MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Adam Smetana

Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
Studijní program:	Učitelství tělesné výchovy pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství tělesné výchovy pro střední školy – Učitelství matematiky pro střední školy

PRAHA 2024

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 10. ledna 2024 Podpis autora

Velké poděkování patří RNDr. Petře Surynkové, Ph.D. za trpělivost při vedení práce, rady a konzultace. Další díky patří mé rodině a blízkým přátelům, kteří mi nepřestávali věřit ani v dobách, kdy nebylo studium tou nejvyšší prioritou.

Název práce: Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice

Autor: Bc. Adam Smetana

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D., katedra didaktiky matematiky MFF UK

Abstrakt: Současná vybavenost školských zařízení a cenová dostupnost mobilních zařízení umožňuje stále vyšší míru využití dynamických prostředí při výuce geometrie. Cílem práce je shrnutí používaných zdrojů pro výuku, jejich podrobné nastudování a s jejich pomocí sestavení elektronické učebnice a sbírky příkladů v dynamickém prostředí. Z dynamických prostředí je využita GeoGebra, která pro potřeby této publikace nabízí největší variabilitu. Elektronická publikace je určená pro studenty i jejich učitele. Elektronické učební podklady byly nezbytnou součástí českého školství při období povinné distanční výuky v letech 2020 a 2021. Součástí práce je krátké dotazníkové šetření, které si klade za cíl zjistit, jaké učebnice či sbírky jsou využívány, jaká zobrazení a kdy jsou na středních školách vyučovány a v jakém rozsahu. Výsledky ukazují, že mezi učiteli jsou stále oblíbenější konkrétní tištěné učebnice a sbírky a využití elektronických zdrojů není rozšířeno mezi všechny učitele.

Klíčová slova: geometrická zobrazení, rotace, posunutí, stejnolehlost, GeoGebra

Title: Geometric transformations in secondary school mathematics

Author: Bc. Adam Smetana

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The current availability of computers and mobile devices in school facilities and the affordability of mobile devices for everyone provide for an increasing use of interactive geometry in the curriculum. The aim of this thesis is to summarize the printed and electronic resources used for teaching geometry, to study them in detail and to use them to build an electronic textbook and a collection of exercises in interactive geometry environment. GeoGebra is used among the interactive geometry environments, mainly because it offers the greatest variability for the purposes of this publication. The electronic publication can be used by both students and their teachers. Electronic publications were an essential part of the Czech education system during the period of compulsory distance education in years 2020 and 2021. The thesis includes a short questionnaire survey that aims to find out what textbooks or exercise collections are being used by teachers, what transformations are taught in secondary schools and to what extent. The results show that among teachers specific printed textbooks and collections are still more popular than interactive resources.

Keywords: geometric transformations, rotation, translation, homothety, GeoGebra

Obsah

Úvod

. Důvodem pro vznik diplomové práce na téma geometrických zobrazení ve středoškolské matematice bylo vytvoření elektronického učebního textu a souboru řešených a neřešených příkladů v dynamickém prostředí. Sestavení takového textu předcházelo zmapování aktuálních vzdělávacích programů a rešerše výukových materiálů sesbíraných pomocí dotazníkového šetření. Současné technologie, které jsou stále dostupnější, nabízejí velkou řadu možností, jak výuku geometrie učinit efektivnější a lépe srozumitelnou všem studentům. Někteří studenti mohou mít s pochopením určitých aspektů geometrie z výkladu s tradičními pomůckami problém. Podle Machovcové (2014) jsou zobrazení pro studenty těžká a ve výuce na ně zbývá s ubývajícím počtem hodin méně času. Právě geometrická zobrazení jsou jednou z oblastí geometrie, kde lze dynamické prostředí plně vytěžit a toto téma studentům přiblížit atraktivní formou. Práce začala vznikat v období, kdy nebylo výjimkou, že studenti absolvovali několik měsíců v řadě výuku v distanční formě. Tento fakt původní záměr umocnil. Vybrané materiály z období povinné distanční formy výuky vypracované právě pro účely distanční výuky jsou vhodné k zařazení i do prezenční výuky jako samostatná práce nebo jako podpůrný materiál pro studenty, kteří si potřebují prohloubit nebo doplnit znalosti.

První kapitola této práce pojednává o rámcových vzdělávacích programech (RVP) a mapuje, na jakých oborech se jaká zobrazení vyučují. Jednotlivá témata týkající se rovinných a prostorových zobrazení jsou uspořádána do přehledných tabulek. Poslední odstavce kapitoly se krátce věnují konkrétním příkladům školních vzdělávacích programů (ŠVP). Pro tuto analýzu byla zvolena vybraná česká gymnázia především z důvodu nejširšího obsahu témat.

Druhá kapitola je shrnutím základních poznatků z oblasti zobrazení ve středoškolské matematice. Rozebírá všechny v současnosti běžně vyučovaná zobrazení v rovině a zobecnění těchto zobrazení do prostoru. Tato a následující kapitola je rovněž zpracována jako součást elektronické knihy v programu GeoGebra (Smetana, 2024).

Třetí kapitola práce popisuje situaci v České republice v letech 2020 a 2021, kdy byla výuka značně ovlivněna povinnou distanční formou vyučování, a vyhodnocuje krátký dotazník směřovaný na středoškolské učitele zjišťující, v jaké míře se věnují geometrickým zobrazením ve své výuce, které tištěné i elektronické materiály ke své výuce využívají a jak se vypořádali s distanční formou výuky. Následuje rešerše těchto materiálů a hodnocení s důrazem na srozumitelnost výkladu, motivace do jednotlivých témat a na příklady.

Čtvrtá, hlavní kapitola diplomové práce, se věnuje samotné elektronické knize, která vznikla je hlavním výstupem této práce. Tato elektronická učebnice se skládá z úvodu, teoretické části, ze souboru řešených a neřešených příkladů zčásti inspirované dostupnými materiály, zčásti vlastní tvorby. Věříme, že správná motivace do tématu a praxí motivované příklady prospějí atraktivitě této oblasti matematiky a přiblíží její uplatnění studentům. Celé toto dílo vzniklo v dynamickém prostředí programu GeoGebra online (Smetana, 2024).

1. Současná náplň vyučování v ČR

Obsah současného vzdělávání v České republice se na státní úrovni řídí RVP, které vydává Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) a jsou součástí vícestupňového kurikula (Tupý, 2019).

Tyto dokumenty jsou rozděleny do kategorií, kde každé odpovídá určitý druh školy nebo gymnázia, a jsou pravidelně aktualizovány. Základní myšlenku při zavádění RVP vystihuje dokument vydaný MŠMT (Zeman, 1999): „*Tyto programy budou stanoveny pouze v obecné rovině, přičemž vymezí prostor pro autonomní specifikaci obsahu a rozsahu, specifické zaměření, případně specifickou organizaci vzdělávání v rámci školy.*“ Další úrovní vícestupňového kurikula jsou na školní úrovni ŠVP, pro jejichž tvorbu jsou RVP pomyslnými mantinely.

1.1. Rámcové vzdělávací programy

První zmínka k zobrazením napříč všemi RVP je v očekávaném výstupu po páté třídě **základní školy**, kde žáci umí znázorňovat jednoduché obrazce v osové souměrnosti s pomocí překládání papíru nebo čtvercové sítě. Po devátém ročníku by žáci měli být schopni načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru ve středové i osové souměrnosti. S těmito předpoklady je v práci počítáno.

V následujících odstavcích jsou rozebráni zástupci z vybraných kategorií **středoškolského vzdělávání**. Tento rozbor a následující tabulka se věnují veškeré geometrii, důraz je dán na témata související s transformacemi (NÚV, 2021).

Kategorie J – střední nebo střední odborné vzdělání bez maturity i výučního listu. Jedná se především o dvouleté obory. Studenti po úspěšném vykonání závěrečné zkoušky získají závěrečné vysvědčení. Zástupcem této kategorie je např. obor Zubní instrumentalista. Tento obor i vzhledem k jeho délce obsahuje pouze základní matematická témata. Z planimetrie, kam rovinné transformace náleží, jsou studenti vzděláváni v naprosto nezbytných tématech, jako jsou konstrukce trojúhelníka nebo vzájemná poloha kružnice a přímky. Samotnou znalost transformací tento RVP neukládá za povinný výstup.

Druhou kategorií je **kategorie H** – střední odborné vzdělání s výučním listem. Jedná se o tradiční učební obory s obvyklou délkou tří let. Studenti jsou vzděláváni v odborných učilištích, kde po úspěšném absolvování získávají vysvědčení spolu s výučním listem. Navázat mohou nástavbovým studiem a získat i maturitu. Zástupcem této kategorie je např. obor Hutník. V seznamu učiva matematického vzdělání tohoto RVP nalezneme tato témata související s transformacemi: shodná zobrazení v rovině, konkrétně souměrnosti, posunutí a otočení, jejich vlastnosti a uplatnění. Navazujícím tématem je podobnost, její vlastnosti a uplatnění. Kromě zobrazení v kapitole matematiky stojí za zmínku rovněž úlohy na zobrazení zrcadly a čočkami nebo odraz a lom světla z fyzikálního vzdělávání. V tomto RVP tedy vidíme provázanost různých předmětů s geometrickými zobrazeními.

Další kategorií v hierarchii RVP je čtyřleté úplné střední odborné vzdělání s maturitou – **kategorie M**. Po maturitě může student nastoupit na vysokou nebo vyšší odbornou školu. Jako zástupce této kategorie byl vybrán obor Ekologie a životní prostředí. Oproti předchozímu analyzovanému RVP se v tématu planimetrie tento plán odlišuje pouze v detailech. K výše zmíněným (shodným a podobným) zobrazením přibyl jeden bod, shodnost a podobnost. Konkrétní představy, jak si tento bod vykládají školy, se mohou lišit.

RVP **kategorie L** – úplné střední odborné vzdělání s odborným výcvikem a maturitou, kam spadá např. obor Masér sportovní a rekondiční – se v oblasti planimetrie obsahově neliší od kategorie M.

Gymnázia se řídí svými RVP, které byly vytvářeny současně s RVP pro základní vzdělávání. Mají odlišnou strukturu a přesněji určené povinné výstupy. Pro gymnázia existují tři různé rámcové plány – pro obecná gymnázia, pro sportovní gymnázia a pro dvojjazyčná gymnázia (Tupý, 2019).

Tyto plány se v planimetrii neliší a obsahují oproti výše zmíněným pojmy stejnolehlost a konstrukční úlohy.

Žádný RVP pro střední školy neobsahuje zmínku o transformacích v prostoru. Gymnaziální RVP obsahuje jako jedinou transformaci v prostoru volné rovnoběžné promítání (VRP).

V tabulkách 1 a 2 níže je vyobrazeno rozložení závazného učiva napříč všemi RVP. Tučně jsou zvýrazněny odrážky týkající se přímo zobrazení.

G	M	H	J	Učivo
				základní pojmy
			J	trojúhelník
				mnohoúhelníky
				kružnice a kruh
				základní planimetrické pojmy
				polohové vztahy rovinných útvarů
				metrické vlastnosti rovinných útvarů
		H		**trojúhelníky – shodnost a podobnost**
				kružnice a její části
				kruh a jeho části
	M			rovinné obrazce konvexní a nekonvexní útvary
				mnohoúhelníky, pravidelné mnohoúhelníky
				složené obrazce
G				**shodná zobrazení v rovině (souměrnost, posunutí, otočení), jejich vlastnosti a jejich uplatnění**
				podobnost v rovině, vlastnosti a uplatnění
				Euklidovy věty
				množiny bodů dané vlastnosti
				trojúhelník a čtyřúhelník (strana, vnitřní a vnější úhly, výšky, ortocentrum, těžnice, těžiště, střední příčky, kružnice opsaná a vepsaná)
				množiny bodů dané vlastnosti
				úhly v kružnici
				stejnolehlost
				konstrukční úlohy
				sinová a kosinová věta
				trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku

Tabulka 1 – Závazné učivo z oblasti planimetrie na SŠ a G
(NÚV, 2021), *(tučně jsou vyznačeny body týkající se zobrazení)*

V tabulce 2 jsou vypsané body závazného stereometrického učiva. V RVP kategorie J se žádné takové body nevyskytují. Jediný bod týkající se prostorových zobrazení je volné rovnoběžné promítání, které je využíváno pro znázornění prostoru na papír nebo tabuli.

G	M	H	J	▷ (v RVP kategorie J se stereometrie nevyskytuje)
				▷ polohové a metrické vlastnosti v prostoru ▷ tělesa a jejich sítě ▷ krychle, kvádr, hranol, válec, pravidelný jehlan, rotační kužel, koule, polokoule, kulová úseč, kulová vrstva ▷ složená tělesa ▷ výpočet povrchu a objemu těles ▷ výpočet povrchu a objemu složených těles
				► **volné rovnoběžné promítání**

Tabulka 2 – Závazné učivo z oblasti stereometrie na SŠ a G (NÚV, 2021), *(tučně jsou vyznačeny body týkající se zobrazení)*

Závazné očekávané výstupy v oblasti geometrie z RVP pro gymnázia jsou vyjmenovány v tabulce 3.

Závazné očekávané výstupy v oblasti geometrie v RVP pro gymnázia
▷ používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary
▷ určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky
▷ využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému
▷ v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly
► **řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu**
► **zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles**
► **řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí**
▷ užívá různé způsoby analytického vyjádření přímky v rovině (geometrický význam koeficientů)
▷ řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině
▷ využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření
▷ z analytického vyjádření (z osové nebo vrcholové rovnice) určí základní údaje o kuželosečce
▷ řeší analyticky úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky

Tabulka 3 – Závazné očekávané výstupy v oblasti geometrie v RVP pro gymnázia (NÚV, 2021), *(tučně jsou vyznačeny body týkající se zobrazení)*

1.2. Školní vzdělávací programy

Konkrétní příklady vybraných školních vzdělávacích programů jsou rozebrány v této krátké kapitole. Všechny zmíněné školy sdílí své ŠVP veřejně online na svých webových stránkách.

První vybranou školou je **Gymnázium Jaroslava Heyrovského** na Praze 13. Jedná se o osmileté gymnázium, kde se matematika vyučuje po celou dobu studia při celkové dotaci 32 hodin týdně za osm let, z toho 17 hodin týdně za poslední čtyři roky. První geometrická zobrazení se v ŠVP gymnázia objevují v primě, která ještě spadá do RVP pro základní vzdělání. Jde však pouze o středovou a osovou souměrnost. Podruhé se zobrazení objevují v sextě, šestém ročníku, kde studenti probírají shodná zobrazení. Znovu je probrána osová a středová souměrnost, přibývá otočení a posunutí, a jejich skládání. Ve stejném ročníku se probírá stejnolehlost a podobná zobrazení. V septimě, sedmém ročníku gymnázia, je studentům představeno volné rovnoběžné promítání jako součást stereometrie (*Školní vzdělávací program GJH*, 2009).

Druhé vybrané gymnázium je čtyřleté a osmileté **Gymnázium Kladno**. Tento ŠVP se týká celého čtyřletého gymnázia a vyšších ročníků osmiletého gymnázia. Matematika je zde dotována celkem 15 hodinami týdně za čtyři roky. V matematice se vyučuje geometrie v rovině v prvním ročníku, kde probírají kromě jiných témat i shodnost a podobnost trojúhelníků, shodná zobrazení, stejnolehlost a s nimi spojené konstrukční úlohy. Prvním ročníkem čtyřletého gymnázia je myšlena kvinta – pátý ročník osmiletého gymnázia. Studenti si navíc mohou zvolit v prvním ročníku dvouletý seminář z matematiky, který má celkovou dotaci 2 hodiny týdně za dva roky. Zobrazení v prostoru tento ŠVP neobsahuje (*Školní vzdělávací program GK*, 2016).

Poslední vybranou školou je **Gymnázium Ostrov**, které se nachází v karlovarském kraji. Jde o čtyřleté i osmileté gymnázium. Analyzované ŠVP rozebírá poslední 4 roky studia osmiletého gymnázia, které odpovídají ročníkům střední školy. Celková hodinová dotace za čtyři roky je 15 hodin matematiky týdně. Geometrie v rovině se vyučuje v prvním ročníku, kde studenti stihnou probrat shodná a podobná zobrazení, stejnolehlost a konstrukční úlohy na shodná zobrazení a stejnolehlost. V tematickém okruhu geometrie v prostoru se studenti věnují pouze volnému rovnoběžnému promítání (*Školní vzdělávací program GO*, 2007).

2. Základní poznatky z oblasti geometrických zobrazení

Napříč všemi RVP převládají zobrazení v rovině, kterým je věnována celá následující podkapitola. Z prostorových zobrazení se v různých RVP vyskytuje pouze volné rovnoběžné promítání, přesto v druhé části této kapitoly zobecníme běžně vyučovaná zobrazení z roviny do prostoru.

2.1. Zobrazení v rovině

Předpokládáme, že žáci, kteří absolvovali povinnou základní školní docházku, disponují znalostmi vypsanými v RVP pro základní vzdělávání v plném rozsahu. Patří sem první probíraní zástupci zobrazení v rovině – středová a osová souměrnost. Další běžně vyučovaná zobrazení v rovině jsou posunutí, otočení a stejnolehlost.

Polák (1991) definuje **zobrazení v množině** jako speciální případ množinového zobrazení neprázdné množiny A do B, kde $B = A$. Tento konkrétní příklad je někdy nazýván rovněž zobrazení množiny A do sebe. Pokud jsou množiny A a B bodovými množinami v téže rovině, mluvíme o geometrickém zobrazení v rovině. Zobrazení F množiny A do množiny B značíme

$$F\colon\ A \to\ B$$

Bod $X \in A$ nazveme vzorem, jehož zobrazením v zobrazení F získáváme obraz $X' \in B$. Další způsob značení může vypadat následovně

$$F(X) = X' \text{ nebo } F\colon X \to X'$$

Pokud $F(X) = X$, tzn. bod se zobrazí sám na sebe, tento bod nazýváme samodružným. Pokud platí pro celý rovinný útvar M, že $F(M) = M$, tento útvar nazýváme samodružným útvarem. Jednotlivé body útvaru M nemusí být samodružné (Pomykalová, 1993).

Ve zbytku podkapitoly budeme uvažovat, pokud nebude popsáno jinak, zobrazení celé roviny na sebe sama.

Všechna rovinná zobrazení vyjma identity mají v hlavní části této práce zpracovány své dedikované applety. Obsahují stručný popis, postup konstrukce obrazu bodu v každém zobrazení a řadu otázek k zamyšlení k odvození důsledků probíraného zobrazení.

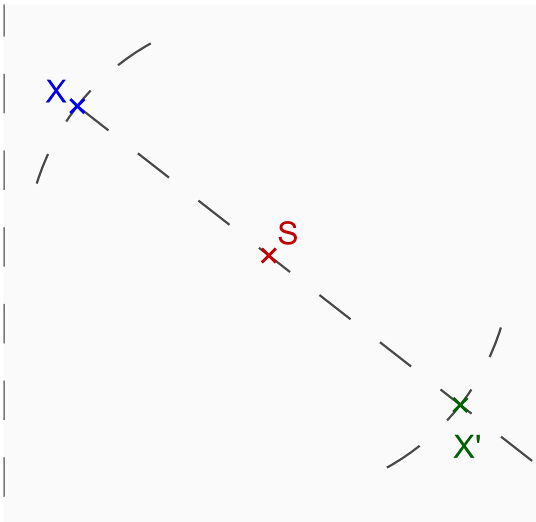
2.1.1. Identita

Identita je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že $X = X'$. Jedná se o druh zobrazení, které bude zmíněno u některých níže zmíněných zobrazení za specifických podmínek. Obvykle značíme $I: X \to X$.

2.1.2. Středová souměrnost

Středová souměrnost se středem S přiřazuje každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'. Střed souměrnosti S je samodružný a zobrazuje se sám na sebe. Středovou souměrnost se středem S běžně značíme $S(S): X \to X'$ (Obrázek 1).

Samodružným bodem je pouze střed souměrnosti S, samodružné přímky jsou všechny přímky procházející středem S.

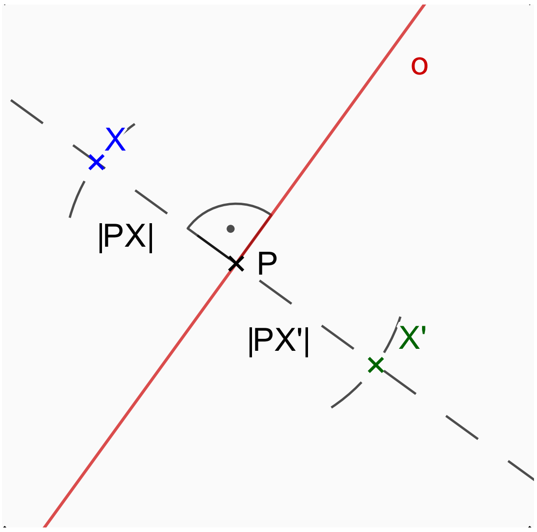


Obrázek 1 – Středová souměrnost

2.1.3. Osová souměrnost

Osová souměrnost daná osou o přiřazuje každému bodu $X \notin o$ bod X' takový, že bod X' leží na kolmici p k ose o vedené bodem X a bod P je středem úsečky XX', kde P je pata kolmice p k ose o. Osovou souměrnost s osou o značíme $O(o): X \to X'$ (Obrázek 2).

Body osy o jsou samodružné body. Samodružné přímky jsou všechny přímky kolmé k ose souměrnosti a osa souměrnosti samotná.

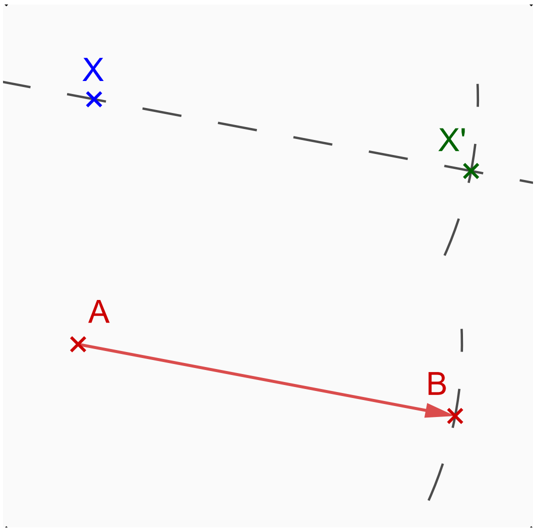


Obrázek 2 – Osová souměrnost

2.1.4. Posunutí

Pro potřeby posunutí jako zobrazení je nutné si definovat pojem **orientovaná úsečka**. Nenulovou orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ (v některých textech možno nalézt značení tučně $\boldsymbol{AB}$) rozumíme úsečku AB s krajním bodem A počátečním a krajním bodem B koncovým. **Posunutí** přiřazuje každému bodu X bod X' tak, že orientovaná úsečka $\overrightarrow{XX'}$ má stejnou délku a směr jako orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí neboli translaci obvykle značíme $T\left(\overrightarrow{AB}\right): X \to X'$ (Obrázek 3).

Samodružné body jsou všechny body roviny při posunutí o nulový vektor, pokud nulový vektor v definici nevyloučíme (identita). Samodružné přímky jsou všechny přímky rovnoběžné s orientovanou úsečkou posunutí.



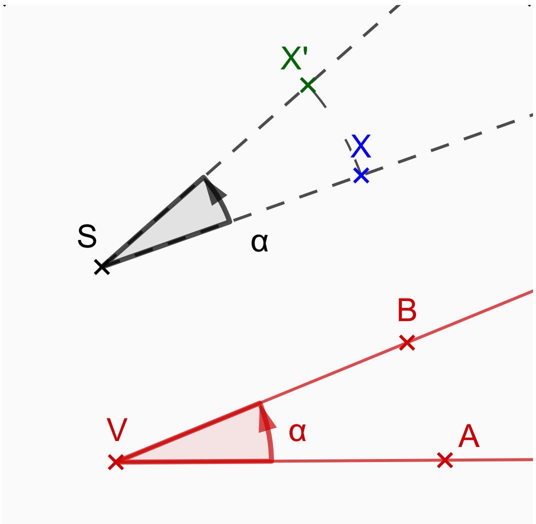
Obrázek 3 – Posunutí

2.1.5. Otočení

Orientovaný úhel je definován počátečním a koncovým ramenem, úhel $\sphericalangle AVB$ má počáteční rameno VA a koncové rameno VB. Orientovaný úhel daný touto uspořádanou dvojicí ramen označíme $\widehat{AVB}$. Orientovaný úhel může mít libovolnou velikost. Základní velikost orientovaného úhlu nabývá hodnot z intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$.

Otočením o orientovaný úhel v kladném smyslu rozumíme otočení proti směru hodinových ručiček. Otočením v záporném smyslu rozumíme otočení po směru hodinových ručiček.

Otočení se středem S o orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, jehož velikost je α, je zobrazení, které každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že polopřímky SX a SX' svírají úhel $\sphericalangle XSX'$, který je stejně orientovaný, jako je orientovaný úhel $\widehat{AVB}$. Dále platí $|SX| = |SX'|$. Bod S, střed otočení, je samodružný. Otočení obvykle značíme $R(S,\ \alpha): X \rightarrow X'$, otočení o úhel velikosti α v kladném smyslu (Pomykalová, 1993). Otočení je znázorněno na obrázku 4.

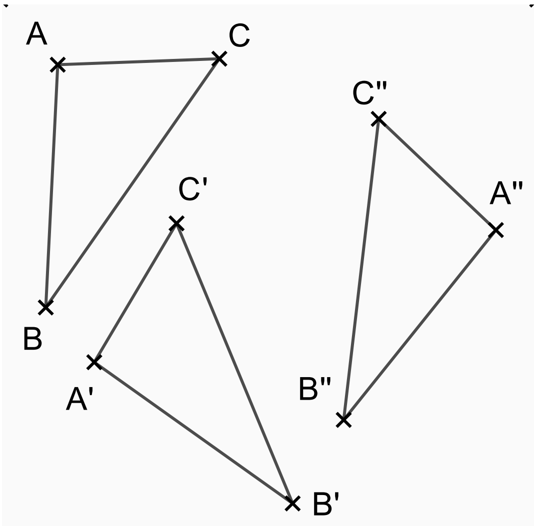


Obrázek 4 – Otočení

Samodružné přímky jsou přímky procházející středem otočení při otočení o úhel se základní velikostí 180° (středová souměrnost) nebo všechny přímky roviny při otočení o úhel se základní velikostí 360° (identita). Při otočení o úhel jiné základní velikosti nemá otočení žádné samodružné přímky.

2.1.6. Přímá a nepřímá shodnost

Výše zmíněná zobrazení jsou všechna shodná. Podmínka pro shodnost je následující: $F: AB \rightarrow A'B'$ a platí $|AB| = |A'B'|$ pro všechny body A, B. Říkáme, že shodnost zachovává délky úseček. Shodnost trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ na obrázku 5 se nazývá přímá shodnost. Přímá shodnost zachovává smysl (směr) pojmenování vrcholů trojúhelníka. Zástupci přímo shodných zobrazení jsou středová souměrnost, otočení a posunutí. Nepřímá shodnost je zobrazena na obrázku 5 trojúhelníky ABC a $A''B''C''$, kde není zachován smysl pojmenování vrcholů trojúhelníka. Zástupcem nepřímé shodnosti je osová souměrnost. Obraz je zrcadlově převrácený, hovorově se osová souměrnost může označovat jako zrcadlení.



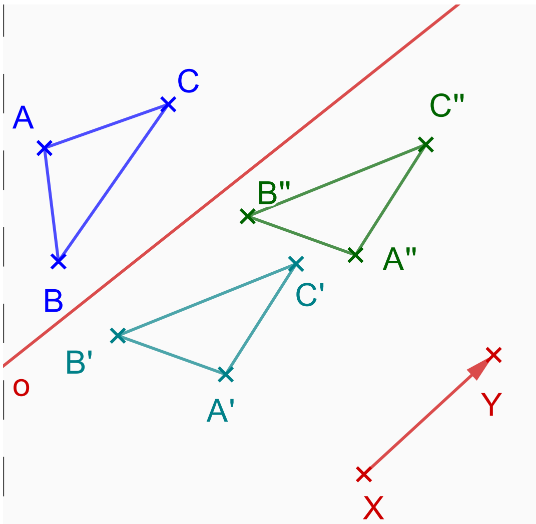
Obrázek 5 – Přímá a nepřímá shodnost

2.1.7. Skládání shodných zobrazení

Jsou dány body A, B, C a zobrazení $G: A \to B$ a $F: B \to C$, složením zobrazení F a G rozumíme zobrazení

$$F\big(G(A)\big) = C, \text{ nebo jej značíme } F \circ G: A \to C.$$

Složením nejvýše dvou osových souměrností lze získat všechna výše zmíněná shodná zobrazení, existuje však jedno zobrazení, které nelze složením nejvýše dvou osových souměrností získat. Takové zobrazení nemá žádný samodružný bod. Jedná se o tzv. posunutou souměrnost, složení osové souměrnosti a posunutí o orientovanou úsečku nenulové délky rovnoběžnou s osou souměrnosti. Na obrázku 6 je posunutá souměrnost demonstrována zobrazením $F(ABC) = A''B''C''$, složeného z osové souměrnosti $O(o): ABC \to A'B'C'$ a posunutí $T\big(\overrightarrow{XY}\big): A'B'C' \to A''B''C''$.



Obrázek 6 – Skládání zobrazení

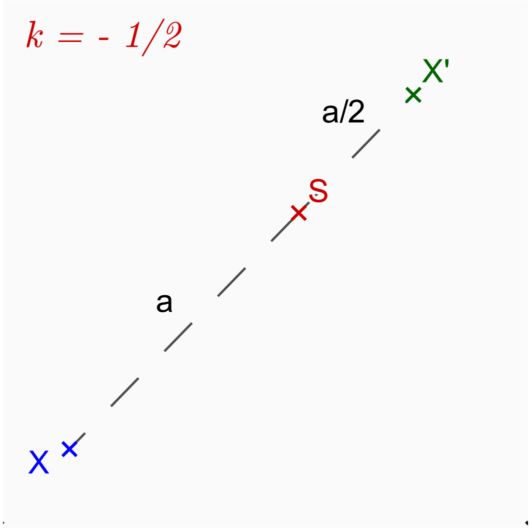
2.1.8. Podobná zobrazení

Zobrazení F je podobné (podobnost), pokud každé dvojici různých bodů A, B přiřazuje body A', B' tak, že platí $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$. Obdobně jako u shodnosti můžeme vysvětlit pojmy přímá a nepřímá podobnost. Konstantu k nazýváme koeficient podobnosti. Jako jediný zástupce podobného zobrazení se na středních školách vyučuje stejnolehlost.

2.1.9. Stejnolehlost

Stejnolehlost (homotetie) se středem stejnolehlosti S a **koeficientem stejnolehlosti** $k \neq 0$ přiřazuje každému bodu X bod $X' \neq S$ tak, že $|SX'| = |k| \cdot |SX|$, pro $k > 0$ leží bod X' na polopřímce SX a pro $k < 0$ leží bod X' na polopřímce opačné k polopřímce SX. Střed stejnolehlosti S je samodružný bod. Stejnolehlost obvykle značíme $H(S,k): X \to X'$. Na obrázku 7 je vyobrazena stejnolehlost s koeficientem $k = -1/2$

Samodružné jsou všechny přímky procházející středem stejnolehlosti.



Obrázek 7 – Stejnolehlost

2.2. Zobecnění rovinných zobrazení do prostoru

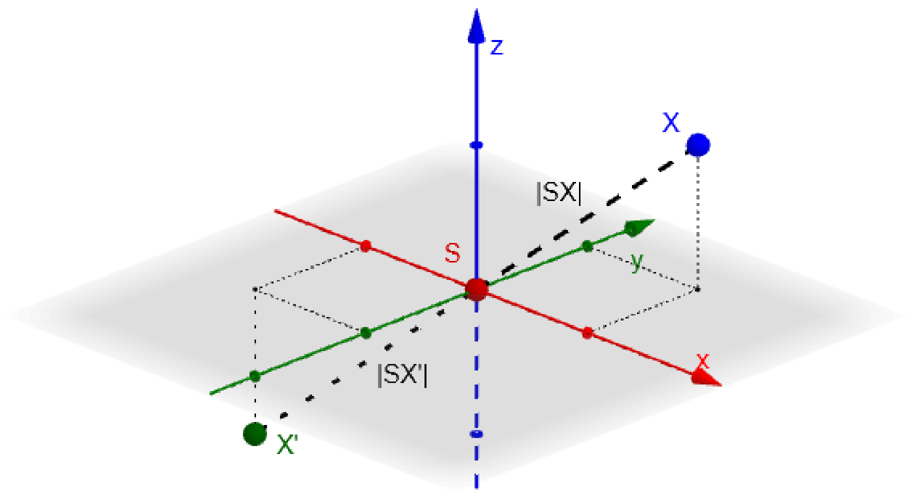
Všechna níže zmíněná zobrazení vyjma VRP jsou zpracována jako jeden applet elektronické knihy, která je hlavní součást této práce (Smetana, 2024).

2.2.1. Středová souměrnost v prostoru

Středová souměrnost se středem S v prostoru přiřazuje každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'. Středovou souměrnost v prostoru značíme stejně jako v rovině, tedy $S(S): X \rightarrow X'$. Střed souměrnosti S je jediným samodružným bodem.

Samodružné přímky jsou všechny přímky procházející středem S, samodružné roviny jsou všechny roviny obsahující bod S. (Odvárko a kol.,1985)

Na obrázku 8 je znázorněna středová souměrnost v prostoru podle počátku.



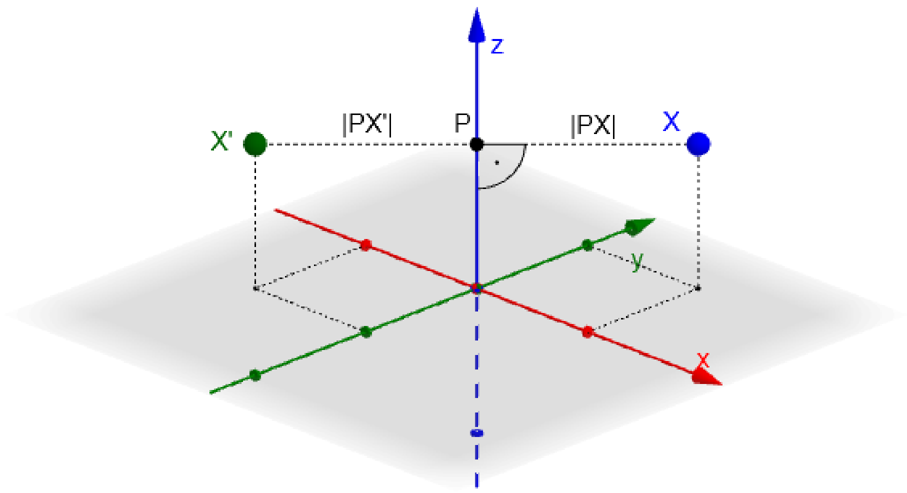
Obrázek 8 – Středová souměrnost v prostoru

2.2.2. Osová souměrnost

Osová souměrnost s osou o v prostoru přiřazuje každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že bod P, pata kolmice k ose o vedené bodem X, je středem úsečky XX'. Osovou souměrnost v prostoru značíme stejně jako v rovině, tedy $O(o): X \rightarrow X'$. Všechny body osy souměrnosti jsou samodružné.

Samodružné přímky jsou všechny různoběžné přímky kolmé k ose souměrnosti a osa souměrnosti samotná. Samodružné roviny jsou všechny roviny kolmé k ose souměrnosti.

Na obrázku 9 je znázorněna osová souměrnost s osou souměrnosti z.



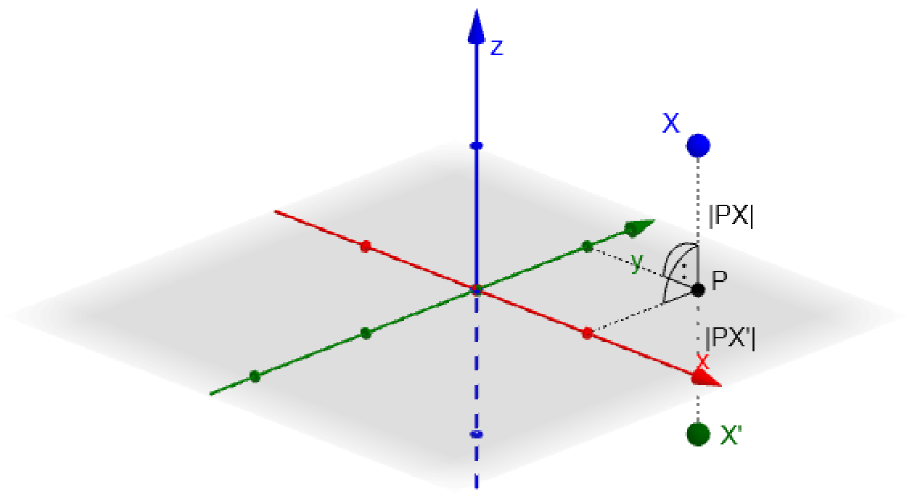
Obrázek 9 – Osová souměrnost v prostoru

2.2.3. Rovinová souměrnost

Rovinová souměrnost s rovinou souměrnosti α přiřazuje každému bodu $X \notin \alpha$ bod X' takový, že bod P, pata kolmice k rovině α vedené bodem X, je středem úsečky XX'. Rovinovou souměrnost značíme $R(\alpha): X \rightarrow X'$. Body roviny α jsou všechny samodružné.

Samodružné přímky jsou všechny přímky kolmé k rovině souměrnosti a všechny přímky náležící rovině souměrnosti. Samodružné roviny jsou všechny roviny kolmé k rovině souměrnosti a rovina souměrnosti samotná.

Na obrázku 10 je vyobrazena rovinová souměrnost podle šedě znázorněné roviny dané osami x a y.



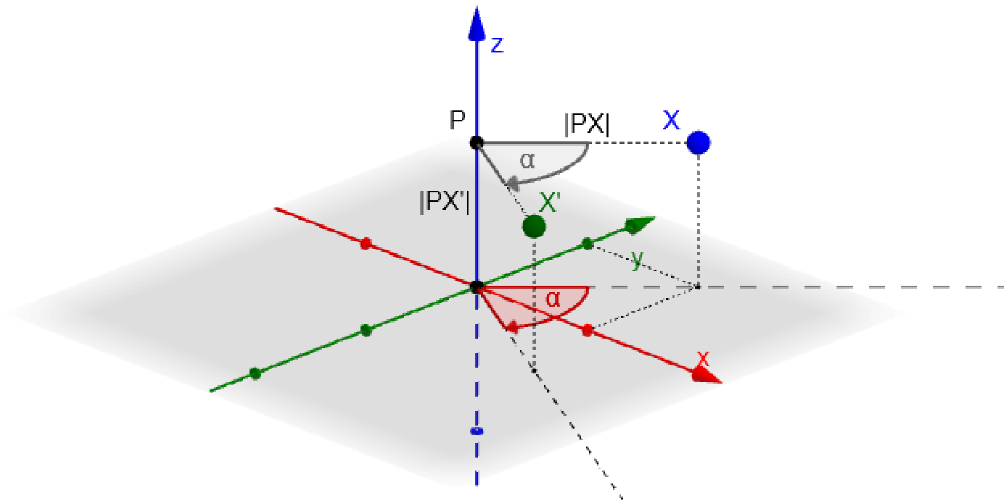
Obrázek 10 – Rovinová souměrnost

2.2.4. Otočení kolem osy

Otočení kolem osy o o orientovaný úhel β je zobrazení, které každému bodu $X \notin o$ přiřazuje bod X' takový, že $|PX| = |PX'|$, bod P je pata kolmice k ose o vedené bodem X, a že polopřímky PX a PX' kolmé k ose o svírají úhel stejné velikosti a stejně orientovaný, jako je orientovaný úhel β. Otočení v prostoru značíme $R(o, \beta): X \to X'$. Osa o, osa otočení, je množinou samodružných bodů, tedy i samodružnou přímkou.

Samodružné přímky jsou dále různoběžky kolmé k ose o při otočení o úhel se základní velikostí 180°. Při otočení o úhel jiné základní velikosti nemá otočení žádné samodružné přímky, mimo zmíněné osy otočení. Samodružné roviny jsou vždy všechny roviny kolmé k ose otáčení nebo všechny roviny, jímž osa otočení náleží, při otočení o úhel základní velikosti 180°. Při otočení o úhel základní velikosti 360° (identitě) jsou samodružné všechny body, přímky a roviny.

Na obrázku 11 je znázorněno otočení v prostoru kolem osy z o orientovaný úhel α.

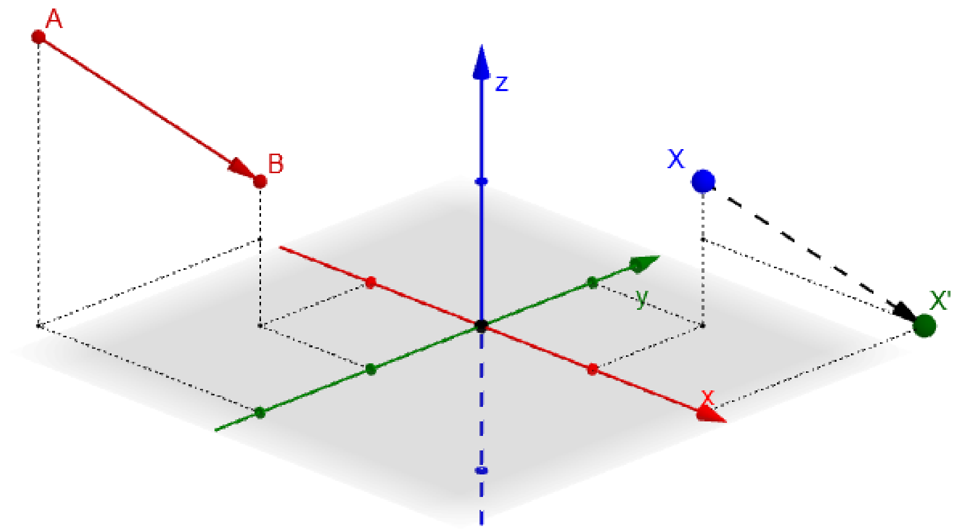


Obrázek 11 – Otočení kolem osy

2.2.5. Posunutí v prostoru

Posunutí o orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$, stejně jako v rovině, přiřazuje každému bodu prostoru X bod X' tak, že orientovaná úsečka $\overrightarrow{XX'}$ má stejnou délku a směr jako orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí značíme obdobně jako v rovině, tedy $T(\overrightarrow{AB}): X \to X'$. Samodružné body jsou všechny body jen při posunutí o nulový vektor (identita), pokud takové posunutí připouštíme.

Samodružné přímky jsou všechny přímky rovnoběžné s orientovanou úsečkou posunutí. Samodružné roviny jsou všechny roviny rovnoběžné s orientovanou úsečkou posunutí. Na obrázku 12 je znázorněno posunutí o orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$.

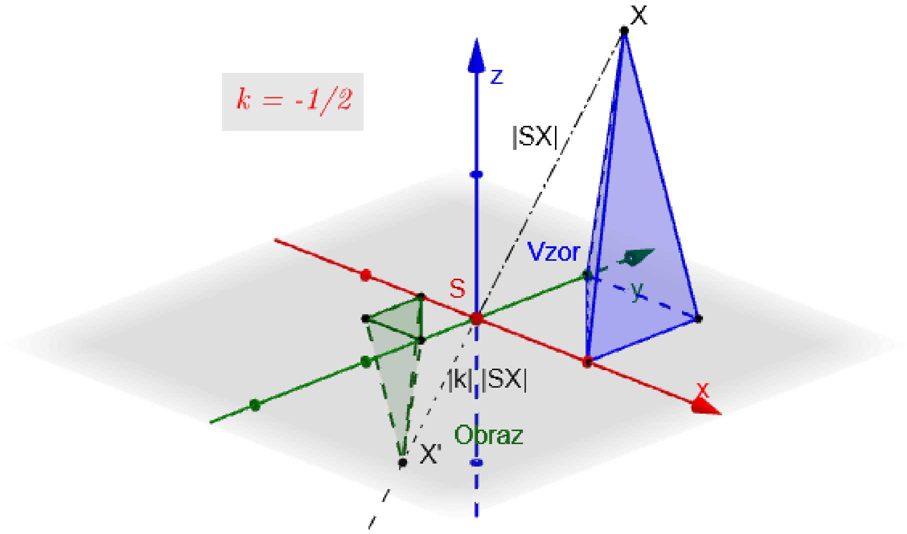


Obrázek 12 – Posunutí v prostoru

2.2.6. Prostorová stejnolehlost

Stejnolehlost v prostoru se středem stejnolehlosti S a koeficientem stejnolehlosti $k \neq 0$ přiřazuje každému bodu X bod $X' \neq S$ tak, že $|SX'| = |k| \cdot |SX|$, pro $k > 0$ leží na polopřímce SX a pro $k < 0$ leží na polopřímce opačné k polopřímce SX. Střed stejnolehlosti S je jediný samodružný bod.

Samodružné přímky jsou všechny přímky procházející středem stejnolehlosti S. Všechny roviny obsahující střed stejnolehlosti S jsou samodružné. Na obrázku 13 je vzorem modrý jehlan, zelený jehlan je jeho obraz ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $k = -\frac{1}{2}$.



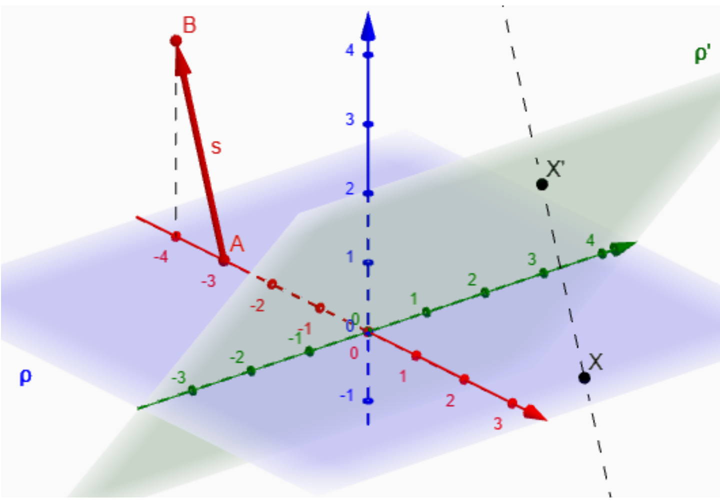
Obrázek 13 – Prostorová stejnolehlost

2.2.7. Osová afinita mezi dvěma rovinami

Osová afinita mezi dvěma rovinami je vztah mezi dvěma různoběžnými rovinami ρ a ρ′ daný směrem afinity s, který není rovnoběžný ani s jednou z rovin. Osová afinita přiřazuje každému bodu X roviny ρ bod X' roviny ρ′ tak, že přímka XX' je rovnoběžná se směrem afinity s. Průsečnici rovin ρ a ρ′ nazýváme osou afinity o. Přímky roviny ρ protínající osu o v bodě P se zobrazí na přímky roviny ρ′ protínající osu o v témže bodě. Přímky roviny ρ rovnoběžné s osou o se zobrazí na přímky roviny ρ′ rovněž rovnoběžné s osou o.

Osová afinita se prakticky využívá ve středoškolské matematice při konstrukci rovinných řezů hranolu, ne vždy je však uvedena v ŠVP nebo definována.

Na obrázku 14 je znázorněna osová afinita se směrem s.



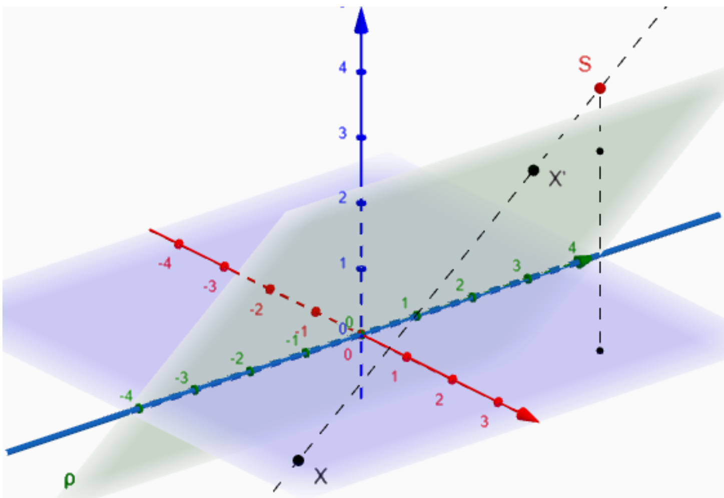
Obrázek 14 – Osová afinita

2.2.8. Středová kolineace mezi dvěma rovinami

Středová kolineace mezi dvěma rovinami je vztah mezi dvěma různoběžnými rovinami ρ a ρ' daný středem kolineace S, který neleží ani na jedné z rovin. Středová kolineace přiřazuje každému bodu X roviny ρ bod X' roviny ρ' tak, že přímka XX' je prochází středem kolineace S. Průsečnici rovin ρ a ρ' nazýváme osou kolineace o. Přímky roviny ρ protínající osu o v bodě P se zobrazí na přímky roviny ρ' protínající osu o v témže bodě. Přímky roviny ρ rovnoběžné s osou o se zobrazí na přímky roviny ρ' rovněž rovnoběžné s osou o.

Středová kolineace je využita na středních školách např. při rovinných řezů jehlanu rovinou, stejně jako osová afinita však nemusí být žákům definována.

Na obrázku 15 je sestrojena středová kolineace se středem S.



Obrázek 15 – Středová kolineace

2.2.9. Volné rovnoběžné promítání

VRP se uvádí především kvůli výuce stereometrie. Pomykalová (1998) jej definuje na příkladu promítání drátěné krychle do roviny pomocí několika pravidel, která je nutno při VRP dodržovat. V této práci se tomuto zobrazení více věnovat nebudeme.

3. Matematika v průběhu povinné distanční formy výuky v letech 2020 a 2021

Tato práce začala vznikat v roce 2021, kdy celá společnost pociťovala následky pandemie nákazy covid-19. Dopad pandemie na české školství byl významný. Studenti středních škol strávili distanční výukou 155 dní za školní roky 2019/20 a 2020/21. Pro porovnání, běžný školní rok má zhruba 195 vyučovacích dní. Tato absence fyzické přítomnosti ve škole ovlivnila nejen formu a účinnost samotného vyučování, ale i psychosociální rozvoj žáků, studentů i učitelů, jejich spokojenost a motivaci (Vaculová, 2021).

V průběhu distanční výuky bylo vedení škol ve spolupráci s předmětovými komisemi nebo celým pedagogickým sborem umožněno zasáhnout do obsahu a objemu probíraného učiva. Učitelé si měli vést záznamy o tom, co zvládli za distanční výuky probrat, někteří si v průběhu školního roku přesunuli jednotlivé tematické bloky tak, aby za dobu prezenční výuky stihli probrat takovou látku, kterou preferovali odučit prezenční formou a látku, u které se očekává větší míra samostatné práce, odsunuli pro případ distanční výuky (ČŠI, 2021).

3.1.1. Dopad pandemie covid-19 na stav českého vyučování

U žáků 5. tříd došlo při testování z počátku roku 2020 před pandemií a v květnu a červnu roku 2021 k velmi významnému zhoršení krom jiných oblastí i v oblasti matematiky (Korbel, Prokop, Münich, 2021).

U státních maturitních zkoušek v roce 2021 došlo k zhoršení výsledků didaktických testů. Podle Vaculové (2021) byla distanční výuka celosvětově primárně schopna udržovat úroveň klíčových kompetencí, nikoliv jejich rozšiřování či rozvoj.

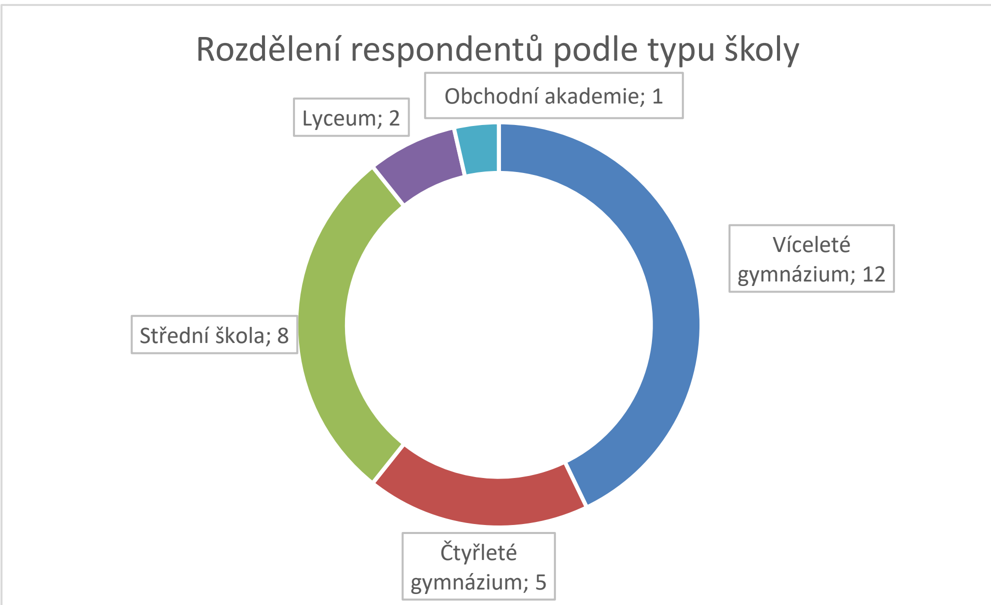
V různých fázích distanční výuky se i její náplň, rozsah a kvalita vyvíjela. Jedním z faktorů, které při prvním zavedení distanční výuky značně ovlivňovaly kvalitu výuky i motivaci žáků a studentů, byla možná nepřipravenost velké části pedagogů na náhlou změnu jejich práce, se kterou doposavad neměli zkušenosti.

Dle České školní inspekce (ČŠI, 2021) se příprava podkladů pro distanční výuku v online i offline podobě napříč Českem značně lišila. ČŠI evidovala školy, které takřka plynule navázaly na prezenční výuku a dokázaly prezenční výuku výsledkově zcela nahradit a vytěžit z kombinace online a offline distanční výuky všechny její benefity. Na druhou stranu jsou v Česku školy, které první systematicky vedenou distanční výuku zahájily až v druhém pololetí roku 2021. Dále zpráva ČŠI uvádí zlepšení digitálních kompetencí u pedagogických pracovníků u 60 % dotázaných škol. V 30 % případů došlo k velmi výraznému prohloubení těchto znalostí. Tomuto posunu pomohlo např. zakoupení specializovaného hardware i software určeného přímo i nepřímo k distanční výuce (notebooky, tablety, kamery, vizualizéry, software pro organizaci tříd/týmů, …) nebo praktické využívání těchto technologií, velká míra sdílení podkladů pro výuku přes média, sociální sítě nebo v rámci školy.

3.1.2. Dotazník pro středoškolské učitele

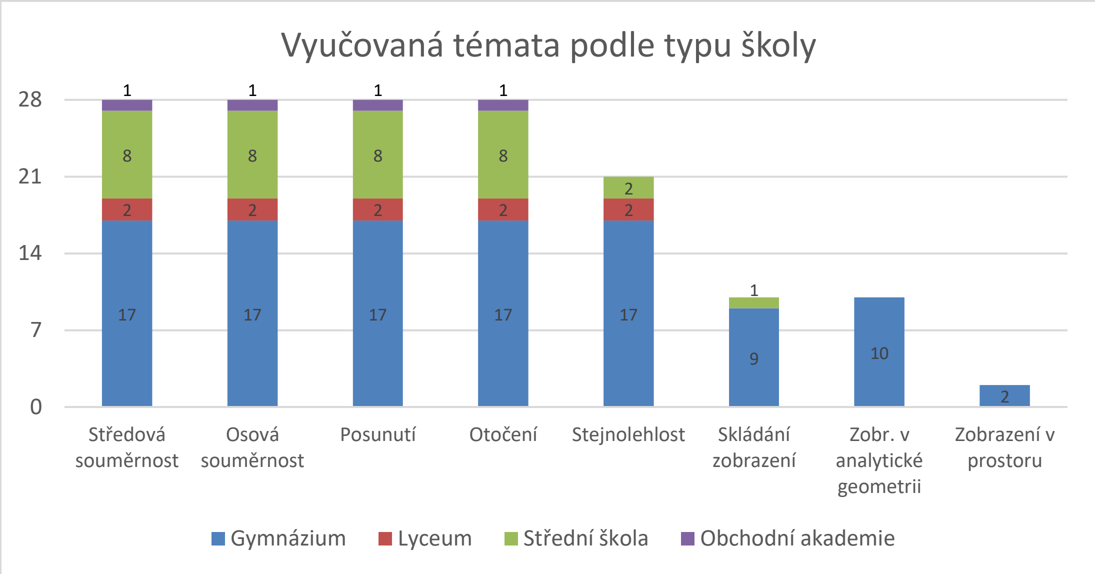
Důležitou součástí této práce je stručné dotazníkové šetření na téma zobrazení ve středoškolské matematice (Příloha č. 1 – Dotazníkové šetření). Cílem tohoto dotazníku bylo zjistit, jaké učební texty a sbírky učitelé prakticky využívají ve své výuce, jestli využívají elektronické podklady pro svou výuku a případně jaké, v jakém ročníku jsou zobrazení vyučována a v jakém rozsahu a zdali v období distanční formy vzdělávání vyučovali geometrii. Poslední doplňující otázka dotazníku se týkala výuky rozšíření zobrazení do prostoru. Zmíněná vyučovaná zobrazení, jejich zařazení do hodin na různých typech škol, jejich hodinová dotace, a hlavně zmíněné zdroje byly zohledněny a využity při tvorbě elektronické učebnice, hlavní části této práce (Smetana, 2024).

Dotazník byl vyplněn online celkem 28 respondenty z různých typů škol. Data jsou zpracována do grafu č. 1.



Graf 1 – Rozdělení respondentů podle typu školy

Všichni dotázaní vyučují středovou a osovou souměrnost, otočení a posunutí. Stejnolehlost vyučují všichni učitelé gymnázií a lyceí, ze zbylých devíti dotázaných učí stejnolehlost jen dva dotázaní. Zbylá data jsou zaznamenána přehledně v grafu č. 2.



Graf 2 – Vyučovaná témata podle typu školy

3.1.3. Tištěné sbírky a učebnice

Z dotázaných respondentů většina využívá tištěné učebnice a sbírky v kombinaci s elektronickými publikacemi. Zhruba polovina si vytváří vlastní elektronické podklady pro výuku zobrazení, z toho jeden respondent učí pouze ze svých podkladů. Konkrétní zástupci tištěných i elektronických učebních opor jsou zmíněny v následujících odstavcích. Za zmínku stojí jedna z respondentek, učitelka matematiky, deskriptivní geometrie a informatiky z osmiletého gymnázia v Praze, která do seznamu využívané literatury zahrnula celkem 13 učebnic a sbírek, mnohé z nich v dnešní době obtížně dostupných nebo zcela nedostupných. Po vyplnění dotazníku bylo autorovi umožněno tyto knihy projít a využít pro potřeby této práce.

Nejčastěji zmiňovanou tištěnou publikací využívanou dotázanými učiteli je **Matematika pro gymnázia – Planimetrie** (Pomykalová, 1993). Tato učebnice se geometrickým zobrazením v rovině věnuje na 64 stranách z celkových 187. Po řadě definuje jednotlivé pojmy od samotného zobrazení v rovině, přes shodnost, přímou i nepřímou; všechna výše zmíněná shodná zobrazení demonstrované na řadě řešených příkladů s černobílými obrázky, následovány neřešenými příklady. Po kapitole shodných zobrazení navazuje rozšiřující téma skládání shodných zobrazení.

Stejnolehlost, stejnolehlost kružnic a využití stejnolehlosti je nejobsáhlejší kapitolou o zobrazeních v rovině v této učebnici. Učebnice je vhodnou kombinací teorie, řešených a sbírky neřešených příkladů. Ilustrace jsou černobílé, ale přehledné a jasné.

Další knihou, kterou učitelé často využívají k výkladu, je **Přehled středoškolské matematiky** (Polák, 1991). Tato publikace je v porovnání s první zmíněnou podstatně obsáhlejší, těžší a finančně nákladnější. Jedná se o teoretický přehled středoškolské matematiky bez příkladů k řešení. Celé téma zobrazení v rovině je rozebráno na 10 stranách včetně potřebných ilustrací. Obsahuje kompletní soubor definic od zobrazení v rovině po stejnolehlost. Vzhledem k tomu, že se nejedná o učebnici, ale o přehled, je vhodná pro studenty, kteří už mají nějaké povědomí o látce a jako učebnice na osvojení nových znalostí není zcela vhodná.

Další z řady učebnic byla často zmiňována **Matematika pro střední školy – Planimetrie** (Molnár, 2022). Jedná se o tenkou knihu formátu A5 bez pevné vazby. Zobrazením v rovině kniha věnuje 19 stran, na kterých jsou popsána všechna zmíněná shodná zobrazení včetně jejich skládání a stejnolehlost. Na začátku kapitoly je definováno zobrazení v rovině, samodružné body a útvary a shodná zobrazení přímá a nepřímá. Autor v kapitole rovněž připomíná, jaké vlastnosti mají shodná zobrazení v přehledném, barevně odlišeném rámečku. Netradiční je řazení definic konkrétních zobrazení. První je uvedená osová souměrnost, která je demonstrována na obrázku budovy, jejíž průčelí je osově souměrné. Dále je definováno otočení, interpretováno otáčením ozubeného kola, až poté je definována středová souměrnost, jejíž příkladem je symbol jing jang, a posunutí, které představuje lyžař pohybující se po sjezdovce. Ke každému zobrazení je uvedena řada neřešených příkladů, které nejsou vždy zadány tradičně. Některé úlohy nutí čtenáře se soustředit, pozorně číst a myslet tak, aby se nenechal nachytat. Celá kniha je tištěna barevně, což přispívá její přehlednosti. Na vnitřní straně pružných desek učebnice jsou zobrazeny rovinné útvary spolu s pojmy na nich popsanými. Úlohy v této učebnici vhodně gradují a často je možno využít k řešení nově zadané úlohy část některé z úloh předchozích.

Následující tři učebnice byly zmíněny pouze jednou, což pro účely této práce a získání inspirace pro tvorbu elektronické učebnice nebylo vnímáno jako nevýhoda. První učebnicí je **Matematika pro I. ročník gymnázií** (Smida, 1984). Jedná se o knihu velikosti A5 v pevné vazbě, geometrii věnuje zhruba 50 stran, z toho 17 geometrickým zobrazením. Autor na úvod kapitoly zobrazení v rovině odkazuje na již probranou látku osové a středové souměrnosti a netradičně začíná jejich skládáním, resp. dvojím aplikováním téže transformace. Dále po řadě definuje středovou souměrnost, osovou souměrnost, a to obě pouze slovy a pomocí obrázků. Následuje podkapitola věnována konstrukcím pomocí zobrazení. Jedná se o kapitolu s hvězdičkou označující rozšiřující látku, kde definuje tato zobrazení pomocí symbolů a přidává definici otočení a posunutí. Stejnolehlost autor zmiňuje v samostatné kapitole, po které následuje řada příkladů o podobnosti útvarů, kde se všechny získané znalosti kombinují.

Další zmíněná učebnice, která přímo navazuje na předchozí zmíněnou, je **Matematika pro II. ročník gymnázií** (Odvárko a kol., 1985). Učebnice z oblasti geometrie obsahuje jen jednu kapitolu – geometrii v prostoru. Právě prostorová zobrazení jsou ze všech zmíněných pramenů zmíněna jen v této publikaci. Na celkem 11 stranách jsou rozebrány středová souměrnost, rovinová souměrnost a jejich skládání, posunutí v prostoru a otočení kolem přímky. Obrázků v této kapitole je minimum, většina příkladů je zadávána na krychli nebo kvádru, případně na špičatých tělesech.

Poslední netradiční učebnicí je **Geometrie pro vyšší školy reálné** (Strnad, 1903). Vyšší škola reálná byl typ všeobecné střední školy zaměřené především na přírodovědné a technické obory. Z hlediska věku studentů tedy tato učebnice odpovídá učebnicím pro dnešní střední školy. Celá učebnice je velikosti zhruba A5 v pevné vazbě, je tištěna na velmi tenký papír, má zhruba 200 stran a je celá věnována planimetrii. Tato učebnice byla vydaná na českém území za Rakouska-Uherska, tomu odpovídá i jazyk, který autor, ředitel c. k. reálky v Kutné Hoře, používá. Kapitola nejvíce relevantní této práci se jmenuje „*Řešení úloh strojních užitím podobnosti*“. Zadání příkladů v té době mohlo vypadat následovně: „*V kruhu vésti tětivu, která dvěma danými poloměry dělena jest ve tři stejné díly*.“ Autor nepoužívá metriku, pracuje pouze s poměry délek nebo obecně zadanými příklady. Příkladů v kapitole je 28 a jejich obtížnost se stupňuje. Z dnešního hlediska jsou v této učebnici využitelné především relativně obtížné neřešené příklady.

Níže zmíněné knihy jsou sbírky matematických úloh, jejichž prvním zástupcem je mnoha respondenty jmenovaná **Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy** (Petáková, 1998). Jedná se o rozsáhlou sbírku v pevné vazbě pokrývající všechna matematická témata, která se v době jejího vzniku vyučovala pro přijímací zkoušky na VŠ. Geometrickým zobrazením je věnováno 6 stran s celkem 47 příklady. Sbírka je velmi přehledná, obsahuje velké množství příkladů s uvedenými řešeními na konci sbírky. Obtížnost úloh je stupňována od snazších po obtížné. Vybraná zadání jsou použita v řešených příkladech elektronické učebnici, která je součástí této práce.

Následující čtyři sbírky byly zmíněny pouze jednou. Prvním zástupcem je **Sbírka úloh z matematiky pro I. Ročník gymnázií** (Smida a Šedivý, 1985). Autoři geometrickým zobrazením věnují 15 stran s celkem 77 příklady. Úlohy jsou rozděleny do podkapitol podle využitých zobrazení. Vybrané úlohy nestojí samostatně, často odkazují na konstrukce z předchozích úloh, s čímž musí čtenář dopředu počítat. Obtížnější úlohy jsou označeny hvězdičkou.

Zástupce sbírek z první poloviny 20. století je **Sbírka úloh z matematiky pro IV. – VIII. Třídu středních škol** (Bydžovský, Teplý a Vyčichlo, 1936). Tato sbírka je věnována aritmetice, která tvoří první polovinu sbírky, následována výsledky z této části; a obsáhlou sbírkou příkladů z geometrie. Zobrazením je věnována kapitola „*Útvary stejnolehlé a útvary podobné*“, která obsahuje přes 50 příkladů různorodých zadání. Úlohy, stejně jako u učebnice pro vyšší reálné školy, nevyužívají vzdálenosti a příklady jsou zadávány obecně. Část příkladů těchto dvou knih jsou velmi podobné nebo zcela stejné.

Třetí jedenkrát zmíněnou sbírkou je **Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní opory SOU – 1. část** (Jirásek a kol., 1989). Všechny kapitoly této sbírky jsou netradičně doprovázeny stručnou teoretickou částí, připomíná látku, kterou je v dané kapitole potřeba znát. Kniha je tedy kombinací učebního textu a sbírky příkladů. Zobrazením je věnována kapitola, která na zobrazení pohlíží nejprve z množinového hlediska a až poté z hlediska geometrického. Na celkem 15 stranách je 80 příkladů s uvedenými výsledky. Sbírka probírá souměrnosti a stejnolehlost.

Poslední rozebranou sbírkou jsou **Řešené maturitní úlohy z matematiky** (Bušek, 1985). Shodným a podobným zobrazením věnuje celkem 22 stran s 29 řešenými příklady. U řady příkladů je uvedena konstrukce, která je mnohdy nepřehledná. Tato nepřehlednost by se dala přikládat za vinu tehdejším technologickým limitům při tvorbě tiskových podkladů a kvalitě tisku samotné. Úlohy se v této knize vyskytují trojí obtížnosti, adekvátně označeny hvězdičkami. Mezi konstrukční úlohy jsou zařazeny úlohy, které má čtenář řešit parametricky.

V dotazníku byly dále zmíněny dvě učebnice deskriptivní geometrie, pravděpodobně kvůli výuce osové afinity a středové kolineace. Jedná se o knihu **Deskriptivní geometrie pro gymnázia** (Medek a Šedivý, 1987), která obsahuje výše zmíněná témata jako dvě z osmi hlavních kapitol celé knihy. Pro potřeby studenta, který deskriptivní geometrii nestuduje, stojí za zmínku pouze definice a obrázky těchto dvou zobrazení. Druhou knihou je **Deskriptivní geometrie pro II. a III. ročník SVVŠ** (Harant a kol., 1965).

Napříč všemi sbírkami a učebnicemi se dají nalézt příklady, které se liší pouze v jiné formulaci zadání nebo se neliší vůbec. Opakování těchto příkladů svědčí o jejich aktuálnosti ve sbírkách novějšího data. Z učebních textů je patrné, že objem látky se v průběhu posledního století zúžil a látka není probírána v takovém detailu, jako tomu bylo před sto lety. Obrovskou výhodou nověji vydaných učebních textů jsou barevný tisk a propracované ilustrace.

3.1.4. Elektronické publikace a matematicky orientované webové stránky

Téměř polovina z respondentů v dotazníku zmínila internetovou učebnici **Realisticky** (Krynický, 2010). Tento web dle autora navazuje na jeho předchozí stránky, kde sdílel původně pouze obsahy svých hodin matematiky a fyziky. Postupem času se z těchto sdílených materiálů stal ucelený soubor pokrývající velkou část probíraného učiva. V kategorii matematiky pro SŠ nalezneme podkategorii planimetrie, která v sobě skrývá zobrazení v rovině. Tento tematický okruh se skládá z 14 lekcí, každá z nich obsahuje dva soubory – soubor příkladů a zápis z hodiny, kde jsou následně tyto příklady vyřešeny. Zápis každé hodiny, která představuje novou látku, obsahuje krátkou a stručně podanou teorii a řadu příkladů s vhodnými ilustracemi. Díky jejich přehlednosti, názornosti a stručnosti jsou učiteli tyto podklady často využívány.

Dva respondenti ve své odpovědi zmínili Youtube kanál Marka Valáška. **Marek Valášek** je učitel matematiky z Prahy, vítěz ankety Zlatý Ámos ve školním roce 2021/2022 a podnikatel. Vedle svého podnikání zaměřeného na vzdělávání v oblasti matematiky spravuje kanál na video platformě Youtube, který má stejné zaměření a je přístupný zdarma. Jeho videa jsou snadno vyhledatelná, stručná, názorná a vždy je kladen důraz na pochopení daného matematického problému, nikoliv jen na výsledek. Na jeho videích lze snadno vidět, že má s touto tvorbou dlouhou zkušenost a potrpí si na detailu. Přesto, že ho dva respondenti zmínili v dotazníku, nelze na jeho kanále žádné video s tématikou geometrických zobrazení jednoduše nalézt. Zobrazením se jen krátce zaobírá v tématu analytické geometrie (Valášek, 2012).

Za zmínku stojí další tvůrce z video platformy Youtube, **Tomáš Chabada**, který začal sdílet svá videa týkající se matematiky v jeho patnácti letech v roce 2016 a je aktivní doposud. Oproti Markovi Valáškovi je Tomáš Chabada mladším tvůrcem a tomu odpovídá i úroveň jeho projevu i důraz na detail, kvalitu videa apod. Na svém kanále zveřejnil jednotky videí s tématikou geometrických zobrazení, především kvůli přijímacím zkouškám. Celkem sdílel přes 400 videí. Oba zmínění čeští tvůrci se nyní věnují především příkladům z přijímacích testů nebo maturit. Pro svou výuku jeho videa používá jeden respondent (Chabada, 2011).

Stálicí zaměřenou na online samostudium je portál **Khan Academy**, který zmínili 4 respondenti. Jedná se o neziskovou organizaci, která byla založena v roce 2006 Američanem Salem Khanem. Jejím cílem je udělat vzdělání dostupné všem zdarma. Celý portál čítá na 8000 anglických videí z oblastí matematiky, fyziky, chemie, IT, literatury, historie, ekonomie a dalších oblastí. Videa jsou prokládána krátkými testy a otázkami, které mají za úkol zkontrolovat, zdali jsou vyučované pojmy pochopeny správně. Autoři rovněž často nabízí jejich postup řešení. Videa a obecně všechny podklady Khanovy školy jsou postupně překládány, resp. kompletně přetvářeny do dalších světových jazyků. České verze videí týkající se geometrických zobrazení jsou nyní zcela dokončeny. Na rozdíl od českých tvůrců je tento portál zaměřen spíše na perfektní pochopení teorie a základní příklady (Khan Academy, 2023).

V dotazníku se v otázce elektronických opor objevil český web **Isibalo**. Jedná se o webovou stránku nabízející velkou řadu videí. Zhruba polovina z videí je zdarma k přehrání. Cílem tohoto projektu je dle autorů přiblížení matematiky nenáročnou formou, překonání negativních pocitů z matematiky a motivace čtenářů na svých znalostech pracovat. Ačkoliv je na první pohled za tímto projektem řada lidí a nespočet hodin stráveným tvorbou videí, testů a učebních textů, a ačkoliv oblast matematiky pokrývá látku od základní školy, převodů jednotek, až po diferenciální a integrální počet či abstraktní algebru, tak neobsahuje žádná geometrická zobrazení. Jediná zmínka o souměrnostech je u určování parity funkce, kde se určuje sudost a lichost (Chládek, 2023).

Další v dotazníku zmíněnou platformou je český **Techambition**. Jedná se o aplikaci, kterou lze využívat pro samostudium, přípravu na různé testy nebo pro využití přímo v hodinách matematiky. Sami tvůrci aplikaci popisují třemi body – radí, aktivizuje a vyhodnocuje. Aplikace není zdarma, pořídit si ji mohou žáci pro přípravu na přijímací zkoušky nebo školské zařízení, které poté uděluje svým studentům jednotlivé přístupy. Aplikace je využívána více než 200 školami po celé republice (Stránský, 2012).

Někteří učitelé ve svých odpovědích v dotazníku krátce zmínili i **GeoGebru**, ve které lze snadno sdílené materiály vyhledávat. Tomuto vyhledávání velmi pomáhá jejich správné řazení při jejich tvorbě. Materiály vytvořené v programu GeoGebra jsou nazývány applety či aktivity. Výhody aplikace GeoGebra a důvody proč byla pro tvorbu elektronické knihy zvolena právě GeoGebra jsou rozebrány níže v této práci.

Každý ze zástupců elektronických zdrojů má své přednosti. Do výuky lze zařadit všechny zmíněné autory nebo weby, konkrétního autora nebo applet je vhodné vybírat podle potřeby skupiny nebo jednotlivce.

3.1.5. Vyučování geometrie na konkrétních školách

Z vyhodnotitelných odpovědí se srovnatelně často objevovala odpověď, že jsou zobrazení vyučována v druhém nebo třetím ročníku SŠ. Odpovědi jednotlivých respondentů tohoto dotazníku se rozcházely nejvíce v otázce hodinové dotace věnované geometrickým zobrazením. Rozsah odpovědí byl od šesti vyučovacích hodin u učitele čtyřletého gymnázia po 30 hodin ve dvou různých ročnících u učitele víceletého gymnázia.

Zobrazení v prostoru jsou vyučována převážně v rámci volitelných seminářů, a to především na víceletých gymnáziích. Z doplňujících poznámek v dotazníku lze vypozorovat, že část učitelů jako výuku prostorových zobrazení vnímá i využití volného rovnoběžného promítání při výuce stereometrie.

V průběhu distanční výuky se většina respondentů geometrickým zobrazením věnovat neměla, mezi zbylými odpověďmi nalezneme tři druhy odpovědí. Část se věnovala geometrii dobu srovnatelnou, část dobu kratší, než by jí věnovali při prezenční výuce. Poslední zbylá část využila možnosti „*Jiná*“ a dodali, že došlo k prohození bloků tak, aby se geometrie vyučovala při prezenční výuce.

Dotazníkově šetření se provádělo v prvé řadě kvůli zdrojům, které učitelé ve své výuce aktivně využívají. Z odpovědí bylo patrné, že velká část respondentů používá relativně úzké spektrum tištěných sbírek nebo učebnic. Větší rozmanitost byla zřejmá především u elektronických zdrojů. Rozsah výuky a konkrétní vyučovaná témata poskytovala vodítka, na jaká zobrazení má být kladen větší důraz při sestavování elektronické učebnice.

4. Elektronická učebnice a sbírka

V následujících odstavcích je představena elektronická kniha Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice, která je hlavní součástí této práce (Smetana, 2024). Vývoj digitálních učebních pomůcek je neustálý. Kompetence dnešních žáků a studentů v informačních technologiích mají být dle RVP na takové úrovni, že uživatelská práce s programy dynamické geometrie, mezi které patří i GeoGebra, by neměla být nikterak velkou překážkou.

Nutnost provázání dosavadních znalostí o práci s počítačem s prací s geometrickým software vyzdvihuje ve své práci Wimmerová (2017). Podle autorky je nutné vybraný program jen stručně představit a se svými studenty krátce vyzkoušet. Následná uživatelská práce s programem je relativně návodná a nevyžaduje žádné hlubší znalosti z oblasti IT. Vytváření vzhledných a plně funkčních appletů v jednotlivých programech může být náročnější z hlediska potřeby hlubších znalostí (správné nastavení programu, interní skripty apod.) nebo časové náročnosti, kdy např. možnost úpravy zadání konkrétního příkladu poskytuje celou řadu různých řešení, které za nesprávného podmíněného zobrazení způsobí vysokou míru nepřehlednosti konstrukce příkladu.

4.1. Hlavní motivace

Hlavní motivací k sestavení elektronického učebního textu spolu s řešenými a neřešenými příklady bylo především ucelení látky geometrických zobrazení a přenesení statických obrázků do dynamického prostředí. V teoretické části je podstatným přínosem znázornění definovaných pojmů v rovině nebo prostoru s možností pohybovat s prvky appletu. V části elektronické knihy věnující se příkladům, která čerpala ze zdrojů zmíněných v dotazníku, je podstatnou výhodou možnost modifikace zadání a zobrazení krokované konstrukce a zápisu konstrukce. Napříč celou elektronickou knihou jsou otázky k zamyšlení, případně pokyny k modifikaci zadání, které mají za úkol rozvíjet argumentaci a prohloubit pochopení probrané látky.

Za dynamické prostředí byl zvolen program **GeoGebra**, který je open-source volně dostupným softwarem. Je uživatelsky přístupný skrze všechny hlavní internetové prohlížeče a stále vyvíjený jako aplikace k instalaci. GeoGebru lze spustit na PC, tabletu i mobilním telefonu. Jedná se o jeden z nejpropracovanějších projektů věnovaný dynamickému prostředí. Tento program ve svých začátcích disponoval pouze režimem rovinné geometrie, kde se pomocí konstrukcí bodů, úseček, přímek a kuželoseček daly sestrojit a prezentovat různé geometrické příklady. Dnes je GeoGebra vybavena řadou režimů od grafů funkcí, přes prostorovou geometrii až po modul výpočtů míry pravděpodobnosti (Dikovićová, 2009). Alternativním prostředím k programu GeoGebra jsou např. programy Desmos nebo Cabri.

Grafický kalkulátor **Desmos** byl vyvinut jako start-up absolventem americké univerzity Yale. Prostředí tohoto programu vypadá zdánlivě podobně jako prostředí GeoGebry, funkcí je dostupných ale podstatně méně a pokročilejší úpravy, formátování, podmiňování nebo vytváření skriptů je buď složité nebo zcela nedostupné. Tato aplikace je rovněž vybavena knihovnou hotových appletů pro učitele, kteří mohou velice snadno své nebo cizí hotové applety sdílet svým studentům do virtuální třídy nebo skrze odkaz na internet. Z knihovny, řady sdílených appletů a z diskuse v rámci komunity lze vypozorovat, že aplikace Desmos je velmi oblíbena pro sdílení příprav a testů z amerického školství. Podobné dělení příkladů lze nalézt i v knihovně videí Khan Academy.

Dalším softwarem, který nabízí dynamické prostředí, je program **Cabri**, resp. jeho online forma CabriExpress. Cabri nabízí srovnatelné množství nástrojů, jakými je vybavena GeoGebra. Není zde dostupná knihovna hotových appletů, applety je možné uložit pouze do souboru. Výhodou pro učitele je integrovaná funkce pravítka, úhloměru a kružítka a lepší plynulost při změnách zobrazení. Cabri je vhodnější pro jednodušší applety nebo krátká a jasná sdílení jednoduchých matematických problémů.

4.1.1. Výhody dynamického prostředí GeoGebra

Důležitost využití všech aspektů dynamického prostředí obecně shrnuje v bodech ve své práci Žilinskieneová (2015). Autorka se zaměřuje na první stupeň základní školy, řada bodů je ale neméně relevantní pro české středoškolské vzdělávání.

- *Technologické aspekty*
    - *Animace, obrázky, multimédia*
    - *Jednoduchost, uživatelská dostupnost*
    - *Exaktnost s vhodnými příklady*
    - *Kompatibilita napříč operačními systémy*
    - *Grafické znázornění, variabilita*
    - *Možnost sdílení appletů online*
    - *Možnost exportování dat, obrázků*
    - *Snadná (nebo žádná) instalace*
    - *Jazyková mutace*
    - *Možnosti aktualizace software*
- *Pedagogické aspekty*
    - *Nabízí řadu příkladů na procvičení*
    - *Předkládá interaktivní příklady*
    - *Umožňuje návaznost informací a znalostí*
    - *Průběžná kontrola výsledků*
    - *Mezipředmětové vztahy*
    - *Orientace pomocí intuice*
    - *Plnění vytyčených pedagogických cílů*
    - *Motivace, atraktivní prostředí*
    - *Výběr/tvorba appletů na základě věku*
- *Právní, ekonomické aspekty*
    - *Open-source software, freeware nebo školou poskytovaná licence*

Z těchto bodů stojí za zmínku především uživatelská dostupnost, kterou má GeoGebra na vysoké úrovni. Přehledný panel nástrojů, popsané nástroje a nápovědné bubliny, které se ve správný moment objevují při volbě nástroje, zjednodušují uživateli orientaci v programu bez potřeby větší předchozí zkušenosti. Na všech těchto principech byla postavena i elektronická kniha, která je hlavním výstupem této práce.

Velmi užitečnou funkcí GeoGebry je možnost „*Zadat*“ konkrétní applet třídě. Při zobrazení appletu se v pravém horním rohu obrazovky objeví tlačítko „*Zadat*“, po jehož stisknutí nabídne GeoGebra zadávajícímu sdílet odkaz, kód na úlohu nebo přímé propojení s Google Classroom, aplikací pro správu a vedení třídy v online prostředí. Obrazovky studentů, kteří si zadanou úlohu na svém zařízení otevřou, se objeví učiteli živě na jeho obrazovce. Učitel tak může své studenty správně vést nebo kontrolovat jejich progres v dané úloze.

Další funkcí, která může být využita pro testování při prezenční výuce je režim Zkouška, který znemožní uživateli otvírat složky v telefonu, zablokuje přístup na internet a znemožní otvírat další GeoGebra applety. Tento režim je možné aktivovat pouze v aplikaci GeoGebra, vyžaduje po uživateli deaktivaci funkcí Bluetooth a WiFi (Brůžková, 2018).

4.1.2. GeoGebra kniha

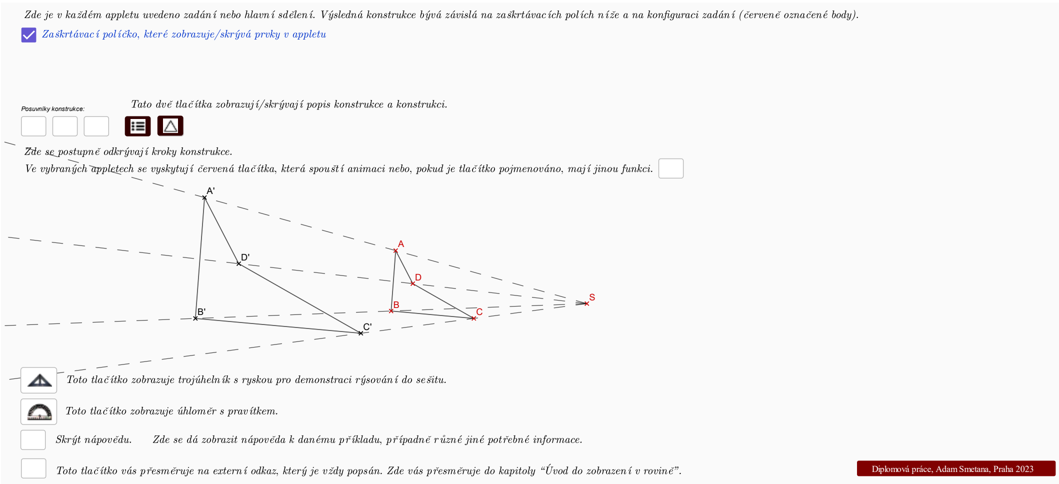
Různá dynamická prostředí mohou být v rámci webové verze programu GeoGebra sloučeny do tzv. GeoGebra knihy (GeoGebra Book), která dává appletům a textům ucelený rámec, ve kterém se dá snadněji orientovat a pohybovat. Tato online dostupná GeoGebra kniha je hlavní výstupem této práce. Jednotlivé applety této knihy jsou k práci přiloženy jako elektronická příloha. Pro plnou funkčnost celé knihy je vhodné využít její online formy, která je dostupná přes internetový odkaz citovaný ve zdrojích (Smetana, 2024).

Elektronická kniha Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice je určena studentům k samostudiu, učitelům k zadávání samostatné práce i pro využití při prezenční výuce. Obsahem této knihy je krátký úvod vysvětlující, co vše tato kniha obsahuje a jak je doporučeno ji používat, kapitola věnovaná teorii a soubor řešených a neřešených příkladů. Jednotlivé kapitoly jsou podrobněji popsány v následujících odstavcích.

4.2. Úvodní část GeoGebra knihy

První část obsahuje tři applety – vzorový applet, úvod do rovinných zobrazení a rozšíření zobrazení do prostoru.

Všechny samostatně stojící applety s teorií, řešenými i neřešenými příklady jsou sestaveny na základě autorem vytvořeného **vzorového appletu**, který je součástí práce (Obrázek 16). Tento applet je vhodné pečlivě projít a nastudovat, ať nedojde zbytečně k nepochopení či nedokončení některých z kroků konstrukce. Hlavními charakteristikami, které jsou promítnuty do každého appletu, jsou přehlednost, variabilita zadání, pokud je možná, vytěžení dynamického prostředí pomocí animací nebo skriptů a poskytnutí návodu tam, kde je potřeba.



Obrázek 16 – Vzorový applet

Hlavní sdělení každého appletu věnovanému teorii nebo příkladům je vždy na prvním řádku. Pod hlavním sdělením se mohou vyskytovat zaškrtávací pole, která buď modifikují zadání nebo zobrazují další prvky appletu. Ikony s šipkami pod zadáním příkladu zobrazují krokovanou konstrukci. Piktogramy seznamu a trojúhelníku skrývají a odkrývají zápis konstrukce a konstrukci samotnou.

V průběhu krokované konstrukce nebo později v nápovědě se mohou objevit červená tlačítka, která spouštějí animaci appletu. Některé kroky konstrukce vyžadují přehrání této animace pro postup dále.

Do appletů byla přidána možnost zobrazit poloprůhledný trojúhelník s ryskou a úhloměr s pravítkem. Oba tyto prvky slouží především pro učitele k demonstraci konstrukce do sešitu. Pro sestrojení kolmic nebo ověření velikosti úhlu v dynamickém prostředí slouží lépe integrované funkce aplikace.

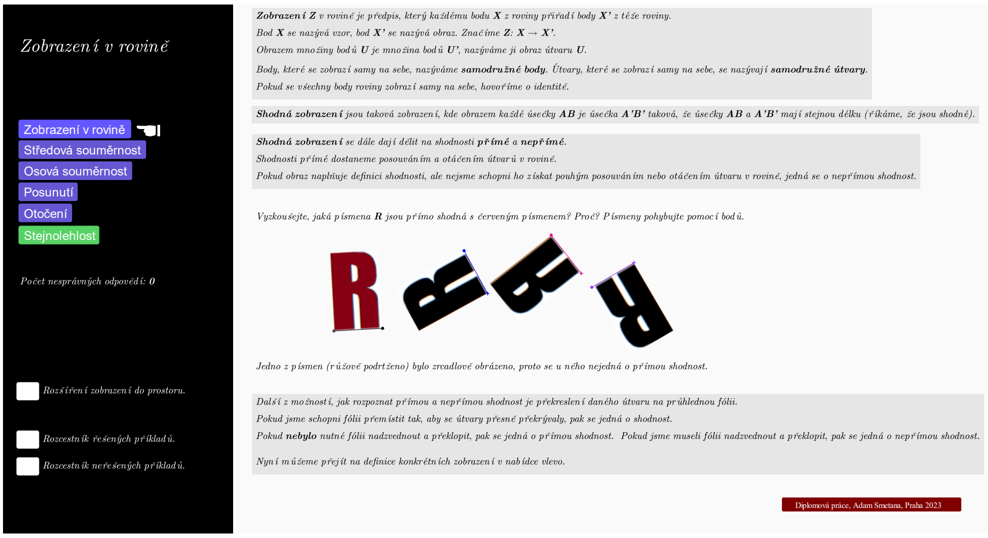
Ikona otazníku zobrazuje a skrývá nápovědu k danému tématu. Může se jednat buď o návodnou otázku, radu, jak modifikovat zadání, aby bylo řešení snazší, nebo odkaz na jiný applet, který s řešením daného příkladu pomůže. Odkazy jsou popsané a znázorněné ikonou se šipkou vpřed a odkazují vždy na jiné části této elektronické knihy. V pravé dolní části appletu je odkaz pro návrat na úvod této knihy.

Posledním prvkem, který mohou učitelé nebo studenti využít jsou u neřešených příkladů speciálně vytvořené nástroje, které sestrojují jednotlivé kroky daného zobrazení. Tyto nástroje jsou odkresleny růžovou barvou a fungují pouze pro body.

Pro správnou funkčnost je vhodné zobrazení na celou obrazovku s úhlopříčkou alespoň 10 palců. Hlavním důvodem je špatná čitelnost menších textů na zařízeních s menším displejem. K vytvoření všech appletů byl využit notebook s úhlopříčkou displeje 13 palců a s operačním systémem Windows a internetovým prohlížečem Google Chrome.

Teoretická část elektronické knihy je zpracována ve dvou hlavních souhrnných appletech – Zobrazení v rovině, který obsahuje propojení s jednotlivými applety pro každé z dříve v práci zmíněných zobrazení, a Zobrazení v prostoru.

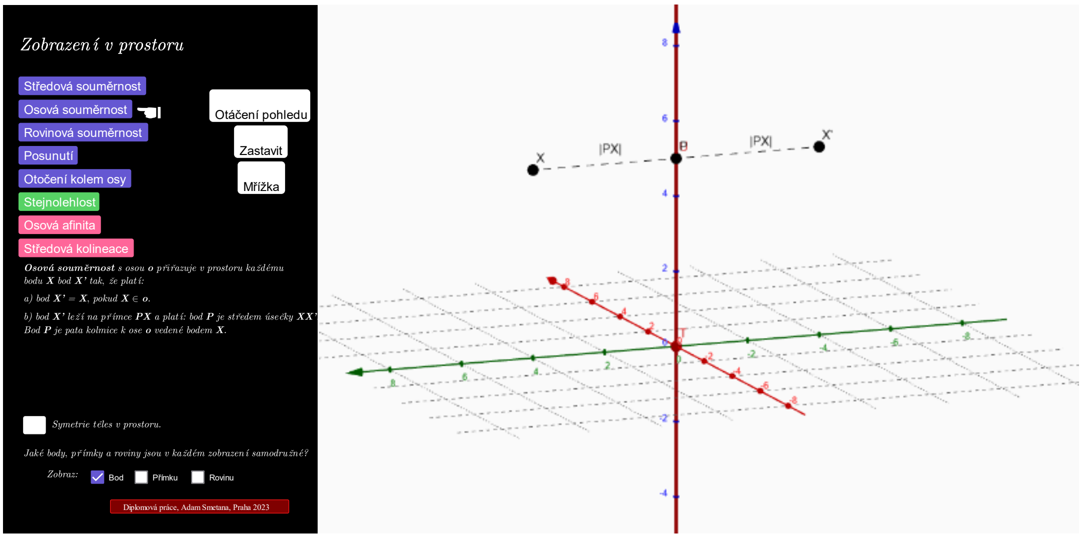
Applet **Zobrazení v rovině** v prvé řadě definuje pojmy, jako jsou samotné zobrazení množiny na množinu, samodružné body a útvary a shodná zobrazení. Součástí této první části je i krátké ověření znalostí pomocí příkladů zobrazení a shodných zobrazení s krátkým zdůvodněním správných odpovědí. Dále jsou definována jednotlivá zobrazení v rovině s propojením se samostatně stojícími applety pro ještě větší názornost (Obrázek 17).



Obrázek 17 – Úvod do zobrazení v rovině

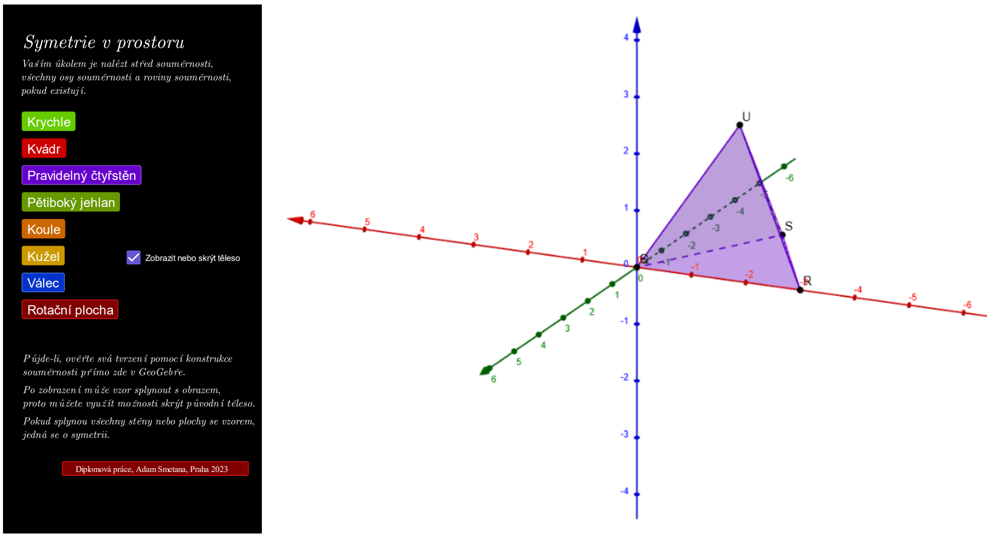
Applet **Zobrazení v prostoru** je rozšířením již probraných zobrazení do prostoru. Je společný pro všechna zmíněná zobrazení, u každého je uvedena definice, možnost zobrazení bodu, přímky a roviny, a především je vše vyobrazeno v 3D dynamickém prostředí, ve kterém lze prvky určující zobrazení i obrazy prvků pohybovat a měnit tak zadání k přání uživatele. Ukotvení těchto prvků by bylo zbytečným omezením možností dynamického prostředí.

Každé ze základních zobrazení je doprovozeno otázkou „*Jaké body, přímky a roviny jsou v tomto zobrazení samodružné?*“, která má motivovat k zamyšlení a případné modifikaci prvků appletu tak, aby obraz útvaru splynul se vzorem. Nad rámec rozšíření zobrazení z roviny jsou uvedena osová afinita a středová kolineace, která, ač se ve škole nemusí definovat, jsou využívána při konstrukcích rovinných řezů. Applet má úmyslně skryté menu, aby nebylo možné do appletu více zasahovat. Proto jsou v levé části appletu zobrazena tlačítka zahajující a zastavující otáčení pohledu ve 3D a tlačítko zobrazující mřížku. Applet má také zobrazené souřadnicové osy pro lepší názornost (Obrázek 18).



Obrázek 18 – Zobrazení v prostoru

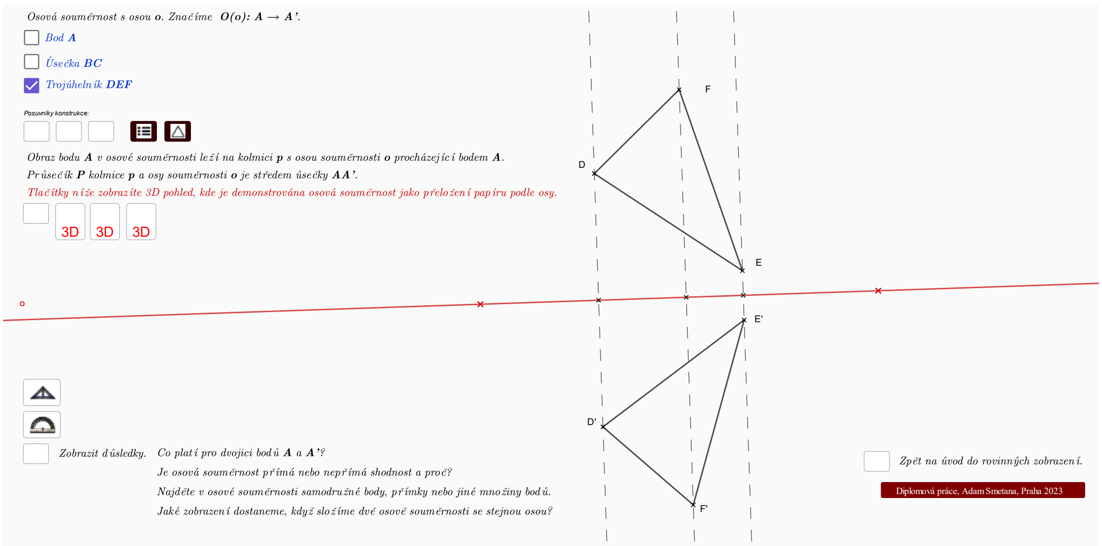
U shodných zobrazení je uveden odkaz na jednoduchý applet, ve kterém si mohou studenti sami vyzkoušet hledání symetrií různých těles v prostoru. Pro ještě lepší představu je vhodné tuto aktivitu doplnit o fyzické drátové modely těles (Obrázek 19).



Obrázek 19 – Symetrie v prostoru

4.2.1. Applety jednotlivých zobrazení v rovině

Všechna výše zmíněná zobrazení jsou znázorněna v dynamickém prostředí programu GeoGebra, kde si může uživatel vyzkoušet různě modifikovat zadání, nalézt samodružné body, útvary nebo vypozorovat vztahy mezi vzory a obrazy tak, aby získané znalosti mohl uplatnit při rozboru řešených i při řešení neřešených příkladů, které jsou součástí elektronické knihy Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice a jsou více rozebrány v následující části této práce. Dále jsou kladeny návodné otázky nebo krátké úkoly pro lepší pochopení daného zobrazení nebo snazšího nalezení samodružných prvků. Na obrázku 20 je uveden příklad takového appletu – osová souměrnost.



Obrázek 20 – Jednotlivé applety zobrazení v rovině

Všechny applety do tohoto bodu byly věnované především teorii. Následující část této elektronické knihy se věnuje řešeným a neřešeným příkladům pro samostatnou práci.

Po definování shodných a podobných zobrazení je zařazen applet **Skládání zobrazení**. V appletu je cílem zobrazit vzorový útvar (domeček) na jeho obraz pomocí známých zobrazení. Domeček je zadaný jako jedna lomená čára, což velmi usnadní uživatelskou práci s appletem, není potřeba zobrazovat jednotlivé body ani pracně vybírat jednotlivé prvky appletu k zobrazení. V horní části obrazovky jsou zobrazena tři tlačítka nadepsaná „*X*“, „*Shodná zobrazení*“ a „*Podobnost*“ a posuvník neprůhlednosti. Všechna tlačítka pomocí interních skriptů modifikují zadání – generují nebo skrývají obraz a zobrazují podmínku, za které má uživatel úlohu řešit. Příkladem takové podmínky může být omezení užívání posunutí nebo otočení či využití pouze několika osových souměrností. Při generování podobného obrazu se u obrazu objeví koeficient, který je potřeba při použití stejnolehlosti. Tlačítko „*X*“ maže obraz i podmínku.

4.3. Řešené příklady

Soubor kompletně rozebraných příkladů je v práci uveden rozcestníkem řešených úloh, který obsahuje seznam řešených příkladů spolu s jejich zadáním, informací, jaké zobrazení je při řešení využito a odkazem s náhledem appletu. Řešených příkladů je v souboru 15. Níže jsou rozebrány zástupci těchto příkladů. Všechny rozebrané příklady jsou převzaty ze zdrojů zmíněných v dotazníku. Zdroj je vždy uveden v appletu v pravém dolním rohu.

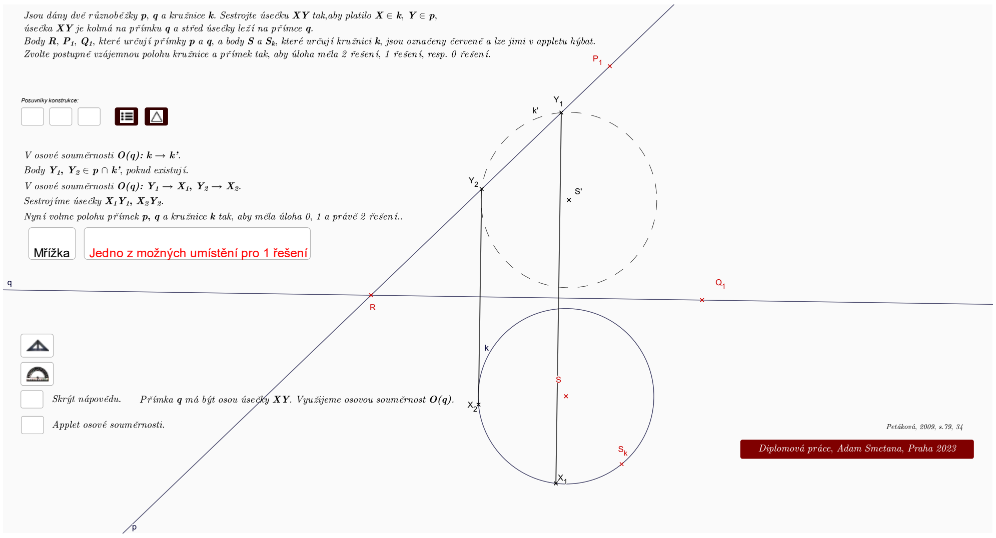
4.3.1. Příklad „Kolmá úsečka se středem na přímce“

Zadání: „*Jsou dány dvě různoběžky* p, q *a kružnice* k. *Sestrojte úsečku XY tak, aby platilo* $X \in k$, $Y \in p$, *úsečka XY je kolmá na přímku* q *a střed úsečky leží na přímce* q. (Petáková, 1998) V úloze je využito osové souměrnosti.“

Dodatek k zadání: „*Zvolte postupně vzájemnou polohu kružnice a přímek tak, aby úloha měla právě dvě řešení, právě jedno řešení, resp. žádné řešení*.“

Postup řešení: V osové souměrnosti $O(q): k \to k'$. Body $Y_1, Y_2 \in p \cap k'$, pokud existují. V osové souměrnosti $O(q): Y_1 \to X_1, Y_2 \to X_2$, pokud existují. Sestrojíme úsečky X_1Y_1, resp. X_2Y_2.

V appletu lze volně pohybovat červeně označenými body, které určují polohu přímek p, q a kružnice k. Dodatek k zadání uživatele vyzývá k nastavení zadání tak, aby úloha měla různý počet řešení. Změnou polohy jednoho z útvarů lze snadno vyzkoušet, jak je potřeba polohu změnit, aby měla úloha právě dvě řešení nebo žádné řešení. Pro usnadnění nastavení polohy tak, aby úloha měla právě jedno řešení, je zobrazeno tlačítko umožňující zobrazit mřížku, ke které se body po uchopení samy přichycují a tím uživateli dávají možnost přesného nastavení. Bez zobrazení mřížky je nalezení takové polohy spíše dílem náhody (Obrázek 21).



Obrázek 21 – Příklad „*Kolmá úsečka se středem na přímce*“

V krokované konstrukci tohoto příkladu je zakomponována varianta, kdy úloha nemá řešení. Ve třetím kroku konstrukce se objeví řádek „*Body* Y_1, Y_2 *neexistují*“. Zobrazení tohoto textu je podmíněno funkcí „*JeDefinovan*“.

Nápovědou v tomto appletu je prostá rada: „*Přímka* q *má být osou úsečky* XY*. Využijeme osovou souměrnost* $O(q)$.“ Externí odkaz uživatele přesměruje na applet věnovaný osové souměrnosti.

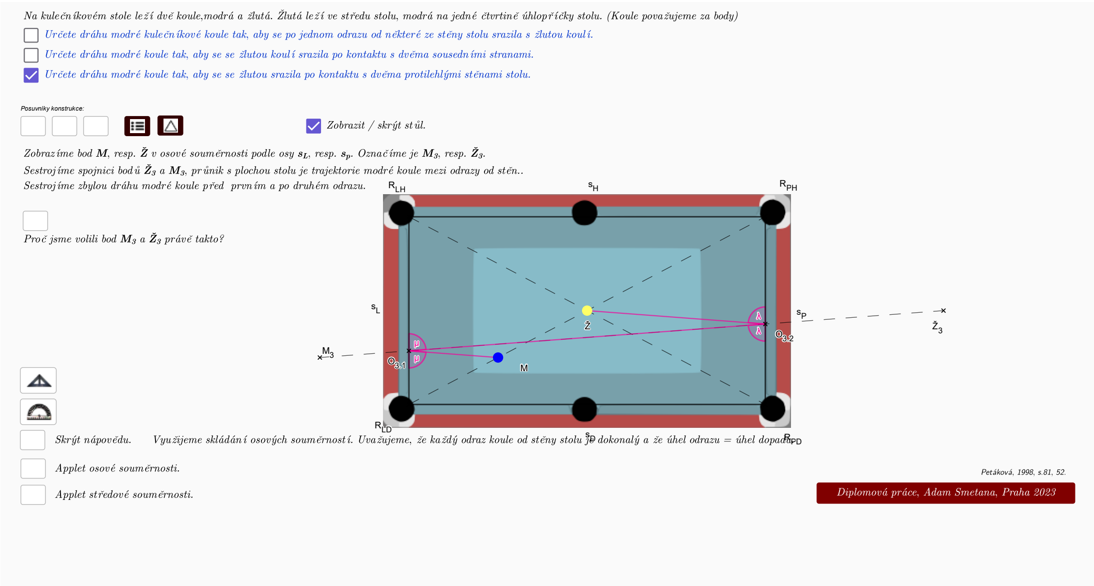
4.3.2. Příklad „Kulečník“

Zadání: „*Na kulečníkovém stole leží dvě koule, modrá a žlutá. Žlutá leží ve středu stolu, modrá na jedné čtvrtině úhlopříčky stolu. (Koule považujeme za body M a Z) Máme určit dráhu modré koule tak, aby se srazila se žlutou po odrazu od jedné stěny stolu, po dvou odrazech od sousedních stran stolu, resp. po dvou odrazech od protilehlých stran stolu.*“ (Petáková, 1993) V úloze je využito osové a středové souměrnosti.

Postup řešení pro variantu dvou odrazů od sousedních stěn stolu: Ve středové souměrnosti $S(R_{LH})\colon Z \to Z_2$. Bod odrazu O modré koule o levou stěnu stolu je průsečíkem této stěny a úsečky MZ_2. Sestrojíme dráhu modré koule před a po odrazu od levé stěny stolu. Úhel dopadu je roven úhlu odrazu. Sestrojíme dráhu modré koule před a po odrazu od druhé (horní) stěny stolu.

Otázka k zamyšlení: „*Proč jsme zvolili bod* Z_2 *právě takto? Popište, jak získáme bod* X_2 *(*$O(s_H)\colon O \to X_2$*) a jaký je vztah tohoto bodu k trajektorii modré koule a bodům jejího odrazu od stěn?*“

V tomto příkladu je kladen důraz na názornost a zamyšlení se nad způsobem předkládaného řešení. Vzhledem ke způsobu zadání příkladu je omezena variabilita zadání. Applet je doplněn obrázkem kulečníkového stolu, který má přiblížit zdánlivě teoretický příklad realitě a motivovat k jejímu řešení. Tento obrázek se dá skrýt pomocí zaškrtávacího tlačítka. Modrá koule je ve všech třech variantách příkladu animována, opět pro větší upoutání uživatele (Obrázek 22).



Obrázek 22 – Příklad „*Kulečník*“

Nápověda tohoto příkladu zní: „*Využijeme skládání osových souměrností. Uvažujeme, že každý odraz koule je dokonalý a že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu*.“ Odkazy směřují na applety středové a osové souměrnosti.

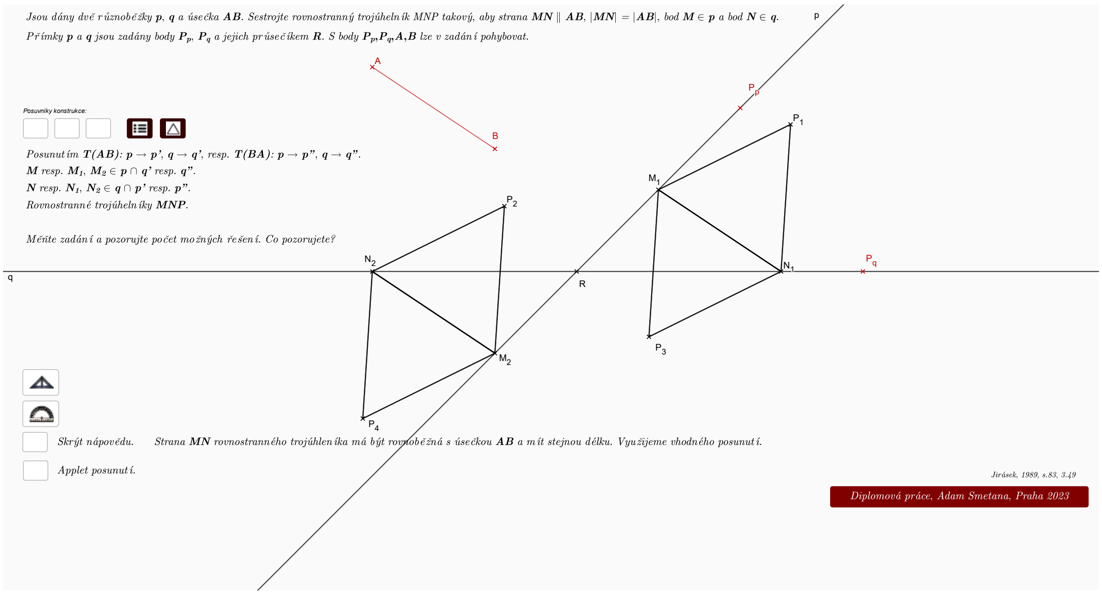
4.3.3. Příklad „Rovnostranné trojúhelníky s body na přímkách“

Zadání: „*Jsou dány dvě různoběžky* p*, * q *a úsečka* AB*. Sestrojte rovnostranný trojúhelník* MNP *takový, aby strana* $MN \parallel AB$*,* $|MN| = |AB|$*, bod* $M \in p$ *a bod* $N \in q$*.*“ (Jirásek, 1989) V úloze je využito posunutí.

Přímky p a q jsou zadány pomocí jejich pevně umístěného průsečíku R a body P_p a P_q, kterými lze v zadání pohybovat a měnit tak zadání. Neukotvené jsou rovněž body A a B (Obrázek 23).

Postup řešení: Posunutím $T(\overrightarrow{AB}): p \to p', q \to q'$, resp. $T(\overrightarrow{BA}): p \to p'', q \to q''$. Body M_1, $M_2 \in p \cap q', p \cap q''$. Body N_1, $N_2 \in q \cap p', q \cap p''$. Rovnostranné trojúhelníky MNP.

Poznámka k zamyšlení: „*Měňte zadání a pozorujte počet možných řešení. Co pozorujete?*“



Obrázek 23 – Příklad „*Rovnostranné trojúhelníky s body na přímkách*“

Tento příklad má konstantní počet řešení, jeho sestavení v dynamickém prostředí nebylo náročné.

Nápověda k tomuto příkladu zní: „*Strana MN rovnostranného trojúhelníka má být rovnoběžná s úsečkou AB a mít stejnou délku. Využijeme posunutí.*“ Odkaz směřuje na applet posunutí.

4.3.4. Příklad „Čtverec se stranou na přímce a body na kružnici“

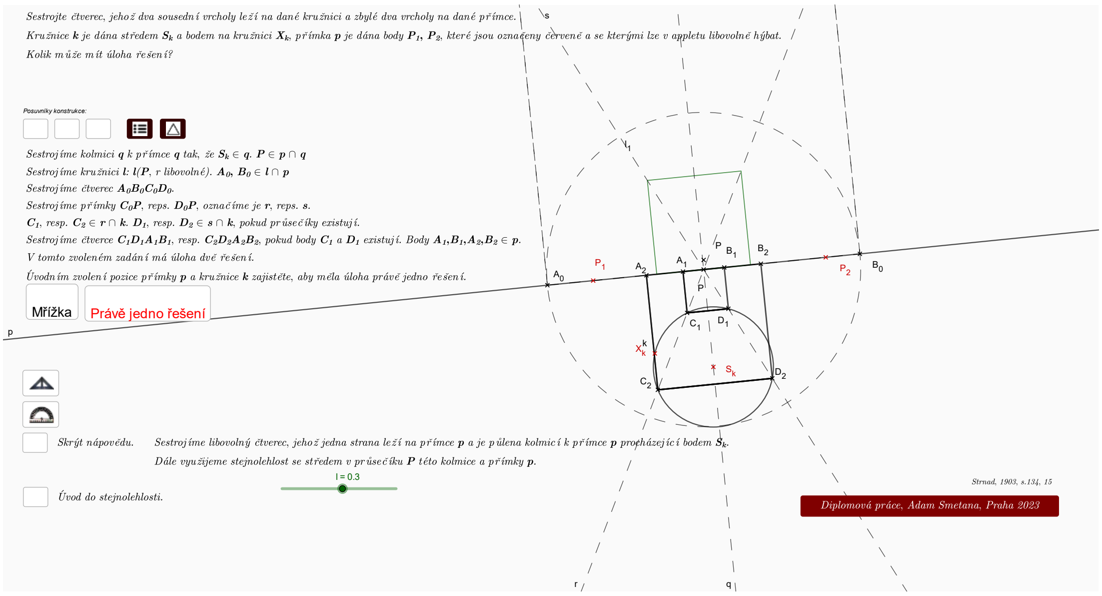
Zadání: „*Sestrojte čtverec, jehož dva sousední vrcholy leží na dané kružnici a zbylé dva vrcholy na dané přímce*.“ (Strnad, 1903) V úloze je využito stejnolehlosti.

Doplňující otázka: „*Kolik může mít úloha řešení?*“

Přímka p je zadána body P_1, P_2, kružnice k je dána středem S_k a bodem X_k, který leží na kružnici k. Se všemi těmito body lze v zadání úlohy volně pohybovat (Obrázek 24).

Postup řešení: Sestrojíme kolmici q k přímce p: $S_k \in q, P \in p \cap q$. Sestrojíme kružnici $l(P, r\ libovolné)$, body $A_0, B_0 \in l \cap p$. Sestrojíme čtverec $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$. Sestrojíme přímky C_0P, resp. D_0P, označíme je r, resp. s. Body C_1, resp. $C_2 \in r \cap k$, resp. body D_1, resp. $D_2 \in s \cap k$, pokud existují. Sestrojíme čtverce $A_1B_1C_1D_1$, resp. $A_2B_2C_2D_2$ tak, aby body $A_1, B_1, A_2, B_2 \in p$.

Poznámka k modifikaci zadání: „*Úvodním zvolením polohy přímky a kružnice zajistěte, aby úloha měla právě jedno řešení.*“



Obrázek 24 – Příklad „*Čtverec se stranou na přímce a body na kružnici*“

Úloha může mít žádné, právě jedno nebo právě dvě řešení, jsou tedy tři různé varianty. Zobrazení adekvátního bodu v konstrukci a tlačítek pod zápisem konstrukce je podmíněno vzájemnou polohou přímky r a kružnice k. Pro modifikaci zadání tak, aby úloha měla právě jedno řešení, je i v tomto příkladu možnost zobrazit mřížku. Pokud by to i tak bylo pro některé uživatele náročné, je zde zobrazeno tlačítko, které jednu z možných vzájemných poloh přímky a kružnice nastaví.

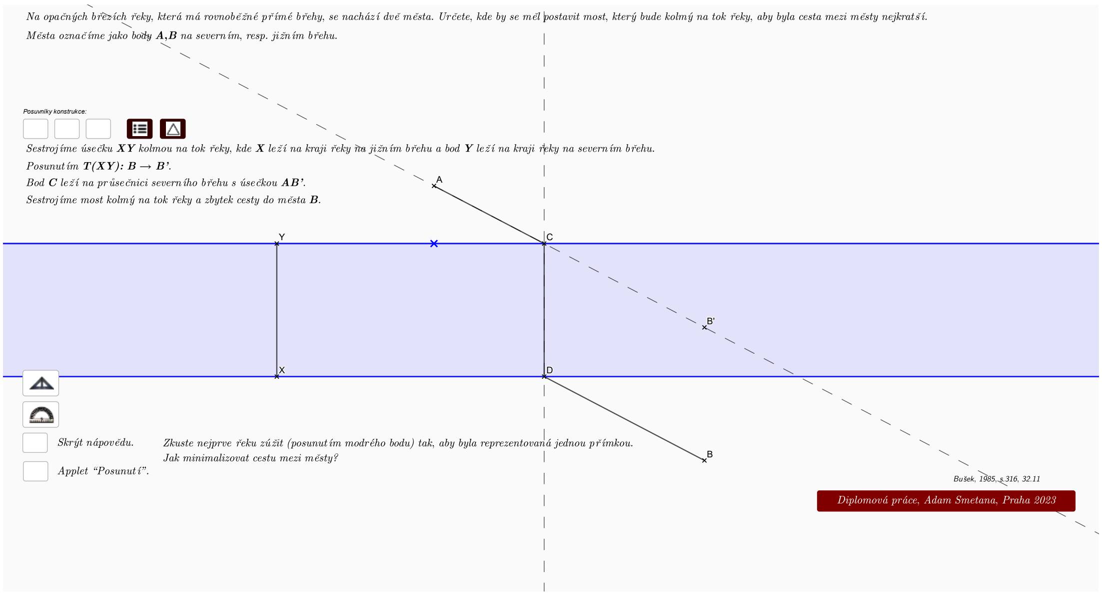
Nápověda v tomto appletu je propracovanější než v minulých příkladech. Po stisknutí tlačítka nápovědy se zobrazí čtverec, jehož jedna strana leží na přímce p a je půlena kolmicí k přímce p procházející středem zadané kružnice k, tento bod je bodem P v konstrukci. Spolu s tímto zeleným čtvercem se zobrazí zelený posuvník, který mění koeficient stejnolehlosti $H(P, l)$. Změnou koeficientu l je možné získat řešení, pokud existuje. Odkaz směřuje na applet stejnolehlosti.

4.3.5. Příklad „Města u řeky“

Zadání: „*Na opačných březích řeky, která má rovnoběžné přímé břehy, se nachází dvě města. Určete, kde by se měl postavit most, který bude kolmý na tok řeky, aby byla cesta mezi městy nejkratší. Města označíme jako body A, resp. B na severním, resp. jižním břehu.*“ (Bušek, 1985) V příkladu je použito posunutí.

Postup řešení: Sestrojíme úsečku XY kolmou na tok řeky, kde bod X leží na severním břehu řeky a bod Y leží na jižním břehu. Posunutím $T(\overrightarrow{XY}): B \rightarrow B'$. Bod C, jeden z krajních bodů mostu, leží na průsečnici severního břehu a úsečky AB'. Sestrojíme most kolmý na tok řeky a zbytek cesty do města B.

Applet je sestaven tak, aby demonstroval reálnou situaci (Obrázek 25).



Obrázek 25 – Příklad „*Města u řeky*“

Nápověda v tomto příkladu zní: „*Zkuste nejprve řeku zúžit (posunutím modrého bodu) tak, aby byla reprezentována přímkou. Jak minimalizovat cestu mezi městy?*“ Modře označeným bodem lze volně pohybovat od jižního břehu až po město A. Samotnými městy lze rovněž pohybovat, podmíněným formátováním je zajištěno, že je město B umístěno správně na jižním břehu. Pokud je město umístěno v nesouladu se zadáním, bod B zčervená a objeví se text „*Město B se nachází buď v řece nebo na stejném břehu, jako leží město A.*“ V takovém případě se ani nezobrazí konstrukce, která by nedávala smysl.

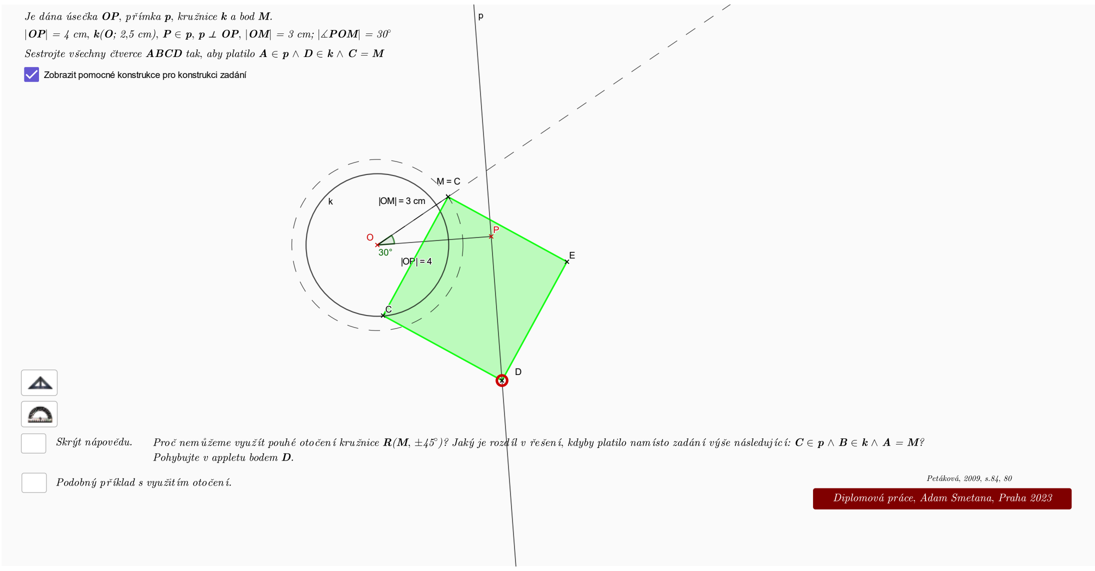
4.4. Neřešené příklady

Vedle řady řešených příkladů je součástí této elektronické knihy soubor neřešených příkladů. Neřešených úloh je uvedeno 13, z toho dvě jsou vlastní tvorby, zbylé jsou převzaté. Pokud se nejedná o vlastní tvorbu, je zdroj vždy uveden v pravé dolní části appletu.

4.4.1. Příklad „Sestrojte čtverec takový…“

Zadání: *„Je dána úsečky OP ($|OP| = 4\ cm$), kružnice $k(O, 2{,}5\ cm)$, bod P takový, že $P \in p, p \perp OP, |OM| = 3\ cm$; $|\measuredangle POM| = 30°$. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo $A \in p \wedge D \in k \wedge C = M$.“* (Petáková, 1993).

Nápověda tohoto příkladu zcela nahrazuje rozbor úlohy. Zobrazuje čtverec takový, který splňuje dvě ze tří podmínek: $A \in p \wedge C = M$. S bodem na přímce p lze pohybovat, a tak odhalit všechna řešení úlohy. Otázka „*Proč nemůžeme použít prosté otočení o úhel* $\pm 45°$ *?*“ má řešiteli napovědět, jak dále postupovat (Obrázek 26).



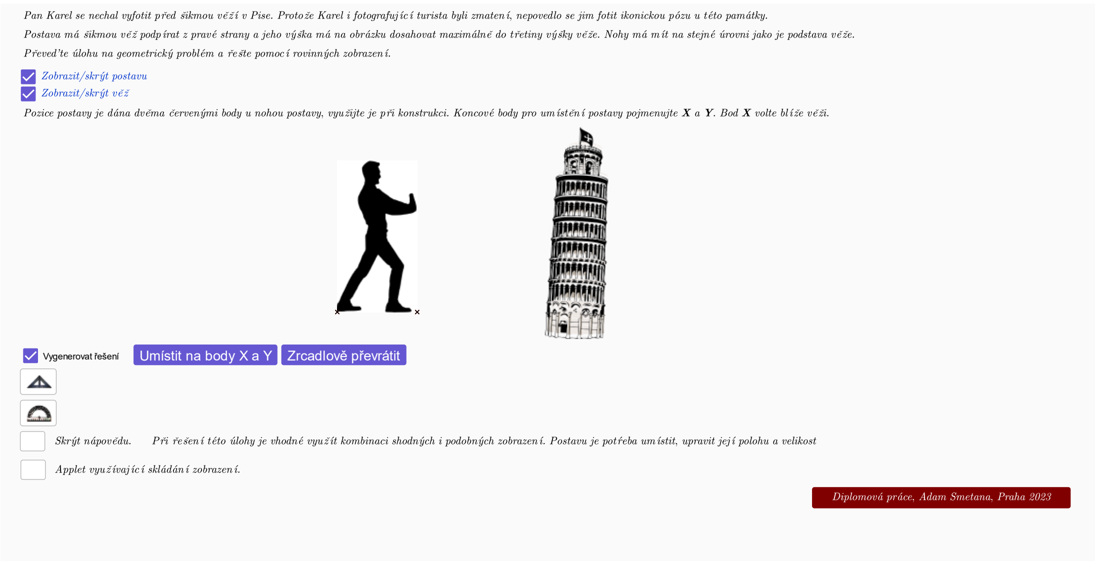
Obrázek 26 – Příklad „*Sestrojte čtverec takový* ...“

4.4.2. Příklad „Šikmá věž v Pise“

Zadání stručně: Složte takové zobrazení, aby postava „podpírala“ věž z pravé strany a dosahovala maximálně do třetiny výšky věže (pozn. kompletní zadání je součástí appletu). Na obrázku 27 je znázorněna výchozí poloha postavy.

Úloha je motivována programy na úpravu grafiky, kdy do obrázku uživatel vloží nějaký objekt a pak pomocí nástrojů (transformací) v programu objekt umístí na své místo.

Nápověda směřuje na applet skládání zobrazení. V appletu je zakomponován pomocí skriptů generátor řešení. Řešitel je vyzván úlohu řešit pomocí zobrazení bodů definující původní obrázek nebo pomocí bodů, které si uživatel sám vytvoří. Koncové body, co určují řešení je potřeba přejmenovat na X a Y a stisknout tlačítka pro generování řešení. Pokud byl postup správný, osoba se skutečně přesune na správnou stranu věže a věž podepře z pravé strany.



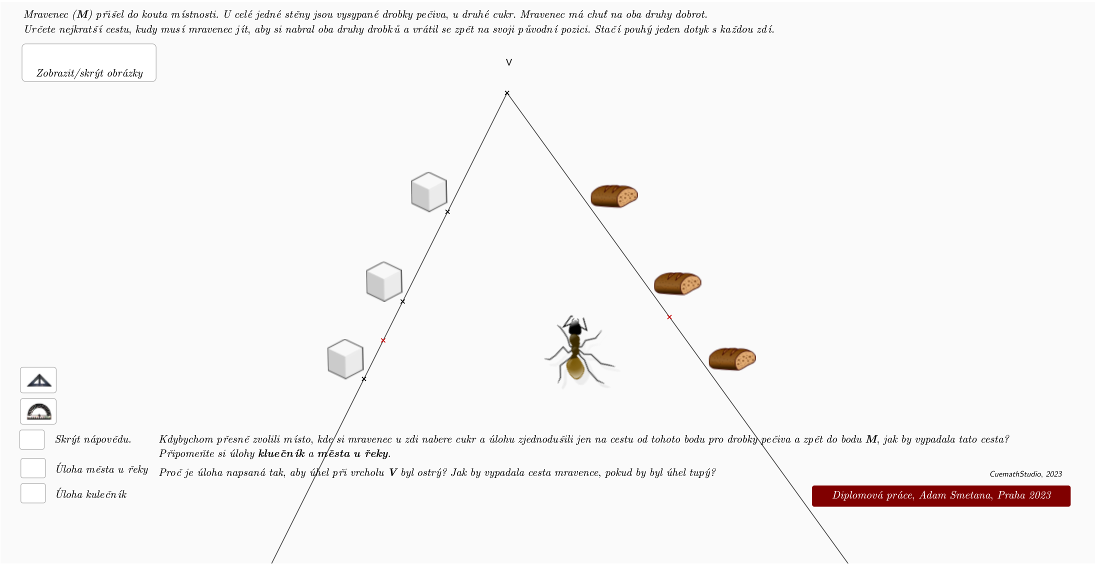
Obrázek 27 – Příklad „*Šikmá věž v Pise*“

4.4.1. Příklad „Mravenec“

Zadání: *„Mravenec přišel do kouta místnosti. U celé jedné stěny jsou vysypané drobky pečiva, u druhé cukr. Mravenec má chuť na oba druhy dobrot. Určete nejkratší cestu, kudy musí mravenec jít, aby si nabral oba druhy drobků a vrátil se zpět na svoji původní pozici. Stačí dotyk se zdí v jednom bodě.*“ (CueMathStudio, 2023).

Nápověda úlohy směřuje čtenáře na řešené úlohy „*Kulečník*“ a „*Města u řeky*“. Dále je řešitel dotazován, proč je applet sestrojen tak, aby byl úhel při vrcholu V (rohu místnosti) ostrý? Jak by vypadala cesta mravence, pokud by byl úhel tupý?

Se samotným mravencem i se stěnami lze v appletu v omezené míře pohybovat. Na obrázku 28 je rovněž zobrazena výchozí poloha příkladu.



Obrázek 28 – Příklad „*Mravenec*“

Neřešené úlohy byly záměrně vybrány podle obtížnosti nebo netradičního zadání. Uvedené nápovědy jsou napsány tak, aby studenta přiblížily na správnou cestu k řešení. U obtížnějších úloh je nápověda rozvinutá a může poskytovat celé jedno řešení úlohy. Vždy je ale doplněna otázkami na zamyšlení, aby nedošlo k samotnému bezmyšlenkovitému řešení úloh. Dynamické prostředí disponuje tou výhodou, že zadání lze přibližně přesně sestrojit pomocí nabídnutých nástrojů, rozbor úlohy je pak mnohem přehlednější, než je při rozboru úlohy rukou na papír.

5. Závěr

Tato práce si kladla za cíl zmapovat současný stav výuky geometrických zobrazení na českých středních školách, zjistit, jaké učebnice, sbírky, elektronické publikace a webové stránky dnes učitelé využívají a z těchto získaných dat sestavit ucelený učební materiál v dynamickém prostředí určený na mobilní telefony, tablety nebo počítače. Materiálů pro inspiraci se skrze dotazník sešlo velké množství, i proto bylo časově náročné vybrat vhodné úlohy pro řešené a neřešené příklady, které by vybraná zobrazení reprezentovaly.

Z nabídky software a online webových aplikací nakonec vyšla nejpřízněji GeoGebra. Tento program předčil své konkurenty především obrovskou variabilitou, integrovanými GeoGebra skripty, skripty Java a možností podmiňovat zobrazení jednotlivých částí appletů.

Hlavní část a hlavní výstup této práce, online elektronická učebnice a sbírka věnující se geometrickým zobrazením, vznikala dlouhou dobu, především kvůli optimalizaci počtu appletů, které elektronická kniha obsahuje. Cílem nebylo představit velké množství exaktně zadaných příkladů s pevně daný řešením. Právě variabilita zadání u vybraných příkladů zapříčinila, že krokovaná konstrukce začala brzy být velmi nepřehledná. Bylo tedy nutné vytvořit vlastní skryté posuvníky krokované konstrukce a jednotlivé kroky naformátovat tak, aby konstrukce byla ve všech konstelacích zadání přehledná a plynulá. Rovněž applety týkající se přehledů zobrazení bylo nutné rozdělit na dvě různé nákresny, protože prostorové zobrazení GeoGebry nenabízí možnost zobrazit texty nebo tlačítka. Takových nečekaných situací, které bylo potřeba okamžitě řešit, se objevilo při tvorbě této sbírky celá řada.

Jednotlivé applety s řešenými a neřešenými příklady byly sestaveny tak, aby i student, který v geometrických zobrazeních zcela neexceluje, byl schopen se přes nápovědu, případně použitím odkazů, dobrat k výsledkům.

Celá elektronická publikace je sdružena do tzv. GeoGebra knihy, která umožňuje kromě sdružení appletů vkládat texty nebo odkazy. Tento rámec a systém odkazů mezi applety velmi pomohl přehlednosti této části práce. Celkový počet appletů v knize je 37.

Finální podoba GeoGebra knihy je kombinací elektronické učebnice a sbírky a byla koncipována tak, aby ji mohli využívat studenti k samostudiu nebo učitelé k zadávání samostatné práce či přímo ve výuce geometrie na středních školách.

Seznam literatury

BRŮŽKOVÁ, Nikola. Návody k aplikaci GeoGebra Classic. Online. GeoGebra. Dostupné z: https://www.geogebra.org/material/show/id/zwbyag58. [cit. 2023-12-30].

BUŠEK, Ivan. Řešené maturitní úlohy z matematiky. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).

BYDŽOVSKÝ, Bohumil, František VYČICHLO a Jan VOJTĚCH. Sbírka úloh z matematiky pro IV.-VIII. třídy středních škol. 4. vydání. V Praze: Jednota československých matematiků a fysiků, 1935. Učebnice pro střední školy, vydávané Jednotou československých matematiků a fysiků v Praze.

CueMathStudio. In: Youtube [online]. 2019. Dostupné z: https://www.youtube.com/@CuemathStudio. Kanál uživatele Cuemath. [cit. 2023-12-31]

Česká Školní Inspekce (ČŠI). Distanční vzdělávání v základních a středních školách: tematická zpráva [online]. Praha, 2021 [cit. 2023-07-07]. Dostupné z: https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/2021_p%c5%99%c3%adlohy/Dokumenty/TZ_Distancni-vzdelavani-v-ZS-a-SS_brezen-2021.pdf

DIKOVIĆ, Ľubica. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. 2009. ComSIS, 6(2), 191–203.

HARANT, Michal a Oldřich LANTA. Deskriptivní geometrie část I. pro II. ročník SVVŠ. 2. vyd. Praha: SPN, 1966.

CHABADA, Tomáš. In: Youtube [online]. 2011. Dostupné z: https://www.youtube.com/@TomasChabada. Kanál uživatele Tomáš Chabada. [cit. 2023-12-29]

CHLÁDEK, Dominik. Isibalo – matematika – planimetrie. Online. 2023. Dostupné z: https://isibalo.com/matematika/planimetri. [cit. 2023-12-31].

JIRÁSEK, František. Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Učebnice pro střední školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-04-21341-3.

Khan Academy. [online]. 2023. Dostupné z http://www.khanacademy.org. [cit. 2023-12-27]

KORBEL, Václav, Daniel PROKOP a Jiří MÜNICH. Dopady pandemie covid-19 na žáky: report [online]. Třetí report. Praha: PAQ Research and Kalibro, 2021 [cit.

2023-07-07]. Dostupné z: https://88760faa-4149-467c-8d6a-46e154cd4c14.usrfiles.com/ugd/88760f_d4147d030d4b4e788d228ac679d9a702.pdf

KRYNICKÝ, Martin. Realistické učebnice matematiky a fyziky [online]. 2010. [cit. 2023-12-29]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=84

KRYNICKÝ, Martin. Realisticky. Online. 2010. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/. [cit. 2023-12-31].

MACHOVCOVÁ, Lucie. Výuka rovinné geometrie na středních školách. Diplomová práce, vedoucí Jaroslav Zhouf. Praha: UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE, Pedagogická fakulta, 2014.

MEDEK, Václav a Ondrej ŠEDIVÝ. Deskriptivní geometrie pro gymnázia. Praha: SPN, 1987. Učebnice pro střední školy.

MOLNÁR, Josef. Matematika pro střední školy. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2022. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-474-2.

Národní ústav pro vzdělávání (NÚV). Střední vzdělávání. [online]. [cit. 2021-6-7]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/t/stredni-vzdelavani

ODVÁRKO, Oldřich, Miloš BOŽEK, Marta RYŠÁNKOVÁ a Jozef SMIDA Matematika pro 2. ročník gymnázií. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Učebnice pro střední školy.

PETÁKOVÁ, Jindra. Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 7. vyd. Praha: Prometheus, 1991. ISBN 80-7196-196-5.

POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia – Planimetrie. Praha: Prometheus, 1993. ISBN 978-80-7196-174-1.

POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia – Stereometrie. 2. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-079-9.

SMETANA, Adam. Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice. Online. GeoGebra. 2024. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/nmuxdedy. [cit. 2024-01-07]. Elektronická část diplomové práce.

SMIDA, Jozef a Jaroslav ŠEDIVÝ Matematika pro 1. ročník gymnázií. 2., upr.vyd. Praha: SPN, 1984. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-04-24433-5.

SMIDA, Jozef a Jaroslav ŠEDIVÝ. Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií. 3. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985.

STRÁNSKÝ, Jakub a kol. Techambition. [online]. 2012. Dostupné z: https://techambition.com/. [cit. 2023-12-31].

STRNAD, Alois. Geometrie pro vyšší školy reálné. 3. vyd., dle nov. osnov uprav. a úloh. ku cvičení rozmn. Praha: Kytka, 1903.

Školní vzdělávací program [online]. Aktualizováno 2020. Praha: Gymnázium Jaroslava Heyrovského, 2009 [cit. 2023-07-12]. Dostupné z: https://www.gymjh.cz/wp/wp-content/uploads/2020/10/SVP-GJH_2020_09_01.pdf

Školní vzdělávací program [online]. Aktualizováno pro rok 2022/23. Kladno: Gymnázium Kladno, 2007 [cit. 2023-07-12]. Dostupné z: http://www.gymostrov.cz/gymostrov/userfiles/%C5%A0VP%20-%20NG%20-%20od%201_9_%202022.pdf

Školní vzdělávací program [online]. Verze 2016/17. Kladno: Gymnázium Kladno, 2016 [cit. 2023-07-12]. Dostupné z: http://www.gymnasiumkladno.cz/soubory/svp_2_v2016.pdf

TUPÝ, Jan. Vznik RVP a ŠVP: Podkladová studie [online]. 2019, 26 [cit. 2021-6-7]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/3645/

VACULOVÁ, Illona, Zpráva o dopadech pandemie covid-19 na vzdělávání. Praha: MŠMT, 2021. Dostupné také z: https://www.vlada.cz/cz/urad-vlady/poskytovani-informaci/poskytnute-informace-na-zadost/informace-tykajici-se-poskytnuti-materialu-192847/

VALÁŠEK, Marek. In: Youtube [online]. 2012. Dostupné z: https://www.youtube.com/@marekvalasek7251. Kanál uživatele Marek Valášek. [cit. 2023-12-29]

WIMMER, Jennifer J., Daniel SIEBERT, Roni Jo DRAPER, Michael MANDERINO a Jill CASTEK. Digital Mathematics Literacies. Journal of Adolescent & Adult Literacy [online]. 2017, 60(5), 577-580 [cit. 2023-07-07]. ISSN 10813004. Dostupné z: doi:10.1002/jaal.628

ZEMAN, Eduard. Historie minulých vlád: Koncepce vzdělávání a rozvoje vzdělávací soustavy v České republice [online]. 1999 [cit. 2021-6-7]. Dostupné z: https://www.vlada.cz/cz/clenove-vlady/historie-minulych-vlad/!-koncepce-vzdelavania-rozvoje-vzdelavaci-soustavy-v-cr-2094/

ŽILINSKIENĖ, Inga a DEMIRBILEK, Muhammet. Use of GeoGebra in Primary Math Education in Lithuania: An Exploratory Study from Teachers' Perspective. Online. Informatics in Education. 2015, roč. 14, č. 1, s. 127-142. ISSN 1648-5831. Dostupné z: https://doi.org/10.15388/infedu.2015.08. [cit. 2023-12-30].

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

Seznam použitých zkratek

ČŠI	Česká školní inspekce
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP	rámcový vzdělávací program
ŠVP	školní vzdělávací program
VRP	volné rovnoběžné promítání

Příloha č. 1 – Dotazníkové šetření

Vážení středoškolští učitelé matematiky,
jmenuji se Adam Smetana a studuji v závěrečném ročníku učitelství matematiky na MFF UK. Nyní mám v rámci své diplomové práce za úkol zmapovat náplň, rozsah a využívané publikace pro výuku zobrazení.

Dotazník je určen pouze středoškolským učitelům matematiky. Pokud do této skupiny nepatříte, dotazník, prosím, nevyplňujte.

Prosím o stručné zodpovězení níže uvedených otázek. Celý dotazník má 8 otázek a zabere vám zhruba 3 minuty.

Děkuji. Adam Smetana

1. Na jakém typu školy vyučujete? (výběr jedné z možností)
    a. Víceleté gymnázium
    b. Čtyřleté gymnázium
    c. Střední škola zakončená maturitou
    d. Střední škola – studium bez maturity
    e. Obchodní akademie
    f. Střední odborné učiliště
    g. Jiný typ školy – doplňte
2. Jaká geometrická zobrazení vyučujete? (výběr jedné nebo více možností)
    a. Osová souměrnost
    b. Středová souměrnost
    c. Posunutí
    d. Otočení
    e. Skládání rovinných zobrazení
    f. Stejnolehlost
    g. Zobrazení v analytické geometrii
    h. Zobrazení v prostoru
    i. Jiná nebo žádná – doplňte
3. Které zdroje využíváte k výuce zobrazení? (výběr jedné nebo více možností)

a. Tištěné učebnice a sbírky
b. Online weby a elektronické publikace
c. Vytvářím si vlastní podklady
d. Nepoužívám žádné podklady
e. Jiné – doplňte

4. K výuce zobrazení v rovině využívám tyto učebnice a sbírky: (odpověď seznamem ISBN kódů, případně názvem díla a autorem)
5. Na výuku zobrazení v rovině využívám tyto online weby a elektronické publikace: (odpověď názvem webu nebo odkazem)
6. V jakých ročnících SŠ vyučujete shodná a podobná zobrazení v rovině a jejich skládání? Ke každému ročníku napište přibližný počet hodin. (odpověď krátkým textem)
7. V období distanční výuky jste se věnovali geometrii… (výběr jedné odpovědi)
   a. Delší dobu než při běžné prezenční výuce
   b. Dobu srovnatelnou s prezenční výukou
   c. Kratší dobu než při prezenční výuce
   d. V době distanční výuky jsme geometrii neměli probírat
   e. Jiná odpověď – rozveďte
8. Probíráte se studenty i zobrazení v prostoru? (výběr jedné odpovědi)
   a. Ano, probíráme v rámci povinné matematiky
   b. Ano, ale pouze na volitelném semináři
   c. Ne, neprobíráme

Děkuji za váš čas.

Odpovědi z tohoto krátkého dotazníku mi pomohou lépe se zorientovat ve výuce zobrazení a přesněji vystihnout potřeby a požadavky pro pozdější tvorbu online učebnice v dynamickém prostředí programu Geogebra.

Pokud byste měli zájem o zaslání odkazu online učebnice, napište mi na mail váš kontakt a já vám ho po jejím dokončení zašlu.

Adam Smetana