

Posudek vedoucího na bakalářskou práci

Autor: Jakub Zeman

Název práce: *Výklad derivace jako podíl diferenciálů*

Pan Zeman přišel s námětem pro tuto práci sám. Původní myšlenka byla využít svých zkušeností jakožto studenta, který prošel kurzem analýzy, a pokusit se napsat text, který by koncepty derivace a integrálu přiblížil z jiného pohledu a jiným způsobem, než je v základních kurzech analýzy běžné. Po konzultacích se mnou se autor rozhodl svou práci zaměřit na koncept diferenciálu: nekonečně malé veličiny, která historicky sehrála klíčovou úlohu v rozvoji kalkulu, a to aniž by byla přesně definována.

Implicitní myšlenka za touto volbou je, že při studiu matematiky může být těžké přeskakovat epochy: lidstvo se do dnešního stavu dopracovalo postupně, a není tedy samozřejmé, že dnešní student zvládne totéž poznání nabýt skokově. Začít výuku diferenciálního počtu pojmem limity definované pomocí kvantifikátorů přitom znamená přeskochit více než dvě století bouřlivého rozvoje matematické analýzy – a vynechat důvody, které dnes matematiky vedou k víře v užitečnost moderního matematického formalismu. Zmíněný „epochální“ myšlenkový skok k „epsilon-delta gymnastice“ považuji za jednu z hlavních příčin vysoké obtížnosti přechodu od SŠ matematiky na matematiku VŠ. Cílem této práce je na tento problém reagovat a pokusit se vyplnit vakuum mezi středoškolskou matematikou a vysokoškolskou matematickou analýzou úvodem do historického přístupu ke kalkulu.

Práce je rozdělena do 4 kapitol. V první kapitole autor provede čtenáře některými historickými souvislostmi od starověku až po zrod infinitesimálního počtu v 17. století. Najde o historický přehled, nýbrž o soubor zmínek souvisejících s tématem práce a způsobem výkladu; například Démokritos je zmíněn kvůli jeho filosofii atomismu, s jejíž pomocí lze snáze pochopit diferenciál atp.

Druhá kapitola čtenáři představí samotný pojem diferenciálu, a to pomocí vhodných příjmů (jedna veličina je zanedbatelná vedle druhé), přesnějšího (ovšem stále neformálního) vymezení toho pojmu a popisu některých jeho vlastností.

Následuje kapitola o derivaci, která je vyložena právě pomocí diferenciálů, čili jako podíl infinitesimálních veličin. Základní příklad ilustrující význam a užitečnost pojmu derivace je okamžitá rychlost pohybu, která je dána do kontrastu s rychlostí průměrnou (za nějaký zanedbatelný interval). Autor poté přechází k vysvětlení derivace chápané jako funkce (tj. nová funkce odvozená z funkce původní), vysvětluje souvislost se směrnicí tečny ke grafu původní funkce atd. Důležitá část této kapitoly je věnována také početním metodám: pomocí diferenciálů jsou odvozeny základní vzorce pro derivování. V závěru kapitoly autor zmiňuje mocninné řady a práci s nimi.

Poslední, čtvrtá kapitola se zabývá integrací, která je vysvětlena opět pomocí diferenciálů. Autor vysvětluje několik základních pojetí této operace (součet infinitesimálních veličin, skládání infinitesimálních úseček v celek, antiderivace), přičemž na pozadí je neustále to, co dnes obvykle nazýváme Newtonovou-Leibnizovou formulí. Původní představa této kapitoly měla oddělovat různá pojetí integrálu a na závěr je (jako zlatý hřeb) slavnostně propojit pomocí N.-L. formule (jejíž důkaz pomocí diferenciálů je přitom na jediný řádek). Praxe psaní tohoto textu ale ukázala, že tento přístup (na který jsme zvyklí z běžného VŠ výkladu kalkulu) není možný, neboť myšlenka N.-L. formule je neustále přítomna při všech úvahách o integrálu. Kapitola bylo tedy nutné podstatným způsobem přepracovat, aby ono oddělení různých pojetí integrálu nepůsobilo uměle.

Je důležité říci, že práce je psána dosti neformálním stylem. Leckteré myšlenky, které by se daly vyjádřit pomocí formálních zápisů přesně, jsou místo toho opsány slovy, a nabízejí tak (možná nežádoucí) prostor pro interpretace. Tato skutečnost je podle mého názoru daň za snahu o historickou věrnost a vysvětlení nevysvětlitelného: jak je totiž dobře známo, s derivacemi a integrály (potažmo s diferenciály) se od jejich zavedení (konec 17. stol.) až téměř do konce 19. stol. pracovalo do značné míry neformálně. O přesnější vymezení se mnozí snažili metodami filosofickými, popřípadě se týmiž metodami snažili dokázat, že celý kalkulus je nesmysl. Mnozí matematici pak tyto otázky prostě ignorovali a s diferenciály pracovali jako s nástrojem zjevně poskytujícím cenné výsledky. Z pohledu

tohoto historického kontextu je obtížně představitelné, že by takto zaměřený text dosahoval moderního standardu matematické přesnosti; umělecká licence a nepřesné psaní v práci přítomné jsou proto z větší části záměrem a v duchu celé věci.

V méně formálním přístupu je nicméně možné (a nutné) spatřovat přínos této práce: pokud se poddáme „víře v diferenciál“, důkazy některých velmi náročných vět prvního semestru analýzy se scvrknou na jediný řádek. Obzvláště působivými ukázkami tohoto jevu jsou věty o derivaci složené a inverzní funkce a také přímo Newtonova-Leibnizova formule. Je jasné, že tyto „důkazy“ nepostihují všechny případy a ignorují některé podrobnosti důležité pro hlubší porozumění, zároveň ale maximálně odhalují základní myšlenky těchto důkazů, čímž je podle mě zpřístupňují i těm, kteří je v důkazech podávaných v rámci povinných VŠ kurzů nedokážou najít. Myslím, že práce pana Zemana tento základní cíl skutečně naplňuje.

Celkový didaktický přínos práce je pro mě velmi obtížné posoudit. Vzhledem k ohromnému množství textů, které o této věci byly již napsány, je jistě nesnadné přijít s novým přístupem. Navíc po dvaceti letech od momentu, kdy jsem se s diferenciálním a integrálním kalkulem začal seznamovat, je pro mě obtížné vcítit se do role začátečníka, jemuž má práce pana Zemana usnadnit orientaci v novém myšlenkovém univerzu. Nicméně pokud mohu soudit, zdá se mi, že práce skutečně dává smysl a při vhodném doplnění moderním přístupem k analýze může nabídnout významnou přidanou hodnotu.

Po formální stránce je práce v pořádku. Nepočtené zdroje jsou kvalitně citovány při většině příležitostí, které by pozorného čtenáře mohly vybízet k diskusi. Autor převzal mnoho myšlenek z textů Štefana Schwabika, některé pasáže jsou v podstatě výtahy; touto skutečností se nicméně nijak netají, naopak až úzkostlivě cituje opakovaně tentýž zdroj. Celková struktura a myšlenka textu se významně liší od jakéhokoliv jiného textu, který je mi znám.

Text je kvalitně vysázen v L^AT_EXu a je doplněn řadou pěkných (vektorových) obrázků vytvořených v programu Ipe. Obrázky skutečně objasňují probírané myšlenky a významně zvyšují hodnotu práce.

Závěr: Podle mého názoru se jedná o kvalitní bakalářskou práci. Její cíle jsou poměrně ambiciózní a není snadné změřit míru jejich naplnění, práce nicméně dává smysl jako celek, je vcelku promyšlená a má některé zřetelné přednosti. Z těchto důvodů pro ni navrhuji hodnocení *výborně*.

Vedoucí práce
Martin Rmoutil