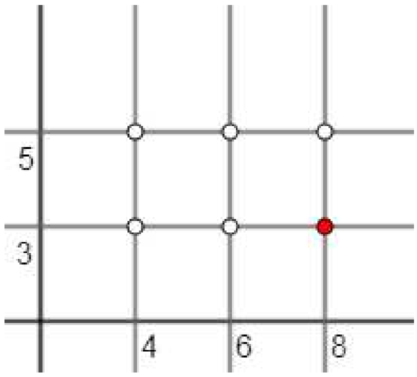
A_1 \ A_2	3	5
4	[4, 3]	[4, 5]
6	[6, 3]	[6, 5]
8	[8, 3]	[8, 5]

Obrázek 10: Tabulka kartézského součinu $A_1 \times A_2$

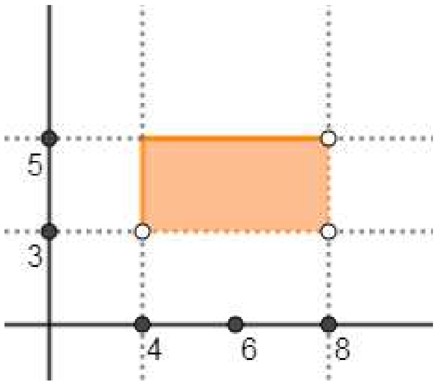
Nejprve uvedeme znázornění kartézského součinu tabulkou. Tento způsob využívají například Vyšín a Kučerová (1973). Do záhlaví řádků zapíšeme prvky první z množin, do záhlaví sloupců pak prvky druhé množiny. Tabulku kartézského součinu $A_1 \times A_2$ znázorňuje Obrázek 10. Tento způsob záznamu lze využít pro množiny izolovaných bodů, nikoli ale pro intervaly.

Kartézský graf

Pisklák (2004) zobrazuje kartézský součin mimo jiné pomocí kartézského grafu. Při zobrazování kartézského součinu $A_1 \times A_2$ pomocí kartézského grafu postupujeme takto: Zvolíme si dvě kolmé přímky (vodorovnou a svislou). Na vodorovné přímce znázorníme jednotlivé prvky množiny A_1 jako body, obdobně pak prvky množiny A_2 na svislé přímce. Poté každým z vyznačených bodů vedeme kolmici k přímce, na níž leží. Následně vyznačíme vzájemné průsečíky všech takto sestrojených kolmic. Tyto průsečíky jsou znázorněním uspořádaných dvojic $[x,\ y] \in A_1 \times A_2$. Kartézský graf kartézského součinu $A_1 \times A_2$ znázorňuje Obrázek 11.



Obrázek 11: Kartézský graf kartézského součinu $A_1 \times A_2$

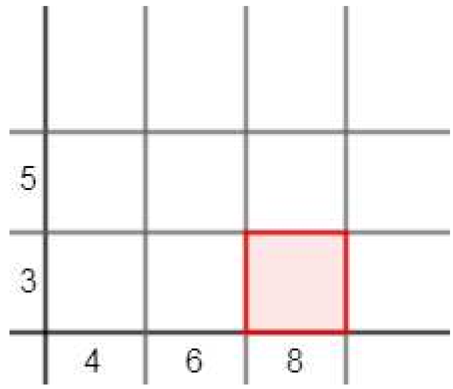


Obrázek 12: Kartézský graf kartézského součinu intervalů $C_1 \times C_2$

Oproti tabulce lze pomocí kartézského grafu zobrazit nejen kartézský součin množin izolovaných bodů, ale i kartézský součin intervalů. Postup je obdobný jako v předchozím případě a popisuje ho například Odvárko (1972). Prázdnými kroužky vyznačíme body, jež do grafu kartézského součinu nepatří. Kartézským grafem kartézského součinu $C_1 \times C_2$ (Obrázek 12), kde $C_1 = \langle 4, 8)$ a $C_2 = (3, 5\rangle$, je sjednocení množiny všech vnitřních bodů vyznačeného obdélníku a množiny všech bodů části obvodu vyznačené plnou čarou.

Šachovnicový graf

Pisklák (2004) dále zakresluje kartézský součin pomocí šachovnicového grafu. Při znázorňování kartézského součinu $A_1 \times A_2$ pomocí šachovnicového grafu postupujeme takto: Obdobně jako u kartézského grafu zvolíme dvě navzájem kolmé přímky, např. vodorovnou a svislou. Navíc označíme délku jednotkové úsečky. Prvkům množiny A_1 přiřadíme jednotkové úsečky na vodorovné přímce a jednotlivým prvkům množiny A_2 přiřadíme jednotkové úsečky na svislé přímce. Každým vyznačeným bodem vedeme kolmici na přímku, na níž leží, a dostáváme tak čtvercovou síť. Každé okno sítě je pak obrazem uspořádané dvojice $[x,\ y] \in A_1 \times A_2$. Šachovnicový graf pro kartézský součin $A_1 \times A_2$ ukazuje Obrázek 13.

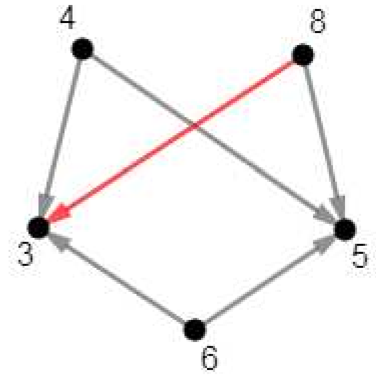


Obrázek 13: Šachovnicový graf kartézského součinu $A_1 \times A_2$

Uzlový graf

Pisklák (2004) dále využívá pro znázornění kartézského součinu uzlový graf. Znázornění kartézského součinu $A_1 \times A_2$ pomocí uzlového grafu provedeme takto: Výčtem prvků určíme množinu $A_1 \cup A_2$ a každý její prvek znázorníme v rovině jako kroužek (*uzel*). Jednotlivé uspořádané dvojice $[x, y] \in A_1 \times A_2$ znázorníme tímto způsobem: Kolem uzlu vyznačíme *smyčku*, právě když se první složka uspořádané dvojice rovná její druhé složce.

Jsou-li prvky uspořádané dvojice různé, vyznačíme úsečku se šipkou směřující od uzlu x k uzlu y. Tyto úsečky nazýváme *orientované hrany*. Uzlový graf kartézského součinu $A_1 \times A_2$ znázorňuje Obrázek 14.



Obrázek 14: Uzlový graf kartézského součinu $A_1 \times A_2$

V uzlovém grafu není na první pohled zřejmé, jaké prvky náležely které původní množině. Jeho využití je tedy vhodné spíše pro kartézské součiny v jedné množině, tedy například $A_1 \times A_1$.

Pro porovnání shrnujeme jednotlivé typy znázornění kartézského součinu: V kartézském grafu jsou prvky množin A_1 a A_2 zobrazeny jako body dvou kolmých přímek, obrazy prvků množiny $A_1 \times A_2$ jsou pak body roviny. V šachovnicovém grafu náleží obrazům prvkům množin A_1 a A_2 vždy jednotková úsečka na příslušné přímce, obrazům prvků množiny $A_1 \times A_2$ pak okno v rovině. V uzlovém grafu jsou prvky množin A_1 a A_2 znázorněny uzly, prvky množiny $A_1 \times A_2$ pak značí orientované hrany a smyčky.

2 Relace

Intuitivně lze vnímat pojem relace (z latinského *relatio* = vztah) jako vztah či závislost prvků množin. Formální definice pak zní takto:

Definice 11. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$ nazveme *binární relací* (stručně „*relací*") *mezi množinou* A *a množinou* B (stručně „*relací mezi* A *a* B") (Odvárko, 1972, str. 11).

Z předchozí definice a znalosti kartézského součinu tedy plyne, že relace je množina uspořádaných dvojic. Matoušek a Nešetřil (2009) zapisují tvrzení $[x, y] \in R$ (*uspořádaná dvojice* $[x, y]$ *náleží relaci* R) jako xRy a říkají, že x *je v relaci s* y. Uvedené značení budeme využívat i pro účely této bakalářské práce.

Množina prvních prvků a množina druhých prvků uspořádaných dvojic náležejících dané relaci jsou množiny, které mají svůj vlastní název a značení. Uvedeme je v následující definici.

Definice 12. Nechť R je libovolná relace mezi A a B. Množinu všech takových prvků $x \in A$, ke každému z nichž existuje aspoň jeden prvek $y \in B$ tak, že xRy, nazveme *prvním oborem relace* R; budeme ho označovat $O_1(R)$. Množinu všech takových prvků $y \in B$, ke každému z nichž existuje aspoň jeden prvek $x \in A$ tak, že xRy, nazveme *druhým oborem relace* R; budeme ho označovat $O_2(R)$ (Odvárko, 1972, str. 24).

Odvárko (1972) také říká, že jelikož je relace množinou, může být obdobně jako množina dána buď výčtem prvků, nebo jako obor pravdivosti výrokové formy o dvou proměnných v množině $A \times B$ (tedy společnou vlastností všech prvků).

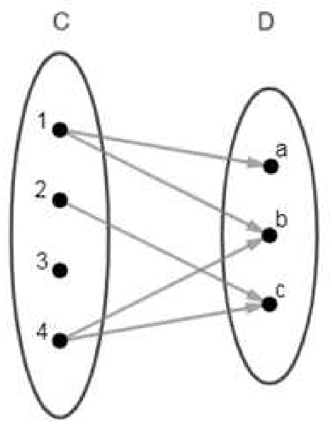
Obdobně jako u množin pak lze mezi relacemi definovat vztah *být podmnožinou*.

Definice 13. Říkáme, že *relace* R *je obsažena v relaci* S (relace R *je podmnožinou* (částí) relace S) a píšeme $R \subseteq S$, jestliže množina R je podmnožinou množiny S (R i S jsou podmnožinami kartézského součinu $A \times B$). Tedy $R \subseteq S$, jestliže množina R všech dvojic $[x, y]$, pro něž platí xRy, je částí množiny S všech dvojic $[x, y]$, pro něž platí xSy. Jestliže $R \subseteq S$ a zároveň $R \neq S$, pak píšeme $R \subset S$ a říkáme, že *relace* R *je vlastní podmnožinou (vlastní částí) relace* S (Šrejder, 1978, str. 47).

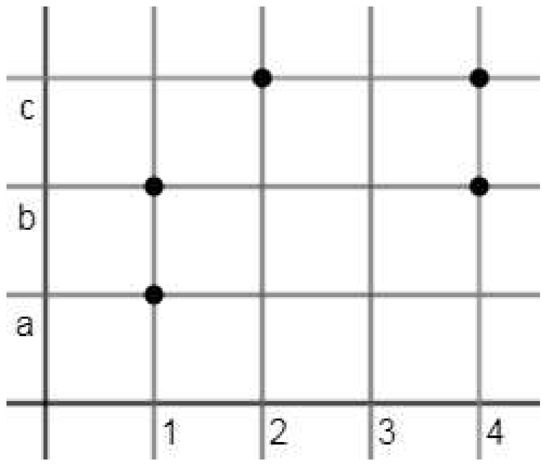
2.1 Grafické znázornění relací

Jelikož je relace podmnožinou kartézského součinu, lze ji obdobně jako kartézský součin znázornit i graficky. Matoušek a Nešetřil (2009) zakreslují relace pomocí znázornění množin z kapitoly 1.1 a přidaných šipek určujících uspořádanou dvojici. Relaci $T = \{[1, a], [1, b], [2, c], [4, b], [4, c]\}$ mezi množinami $C = \{1, 2, 3, 4\}$ a $D = \{a, b, c\}$ znázorňuje tímto způsobem Obrázek 15. Z obrázku je zřejmé, že $O_1(T) = \{1, 2, 4\}$ a $O_2(T) = \{\mathrm{a, b, c}\} = \mathrm{D}$ – tedy do množiny $O_1(T)$ náleží ty prvky, ze kterých vychází šipka, a množina $O_2(T)$ obsahuje ty prvky, do kterých šipka vede.

Odvárko (1972) zobrazuje relace mezi množinami pomocí kartézského grafu. Obrázek 16 znázorňuje tímto způsobem relaci T mezi množinami C a D uvedenou výše.



Obrázek 15: Relace *T* mezi množinami *C* a *D*



Obrázek 16: Kartézský graf relace *T* mezi množinami *C* a *D*

2.2 Operace mezi relacemi

Jelikož jsou relace množiny uspořádaných dvojic, lze mezi nimi provádět operace obdobně jako mezi množinami. Jednou z těchto operací je *průnik*.

Definice 14. Mějme dvě relace R a S. Každé z nich odpovídá nějaká množina uspořádaných dvojic (jde o podmnožiny $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq A \times B$). *Průnikem* $R \cap S$ *relací* R a S nazýváme relaci, která je průnikem podmnožin $R \cap S$ kartézského součinu $A \times B$. Přiřazení $x(R \cap S)y$ […] zřejmě platí, právě když platí zároveň obě přiřazení xRy a xSy (Šrejder, 1978, str. 47).

Další operací mezi relacemi je *sjednocení*.

Definice 15. *Sjednocením* $R \cup S$ *relací* R a S nazýváme relaci, která je sjednocením podmnožin R a S kartézského součinu $A \times B$. Přiřazení $x(R \cup S)y$ zřejmě platí, právě když platí aspoň jedno přiřazení xRy a xSy (Šrejder, 1978, str. 47).

Obdobně jako u množin můžeme definovat i doplněk, neboli *doplňkovou relaci*.

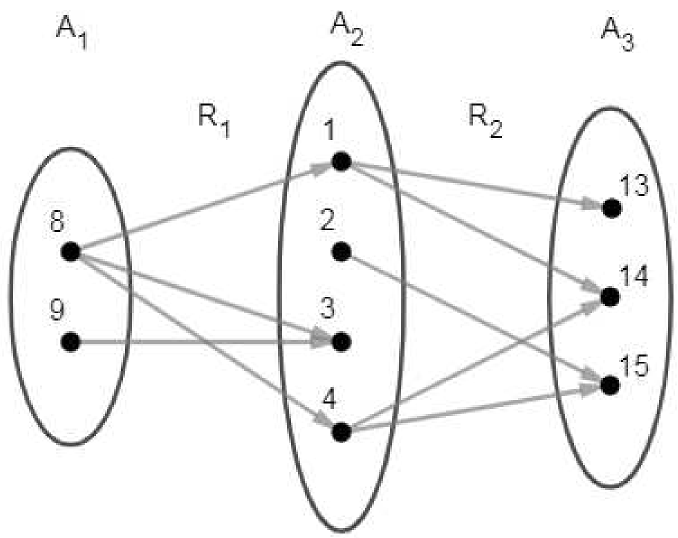
Definice 16. Množina R', jež je doplňkem množiny R vzhledem k množině $A \times B$, je podmnožinou $A \times B$. Nazývejme R' *doplňkovou relací k relaci* R (*vzhledem k* $A \times B$) (Odvárko, 1972, str. 27).

Průnik, sjednocení i doplněk jsou pojmy již známé z kapitoly množiny. Pro relace definujeme i operace nové. První z nich je *inverzní relace*.

Definice 17. *Inverzní relace* k relaci R je relace označená R^{-1}, jež je tvořena všemi uspořádanými dvojicemi $[y, x]$, pro které platí, že dvojice $[x, y]$ přísluší relaci R. Pomocí symbolů můžeme zapsat: $R^{-1} = \{[y, x]: xRy\}$ (Jelínek, 1974, str. 44).

Je zřejmé, že pro obory inverzní relace platí: $O_1(R^{-1}) = O_2(R)$ a $O_2(R^{-1}) = O_1(R)$.

Další operací definovanou nově pro relace je *skládání relací*.



Obrázek 17: Skládání relací $R_1 \circ R_2$

Definice 18. Nechť A, B, C jsou množiny, $R \subseteq A \times B$ nějaká relace mezi A a B a $S \subseteq B \times C$ relace mezi B a C. *Složením relací* R a S nazveme relaci $T \subseteq A \times C$ definovanou následovně: aTc (pro $a \in A$, $c \in C$) platí právě tehdy, když existuje nějaké $b \in B$ takové, že aRb a bSc. Složení relací R a S se značí zpravidla $R \circ S$ (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 38).[2]

Obrázek 17 zobrazuje způsobem Matouška a Nešetřila (2009) složení $R_1 \circ R_2$ relace $R_1 = \{[8,1],[8,3],[8,4],[9,3]\}$ mezi množinami $A_1 = \{8,9\}$, $A_2 = \{1,2,3,4\}$ a relace $R_2 = \{[1,13],[1,14],[2,15],[4,14],[4,15]\}$ mezi množinami A_2 a $A_3 = \{13,14,15\}$. Z obrázku je zřejmé, že výsledná relace $R_1 \circ R_2$ obsahuje dvojice $[8,13]$, $[8,14]$ a $[8,15]$.

Další operací, jež lze na relaci aplikovat, je *tranzitivní uzávěr*.

Definice 19. Je-li R nějaká relace v množině A, pak *tranzitivní uzávěr* $\hat{R}$ *v množině* A je definován takto: Přiřazení $x\hat{R}$y platí, jestliže existuje taková konečná posloupnost prvků množiny A: $z_0 = x$, z_1, …, $z_n = y$, že pro všechny sousední členy této posloupnosti platí přiřazení z_0Rz_1, z_1Rz_2, …, $z_{n-1}Rz_n$. Speciálně, jestliže $n = 1$, máme $z_0 = x$ a $z_1 =$ y; existuje tedy přiřazení xRy. To znamená, že jestliže platí xRy neboli z_0Rz_1, pak také platí přiřazení $x\hat{R}$y. Tuto skutečnost lze napsat ve tvaru inkluze $R \subseteq \hat{R}$. Jestliže $n = 2$, pak existuje takový prvek z_1, že platí zároveň dvě přiřazení xRz_1 a z_1Ry, tj. platí $x(R \circ R)y$. Jestliže $n = 3$, pak existují takové prvky z_1 a z_2, že platí zároveň přiřazení xRz_1, z_1Rz_2, z_2Ry, tj. platí $x(R \circ R \circ R)y$. Budeme-li pokračovat v těchto úvahách, pak zapíšeme-li přiřazení $x(R \circ R \circ \ldots \circ R)y$ v stručném tvaru xR^ny pro určité přirozené číslo n, dojdeme k této nutné, ale i postačující podmínce: Přiřazení $x\hat{R}$y platí, právě když existuje takové přirozené číslo n, že platí xR^ny. Pomocí operace sjednocení lze tuto skutečnost zapsat ve tvaru $\hat{R} = R \cup R^2 \cup \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$ (Šrejder, 1978, str. 50).

Hlubší význam tranzitivního uzávěru se objasní v následující kapitole.

[2] Šrejder (1978) používá pro skládání relací název *násobení* a značí jej *RS*. Pro účely této bakalářské práce se budeme držet zavedeného názvu *skládání* a značení *R* ∘ *S*.

2.3 Relace v množině

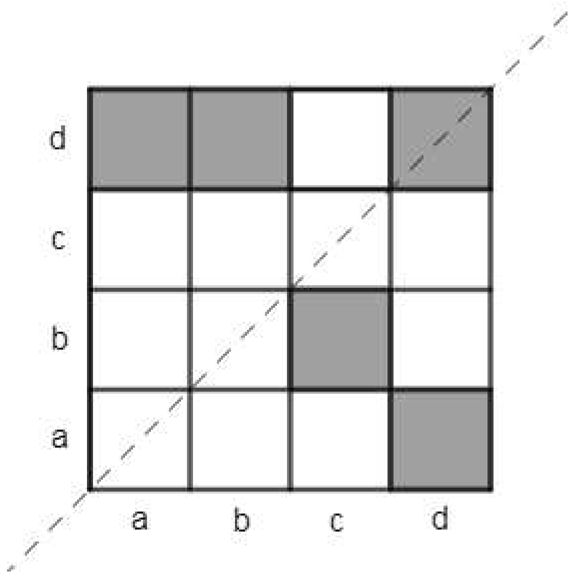
Specifickým případem relací jsou *relace v množině*.

Definice 20. *Relací R v množině A* rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times A$ (Kästner & Göthner, 1986, str. 55). [3]

Relaci v množině lze tedy definovat obdobně jako *relaci mezi množinami* (Definice 11) s tím rozdílem, že se množiny A a B rovnají.

Relace v množině lze taktéž znázornit i graficky. Matoušek a Nešetřil (2009) uvádějí tři způsoby grafického znázornění relace v množině, a to *šachovnicovým grafem*[4], *maticí sousednosti* nebo *uzlovým grafem*. Uvedeme tyto způsoby na příkladu relace $S = \{[a,d],[b,d],[c,b],[d,a],[d,d]\}$ v množině $Y = \{a,b,c,d\}$.

Při znázornění šachovnicovým grafem značí jednotlivá pole uspořádané dvojice kartézského součinu a vybarvená pole pak odpovídají dvojicím náležejícím do relace S (Obrázek 18).



Obrázek 18: Šachovnicový graf relace *S*

[3] Jiní autoři, například Matoušek a Nešetřil (2009), používají pro tento typ relace označení *relace na množině*. Pro účely této bakalářské práce se ale budeme držet definovaného pojmu *relace v množině*.
[4] Matoušek a Nešetřil (2009) používají pro toto znázornění relací pojem *tabulka*, ten má ale v této práci jiný význam. Proto přejímáme z kapitoly 1.3.1 pojem *šachovnicový graf*.

Dalším způsobem znázornění relace v množině je *matice sousednosti*.

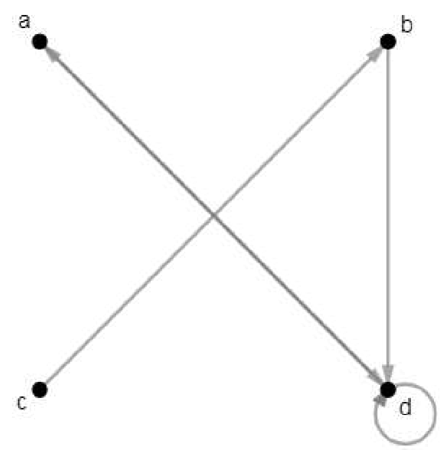
Definice 21. Matice je obdélníková tabulka čísel. […] Matice typu $m \times n$ má m řádků a n sloupců. Prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice zvané M se obvykle označuje m_{ij} (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 399).

Relaci R v n-prvkové množině $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ zobrazuje *matice sousednosti* $M = (m_{ij})$ tvaru $n \times n$ tak, že $m_{ij} = 1$ pokud $x_i R x_j$, a $m_{ij} = 0$ pokud x_i není v relaci R s x_j. Obrázek 19 zobrazuje matici sousednosti relace S.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 19: Matice sousednosti relace *S*

Zobrazení relace S pomocí uzlového grafu (Obrázek 20) je obdobné jako při znázornění kartézského součinu s tím rozdílem, že orientované hrany značí pouze uspořádané dvojice náležející relaci S. Smyčka značí prvek, který je v relaci sám s sebou. Oboustranná orientovaná hrana pak značí dvojici prvků, kde je první prvek v relaci s druhým prvkem i druhý prvek v relaci s prvním prvkem.



Obrázek 20: Uzlový graf relace *S*

Grafické znázornění relací je nejen přehledné, ale také při vhodném užití napomáhá při určování vlastností relace v množině.

2.3.1 Vlastnosti relace v množině

Relace v množině mohou mít určité vlastnosti, které definujeme v této kapitole. První z těchto vlastností je *reflexivnost*.

Definice 22. Relace R v A se nazývá *reflexivní*, právě když pro všechna $x \in A$ platí xRx (Kästner & Göthner, 1986, str. 63).

Tato definice lze zapsat formálně: R je *reflexivní* $\Leftrightarrow \forall x \in A: xRx$. V algebraickém zápisu je pak *reflexivní* relací taková relace R zapsaná pomocí matice sousednosti, pro níž platí: $E \subseteq R$, kde E je jednotková matice[5].

V matici sousednosti reflexivní relace tedy pro každý prvek m_{ij}, kde i = j, platí $m_{ij} = 1$ – matice má tedy na diagonále pouze 1. V uzlovém grafu lze poznat reflexivní relaci tak, že okolo každého uzlu bude smyčka. V šachovnicovém grafu reflexivní relace budou vybarvená všechna pole na diagonále.

Příkladem reflexivní relace je relace *mít stejnou barvu očí* v množině všech členů rodiny, neboť každý člen rodiny má stejnou barvu očí jako on sám, či *být shodný* v množině všech čtverců v rovině, neboť každý čtverec je shodný sám se sebou.

Další vlastností relace v množině je *antireflexivnost*.

Definice 23. Relace R se nazývá *antireflexivní*, jestliže z xRy plyne $x \neq y$, tj. v algebraickém zápisu je $R \cap E = \emptyset$ (Šrejder, 1978, str. 63).

Formálně: R je *antireflexivní* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: xRy \Rightarrow x \neq y$.

Jinak řečeno, relace je *antireflexivní*, není-li žádný její prvek v relaci sám se sebou. Takovou relací je například relace *být vyšší* v množině všech žáků třídy 6. C. Je zřejmé, že žádný z žáků nemůže být vyšší než on sám.

I tato vlastnost je na první pohled zřejmá při grafickém znázornění relace. V uzlovém grafu antireflexivní relace se nevyskytuje žádná smyčka. V šachovnicovém

[5]Jednotkovou maticí E rozumíme takovou matici $E = (e_{ij})$, kde $e_{ij} = 1$, právě když i = j, a $e_{ij} = 0$, pokud i ≠ j, tedy takovou matici, která má na diagonále pouze 1 a mimo ni pouze 0.

grafu antireflexivní relace nebude vybarveno žádné pole diagonály. Pro matici sousednosti antireflexivní relace pak platí: $m_{ij} = 0$ pro i = j, matice má tedy na diagonále pouze 0.

Následující definice popisuje další z vlastností relací, *symetrii*.

Definice 24. Relace R v A se nazývá *symetrická*, právě když pro všechna $x, y \in A$, pro něž platí xRy, je také yRx; jinak řečeno: xRy a yRx platí vždy současně (Kästner & Göthner, 1986, str. 59).

Formální přepis této definice vypadá takto: R je *symetrická* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: xRy \Rightarrow yRx$. Pro symetrickou relaci v algebraickém zápisu pak platí, že $R \subseteq R^{-1}$.

Symetrickou relaci zobrazuje šachovnicový graf symetrický podle diagonály. Pro matici sousednosti symetrické relace platí: $m_{ik} = m_{ki}$, tedy prvky souměrné podle hlavní diagonály mají stejnou hodnotu. V uzlovém grafu symetrické relace jsou všechny orientované hrany „oboustranné“, tedy šipky vedou oběma směry.

Symetrickými relacemi jsou například relace *být podobný* v množině všech trojúhelníků v rovině, *být příbuzný* v množině všech lidí, *bydlet ve stejném městě* v množině všech Čechů a podobně.

Další vlastností relace v množině je *asymetrie*.

Definice 25. Relace R v A se nazývá *asymetrická*, jestliže $R \cap R^{-1} = \emptyset$. To znamená, že ze dvou přiřazení xRy a yRx aspoň jedno neplatí (Šrejder, 1978, str. 64).

Symbolicky lze zapsat definici *asymetrické* relace takto: R je a*symetrická* $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: \neg(xRy) \vee \neg(yRx)$.

Prvky matice sousednosti asymetrické relace splňují rovnost $m_{ij}m_{ji} = 0$, tedy alespoň jeden z prvků navzájem symetrických podle hlavní diagonály je nulový. Z toho plyne, že žádný prvek na diagonále není roven 1. Asymetrickou relaci zobrazuje uzlový graf, v němž není žádná orientovaná hrana „oboustranná“, tedy vede-li šipka jedním směrem, pak nevede druhým.

Příkladem asymetrické relace je relace *být otcem* v množině všech mužů daného města. Je-li Pavel otcem Jana, jistě není zároveň Jan otcem Pavla. Zároveň není zřejmě Pavel svým vlastním otcem.

Následující definice zavádí pojem *antisymetrická* relace.

Definice 26. Relace R v A se nazývá *antisymetrická*, jestliže $R \cap R^{-1} \subseteq E$. To znamená, že obě přiřazení xRy a yRx platí zároveň jen tehdy, jestliže $x = y$ (Šrejder, 1978, str. 65).

Formálně lze definovat takto: R je *antisymetrická* $\Leftrightarrow \forall x, y \in A: (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$.

Prvky matice sousednosti antisymetrické relace splňují stejný vztah jako prvky matice sousednosti asymetrické relace, tedy $m_{ij}m_{ji} = 0$, ovšem pouze pro $i \neq j$. Na diagonále se tedy mohou vyskytovat prvky s hodnotou 1.

Typickým příkladem antisymetrické relace je například relace *být menší nebo rovno* v množině všech celých čísel.

Další vlastností relace v množině je *tranzitivita*.

Definice 27. Relace R v A se nazývá *tranzitivní*, právě když pro všechna $x, y, z \in A$, pro něž platí xRy a yRz, je také xRz; jinak řečeno: Z xRy a yRz vždy plyne xRz (Kästner & Göthner, 1986, str. 61).

Formálně lze přepsat tuto definici takto: R je *tranzitivní* $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in A$: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. Pro algebraický zápis tranzitivní relace platí: $R \circ R \subseteq R$.

Tranzitivní relací je například relace *mít stejnou barvu* v množině všech jednobarevných balónků. Pokud by ale byly balónky například dvoubarevné, relace by tranzitivní nebyla. Zeleno-modrý balónek je v relaci s modro-bílým balónkem a modro-bílý balónek je v relaci s bílo-žlutým balónkem. Není ale pravdou, že je zeleno-modrý balónek v relaci s balónkem bílo-žlutým.

Z definice tranzitivního uzávěru a tranzitivity plyne, že tranzitivní uzávěr je jakýmsi doplněním relace R o takové uspořádané dvojice, díky nimž bude nově vzniklá relace tranzitivní. Šrejder (1978) dokazuje, že rovná-li se relace R svému tranzitivnímu uzávěru $\widehat{\mathrm{R}}$, je relace R tranzitivní. Zároveň platí opačná implikace, tedy je-li relace R tranzitivní, rovná se svému tranzitivnímu uzávěru $\widehat{\mathrm{R}}$.

2.3.2 Speciální typy relací v množině

Pro některé relace mající více z již uvedených vlastností se užívá speciální názvosloví. První takovou relací je relace *tolerance*.

Definice 28. Relace R v množině A se nazývá *relace tolerance* nebo stručně *tolerance*, je-li reflexivní a symetrická. Platí-li přiřazení xRy, pak říkáme, že *prvky x a y jsou tolerantní*, nebo že *prvek x je tolerantní s prvkem y* (Šrejder, 1978, str. 110).

Zvláštním případem relace tolerance je *relace ekvivalence*.

Definice 29. Relace R v množině A se nazývá relace *ekvivalence v A*, právě když je reflexívní, symetrická a tranzitivní (Kästner & Göthner, 1986, str. 72).

Lze tedy říci, že ekvivalence je tranzitivní tolerance. Ekvivalence dělí množinu na podmnožiny – *třídy ekvivalence*.

Definice 30. Nechť R je ekvivalence v množině A, nechť x je libovolný prvek množiny A. Označme symbolem $R[x]$ množinu všech prvků y, které jsou ekvivalentní s x, tj. $R[x] = \{y; xRy\}$. Toto $R[x]$ se nazývá *třída ekvivalence R určená prvkem x* (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 47).

Ekvivalencí je například relace *mít stejnou barvu* v množině *všech jednobarevných nafukovacích míčů v tělocvičně*. Pokud bychom ale změnili množinu na množinu *všech nafukovacích míčů v tělocvičně*, relace by se stala tolerancí.

Dalším speciálním typem relace je *uspořádání*.

Definice 31. Řekneme, že relace R v A je *uspořádání v A*, jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 46).

Uspořádání splňující podmínky předchozí definice budeme nazývat *neostré (částečné) uspořádání*. *Ostrým uspořádáním* pak nazveme takovou relaci R v A, která je antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Dalším typem uspořádání je pak *lineární uspořádání*.

Definice 32. Řekneme, že relace R v A je *lineární uspořádání v A*, jestliže je to neostré uspořádání a navíc $R \cup R^{-1} = A \times A$ (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 47).

2.4 Zobrazení, funkce

Speciálním případem relace je *zobrazení*.

Definice 33. Nechť A, B jsou libovolné množiny. Relace U mezi A a B se nazývá *zobrazení z množiny A do množiny B* (stručně *z A do B*), právě když ke každému $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že xUy. Je-li speciálně $A = B$, nazýváme zobrazení z A do B *zobrazení v množině A* (stručně *zobrazení v A*) (Odvárko, 1972, str. 32)**.**

Pro zobrazení U mezi množinou A a množinou B budeme využívat značení $U: A \rightarrow B$. Přiřazení xUy pomocí zobrazení U budeme značit $U(x) = y$.

Jelikož je každé zobrazení relací, lze obdobně jako u relace definovat *inverzi* a *obory zobrazení*.

Definice 34. Je-li inverzní relace U^{-1} k zobrazení U zobrazením, budeme U^{-1} nazývat *inverzním zobrazením* k zobrazení U (Odvárko, 1972, str. 45).

Definice 35. Je-li relace U mezi A a B zobrazení z A do B, budeme $O_1(U)$ nazývat *prvním oborem zobrazení U*, $O_2(U)$ *druhým oborem zobrazení U* (Odvárko, 1972, str. 32).

Mějme uspořádanou dvojici $[a, b]$, které je prvkem zobrazení U. Odvárko (1972) zavádí pro první složku této uspořádané dvojice pojem *vzor prvku* a pro druhou složku pojem *obraz prvku a.* Pro obory zobrazení poté využívá názvy *množina všech vzorů* a *množina všech obrazů*.

Nyní se zaměříme na tři typy zobrazení, které jsou definované svými specifickými vlastnostmi. Jsou to *zobrazení na*, *prosté zobrazení* a *vzájemné jednoznačné zobrazení*.

Definice 36. Zobrazení $U: A \rightarrow B$ nazýváme *zobrazení na*, jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $U(x) = y$ (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 42).

Definice 37. Zobrazení U z A do B nazveme *prosté zobrazení z A do B*, právě když platí: jsou-li $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ dva libovolné prvky z U a zároveň je $a_1 \neq a_2$, potom je $b_1 \neq b_2$ (Odvárko, 1972, str. 38).

Definice 38. Zobrazení $U: A \to B$ nazýváme *vzájemně jednoznačné zobrazení*, jestliže U je *prosté* a *na* (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 42).[6]

Z definice inverzního a prostého zobrazení plyne, že inverzní relace U^{-1} k prostému zobrazení U z A do B je také zobrazením (z B do A).

Využijeme-li způsob znázornění relací z kapitoly 2.1 dle Matouška a Nešetřila (2009) pro zobrazení $U: A \to B$, je zřejmé, že u zobrazení *na* vede do každého $y \in B$ alespoň jedna šipka a u *prostého* zobrazení vede do každého $y \in B$ maximálně jedna šipka. Pro zobrazení vzájemně jednoznačné pak tedy musí platit, že do každého $y \in B$ vede právě jedna šipka.

Obdobně jako relace lze zobrazení *skládat*.

Definice 39. Jsou-li $U: A \to B$ a $V: B \to C$ zobrazení, potom můžeme definovat nové zobrazení $W: A \to C$ předpisem $W(x) = V(U(x))$ pro každé $x \in A$. Zobrazení W se nazývá *složení zobrazení* U a V a značí se $U \circ V$. Tedy platí $(U \circ V)(x) = V(U(x))$ pro každý prvek $x \in A$ (Matoušek & Nešetřil, 2009, stránky 41 - 42).[7]

Často využívanou a důležitou množinou je množina všech reálných čísel. Zobrazení v množině všech reálných čísel má specifický název – *funkce*.

Definice 40. Každé zobrazení v množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$ se nazývá *funkce* jedné proměnné (stručně „*funkce*") (Odvárko, 1972, str. 46).[8]

Dle Odvárka (1972) je tedy funkce f podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, přičemž ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje nejvýše jedno $y \in \mathbb{R}$ takové, že $[x, y] \in f$.

Funkce budeme značit malými písmeny f, g, h. Značení $[x, y] \in f$ nahradíme obdobně jako u zobrazení značením stejného významu $f(x) = y$. Je-li f funkce, nazývá se první obor zobrazení f *definičním oborem* funkce f (značíme $D(f)$) a druhý obor zobrazení f *oborem hodnot* funkce f (značíme $H(f)$).

---

[6] Zobrazení na, prosté zobrazení a vzájemně jednoznačné zobrazení se někdy nazývají *surjekce*, *injekce* a *bijekce* v uvedeném pořadí.
[7] Skládání zobrazení U a V se v některých zdrojích značí $V \circ U$. V této práci ale pro přehlednost a jednotnost ponecháme značení zavedené již při skládání relací, tedy $U \circ V$.
[8] Někteří autoři, například Matoušek a Nešetřil (2009), vnímají pojmy *zobrazení* a *funkce* jako synonyma. V této práci tyto pojmy ale rozlišujeme.

Protože je každá funkce zobrazením, definujeme i zde pojmy *na*, *prostá* a *vzájemně jednoznačná funkce*.

Definice 41. Funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme *funkce na*, jestliže pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = y$ (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 42).

Definice 42. Funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme *prostá funkce*, jestliže pro $x \neq y$ je $f(x) \neq f(y)$ (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 42).

Definice 43. Funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazýváme *vzájemně jednoznačná funkce*, jestliže f je prostá a na (Matoušek & Nešetřil, 2009, str. 42).

Funkce na, *prostá* a *vzájemně jednoznačná* jsou obdobami zobrazení, ale v množině reálných čísel.

Speciálním případem funkce je *identická funkce*.

Definice 44. Funkce, která přiřazuje každému prvku x jako obraz právě prvek x, se nazývá *identická funkce* (Jelínek, 1974, str. 86).

Obdobně jako u zobrazení můžeme definovat *inverzní funkci* s tím rozdílem, že se pohybujeme pouze v množině reálných čísel. Funkce lze také obdobně jako zobrazení skládat.

3 Relace kolem nás

Lidé se s relacemi setkávají již od útlého dětství. Pomocí relací můžeme popsat naše osobní vztahy, vztahy v zaměstnání i pravidla při hraní her. Již ve velmi nízkém věku zvládne dítě například splnit úkol: roztřiďte hrací kostky LEGO tak, aby spolu byly vždy jen kostky stejné barvy. Tento počin by však mohl být zaveden také jako relace *R* v množině všech kostek z jedné hrací sady LEGO: jedna kostka je v relaci R s druhou kostkou právě když mají tyto dvě kostky stejnou barvu, neboli $xRy \Leftrightarrow$*x má stejnou barvu jako y*. Je zřejmé, že je tato relace *reflexivní*, neboť každá kostka má stejnou barvu sama se sebou. Aniž by dítě znalo pojem *symetrie*, uvědomuje si, že má-li jedna kostka stejnou barvu jako druhá kostka, pak i druhá kostka má stejnou barvu jako první kostka. Zároveň existuje-li třetí kostka mající stejnou barvu jako druhá, pak má jistě i stejnou barvu jako první – platí zde tedy *tranzitivita*. Relace R zřejmě *ekvivalencí* a dělí množinu na *třídy ekvivalence*. I bez této znalosti dítě ví, že bude-li třídit kostky dle barev, vzniknou mu jednotlivé odlišně barevné hromádky kostek.

Zaměřme se nyní na další příklady relací, tentokrát v množině lidí.

3.1 Relace a lidé

Mějme relaci *mít rád* v množině všech lidí planety Země. Tato relace není reflexivní, neboť může existovat člověk, který nemá rád sám sebe. Relace *mít rád* není v množině všech lidí planety Země symetrická, protože má-li jeden člověk rád druhého, druhý nemusí mít rád prvního. Tato relace není v dané množině ani tranzitivní, neboť má-li první člověk rád druhého a druhý třetího, nemusí mít první rád třetího. Bezesporu ale může existovat i množina, v níž tato relace všechny tyto vlastnosti má.

V množině lidí planety Země lze definovat mnoho relací, které jsou ekvivalencemi. Například mějme relaci *být narozen ve stejném znamení zvěrokruhu*. Je zřejmě reflexivní, neboť každý člověk je ve stejném znamení sám se sebou. Jistě je také symetrická, neboť je-li jeden člověk narozen ve stejném znamení jako druhý, pak je druhý ve stejném znamení s prvním. Obdobně je evidentní, že pro tuto relaci v dané množině platí i tranzitivita. Protože je tato relace ekvivalencí, dělí množinu všech lidí planety Země na třídy ekvivalence. Těchto tříd bude konkrétně dvanáct, neboť existuje dvanáct různých znamení zvěrokruhu. V jedné třídě pak budou všichni lidé narození ve stejném znamení.

Obdobně by množinu všech lidí na planetě Zemi rozdělily na třídy ekvivalence tyto relace: relace R_1 *bydlet ve stejném městě*, relace R_2 *bydlet ve stejné čtvrti*, relace R_3 *bydlet ve stejném domě*, relace R_4 *bydlet ve stejném bytě*. Zřejmě platí, že relace R_2 je podmnožinou relace R_1, neboť všichni lidé bydlící ve stejné čtvrti jistě bydlí i ve stejném městě. Obdobně je relace R_3 podmnožinou relace R_2, neboť všichni obyvatelé jednoho domu bydlí ve stejné čtvrti. Také platí, že relace R_4 je podmnožinou relace R_3, neboť obyvatelé jednoho bytu obývají stejný dům. Pro tyto relace tedy platí: $R_4 \subseteq R_3 \subseteq R_2 \subseteq R_1$.

Další ekvivalencí v množině všech lidí planety Země je relace *mít stejné první křestní jméno*. Tato relace je zřejmě reflexivní, symetrická i tranzitivní a dělí danou množinu na třídy ekvivalence. I drobná nuance v zadání může ale vlastnosti této relace změnit. Stačilo by ze zadání vypustit slovo *první* a vznikla by relace *mít stejné křestní jméno* v množině všech lidí planety Země. Ta je sice také reflexivní a symetrická. Existují ale i lidé mající dvě či více křestních jmen. Tato relace proto není tranzitivní, neboť například Anna Marie je v relaci s Annou Lucií, Anna Lucie je v relaci s Lucií Hanou, ale Anna Marie a Lucie Hana žádné křestní jméno stejné nemají. Upravená relace je tedy tolerancí.

Stejně jako ekvivalence, vyskytují se i tolerance hojně okolo nás. Zůstaňme v množině všech lidí planety Země. V této množině definujme relaci *mít stejné zaměstnání*. Na první pohled by se mohlo zdát, že se jedná o ekvivalenci. Relace je zřejmě reflexivní i symetrická. Tranzitivní by byla ovšem pouze ve chvíli, kdy by každý člověk na planetě Zemi měl pouze jedno zaměstnání. Protože tomu tak ale není, jedná se o toleranci.

Obdobná situace nastane při zavedení relace *mít na sobě čepici stejné barvy* v množině všech lidí planety Země. Relace je zřejmě reflexivní i symetrická. Tranzitivita ale neplatí, neboť čepice může být i vícebarevná.

V množině všech lidí planety Země a jejích podmnožinách lze definovat také mnoho relací, které jsou uspořádáním. Jako první uvedeme relaci *být nadřízeným* v množině všech zaměstnanců jedné konkrétní firmy. Tato relace není reflexivní, neboť neplatí, že všichni lidé nejsou sami sobě nadřízenými. Daná relace je dokonce antireflexivní, neboť neexistuje žádný takový člověk, který by byl sám sobě nadřízeným. Relace je asymetrická, neboť je-li jeden člověk nadřízeným druhého, pak neplatí, že je druhý člověk nadřízeným prvního. Relace *být nadřízeným* je tranzitivní, neboť je-li jeden člověk nadřízeným druhého a druhý člověk nadřízeným třetího, pak platí, že je první člověk nadřízeným třetího. Relace *být nadřízeným* je tedy ostrým uspořádáním. Relace *být nadřízeným nebo mít stejné postavení* by ale byla uspořádáním neostrým.

Dalším neostrým uspořádáním v množině všech lidí na planetě Zemi je relace *mít vyšší nebo stejný plat*. Relace je reflexivní, neboť každý člověk má stejný plat jako on sám, což povoluje druhá část zavedení této relace. *Mít vyšší nebo stejný plat* ale není symetrickou relací, neboť ne všichni lidé mají stejný plat a neplatí, že má-li jeden člověk vyšší plat než druhý, pak má i druhý člověk vyšší plat než první. Relace je tedy antisymetrická, neboť dva lidé jsou spolu v relaci, právě když mají stejně vysoký plat. Relace je tranzitivní, neboť má-li jeden člověk vyšší plat než druhý a druhý člověk vyšší plat než třetí, pak má první člověk vyšší plat než třetí člověk. Tato relace je tedy neostrým uspořádáním, stejně jako relace *být starší nebo stejně starý*, *být vyšší nebo stejně vysoký* apod.

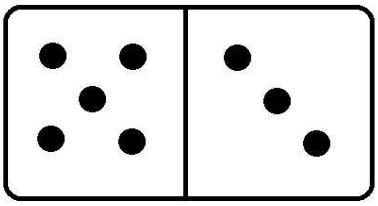
Relacemi je naplněn i svět her. Nyní uvedeme několik z nich.

3.2 Relace a hry

Hry jsou definované pravidly, která hráče omezují a navádějí v jejich herních krocích. Mnoho z herních pravidel lze definovat jako relace mezi jednotlivými herními komponenty. Začneme vysvětlením na hře *Prší*.

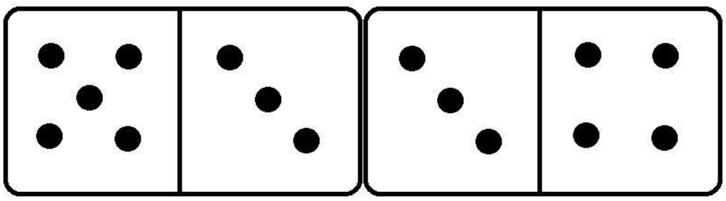
Hra *Prší* se hraje s balíčkem 32 karet. Existuje osm *hodnot* karet, každá ve čtyřech různých *barvách*. Pravidla hry *Prší* se obdobně jako u jakýchkoli jiných her mohou drobně lišit. Ve všech variantách hry se ale vyskytuje toto základní pravidlo: hráč, který je na tahu, může hrát vždy pouze takovou kartu, která má buď stejnou barvu nebo stejnou hodnotu jako karta na vrchu odkládacího balíčku. Tedy můžeme definovat relaci R v množině všech karet z balíčku: $xRy \Leftrightarrow x$ má shodnou hodnotu nebo stejnou barvu s y. Pomineme-li tedy ostatní pravidla hry, platí, že hráč, který je na tahu, může hrát vždy pouze takovou kartu, která je v relaci R s kartou na vrchu odkládacího balíčku. U této relace můžeme ověřit různé vlastnosti. Je zřejmé, že relace R je *symetrická*, neboť pokud můžeme hrát například *srdcovou desítku* na *srdcovou osmičku*, pak platí, že i *srdcovou osmičku* lze hrát na *srdcovou desítku*. Ačkoli ale můžeme na *srdcovou osmičku* hrát *srdcovou desítku* a na *srdcovou desítku* lze jistě hrát *kárová desítka*, není pravdou, že na *srdcovou osmičku* lze hrát *károvou desítku*. Relace R tedy zřejmě není *tranzitivní*, což plyne i z užití slova „nebo“ při zavedení pravidla. Jedná se tedy o toleranci.

Další hrou, jejíž pravidla využívají vlastností relací, je *Domino*. Při této hře mají hráči k dispozici herní kameny. Každý herní kámen (pomineme-li speciální kameny s prázdnými poli, tzv. Žolíky) má na sobě kombinaci dvou čísel symbolizovaných daným počtem teček. Například kámen s čísly (5, 3) symbolizuje Obrázek 21.



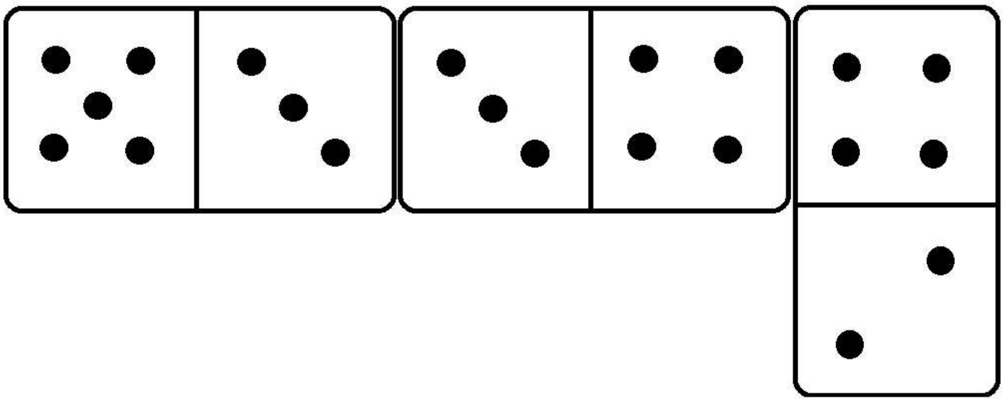
Obrázek 21: Domino; kámen (5, 3)

Úkolem hráčů je přikládat kameny k sobě do „hada“ tak, aby u sebe byly shodné hodnoty. Tedy například ke kameni s čísly (5, 3) je možné přiložit kámen s čísly (3, 4) (Obrázek 22). Definujme množinu M všech herních kamenů hrací sady *Domino* pomocí neuspořádaných dvojic čísel: $M = \{(a, b);\ a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Můžeme říci, že dva kameny lze k sobě přiložit, pokud jsou spolu v relaci S definované v množině M: $(a, b)S(\mathrm{c}, \mathrm{d}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a = c) \vee (a = d) \vee (b = c) \vee (b = d)$, neboli jeden kámen je v relaci S s druhým, právě když alespoň jedna z hodnot na prvním kameni je shodná alespoň s jednou hodnotou na druhém kameni.

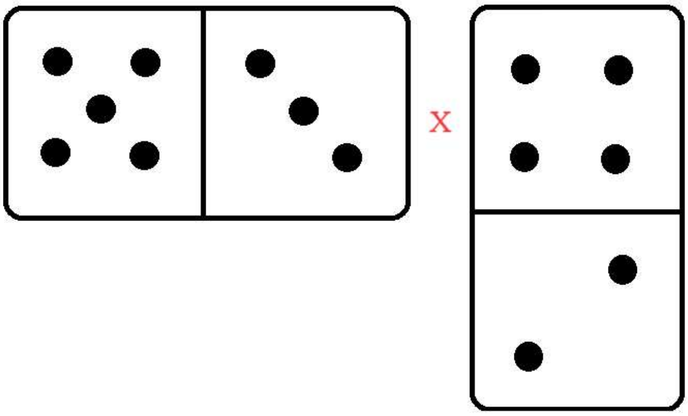


Obrázek 22: Domino; kameny (5, 3) a (3, 4)

Relace *S* je *reflexivní*, tedy libovolný kámen je v relaci sám se sebou (V jedné herní sadě se ale vyskytuje vždy pouze jeden kámen s konkrétní kombinací dvou čísel.) Relace *S* je *symetrická*, neboť pokud lze ke kameni s hodnotami (5, 3) přiložit kámen s hodnotami (3, 4), pak lze zřejmě přiložit ke kameni (3, 4) kámen s hodnotami (5, 3), neboť hodnota 3 je u obou kamenů shodná. Relace *S* ale není *tranzitivní*. Pokud například lze ke kameni (5, 3) přiložit kámen (3, 4) a ke kameni (3, 4) přiložit kámen (4, 2) (Obrázek 23), pak nemusí platit, že ke kameni (5, 3) lze přiložit kámen (4, 2) (Obrázek 24). Relace *S* je tolerance.



Obrázek 23: Domino; kameny (5, 3) a (3, 4) a (4, 2)

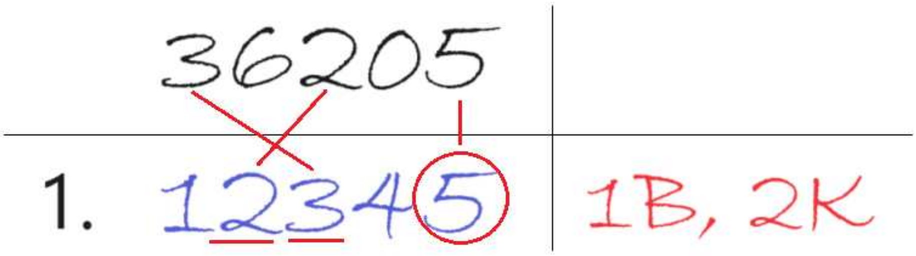


Obrázek 24: Domino; kameny (5, 3) a (4, 2)

Hráči Domina tyto vlastnosti relace *S* využívají, aniž by znali jejich teoretický základ.

U následující hry umíme relaci nejen rozpoznat, definovat a určit její vlastnosti, ale dokonce tyto znalosti využít k optimalizaci hry a zvýšení své šance na výhru. Jedná se o hru *Býci a krávy*, která je příbuznou hrou ke známější hře *Logik*.

Hru *Býci a krávy* hrají obvykle dva hráči. Každý z hráčů si na list papíru zapíše libovolné vymyšlené číslo (s předem domluveným počtem cifer, obvykle pět), přičemž se jednotlivé číslice nesmí opakovat. Hráči se střídají v tazích a cílem hry je uhodnout soupeřovo vymyšlené číslo. V prvním tahu jeden z hráčů odhadne číslo druhého hráče. Druhý hráč porovná tento tip se svým vymyšleným číslem a dá prvnímu hráči zpětnou vazbu pomocí domluvené formy informací – *býků* a *krav*. Počet *býků* značí, kolik cifer v odhadovaném čísle je správných a stejně umístěných jako v hledaném čísle. Počet *krav* značí, kolik cifer v odhadovaném čísle se vyskytuje i v čísle hledaném, ale na jiné pozici. Tedy pokud si například druhý hráč vymyslel číslo 36285 a první hráč tipoval ve svém tahu číslo 12345, indicií bude: jeden *býk* (B) a dvě *krávy* (K). Obrázek 25 zachycuje první tah uvedené partie včetně soupeřova zamýšleného čísla. Pro přehlednost jsou v něm *býci* vyznačeni zakroužkováním a *krávy* podtržením.



Obrázek 25: Býci a krávy; 1. tah

Častou strategií při této hře je náhodné hádání a obměňování čísel. To je poněkud zdlouhavé, neboť kombinací je mnoho. Dalším způsobem, se kterým se při řešení této hry obvykle setkáváme, je postupné zjišťování jednotlivých číslic. Ukázku celé uvedené partie (ze strany jednoho hráče) ukazuje Obrázek 26. Zde popíšeme část možného myšlenkového pochodu daného hráče:

- <u>1. krok</u>: Chceme zjistit, která z číslic je *býk*. Proto prohodíme libovolné dvě číslice, například 4 a 5.
- <u>2. krok</u>: Býk je zřejmě jedna z číslic 4 a 5, neboť jejich prohozením *býk* zmizel. Nyní chceme přijít na to, která z čísel jsou *krávy*. Proto zkusíme jednu z číslic nahradit novou (ještě nepoužitou) číslicí, například místo číslice 1 dáme číslici 6.
- <u>3. krok</u>: Po nahrazení číslice 1 číslicí 6 přibyla jedna *kráva*. Je tedy zřejmé, že číslice 1 se v hledaném čísle vůbec nenachází. Naopak číslice 6 jistě ano.

Pokračujeme tedy ve zjišťování *krav* a zkusíme další z číslic nahradit novou (ještě nepoužitou) číslicí. Například číslici 2 číslicí 7.

- <u>4. krok</u>: Po nahrazení číslice 2 číslicí 7 ubyla jedna *kráva*. Je tedy zřejmé, že číslice 7 se v hledaném čísle nenachází, číslice 2 ano.
- Další kroky provádíme obdobně.

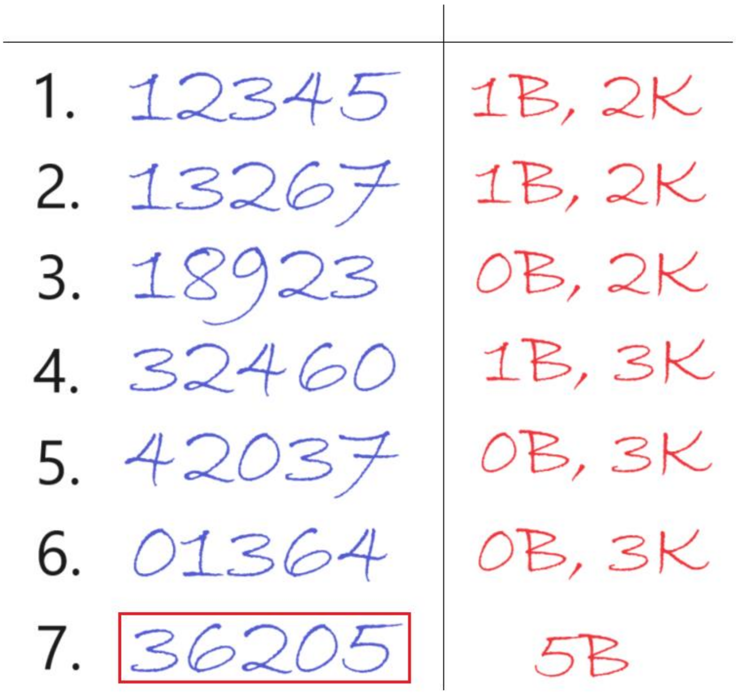
Podobným způsobem je možné dojít až k pěti *býkům*, tedy k hledanému číslu. Z ukázkové partie byly odstraněny mnohé překážky, a přesto trvala 10 tahů. Pokud by hráč učinil jiná rozhodnutí, celkový počet kroků by se mohl ještě značně navýšit. Například pokud bychom ve třetím kroku v rámci hledání *krav* vyměnili číslici 2 za číslici 0, počet *krav* by se nezměnil. Došlo by tedy ke zmatení. Buď jsou *krávy* obě číslice, nebo ani jedna z nich. Podobných komplikací může nastat mnoho. Tento způsob řešení tedy není optimální.

1.	12345	1B, 2K
2.	12354	0B, 3K
3.	62345	1B, 3K
4.	67345	1B, 2K
5.	62845	1B, 2K
6.	62395	1B, 2K
7.	62305	2B, 3K
8.	63205	3B, 2K
9.	23605	2B, 3K
10.	$\boxed{36205}$	5B

Obrázek 26: Býci a krávy; běžná strategie hry

Uvedený herní postup jistě vede ke zdárnému odhalení soupeřova čísla, ale kvůli zmíněným komplikacím může počet kroků rapidně vzrůst. Pro efektivnější způsob řešení lze využít znalost relací a jejich vlastností.

Mějme množinu X všech pětimístných variací bez opakování tvořených prvky množiny $M = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$. V množině X zaveďme skupinu relací $T_{n,m}$, kde $n, m \in \{0,1,2,3,4,5\} \wedge (n + m) \leq 5$, následovně: $\forall x, y \in X: x\, T_{n,m}\, y \Leftrightarrow x$ má vůči y n *býků* a m *krav*. Všechny tyto relace jsou *symetrické*, neboť má-li jedna variace k druhé určitý počet *býků* a určitý počet *krav*, pak má stejný počet *býků* a stejný počet *krav* i druhá variace k první. Symetrii relací $T_{n,m}$ pak můžeme využít při optimalizaci rychlosti zjištění soupeřova čísla, a to následujícím způsobem.



Obrázek 27: Býci a krávy; strategie na základě znalosti vlastností relací

Zůstaňme u stejné hry, jejíž začátek ukazoval Obrázek 25. Po prvním kroku hry víme, že námi tipované číslo 12345 má se soupeřovým číslem 36205 společného jednoho *býka* a dvě *krávy* (tedy variace 12345 je v relaci $T_{1,2}$ s variací 36205). Také víme, že se jedná o symetrickou relaci. Pak je zřejmé, že i soupeřovo číslo má vůči našemu číslu stejný počet *býků* a *krav* (tedy variace 36205 je v relaci $T_{1,2}$ s variací 12345). Proto naším dalším tipovaným číslem musí být takové, které je v relaci $T_{1,2}$ s číslem předešlým. Řešení tímto způsobem ukazuje Obrázek 27. V každém kroku můžeme tedy hádat pouze takové číslo, které je v relacích $T_{n,m}$ se všemi předchozími tipovanými čísly. Například ve 4. tahu uvedené hry tipujeme takové číslo, které je v relaci $T_{1,2}$ s variací 12345, v relaci $T_{1,2}$ s variací 13267 a v relaci $T_{0,2}$ s variací 18923. Evidentně se pak pomocí znalosti vlastností relací snížil počet kroků nutných k uhodnutí soupeřova čísla, neboť se v každém kroku výrazně snižuje počet variací připadajících v úvahu.

Z této kapitoly vyplývá, že jsou společenské hry stejně jako svět kolem nás plné relací, které můžeme rozpoznat a definovat, ale i využít jejich znalost k usnadnění řešení daného problému.

3.3 Relace a učivo základních škol

Ačkoli obecně téma *relace* není obsahem učiva základních ani středních škol, žáci se s relacemi přirozeně setkávají a využívají jejich vlastnosti již od útlého věku. Učivo základních škol obsahuje mnoho relací nejen v matematice.

3.3.1 Relace v nematematických předmětech

Mnoho relací se vyskytuje v učivu českého jazyka. Například písmena v abecedě jsou řazena dle ostrého uspořádání, dále vyjmenovaná slova a slova jim příbuzná jsou dělena na třídy ekvivalence. Lze zavést relaci R v množině všech slov českého jazyka vyjma slov složených takovou, že dvě slova jsou spolu v relaci R, právě když mají stejný kořen. Tato relace by byla ekvivalencí. Pokud bychom ale stejnou relaci zavedli v množině všech slov českého jazyka včetně složených, jednalo by se o toleranci, neboť by nebyla splněna tranzitivita. Obdobně se například v přírodopisu dělí obratlovci na třídy na základě určitých podobností. Případné důkladnější prozkoumání nematematických předmětů ale ponecháme na čtenáři.

3.3.2 Relace v aritmetice a algebře

Jednou z prvních relací, s níž se žáci setkávají v matematice již v úvodu školní docházky, je relace *být rovno* (=). Ukažme si vlastnosti této relace v množině reálných čísel. Rovnost je v množině reálných čísel reflexivní: $\forall x \in \mathbb{R}: x = x$, neboť každé číslo se rovná samo sobě. Je také symetrická: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x = y \Rightarrow y = x$, neboť pokud se 0,5 rovná $\frac{1}{2}$, pak se $\frac{1}{2}$

rovná 0,5. Relace rovnosti je v množině všech reálných čísel i tranzitivní: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x = y \wedge\ y = z) \Rightarrow x = z$. Pokud se 0,5 rovná $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ se rovná $\frac{2}{4}$, pak se 0,5 rovná $\frac{2}{4}$. Jelikož je rovnost ekvivalencí, dělí množinu reálných čísel na třídy ekvivalence neboli disjunktní množiny takových čísel, která mají stejnou hodnotu. Například do třídy ekvivalence určené prvkem $\frac{3}{2}$ patří mimo jiné i prvky $\frac{6}{4}$; $\frac{9}{6}$; 1,5 apod. Prvků v dané třídě je nekonečně mnoho, všechny ale mají stejnou hodnotu.

Další ekvivalencí ve školní matematice je relace *být číslem opačným* ($*$) definovaná $\forall x, y \in\ \mathbb{Z}$ takto: $x * y \Leftrightarrow (x \neq 0\ \wedge x \neq y \wedge |x| = |y|) \vee (x = 0 = y)$, neboli dvě nenulová čísla jsou *navzájem opačná*, pokud se nerovnají, ale rovnají se jejich absolutní hodnoty. Číslem opačným k nule je nula. Tato relace není reflexivní, neboť například číslo 2 není číslem opačným samo k sobě. Relace *být číslem opačným* je ale symetrická, neboť pro všechna celá čísla platí: $|x| = |-x|$. Daná relace není tranzitivní, neboť platí $(-5 \neq 5 \wedge\ |-5| = |5|) \wedge (5 \neq -5 \wedge\ |5| = |-5|)$, ale z podmínek $5 \neq 5 \wedge |5| = |5|$ platí pouze jedna.

Ve školské matematice se také často setkáváme s relací *dělitelnosti* ($|$). Relace dělitelnosti je v množině celých čísel definovaná takto: $\forall x, y \in \mathbb{Z}: x|y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:\ k\ \cdot x = y$, neboli číslo x je dělitelem čísla y. Relace dělitelnost je reflexivní, protože $\forall x \in \mathbb{Z}$ platí: $x|x$, neboli každé číslo je svým vlastním dělitelem. Relace dělitelnosti ale není symetrická, neboť pro dva prvky $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y$ neplatí: $x|y \Rightarrow y|x$, neboť například číslo 5 je dělitelem čísla 15, ale neplatí, že číslo 15 je dělitelem čísla 5. Relace dělitelnosti je tranzitivní, neboť platí: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$. To můžeme dokázat takto: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: (x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: k\ \cdot x = y) \wedge (y|z \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z}: l\ \cdot y = z)$. Pak jistě existuje číslo $m \in \mathbb{Z}: k \cdot l = m\ \wedge\ m \cdot x = z$. Z toho plyne, že i číslo z je dělitelné číslem x. Vysvětlíme ještě, že je tato relace antisymetrická, neboli že platí: $x|y \wedge y|x \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y$. Z definice víme, že: $(x|y \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}: q\ \cdot x = y)\ \wedge\ (y|x \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: n\ \cdot y = x)$. Z toho plyne, že: $\exists\ n, q \in \mathbb{Z}: n\ \cdot q \cdot x = x$. Protože n a q jsou celá čísla a zároveň $n\ \cdot q \cdot x = x$, pak platí, že $n = q = 1$, a tedy $x = y$. Relace dělitelnosti je tedy antisymetrická, reflexivní a tranzitivní. Je proto (neostrým) uspořádáním.

Jiným příkladem uspořádání, které se běžně užívá ve školské matematice, je relace *ostrá nerovnost* ($<$) definovaná v množině reálných čísel takto: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x < y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ \colon\ x + k = y$. Tato relace není reflexivní, je dokonce antireflexivní. Žádný prvek nemůže být menší než on sám, neboli neexistuje žádné kladné číslo k takové, aby platilo: $x + k = x$. Relace *ostrá nerovnost* není symetrická, protože platí $5 < 7$, ale neplatí $7 < 5$. Tato relace je ale tranzitivní, neboť z definice víme, že $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí: $(x < y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ \colon x + k = y\,) \wedge (y < z \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}^+ \colon y + l = z)$. Pak musí platit: $x + k + l = z$, neboli $\exists m \in \mathbb{R}^+ \colon m = k + l \wedge x + m = z$, z čehož plyne, že $x < z$. Nyní ověříme u relace *ostré nerovnosti* vlastnost antisymetrie. Z definice $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí: $x < y \Leftrightarrow\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}^+ \colon x + q = y) \wedge (y < x \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{R}^+ \colon y + n = x)$. Pak musí platit: $\exists\, q, n \in \mathbb{R}^+ \colon y + n + q = y$. Pro žádná dvě kladná čísla q a n ale nemůže platit: $y + n + q = y$. Relace je tedy antisymetrická (respektive asymetrická). Jedná se proto o ostré uspořádání. U *neostré nerovnosti* by byla splněna reflexivita. Jednalo by se tedy o uspořádání neostré.

3.3.3 Relace v matematické analýze

Mezi relace vyučované běžně na základní škole patří mimo jiné funkce přímá a nepřímá úměrnost, druhá mocnina a odmocnina, lineární funkce, případně kvadratická funkce. U všech funkcích lze zjišťovat jejich vlastnosti, určit definiční obor (první obor zobrazení) a obor hodnot (druhý obor zobrazení), případně najít funkci inverzní.

Jako příklad uveďme $f \colon y = x^2$. Jedná se o zobrazení v množině všech reálných čísel, tedy funkci. Uvedená funkce není reflexivní, neboť své druhé mocnině se rovnají pouze dvě reálná čísla, není symetrická a není tranzitivní. Nejedná se o funkci prostou, protože funkční hodnota je shodná pro každou dvojici opačných čísel z definičního oboru, a funkce není ani na, neboť funkční hodnoty jsou pouze nezáporná čísla, takže nepokrývají celou množinu reálných čísel.

3.3.4 Relace v geometrii

Jednou z relací běžně užívanou ve školské geometrii je *rovnoběžnost* dvou přímek ($\parallel$). Mějme dvě přímky p a q náležející stejné rovině. Přímka p je rovnoběžná s přímkou q ($p \parallel q$), právě když nemá s přímkou q žádný společný bod nebo má s přímkou q nekonečně mnoho společných bodů. Tato relace je v množině všech přímek reflexivní, neboť přímka p má sama se sebou nekonečně mnoho společných bodů a to splňuje druhou část definice rovnoběžnosti. Tato relace je také v množině všech přímek jedné roviny symetrická, neboť pokud přímka p nemá s přímkou q žádný společný bod, pak ani přímka q nemá s přímkou p žádný průsečík. Pokud má případně přímka p s přímkou q nekonečně mnoho společných bodů, pak i přímka q má s přímkou p nekonečně mnoho společných bodů. Neboli pro všechny přímky p a q z dané roviny platí: $p \| q \Rightarrow q \| p$. Díky symetrii lze tedy místo tvrzení *přímka* p *je rovnoběžná s přímkou* q využít ekvivalentní tvrzení *přímky* p *a* q *jsou rovnoběžné.* Obdobně pro relaci rovnoběžnosti v množině všech přímek dané roviny platí tranzitivita, neboli: pro všechny přímky p, q a o z dané roviny platí: $(p \| q) \wedge (q \| o) \Rightarrow$ $\Rightarrow (p \| o)$. Rovnoběžnost dvou přímek je tedy ekvivalencí a dělí množinu všech přímek dané roviny na třídy ekvivalence – na podmnožiny rovnoběžných přímek.

Obdobně lze rozebrat vlastnosti relace *být kolmá* ($\perp$) v množině všech přímek dané roviny. Říkáme, že přímka p je kolmá k přímce q, právě když přímka p svírá s přímkou q úhel 90°. Tato relace není v množině všech přímek dané roviny reflexivní, neboť žádná přímka nemůže sama se sebou svírat úhel 90°. Kolmost je v množině všech přímek dané roviny symetrická, neboť svírá-li přímka p s přímkou q úhel 90°, pak i přímky p svírá s přímkou p úhel 90°. Neboli pro všechny přímky dané roviny platí: $p \perp q \Rightarrow q \perp p$. Obdobně jako u rovnoběžnosti lze tedy tvrzení *přímka* p *je kolmá k přímce* q nahradit tvrzením *přímky* p *a* q *jsou na sebe navzájem kolmé*. Kolmost dvou přímek dané roviny ale není tranzitivní. Je-li přímka p kolmá k přímce q a přímka q je kolmá k přímce o, pak jsou přímky p a o buď rovnoběžné, nebo totožné.

Žáci se také již na základní škole setkávají s relací *být podobný* ($\sim$). Zaveďme relaci *být podobný* v množině všech trojúhelníků náležejících stejné rovině. Trojúhelník ABC $(a \leq b \leq c)$ je podobný trojúhelníku DEF $(d \leq e \leq f)$, neboli $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, právě když platí: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$. Relace *být podobný* je v množině všech trojúhelníků náležejících stejné rovině reflexivní, neboť platí, že útvar má shodné velikosti úhlů sám se sebou a poměr stran $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = 1$. Relace je také symetrická, neboť pokud platí $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, pak platí také $\frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c}$, což plyne ze symetrie rovnosti a pravidla, že rovnají-li se dva poměry, rovnají se i jejich převrácené hodnoty. Relace *podobnosti* je tranzitivní, neboť pro trojúhelníky ΔABC, ΔDEF a ΔRST platí: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ a zároveň $\frac{d}{r} = \frac{e}{s} = \frac{f}{t}$, pak platí: $\frac{a}{r} = \frac{b}{s} = \frac{c}{t}$, což opět plyne z tranzitivity rovnosti. *Podobnost* trojúhelníků dané roviny je tedy ekvivalencí a dělí množinu trojúhelníky v dané rovině na podmnožiny podobných trojúhelníků.

Speciálním případem podobnosti je relace *být shodný* ($\cong$). Zůstaňme v množině všech trojúhelníků náležejících stejné rovině. Pro shodnost dvou trojúhelníků platí, že trojúhelník ABC $(a \leq b \leq c)$ je shodný s trojúhelníkem DEF $(d \leq e \leq f)$, neboli $ABC \cong DEF$, právě když platí: $a = d \wedge b = e \wedge c = f$. Relace *být shodný* je v množině všech trojúhelníků náležejících stejné rovině reflexivní, neboť každý trojúhelník má shodné rozměry sám se sebou. Relace je také symetrická, neboť pokud platí $a = d \wedge$ $\wedge b = e \wedge c = f$, pak platí také $d = a \wedge e = b \wedge f = c$, což vyvozujeme ze symetrie rovnosti. Relace *shodnosti* je tranzitivní, neboť pokud platí: $a = d \wedge b = e \wedge c = f$ a zároveň $d = r \wedge e = s \wedge f = t$, pak platí také: $a = r \wedge b = s \wedge c = t$. *Shodnost* trojúhelníků dané roviny je tedy také ekvivalencí a obdobně jako podobnost dělí množinu trojúhelníků v dané rovině na podmnožiny shodných trojúhelníků.

Mezi relace ve školské geometrii patří mimo jiné také různá zobrazení, jako jsou souměrnosti, posunutí, otočení apod. Ověření jejich vlastností ponecháme na čtenáři.

3.3.5 Problémy vnímání relací u žáků

Ačkoli žáci obvykle relace a vlastnosti relací intuitivně vnímají a využívají, setkáváme se při výuce i s problémy plynoucími z nedostatečné znalosti významu těchto vlastností. Problém může být například s vnímáním a užitím symetrie rovnosti. Žáci na prvním stupni například ví, že platí: $2 + 3 = 5$, neboť s tímto typem zápisu se setkávají již od prvního ročníku. Pravdivost výroku $5 = 2 + 3$ už ale mnohdy neumí určit, neboť opačné pořadí prvků rovnosti (nejprve výsledek, poté úloha s operací) je výrazně méně užívané.

Obdobným příkladem je nedostatečné pochopení důsledků plynoucích z tranzitivity rovnosti. Ačkoli žák využívá při vypočítání úlohy rovnost, často se zápisem nepracuje správně. Například úlohu $(8 \cdot 2 - 3 + 5 - 6)$ zapisují žáci často tímto způsobem:

$$8 \cdot 2 - 3 + 5 - 6 = 16 - 3 = 13 + 5 = 18 - 6 = 12$$

V tomto případě je výsledek správný, ale jednotlivé číselné výrazy mezi rovnítky se nerovnají. To může u jiného typu úlohy zapříčinit chybný výsledek. Žák ví, že závorka a násobení mají přednost, a proto postupuje takto:

$$8 + 3 - (8 - 9) \cdot 7 = 8 - 9 = \ -1 \cdot 7 = -7 + 3 = -4 + 8 = 4$$

Výsledek je zřejmě nesprávný. K takovýmto chybám dochází poměrně často a zřejmě plynou z nedostatečného vnímání rovnosti jako ekvivalence. Obdobný problém se vyskytuje na druhém stupni základní školy například u úprav algebraických výrazů.

$$\frac{4ab + 12a}{6(ab + 3a)} = \frac{4a(b + 3)}{6(ab + 3a)} = \frac{4a(b + 3)}{6a(b + 3)} = \frac{4a}{6a} = \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$$

Každý z kroků je správný a každá z rovností platí. Přesto žáci často nevnímají, že platí zároveň i rovnost prvního a posledního prvku, tedy:

$$\frac{4ab + 12a}{6(ab + 3a)} = \frac{1}{2}.$$

Podobná situace – tedy nedostatečné vnímání tranzitivity – bývá problémem u tématu dělitelnost. Žáci často vnímají například správnost tvrzení $3|15$ a $15|150$, ale mnohdy nevnímají důsledek, tedy že $3|150$.

3.4 Relace a hádanky

Obdobně jako v pravidlech her, i v mnohých logických hádankách lze najít a definovat relace. Jedním z příkladů je známý typ logické hádanky *přelévání vody*. Různé obdoby této hádanky (různý počet nádob, jiné objemy, odlišný výchozí a koncový stav, …) se vyskytují velmi často v logických soutěžích, šifrovacích hrách apod. Uveďme jednu konkrétní možnou podobu této hádanky:

Máme tři nádoby. Objem první nádoby je osm litrů, objem druhé nádoby je pět litrů a objem třetí nádoby jsou tři litry. Největší nádoba je na počátku zcela zaplněna tekutinou, zbylé dvě nádoby jsou prázdné. Jiný zdroj tekutiny nemáme. Úkolem je odměřit pomocí těchto tří nádob dvakrát čtyři litry tekutiny, tj. dosáhnout stavu, kdy v osmilitrové a pětilitrové nádobě je po čtyřech litrech vody. Jakým způsobem lze cíle dosáhnout? Jaký je nejmenší možný počet kroků (krok = přelití tekutiny z jedné nádoby do druhé) vedoucích k dosažení cíle?

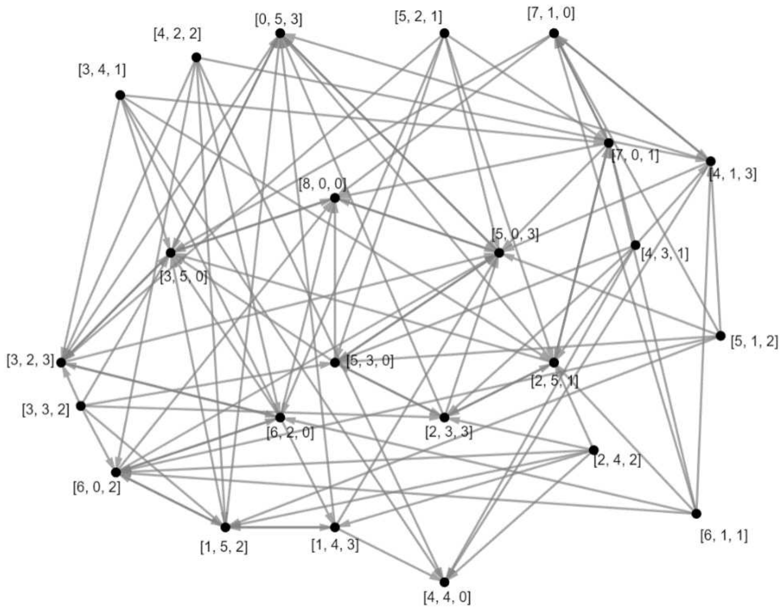
Podobné úlohy bývají často řešeny způsobem *pokus – omyl*. Obvykle se také setkáváme při řešení s nákresy nádob a zápisy/zakreslení hladin tekutin. V této kapitole uvedeme ale možnost řešení pomocí znalosti relací.

Zaveďme množinu M všech uspořádaných trojic $M = \{[x_1, x_2, x_3]\}$, pro kterou platí: $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $x_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $x_3 \in \{0, 1, 2, 3\}$ a zároveň platí: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Hodnota x_1 reprezentuje aktuální objem tekutiny v osmilitrové nádobě, hodnota x_2 uvádí aktuální objem tekutiny v pětilitrové nádobě a x_3 značí objem tekutiny v třílitrové nádobě. Množina M pak tedy zachycuje všechny možné stavy objemů tekutin v daných nádobách: $M = \{[8,0,0], [7,1,0], [7,0,1], [6,2,0], [6,1,1], [6,0,2], [5,3,0], [5,2,1], [5,1,2], [5,0,3], [4,4,0], [4,3,1], [4,2,2], [4,1,3], [3,5,0], [3,4,1], [3,3,2], [3,2,3], [2,5,1], [2,4,2], [2,3,3], [1,5,2], [1,4,3], [0,5,3]\}$. Zaveďme relaci R v množině M takovou, že:

$$\forall x, y \in M: xRy \Leftrightarrow x \neq y \wedge$$
$$\wedge \langle (x_1 = y_1) \wedge [(y_2 = 5) \vee (y_3 = 3) \vee (y_2 = 0) \vee (y_3 = 0)] \rangle \vee$$
$$\vee \langle (x_2 = y_2) \wedge [(y_1 = 8) \vee (y_3 = 3) \vee (y_1 = 0) \vee (y_3 = 0)] \rangle \vee$$
$$\vee \langle (x_3 = y_3) \wedge [(y_1 = 8) \vee (y_2 = 5) \vee (y_1 = 0) \vee (y_2 = 0)] \rangle.$$

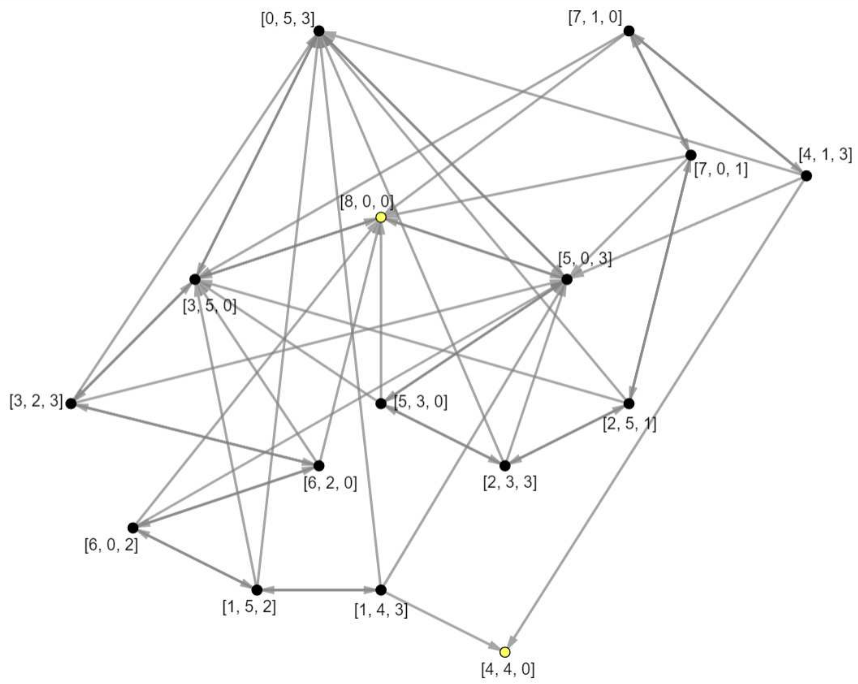
Jinak řečeno prvky (stavy) x a y množiny M jsou spolu v relaci R, právě když lze ze stavu x přejít do stavu y pomocí jednoho přelití z jedné nádoby do jiné tak, že se buď původní nádoba zcela vyprázdní, nebo se cílová nádoba zcela naplní.

K zápisu relace využijeme uzlový graf. Pokud rovnou zakreslíme všechny stavy (uzly) z množiny M se všemi relacemi (šipkami), bude graf obsáhlý a velmi nepřehledný (Obrázek 28).



Obrázek 28: Uzlový graf relace *R*

Protože hledáme cestu z výchozího stavu $[8, 0, 0]$ do konečného stavu $[4, 4, 0]$, lze bez újmy odstranit všechny stavy, do nichž nevede žádná šipka. Graf nově vzniklé podmnožiny relace R přehlednější (Obrázek 29, výchozí a cílový stav vyznačeny žlutě).



Obrázek 29: Uzlový graf relace *R* bez nepotřebných uzlů

V uzlovém grafu není na první pohled zřetelné, zda je tato úloha řešitelná a případně v kolika nejméně krocích (nezávisle na způsobu přelévání). K tomu lze využít znalost *uzávěru relace*. Požadovaného koncového stavu $[4, 4, 0]$, lze z počátečního stavu $[8, 0, 0]$ dosáhnout, právě když platí: $[8, 0, 0]\hat{R}[4, 4, 0]$, neboli když požadovaná dvojice prvků (stavů) náleží tranzitivnímu uzávěru relace R.

Pokud jde o naši konkrétní dvojici stavů, budeme skládat relaci R tak dlouho, dokud $[8,0,0]R^n[4,4,0]$. Číslo n pak bude znázorňovat počet kroků potřebných k dosažení koncového stavu. K tomu využijeme matici sousednosti relace R.

Pro usnadnění doplnění matice sousednosti relace R využijeme poznatku, že relace R není reflexivní. Tato skutečnost plyne nejen přímo z první části definice $(x \neq y)$, ale také ze samotného zadání úlohy – jedním přelitím nelze získat totožný stav, jako byl stav výchozí. Na diagonálu matice sousednosti relace R můžeme tedy doplnit samé nuly. Pro lepší orientaci ponecháváme u matice sousednosti obě záhlaví (Obrázek 30).

Po bližším prozkoumání zjistíme, že sloupce některých prvků (stavů) obsahují pouze samé nuly (Obrázek 31, nulové sloupce vyznačeny červeně). Jedná se o stejné stavy, které jsme vyloučili z uzlového grafu.

	[8, 0, 0]	[7, 1, 0]	[7, 0, 1]	[6, 2, 0]	[6, 1, 1]	[6, 0, 2]	[5, 3, 0]	[5, 2, 1]	[5, 1, 2]	[5, 0, 3]	[4, 4, 0]	[4, 3, 1]	[4, 2, 2]	[4, 1, 3]	[3, 5, 0]	[3, 4, 1]	[3, 3, 2]	[3, 2, 3]	[2, 5, 1]	[2, 4, 2]	[2, 3, 3]	[1, 5, 2]	[1, 4, 3]	[0, 5, 3]
[8, 0, 0]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[7, 1, 0]	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[7, 0, 1]	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
[6, 2, 0]	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
[6, 1, 1]	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
[6, 0, 2]	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
[5, 3, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
[5, 2, 1]	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
[5, 1, 2]	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
[5, 0, 3]	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[4, 4, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
[4, 3, 1]	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
[4, 2, 2]	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
[4, 1, 3]	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[3, 5, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
[3, 4, 1]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
[3, 3, 2]	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
[3, 2, 3]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[2, 5, 1]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
[2, 4, 2]	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
[2, 3, 3]	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
[1, 5, 2]	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
[1, 4, 3]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
[0, 5, 3]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obrázek 30: Matice sousednosti relace *R*

	[8, 0, 0]	[7, 1, 0]	[7, 0, 1]	[6, 2, 0]	[6, 1, 1]	[6, 0, 2]	[5, 3, 0]	[5, 2, 1]	[5, 1, 2]	[5, 0, 3]	[4, 4, 0]	[4, 3, 1]	[4, 2, 2]	[4, 1, 3]	[3, 5, 0]	[3, 4, 1]	[3, 3, 2]	[3, 2, 3]	[2, 5, 1]	[2, 4, 2]	[2, 3, 3]	[1, 5, 2]	[1, 4, 3]	[0, 5, 3]
[8, 0, 0]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[7, 1, 0]	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
[7, 0, 1]	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
[6, 2, 0]	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
[6, 1, 1]	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
[6, 0, 2]	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
[5, 3, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
[5, 2, 1]	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
[5, 1, 2]	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
[5, 0, 3]	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[4, 4, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
[4, 3, 1]	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
[4, 2, 2]	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
[4, 1, 3]	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[3, 5, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
[3, 4, 1]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
[3, 3, 2]	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
[3, 2, 3]	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[2, 5, 1]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
[2, 4, 2]	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
[2, 3, 3]	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
[1, 5, 2]	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
[1, 4, 3]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
[0, 5, 3]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obrázek 31: Matice sousednosti relace *R* s vyznačenými nulovými sloupci

S červenými prvky (stavy) není v relaci žádný prvek (stav). Jinak řečeno, těchto stavů nelze za uvedených podmínek žádným způsobem dosáhnout. Jedná se o ty prvky, které nesplňují podmínku plynoucí z definice relace R: $(y_1 = 8) \vee (y_2 = 5) \vee (y_3 = 3) \vee$ $\vee (y_1 = 0) \vee (y_2 = 0) \vee (y_3 = 0)$. Proto jsou tyto prvky (stavy) pro řešení hádanky nepodstatné a v matici sousednosti je nadále nebudeme uvažovat (Obrázek 32).

Dle Čady, Kaisera a Ryjáčka (2004) platí, že hodnota prvku m_{ij} n-té mocniny matice sousednosti relace je rovna počtu možností, jimiž se z prvku i dostaneme do prvku j přesně v n krocích. Budeme-li tedy relaci R umocňovat na $n = \{2, 3, 4, \dots\}$ do té doby, než se na osmém místě prvního řádku objeví nenulové číslo, bude pak číslo n nejmenším počtem kroků nutných k vyřešení hádanky. To se stane poprvé při umocnění matice na sedmou (Obrázek 33, k umocnění matice jsme využili on-line kalkulačku matrixcalc.org).

	[8, 0, 0]	[7, 1, 0]	[7, 0, 1]	[6, 2, 0]	[6, 0, 2]	[5, 3, 0]	[5, 0, 3]	[4, 4, 0]	[4, 1, 3]	[3, 5, 0]	[3, 2, 3]	[2, 5, 1]	[2, 3, 3]	[1, 5, 2]	[1, 4, 3]	[0, 5, 3]
[8, 0, 0]	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
[7, 1, 0]	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
[7, 0, 1]	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
[6, 2, 0]	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
[6, 0, 2]	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
[5, 3, 0]	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
[5, 0, 3]	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
[4, 4, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
[4, 1, 3]	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
[3, 5, 0]	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
[3, 2, 3]	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
[2, 5, 1]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
[2, 3, 3]	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
[1, 5, 2]	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
[1, 4, 3]	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
[0, 5, 3]	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Obrázek 32: Matice sousednosti relace *R* bez nulových sloupců

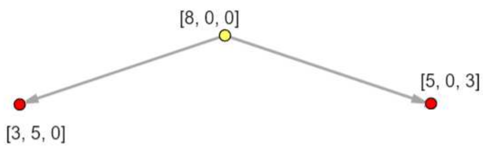
$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}^7
=
\begin{pmatrix}
148&0&10&58&3&46&299&\boxed{1}&1&299&46&3&58&10&0&148\\
581&10&40&105&25&246&644&21&29&645&233&35&103&33&8&587\\
559&35&14&73&41&237&603&15&8&587&241&57&95&6&23&550\\
518&3&6&85&55&233&514&2&6&533&235&34&66&13&15&524\\
515&7&13&104&34&200&589&14&2&577&224&22&95&33&9&504\\
406&2&26&92&17&169&538&2&7&545&156&23&101&14&1&412\\
359&8&2&22&30&179&234&1&0&226&178&38&27&1&4&357\\
397&8&19&73&20&163&443&15&15&436&165&23&67&24&7&396\\
672&31&20&100&56&286&724&21&21&731&284&53&106&15&32&673\\
357&3&1&27&38&178&226&0&1&234&179&30&22&2&7&359\\
411&2&13&101&23&156&544&6&1&537&169&17&92&25&3&405\\
517&4&40&97&21&227&591&8&20&603&203&33&106&20&2&528\\
527&22&12&66&35&236&536&6&2&517&234&56&85&5&10&521\\
513&4&11&93&49&226&549&7&14&565&222&33&71&19&16&522\\
484&15&13&82&37&196&530&15&7&529&209&27&84&20&17&478\\
148&0&10&58&3&46&299&1&1&299&46&3&58&10&0&148
\end{pmatrix}$$

Obrázek 33: Matice sousednosti relace *R* umocněná na sedmou

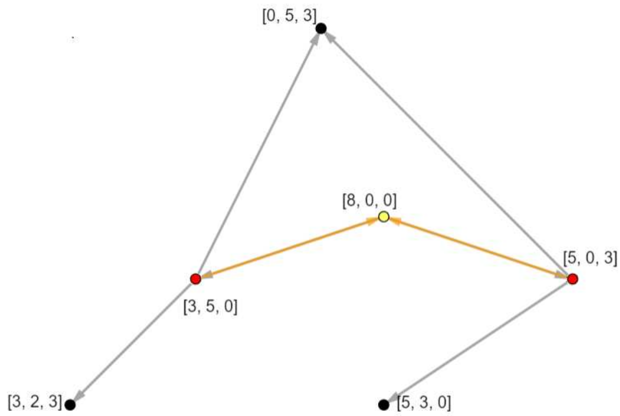
Pak tedy platí: $[8,0,0]R^7[4,4,0]$. Tím jsme zjistili, že zadaná hádanka je řešitelná a že k dosažení koncového stavu je zapotřebí sedmi kroků. Na určeném místě je číslo jedna, existuje tedy jedna sedmikroková posloupnost přelévání vedoucí k cíli. Zatím ale nevíme, které kroky to jsou.

Ke zjištění konkrétních kroků využijeme opět uzlový graf. Budeme postupovat po jednotlivých krocích od výchozího stavu. Graf tedy začneme budovat od uzlu $[8, 0, 0]$. V prvním kroku hledáme takové stavy, se kterými je v relaci stav $[8, 0, 0]$. To jsou stavy $[3, 5, 0]$ a $[5, 0, 3]$ (Obrázek 34).

Nově zakreslené stavy vyznačíme červeně. Z nich vedeme šipky do všech stavů, s nimiž jsou v relaci (Obrázek 35).

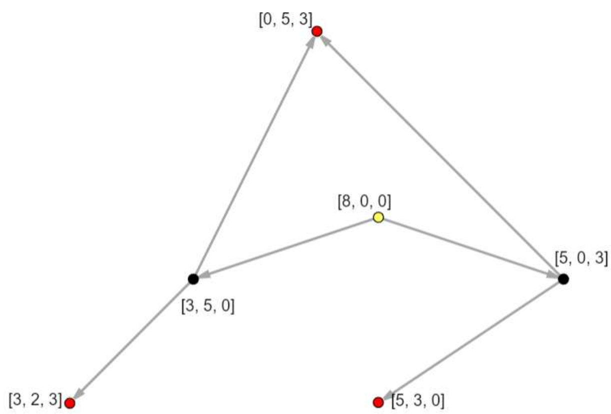


Obrázek 34: Uzlový graf relace *R*; 1. krok



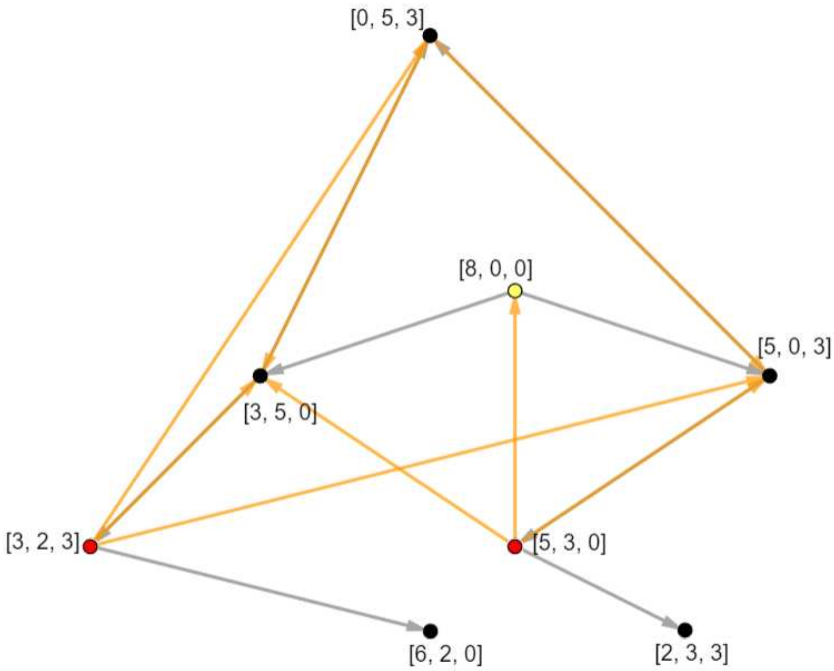
Obrázek 35: Uzlový graf relace *R*; 2. krok

Oranžově vyznačené šipky vedou do uzlů, které se v grafu již nacházely. Tohoto vyznačení budeme využívat i v dalších krocích. Oranžově značené relace nemohou být součástí nejkratšího způsobu dosažení cíle. Proto je vypustíme a tři nově zakreslené uzly (stavy) vyznačíme červeně (Obrázek 36).

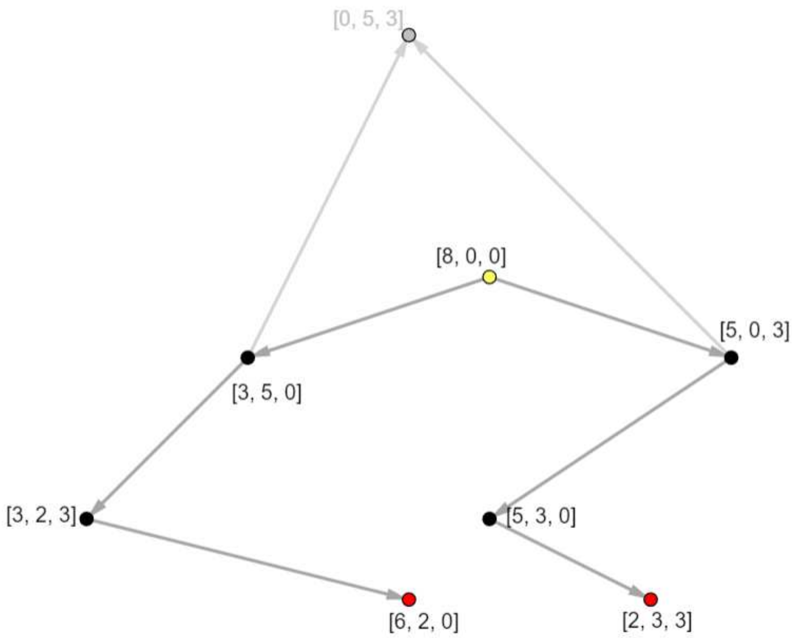


Obrázek 36: Uzlový graf relace *R*; 3. krok

Z nově vyznačených (červených) uzlů (stavů) vedeme šipky vedoucí do všech stavů, s nimiž jsou v relaci (Obrázek 37). Oranžové, tedy pro řešení problému nepodstatné, relace vypustíme a nově vzniklé stavy označíme červeně (Obrázek 38).

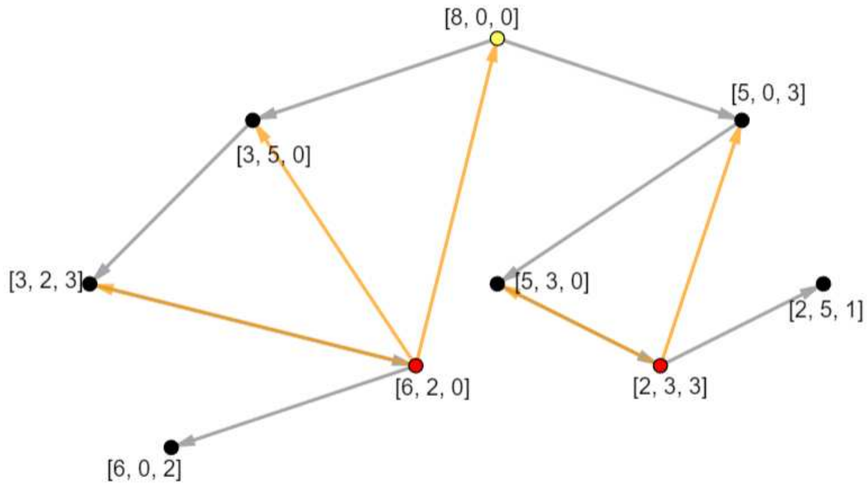


Obrázek 37: Uzlový graf relace *R*; 4. krok

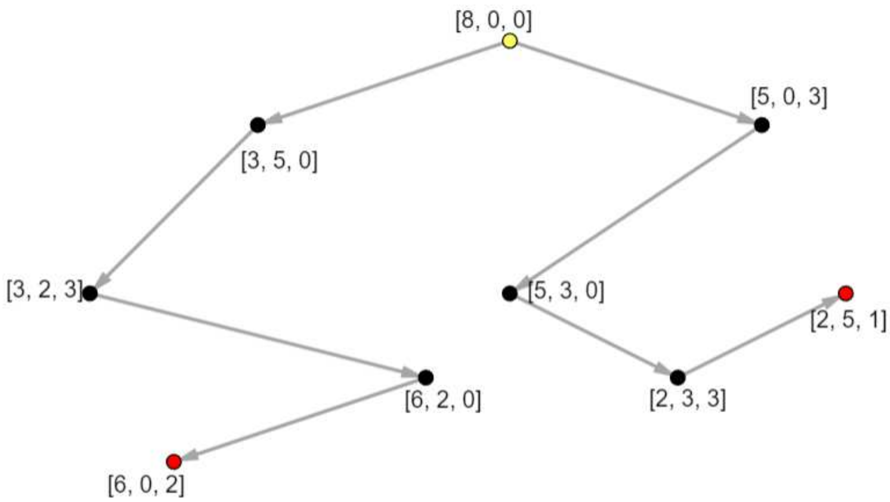


Obrázek 38: Uzlový graf relace *R*; 5. krok

Všimněme si, že prvek $[0,5,3]$ není v relaci s žádným nově zakresleným prvkem. Proto ho v dalších krocích nemusíme uvažovat, jistě totiž není součástí nejkratšího možného postupu. Z nově vyznačených uzlů opět vedeme šipky do všech stavů, s nimiž jsou v relaci (Obrázek 39). Oranžové relace vypustíme a nově vzniklé stavy označíme červeně (Obrázek 40).

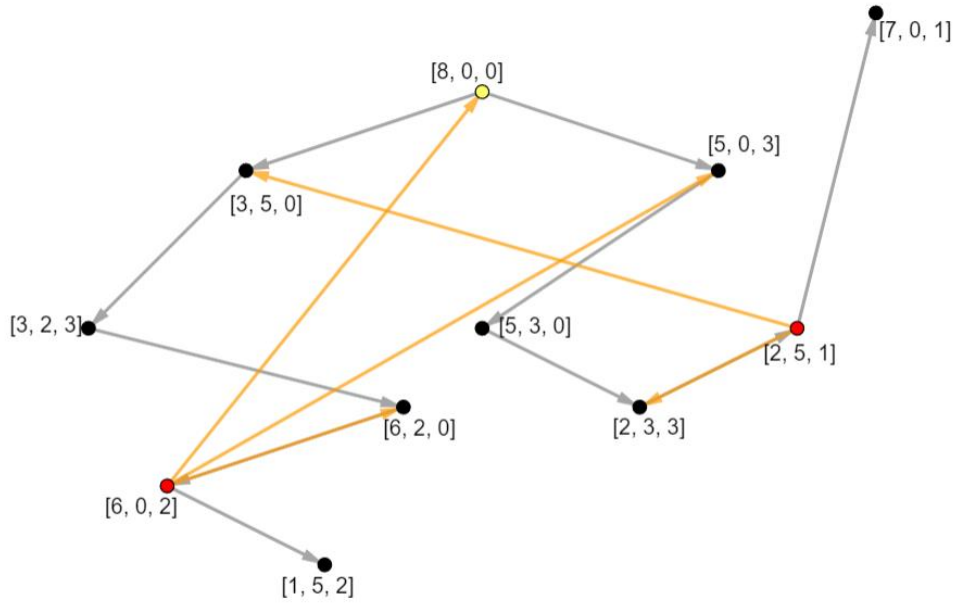


Obrázek 39: Uzlový graf relace *R*; 6. krok

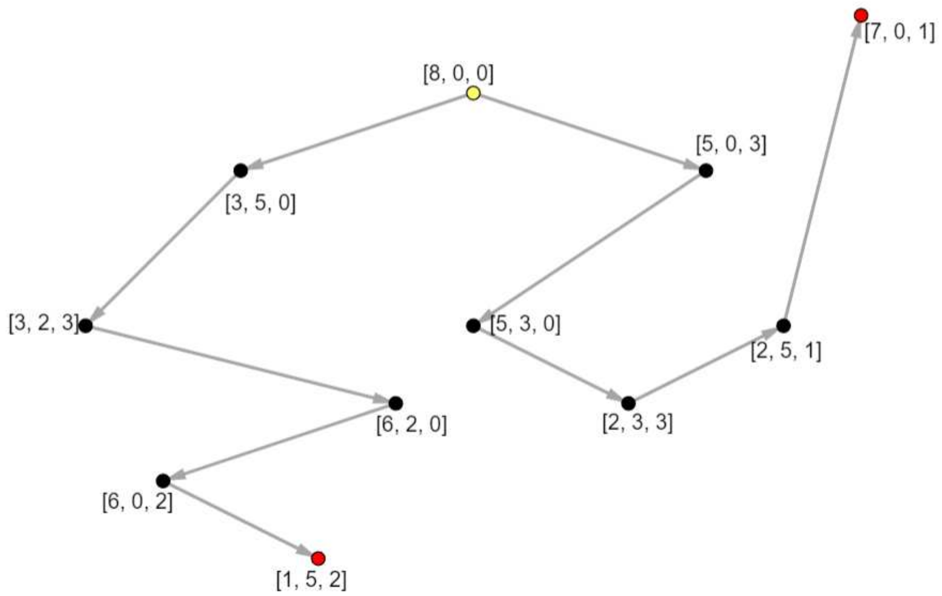


Obrázek 40: Uzlový graf relace *R*; 7. krok

V grafu se zjevně vykreslují dva různé způsoby přelévání, v nichž se jednotlivé stavy neopakují. Je ale nutné zjistit, který z nich vede do požadovaného koncového stavu $[4, 4, 0]$. Pokračujeme zavedeným algoritmem: Z nově vyznačených uzlů vedeme šipky do všech stavů, s nimiž jsou v relaci (Obrázek 41). Poté oranžové relace vypustíme a nově vzniklé stavy označíme červeně (Obrázek 42).

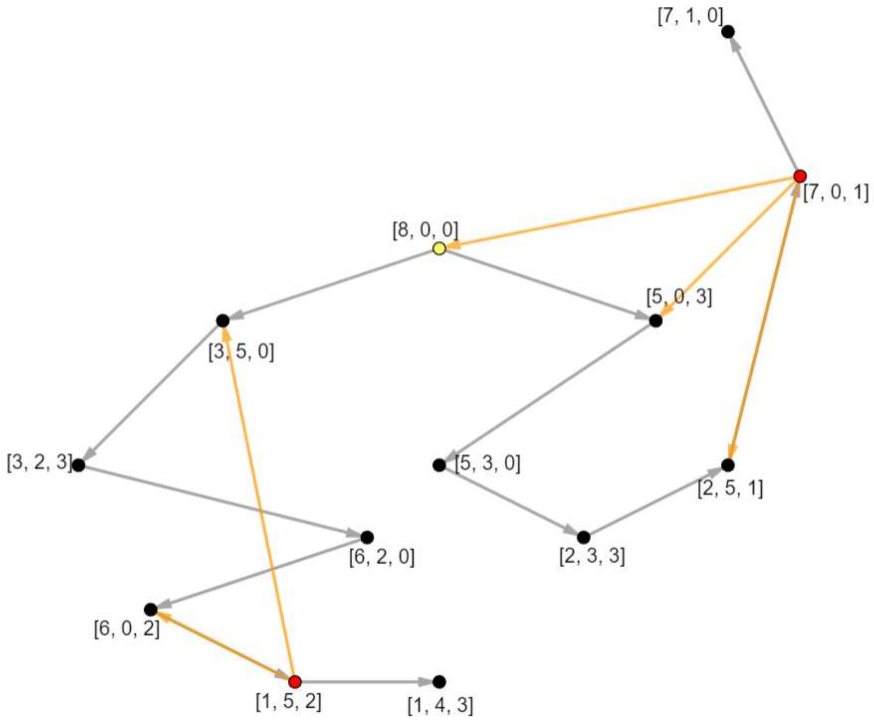


Obrázek 41: Uzlový graf relace *R*; 8. krok

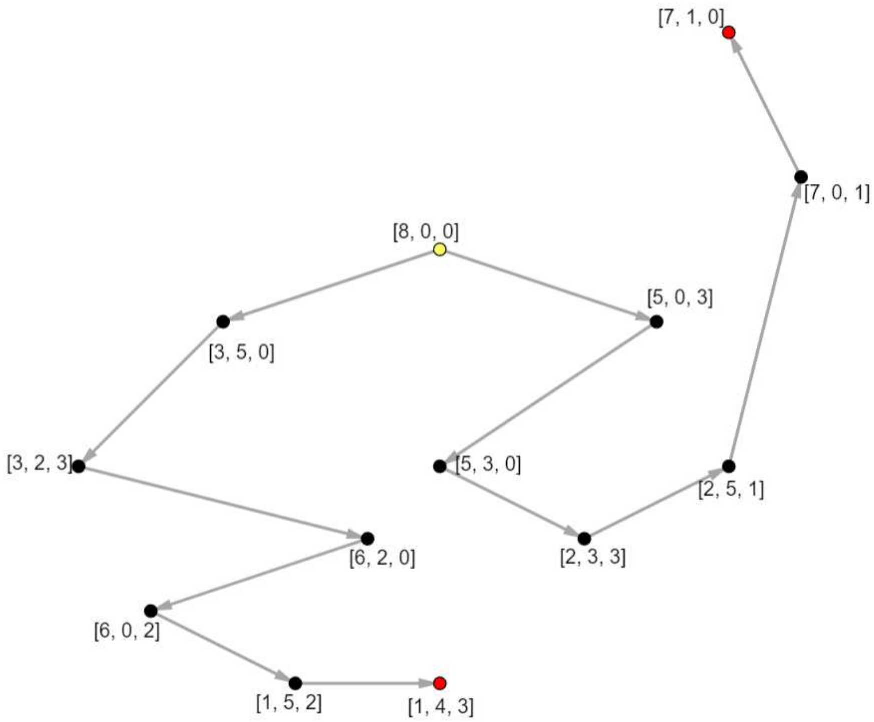


Obrázek 42: Uzlový graf relace *R*; 9. krok

Obdobně pokračujeme i nadále: vyznačíme nové relace (Obrázek 43), nepotřebné zanedbáme (Obrázek 44).

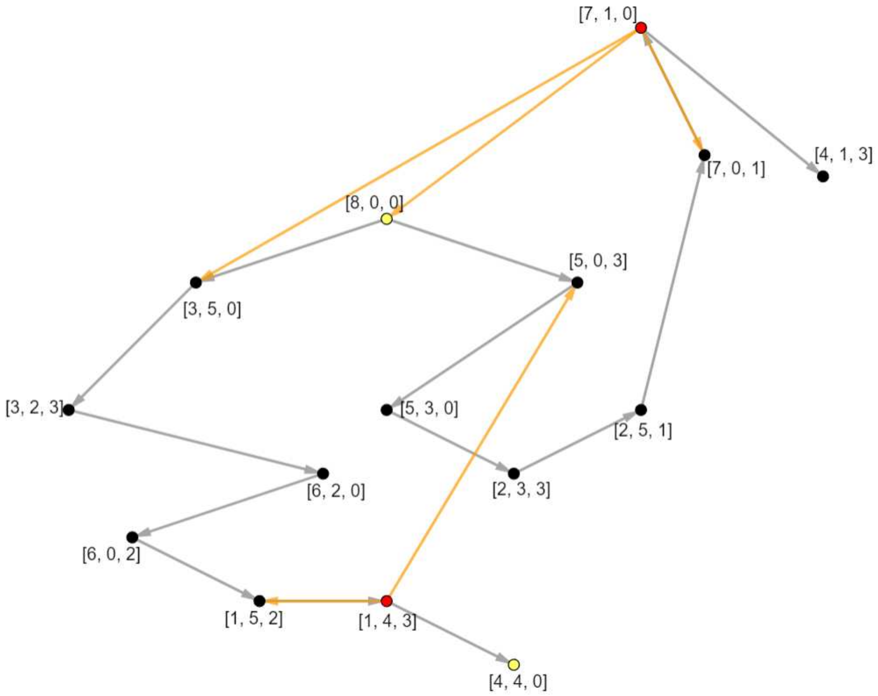


Obrázek 43: Uzlový graf relace *R*; 10. krok

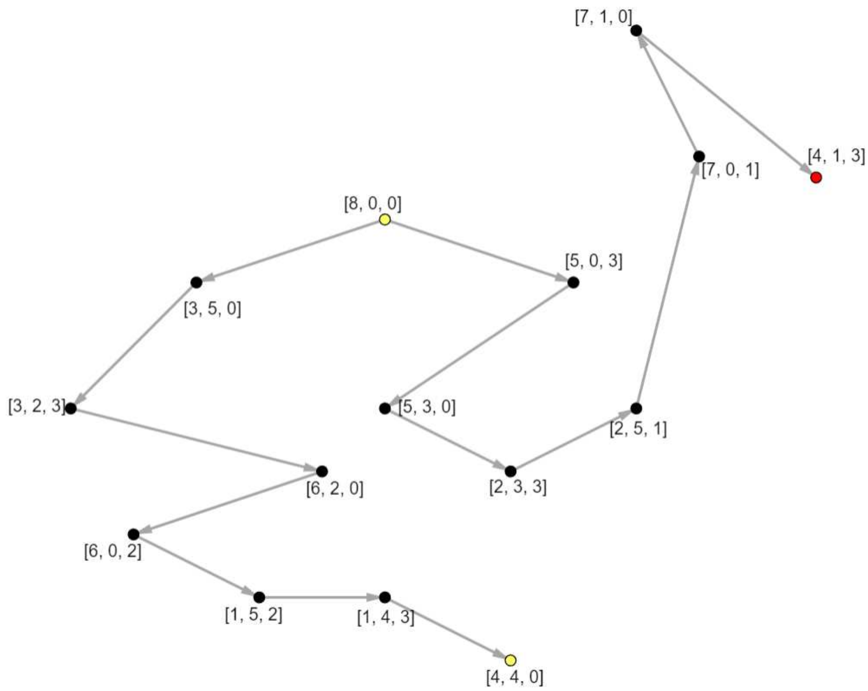


Obrázek 44: Uzlový graf relace *R*; 11. krok

V dalším kroku opět vyznačíme všechny relace jdoucí z nových uzlů (Obrázek 45) a nepotřebné relace poté zanedbáme (Obrázek 46).

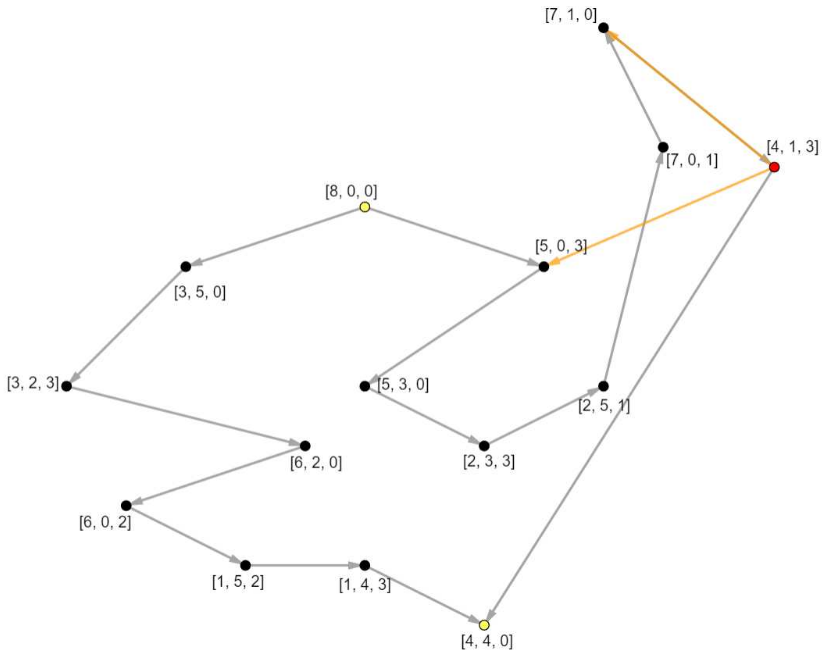


Obrázek 45: Uzlový graf relace *R*; 12. krok

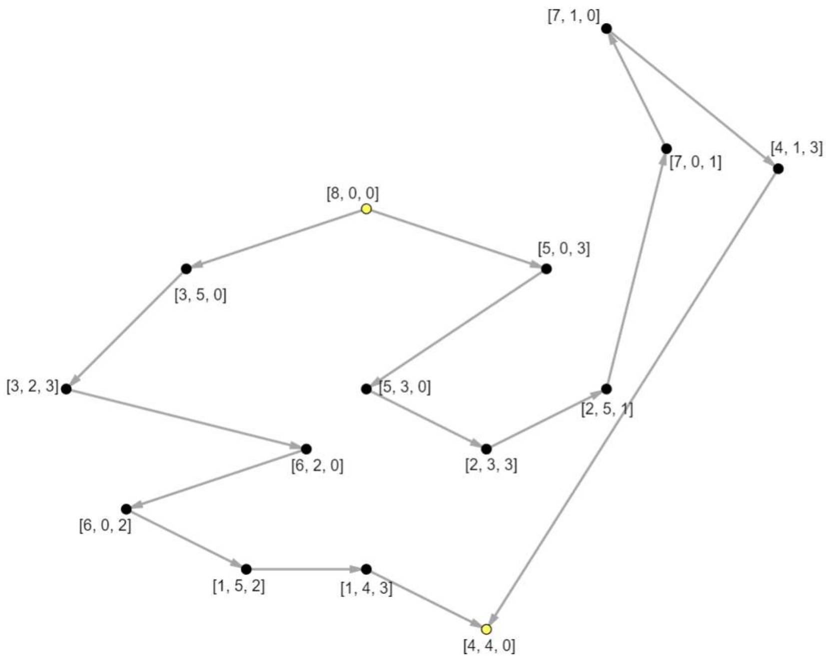


Obrázek 46: Uzlový graf relace *R*; 13. krok

Jeden ze způsobů přelévání nyní končí v očekávaném koncovém stavu – dospěli jsme nejkratší možnou cestou k cíli, čímž jsme zjistili řešení hádanky. Pro zajímavost ale ještě zjistíme, zda lze cílového stavu dosáhnout i pomocí druhé větve grafu. Z nově vzniklého stavu vedeme šipky do všech stavů, s nimiž je v relaci (Obrázek 47). Nepotřebné relace vypustíme (Obrázek 48).

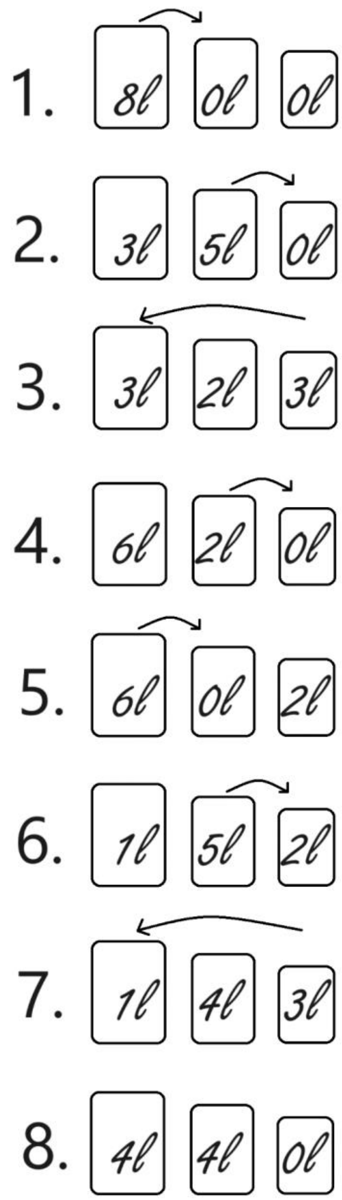


Obrázek 47: Uzlový graf relace *R*; 14. krok



Obrázek 48: Uzlový graf relace *R*; řešení hádanky

Pomocí uzlového grafu jsme tedy získali dva přímé způsoby řešení hádanky, přičemž jejich délka se liší o jeden krok. Nejkratší možný způsob řešení uvedené hádanky zobrazuje symbolicky Obrázek 49. Tento způsob je dlouhý sedm kroků, což koresponduje s počtem zjištěných umocnění matice sousednosti relace R.



Obrázek 49: Řešení hádanky přelévání vody

Tato kapitola ukázala, kde se můžeme s relacemi setkat, jak je lze zavést a jak je možné využít jejich znalost k řešení problému.

4 Úlohy

Tato kapitola obsahuje sady úloh ověřující schopnost využití poznatků uvedených v první části této bakalářské práce. Nejprve vždy uvedeme několik příkladů s možným postupem řešení, poté zadáme řadu úloh na dané téma.

4.1 Úlohy na úvod

První sada úloh ověřuje schopnost aplikovat znalosti z kapitoly 1 Úvodní pojmy a kapitoly 2 Relace.

Příklad 1.1. Zapište množinu $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 + 4x + 3 = 0\}$ výčtem prvků.

Řešení 1.1. Nejprve je potřeba vyřešit kvadratickou rovnici $x^2 + 4x + 3 = 0$, například pomocí diskriminantu a vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou -1 a -3. Oba kořeny splňují podmínku $x \in \mathbb{Z}$ a jsou tedy prvky množiny A. Množinu A lze proto výčtem prvků zapsat: $A = \{-1, -3\}$.

Příklad 1.2. Mějme relaci R z množiny všech žen bydlících ve městě Tábor do množiny všech mužů bydlících ve městě Tábor definovanou takto: $xRy \Leftrightarrow x\ je\ manželkou\ y$. Mějme relaci S z množiny všech mužů bydlících ve městě Tábor do množiny všech žen bydlících ve městě Tábor definovanou: $xSy \Leftrightarrow x$ *je synem* y. Popište relaci $R \circ S$.

Řešení 1.2. Nejprve zapišme množiny, mezi kterými je výsledná relace. Pro skládání relací platí, že pokud $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$, pak $R \circ S \subseteq A \times C$. Je-li tedy relace R definovaná z množiny všech žen bydlících ve městě Tábor do množiny všech mužů bydlících ve městě Tábor a relace S z množiny všech mužů bydlících ve městě Tábor do množiny všech žen bydlících ve městě Tábor, pak je výsledná relace $R \circ S$ definovaná z množiny všech žen bydlících ve městě

Tábor do množiny všech žen bydlících ve městě Tábor. Jelikož se jedná o totožné množiny, je výsledná relace definovaná *v množině* všech žen bydlících ve městě Tábor.

Dále víme, že pro prvek x z množiny všech žen bydlících v Táboře a prvek y z množiny mužů bydlících v Táboře platí, že jsou spolu v relaci R, právě když x je manželkou y. Prvek y z množiny všech mužů bydlících v Táboře je v relaci S s prvkem z z množiny všech žen bydlících ve městě Tábor, právě když y je synem z. Pro ženu x bydlící v Táboře tedy platí, že je v relaci $R \circ S$ se ženou z bydlící v Táboře, právě když je manželkou jejího syna, neboli pokud je její snachou, neboli: $x(R \circ S)y \Leftrightarrow x\ je\ snachou\ y$.

Příklad 1.3. Zapište výčtem prvků kartézský součin $A \times B$ množin $A = \{-1, -3\}$ a $B = \{a, b, c\}$. Poté graficky znázorněte pomocí tabulky a šachovnicového grafu.

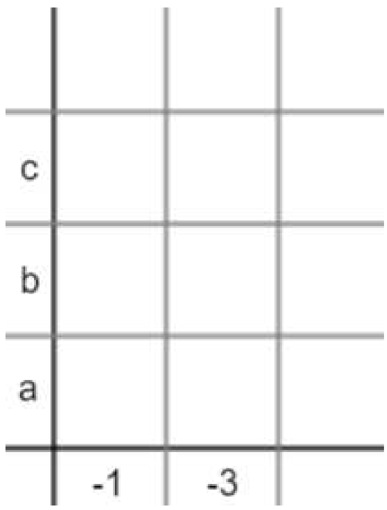
Řešení 1.3. Kartézský součin $A \times B$ množin $A = \{-1, -3\}$ a $B = \{a, b, c\}$ zapíšeme jako množinu všech uspořádaných dvojic, v nichž první prvek je z množiny A a druhý prvek z množiny B:

$$A \times B = \{[-1, a], [-1, b], [-1, c], [-3, a], [-3, b], [-3, c]\}.$$

Tabulku kartézského součinu $A \times B$ zachycuje Obrázek 50, šachovnicový graf kartézského součinu $A \times B$ znázorňuje Obrázek 51 .

A \ B	a	b	c
-1	[-1, a]	[-1, b]	[-1, c]
-3	[-3, a]	[-3, b]	[-3, c]

Obrázek 50: Tabulka kartézského součinu $A \times B$



Obrázek 51: Šachovnicový graf kartézského součinu $A \times B$

Úloha 1.1. Zapište množinu $A = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 2x + 1 = 0\}$ výčtem prvků.

Úloha 1.2. Zapište množinu $B = \{6, 7, 8, 9\}$ pomocí charakteristické vlastnosti.

Úloha 1.3. Zapište množinu $C = \{-2, 2\}$ pomocí charakteristické vlastnosti. Využijte v zápisu absolutní hodnotu.

Úloha 1.4. Zapište kartézský součin $C \times D$ množin $C = \{1, 2, 3\}$ a $D = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ jako množinu uspořádaných dvojic. Poté zapište kartézský součin $D \times C$. Oba kartézské součiny libovolným způsobem graficky znázorněte.

Úloha 1.5. Znázorněte relaci $R = \{[1, 2], [2, 2], [3, 4], [4, 2], [4, 3], [5, 1], [5, 2], [5, 5]\}$ v množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pomocí kartézského grafu, uzlového grafu, tabulky, šachovnicového grafu a zapište pomocí matice sousednosti.

Úloha 1.6. Mějme množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ a $C = \{10, 32, 80\}$. Složte relaci $R \subseteq A \times B$ definovanou takto: $xRy \Leftrightarrow x$ je dělitelem y s relací $S \subseteq B \times C$ definovanou takto: $xSy \Leftrightarrow x$ je dělitelem y. Zapište, mezi kterými množinami je definovaná výsledná relace $R \circ S$ a popište ji.

Úloha 1.7. Popište relaci $R \circ R$, pokud R označuje:

a. relaci *být otcem* v množině všech mužů pocházejících z České republiky,
b. relaci *být dcerou* v množině všech lidí obývajících hlavní město Prahu,
c. relaci *být sourozencem* v množině všech žáků navštěvujících danou základní školu.

Úloha 1.8. Najděte v množině $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dvě relace R a S tak, aby platilo $R \neq S$ a zároveň $R \circ S = S \circ R$.

Úloha 1.9. Je dána množina $A = \{2, 4, 6\}$ a množina $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Určete, zda je relace $R = \{[2, 5], [2,7], [4,3], [4,7]\}$ zobrazením z A do B.

Úloha 1.10. Jsou dány množiny $C = \{\mathrm{v, w, x, y, z}\}$ a $D = \{9, 10, 11, 12, 13\}$. Rozhodněte, zda je relace $S = \{[x, 9], [y, 12], [z, 10], [v, 11], [w, 13]\}$ zobrazením z C do D. Pokud ano, určete, zda je toto zobrazení *prosté*, *na* nebo *vzájemně jednoznačné*.

4.2 Relace a jejich vlastnosti

Tato sada úloh se zaměřuje na vlastnosti relací v množině a jejich ověřování.

Příklad 2.1. Určete, zda jsou následující relace v daných množinách reflexivní:

a. relace *měřit méně centimetrů* v množině všech dětí jedné konkrétní třídy,
b. relace *být totožný* v množině všech přímek dané roviny,
c. relace R v množině všech přirozených čísel daná charakteristickou vlastností: $R = \{[x, y]; x \cdot y \in \{5, 10, 15\}\}$.

Řešení 2.1. Reflexivita relace znamená, že je je každý prvek v relaci sám se sebou.

a. Žádný žák nemůže měřit méně centimetrů (tedy být menší) než on sám. Tato relace tedy reflexivní není.
b. Každá přímka v rovině je totožná sama se sebou. Tato relace je tedy reflexivní.
c. Reflexivita dané relace by znamenala, že druhá mocnina všech přirozených čísel náleží množině $\{5, 10, 15\}$. To neplatí, relace R tedy není reflexivní.

Příklad 2.2. Určete, zda jsou následující relace v daných množinách symetrické:

a. relace *mít stejný počet sourozenců* v množině všech lidí v jednom městě
b. relace *být nadřízeným* v množině všech zaměstnanců konkrétní společnosti
c. relace R v množině všech reálných čísel daná charakteristickou vlastností: $R = \{[x, y]; x \cdot y \in \{-3, 9, 107\}\}$.

Řešení 2.2. Relace je symetrická, pokud platí, že je-li jeden prvek v relaci s druhým, je i druhý prvek v relaci s prvním.

a. Pokud má jedna osoba stejný počet sourozenců jako druhá osoba, má i druhá osoba stejný počet sourozenců jako osoba první. Tato relace je tedy symetrická.
b. Je-li jedna osoba nadřízená druhé osoby, pak jistě nemůže být druhá osoba nadřízená osoby první. Tato relace tedy zřejmě symetrická není.

c. Díky komutativitě násobení lze říci, že platí-li $x \cdot y \in \{-3, 9, 107\}$, pak musí platit i $y \cdot x \in \{-3, 9, 107\}$. Relace je symetrická.

Příklad 2.3. Určete, zda jsou následující relace v daných množinách tranzitivní:

a. Relace *mít stejnou barvu* v množině všech jednobarevných pastelek v jedné konkrétní školní družině.
b. Relace *být matkou* v množině všech žen žijících v České republice
c. Relace *být násobkem* v množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Řešení 2.3. Relace je tranzitivní, pokud platí, že je-li jeden prvek v relaci s druhým a druhý prvek v relaci se třetím, je i první prvek v relaci se třetím.

a. Má-li jedna pastelka stejnou barvu jako druhá a druhá pastelka stejnou barvu jako třetí, pak má jistě i první pastelka stejnou barvu jako třetí. Tato relace je tedy v množině jednobarevných pastelek tranzitivní. Pro dvoubarevné „půlené" pastelky by ale tranzitivita neplatila.
b. Je-li první žena matkou druhé a ta je matkou třetí, pak je první žena babičkou třetí ženy, nikoli její matkou. Proto tato relace není tranzitivní.
c. Je-li číslo x násobkem čísla y, pak platí: $\exists k \in \mathbb{N}: k \cdot y = x$, a zároveň je-li číslo y násobkem čísla z, pak platí: $\exists \mathrm{l} \in \mathbb{N}: \mathrm{l} \cdot \mathrm{z} = \mathrm{y}$. Spojíme-li tato dvě tvrzení dohromady, zjistíme, že: $\exists k, l \in \mathbb{N}: k \cdot l \cdot z = x$. Tím jsme dokázali, že prvek x je násobkem prvku z. Tato relace je tedy tranzitivní.

Úloha 2.1. Určete, zda je relace $R = \{[x, y]; x - 1 = y\}$ v množině přirozených čísel $\mathbb{N}$ reflexivní, antireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická či tranzitivní.

Úloha 2.2. V množině všech lidí v České republice je dána relace R: $xRy \Leftrightarrow$ prvku x *imponuje* prvek y. Určete, jaké vlastnosti má tato relace.

Úloha 2.3. V množině všech psů žijících v současné chvíli na planetě Zemi mějme relaci *být stejnou rasou*. Určete, jaké vlastnosti má tato relace v dané množině. Obdobně určete vlastnosti téže relace v množině všech čistokrevných psů žijících v současné chvíli na planetě Zemi. Vysvětlete, proč se vlastnosti liší.

Úloha 2.4. Za pomoci uzlového grafu určete vlastnosti relace R v množině A. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{[1, 1], [2, 2], [3, 3], [1, 2], [2, 1], [2, 3], [1, 3]\}$.

Úloha 2.5. Za pomoci šachovnicového grafu určete vlastnosti relace R v množině A. $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{[a, a], [a, c][b, b], [b, c], [c, a], [c, b], [c, c], [d, d]\}$.

Úloha 2.6. Za pomoci matice sousednosti určete vlastnosti relace R v množině A.
$A = \{Petr(P), Libuše(L), Veronika(V), Tomáš(T), Markéta(M)\}$,
$R = \{[V, T], [M, V], [M, T], [V, M]\}$. Zapište, jaký příbuzenský vztah by relace R mohla popisovat.

Úloha 2.7. O relaci R v množině $A = \{a, b, c, d\}$ víme, že je *reflexivní* a *tranzitivní*, ale není *symetrická*. Také víme, že obsahuje celkem 7 uspořádaných dvojic, přičemž dvě z nich jsou $[a, c]$ a $[a, d]$. Zapište výčtem uspořádaných dvojic relaci R. Určete, zda je tato relace zadaná jednoznačně, nebo zda existuje více možných řešení.

Úloha 2.8. Určete vlastnosti relace R: $xRy \Leftrightarrow x$ *navštěvuje stejný ročník základní školy jako* y v množině všech dětí České republiky ve věku 6 až 15 let. Rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci, toleranci či uspořádání.

Úloha 2.9. Zaveďte množinu, v níž může být definovaná relace R: $xRy \Leftrightarrow x$ *má na sobě stejný obrázek jako* y, tak, aby byla relace R tolerancí.

Úloha 2.10. Mějme množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Jsou dány relace $R = \{[1, 5], [1, 6], [1,7], [2, 5], [2, 6], [3, 9], [4, 7], [4, 8]\}$ mezi množinami A a B a relace $S = \{[5, 1], [6, 2], [7, 3], [5, 2], [6,3], [9, 3], [7, 4], [8, 4]\}$ mezi množinami B a A. Určete vlastnosti relace $R \circ S$ v množině A. Určete vlastnosti relace $S \circ R$ v množině B.

4.3 Výsledky

V této kapitole uvádíme výsledky k úlohám z předchozích kapitol. Uvádíme vždy jednu variantu řešení, a to i v případech, kdy jich existuje více. Grafy ponecháváme na čtenáři.

Výsledek 1.1. $A = \{1\}$

Výsledek 1.2. Způsobů zápisu této relace pomocí charakteristické vlastnosti je více, uvádíme jeden z nich: $B = \{x: x \in \mathbb{N} \wedge 5 < x < 10\}$.

Výsledek 1.3. $C = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge |x| = 2\}$

Výsledek 1.4.

$C \times D = [1, a], [1, b], [1, c], [1, d], [2, a], [2, b], [2, c], [2, d], [3, a], [3, b], [3, c], [3, d]\}$,

$D \times C = \{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3], [c, 1], [c, 2], [c, 3], [d, 1], [d, 2], [d, 3]\}$.

Výsledek 1.6. $R \circ S \subseteq A \times C$

$R = \{[1, 4], [1, 6], [1, 8], [1, 10], [2, 4], [2, 6], [2, 8], [2, 10], [3, 6], [4, 4], [4, 8]\}$

$S = \{[4, 32], [4, 80], [8, 32], [8, 80], [10, 10], [10, 80]\}$

$R \circ S = \{[1, 32], [1, 80], [1, 10], [2, 32], [2, 80], [2, 10], [4, 32], [4, 80]\}$

$x(R \circ S)y \Leftrightarrow x$ je dělitelem y

Výsledek 1.7.

a. být dědečkem ze strany otce
b. být vnučkou babičky
c. být sourozencem nebo být sám sebou

Výsledek 1.8. $R = \{[a, a], [b, b], [a, b]\}, S = \{[a, a], [b, b], [b, a]\}$

$$S \circ R = R \circ S = \{[a, a], [b, b]\}$$

Výsledek 1.9. Nejedná se o zobrazení, neboť jednomu vzoru odpovídají dva obrazy.

Výsledek 1.10. Jedná se o vzájemně jednoznačné zobrazení.

Výsledek 2.1. Relace není reflexivní, je antireflexivní, není symetrická, je antisymetrická, je asymetrická a není tranzitivní.

Výsledek 2.2. Relace není reflexivní, není antireflexivní, není symetrická, není antisymetrická, není asymetrická a není tranzitivní.

Výsledek 2.3. Relace se liší tím, zda splňují tranzitivitu.

a. relace je reflexivní, není antireflexivní, je symetrická, není antisymetrická ani asymetrická, není tranzitivní
b. relace je reflexivní, není antireflexivní, je symetrická, není antisymetrická ani asymetrická, je tranzitivní.

Výsledek 2.4. Relace není reflexivní, není antireflexivní, není symetrická, není antisymetrická ani asymetrická, je tranzitivní.

Výsledek 2.5. Relace je reflexivní, není antireflexivní, je symetrická, není antisymetrická ani asymetrická, není tranzitivní.

Výsledek 2.6. Relace není reflexivní, je antireflexivní, není symetrická, není antisymetrická ani asymetrická, není tranzitivní.
Například: Veronika, Markéta a Tomáš jsou sourozenci.

Výsledek 2.7. Například: $R = \{\{a,a\},\{b,b\},\{c,c\},\{d,d\},\{a,c\},\{a,d\},\{d,c\}\}$.
Není dáno jednoznačně, možností je více.

Výsledek 2.8. Relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Jedná se o ekvivalenci.

Výsledek 2.9. Například množina všech triček na světě.

Výsledek 2.10. Relace $R \circ S$ je reflexivní a tranzitivní, relace $S \circ R$ je reflexivní.

Závěr

Svět kolem nás je plný vztahů – relací. Jsme jimi obklopeni od dětství, ať už při hrách, v přátelství, ve výuce nebo v hádankách. I bez znalosti teorie často intuitivně vnímáme, že některé vztahy jsou symetrické, jiné nikoliv. Obdobně chápeme i reflexivnost či tranzitivitu. Pochopením teoretických základů se pak porozumění prohloubí.

Tato práce se pokusila právě tyto teoretické základy nejprve s využitím odborných zdrojů definovat a poté aplikovat. Cílem bylo poukázat na hojný výskyt relací kolem nás a vysvětlit, jak určit jejich vlastnosti. Přínosem této práce pak může být poukázání na možnost využití znalosti relací a jejich vlastností k řešení logických problémů, konkrétně při hře Býci a krávy a při známé hádance Přelévání vody.

Charakter práce je primárně teoretický, téma relace se opírá ve dvou hlavních kapitolách o odbornou literaturu. Další kapitola pak teoretické poznatky aplikuje a využívá v praxi. Práci doplňuje i navržený soubor úloh a jejich řešení.

Přínosem by tato práce mohla být například pro vysokoškolské studenty, kterým může pomoci s orientací v daném tématu a s propojením problematiky relací se situacemi z běžného života. Právě díky tomuto propojení se vztahy mezi lidmi a podobným příkladům má tato práce potenciál zaujmout také neodbornou veřejnost. Pro učitele základních a středních škol pak může být nejen přehledným připomenutím vysokoškolské výstavby pojmu *relace*, ale také vhodnou pomůckou pro pochopení vlivu znalosti relací a jejich vlastností (ačkoli například bez kompletní znalosti definic a teorie) na vnímání situací v každodenním životě i úloh ve školské matematice. To by mohlo napomoci předcházení chybného vnímání některých školských relací u žáků.

Při psaní této práce jsem využívala znalosti z přednášek na vysoké škole, zároveň jsem ale své vědomosti doplňovala a prohlubovala za pomoci odborných zdrojů. Právě kombinace opakování dříve nabytých vědomostí a čerpání nových informací mě podněcovalo k zaměření se na relace v mém okolí. Díky tomu jsem poté sestavila výběr příkladů relací, jejichž vlastnosti jsem následně ověřovala. Psaní této práce mě obohatilo o nový úhel pohledu na problematiku relací a utvrdilo mě v názoru, že relace lze nalézt v nepřeberném množství případů a situací. Věřím, že i případný čtenář této práce uvidí nyní svět okolo nás „očima relací“.

Seznam použitých informačních zdrojů

Balcar, B., & Štěpánek, P. (1986). *Teorie množin: vysokoškolská příručka pro studenty matematicko-fyzikálních fakult, skupiny oborů 11-matematické vědy.* Praha: Academia.

Čada, R., Kaiser, T., & Ryjáček, Z. (2004). *Diskrétní matematika (skripta).*
Načteno z Západočeská univerzita v Plzni:
https://home.zcu.cz/~ryjacek/students/DMA/skripta/

Jelínek, M. (1974). *Relace a funkce.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Kästner, H., & Göthner, P. (1986). *Algebra - každý začátek je lehký.* (K. Horák, Překl.) Praha: Mladá fronta.

Matoušek, J., & Nešetřil, J. (2009). *Kapitoly z diskrétní matematiky* (4. vyd.). Praha: Nakladatelství Karolinum.

Odvárko, O. (1972). *Úlohy o relacích a vektorové algebře pro 2. ročník gymnasia.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Pisklák, B. (2004). *Matematika pro učitele primárního vzdělávání - Binární relace a zobrazení - distanční text.* Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta.

Šrejder, J. A. (1978). *Binární relace.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

Veselý, F. (1963). *O nerovnostech.* Praha: Mladá fronta.

Vyšín, J., & Kučerová, J. (1973). *Druhý výlet do moderní matematiky.* Praha: Mladá fronta.

Seznam použitého značení

A, B, C, D, X, Y	množiny
$\emptyset$	prázdná množina
$A \subseteq B$	A je podmnožinou B
$A \subset B$	A je vlastní podmnožinou B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \backslash B$	rozdíl množin A a B
B'_z	doplněk množiny B vzhledem k množině A
x, y	prvky množiny
$\{x, y\}$	výčet prvků množiny
$[x, y]$	uspořádaná dvojice prvků
$\langle x, y \rangle$	uzavřený interval
(x, y)	otevřený interval
$x \in A$	x náleží, je prvkem, je elementem A
$x \notin A$	x nenáleží, není prvkem, není elementem A
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\forall$	obecný kvantifikátor (pro všechna)
$\exists$	existenční kvantifikátor (existuje)
$\wedge$	konjunkce (a zároveň)
$\vee$	disjunkce (nebo)
$=$	rovná se
$\neq$	nerovná se
$<$	být menší než
$>$	být větší než
$\leq$	být menší nebo rovno než
$\geq$	být větší nebo rovno než

$\Leftrightarrow$	ekvivalence (právě když)
$\Rightarrow$	implikace (pak platí)
$\mathrm{A} \times B$	kartézský součin množin A a B
R, S, T	relace
xRy	dvojice prvků x, y náležejících relaci R
U, V, W	zobrazení
f, g, h	funkce
$U: A \to B$	zobrazení z A do B
$O_1(R)$, $O_1(U)$	první obor relace, první obor zobrazení
$O_2(R)$, $O_2(U)$	druhý obor relace, druhý obor zobrazení
R'	doplňková relace k relaci R
$R \circ S$	složení relací R a S
R^{-1}	inverzní relace
U^{-1}	inverzní zobrazení
$\hat{R}$	tranzitivní uzávěr relace
R^n	n-násobné složení relace R
$R[x]$	třída ekvivalence relace R daná prvkem x
$D(f)$	definiční obor
$H(f)$	obor hodnot
m_{ij}	prvek matice v i-tém řádku a j-tém sloupci
E	jednotková matice
$\neg$	negace
$\lvert x \rvert$	absolutní hodnota čísla x
$x \mid y$	x dělí y
$\parallel$	rovnoběžnost přímek
$\perp$	kolmost přímek
$\sim$	podobnost
$\cong$	shodnost
ΔABC	trojúhelník ABC

Seznam obrázků