Posudek oponenta na bakalářskou práci

Výklad derivace jako podílu diferenciálů

Jakub Zeman

Předložená práce je věnována odvozování formulí pro derivování způsobem inspirovaným postupy běžnými v 18. století. Hojně jsou tak užívány diferenciály ve smyslu nekonečně malých veličin.

První kapitola je úvodní, obsahuje historické poznámky k chápání nekonečna v antice, v době Cavalieriho i v době Newtona a Leibnitze.

Druhá kapitola je věnována pojmu diferenciál z hlediska nekonečně malých veličin.

Těžiště celé práce tvoří třetí kapitola věnovaná derivacím chápaným jako podíl dvou diferenciálů. Uvedena je motivace pomocí okamžité rychlosti i pomocí směrnice tečny, naznačena je situace, kdy funkce nemá derivaci. Následuje část, v níž jsou pomocí práce s diferenciály odvozeny různé vztahy pro derivování (derivace funkce konstantní, lineární, kvadratické, kubické, mocninné; derivace součtu, součinu, podílu a složení dvou funkcí, derivace inverzní funkce). Zajímavá jsou odvození derivací elementárních funkcí pomocí mocninných řad (exponenciála, přirozený logaritmus, sinus a kosinus).

Celý text uzavírá kapitolka 4 věnovaná zejména vztahu derivace a integrace pojednanému opět z pozice infinitezimálních úvah. Odvozeny jsou také primitivní funkce k funkci mocninné a k součtu dvou funkcí.

Co se týče hodnocení práce, mám několik poznámek.

- Téma je zajímavé, netypické a odvážné. Nemusí být snadné předložit práci, která programově obsahuje matematické úvahy zapsané hluboko pod dnešní hranicí přesnosti. Jedná se však o výpočty, které mnozí z nás kdysi prováděli „pod lavicí“; byly jednoduché, zábavné, výborně podporovaly osvojení si základních výsledků diferenciálního počtu. Velmi kladně tedy hodnotím odvahu vedoucího i autora práce, že se tohoto tématu zhostili.

- Velmi pozitivně hodnotím, že v předloženém textu jde autor ještě dále, inspiruje se vybranými historickými postupy, mnohé výpočty jsou tedy (relativně) dobře zpracovány, navíc je zde využití mocninných řad, které považuji za hodnotné nejen historicky, ale i didakticky.

- Z celého textu je zřejmé, že autor nad jednotlivými výpočty přemýšlel v souvislostech a s ohledem na širší kontext matematický i historický.

- Klíčovým pojmem v celé práci je *diferenciál.* Ocenil bych proto, kdyby byla uvedena jeho exaktní definice. Tu by pak bylo možno porovnat s infinitezimálním přístupem k diferenciálu.

- První kapitola je ze značné části věnována antické matematice. Autor sice užívá kvalitní zdroje, ty jsou však starší, nereflektují tedy vývoj v posledních 30 letech. Zejména k podkapitole věnované první krizi matematiky je možno uvést několik kritických poznámek.

  - Předně: první krize matematiky je konstruktem pocházejícím z 19. století, který byl ve druhé polovině 20. století definitivně překonán.
  - *Arithmos*: nestačí jej interpretovat jako číslo (čtenář by si snadno mohl představit reálné číslo), je třeba jej přiblížit aspoň jako přirozené číslo větší než jedna.
  - Pýthagorejci nepracovali s racionálními čísly (ani s kladnými racionálními čísly...), ale s poměry přirozených čísel (a případně s dalšími poměry).
  - Definice 1 je formulována ve formě matematické věty.
  - Není tak důležité, že Řekové byli *schopni zkonstruovat* úsečku iracionální délky (jak je uvedeno na str. 4 dole), klíčové je, že byli schopni *dokázat*, že poměr délky takové úsečky (např. úhlopříčky ve čtverci) k jiné (strana tohoto čtverce) nelze vyjádřit pomocí poměru dvou přirozených čísel.

- Délky, obsahy, objemy: pozor, nejedná se o geometrické útvary.
- Na závěr kapitoly je věta: *Nekonečné a nekonečně malé veličiny na jednu stranu zavrhovali, přesto s nimi však úspěšně operovali.* Odkaz (pozn. 5) do literatury však vede k vyjádřením o antických matematicích, která (pochopitelně) uvedenou tezi nepodporují.
- U Zénónových paradoxů (pozn. na str. 6 uprostřed) je nutno poznamenat, že se v uvedeném kontextu nejedná o *nekonečné sčítání infinitesimálních vzdáleností*, nelze souhlasit ani s vyjádřením *ačkoliv máme nekonečně mnoho úseček položených za sebou, tak jejich celková délka je díky infinitesimálním rozměrům konečná.* Jedná se totiž o součet geometrické řady
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

- Nemohu zcela pominout jazykovou stránku práce. Přestože je autor studentem kombinace M–ČJ, obsahuje jeho text místy nadstandardní množství překlepů a chyb pravopisných, gramatických i typografických. Např.: chybějící tečky a čárky; řekové, začli, 15-17, pospaný (popsaný), skládál, dimezích, Matematická analýza, Integrování, n-boký, logaritmus z čísla, cosinus, pustme do práce, nahlédňete. I poslední slovo celé práce je zasaženo: *porozumněním.*
- Co se matematiky týče, místy bych uvítal přesnější formulace.
  - Kvadratura je v poznámce 13 na str. 9 charakterizována jako *převedení obsahu útvaru na obsah čtverce.* (převádění dvou čísel, která jsou si rovna, na sebe)
  - V příkladu na str. 24, kde se pracuje s *funkcí* x^2, se používá nejasné označení dx^2, které vede k nesprávnému výpočtu.
  - Str. 30 dole: *funkce obsahující jeden jediný člen*: míněny jsou mocninné funkce.
  - U odvozování pravidel pro derivování by mohly být funkce lépe specifikovány (např. na jaké množině jsou definovány, u skládání funkcí: v kterém bodě dané funkce uvažujeme).
  - Je možno zvážit, zda rovnost prezentující rozvoj funkce e^x do mocninné řady na $\mathbb{R}$ nazývat rovnicí. Podobně u funkcí sinus a kosinus.
  - Str. 45 a násl.: u některých integrálů bych uvítal meze, nebo specifikaci intervalu v textu.
- Ne vždy je práce s latinskými termíny korektní. Např. tvar latinského *summation* (str. 16), překlad lat. *integratus* pomocí slovesa, překlad lat. *omnia* jako *veškerenstvo.*

Obrázky jsou velmi názorné, kvalitně provedené, dobře doplňují výklad. Oceňuji, že je text psán srozumitelně, celkově se práce poměrně dobře čte.

Závěrem musím podotknout, že kritické připomínky výše uvedené nezasahují významně do jádra práce.

Vzhledem k výše uvedenému doporučuji, aby byla tato práce uznána jako bakalářská, a doporučuji ji k obhajobě. Navrhuji hodnocení ***velmi dobře***, v případě výborné obhajoby bych považoval za adekvátní i hodnocení ***výborně***.

Praha 22. června 2023

Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky