

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Tennenbaum phenomena in models of arithmetic

Autor: Lukáš Kriško

Shrnutí obsahu práce

Tennenbaumova věta říká, že (spočetný) nestandardní model Peanovy aritmetiky (prvního řádu) nemůže být rekurzivní, a dokonce ani sčítání ani násobení v něm nemohou být rekurzivní. Práce se zabývá jednak prezentací důkazu této věty, včetně téměř všech technických detailů, a dále zobecněními této věty ve dvou směrech: otázkou platnosti v slabších aritmetikách než je PA (zejména $I\Sigma_1$, tj. fragment PA se schématem indukce jen pro Σ_1 formule) a dále rekurzivitou jiných důležitých aritmetických funkcí (následník, div, mod) a relací (uspořádání) a jejich kombinací v nestandardních modelech aritmetik.

Práce sestává z úvodu a dále dvou částí. V první části jsou představeny potřebné pojmy a technické nástroje (kapitoly 1-4), dále důkaz Tennenbaumovy věty (kapitola 5) a důkaz, že uspořádání a následník mohou být zároveň rekurzivní v nestandardním modelu. Jde o známé výsledky, které bakalant zpracoval a doplnil některé chybějící detaily důkazů, v literatuře jen naznačené.

Druhá část sestává z vlastních matematických výsledků bakalanta. Zejména jde o analogii Tennenbaumovy věty pro binární funkce div, mod, a unární funkce div k, mod k (pro pevné k). V kapitolách 8-11 je ukázáno zejména následující:

- div a mod nemohou zároveň být rekurzivní v nestandardním modelu $I\Sigma_1$
- div k a mod k nemohou být zároveň rekurzivní v nestandardním modelu PA pro žádné $k > 1$
- div k spolu s funkcí následníka ani div k s uspořádáním nemohou být zároveň rekurzivní v nestandardním modelu PA
- div nemůže být rekurzivní ani v nestandardním modelu $I\Sigma_1$, ale div k může být rekurzivní v nestandardním modelu PA
- mod k může být rekurzivní v nestandardním modelu PA (otázka rekurzivity mod zůstává otevřena)

Práce je zakončena užitečnou diskuzí s řadou otevřených problémů.

Celkové hodnocení práce

Jde o zajímavé, netriviální, a dle mého názoru publikovatelné výsledky. Odevzdanému textu lze ale vytknout nerovnoměrnou kvalitu. Některé části jsou promyšlené a poměrně dobře napsané (zejména část 2), v jiných je výklad hůře strukturovaný a množství chyb větší, a zejména úvod práce působí spíše dojmem verze psané nanečisto. (Jak plyne z deklarace na konci úvodu, psaní a finalizace probíhaly hekticky a v časové tísní.) Nyní popíši jednotlivé aspekty práce:

Téma práce. Téma je poměrně náročné, zpracování vyžadovalo rešerši náročného materiálu, a schopnost aplikovat abstraktní matematické pojmy a zvládnout velmi technické důkazy. Zadání bylo nepochybně splněno, a množství odvedené práce muselo výrazně přesahovat obvyklé bakalářské práce.

Vlastní příspěvek. Vlastní matematické výsledky bakalanta z druhé části jsou jistě dostatečným příspěvkem. Vlastním příspěvkem je také doplnění detailů důkazů známých výsledků v první části, bohužel ale z práce není zřejmé o jaké detaily šlo, které kroky důkazů jsou vlastní, a které převzaté. V úvodu jsou nepříliš srozumitelně popsány různé důkazy Tennenbaumovy věty z literatury (podsekcí „Various presentations of Tennenbaum's theorem“), nedozvíme se ale nic o tom, čím se liší. Dále student píše, že zdrojem pro první část byla zejména kniha *Models of Peano Arithmetic* Richarda Kaye (Oxford Logic Guides, 1991) a že první část je touto knihou „heavily influenced, regarding both the form and content“, a lze v ní najít „many similarities“ s touto knihou. Dále je jen velmi vágně popsáno, zopakováním téže věty 5x, že „[t]hings were taken“ z této knihy „to produce“ kapitoly 1-6.

Matematická úroveň. Matematické značení je dobré, tvrzení a důkazy vesměs srozumitelné. Někdy je ale textový popis špatně srozumitelný, např. třetí položka o výsledcích z D'Aguiño

[1997] (str. 5). Matematické symboly místy nejsou dobře vysázené (nezarovnané posloupnosti rovností, špatné mezery okolo operátorů, nesprávně použité – vs. -), což mírně zhoršuje estetický dojem. Není také vhodné označit tvrzení jako Pozorování, pokud je následované velmi dlouhým důkazem (důkaz Observation 3.13 zabírá více než jednu stranu).

Jazyková úroveň. Úroveň angličtiny je horší. Práce obsahuje řadu vět zjevně vzniklých překladem ze slovenštiny, které jsou v angličtině buď přímo nekorektní, nebo nepřírozené. Často je použité špatné gramatické číslo. Slovosled, interpunkce a používání členů jsou také často chybné. Práce zjevně neprošla automatickou kontrolou pravopisu ani gramatiky, což už by dnes mělo být samozřejmostí. Také nepovažuji za vhodné psát v odborném textu zkratky jako „s.t.“, „iff.“ a nahrazovat slova v textu matematickými symboly („+“ je někde používáno jako sjednocení množin axiomů, o kus vedle jako operace sčítání, což je matoucí). Problémy jsou opět značně větší v úvodu a v první polovině první části, úroveň zbytku práce je lepší.

Struktura práce. Práce výrazně přesahuje obvyklý rozsah, to je částečně dáno množstvím materiálu, ale částečně také nevhodným zpracováním. Není jasné, kdo je zamýšleným čtenářem. Na jednu stranu obsahuje velmi podrobný výklad úplných základů logiky (co je jazyk, že nezáleží na výběru základních logických spojek, apod.), o kus dále jsou ale mnohem složitější koncepty představeny jen jednou, často nepřítis osvětlující větou, následovanou už jen technickou definicí.

Důkazy jsou někdy až příliš zdouhavé, např. důkaz existence nestandardního modelu aritmetiky (Theorem 2.2) nebo argument pro existenci nespočetně mnoha nerekurzivních množin přirozených čísel (str. 86) předvádíme ve 2. ročníku výrazně kratčeji, přesto srozumitelně.

Práce také obsahuje několik dvojic téměř identických tvrzení i důkazů (Observation 7.3&7.4, 7.5&7.6, 7.8&7.9, Corollary 8.15&8.16, Theorem 6.7&9.4). Bylo by lepší výklad přestrukturovat tak, aby se dlouhé části textu zbytečně neopakovaly.

Práci by dle mého názoru prospělo odstranění důkazů mnoha velmi jednoduchých pozorování, nebo alespoň jejich přesunutí do Apendixu. Čtenář by se potom lépe orientoval v tom, která z pomocných tvrzení jsou netriviální.

Práce se zdroji. Mám dvě výtky týkající se nedostatečného resp. nejasného citování zdrojů:

- V úvodu se píše „Things were taken from Kaye [1991, Chapter...] to produce chapter ...“ (5x, týká se kapitol 1-6). Není ale jasné, co to znamená. Kapitoly neobsahují žádné přímé citace, byly některé části převzaty doslovně?
- Na začátku kapitoly 6 se píše „The results we present here are relatively well known and we have them mainly from Kaye [1991, pp. 73-77].“ Jinak kapitoly neobsahují žádné další citace. Co znamená „mainly“? Jsou v kapitole použity i jiné zdroje, které nejsou citovány?

Přípomínky a otázky

1. Které mezery z důkazu Tannenbaumovy věty bylo nejtěžší doplnit, a kde se v práci vyskytují?
2. Zdůvodnění axiomatizace indukce pomocí logiky druhého řádu (diskuze pod Definicí 2.3) mi nepřijde přesvědčivé, byť na ni nejsem odborník. Opravdu je problémem chybějící věta o kompaktnosti a Löwenheim-Skolemova věta (2. odstavec), a ne spíše jen neexistence spočetného nestandardního modelu (3. odstavec)?

Závěr

Práce měla potenciál být vynikající, který ale přes jistě značné množství kvalitní odvedené práce nenaplnila. Důvodem byl zřejmě nedostatek času na sepsání. Přes výše zmíněné nedostatky odevzdanou práci celkově považuji za velmi dobrou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci.