MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Zeman

Výklad derivace jako podílu diferenciálů

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D.
Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor: MCUP

Praha 2023

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych tímto poděkoval panu RNDr. Martinu Rmoutilovi, Ph.D., vedoucímu své bakalářské práce, za odborné vedení, trpělivost a ochotu věnované mi v průběhu psaní této práce.

Název práce: Výklad derivace jako podílu diferenciálů

Autor: Jakub Zeman

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem práce je podat alternativní výklad derivace, potažmo integrace s ohledem na historický přístup. K tomu má sloužit pojem diferenciál. V práci je s využitím větší řádky příkladů kladen důraz na názornost. Text samotný je členěn do 4 kapitol. V první z nich stručně vytyčím historické souvislosti v rozmezí řecké antické matematiky až po renesanční matematiku. Druhá kapitola se zabývá pojmem diferenciál. Jsou do ní zahrnuty i principy práce s těmito veličinami. Další dvě kapitoly se pak po řadě zaměří na samotnou derivaci a integraci. S využitím diferenciálů se čtenář může setkat s kdejakým ilustrativním odvozením.

Klíčová slova: derivace, diferenciál, tečna ke grafu funkce, limita

Title: Interpretation of the derivative as a quotient of differentials

Author: Jakub Zeman

Department: Department of Didactics of Mathematics

Supervisor: RNDr. Martin Rmoutil, Ph.D., Department of Didactics of Mathematics

Abstract: The aim of this thesis is to give an alternative interpretation of derivation, and hence integration, with regard to the historical approach. The notion of differential is intended to serve this purpose. The emphasis is on illustration with the use of a large number of examples. The text itself is divided into 4 chapters. In the first of these, I briefly set out the historical context ranging from Greek ancient mathematics to Renaissance mathematics. The second chapter deals with the concept of differentials. The principles of working with these quantities are included. The next two chapters focus on the derivative and integration itself. We ilustrate the use of differentials on various examples.

Keywords: derivative, differential, tangent line, limit

Obsah

Úvod

Motivace

Cílem této práce je podívat se na vybraná témata matematické analýzy (derivace, integrace) pomocí dnes zastaralého přístupu s využitím diferenciálů. Měla by vést k hlubšímu pochopení tohoto pojmu, který se hojně vyskytuje např. ve fyzikálním prostředí.

V rámci textu se pak snažím klást důraz na názornost a doplňuji ho o různé příklady (ať už matematické nebo popularizační). Charakter textu by tak měl vyhovovat čtenáři, který se s Matematickou analýzou již setkal (např. formou kurzů na vysoké škole) a má zájem povrchově prostudovat jiný přístup, ale i čtenáři, který se s derivacemi a integracemi doposud podrobněji nesetkal (např. středoškolský student).

Nejprve stručně okomentuji historii vývoje Matematické analýzy, načež se pokusím přiblížit čtenářům pojem *diferenciál*. Na tomto základě pak rozvinu na omezené úrovni problematiku derivací a posléze i integrací. Vrcholem pak bude jejich vzájemné propojení.

Varování

V následující práci dochází kvůli snaze o intuitivní přístup k různým matematickým nepřesnostem. Přepokládám existenci diferenciálů v rámci reálné číselné osy, což je provinění proti rigorózní matematice, protože diferenciál de facto nemá rozumnou reálnou velikost. Přesto že v určitém kontextu diferenciál má pevnou definici a propracovanou teorii (nestandardní analýza), raději zůstávám u nepřesné zato snazší koncepci infinitesimální veličiny na reálné ose. Diferenciál tak sice v práci do reálné osy zahrnuji, ale nepřikládám mu reálný rozměr, bude to tedy nereálná veličina ležící na reálné ose. Tuto skutečnost beru v potaz zejména při zanedbávání diferenciálů vůči reálným veličinám, samy vůči sobě totiž nejsou zanedbatelné, ale o tom až dále.

V souvislosti s tím se dopouším několika dalších prohřešků, jako je například předpoklad existence sousedních bodů na spojité křivce nebo odvození platných pravidel pomocí nepřesně definovaných veličin a operací.

Apeluji tak na čtenáře, aby následující text bral s rezervou a omluvil matematické nedostatky, které vznikly kvůli snaze o věrný historický, potažmo intuitivní přístup.

1. Historie

V tomto stručném přehledu dějin matematiky se zaměřím na infinitesimální úvahy a úlohy, které s nimi spojujeme. Výpočty obsahů už probíhaly za dob Mezopotámských, my však začínáme přehled až od matematiky starověkého Řecka.

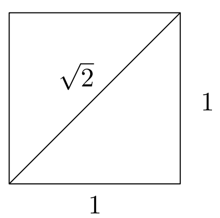
Matematika tehdy procházela vývojem od čistě praktické vědy k teoretické disciplíně a byla poměrně úzce spjata s filosofií. Řekové hledali příčiny problémů a svá tvrzení dokazovali, postupně naráželi na problematiku nekonečna. Neexistovala disciplína, která by se jím explicitně zabývala, přesto však při operacích s nekonečnem dosahovali Řekové úctyhodných výsledků.[1]

1.1 1. krize matematiky

Pýthagorás (asi 580 – 500 před n. l.) je pro dnešní školskou matematiku významný zejména díky tzv. *Pýthagorově větě*, jež nese jeho jméno. Nicméně pro nás je zajímavé jeho chápání matematických objektů. Mluvíme zde o *aritmetické koncepci. Arithmos* – tedy číslo – je pro Pýthagora základem bytí.[2] Pýthagorejci přikládali číslům mystické vlastnosti, skládali je do geometrických útvarů (figurální čísla) a hledali mezi nimi ideální poměry. Přesto pracovali pouze s přirozenými a racionálními čísly, a tak pro ně objev nesouměřitelnosti úseček, kterého dosáhli, znamenal zásadní změnu.

Definice 1. *Úsečky a, b jsou souměřitelné, pokud existuje měrná úsečka taková, jejímiž celočíselnými násobky jsou úsečky a, b.*

Tuto definici však nesplňují například úhlopříčka se stranou v jednotkovém čtverci, neboť jejich poměr nelze vyjádřit poměrem přirozených čísel. (Viz obrázek 1.1) Dnes říkáme, že $\sqrt{2}$ je iracionální. Důsledkem tohoto objevu a důsledkem nevyhnutelného zhroucení předchozího chápaní matematiky přichází období, které dnes nazýváme *1. krizí matematiky.*[3]



Obrázek 1.1: Úhlopříčka v jednotkovém čtverci.

Řekové byli schopni zkonstruovat úsečku iracionální délky, a svět geometrických veličin tak byl najednou bohatší než svět čísel, což notně podnítilo další

[1] SCHWABIK, Štefan; ŠARMANOVÁ, Petra: Malý průvodce historií integrálu in *Dějiny matematiky, 6. svazek.* (1996: Praha, Prometheus) s. 8-9

[2] BEČVÁŘ, Jindřich (ed.); FUCHS, Eduard (ed.): Historie matematiky I. Sborník in *Dějiny matematiky, 1. svazek.* (1994: Brno, Jednota českých matematiků a fyziků) s. 12, s. 33

[3] Historie matematiky I s. 12, s. 58-63

vývoj matematiky. Změnil se přístup k veličinám a řekové začli rozvíjet jejich *geometrickou koncepci*. Veličiny přestaly být chápány jako přirozená nebo racionální čísla, místo nich nastoupily geometrické útvary (délky, obsahy, objemy).[4]

To znamelo krok směrem k množině reálných čísel a k její spojitosti, řekové se pustili do geometrických úloh a jejich matematiku v tomto období ovlivnil právě přístup k nekonečnu. Zatímco dnes už jsme existenci nekonečna v matematice přijali, ve starověku v této oblasti dosud tápali. Nekonečné a nekonečně malé veličiny na jednu stranu zavrhovali, přesto s nimi však úspěšně operovali[5].

1.2 Zénónovy paradoxy, eleaté

Osobnost, která nesmí v našem historickém přehledu chybět, je filosof a matematik Zénón (asi 490 – 430 před n. l.)[6]. Byl jedním z eleatů (viz *Historie matematiky I, s. 29*), žák Parmenida. Je znám hlavně jako zakladatel dialektiky a mistr polemik, jenž upřednostňoval rozum před smyslovým vnímáním.

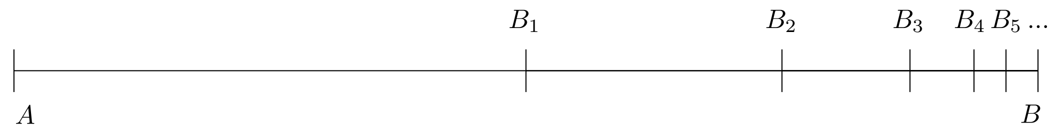
Zajímavým příkladem antického vnímání nekonečna jsou jeho *aporie* (slepé uličky rozumu) o nemožnosti pohybu, ve kterých svou roli hraje snaha sečíst nekonečně mnoho členů, nebo projít nekonečně mnoha body. Zénón přepokládá, že ani jedno není možné zvládnout v konečném čase a na tom staví své důkazy.

Ze čtyř *aporií* si ukážeme dvě snazší. Jako první uvedu důkaz, že nelze překonat stanovenou vzdálenost, protože musíme projít nekonečně mnoha body.

Příklad. Představme si úsečku AB délky 1. Abychom se z bodu A dostali do bodu B, musíme nejprve dosáhnout středu B_1 úsečky AB. Poté musíme projít postupně středem B_2 úsečky B_1B, středem B_3 úsečky B_2B atd. Musíme tedy projít nekonečně mnoha body, přičemž urazíme vzdálenost

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \tag{1.1}$$

Dnes už víme, že součet této (1.1) nekonečné řady je roven 1 – tedy délce původní úsečky. Podle Zénóna nemůžeme dorazit do cíle, protože ať už se nacházíme v kterémkoli z těchto bodů, čeká nás ještě nekonečně mnoho dalších. Situaci ilustruje obrázek 1.2.



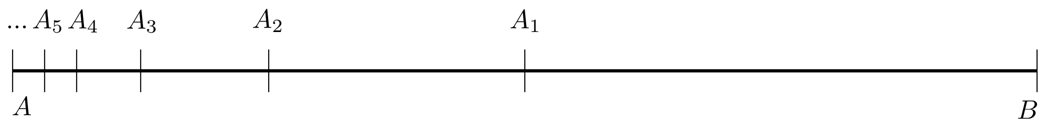
Obrázek 1.2: Cesta z A do B, kdy musíme vždy urazit nejprve poloviční vzdálenost ze zbývajícího úseku.

Na situaci se můžeme dívat ještě z jiného úhlu. Mějme opět úsečku AB délky 1. Představme si, že jsme v bodě A. Chceme-li dosáhnout bodu B, musíme nejdříve urazit poloviční vzdálenost do středu A_1 úsečky AB. Předtím však musíme dosáhnout středu A_2 úsečky AA_1 a ještě dříve středu A_3 úsečky AA_2 atd. Takže nemůžeme vyrazit, protože sebemenším prvním krokem musíme současně překonat nekonečně mnoho ještě menších kroků. Viz obrázek 1.3.

[4]Historie matematiky I s. 63

[5]Historie matematiky I s. 12, Malý průvodce historií integrálu s. 9-10

[6]Malý průvodce historií integrálu s. 10



Obrázek 1.3: Cesta z A do B, kdy neznáme první bod naší cesty.

Příklad. Podobná je *aporie* „Achilles a želva“, ve které Zénón ukazuje, že nejrychlejší tvor nikdy nedoběhne toho nejpomalejšího.[7] Vlastně jde o stejný případ jako první výklad úvodní *aporie.* Achilles běží za želvou. Želva má sice náskok, ale běží pomaleji. Aby ji Achilles dostihl, musí nejdříve doběhnout do bodu, kde se zvíře právě nalézá, ale než se tak stane, přesune se želva dále a Achilles musí běžet do nové pozice, kam se právě přesunula. Než tam však dorazí, želva urazí další úsek. Achilles ji tak nikdy nedožene, protože vždy než dorazí na místo, kde se zvíře nachází, želva se posune dále. Vzdálenost mezi oběma závodníky se sice zkracuje, ale je vždy nenulová.[8]

Poznámka. Tyto paradoxy dokáže uspokojivě rozřešit až připuštění nekonečna do matematiky. První *aporie* souvisí s nekonečným sčítáním infinitesimálních vzdáleností, které dá nazpět původní délku úsečky AB. Tj. ačkoliv máme nekonečně mnoho úseček položených za sebou, tak jejich celková délka je díky jejich infinitesimálním rozměrům konečná.

Druhou „aporii“ pak můžeme vysvětlit prostřednictvím součtu nekonečných řad. Přestože máme nekonečně mnoho úseků, na kterých Achilles postupně zkracuje vzdálenost k želvě, jejich celkový součet bude konečný opět díky infinitesimálním délkám jednotlivých úseků.

1.3 Démokritos, atomisté

Jak už jsem se zmínil, matematika byla v antických časech úzce spojena s filosofií. Démokritův (asi 460 – 370 před n. l.) *atomismus* vychází z fyzikální představy základní nedělitelné částice; respektive z filosofické interpretace vesmíru složeného z nedělitelných částic. Tato filosofie aplikovaná v matematice si vyžádala obratnost v zacházení s nekonečnem, a to i přes skutečnost, že atomisté nekonečno ani nekonečné dělení neuznávali.

Totiž jednou ze základních tezí atomistů bylo, že všechny geometrické útvary se skládají z malých dále nedělitelných částic, kterých je omezené množství. Typickým postupem pak bylo rozkládat geometrické útvary na tyto matematické atomy, jichž je sice tolik, že jednotlivé částečky nerozeznáme, ale není jich nekonečně mnoho.[9]

Úpadek atomistické metody společně s úpadkem pýthagorejské školy přichází po objevení nesouměřitelnosti úseček. V atomistickém pojetí není myslitelné, aby nebyly dva objekty souměřitelné, znamenalo by to, že nejsou složené ze stejných

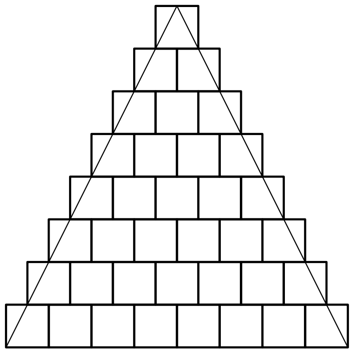
[7]BEČVÁŘ, Jindřich (ed.); FUCHS, Eduard (ed.): Historie matematiky II. Sborník in *Dějiny matematiky, 7. svazek.* (1997: Praha, Prometheus) s. 8, viz též Aristotelova Fysika (kniha 6, hlava 9)

[8]Historie matematiky II s. 9-12

[9]BEČVÁŘ, Jindřich (ed.); FUCHS, Eduard (ed.): Matematika v proměnách věků I. Sborník in *Dějiny matematiky, 11. svazek.* (1998: Praha, Prometheus) s. 175-176

„atomů“ – respektive, že ani tato základní jednotka není jejich měrnou veličinou. To jest, alespoň jedna z úseček není složená pouze z těchto nedělitelných částic.[10]

Příklad. Pro inspiraci ukáži příklad výpočtu obsahu trojúhelníka atomistickou metodou. Trojúhelník, se kterým budeme počítat, má délku základny rovnou délce výšky nad základnou. Představme si, že obvod trojúhelníka není složen z rovných čar. Celá plocha je poskládána ze čtverců (dále nedělitelných). Ovšem je jich tak moc, že se našim smyslům jeví strany jako rovné úsečky. Takový trojúhelník jsem načrtl do obrázku 1.4.



1
2
3
4
5
6
7
8

Obrázek 1.4: Trojúhelník z atomistické perspektivy.

Trojúhelník se skládá z postupně narůstajícího počtu čtverců. Od vrcholu má každé další patro právě o jeden čtverec více. Vrchol tedy tvoří jeden čtverec, základna je tvořena n čtverci. V našem obrázku je $n = 8$, ale představme si velmi velké n. Obsah útvaru je roven součtu všech těchto čtverců. Sčítáme tedy z vrchu postupně po patrech všechny čtverce

$$S_\Delta = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n.$$

Tento součet je roven $n \cdot (n+1)/2$. Když je atomů velmi mnoho (tj. n je velké), nerozlišíme našimi smysly počet n a $n + 1$. (Prakticky tedy $n = n + 1$.) Proto nevadí, když místo $n \cdot (n+1)/2$ budeme psát pouze $n^2/2$. Máme tak součet všech čtverců v trojúhelníku, když ho vynásobíme jejich infinitesimálním obsahem, získáme tak součet obsahů a to už je vzorec $a^2/2$.[11]

Poznámka. Dnes takové obrázky můžeme vidět v digitální podobě. Pokud třeba nakreslíme v počítačovém programu bez vektorové grafiky kružnici a obrázek přiblížíme, uvidíme, že je kružnice složena z jednotlivých pixelů a není dokonale hladká.

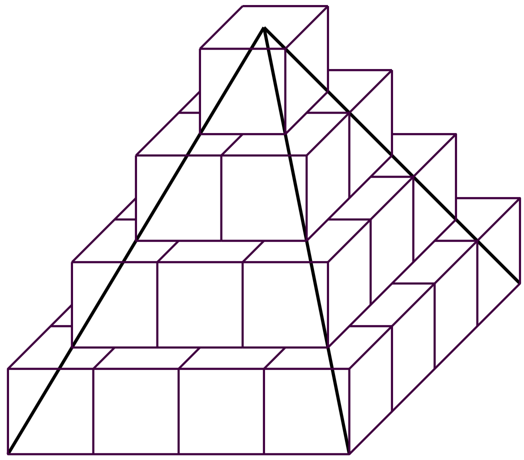
Příklad. Podobně lze odvodit i vzorec pro výpočet objemu jehlanu, jenž má výšku rovnou délce strany základny. Postavíme si pyramidu z kostiček. Každé patro se tak skládá z k^2 kostek. Nejvyšší patro tvoří jen jedna kostka, druhé tvoří 4 kostky, další 9 kostek atd. Na obrázku 1.5 mám pyramidu postavenou pouze ze čtyř pater, budeme ale uvažovat pyramidu postavenou z velkého množství kostek a o tolika patrech, že se nám schodiště jeví jako rovná plocha.

Pro výpočet objemu takového jehlanu stačí sečíst řadu $1+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2$. I součet této řady je dobře znám. Počet kostiček je roven zlomku

$$\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

[10] Matematika v proměnách věků I s. 179-180

[11] Matematika v proměnách věků I, s 175-176



Obrázek 1.5: Jehlan v atomistické perspektivě.

Opět uvažujeme jejich velmi velký počet, takže našimi smysly nerozlišíme čísla n a $n + 1$ stejně, jako nerozlišíme $2n$ a $2n + 1$. Položme tedy $n + 1 = n$ a $2n + 1 = 2n$. Po této úvaze se nám zlomek redukuje na $n^3/3$, pokud ho navíc vynásobíme infinitesimálním objemem jedné krychličky, získáme vzorec $1/3 \cdot a^3$.

Poznámka. Počet čtverečků v prvním příkladě byl nepředstavitelně velký, dokonce obsahoval součin dvou takto velkých čísel. Naproti tomu obsah jednoho tohoto čtverečku je nepředstavitelně malý a je složen ze součinu dvou takto malých délek. Když tedy počet vynásobíme tímto obsahem, získáme vzorec obsahující veličiny rozumného rozměru. To stejné (až na to, že máme součin 3 rozměrů) platí i pro jehlan. Hlouběji se tímto budeme zabývat v sekci 2.4, respektive v kapitole 4.

1.4 Eudoxova exhaustivní metoda

Eudoxos z Knidu (asi 408 – 355 před n. l.) přišel s teorií proporcí, jež spolu s jeho exhaustivní metodou nahradila dosavadní aritmetickou teorii pýthagorejců. Šlo svým způsobem o tehdejší teorii reálných čísel. Oproti pýthagorejcům se neomezil pouze na souměřitelné veličiny a zahrnul i iracionální čísla. Exhaustivní metoda pak byla postavena na nekonečném dělení; vepisováním mnohoúhelníků do křivky, byl Eudoxos schopen určit obsah pod grafem křivky.

Příklad. Ukažme si, jakým způsobem postupoval. Do útvaru A s obsahem S_A vepíšeme mnohoúhelník P_1, jehož plocha S_{P_1} je větší než $S_A/2$. Ten pomocí dalšího mnohoúhelníka většího než polovina zbylé plochy $(S_A - S_{P_1})$ rozšíříme na mnohoúhelník P_2. Dalším mnohoúhelníkem větším než polovina zbytku rozšíříme stávající na mnohoúhelník P_3. Takto můžeme postupovat neustále, pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ z množiny reálných čísel existuje mnohoúhelník P_n takový, že rozdíl obsahů $S_A - S_{P_n} < \varepsilon$. Je totiž menší než $S_A/2^n$.[12]

Z výpočtu níže vidíme, jak postupně roste mocnina u dvojky ve jmenovateli, čím větší je, tím neptarnější celý zlomek bude.

[12] Malý průvodce historií integrálu s. 12-15

$$
\begin{aligned}
S_A - S_{P_1} &< \frac{S_A}{2} \\
S_A - S_{P_2} &< \frac{S_A - S_{P_1}}{2} < \frac{S_A}{2^2} \\
S_A - S_{P_3} &< \frac{S_A - S_{P_2}}{2} < \frac{S_A - S_{P_1}}{2^2} < \frac{S_A}{2^3} \\
S_A - S_{P_n} &< \ldots < \frac{S_A}{2^n}
\end{aligned}
$$

Kdyby n bylo velmi velké, byl by zlomek $S_A/2^n$ naopak velmi malý. Takže rozdíl $S_A - S_{P_n}$, který je menší než tento zlomek, by byl prakticky zanedbatelný.

1.5 Archimédés

O Archimédovi (asi 287 – 212 před n. l.) kolují příběhy, kterak objevil zákon o vztlaku ponořeného tělesa a další. Nás ovšem zajímají jeho práce kolem obsahů rovinných útvarů, důmyslně rozpracoval Eudoxovu exhaustivní metodu a doplnil ji o opsaný mnohoúhelník. Obsahy útvarů tak vtlačoval mezi obsah opsaného a vepsaného mnohoúhelníka.

Poměrně známý je příklad kvadratury[13] paraboly, Archimédés dokázal, že obsah úseče paraboly je roven 4/3 obsahu trojúhelníka vepsaného do této úseče. Vepisoval postupně další a další trojúhelníky do dílčích úsečí, přičemž dokázal, že každý je větší než polovina obsahu dané úseče. Jeho dalšími úvahami bylo, že přikreslením dalších a dalších trojúhelníků získá součet jejich obsahů (kde α je obsah prvního vepsaného trojúhelníka):

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha}{4^i}.$$

Výpočet si můžete projít například v publikaci *Malý průvodce historií integrálu* na s. 15-17. Archimédés z této sumy dalšími kroky odvodí vzorec

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\right) \cdot \alpha,$$

jehož jeden člen obsahuje ve jemenovateli 4^n. Pro dostatečně velké n celý člen zanedbá a zbyde mu pouze člen se zlomkem 4/3, odkud tedy vyplývá pospaný vztah mezi obsahem úseče a trojúhelníka.

1.6 Renesance – zrod infinitesimálního počtu

Předchůdci moderního infinitesimálního počtu byli renesanční vědci Johannes Kepler (1571 – 1630) a Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647). Samozřejmě nebyli jediní, kteří se na vývoji podíleli, nicméně oba dva se s grácií pustili do infinitesimálních úvah. Kepler přišel s odvozením vzorce pro výpočet obsahu kruhu

[13] Tj. převední obsahu útvaru na obsah čtverce – prakticky tedy určení plochy

pomocí rozdělení na nekonečně malé rovnoramenné trojúhelníčky, které pak poskládál do jednoho reálného pravoúhlého trojúhelníka. (Viz sekce 4.1) Známé jsou i jeho nebeské zákony aj.

Oproti tomu Cavalieri pracoval ve více dimezích zároveň. Zpracoval takzvaný Cavalieriho princip. Pokud mají dvě tělesa o stejné výšce shodné všechny odpovídající si obsahy řezů rovinami rovnoběžnými s podstavou, pak mají stejný objem. Představme si, že jsou tělesa poskládaná z tenkých plátků, kterých je nekonečně mnoho. Každý plátek má vlastně infinitesimální objem. Když je všechny poskládáme na sebe, vznikne celý objekt.[14]

1.6.1 Newton, Leibniz

V druhé polovině 17. století už byl pohyb chápán jako spojitý proces. S nekonečnými veličinami se počítalo a infinitesimální úvahy se ukázaly být funkční. Nicméně s ucelenou teorií přišli až Newton a Leibniz. Obecně se uznává, že své objevy učinili nezávisle na sobě, a přispěli tak rozvoji infinitesimálního počtu stejnou měrou. Mezi nimi samými však panovaly velké spory o prvenství.

Isaac Newton (1643 – 1727) opíral své infinitesimální úvahy o tzv. *teorii fluxí a fluent*. Křivku resp. funkci chápe jako trajektorii bodu. Tím se značně blíží dnešní dynamické představě. Promněnné veličiny (x, y) nazýval *fluenty* a veličiny popisující jejich změnu nazýval *fluxe* $(\dot{x}, \dot{y})$. Dnes bychom *fluxe* chápali jako podíl diferenciálů $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Jeho teorie stavěla na fyzikálních principech a byla značně provázána s praxí. Když uplyne doba dt, posune se bod po své trajektorii o dx do prava a o dy vzhůru. Fluxe $\dot{x}$ a $\dot{y}$ tak popisovaly rychlost, s jakou se bod v daném směru pohybuje. Jejich podíl je dnešní derivace.

Naproti tomu Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) dával přednost statickému pohledu na fuknce. Křivky pro něj představovaly v zásadě lomené čáry poskládané z infinitesimálních úseček. Zatímco od Newtona jsme si odnesli dynamickou povahu funkce, Leibniz vytvořil dnes rozšířené značení $(\int, dx)$. Podíl diferenciálů popsal pomocí charakteristického trojúhelníka a integrál chápal jako nekonečný součet diferenciálů.[15]

Poznámka. Právě Leibnizovo pojetí funkcí a derivací je základem této práce. Stavím na modelu dvou „sousedních“ bodů spíše než na principu trajektorie pohybujícího se bodu. V každé kapitole se pak setkáte s odkazem na Leibnizův charakteristický trojúhelník s infinitesimálními stranami.

Oba matematici jsou společně dodnes považováni za autory tzv. *Newtonovy-Leibnizovy formule*, která sleduje vztah mezi derivací a integrálem. Ačkoli kus práce odvedli i propracováním teorie okolo nekonečných a nekonečně malých veličin, právě objev toho, že derivace a integrace jsou navzájem inverzní operace, byl vskutku zásadní.

Oba dva přístupy však postrádaly pevně stanovený řád. Přestože matematická analýza přinášela výsledky v mechanice, v astronomii a v dalších fyzikálních odvětvích, objevily se i kritické hlasy. Nekonečně malé veličiny nebyly pevně uchopeny. Když bylo potřeba, měly nenulovou hodnotu. A když se to hodilo, bylo možno je naopak zanedbat a položit rovné nule.

[14] Malý průvodce historií integrálu s. 23-26

[15] Malý průvodce historií integrálu s. 35-45

Tento benevolentní přístup k elementárním pojmům v exaktní vědě způsobil tzv. *druhou krizi matematiky*. Výsledky byly většinou správné, ale postup byl, řekněme, nahodilý. Matematická analýza nalezla východisko z této krize až díky francouzskému matematikovi Augustinu-Louisovi Cauchymu (1789 – 1857) a dalším, kteří se zabývali pojmem limita.

Dalším nedostatkem byly nejasné a intuitivní přístupy k množině reálných čísel. Stále převládalo antické geometrické chápání veličin, které se však při následné aritmetizaci analýzy v 19. století, za kterou byl odpovědný zejména německý matematik Karl Weierstrass (1815 – 1897), ukázalo jako zoufale nedostatečné. Proto vznikly způsoby, jak definovat reálná čísla. Limita v $\mathbb{R}$ totiž vyžaduje, aby byla množina reálných čísel v jistém smyslu úplná (aby např. limita nějaké posloupnosti reálných čísel nemohla ležet mimo $\mathbb{R}$). Postupně tedy byla vybudována nová teorie reálných čísel a moderní Matematická analýza založená na limitách.

V této práci se ale ohlédneme zpět k infinitesimálním veličinám a k takzvaným *diferenciálům*. Ukáži, že ačkoli tento historický přístup není z dnešního pohledu uspokojivý a ačkoli matematická analýza nyní staví na pojmu limity, stále nalezneme určitou krásu a eleganci historického přístupu využívajícího diferenciálů.

2. Diferenciál

2.1 Zanedbatelně malý

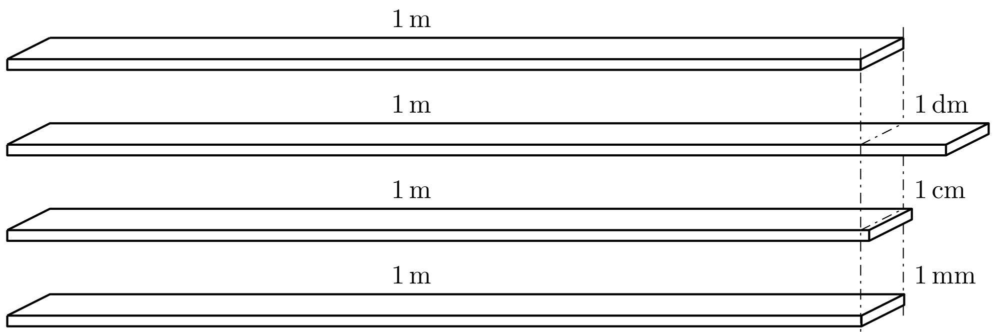
Jak už vyplývá z předchozích kapitol, první zásadní úvahy o nekonečně malých veličinách nestály pevně na bezchybné teorii. Výpočty vycházely dobře, ale celý kalkulus se opíral o velice chatrný a špatně definovaný pojem diferenciál. Existují sice způsoby, jak diferenciál definovat, domnívám se ale, že pro pochopení jeho významu by nám neposloužily. Pokusím se zde tedy přiblížit myšlenku nekonečně malé veličiny spíše intuitivní cestou.

Příklad. Představme si nyní úsečku délky 1. Rozdělme ji na 10 menších stejně dlouhých úseček. Zvolme jednu z nich, její délka je zřejmě 1/10; tedy v porovnání s původní je 10krát kratší. Spojením původní úsečky s jednou její dílčí úsečkou se původně jednotková úsečka prodlouží na délku 11/10, taková změna je poměrně výrazná.

Zkusme tedy vzít úsečku délky 1/10 a opět ji rozdělit na 10 stejných dílů. Jeden má délku 1/100 původní úsečky. Znovu sečtěme délky původní a vzniklé úsečky. Prodloužení o setinu původní délky je takřka neznatelné. Délka vzniklé úsečky je v tuto chvíli 101/100.

Pro ilustraci si můžeme představit špatně uříznuté metrové prkno, jehož délka je 1 m a 1 cm (tedy 101/100 m). Chyba není velká, protože centimetr je daleko menší jednotka než metr, přesto však může být při pokládání prkna problematická.

Po dalším dělení úsečky na desetiny, se už dostáváme na hodnotu 1/1000 původní délky. Tisícina jednoho metru je 1 mm. V porovnání s jedním metrem je milimetr opravdu zanedbatelný. Kdybychom místo metrového, uřízli prkno o milimetr delší, ani si toho nevšimneme.



Obrázek 2.1: Metrová prkna se zmenšujícími se přesahy v pravo.

Na obrázku 2.1 vidíme, jak vypadají v poměru ku jednomu metru nejdříve decimetry (tj. 1/10 metru), poté centimetry (1/100 metru) a nakonec milimetry (1/1000 metru). U poslední úsečky pravděpodobně pouhým okem nezaznamenáme změnu.

Příklad. Pro zajímavost uvedu ještě jeden populární příklad. Podíváme se na původ slov „minuta“ a „sekunda“. Minuta, jsouc jednou šedesátinou hodiny, je dle mého názoru v porovnání s délkou jedné hodiny zanedbatelná. Když se ptám na čas, minuty mě zpravidla ani moc nezajímají. Všimněte si, že se zpravidla ptáme: „Kolik je hodin?" A pokud je třeba zrovna právě minuta po páté hodině, dostane se nám jednoduché odpovědi: „Pět."

Slovo minuta je minulým ženským příčestím od latinského *minuere* (zmenšit). Přeložili bychom to tedy jako „zmenšená". Užívala se v sousloví *pars minuta prima* (první zmenšená část), v šedesátkové soustavě jedna šedesátina. A jedna šedesátina z minuty byla *pars minuta secunda* (druhá zmenšená část). Tak tedy vznikl i název pro sekundu.[1]

Je-li minuta tak krátká v porovnání s jednou hodinou, je i sekunda krátká vedle minuty. A jedna sekunda je vedle hodiny naprosto nepostřehnutelná. Mohli bychom zde použít sousloví „zanedbatlenost druhého stupně". I s takovými případy se setkáme. (Viz subsekce 2.4.1)

Poznatek. Jsou tedy v životě chvíle, kdy nějakou velikost běžně zanedbáme, ať už je to milimetr navíc na metrovém prkně nebo minuta po odzvonění páté hodiny. Jindy však tyto velikosti shledáme zcela zásadními. Například při precizním rýsování někdo už nepřesnost v řádu jednoho milimetru nepřijme a pokud nějaký váš kolega vydrží při soutěžení o celou jednu minutu déle pod vodou než vy, jistě za to sklidí ovace.

Je tedy jasné, že abychom mohli nějakou velikost zanedbat, musíme se podívat „okolo", zda je v porovnání s ostatními opravdu nepatrně titěrná. Přenesením principu *zanedbání vůči něčemu* do světa matematiky se konečně dostáváme k pojmu diferenciál.

2.2 Diferenciál

Poznámka. Následující řádky berte s rezervou, nejedná se o formální matematiku. Cílem je spíše shrnout a sumarizovat poznatky pro lepší pochopení.

Vymezení pojmu 1. *Diferenciál pro nás bude nekonečně malá (tj. infinitesimální) přesto však nenulová veličina, která je v porovnání s libobolnou kladnou reálnou veličinou zanedbatelná.*

Poznatek. V předchozí sekci jsem ukázal, jak nějaká malá velikost je vůči jiné zanedbatelná. Když se ale budeme snažit, najdeme ještě menší, která bude zanedbatelná dokonce i v porovnání s tou malou. Po dalším úsilí najdeme ještě menší a zanedbatelnější atd. Diferenciál je však zanedbatelný vedle všech těchto rozměrů. Ať bychom vzali sebemenší kladnou velikost, od zrnka písku až po zrnko prachu, diferenciál je nekonečně menší.

Kdybych měl navíc podat jeho rozumnou geometrickou představu, vzal bych nějakou úsečku x a kouzelnou lupou bych přiblížil její obraz natolik, že by byla patrná vzdálenost dvou „sousedních bodů", tvořících infinitesimální úsečku. A právě délku této elementární úsečky nazýváme diferenciál dx. Symbol dx tedy vlastně znamená zanedbatelně malá část x.

Poznámka. Zde by bylo vhodné okomentovat jakési dvojí chápání pojmu diferenciál. Můžeme si ho představit jako vzdálenost (rozdíl) dvou „sousedních" bodů na nějaké křivce; nutno podotknout, že v dnešním pojetí na spojité linii neexistují

[1] Viz etymologický slovník Etymoline.com [online]

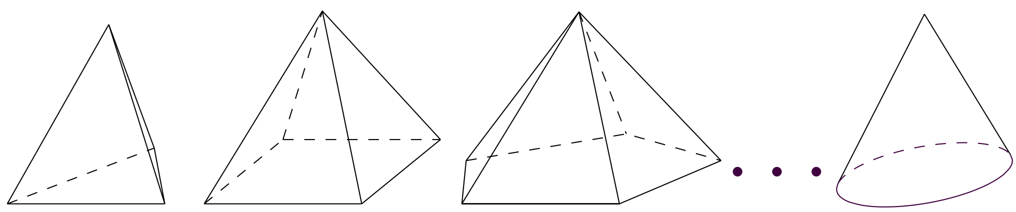
sousední body, vždy je totiž nějaký bod mezi nimi (např. střed jejich spojnice). Přesto však je pro nás tato představa dle mého názoru snadněji uchopitelná než níže uvedená druhá, a budu ji tak často využívat i přes její formální nedostatky.

Druhá interpretace je zaměřena na jeho zásadní vlastnost – tedy, že je diferenciál nekonečně menší než libovolné kladné číslo. V *nestandardní analýze* je postaven mimo osu reálných čísel, což značí krom jiného to, že jeho velikost se nedá pevně uchopit. Je prostě tak malý, aby byl vedle všech kladných veličin zanedbatelný.

Příklad. Ptáte-li se, jaký význam má nekonečně malá veličina ve světě rozumných reálných velikostí, pravděpodobně vám učitelé ve škole zatajili, že jste s její pomocí společně odvodili například obsah kruhu. Ukážeme si, jak s využitím diferenciálu odvodit vzorec pro objem kužele.

Začneme u objemu jehlanu, jenž je dán součinem $\frac{1}{3}S_p \cdot v$, kde S_p značí obsah podstavy a v výšku jehlanu. To platí pro libovolný n-boký jehlan.

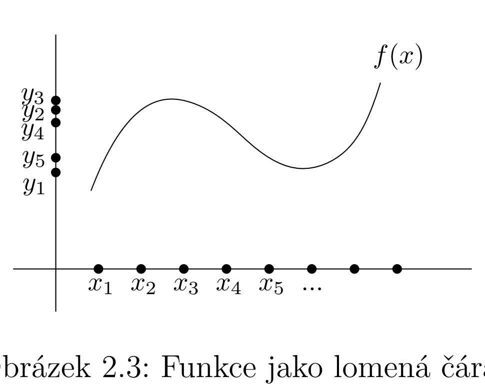
Představme si, že se kružnice skládá z mnoha elementárních úseček, jež spojují po řadě každé dva „sousední“ body obvodu. Díky této úvaze je v zásadě problém vyřešen. Kruh je tím pádem jen další n-úhelník – byť s nepředstavitelně mnoha vrcholy – a pro kužel tak platí stejný vzorec jako pro jehlany s reálnými stranami podstav. Podobnou úvahu měl ve stejném příkladě i řecký atomista Démokritos z Abdér.



Obrázek 2.2: Kužel jako jeden z jehlanů.

Příklad. Pojďme příklad výše posunout trochu dál. Jsme-li totiž schopni představit si dokonale hladkou kružnici jako n-úhelník, jsme také schopni představit si i podobně hladkou funkci jako lomenou čáru složenou z infinitesimálních úseček.

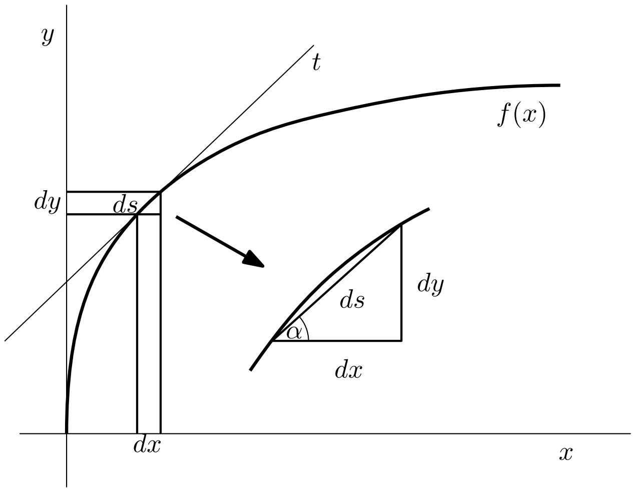
Kdybychom rozdělili část osy x na infinitesimální intervaly s krajními body x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 atd., jimž by odpovídaly funkční hodnoty y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 atd., právě taková lomená čára by spojením bodů (x_i, y_i) a (x_{i+1}, y_{i+1}) vznikla. (Viz obrázek 2.3.) Rozdíl $x_{i+1} - x_i$ by byl diferenciál dx a rozdíl $y_{i+1} - y_i$ diferenciál dy.



Obrázek 2.3: Funkce jako lomená čára.

Často je potřeba umět spočítat plochu pod křivkou, což může být celkem ošemetná záležitost. Spočíst plochu pod lomenou čárou už ale není takový problém, prostě sečteme dílčí plochy pod každou úsečkou. Ty se skládají z obdélníků o stranách délky dx a $f(x_i)$ a z infinitesimálních trojúhelníků. Když zanedbáme obsahy trojúhelníků a sečteme pouze všechny obdélníky na nějakém intervalu (a, b), získáme velikost zkoumané plochy pod křivkou mezi body a a b. Podrobněji v sekci 4.3.

Kdyby nás naopak zajímalo, jak vypadá tečna ke grafu funkce v nějakém bodě, mohli bychom se zaměřit na ten infinitesimální trojúhelník s odvěsnami délky dx a dy. (Někdy se o něm hovoří jako o Leibnizově charakteristickém trojúhelníku,[2] čehož se podržím i já.) Prodloužením přepony, kterou jsem v obrázku 2.4 označil jako ds (je také infinitesimální), bychom snadno získali tečnu ke grafu funkce. O tom ale až v subsekci 3.4.3.



Obrázek 2.4: Charakteristický trojúhelník.

2.3 Kde se vzal název

Valnou část dnešní symboliky nám dal Leibniz. Například symbol d je prvním písmenem z latinského slova *differentia*, což můžeme přeložit jako „rozdíl“ nebo „odlišnost“. Vzpomeňte ještě na počeštěnou variantu: diference. Symbol d tedy zmenšuje rozměry obsažených veličin a zároveň dle mého názoru šikovně navozuje geometrickou představu rozdílu dvou „sousedních“ bodů na křivce.

V anglické literatuře pak pro proces derivování uchovávají na diferenciály užší vazbu než my a užívají termín *differentiation* se stejným původem. Samotné slovo derivace (nebo anglické *derivative*) pak pochází, jak jinak, opět z latiny konkrétně z příčestí minulého slovesa *derivare* nesoucího význam „odvádět či odtahovat“. Následně byl využíván například v podobě francouzského *derivatif*, a to v lékařském prostředí. Odtud tedy máme pro slovo derivace synonymum „odvození“. Můžeme ho tak chápat jako „odchylku“ nebo „odlišnost“ ale i jako „druhotný“ nebo „odvozený“ prvek (anglická varianta *derivative* může být jak adjektivem, tak substantivem).

[2] JAHNKE, Hans Niels (ed.): A History of Analysis. (2003: Providence (USA), American Mathematical society). s. 89

Pro integrál Leibniz nejprve užíval latinský termín *omnia* („veškerenstvo“) se symbolem *omn*, v roce 1675[3] ale přešel na dnes užívaný symbol $\int$ (tedy protáhlé S) odvozený z prvního písmene latinského *summation*, resp. *summa*, tedy „sčítání“, resp. „souhrn“ (původně znalostí). Symbol $\int$ tak značí součet.

Název integrál mu však připsal až dodatečně Jakob Bernoulli.[4] Slovo integrovat pochází z latinského *integratus* s významem „spojovat části v celek“ nebo „učinit něco celistvým“.

2.4 Relativní zanedbatelnost diferenciálu

Ačkoli je diferenciál dx vedle nenulových reálných veličin sám o sobě zanedbatelný, neznamená to, že si ho můžeme z rovnic vyškrtnout vždy, když se v nich objeví, zvláště pokud rovnice obsahuje více diferenciálů. Proto vám nabídnu několik tvrzení, která by mohla alespoň trochu osvětlit, kdy je možné diferenciály zanedbat a kdy ne.

Poznatek. Diferenciál vždy zanedbávám vůči něčemu, vedle něčeho, v porovnání s něčím atp. I když je sám mezi reálnými nenulovými čísly zanedbatelný, kdybych ho chtěl porovnat například s jiným diferenciálem, byla by jeho hodnota relevantní. Proto vždy musím vědět, vůči jakým rozměrům chci diferenciál zanedbat.

Tvrzení 2. *Součet dvou diferenciálů dx je mezi nenulovými reálnými veličinami zanedbatelný.*

Je jasné, že když už máme nekonečně malou veličinu, tak její zanedbatelnost neovlivní, jestli ji máme dvakrát, třikrát, nebo tisíckrát. Násobíme-li diferenciály reálným číslem, nic to na jejich zanedbatelnosti nemění. Proto je součin $2 \cdot dx$ vedle reálných rozměrů stejně zanedbatelný jako $729 \cdot dx$ a jako samotné dx.

Poznatek. Jinak je tomu ovšem, pokud bychom se nerozpakovali sečíst nekonečně mnoho diferenciálů, což by vyvážilo i jejich nepatrnost. Diferenciál dx je vlastně nekonečně malá část x a když jich vezmeme určité větší než reálné množství, získáme celé x.

Tvrzení 3. *Nekonečný součet diferenciálů není mezi nenulovými reálnými veličinami zanedbatelný.*

Příklad. Takovým smutným příkladem ze života můžou být mikroplasty, které se postupně dostávají do celého našeho okolí i těla. Jedna taková mikročástečka v těle mořského živočicha je sice zanedbatelná, ale nesmírné množství takových částic by podle některých teorií mohlo vést až k jeho smrti.[5]

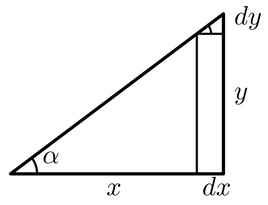
Tvrzení 4. *Podíl diferenciálů není mezi nenulovými reálnými veličinami zanedbatelný.*

Příklad. Právě v tomto tvrzení se skrývá velká elegance diferenciálů. Pokud totiž vezmete podíl dvou zanedbatelných veličin, může se stát, že má reálný rozměr. Ukážeme si, jak předchozí tvrzení doložit. (Obrázek 2.5)

[3] Malý průvodce historií integrálu s. 43
[4] Malý průvodce historií integrálu s. 44
[5] Viz např. článek na stránce ekolist.cz [online]

Celý náš „důkaz“ stojí na podobnosti trojúhelníků na obrázku. Máme-li pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami reálných délek x a y a přičteme-li k jeho stranám dx a dy, vzniká další větší trojúhelník, který je s ním podobný. Ten se skládá z původního trojúhelníka, z obdélníčku o stranách délky dx a y a z dalšího podobného trojúhelníka s odvěsnami dx a dy.

Poměr stran y/x původního trojúhelníka je jako podíl reálných čísel x a y také reálné číslo. A protože podobnost zachovává poměry stran, i podíl diferenciálů dy/dx je v tomto případě reálný.



Obrázek 2.5: Trojúhelník o odvěsnách délky $x + dx$ a $y + dy$.

Tvrzení 5. *Součin diferenciálů je mezi nenulovými reálnými veličinami zanedbatelný.*

Poslední tvrzení je do jisté míry triviální. Intuitivně chápeme, že součin dvou nekonečně malých veličin nemůže být nic jiného než nekonečně malá veličina. Považuji však za zajímavé, že právě součin dvou diferenciálů $dx \cdot dx$ je vedle jediného dx zanedbatelný.

Poznámka. Na konci kapitoly o derivacích budeme zanedbávat součiny diferenciálů a funkcí. Pokud má funkce pro reálné vstupní hodnoty x reálné funkční hodnoty y, není zanedbání celého součinu v porovnání s ostatními reálnými členy problém.

2.4.1 Diferenciály vyšších řádů

Úvodem jsem tvrdil, že minuta je vedle hodiny stejně zanedbatelná jako sekunda vedle minuty. Sekunda je tak vlastně jako „minuta minuty“ dvakrát tolik zanedbatelná v porovnání s hodinou. Obdobně je tomu i diferenciálů – součin dvou diferenciálů jako „diferenciál diferenciálu“ je vedle jednoho diferenciálu stejně zanedbatelný jako samotný diferenciál mezi reálnými čísly. Vyšší řády diferenciálů, čímž mám na mysli vyšší mocniny diferenciálů dx^2, dx^3, dx^4 atd. (ale i násobky $dx \cdot dy$ a další), jsou tak spjaty pevným pravidlem. Tedy, že diferenciál vyššího řádu je nutně zanedbatelný vedle diferenciálu nižšího řádu, oba jsou však zanebatelné v porovnání s reálnými čísly.

Toto se Leibniz pokoušel vysvětlit přirovnáním x k nebeské klenbě, dx k zemi, dx^2 k zrnku prachu a dx^3 k magnetické částečce. Tvrdil: „že nebeská klenba se má k zemi jako země k zrnku prachu, a země opět se má k zrnku prachu jako zrnko prachu k magnetické částečce.“[6] Stačí jen dodat, že všechno ostatní pod nebeskou klenbou je zanedbatelné…

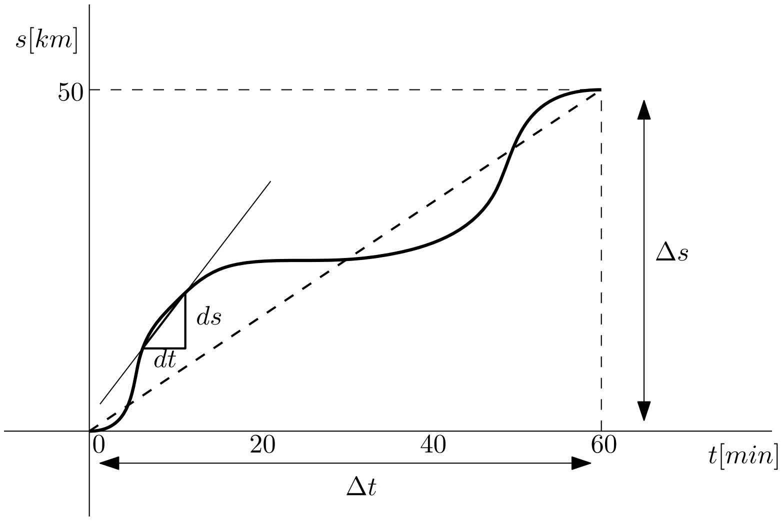
Poznámka. Ještě doplním, že v případě, že máme nekonečný součet diferenciálů vyšších řádů, pak máme stále (v porovnání s reálnými čísly) zanedbatelnou veličinu. (Viz subsekce 4.2.1 kapitoly o Integrování)

[6]Malý průvodce historií integrálu s. 43

3. Derivace

3.1 Motivace – (Okamžitá) rychlost

V následující kapitole se zaměříme na derivování. Úvodem bych rád poukázal na rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí. Využijeme příklad z českých silnic, jenž je ilustrován obrázkem 3.1.



Obrázek 3.1: Situace, kdy je okamžitá rychlost větší, než průměrná.

Příklad. Představme si vesnici, ve které platí rychlostní limit 50 km/h. V celé vesnici se (úsekově) měří rychlost. Tedy na začátku a na konci vesnice jsou umístěny kamery schopné rozeznávat registrační značky vozidel.

Vozidlo je zachyceno na začátku úseku a poté i na jeho konci. Pokud je vzdálenost kamer Δs a časový rozdíl mezi projetím 1. a 2. kamery Δt, pak je rychlost vypočítána jako podíl $\Delta s/\Delta t$. Takové měření není zcela přesné, protože výsledkem je pouze průměrná rychlost. Pokud vozidlo překročí v určitém bodě mezi kamerami povolený limit, a přesto bude jeho průměrná rychlost nižší než 50 km/h, měření přestupek neodhalí.

Řidič vozidla má v tomto případě poměrně velkou volnost. Když někde ve vesnici stlačí plyn až k podlaze, a získá tak nepřiměřenou rychlost, stačí, aby jinde naopak ubral nebo na chvíli zastavil, a průměrná rychlost hned klesá.

Policejní hlídky mají proto k dispozici mobilní radary, se kterými mohou měřit okamžitou rychlost. Měření probíhá na jednom stanovišti a je tak rychlé, že jsou všechny změny rychlosti měřeného vozidla takřka zanedbatelné.

Policisté vyšlou několik světelných paprsků v infračerveném spektru, které se odrazí od vozidla zpět do radaru. Ten určí vzdálenost vozidla v různých časech. Vzhledem k tomu, že paprsky jsou vyslány velmi rychle po sobě – tedy pro nás v zanedbatelném časovém úseku dt – je změřena okamžitá rychlost v. Za čas dt urazíme běžnými rychlostmi, kterými se pohybujeme, také zanedbatelný zlomek dráhy ds. Okamžitá rychlost je tak vypočtena jako podíl diferenciálů

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

3.2 Přírůstek funkce v bodě

Už víme, že je rozdíl mezi okamžitou a průměrnou rychlostí. Víme, že jsou případy, kdy tento rozdíl může pro automobilistu znamenat pokutu. Jsou tedy situace v životě – a není jich málo – kdy se setkáváme s derivací. Ať už vás zajímá kterýkoli obor, nalezneme v něm pro ni pravděpodobně prostor. Jak si ale derivaci představíme v praxi a co to vlastně je?

O derivacích hovoříme zpravidla v kontextu funkcí. Derivace funkce v bodě nám říká, jak rychle naše funkce v daném bodě roste. To znamená, že nás zajímá, jak velký je v tom bodě její sklon.

3.2.1 Derivace jako okamžitá rychlost

Poznatek. Když derivujeme nějakou funkci s časem jako nezávislou proměnnou, zjistíme, že derivace odpovídá rychlosti změny závislé proměnné.

Máme-li tedy funkci závislosti dráhy na čase – která de facto v každém okamžiku popisuje celkovou délku už uražené dráhy – derivace této funkce v bodě nám říká, jakou měrnou rychlostí se na úseku dt pohybujeme. Tedy jaká je relativní změna dráhy za nekonečně malý časový úsek dt. Pak derivace odpovídá okamžité rychlosti v daném okamžiku.

Můžeme také hledat třeba rychlost probíhající chemické reakce. Zderivujeme-li v libovolném bodě funkci závislosti hmotnosti vznikající látky na čase, získáme přírůstek hmotnosti za infinitesimální časový úsek dt. Jinými slovy zjistíme okamžitou rychlost, s jakou látka v danou chvíli vzniká.

Nebo bychom mohli teoreticky chtít zjistit okamžitou spotřebu našeho automobilu, ovšem za předpokladu, že máme k dispozici funkci popisující hladinu pohonných hmot v každém okamžiku jízdy. Derivací bychom získali rychlost s jakou hladina ve sledovaném okamžiku klesá – tedy spotřebu paliva za čas. I když ta se alespoň v Evropě standardně počítá v litrech na sto kilometrů.

Pokud bychom měli funkci, jejíž závislou proměnnou je rychlost, derivováním bychom vlastně získali rychlost změny rychlosti – tedy zrychlení. Protože rychlost je 1. derivace funkce závislosti dráhy na čase, je zrychlení její 2. derivace (vyšší derivace viz subsekce 3.7.1).

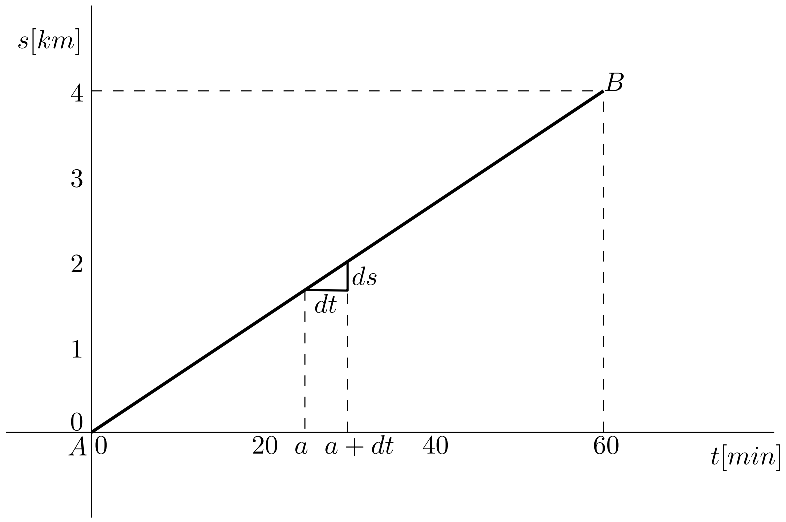
Možností a příkladů derivací takovýchto funkcí je opravdu mnoho. Nám se tak ukáže být užitečným vědomí platnosti následujícího poznatku.

Tvrzení 6. *Pokud derivovaná funkce popisuje nějaký děj v čase, její derivace v bodě odpovídá okamžité rychlosti toho děje.*

Poznatek. Jak už víme, průměrná rychlost je vlastně celkový úhrn uražené dráhy za nějaký omezený časový úsek a nezohledňuje různé rychlosti na dílčích intervalech.

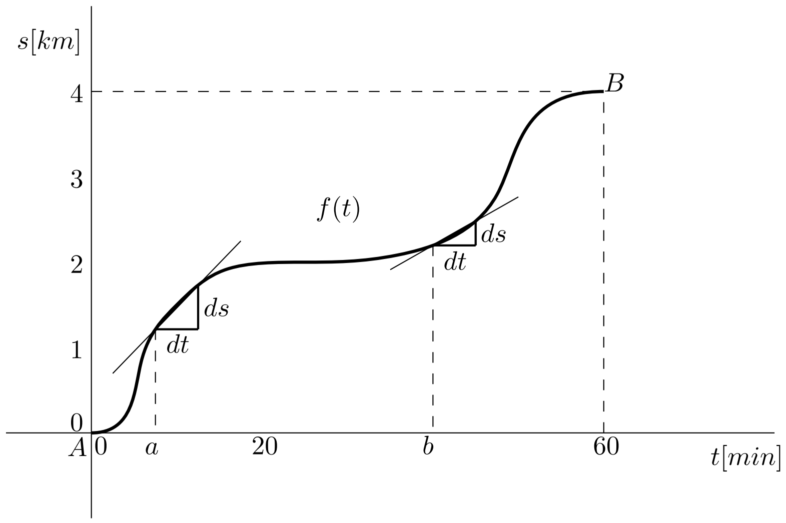
Naopak při určování okamžité rychlosti se díváme na tak malý (dokonce infinitesimální) časový interval, že neposkytuje prostor pro zrychlení, či zpomalení a všechny případné rychlostní změny jsou na něm pro reálné pozorovatele zanedbatelné. V zásadě tak počítáme průměrnou rychlost na intervalu mezi body a a $a + dt$. Díky tomu, že jsou si prakticky nekonečně blízké, je rychlost na na daném intervalu konstantní a graf (funkce závislosti dráhy na čase) lineární.

Příklad. Podívejme se na graf funkce popisující pohyb z bodu A do bodu B (obr. 3.2). V tomto konkrétním příkladě se okamžitá rychlost v libovolném bodě uvedeného intervalu rovná průměrné rychlosti a graf popisující změnu dráhy za čas je lineární. Nedochází tedy ke změnám rychlosti a každý infinitesimální trojúhelníček příslušný tomuto grafu je podobný s trojúhelníkem ABC, kde C je bod na ose t označený 60.



Obrázek 3.2: Graf funkce závislosti dráhy na čase s vyznačenou derivací v bodě a.

Poznatek. Okamžitá rychlost se rovná průměrné na intervalech, kdy je graf závislosti uražené dráhy na čase lineární.



Obrázek 3.3: Graf funkce $f(t)$ závislosti dráhy na čase, jež popisuje reálný pohyb, s vyznačenými derivacemi v bodech a a b.

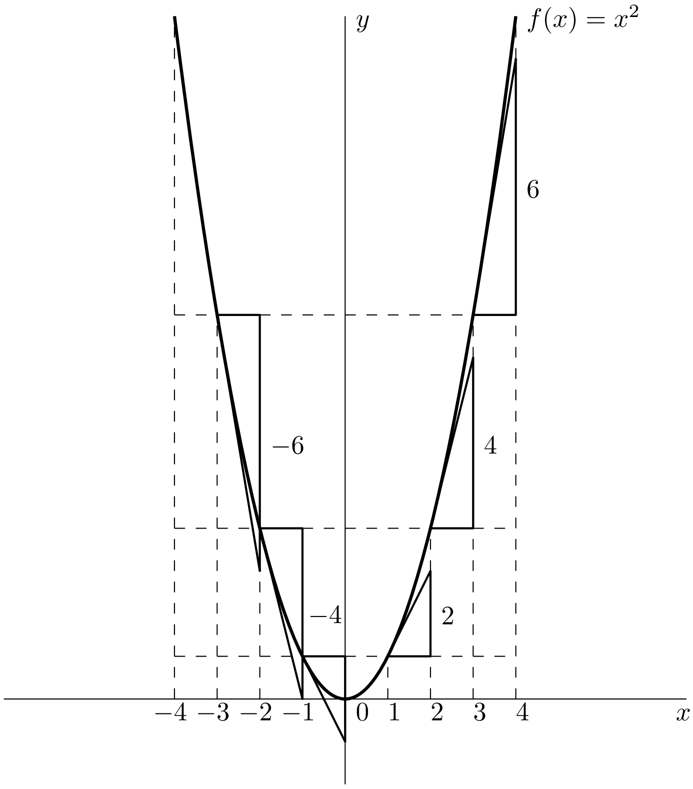
Derivace se nám tak hodí u daleko složitějších funkcí, než je ta na obrázku 3.2. Můžeme popsat vlastnosti funkce, která sleduje chování objektů v reálném prostředí. Sotvakde narazíme na rovnoměrný pohyb. Když se těleso dává do pohybu, zrychluje. Když v pohybu ustává, zpomaluje. Po cestě podle potřeby mění rychlost, někdy je nuceno zastavit. Graf, který popíše takový pohyb bude pravděpodobně hladký a vlnitý. Realitě by tak spíše odpovídal obrázek 3.3. Tu se opravdu derivace ukáže jako silný a nenahraditelný nástroj.

3.3 Derivace jako funkce vs. derivace v bodě

U obrázku 3.3 chvilku zůstaneme. Rychlost růstu funkce se v různých bodech znatelně liší. Například derivace funkce f v bodě a je výrazně větší než v bodě b, což lze poznat podle sklonu sečen vedených příslušnými charakteristickými trojúhelníky. Vidíme, že diferenciál ds je nad bodem a také větší. Derivace tak může mít v různých bodech funkce různou hodnotu. U funkce f na obrázku 3.3 bude derivace zpočátku malá, poté prudce vzroste, pozvolna se zmenší až k nule, pak opět vzroste a nakonec klesne téměř k nule.

Chování derivace v různých bodech můžeme popsat s pomocí nějaké nové funkce, která každému jednomu bodu přiřadí hodnotu derivace původní funkce f v tomto bodě. Nešikovné je, že než bychom určili derivace ve všech bodech, pravděpodobně bychom zešediveli (za předpokladu, že je to u nás možné). Proto postupujeme jinak a z předpisu původní funkce určíme předpis nové funkce popisující její derivaci. Dosazením konkrétní vstupní hodnoty pak zjistíme derivaci v příslušném bodě. To však ukáži až v sekci 3.6.

Poznatek. Zatím si jen pamatujme, že je rozdíl mezi derivací funkce v bodě, kdy je výsledkem konkrétní hodnota, a mezi derivací funkce ve všech bodech, kdy získáme novou funkci složenou z těchto hodnot. Pro zjednodušení často říkáme pouze *derivace v bodě* a *derivace*.



Obrázek 3.4: Graf funkce $f(x) = x^2$ s vyznačenými kladnými a zápornými přírůstky.

Příklad. Pro ilustraci ukáži, jak vypadá derivace funkce x^2. Nakresleme její graf (obrázek 3.4). Vidíme, že funkce nejprve prudce klesá a že v bodě (0, 0) klesání plynule přechází v růst, který je zpočátku pozvolný ale brzy poměrně rychlý.

Pro různé hodnoty x vyznačme příslušné přírůstky například pomocí přikreslených trojúhelníků. Ty jsou podobné s příslušnými infinitesimálními trojúhelníky o odvěsnách délky dx a dy. Na grafu funkce tak sice leží vždy pouze jeden jejich vrchol – a to může mást – zachovávají však poměr stran, tedy i hodnoty derivací v bodech. Při náčrtku jsme tyto hodnoty znali díky výpočtům (viz kapitola 3.6).

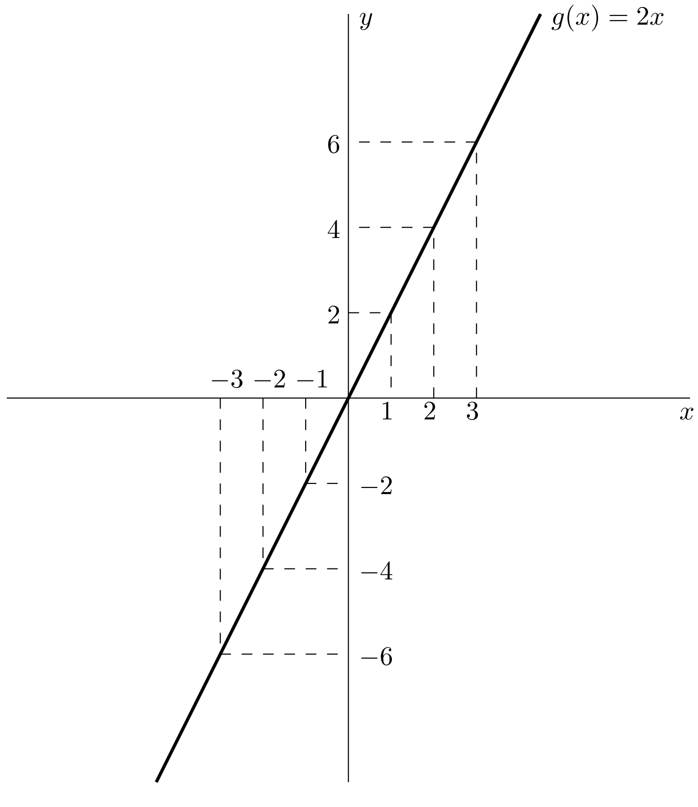
Všimněme si, že funkce x^2 má pro záporné hodnoty na ose x záporné přírůstky. Hodnoty derivací tak budou také záporné. Pro $x = 0$ je diferenciál dy nulový dokonce i vedle dx a derivace dy/dx je v tomto bodě rovná nule.

Příslušné derivace ve vyznačených bodech jsou znázorněny v tabulce 3.1. Jsou to prostě čísla.

Hodnota x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Derivace v přísl. bodě	-6	-4	-2	0	2	4	6

Tabulka 3.1: Hodnoty derivace funkce x^2 z obrázku 3.4 pro konkrétní body. Doporučuji srovnat s přírůstky.

Funkce, která bude pro danou hodnotu x probíhat hodnoty ze spodního řádku v tabulce by pak mohla být derivací funkce $f(x) = x^2$. Tyto předpoklady splňuje například funkce $g(x) = 2x$ (obrázek 3.5), kterážto je opravdu výsledkem její derivace ve všech bodech jejího definičního oboru.



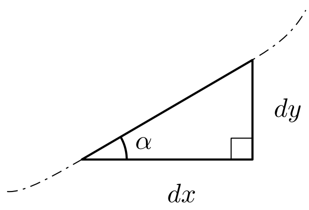
Obrázek 3.5: Graf funkce $g(x) = 2x$, která je derivací funkce $f(x) = x^2$.

3.4 Směrnice lineární funkce a tečny

V sekci 3.2 jsem poukázal na to, že derivace – tedy podíl diferenciálů dy/dx – souvisí s růstem funkce. Nyní se skrze souvislost s goniometrickou funkcí tangens podíváme na další možnou interpretaci. Nejprve tedy osvěžení jednotkové kružnice.

3.4.1 Goniometrie

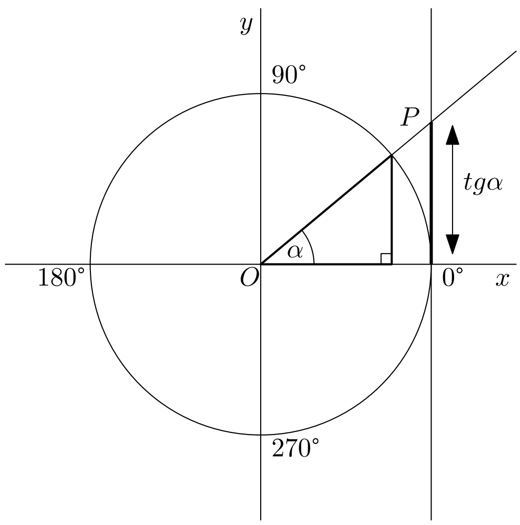
Vyznačíme-li v charakteristickém trojúhelníčku (viz obr. 3.6) úhel α mezi základnou dx a infinitesimální přeponou, která je součástí nějaké zkoumané funkce, tak tangens tohoto úhlu je roven poměru diferenciálů dy/dx a tedy příslušné derivaci v bodě.



Obrázek 3.6: Charakteristický trojúhelník.

Poznatek. Máme-li jednotkovou kružnici (obrázek 3.7), znázorníme hodnotu tangens jako délku svislé úsečky vedené z bodu 0° do průsečíku P svislé přímky s polopřímkou OP. Je tedy odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka s jednotkovou základnou, který je s charakteristickým trojúhelníkem podobný. Platí tak rovnost:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1} = \frac{dy}{dx}.$$



Obrázek 3.7: Tangens na jednotkové kružnici.

Sklon příslušné funkce v odpovídajícím bodě pak splňuje triviální představu, že „na jeden krok vpravo po ose x připadá $\operatorname{tg}\alpha$ kroků ve směru osy y“.

Funkce tangens probíhá všechny hodnoty reálného rozměru a stejně tak máme i různé hodnoty derivací. Je-li například diferenciál dy zanedbatelný vedle dx, nebo je-li přírůstek funkce ve směru osy x přímo rovný nule, je úhel α nulový, průvodič pak splývá s osou x a tangens se také rovná nule.

Pokud $dy = dx$, pak platí $\operatorname{tg}\alpha = 1$, což je poloměr (jednotkové) kružnice. Pro zkoumanou funkci procházející bodem O tak v tomto bodě platí triviální výrok: „Za jeden krok vpravo jeden krok vzhůru.“

Příklad. Zkusme určit $\operatorname{tg}\alpha$ grafu kvadratické funkce x^2 konkrétně v bodě (0,0), kde se nachází vrchol paraboly.

Máme funkci $y = x^2$. Funkční hodnota y bude vždy rovna druhé mocnině vstupní hodnoty x. Pro $x = 2$ je $y = 4$ apod. Chceme spočítat $\operatorname{tg}\alpha$ pro $x = 0$. „Nejbližší“ bod grafu funkce je v kladném směru osy x vzdálen pouze o dx. Jeho souřadnice jsou (dx, dy). Z předpisu funkce víme, že $dy = dx^2$. Dosaďme do zlomku:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = dx.$$

Tangens (resp. derivace) je pro funkci $y = x^2$ v bodě $(0, 0)$ v porovnání s libovolným reálným číslem zanedbatelný, protože nabývá infinitesimální hodnoty dx. Z našeho pohledu – tedy z pohledu reálných velikostí – platí rovnost $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Povšimněte si, že v minulé sekci jsme skutečně derivaci v tomto bodě přiřadili nulovou hodnotu (tabulka 3.1). A také, že tečny ke grafu funkce mají v bodech, kde funkce klesá, záporné směrnice $\operatorname{tg}\alpha$, kdežto v místě růstu jsou jejich směrnice kladné.

3.4.2 Směrnice lineární funkce

Poznatek. Zapíšeme-li rovnici lineární funkce ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$, pak k, které nazýváme směrnicí funkce, spočteme jako $\operatorname{tg}\alpha$, kde α je odchylkou funkce od osy x. Na obrázku 3.5 si (pro funkci $g(x) = 2x$, kde tedy $k = 2$) můžete krásně všimnout, že na každý 1 krok ve směru osy x uděláme 2 kroky ve směru osy y.

Pokud si představíme libovolnou funkci jako lomenou čáru složenou z infinitesimálních úseček a pokud považujeme tyto úsečky za dílčí lineární funkce, můžeme každé z nich přiřadit vlastní směrnici $k = \operatorname{tg}\alpha = dy/dx$.

Umíme tak mimochodem určit odchylku v bodě (libovolné) funkce, která už nemusí být nutně lineární. Stačí se podívat na její úsek, který je tak malý, že je prakticky lineární.

Tvrzení 7. *Derivace funkce v bodě je směrnicí nějaké lineární funkce, která je se zkoumanou funkcí na příslušném infinitesimálním intervalu shodná.*[1]

Poznámka. Ze zkušeností víme, že s lineárními funkcemi se pracuje mnohem lépe.

Příklad. Se směrnicí lineární funkce souvisí i další populární příklad z motoristického světa. Na výstražných značkách „Nebezpečné stoupání“ či „Nebezpečné klesání“ před prudkými kopci se uvádí kolikaprocentní sklon nás čeká. Například

[1] Tato lineární funkce je tečnou ke grafu funkce vedenou příslušným bodem.

12% stoupání znamená, že na sto metrů vystoupáme o 12 metrů. Směrnice tohoto stoupání je tedy $\frac{12}{100}$.

Stoprocentní klesání neznamená, že jedeme přímo svisle dolů, ale že na sto metrů klesneme také o 100 metrů. Směrnice je tedy $\operatorname{tg} \alpha = -1$ a orientovaný úhel α je tedy $-45°$.

3.4.3 Směrnice tečny

Určitě jste už někdy měli za úkol určit rovnici tečny k nějaké kružnici. To většinou není problém. Díky derivacím jsme ale schopni určit tečnu ke grafům různých funkcí. Kdy se to může hodit? Třeba při jízdě na kole nebo autem, možná to nevíte, ale při snaze zjednodušit si odhad, jak moc točit v zatáčce, se orientujeme intuitivně pomocí tečen k vodícím čárám – tedy alespoň já to tak mám. Takže při jízdě stačí určit předpis funkce vodící čáry a spočítat její derivaci, nebo pokud jste už zběhlí, zvládnete to odhadnout.

Poznatek. V předchozím textu jsme si představili funkci jako lomenou čáru složenou z infinitesimálních úseček. Když jednu z nich vezmeme a podíváme se na ni podrobněji, můžeme si představit, že spojuje dva „sousední“ body. A protože dva různé body určují přímku, můžeme jimi jednu vést. Díky tomu, že body leží nekonečně blízko k sobě navzájem a že úsečka mezi nimi je součástí zkoumané funkce, je přímka jimi vedená právě tečnou.

Poznámka. Tedy alespoň v našem podání. Tečna má sice procházet jediným bodem a naše prochází dvěma, ale jejich vzdálenost je z naší perspektivy zanedbatelná, a jsou tak při pohledu na funkci jako na celek vlastně jediným bodem.

Tvrzení 8. *Derivace funkce v bodě je směrnicí tečny procházející příslušným bodem zkoumané funkce.*

Příklad. Pojďme si cvičně odvodit rovnici tečny k nějaké funkci $y = f(x)$. Standardně předpokládáme, že tečna je lineární funkcí a do směrnicového tvaru $y = kx + q$ dosazujeme za směrnici k příslušnou derivaci v bodě a, za proměnné x a y pak dosazujeme bod $(a, f(a))$. Díky tomu, že naše tečna prochází vlastně dvěma body, které jsou si nekonečně blízko, můžeme rovnici tečny odvodit i pomocí parametru t.

Bod $(a, f(a))$ si označme jako A, pro souřadnice jeho „sousedního“ bodu, který označíme B, pak platí

$$B = (a + dx, f(a + dx)) = (a + dx, f(a) + df(a)),$$

neboť součet ypsilonové hodnoty bodu A s infinitesimálním přírůstkem mezi bodem B a A dá ypsilonovou hodnotu bodu B. Parametricky zadaná rovnice přímky s reálným parametrem t se skládá z vektoru $(B - A)$ a z nějakého bodu ležícího na přímce, máme tak:

$$X = t \cdot (B - A) + A.$$

Řešme to zvlášť pro jednotlivé souřadnice:

$$x = t \cdot ((a + dx) - a) + a = t \cdot dx + a,$$
$$y = t \cdot ((f(a) + df(a)) - f(a)) = t \cdot df(a) + f(a).$$

Máme soustavu dvou rovnic, kde v obou rovnicích figuruje parametr t, vyjádříme ho tedy z první rovnice a dosadíme do druhé.

$$t = \frac{x-a}{dx}$$
$$y = t \cdot df(a) + f(a)$$
$$y = \frac{x-a}{dx} \cdot df(a) + f(a)$$

Jednoduchou úpravou pak získáme známou rovnici tečny v bodě a

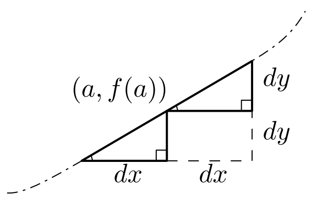
$$y = \frac{df(a)}{dx}(x-a) + f(a).$$

3.5 Kdy funkce nemá derivaci

Při vzniku diferenciálního a integrálního počtu se předpokládálo, že každou funkci lze v každém jejím bodě derivovat,[2] dnes už však víme, že to není pravda. Jsou případy, kdy nemá smysl derivaci hledat.

Poznatek. Pokud určuji derivaci v nějakém bodě (který není krajní), nezáleží na volbě charakteristického trojúhelníka. Když ho vyznačíme na levo od tohoto bodu, je poměr dy/dx stejný jako, když uvažujeme charakteristický trojúhelník na pravo od zkoumaného bodu (Viz obrázek 3.8).

Souřadnice bodů na levo od zkoumaného a na pravo od zkoumaného se navzájem liší o $2dx$, což je mezi reálnými rozměry stejně zanedbatelná vzdálenost jako pouhé dx, a rychlost růstu se na tomto infinitesimálním úseku také nestihne změnit, proto se úhly při základnách obou trojúhelníčků shodují.



Obrázek 3.8: Dva různé charaktristické trojúhelníčky pro bod $(a, f(a))$.

Tvrzení 9. *Hodnota derivace nezáleží na výběru charakteristického trojúhelníka.*

Existenci derivace v bodě vyloučíme pro případy, kdy tato vlastnost neplatí. Taková situace nastává třeba v případech, kdy má funkce v daném bodě tzv. hrot. Příkladem je funkce $y = |x|$. Volíme-li trojúhelníček nalevo od bodu nula, je derivace záporná, zatímco když uvažujeme trojúhelníček napravo, je kladná. Výsledná derivace by se tedy lišila podle volby charakteristického trojúhelníka, což nepřipouštíme.

Dalším příkladem jsou některé nespojité funkce, u kterých hrozí, že napravo od zkoumaného bodu bude mít charakteristický trojúhelník jiný poměr stran (včetně

[2] Malý průvodce historií integrálu s. 45

jejich orientace) než nalevo. U vybraných nespojitých funkcí se ale může stát, že má derivace v bodě nespojitosti smysl.

Některé funkce se chovají tak „divoce“, že i když jejich hodnotu v bodě známe, jsou spojité a nemají hrot, nedokážeme derivaci určit. Jako příklad uvádím fukci $y = x \cdot \sin(1/x)$ s tím, že pro $x = 0$ dodefinuji hodnotu $y = 0$. Její graf můžete nahlédnout např. prostřednictvím webové stránky „Wolfram Alpha“. Okolo bodu nula se chová jako býk na rodeu, její charakter se nepředstavitelně rychle se mění, střídá se růst s klesáním a my nevíme, zda v bodě nula zrovna klesá, nebo roste. Připadají tak v úvahu charakteristické trojúhelníčky pro oba případy a výsledná derivace by závisela na naší volbě mezi nimi, proto ji neurčujeme.

3.6 K počítání

3.6.1 Značení

Dostáváme se do fáze, kdy je třeba okomentovat užívané značení. Jsou různé způsoby, jak zapsat derivaci, a ty se často dle potřeby liší. Psát pouze podíl dy/dx se ne vždy vyplácí. Není totiž jasné, v jakém bodě derivaci hledáme.

Zpravidla se derivace značí čárkou: $f'(x)$. Derivaci funkce f v bodě a píšeme jako $f'(a)$. Toto značení má určitou nevýhodu, protože nepoznáme, podle jaké proměnné funkci derivujeme. Pro naše potřeby, kdy se s funkcemi o více proměnných nesetkáme, by to stačilo. Ve fyzice plné veličin a jejich vztahů však ne.

Jelikož jsme si na podílový tvar zvykli a jelikož se s ním pojí jistá elegance dob minulých (viz např. subsekce 3.6.10), od jeho užívání níže už neustoupíme. Přesto však si neodpustím určitou dvojakost značení a sice občasný přechod mezi různými zápisy funkce. Někdy budeme psát derivaci jako dříve: $\frac{dy}{dx}$. Pro derivaci v určitém bodě však můžeme užít i značení $\frac{df(a)}{dx}$. Podíl $\frac{df(x)}{dx}$ pak značí derivaci jako funkci nezávislé proměnné x.

Nyní si ukážeme, jak zhruba se pomocí diferenciálů dříve odvozovaly některé vzorce pro derivace. Při derivování konkrétní funkce začínáme obvykle u jejího předpisu. Pomocí odvozených vzorců přejdeme k předpisu nové funkce, která bude derivací původní funkce. Případným dosazením bodu a do vzniklé funkce získám derivaci původní funkce v bodě a.

3.6.2 Derivace konstantní funkce

Příklad. Máme konstantní funkci $y = 5$. V každém bodě má tato funkce hodnotu 5. Jaký je její přírůstek? Snadno si uvědomíme, že je v každém bodě nulový. Zkrátka, když je konstantní, neroste ani neklesá. Pokusme se tento fakt popsat pomocí diferenciálů.

Předpokládejme, že funkce y má diferenciální přírůstek dy. Posuneme-li se tedy na ose x o dx do prava, vzroste hodnota funkce o dy. „Sousední“ bod tak bude mít souřadnice $(x + dx, y + dy)$. Dosadíme-li tyto hodnoty do předpisu funkce y, proběhne změna pouze na levé straně rovnice, protože v ní není žádné x.

Máme tedy novou rovnici, $y + dy = 5$. A víme, že $y = 5$. Z toho vyplývá, že diferenciál dy je nulový a derivace dy/dx také.

Situaci ještě rozepíšu symbolickým zápisem:

$$\begin{aligned} y &= 5 \\ y + dy &= 5 \\ dy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 0. \end{aligned}$$

Tvrzení 10. *Derivací konstantní funkce je v každém bodě* 0.

3.6.3 Derivace lineární funkce

Odvození 11. Dále si ukážeme výpočet derivace lineárních funkcí ve tvaru $y = ax$, kde $a \in \mathbb{R}$. Budeme postupovat podobně jako u konstantní funkce. Přičteme diferenciály dx a dy, dosadíme do rovnice a tu následně upravíme do tvaru $dy/dx = ...$

$$\begin{aligned} y &= ax \\ y + dy &= a(x + dx) \\ y + dy &= ax + a\,dx \\ dy &= a\,dx \\ \frac{dy}{dx} &= a \end{aligned}$$

Vidíme, že pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je derivace funkce ax rovna a. Tedy, jak jsme si ukázali i v kapitole 3.4.2 (*Směrnice lineární funkce a tečny*), derivaci lineární funkce odpovídá právě její směrnice. V našem případě ono a.

Tvrzení 12. *Derivací lineární funkce ax je konstantní funkce $y = a$.*

3.6.4 Derivace kvadratické funkce

Odvození 13. Doposud jsme neměli moc práce, pouze jsme upravovali rovnice. Nyní nás ovšem čeká i zanedbání některých nekonečně malých členů, přesto však postup při odvození derivace funkce x^2 v zásadě zachováme.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y + dy &= (x + dx)^2 \\ y + dy &= x^2 + 2x\,dx + dx^2 \\ dy &= 2x\,dx + dx^2 \end{aligned}$$

Poslední člen dx^2 je diferenciálem druhého řádu (viz sekce 2.4) a vedle ostatních členů obsahujících pouze diferenciály 1. řádu je zanedbatelný. Proto si ho „škrtáme“ a počítáme dále bez něj.

$$\begin{aligned} dy &= 2x\,dx \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

Takto[3] jsme tedy získali vzorec pro derivaci kvadratické funkce ve tvaru x^2. Vidíme, že výsledkem je funkce $2x$, jak už jsem bez odůvodnění tvrdil dříve v ilustračním příkladě sekce 3.3.

Tvrzení 14. *Derivací kvadratické funkce x^2 je lineární funkce $y = 2x$.*

3.6.5 Derivace kubické funkce

Odvození 15. Ještě než si odvodíme vzorec pro libovolnou přirozenou mocninu, zkusíme tak učinit pro 3. mocninu. Zachováme postup výše, tj. přičtení diferenciálů k proměnným na obou stranách rovnice, odečtení členů původní rovnice, zanedbání členů obsahující diferenciály vyšších řádů a následné vydělení diferenciálem dx. Máme tedy funkci $y = x^3$.

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 \\
y + dy &= (x + dx)^3 \\
y + dy &= x^3 + 3x^2 dx + 3x\,dx^2 + dx^3 \\
dy &= 3x^2 dx + 3x\,dx^2 + dx^3 \\
dy &= 3x^2 dx \\
\frac{dy}{dx} &= 3x^2
\end{aligned}
$$

Potvrdili jsme si, že derivace naší kubické funkce je jednoduše $3x^2$. Poslední člen dx^3, jsa diferenciálem vyššího řádu, můžeme ve výpočtu v souladu z předchozími úvahami (sekce: 2.4) vedle zbylých členů zanedbat. Stejně tak nás přítomnost druhé mocniny diferenciálu opravňuje zanedbat člen $3x\,dx^2$ – v porovnání se členy obsahujícími pouze jeden diferenciál je nekonečně malý.

Tvrzení 16. *Derivací kubické funkce x^3 je kvadratická funkce $y = 3x^2$.*

3.6.6 Derivace mocninné funkce ve tvaru x^n

Poznatek. Zbývá zobecnit naše předchozí tvrzení. Všimněme si, že derivace lineární funkce x odpovídá konstantní jedničce. Z x^2 se po derivaci stává funkce $2x$ stejně tak, jako derivováním z x^3 získáme funkci $3x^2$. Zdá se tedy, že derivace funkce x^n, kde $n \in \mathbb{N}$, by mohla být $n \cdot x^{n-1}$. Pojďme to ověřit.

Odvození 17. Tradičně zachováme předchozí postup. Abychom však mohli upravit výraz $(x + dx)^n$, budeme navíc potřebovat vzorec pro binomický rozvoj. Ten sice obsahuje množství kombinačních čísel, naštěstí ale prakticky všechny členy (stejně jako v předchozích případech) zanedbáme.

[3]THOMPSON, Silvanus P: Calculus made easy (1914: London, The Macmillan company). s. 18

$$
\begin{aligned}
y &= x^n \\
y + dy &= (x + dx)^n \\
y + dy &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}dx + \binom{n}{2}x^{n-2}dx^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}dx^3 + \ldots + \binom{n}{n}dx^n \\
dy &= \binom{n}{1}x^{n-1}dx + \binom{n}{2}x^{n-2}dx^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}dx^3 + \ldots + \binom{n}{n}dx^n \\
dy &= \binom{n}{1}x^{n-1}dx = nx^{n-1}dx \\
\frac{dy}{dx} &= nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

Podobně vzorec pro derivaci funkce x^n odvodil i Newton[4] a přestože toto odvození nemusí na první pohled působit příliš snadně, zachovali jsme kroky užité při předchozích výpočtech, a krom kombinačních čísel se tak v něm nevyskytuje nic nového.

Poznatek. Všimněme si, že s využitím Pascalova trojúhelníka (viz tabulka 3.2) můžeme kombinační čísla vynechat. Ve výpočtu zůstává totiž pouze 2. člen obsahující x^{n-1}. Tomuto členu odpovídá v Pascalově trojúhelníku koeficient n, respektive vždy druhé číslo na řádku.

$n = 0$							1						
$n = 1$						1		1					
$n = 2$					1		2		1				
$n = 3$				1		3		3		1			
$n = 4$			1		4		6		4		1		
$n = 5$		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1

Tabulka 3.2: Pascalův trojůhelník.

Tvrzení 18. *Derivací mocninné funkce x^n, kde $n \in \mathbb{N}$, je funkce $y = nx^{n-1}$.*

Poznatek. Newtonovým[5] zobecněním binomického rozvoje na reálné mocniny získáme i odpovídající vzorec pro derivaci funkce x^a, kde $a \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 19. *Derivací mocninné funkce x^a, kde $a \in \mathbb{R}$ je funkce $y = ax^{a-1}$.*

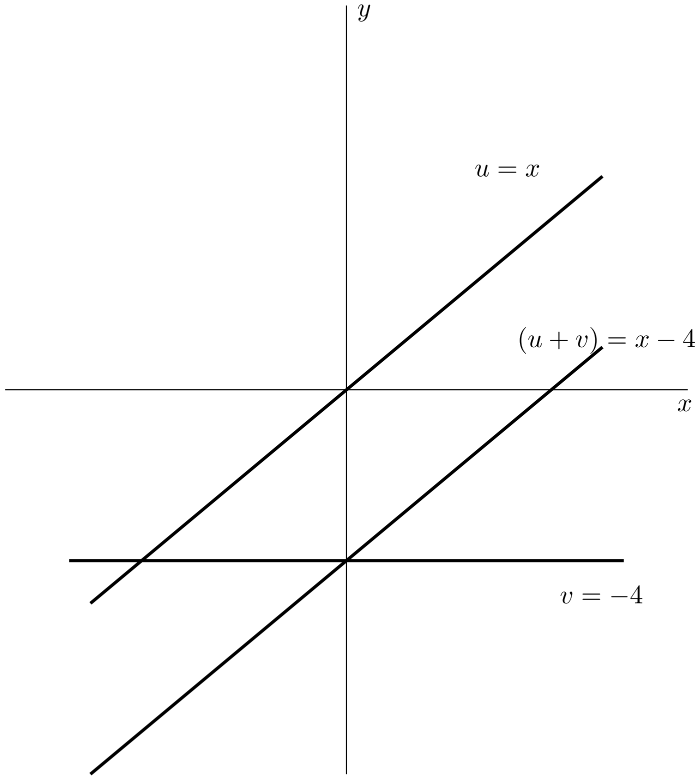
3.6.7 Derivace součtu dvou funkcí

Doposud jsme – ač vyčerpávajícím způsobem – pracovali pouze s funkcemi obsahujícími jeden jediný člen. Kdybychom však náhodou chtěli zderivovat funkci $x - 4$ nebo $x^3 + x^2 + 9$, dostali bychom se do problému.

Poznatek. Na funkci o více členech se můžeme dívat jako na součet několika dílčích funkcí. Například na funkci $x - 4$ se podíváme jako na součet funkcí $u = x$ a $v = -4$. Takovou funkci $(u + v)$ ilustruje obrázek 3.9.

[4] Malý průvodce historií integrálu s. 38

[5] Viz například článek na stránce cantorsparadise.com [online]



Obrázek 3.9: Funkce $(u + v)$ jako součet funkcí u a v.

Zdá se, že přírůstek součtové funkce se rovná součtu přírůstků dílčích funkcí. Intuitivně tedy předpokládáme, že derivace funkce $(u + v)$ je totéž, co součet derivací funkcí u a v. Pojďme si to pomocí hrubého odvození ověřit.

Odvození 20. Představme si funkci $y = u + v$, kde u a v jsou funkce proměnné x. Pokud bychom za x dosadili $x + dx$, výsledné hodnoty funkcí u a v budou $u + du$ a $v + dv$, stejně tak bychom psali $y + dy$ místo pouhého y. Na tomto principu postavíme jednoduchý výpočet.

$$y + dy = u + du + v + dv$$

Stejně jako jsme to dělali dříve, odečteme na levé straně rovnice y a na pravé součet $u+v$, kterýžto se rovná y. Poté co celou rovnici vydělíme dx, vznikne vzorec pro derivaci součtové funkce y – tedy i vzorec pro derivaci součtu funkcí u a v.

$$dy = du + dv$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \tag{3.1}$$

Poznámka. Toto[6] je jeden ze způsobů odvození derivace součtu dvou funkcí u a v. Nutno podotknout, že i přes správný výsledek nejde o zcela bezchybný postup. Standardní odvození využívá definice derivace jako limitního procesu, snadno ho naleznete ve vysokoškolských příručkách či na internetu.

Tvrzení 21. *Derivací součtu dvou funkcí je součet jejich derivací. (Viz rovnice 3.1)*

[6]Calculus made easy s. 36

3.6.8 Derivace součinu dvou funkcí

Odvození 22. Nyní tedy máme funkci $y = u \cdot v$, kde u a v jsou funkce proměnné x. Přičtením diferenciálu dx k x opět získáváme $u + du$, $v + dv$ a $y + dy$.

$$\begin{aligned} y + dy &= (u + du) \cdot (v + dv) \\ y + dy &= u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv \\ dy &= u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv \end{aligned}$$

V porovnání s ostatními členy, jež obsahují pouze jeden diferenciál, je poslední člen jako diferenciál druhého řádu zanedbatelný (sekce 2.4). Po jeho zanedbání a po vydělení celé rovnice diferenciálem dx vzniká vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí u a v.[7]

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \tag{3.2}$$

Tvrzení 23. *Derivací součinu dvou funkcí je součet: „derivace první krát druhá nezměněná plus derivace druhé krát první nezměněná“. (Viz rovnice 3.2)*

Příklad. Tentokrát nebylo tak snadné vzorec předem uhodnout, ukažme si proto alespoň jeho užití v praxi. Mějme funkce $u = x^3$ a $v = 2x+5$. Zajímá nás derivace funkce $y = u \cdot v$, tedy derivace jejich součinu. Nejprve si funkce u a v zderivujeme zvlášť podle již odvozených vzorců pro derivaci mocninné funkce a derivaci součtu. Připomínám, že derivace konstanty je nulová. Poté už jen dosadíme do vzorce 3.2.

$$\begin{aligned} u &= x^3 \\ \frac{du}{dx} &= 3 \cdot x^2 \\ v &= 2x + 5 \\ \frac{dv}{dx} &= 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Po dosazení tedy

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \cdot 2 + (2x + 5) \cdot 3x^2 = 8x^3 + 15x^2.$$

Odvození 24. S výše odvozeným vzorcem (rovnice 3.2) souvisí i vzorec pro derivaci funkce násobené reálným koeficientem, tj. funkce $y = r \cdot v$, kde r je libovolné reálné číslo a v nějaká funkce proměnné x. Při derivaci se na funkci y můžeme dívat jako na součin funkcí $u = r$ a v. Derivace konstantní funkce $u = r$ je nulová, a tak se vzorec 3.2 po dosazení značně zjednoduší

$$\frac{dy}{dx} = r \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{3.3}$$

Tvrzení 25. *Derivací funkce $r \cdot v$, kde $r \in \mathbb{R}$, je „r krát derivace funkce v“. (Viz rovnice 3.3)*

[7] Calculus made easy s. 37

3.6.9 Derivace podílu dvou funkcí

V této subsekci ukáži postup, kterým lze odvodit vzorec pro derivaci podílu dvou funkcí za pomoci diferenciálů. Čerpal jsem z publikace *Calculus made easy* (s. 39), kde je využit princip formálního dělení dvou mnohočlenů.

Odvození 26. Máme-li funkci $y = u \div v$, kde u a v jsou funkce proměnné x a přičteme-li k x přírůstek dx, dáváme vzniknout podílu $(u + du) \div (v + dv)$. Pokud toto dělení provedeme, vzniknou členy, obsahující diferenciály různých řádů a my stejně jako v předchozích případech zanedbáme ty z nich, jež obsahují diferenciály 2. a vyššího řádu. Proces dělení uvádím v tabulce 3.3. Výsledkem je výraz

$$\frac{u}{v} + \frac{du}{v} - dv\frac{u}{v^2}. \tag{3.4}$$

Ten odpovídá i součtu $y + dy$. Dále postupujeme analogicky k předchozím zkušenostem a snažíme se z rovnice 3.5 získat rovnost ve tvaru $dy/dx = \ldots$ Po několika úpravách tedy máme rovnici 3.6.

$$
\begin{array}{ccccc}
(u+du) & \div & (v+dv) & = & \frac{u}{v}+\frac{du}{v}-dv\frac{u}{v^2} \\
-(u+dv\frac{u}{v}) & & & & \\
\hline
du-dv\frac{u}{v} & & & & \\
-(du+\frac{du\,dv}{v}) & & & & \\
\hline
-dv\frac{u}{v}-\frac{du\,dv}{v} & & & & \\
-(-dv\frac{u}{v}-dv^2\frac{u}{v^2}) & & & & \\
\hline
dv^2\frac{u}{v^2}-\frac{du\,dv}{v} & & & & \text{Vzniklé členy zanedbáme.}
\end{array}
$$

Tabulka 3.3: Derivace podílu.

$$
\begin{aligned}
y + dy &= \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - dv\frac{u}{v^2} \qquad (3.5)\\
dy &= \frac{du}{v} - dv\frac{u}{v^2}\\
dy &= \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Poznámka. Dělení v tabulce 3.3 by sice mohlo pokračovat dále, ale zbytky v levém sloupci, které obsahují čím dál větší mocninu diferenciálu, by do výsledku generovaly členy s vyššími diferenciály. Takže když už jsme si jisti, že další členy budou obsahovat diferenciály 2. a vyššího řádu, v procesu dále nepokračujeme a zbytek po dělení vedle vygenerovaného výsledku zanedbáme.

Tvrzení 27. *Derivací podílu dvou funkcí* $\frac{u}{v}$ *je zlomek z rovnice 3.6.*

3.6.10 Derivace složené funkce

Odvození 28. Představme si funkci y, jejíž proměnná je jiná funkce u proměnné x. A my bychom ji chtěli zderivovat podle proměnné x. Dnes běžné odvození pomocí limit se sice precizně vypořádá se všelijakými nástrahami, přesto se však nevyrovná eleganci následujícího řádku.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{3.7}$$

Pouhým rozšířením zlomku dy/dx o diferenciál du vzniká pravidlo pro derivaci složené funkce a ačkoli je jasné, že takovouto[8] primitivní úpravou jsme získali spíše princip než všeobecně platný vzorec, jednoduchost historického přístupu bere dech.

Tvrzení 29. *Derivací složené funkce je součin derivace vnější funkce (s nezměněnou vnitřní) a derivace vnitřní funkce. (Viz rovnice 3.7)*

Příklad. Poněvadž se jedná o poměrně složité téma, doplním ho ještě triviálním příkladem. Chceme derivovat třeba funkci $y = (2x^6+729)^4$. I když jsme teoreticky schopni toto provést umocněním závorky a následným derivováním sčítanců člen po členu, dáme zatím šanci našemu novému postupu.

Nejprve si uvědomíme, že mocnění čtyřkou můžeme považovat za vnější funkci $y = u^4$. Za vnitřní funkci u tak dosadíme závorku $(2x^6 + 729)$. Máme tedy

$$\begin{aligned} y &= u^4 \\ \frac{dy}{du} &= 4u^3 \\ u &= 2x^6 + 729 \\ \frac{du}{dx} &= 12x^5. \end{aligned}$$

Povšiměte si prosím proměnných podle jakých funkce derivujeme (vnější podle u, vnitřní podle x). Po dosazení do vzorce 3.7 máme

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot 12x^5.$$

A ještě dosaďme za u vnitřní funkci $2x^6 + 729$. Tedy

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x^6 + 729)^3 \cdot 12x^5.$$

Tímto příkladem jsem chtěl poukázat na dvě zásadní skutečnosti. Za prvé, že dílčí funkce jsou derivovány vždy dle své proměnné. Za druhé, že za proměnnou u jsme dosazovali ještě nezderivovanou vnitřní funkci $2x^6 + 729$. Pro hlubší porozumění doporučuji spočítat větší množství příkladů.

[8] Calculus made easy s. 68

3.6.11 Derivace inverzní funkce

Inverzní funkce vzniká zaměněním rolí závislé a nezávislé proměnné. Ovšem za předpokladu, že je původní funkce prostá. Tj. že jednomu x náleží maximálně jedno y. V konkrétních případech se nám může nějaký vzorec, jak zderivovat inverzní funkci, ukázat velmi užitečným.

Odvození 30. Místo podílu dy/dx budeme u inverzní funkce vlastně psát dx/dy, protože proměnné x a y si prohodily role. Jednoduchou a opět elegantní úpravou pak získáme vztah[9] mezi derivací funkce a derivací funkce k ní inverzní.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{3.8}$$

Tvrzení 31. *Derivací invertibilní[10] funkce je převrácená hodnota derivace její inverzní funkce a naopak. (Viz rovnice 3.8)*

Příklad. Řekněme, že bychom rádi znali derivaci funkce 2. odmocniny. Ta je na intervalu $[0, \infty)$ inverzní k druhé mocnině. Pokud se tedy omezíme jen a pouze na tento interval, bude platit

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \\ x &= \sqrt{y} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Naše výsledná funkce má mít však nezávislou proměnnou y, proto ještě dosaďme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

Tedy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}.$$

Což mimochodem splňuje i naše předchozí tvrzení (Tvrzení 19) o derivaci obecné mocniny.

Poznámka. Díky vztahu mezi derivacemi navzájem inverzních funkcí můžeme například odvodit derivaci funkce přirozeného logaritmu. Samozřejmě až poté, co budeme znát derivaci k ní inverzní exponenciální funkce.

3.7 Nekonečné mocninné řady

Přestože jsem ukázal odvození základních vzorců pro derivace, nestačily by nám dosavadní znalosti pro derivace jiných než polynomických funkcí. Chybí nám tedy aparát pro derivace elementárních funkcí jako jsou e^x, $\ln x$, $\sin x$ a další.

[9] Calculus made easy s. 132

[10] Funkci lze invertovat, právě když je prostá.

Naštěstí pro nás existují způsoby, jak funkci rozepsat do mocninné řady, které už se polynomům podobají více. Nejprve nějaké funkce vyjádříme jako řady a posléze se vrátíme k jejich derivacím.

Exponenciála

Nyní se podíváme, jakým způsobem Leonhard Euler (1707 – 1783) v knize *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) propojil dnes limitní vyjádření exponenciály a její vyjádření ve formě nekonečné mocninné řady. Na tomto základě si pak ukážeme, jak derivovat exponenciálu.

Odvození 32. Vypůjčíme si značení z *Matematiky v proměnách věků I*; ε bude nekonečně malá veličina a N nekonečně velká veličina.[11] Dále a bude reálný základ mocninné funkce ve tvaru a^x. Víme, že $a^0 = 1$ – tedy že logaritmus z čísla 1 je vždy nulový.

Euler tvrdí, že a^ε se od a^0 liší pouze o nekonečně malý sčítanec, zapsaný ve tvaru $k\varepsilon$, kde k neznáme. Píšeme tedy

$$a^\varepsilon = 1 + k\varepsilon.$$

Posléze předpokládá, že v případě, kdy x je konečné, platí pro nekonečně velké N, že $N = x/\varepsilon$. Navíc tedy $x = N\varepsilon$. Postupujme tedy podle Eulera.

$$a^x = a^{N\varepsilon} = (a^\varepsilon)^N = (1 + k\varepsilon)^N = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N$$

Nekonečným binomickým rozvojem získáváme součet

$$1 + N\frac{kx}{N} + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \dots$$

Pro nekonečně velké N je podíl $\frac{N-1}{N}$ rovný 1. To samé platí pro podíly $\frac{N-2}{N}$, $\frac{N-3}{N}$ a další, pokud v čitateli odčítáme konečné číslo. V každém sčítanci našeho součtu tak můžeme krátit. Máme tedy

$$a^x = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \dots$$

Euler pak postupně položil $x = 1$ a $k = 1$. Výsledný součet $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ označil písmenem e[12]. Máme tedy dva různé tvary pro exponenciálu e^x.

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \tag{3.9}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{3.10}$$

Tvrzení 33. *Mocninná řada pro funkci e^x je řada z rovnice 3.10.*

V následném výkladu Euler podobným způsobem odvodil vyjádření funkce $\ln(1 + y)$ ve tvaru nekonečné řady. Společně s podrobnějším popisem odvození pro exponenciálu je dostupný v publikaci *Matematika v proměnách věků I* na stranách 35 až 39, odkud jsem čerpal.

[11] Původní Eulerovo značení i, ω je dnes dle mého názoru poněkud matoucí.

[12] Eulerovo číslo $e = 2{,}718281828\dots$

Sinus a cosinus

Na stejném místě od strany 26 dále je pak popsán Newtonův postup od kružnice k mocninné řadě pro sinus. Zde ho neuvádím, ježto je poměrně složitý a není hlavním obsahem této práce. pokud vás zajímá odvození mocninné řady pro sinus (rovnice 3.11), nahlédňete do zdrojového textu.

Tvrzení 34. *Mocninná řada pro funkci sinus je řada z rovnice 3.11.*

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots \tag{3.11}$$

Tvrzení 35. *Mocninná řada pro funkci cosinus je řada z rovnice 3.12.*

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \dots \tag{3.12}$$

3.7.1 Taylorův rozvoj a derivace vyšších řádů

Výše jsme díky Newtonovi, Eulerovi a dalším transformovali některé elementární funkce do podoby nekonečných mocninných řad. Díky tomu je budeme moci posléze snadno zderivovat. Než k tomu přistoupíme, pojďme se ještě chvíli nekonečnými řadami zabývat.

Derivace vyšších řádů

Poznatek. Často je možné funkci zderivovat i několikrát po sobě, pokud všechny derivace existují. Kupříkladu jsme schopni opakovaně derivovat funkci $y = x^5$. S každou derivací se v tomto případě snižuje řád mocninny, až je nakonec výsledná funkce konstantní. Od této chvíle bude mít každé další zderivování za výsledek konstantní nulu. Viz tabulka 3.4. Všimněte si, že postupným derivováním vzniká vyšší a vyšší koeficient, který je pak pro 4. a 5. derivaci 5!.

Poznámka. Využíváme značení, kdy mocnina za písmenem d v čitateli udává, o kolikátou derivaci jde, zatímco mocnina ve jmenovateli značí, kolikrát jsme derivovali podle uvedené proměnné.

Poznámka. Za pozornost stojí i fakt, že každá další derivace nějakého polynomu (jako je například $y = x^5$), snižuje násobnosti jeho stávajících kořenů o 1. Když tedy 5krát zderivuji polynom s pětinásobným kořenem, vzniklý polynom už tento kořen mít nebude. Ostatně v tabulce 3.4 je krásně vidět, jak se postupně snižuje násobnost kořenu 0 a jak pro pátou derivaci tento původně pětinásobný kořen ztrácíme.

Příklad. Rád bych předchozí poznámku doplnil o krátký ilustrativní výpočet. Máme funkci $P(x) = 2\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)$ s dvojnásobným kořenem 1 a s jednoduchým kořenem 3. Pokud roznásobíme závorky máme

$$P(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6.$$

Její derivací získáme novou funkci

$$\frac{dP(x)}{dx} = 2 \cdot (3x^2 - 10x + 7) = 2(x - 1)(3x - 7).$$

Násobnosti obou kořenů se tak snížily o 1. Přičemž původní kořen 3 zmizel. Naopak nám přibyl jeden nový kořen, který kompenzuje ztrátu násobností pro oba původní kořeny. Další derivací ztratíme oba kořeny a získáme jeden nový.

Funkce:	x^5	$y = x^5.$
1. derivace:	$5 \cdot x^4$	$\dfrac{dy}{dx} = 5x^4.$
2. derivace:	$5 \cdot 4 \cdot x^3$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 20x^3.$
3. derivace:	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2$	$\dfrac{d^3y}{dx^3} = 60x^2.$
4. derivace:	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x^1$	$\dfrac{d^4y}{dx^4} = 120x.$
5. derivace:	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0$	$\dfrac{d^5y}{dx^5} = 120.$
6. derivace:	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$	$\dfrac{d^6y}{dx^6} = 0.$

Tabulka 3.4: Derivace funkce x^5.

Taylorův rozvoj

Podívejme se na tečnu ke grafu funkce, jejíž předpis obsahujě 1. derivaci, jako na jistou aproximaci chování té funkce v daném bodě. Místo složitého vzorce jsme se omezili na lineární vztah, i tak ovšem máme celkem dobrou představu o růstu funkce v bodě. Chyba, kterou tato aproximace generuje je na okolí zkoumaného bodu velmi malá. Je dokonce menšího řádu než dx, přesto však může existovat a v kontextu rozměrů řádu například dx^2 je pak natolik významná, že ji nemůžeme zanedbat. V takovém kontextu bychom tedy chtěli získat novou aproximaci funkce s chybou, jež je v porovnání s dx^2 zanedbatelná. Tato aproximace už nebude lineární; bude kvadratická.

Od tečny, jež zapíšeme $y = f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a)$ přejdeme k jemnější aproximaci obsahující i diferenciály druhého řádu. Ta vypadá takto:

$$y = f(a) + \frac{df(a)}{1!\,dx}(x-a) + \frac{d^2f(a)}{2!\,dx^2}(x-a)^2.$$

Poznatek. Postupným zjemňováním aproximace získáme Taylorovu řadu, která stejně jako tomu bylo u mocninné řady pro exponenciálu nebo sinus, odpovídá původní funkci. Omezením na prvních několik členů této nekonečné mocninné řady získáváme aproximaci s chybou zahrnující všechny zanedbané členy.

$$y = f(a) + \frac{df(a)}{1!\,dx}(x-a) + \frac{d^2f(a)}{2!\,dx^2}(x-a)^2 + \frac{d^3f(a)}{3!\,dx^3}(x-a)^3 + \frac{d^4f(a)}{4!\,dx^4}(x-a)^4 + \dots$$

Poznámka. Stroje, jako jsou například kalkulačky, počítají s Taylorovými polynomy běžně. Snadno si zadané hodnoty dosadí do odpovídajícího polynomu určitého řádu a za pár chvil generují výsledek. Pro danou funkci si tak místo složitých vztahů pamatují pouze její Taylorův polynom.

3.8 Zpět k počítání, derivace některých funkcí

Nyní využijeme mocninných řad při odvození derivací některých elementárních funkcí.

3.8.1 Derivace exponenciální funkce

Odvození 36. Vezměme mocninnou řadu pro funkci e^x (viz rovnice 3.10) a zderivujme ji člen po členu.

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\frac{df}{dx} = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots$$

Po následném zkrácení

$$\frac{df}{dx} = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Získáváme původní funkci e^x. Protože je mocninná řada nekonečná a neexistuje žádný poslední člen, vznikná každý jeden člen derivací svého následovníka.

Tvrzení 37. *Derivací exponenciální funkce e^x je sama funkce $y = e^x$.*

Poznámka. V praxi to znamená, že směrnice tečny v libovolné bodě exponenciály e^x odpovídá právě funkční hodnotě v tomto bodě. Jinými slovy, směrnice tečny roste spolu s funkčními hodnotami exponenciální rychlostí.

3.8.2 Derivace přirozeného logaritmu

Odvození 38. Přirozený logaritmus – tedy $\ln x$ – jsa inverzní funkcí k exponenciále, můžeme derivovat pomocí pravidla o derivaci inverzní funkce. Musíme si však dávat pozor, abychom v závěru nezapoměli dosadit za vnitřní funkci y.

$$y = \ln x$$
$$x = e^y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Tvrzení 39. *Derivací funkce přirozeného logaritmu $\ln x$ je funkce $y = \frac{1}{x}$.*

Příklad. Ukažme si v praxi, že pravidlo z rovnice 3.8 funguje oběma směry; tj. že jsme schopni pomocí inverzní funkce získat derivaci funkce e^y.

$$x = e^y$$
$$y = \ln x$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$$

3.8.3 Derivace sinu

Odvození 40. Eulerův postup pro derivaci sinu je opět uvedený v *Malém průvodci historií integrálu* na straně 51. Abychom se jím dobrali zdárného řešení, bude třeba užít součtový vzorec: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ a Taylorovy mocninné řady pro sinus (rov. 3.11) a cosinus (rov. 3.12).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Se znalostí těchto řad se tedy pustme do práce.

$$\begin{aligned} y &= \sin x \\ y + dy &= \sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx = \\ &= \sin x\left(1 - \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^4}{4!} - \dots\right) + \cos x\left(dx - \frac{dx^3}{3!} + \frac{dx^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned}$$

Po roznásobení a zanedbání členů obsahující diferenciály vyšších řádů vzniká rovnost
$$y + dy = \sin x + \cos x\, dx.$$

A tedy

$$\begin{aligned} dy &= \cos x\, dx \\ \frac{dy}{dx} &= \cos x. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Tvrzení 41. *Derivací funkce* $\sin x$ *je funkce* $y = \cos x$.

Derivace cosinu

Odvození 42. Ještě uvádím analogické odvození derivace cosinu s užitím součtového vzorce: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

$$\begin{aligned} y &= \cos x \\ y + dy &= \cos(x + dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx = \\ &= \cos x\left(1 - \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^4}{4!} - \dots\right) - \sin x\left(dx - \frac{dx^3}{3!} + \frac{dx^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned}$$

Stejně jako prve zanedbáme členy obsahující diferenciály vyšších řádů, odečteme y (resp. $\cos x$) a vydělíme diferenciálem dx. Celkem tedy

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x. \tag{3.14}$$

Tvrzení 43. *Derivací funkce* $\cos x$ *je funkce* $y = -\sin x$.

3.9 Šetření průběhu funkce

Prostor k uplatnění znalostí o derivacích je poměrně široký, ač si troufám tvrdit, že je poměrně úzce spjat s funkcemi. Závislost jedné veličiny na druhé je nicméně v našem okolí běžná. Uplatnění tedy najdeme všude tam, kde hledáme podrobnější informace o nějaké funkční závislosti.

Setkáme se s nimi v řadě technických i všeobecně zaměřených oborů a na vysokých školách. Pravděpodobně nejomílanější je jejich uplatnění při šetření průběhu nějaké složitější funkce. Díky schopnosti popsat růst funkce a posléze i konkávnost či konvexnost získáváme unikátní informace, z kterých dále vyvodíme podobu grafu.

Místo podrobného popisu postupu, jak si s průběhem funkce poradit, který je snadno dostupný, bych se rád zaměřil na jednu konkrétní zajímavost.

Poznatek. Máme-li nějakou spojitou derivovatelnou funkci a má-li tato funkce v nějakém bodě maximum nebo minimum, pak nutně musí být derivace v tom bodě nulová. Příkladem buď funkce x^2, se kterou jsme už pracovali. V bodě 0 má minimum. Díváme-li se na derivaci jako na růst funkce, vidíme, že nejprve funkce nejprve klesá a pak „někde uprostřed“ pozvolna přechází v růst. Je tedy nasnadě, že v bodě 0 je derivace nulová, což už jsme si dříve ověřili.

Často se objevují aplikační úlohy zaměřené právě na hledání maxima nebo minima nějaké funkce. Někdy dokonce musíte její předpis nejprve odvodit. Oblíbeným příkladem je hledání maximálního obsahu, objemu atp. nebo naopak minimálního obvodu, či obsahu.

4. Integrace

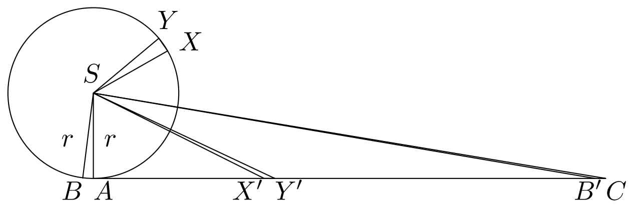
4.1 Motivace – Obsahy a objemy

Příklad. Už jsem v rámci příkladu s objemem kužele ukázal (viz sekce 2.2), že spočíst obsah kruhu není s využitím infinitesimálních úseček vlastně žádný problém. Tvrdil jsem, že na kruh se můžeme dívat jako na n-úhelník s nekonečně mnoha vrcholy. Nyní bych rád předvedl ještě Keplerovo odvození obsahu kruhu.[1] Pokoušíme se v něm ukázat, že obsah kruhu na obrázku 4.1 je roven obsahu trojúhelníka ACS.

Pokud rozsekáme kruh se středem S a poloměrem r na nekonečně mnoho infinitesimálních výsečí s obloukem délky ds, tak součtem jejich obsahů získáme celý obsah kruhu. Oblouky jednotlivých výsečí jsou tak malé, že se prakticky neliší od úseček. Předpokládáme tedy, že např. obsah infinitesimální výseče SXY je shodný s obsahem infinitesimálního trojúhelníka SXY.

Strana AC vznikla rozvinutím obvodu kruhu do rovné úsečky, a její délka je tak s obvodem shodná, obsah trojúhelníka ACS tedy bude záviset na obvodu kružnice, který definujeme pomocí vztahu $O = 2\pi r$.

Trojúhelníček SXY v kruhu odpovídá po rozvinutí obvodu trojúhelníčku $SX'Y'$ a trojúhelníček SBA trojúhelníčku $SB'C$. Protože ΔSBA a $\Delta SB'C$ mají setejnou výšku r i shodnou délku základny ds, je shodný i jejich obsah. Stejně tak je obsah ΔSXY roven obsahu $\Delta SX'Y'$.



Obrázek 4.1: Rozvinutí kruhu do trojúhelníka ACS.

Poněvadž obsahy všech infinitesimálních troúhelníčků vyplňujících kruh odpovídají obsahům všech infinitesimálních troúhelníčků v trojúhelníku ACS, rovnají se i obsah kruhu a obsah trojúhelníka. Platí tedy

$$S = \frac{1}{2} r \cdot O = \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

Poznatek. Všiměte si, že Kepler vlastně využil rozložení obsahu kruhu na součet obsahů infinitesimálních trojúhelníčků, které pak „zdeformoval“ a poskládal do trojúhelníka ACS. Za klíčovou považuji úvahu, že složením nekonečně mnoha infinitesimálních útvarů získáme útvar nezanedbatelných rozměrů. Stejně jsme uvažovali v sekci 2.4.

[1] viz Malý průvodce historií integrálu s. 24 a Historie matematiky I s. 119

4.2 Integrál jako antiderivace

Jak už jsem naznačil v předchozím textu, nekonečný součet diferenciálních plošek může mít kladný rozměr, a je tak pro nás zajímavý. Nástrojem, kterým budeme infinitesimální plošky sčítat, bude integrál. Než se však podíváme na integrování z geometrické perspektivy a než si ukážeme, jak si ho představit, rád bych poukázal na vztah mezi integrováním a derivováním.

Poznatek. Jedním z prvních, kteří si uvědomili, že sumace a diferenciace jsou vlastně inverzní operace, byl Leibniz. Podíváme se, jakým způsobem počalo jeho uvažování nad tímto vztahem.[2] Zapíšeme si do tabulky posloupnost druhých mocnin přirozených čísel, posloupnost diferencí (přírůstků) pro jednotlivé členy posloupnosti a posloupnost diferencí těch diferencí. Tak nám vzniknou první řádky tabulky 4.1. Další řádky jsou posloupnosti třetích a vyšších diferencí; povšimněte si mimochodem, že ty už budou jako přírůstky konstantních posloupností nulové. (Viz subsekce 3.7.1)

n	0	1	2	3	4	5	6	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	...
1. dif.		1	3	5	7	9	11	...
2. dif.			2	2	2	2	2	...
3. dif.				0	0	0	0	...

Tabulka 4.1: Tabulka diferencí členů posloupnosti druhých mocnin přirozených čísel.

Také je krásně vidět, že $(n+1)$-tý člen posloupnosti je rovný součtu prvních n členů posloupnosti 1. diferencí. Platí tak rovnost $1+3=4$ nebo $1+3+5=9$. Všimněte si, že stejný vztah platí (s doplněním jedničky do součtu) i pro posloupnosti prvních a druhých diferencí. Tj. $(1)+2=3$ a $(1)+2+2=5$.

Takže z posloupnosti diferencí (přírůstků) lze sčítáním jednotlivých členů získat původní posloupnost stejně tak, jako můžeme rozdílem členů původní posloupnosti získat posloupnost diferencí.

Integrace jako součet infinitesimálních veličin

Pojďme se inspirovat Leibnizem, podíváme se na součty nikoli však reálných diferencí, ale infinitesimálních veličin, jako je třeba náš diferenciál. Nejprve se podrobněji zaměříme na tvrzení ze sekce 2.4; tvrdil jsem, že nekonečný součet diferenciálů není mezi reálnými čísly zanedbatelný.

Obrázek 4.2: Úsečka s krajními body a, b s naznačenými diferenciály dx, kterých je mezi krajními body nekonečně mnoho.

Příklad. Máme úsečku reálné nenulové délky s krajními body a, b a vyznačíme na ní postupně všechny diferenciály dx, tedy délky mezi každými dvěma „sousedními“ body (viz obrázek 4.2). Nekonečně malých diferenciálů dx je na

[2]Matematika v proměnách věků I s. 17

této úsečce nekonečně mnoho. A pokud je všechny zpátky „sečtu", získám zpět celou její délku, což je vzdálenost krajních bodů a, b. Proces nekonečného sčítání, respektive skládání zpět v celek, nazveme *integrace* a označíme ho protáhlým velkým „S" jako sumace. Píšeme

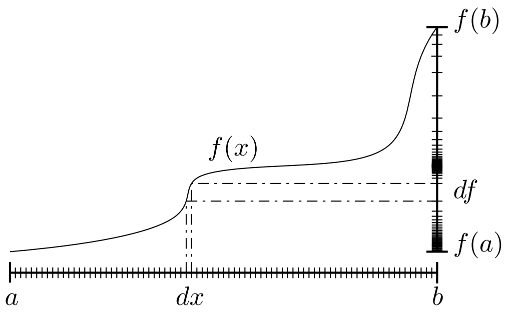
$$\int_a^b dx = b - a. \tag{4.1}$$

Integrace pro nás tedy bude způsob, jak „sečíst" nekonečně mnoho diferenciálů, a získat tak reálnou hodnotu.

Vymezení pojmu 44. *Integrací rozumím proces sčítání infinitesimálních veličin přes nějaký interval.*

Poznámka. Mimochodem integrace má smysl pouze v kombinaci s infinitesimálními veličinami jako jsou diferenciály. Kdybychom totiž integrovali nějaké běžné reálné nenulové délky, získali bychom nekonečně velkou hodnotu. Například pokud sečteme nekonečně mnoho jedniček, výsledkem bude prostě nekonečno. Krásně to zapadá do Leibnizova přirovnání k nebeské klenbě a zemskému povrchu (viz subsekce 2.4.1). Integrace nás posouvá o úroveň výše směrem k nekonečnosti, diferenciace o úroveň níže směrem k zanedbatelnosti.

Příklad. V předchozím příkladě jsem ukázal sčítání nekonečně mnoha shodných diferenciálů dx, nikde jsem ale nezakázal sčítat navzájem různé infinitesimální délky. Jak se říká, co není zakázáno, to je povoleno, pojďme se tedy podívat na součet rozdílných diferenciálů.



Obrázek 4.3: Funkce f s naznačenými diferenciály df (na svislé ose), které jsou závislé na x.

Takový součet může ilustrovat například obrázek 4.3. Svislá úsečka s krajními body $f(a)$, $f(b)$ vznikla promítnutím funkčních hodnot funkce f nad každým jedním bodem vodorovné úsečky (s krajními body a, b) do spojité linky. Zatímco rozdíl dvou „sousedních" bodů na vodorovné úsečce je tedy dx, rozdíl odpovídajících si funkčních hodnot na svislé úsečce je df.

Diferenciály df mohou být díky své funkční závislosti na x navzájem různé. Na obrázku jsou tak ty menší vedle sebe postaveny „těsněji" než ty větší. A ačkoli je jich opět nekonečně mnoho, každý jeden z nich je zanedbatelný (vedle kladných rozměrů), a jejich součet tak dá celou délku svislé úsečky, což je vlastně reálný přírůstek funkce f mezi body a a b, tj. rozdíl $f(b) - f(a)$. Zapíšeme-li to pomocí symbolů, máme

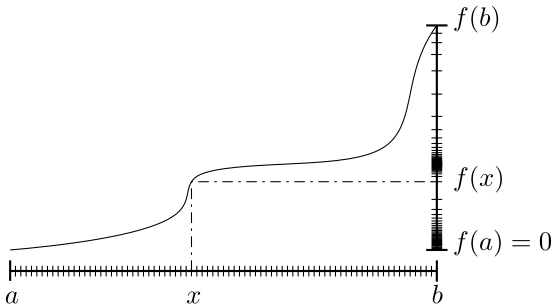
$$\int_a^b df = f(b) - f(a). \tag{4.2}$$

Poznámka. Ukázal jsem tedy, že integrace je vlastně proces sčítání nekonečně mnoha infinitesimálních hodnot, u kterých nezáleží na tom, jestli jsou navzájem různé. Poskládáním nekonečně mnoha diferenciálů df „za sebe“ navíc získám reálnou diferenci funkce f na odpovídajícím intervalu.

Poznatek. Na funkci můžeme pohlížet po vzoru Leibnize jako na „posloupnost“ po sobě jdoucích funkčních hodnot[3], tj. nad každým bodem osy x je vyznačena funkční hodnota. Pokud máme nějakou funkci f s nulovou funkční hodnotou pro bod a a platí, že rozdíl „sousedních“ bodů na ose x je diferenciál dx a rozdíl odpovídajících funkčních hodnot je diferenciál df, pak nekonečný součet diferenciálů df od bodu a do nějakého bodu x dá funkční hodnotu $f(x)$, protože bereme v úvahu všechny předešlé diferenciály. Pokud je navíc bod x proměnná veličina, generuje integrace celou funkci f. Můžeme to psát jako

$$\int df = f(x). \tag{4.3}$$

Mohli bychom to ilustrovat na obrázku 4.4. Představme si součet všech diferenciálů df mezi body a a x, ten se zobrazuje na svislé ose a odpovídá stejně jako v předchozím příkladě rozdílu $f(x) - f(a)$. Ale protože $f(a) = 0$, je součet diferenciálů roven pouze funkční hodnotě v bodě x.



Obrázek 4.4: Funkce f, která má nulovou funkční hodnotu v bodě a.

Kdybychom posouvali bod x ze strany na stranu po vodorovné ose, získali bychom vždy funkční hodnotu v odpovídajícím bodě. Pokud ho tedy chápeme jako proměnnou, generuje celou funkci.

Integrace jako skládání infinitesimálních úseček v celek

Poznámka. Na integraci se ale můžeme koukat ještě trochu jinak, a to v podobě fyzického skládání infinitesimálních útvarů do reálných celků.

Poznatek. Můžu mít podobně jako na obrázku 4.2 nějakou úsečku (třeba s) rozsekanou na jednotlivé diferenciály ds a nehledě na její krajní body bych psal

$$\int ds = s. \tag{4.4}$$

Myslím tím, že součet všech diferenciálů dá celou úsečku. Tentokrát se však nebavím pouze o součtu vzdáleností, ale představuji si, že (fyzicky) skládám infinitesimální úsečky (tj. jejich délka je diferenciál) za sebe tak, že vytvoří původní úsečku s. Integraci tak chápu i jako proces skládání jednotlivých infinitesimálních částeček zpět v nějaký celek.

[3]Matematika v proměnách věků I s. 18

Vymezení pojmu 45. *Integrací rozumím proces skládání jednotlivých infinitesimálních útvarů v celek o reálných rozměrech.*

Než takto složíme celou funkci, vzpomeňme ještě v rychlosti na subsekci 3.4.2. Funkci f jsem popsal jako lomenou čáru poskládanou z jednotlivých infinitesimálních úseček, z nichž každá měla vlastní směrnici $\operatorname{tg}\alpha = df/dx$.

Pohyb na jednotlivých úsečkách splňuje představu, že když udělám jeden krok délky dx ve směru osy x, udělám $\operatorname{tg}\alpha$ stejně dlouhých kroků ve směru osy y. Máme tedy rovnici jednotlivých infinitesimálních úseček

$$dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot dx.$$

Pokud pomocí integrace sjednotím všechny úsečky zpět ve funkci f:

$$\int \operatorname{tg}\alpha \cdot dx = f.$$

Respektive raději budu na $\operatorname{tg}\alpha$ pohlížet jako na podíl odpovídajících diferenciálů df a dx. Pak mám

$$\int \frac{df}{dx} \cdot dx = f. \tag{4.5}$$

Nebo po zkrácení

$$\int df = f. \tag{4.6}$$

Poznámka. Jinými slovy posčítáním všech infinitesimálních diferencí funkce f (tj. diferenciálů df) získám celé f, což už ukázala rovnice 4.3. Oba dva způsoby uchopení integrace, sčítání a skládání, spolu úzce souvisí, což uvidíme i v sekci 4.3.

Integrace jako inverzní operace k derivaci

Poznatek. Všimněte si, že v rovnici 4.5 se za symbolem pro integraci nachází podíl diferenciálů, tedy derivace. Nabízí se proto možnost hledat vztah mezi oběma operacemi.

Derivaci lze snadno získat i v rovnici 4.2, a to pouhým rozšířením výrazu za symbolem pro integraci na zlomek $(df/dx) \cdot dx$. Máme pak rovnici

$$\int_a^b \frac{df}{dx} \cdot dx = f(b) - f(a). \tag{4.7}$$

Protože derivací funkce f získáme další funkci y, setkáváme se nyní (rovnice 4.5 a 4.7) s novými případy. De facto totiž integrujeme součin funkce y a diferenciálu dx. Stojí za to si oba případy nějak pojmenovat a posléze je prozkoumat. Budeme rozlišovat, zda máme, či nemáme určený interval pro integraci.

Definice 2. *Určitý integrál funkce y je symbol*

$$\int_a^b y \cdot dx.$$

Meze se značí dolním a horním indexem u integrálu a určují interval, přes který sčítáme.

Definice 3. *Neurčitý integrál funkce y je symbol*

$$\int y \cdot dx.$$

Poznámka. Všimněte si, že integrál funkce y je stále rozumných rozměrů, výraz za symbolem pro integraci (tedy v integrálu) je totiž infinitesimální, protože obsahuje součin diferenciálu dx a reálné funkce y. Jde tedy stále o integraci infinitesimálních veličin podobně jako v rovnicích 4.2 a 4.3.

Tvrzení 46. *Integrace a derivace jsou navzájem inverzní operace.*

Zdůvodnění. Určitý integrál nějaké funkce $y = df/dx$ s mezemi a, b je dle rovnice 4.7 roven rozdílu funkčních hodnot $f(b) - f(a)$. Zatímco neurčitý integrál funkce $y = df/dx$ je vlastně po vzoru rovnice 4.3 samotná funkce f. Integrál funkce df/dx tedy „kompenzuje" její derivaci a obě operace (integrace a derivace) se navzájem vyruší.

Poznatek. Pokud tedy máme funkci y, která je derivací nějaké funkce f proměnné x, a chceme-li funkci y zintegrovat (tj. hledáme integrál této funkce), můžeme postupovat následovně. Napíšeme si rovnici

$$y = \frac{df}{dx}.$$

Obě strany této rovnice zintegrujeme, tj. doplníme symboly $\int$ a dx:

$$\int y \cdot dx = \int \frac{df}{dx} \cdot dx.$$

Krácením diferenciálů upravíme pravou stranu stejně jako v rovnici 4.5, takže máme

$$\int y \cdot dx = \int df.$$

A nekonečný součet diferenciálů df do nějakého bodu x dá funkci

$$\int y \cdot dx = f(x) + C.$$

Přičemž C značí integrační konstantu, které se budeme posléze věnovat (v úvodní části subsekce 4.2.1).

Poznámka. Pokud je funkce y derivací funkce f, tj. platí $y = df/dx$, pak se funkce f nazývá *primitivní funkcí* k funkci y.[4]

Poznatek. Na vlas stejný postup, jako je ten výše uvedený, bych mohl užít pro určité integrály, spokojím se však s konstatováním, že v souladu s předchozím textem pro funkci $y = df/dx$ platí, že její určitý integrál je roven

$$\int_a^b y \cdot x = f(b) - f(a).$$

[4]Primitivní funkce je původní funkcí (před derivací).

4.2.1 Integrál jako antiderivace

Poznatek. Důsledkem toho, že integrace a derivace jsou navzájem inverzní operace, je, že když chci integrovat funkci y, stačí znát její primitivní funkci f. Takže při odvozování početních pravidel se vlastně ptám: „Derivací které funkce jsem získal mou funkci y?“ V této subsekci tedy metodou *antiderivace* ukáži některé základní vzorce pro počítání. Budu vycházet zejména ze vzorců pro derivace odvozených v sekci 3.6.

Integrační konstanta

Poznatek. Všimněte si, že jednu složku funkce při derivování ztrácíme. Pokud totiž funkce obsahuje nějakou konstantu, derivace způsobí její vynulování a to bez ohledu na její konkrétní velikost. Dostáváme tak stejný výsledek derivováním funkce $x^2 + 3$ jako derivováním funkce $x^2 + 666$.

Abychom toto zohlednili přidáváme k předpisu funkce po integraci ještě konstantu C. Dáváme tak najevo, že nevíme, jaká byla konstanta před derivací.

Integrace mocninné funkce

Odvození 47. Máme-li nějakou mocninnou funkci $y = x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, pak její derivace je

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}.$$

Vynásobením celé rovnice diferenciálem dx pak vznikne funkce diferenciálů dy:

$$dy = n \cdot x^{n-1} \cdot dx.$$

Máme tedy tzv. diferenciální rovnici, která vyjadřuje vztah mezi infinitesimálními veličinami. Pokud tyto veličiny posčítáme pomocí integrace, získáme vztah mezi veličinami reálných rozměrů.

$$\int dy = \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx \tag{4.8}$$

$$y = \int n \cdot x^{n-1} \cdot dx. \tag{4.9}$$

$$y = n \cdot \int x^{n-1} \cdot dx \tag{4.10}$$

Ze zadání víme, že výsledkem rovnice 4.10 má být rovnice

$$y = x^n. \tag{4.11}$$

A protože y figuruje v obou předešlých rovnicích, můžeme je sloučit.

$$x^n = n \cdot \int x^{n-1} \cdot dx \tag{4.12}$$

Pro integrál funkce x^{n-1} tak platí (s nulovou konstantou C):

$$\int x^{n-1} \cdot dx = \frac{1}{n} \cdot x^n. \tag{4.13}$$

Poznámka. Všimněte si, že v rovnici 4.10 jsem vytkl reálný koeficient n před integrál. To můžu učinit ze dvou důvodů. Jednak je proces integrace vlastně jen „převlečená“ sumace pro nekonečně mnoho členů a vytýkání ze součtu není problém. Jednak tak činím s vědomím, že reálné koeficienty vytýkám i před derivaci, integrace jako její inverzní operace to tedy reflektuje.

Tvrzení 48. *Integrál mocninné funkce x^n je roven funkci $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, tedy:*

$$\int x^n = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C. \tag{4.14}$$

Poznatek. Pozastavme se ještě nad konstantní funkcí a vzpomeňme, že byla výsledkem derivace nějaké lineární funkce. Proto nyní nesmíme konstantní funkce zanedbat (jako to děláme u derivací):

$$\int a \cdot dx = a \cdot \int dx = a \cdot x + C.$$

Všimněte si, že na integraci funkce $y = a$ se můžeme dívat jako na integraci mocninné funkce $y = a \cdot x^0$. Výsledek tomu odpovídá.

Integrace součtu dvou funkcí

Příklad. Tentokrát si pravidlo ukážeme na jednoduchém příkladě.[5] Představme si derivaci

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + x^3.$$

Opět vynásobíme dx

$$dy = (x^2 + x^3) \cdot dx$$

a zintegrujeme:

$$\int dy = \int (x^2 + x^3) \cdot dx.$$

S využitím základní vlastnosti mezi sčítáním a násobením, totiž s distributivitou, můžeme „roztrhnout“ náš integrál na součet dvou nekonečných součtů:

$$y = \int x^2 \cdot dx + \int x^3 \cdot dx$$
$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Pro funkce u a v s proměnou x stejnou úvahou dostaneme:

$$\int (u + v) \cdot dx = \int u \cdot dx + \int v \cdot dx. \tag{4.15}$$

Tvrzení 49. *Integrál součtu dvou funkcí $u + v$ je součet integrálu funkce u a integrálu funkce v. (Viz rovnice 4.15)*

Poznámka. Toto tvrzení lze mimochodem chápat jako společný důsledek tvrzení 46 (o inverznosti integrace a derivace) a tvrzení 21 (o derivaci součtu dvou funkcí).

[5] Calculus made easy s. 196

Integrace diferenciálů vyšších řádů

Poznatek. Pokud je pod integrálem více různých diferenciálů, jako například v rovnici 4.16, můžeme se na jeden z nich dívat jako na konstantu. Pak ho vytkneme před integrál a zjistíme, že výsledný součin je mezi reálnými čísly zanedbatelný.

$$\int du \cdot dv = du \int dv = du \cdot (v + C) = du \cdot v + du \cdot C \,(= 0) \tag{4.16}$$

Stejného výsledku bychom dosáhli i pokud bychom měli pod integrálem umocněný diferenciál – například dx^2. Souvisí to krásně s Leibnizovým přirovnáním k nebeské klenbě a zemi v subsekci 2.4.1. Totiž, že diferenciace nás posune vždy o úroveň níže, tj. od nebeské klenby k zemskému povrchu či od zemského povrchu k zrnku písku. Naopak integrace nás posouvá o úroveň výše od zrnka prachu k zemskému povrchu nebo od zemského povrchu k nebeské klenbě.

Máme-li tedy dva diferenciály pod jedním integrálem, činíme 2 kroky do „zanedbatelnosti“ a pouze jeden zpět, výsledek je tedy mezi reálnými čísly zanedbatelný.[6]

4.3 Integrál jako součet infinitesimálních plošek

V předchozí sekci jsem ukázal, že integrace je inverzní operace k derivaci a představil jsem nejjednodušší početní pravidla. Nyní bych se rád podíval na slibovanou geometrickou představu integrálu nějaké funkce. Podíváme se blíže na určitý integrál.

Poznatek. Integrál lze chápat jako nástroj k počítání obsahů.

Příklad. Představte si nějakou kladnou funkci y na intervalu (a, b). Plochu „pod ní“, tj. plochu mezi grafem a osou x, označíme S a rozdělíme ji na nekonečně mnoho obdélníčků dS s diferenciálními základnami dx a se stranou rovnou funkční hodnotě y. Obdélníčky mají jednu stranu reálného rozměru a zanedbatelnou základnu, jsou tedy samy o sobě mezi reálnými hodnotami zanedbatelné. Kdybychom ale sečetli obsah nekonečně mnoha těchto obdélníčků, mohli bychom získat nezanedbatelnou plochu. (Viz obrázek 4.5)

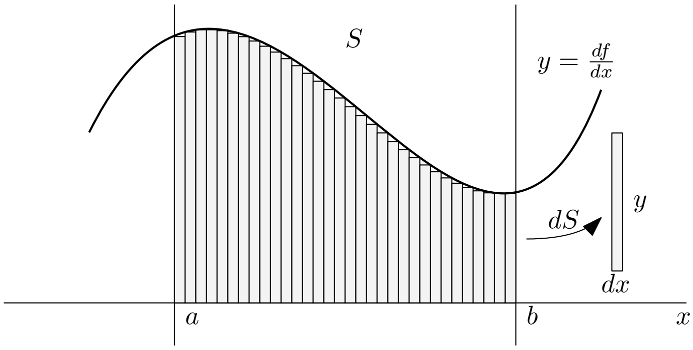
Za předpokladu, že funkce y je derivací nějaké funkce f (a platí $y = df/dx$), odpovídají její funkční hodnoty a tedy i svislé strany obdélníčků hodnotám derivace primitivní funkce f v jednotlivých bodech. Máme tak součet

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b y \cdot dx = \int_a^b \frac{df}{dx} \cdot dx = \int_a^b df = f(b) - f(a). \tag{4.17}$$

Diferenciály df jsou jednotlivé infinitesimální přírůstky funkce f a pokud je všechny sečteme přes interval (a, b), získáme hodnotu celkového přírůstku funkce f mezi body a a b – tedy rozdíl funkčních hodnot $f(b) - f(a)$.

Díváme-li se na stejnou situaci jako na nekonečné skládání infinitesimálních obdélníčků dS vedle sebe do plochy S, můžeme si všimnout, že diferenciální obdélníčky dS mají obsah rovný odpovídajícím infinitesimálním přírůstkům df. Celkový obsah plochy S je také rovný celkovému přírůstku primitivní funkce: $f(b) - f(a)$. (Viz rovnice 4.17)

[6] A History of analysis s. 89



Obrázek 4.5: Plocha pod grafem funkce y mezi a a b.

Poznatek. Můžeme tedy tvrdit, že funkce f, která je primitivní funkcí k y, popisuje obsah plochy pod funkcí y.

Poznámka. Součtem obsahů obdélníčků mezi a a b jsme získali celou plochu pod křivkou, přestože jsme vynechali infinitesimální pravoúhlé trojúhelníčky pod grafem funkce (viz obrázek 4.5). Jejich obsah, který se spočte jako $1/2 \cdot dx \cdot dy$, obsahuje součin dvou diferenciálů, proto je pro nás i po nekonečném součtu stále zanedbatelný, jak jsem ukázal na konci subsekce 4.2.1 a v sekci 2.4.

Tvrzení 50. *Obsah plochy pod grafem kladné funkce y mezi body a a b spočítáme jako:*

$$S = \int_a^b y \cdot dx.$$

Poznatek. Všimněte si, že obsah plochy je ze své podstaty nezáporný. Přesto však integrace umožňuje uvažovat záporné funkce a tedy vlastně zápornou plochu. To je samozřejmě nesmysl. Ploše je prostě „uměle“ spolu se znaménkem přiřazena orientace (kladná – leží-li nad osou x, záporná – leží-li pod osou x).

4.4 Newtonova-Leibnizova formule

Předchozí dvě sekce spojuje jediná věta tzv. *Newtonova-Leibnizova formule.* Díky ní umíme spočítat plochu pod křivkou pomocí antiderivace. Klíčovou myšlenku už jsme několikrát zmínili, zaslouží si však podrobnější rozbor. Posledním tvrzením této práce je právě zjednodušená *Newtonova-Leibnizova formule.*

Tvrzení 51. *Pokud $y = df/dx$ je funkce, pak je její integrál od a do b roven rozdílu $f(b) - f(a)$, neboli:*

$$\int_a^b y \cdot dx = f(b) - f(a) \tag{4.18}$$

Důkaz. Ještě bych rád předchozí tvrzení doplnil o náznak důkazu vycházejícího z rovnice 4.18. Ovšem ani ten pro nás už není nový. Vyjádříme funkci y pomocí podílu diferenciálů a zkrátíme dx na pravé straně.

$$\int_a^b y \cdot dx = \int_a^b \frac{df}{dx} \cdot dx = \int_a^b df$$

Nejde však o nic jiného než pouhý nekonečný součet všech infinitesimálních přírůstků primitivní funkce f mezi body a a b, což je její tamější celkový přírůstek, který vyjádříme jako rozdíl funkčních hodnot. Máme tak:

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

□

Poznatek. Newtonova-Leibnizova formule určuje vztah mezi obsahem plochy pod křivkou a přírůstky primitivní funkce, kterou můžeme získat pomocí integrace. Pokud si tak derivaci nějaké funkce f představíme jako funkci y popisující sklon derivované funkce, tak si stejně můžeme představit, že výsledkem integrace nějaké funkce y je funkce f popisující obsah plochy pod funkcí f.

Například funkce $u = 2x$ je derivací funkce $v = x^2$ a popisuje její růst, nebo chcete-li, její odchylky od osy x. Funkce v je primitivní funkcí k u a postupně generuje celkový obsah plochy pod grafem funkce $u = 2x$.

Poznámka. Práci jsem začal výpočtem okamžité rychlosti z funkce dráhy, a sluší se tak dokončit ji symbolickým výpočtem dráhy z funkce rychlosti. Propojení integrace a derivace sice nabízí celou řadu uplatnění, my se však podíváme právě a pouze na výpočet uražené dráhy.

Příklad. Máme funkci rychlosti v závislosti na čase $v(t)$. Už víme, že platí vztah

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Pokud zintegrujeme funkci okamžité rychlosti mezi body a a b podle času, získáme změnu dráhy mezi těmito body, a to v podobě rozdílu funkčních hodnot funkce $s(t)$ popisujícího délku uražené dráhy za časový interval (a, b).

$$\int_a^b v \cdot dt = \int_a^b \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_a^b ds = s(b) - s(a).$$

Závěr

Mým cílem bylo zkusit popsat vybraná témata s využitím diferenciálů. Vycházel jsem z vlastní zkušenosti s touto problematikou jako i ze zkušeností blízkých osob, samozřejmě za podpory literatury. Snažil jsem se tak doplnit opmojíné souvislosti v rámci matematické analýzy, které snad mohou při výuce vznikat.

Hlavním přínosem této práce je, dle mého názoru, poměrně propracovaná kapitola o diferenciálech, kde jsem se pokusil popsat jejich vlastnosti a vztahy k jiným veličinám. Ačkoli jsem před napsáním této práce sám tápal v pojetí tohoto pojmu, domnívám se, že se mi ho podařilo přiblížit cílovému čtenáři, a to i s využitím populárních příkladů „ze života".

Na základě, který jsem v této kapitole rozvedl, jsem pak dále stavěl pojem derivace (jako podíl diferenciálů) a integrace (jako jejich „nekonečný" součet). S potěšením se mi podařilo nalézt několik alternativních způsobů výkladu či odvození konkrétních vzorců. Rád bych tak vyzdvihl zejména parametrickou rovnici tečny v bodě, kouzelné odvození derivace složené funkce či důkaz *Newtonovy-Leibnizovy formule.*

Za zmínku pak stojí případy zanedbávání diferenciálů vyšších řádů vedle těch jednoduchých na základě Leibnizova přirovnání k nebeské klenbě a zemskému povrchu. Věřím, že se mi dostatečně dařilo v připomenutí historického intuitivního přístupu, který má silné uplatnění v odvozování vzorců a hlavně v budování představ, byť ve standardní analýze nepřesných.

Přestože jsem psal v zásadě didaktický text, nemyslím, že se mi podařilo dostatečně motivovat čtenáře ke snaze hlouběji se zabývat zkoumanou problematikou. Avšak díky tomu, že text má spíše povahu doplňkové literatury určené pro zájemce o alternativní přístup, považuji tento nedostatek za podružný.

Práce tak splnila, co jsem si předsevzal, a navíc prohloubila mou představu nekonečných a nekonečně malých velikostí, které se v selské mysli jen těžko setkávají s porozumněním.

Seznam použité literatury

BEČVÁŘ, Jindřich: Hrdinský věk řecké matematiky in Historie matematiky I in *Dějiny matematiky, 1. svazek.* (1994: Brno, Jednota českých matematiků a fyziků) s. 20-107

BEČVÁŘ, Jindřich: Hrdinský věk řecké matematiky II in Historie matematiky II in *Dějiny matematiky, 7. svazek.* (1997: Praha, Prometheus). s. 7-28

DRÁBEK, J.: Démokritova atomistická metoda in Matematika v proměnách věků I in *Dějiny matematiky, 11. svazek.* (1998: Praha, Prometheus) s. 175-180

FUCHS, Eduard: Od měření obsahů a objemů k infinitesimálnímu počtu in Historie matematiky I in *Dějiny matematiky, 1. svazek.* (1994: Brno, Jednota českých matematiků a fyziků) s. 108-127

GUICCIARDINI, Niccolò: Newton's Method and Leibniz's Calculus in A History of Analysis. (2003: Providence (USA), American Mathematical society). s. 73-103

SCHWABIK, Štefan; ŠARMANOVÁ, Petra: Malý průvodce historií integrálu in *Dějiny matematiky, 6. svazek.* (1996: Praha, Prometheus)

SCHWABIK, Štefan: Druhá krize matematiky aneb potíže růstu diferenciálního a integrálního počtu in Matematika v proměnách věků I in *Dějiny matematiky, 11. svazek.* (1998: Praha, Prometheus) s. 7-60

THOMPSON, Silvanus P: Calculus made easy: Being a very-simplest introduction to those beautiful methods of reckoning which are generally called by the terrifying names of the Differential calculus and the Integral calculus. (1914: London, The Macmillan company).

DOHNAL, R.: Jsou mikroplasty problém pro lidské zdraví? Pořád nevíme. [online] in Ekolist.cz [29.09.2021]. Citace: [07.05.2023] Dostupný z: www.ekolist.cz

MÜLLER, Kasper: An Incredibly Useful Generalization of the Binomial Theorem and Its Applications [online] in Cantor's Paradise [18.08.2022]. Citace: [07.05.2023] Dostupný z: www.cantorsparadise.com

Etymonline: online etymology dictionary [online]. Citace: [07.05.2023] Dostupný z: www.etymonline.com, Užitá hesla: derivative, differential, integral, integration, minute.

Seznam obrázků

Seznam tabulek