MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Aneta Tarabíková

Webová aplikace pro výuku množin bodů dané vlastnosti

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program:	Učitelství fyziky pro střední školy
Studijní obor:	Učitelství matematiky a fyziky pro střední školy

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V . . . . dne . . . .

Podpis autora

Ráda bych poděkovala vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za zapůjčení literatury, didaktické rady a vřelý přístup při tvorbě webových stránek.

Název práce: Webová aplikace pro výuku množin bodů dané vlastnosti

Autor: Aneta Tarabíková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá množinami bodů dané vlastnosti. Práce má formu webových stránek, které by měly pomoci při výuce matematiky na základní a zejména střední škole. Součástí diplomové práce je připomenutí množin bodů dané vlastnosti probíraných ve školské matematice. Kromě toho pokrývá rozšiřující téma množiny bodů a kuželosečky definované pomocí středů kružnic dané vlastnosti. Webové stránky jsou doplněny interaktivními prvky, jako jsou například applety a krokované konstrukční úlohy, které napomáhají pochopení probírané látky.

Klíčová slova: množiny bodů, výuka matematiky, webová aplikace, Thaletova kružnice, ekvidistanty přímky a kružnice, kuželosečky

Title: Web application for teaching loci of points

Author: Aneta Tarabíková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis discusses loci of points. The thesis is constructed as a website which should assist mathematic education in primary schools and especially high schools. The thesis revises loci of points, which is taught in schools. Apart from that, it covers the extensive topic of loci of points and conic sections defined with the help of centers of circles with specified characteristics. The website is enhanced by interactive elements, such as applets and step-by-step exercises, which help understand the topic of discussion.

Keywords: loci of points, teaching mathematics, web application, Thales' circle, conic sections

Obsah

Úvod

Tento vzdělávací materiál, který byl vypracován ve dvou podobách - webové stránky a tištěná verze, vznikl jako diplomová práce na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v letech 2023-2024. Cílem diplomové práce je podpořit a doplnit výuku geometrie na základní a střední škole. Práce se věnuje tématu *Množiny bodů dané vlastnosti*, kterému nebývá ve školské matematice věnován dostatek pozornosti a času.

V první kapitole *Základní pojmy* si nejdříve definujeme *množiny bodů dané vlastnosti* obecně a ukážeme si, jak s nimi pracovat. Dále připomeneme několik základních pojmů a poznatků z učiva probíraného na základní škole, které se používají při dokazování vět a tvrzení.

Druhá část práce se zabývá množinami bodů dané vlastnosti, které by žáci měli znát ze základní školy, jako jsou například *kružnice*, *osa úsečky*, *osa úhlu* a další. Na začátku každé podkapitoly jednotlivé množiny nejprve zkoumáme pomocí appletů a následně zformulujeme hypotézu, o jaký geometrický útvar se jedná. Poté tuto hypotézu dokážeme.

Třetí kapitola je rozdělena do dvou částí. Část *Množiny bodů dané vlastnosti definované pomocí středů kružnic* se zabývá učivem, které se do výuky matematiky na středních školách téměř nezařazuje. Množiny bodů dané vlastnosti lze totiž zkoumat také pomocí zadaného útvaru a kružnic, které se tohoto útvaru dotýkají, nebo jím prochází. Středy všech těchto kružnic potom tvoří námi zkoumanou množinu. Druhá část kapitoly se naopak věnuje tématu na školách naprosto běžnému - hledání množiny, ze které je zadaná úsečka vidět pod daným úhlem.

V poslední kapitole *Kuželosečky jako množiny středů kružnic* vycházíme z předpokladu, že studenti již o kuželosečkách slyšeli. Nejprve opět připomeneme klasické definice kuželoseček probírané na střední škole a tyto znalosti dále rozšíříme o definice kuželoseček pomocí množin středů kružnic.

Webové stránky jsou doplněny o applety, které napomáhají hlubšímu porozumění učivu. Žáci mají díky appletům možnost nové učivo samostatně zkoumat a až poté jsou nové poznatky korektně formulovány. Applety byly navíc vytvořeny v programu GeoGebra, který je často na školách využíván, proto by s ním někteří žáci mohli být již seznámeni.

Učební text byl tvořen tak, aby uvedené definice a značení byly co nejvíce v souladu s nejčastějšími středoškolskými či základoškolskými učebnicemi, a to zejména [4], [5] a [6]. Při tvorbě textu byla také studována literatura [7], [8], [9], [10] a [11].

Tištěná verze se od webové stránky liší v několika bodech.

- v úvodu práce je popsáno ovládání stránek
- applety jsou převedeny do formy obrázků a zobrazeny v rámečku, aby byly odlišeny od běžných obrázků
- definice, věty a tvrzení nejsou barevně ohraničené
- text zobrazený po kliknutí tlačítka je ohraničen rámečkem
- není zahrnut rejstřík

Webová stránka je dočasně dostupná na adrese https://www.karlin.mff.cuni.cz/~tarabikova/mnozinybodu/. Po obhajobě diplomové práce budou webové stránky zveřejněny na *Portálu středoškolské matematiky* Katedry didaktiky matematiky MFF UK.

Seznam použitých znaků

M, N	množina M, N
X, Y	bod X, Y
AB	úsečka s krajními body A, B
$\|AB\|$	délka úsečky AB, vzdálenost bodů A, B
$\mapsto AB$	polopřímka AB s počátečním bodem A
ΔABC	trojúhelník s vrcholy A, B, C
E_2	eukleidovská rovina
$\angle AVB$	úhel s vrcholem V a rameny $\mapsto VA$, $\mapsto VB$
α, β	úhel α, β
$\in$	býti prvkem, náležet
$k(S, r)$	kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$P \in p \cap q$	bod P je průsečíkem přímek p a q

1. Základní pojmy

1.1 Množiny bodů dané vlastnosti

Než se pustíme do zkoumání jednotlivých případů množin bodů v rovině, rozebereme si nejdříve, co to množiny bodů dané vlastnosti jsou.

Definice 1. *Množinou bodů M dané vlastnosti rozumíme množinu splňující následující vlastnosti:*

- *1. každý bod množiny M má danou vlastnost,*
- *2. každý bod, který má danou vlastnost, je bodem množiny M.*

Poznámka Přestože v definici neuvádíme explicitně „množina **všech** bodů", z druhé odrážky definice víme, že hledáme „každý bod", který danou vlastnost splňuje.
I když to tedy v této práci nebudeme vždy explicitně uvádět, vždy budeme zkoumat množiny všech bodů dané vlastnosti.

Nejjednodušším příkladem množiny bodů dané vlastnosti v rovině je kružnice, kterou definujeme jako množinu bodů, které mají od daného bodu (středu) stejnou vzdálenost r. V definici je tedy uvedena vlastnost, kterou musí **všechny** body splňovat a zároveň název geometrického útvaru, který danou vlastnost splňuje. Tímto způsobem budeme definovat všechny množiny bodů, se kterými budeme v následujících kapitolách pracovat.

Pro každou hledanou množinu bodů musíme dokázat, že jsou splněny obě podmínky, které jsou uvedeny výše v definici množiny bodů M dané vlastnosti. Například u kružnice tedy musíme dokázat, že

- 1. všechny body, které leží na kružnici, mají od jejího středu stejnou vzdálenost r,
- 2. všechny body, které mají od středu stejnou vzdálenost r, jsou body kružnice.

Druhá podmínka se obvykle dokazuje sporem, lze ji tedy nahradit tvrzením

- 2. každý bod, který neleží na kružnici, nemá od středu vzdálenost r.

Poznámka

- Nutno si uvědomit, že jelikož provádíme důkaz, že nalezená množina (resp. geometrický útvar) splňuje dané vlastnosti, měli bychom přísně vzato všechny uvedené definice nazývat větami. Pro naše účely je však důležité, který geometrický útvar dané množině odpovídá a jak ho nazýváme, proto i nadále budeme užívat pojmu „definice“.

- Množiny bodů dané vlastnosti lze zkoumat i v prostoru. Pro účely základní a střední školy se však omezíme na množiny bodů v eukleidovské rovině, kterou značíme E_2. Spojení „v rovině“ proto není nutné explicitně uvádět, pokud je to zřejmé.

- Často se chybně uvádí pojem množina bodů **daných vlastností**. Danou vlastnost má množina pouze jednu, proto je množné číslo neadekvátní.

Na základní a střední škole se obvykle probírají množiny bodů dané vlastnosti definované pomocí vzdálenosti, ale lze se setkat i s množinami, které jsou definované pomocí středů kružnic s danou vlastností. Tomuto tématu je věnována samostatná kapitola 3.1.

1.2 Vzdálenost geometrických útvarů

Pro lepší porozumění dalšímu textu si zopakujeme vybrané důležité pojmy. Nejjednodušší pojem, se kterým pracujeme spíše intuitivně, je *vzdálenost dvou bodů* A, B, kterou rozumíme délku (velikost) úsečky AB, symbolicky zapisujeme $|AB|$. (Vzdálenost dvou totožných bodů je potom 0.)

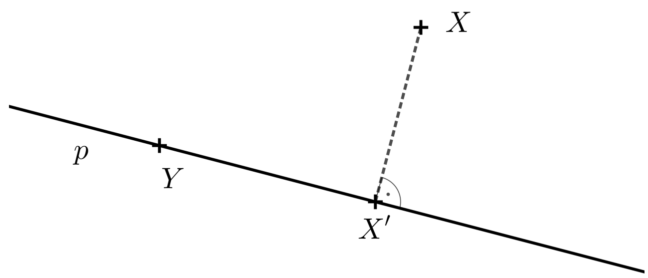
Vzdáleností dalších útvarů v rovině je potom nejmenší ze všech vzdáleností bodů A a B, kde bod A je libovolným bodem jednoho útvaru a bod B libovolným bodem druhého útvaru. Jinými slovy můžeme říci, že vzdálenost dvou útvarů je velikost nejkratší úsečky, která tato dva útvary spojuje. Z těchto dvou poznatků lze odvodit konkrétní případy.

Pomocí vzdálenosti dvou bodů můžeme zavést *vzdálenost bodu od přímky*, značíme $|pX|$. Nejkratší vzdálenost bodu X od přímky p je rovna vzdálenosti bodu X a jeho kolmého průmětu X' na přímku p, viz *obr.* 1.1.

Rozšiřující učivo: Fakt, že nejkratší vzdálenost bodu X od přímky p je rovna vzdálenosti bodu X a jeho kolmého průmětu X' na přímku p, plyne z Pýthagorovy věty. Zvolíme-li na přímce p libovolný bod Y různý od bodu X', vznikne pravoúhlý trojúhelník XYX' s pravým úhlem u vrcholu X'. Platí tedy

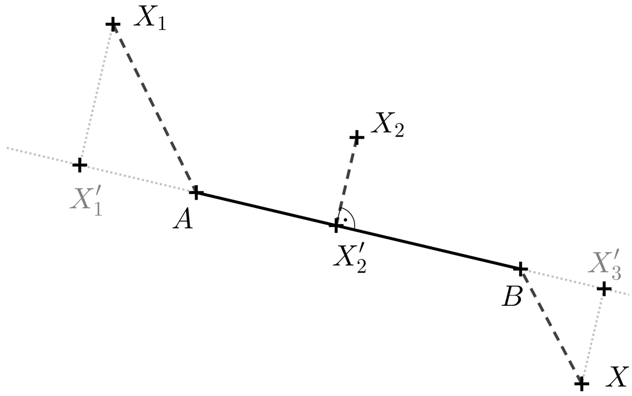
$$|XY|^2 = |XX'|^2 + |YX'|^2.$$

Odvěsna XX' je proto vždy kratší než přepona XY.



Obrázek 1.1: Vzdálenost bodu od přímky

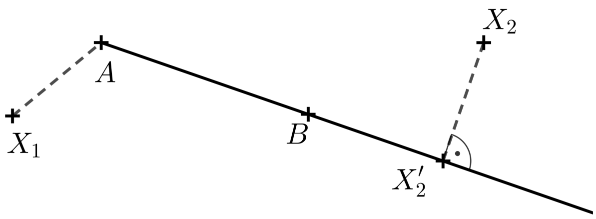
Dalším pojmem odvozeným ze vzdálenosti bodu od přímky je *vzdálenost bodu od úsečky*, značíme $|AB, X|$. Mějme bod X a úsečku AB. Pokud bychom postupovali stejně jako u vzdálenosti bodu od přímky, kolmý průmět bodu X by nemusel vždy ležet na úsečce AB, ale na přímce AB, viz *obr.* 1.2



Obrázek 1.2: Vzdálenost bodu od úsečky

Na *obr.* 1.2 vidíme, že bod X_1' je kolmý průmět bodu X_1 na přímku AB. Bod X_1' ale neleží na úsečce AB, proto vzdálenost úsečky AB a bodu X_1 nemůže být délka úsečky X_1X_1'. Vzdálenost dvou útvarů je délka nejkratší úsečky spojující dva útvary, proto vzdálenost bodu X_1 od úsečky AB musí být jedině délka úsečky X_1A. Obdobně vzdálenost bodu X_3 a úsečky AB je délka úsečky X_3B a vzdálenost bodu X_2 od úsečky AB je potom vzdálenost bodu X_2 a jeho kolmého průmětu X_2'.

Nyní nám zbývá určit *vzdálenost bodu od polopřímky*, značíme $|\mapsto AB, X|$. Na *obr.* 1.3 je zobrazena polopřímka AB a body X_1 a X_2. Obdobně jako u úsečky je vzdálenost bodu X_1 od polopřímky AB rovna délce úsečky X_1A a vzdálenost bodu X_2 od polopřímky AB je vzdálenost bodu X_2 a jeho kolmého průmětu X_2' na polopřímku AB.



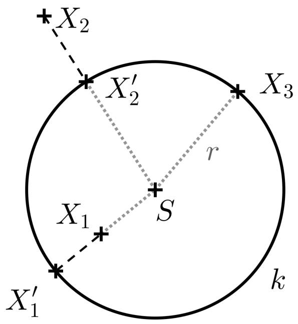
Obrázek 1.3: Vzdálenost bodu od polopřímky

Poslední pojem, který si rozebereme, je *vzdálenost bodu od kružnice*. Na *obr.* 1.4 je zobrazena kružnice k se středem S a poloměrem r a body X_1, X_2 a X_3.

Bod X_1 je vnitřním bodem kružnice k. Nejkratší úsečka spojující kružnici k a bod X_1 musí ležet na poloměru kružnice k. Průsečík uvedeného poloměru a kružnice k je na *obr.* 1.4 označen X_1'. Vzdálenost bodu X_1 od kružnice k je potom délka úsečky X_1X_1'.

Bod X_2 je vnějším bodem kružnice k. Průsečík úsečky X_2S s kružnicí k označíme X_2'. Z obrázku 1.4 vidíme, že vzdálenost bodu X_2 od kružnice k je rovna délce úsečky X_2X_2'.

Obecně lze říci, že vzdálenost bodu od kružnice je rovna absolutní hodnotě rozdílu délky úsečky XS a poloměru kružnice r, tj. $||XS| - r|$. Tento vztah platí



Obrázek 1.4: Vzdálenost bodu od kružnice

i pro bod X_3, který je bodem kružnice k.

Dále bychom mohli rozebrat vzdálenosti dalších útvarů (např. vzdálenost přímky od kružnice), všechny však vychází z výše uvedených pojmů. Stačí pouze nalézt nejkratší úsečku spojující dané útvary (např. v případě přímky a kružnice by se jednalo o kolmici k přímce procházející středem kružnice).

1.3 Shodnost a podobnost trojúhelníků

V některých důkazech v dalších kapitolách budeme pracovat s větami o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. Dále uvádíme přehled těchto vět v souladu s [1].

U jednotlivých vět jsou v závorce uvedeny zkratky složené z písmen s - strana, S - delší strana, u - úhel. Pomocí těchto zkratek se v dalším textu budeme odkazovat na dané věty o shodnosti nebo podobnosti.

1.3.1 Shodnost trojúhelníků

Věta 1. *(sss) Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délkách všech tří stran.*

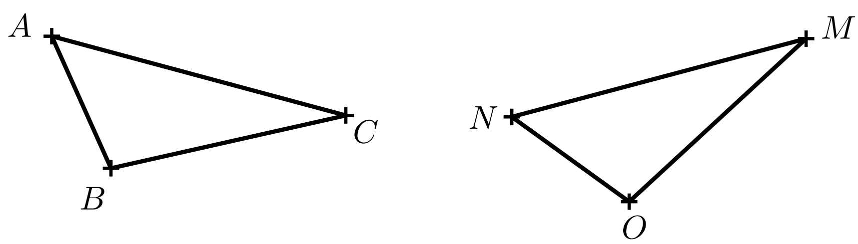
Věta 2. *(sus) Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délkách dvou stran a velikosti vnitřního úhlu, který tyto strany svírají.*

Věta 3. *(usu) Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délce jedné strany a velikostech vnitřních úhlů k této straně přilehlých.*

Věta 4. *(Ssu) Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v délkách dvou stran a velikosti vnitřního úhlu proti delší z těchto stran.*

Shodnost trojúhelníků ABC a MNO zapisujeme $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

Mějme dva shodné trojúhelníky ABC a MNO, viz *obr.* 1.5. Jelikož jsou trojúhelníky shodné, rovnají se délky stran AB a NO, BC a MO, AC a MN. Tyto rovnosti musíme zohlednit v zápisu shodnosti, shodnost tedy zapíšeme následujícím způsobem: $\Delta ABC \cong \Delta NOM$.



Obrázek 1.5: Trojúhelníky ABC a MNO

Dále poznamenejme, že pokud jsou dva trojúhelníky shodné dle jedné z uvedených vět, jsou shodné i podle vět zbývajících.

1.3.2 Podobnost trojúhelníků

Dle [1] zní věty o podobnosti trojúhelníku následujícím způsobem.

Věta 5. *(sss) Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li shodné poměry délek všech tří dvojic odpovídajících si stran.*

Věta 6. *(sus) Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li shodné poměry délek dvou dvojic stran a mají-li shodnou velikost vnitřního úhlu, který tyto strany svírají.*

Věta 7. *(uu) Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve velikostech dvou vnitřních úhlů.*

Věta 8. *(Ssu) Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li shodné poměry délek dvou dvojic stran a mají-li shodnou velikost vnitřního úhlu proti delší z těchto stran.*

Podobnost trojúhelníků ABC a MNO zapisujeme $\Delta ABC \sim \Delta MNO$; v zápisu podobnosti musíme zohlednit pořadí odpovídajících si stran.

Obdobně jako u vět o shodnosti platí, že pokud jsou dva trojúhelníky podobné dle jedné z uvedených vět, jsou podobné i podle vět zbývajících.

Ve větách o podobnosti je zmíněn poměr délek stran. Platí tedy, že pokud jsou trojúhelníky ABC a MNO podobné, délka strany AB je k-násobkem délky strany MN, kde k je kladné číslo. Symbolicky píšeme $|AB| = k \cdot |MN|$. Stejně tak musí platit, že $|BC| = k \cdot |NO|$ a $|CA| = k \cdot |OM|$.

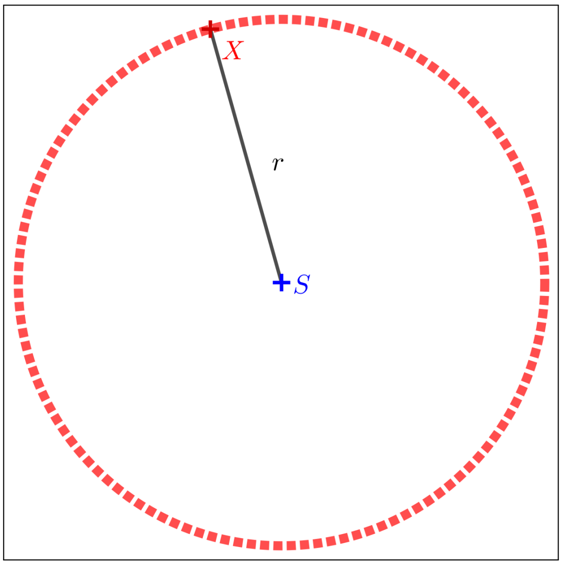
2. Připomenutí množin bodů dané vlastnosti ze základní školy

2.1 Kružnice a kruh

Nejjednodušší příklad množiny bodů dané vlastnosti je *kružnice*. Naším úkolem tedy bude si připomenout, jak vzniká množina bodů, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost.

Příklad 2.1.1

V appletu na *obr.* 2.1 je zobrazen bod S a bod X, který je od bodu S vzdálen o kladnou délku r. Pohybujte bodem X nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu. Zkoumejte, jaké vlastnosti má výsledná množina vykreslená bodem X.



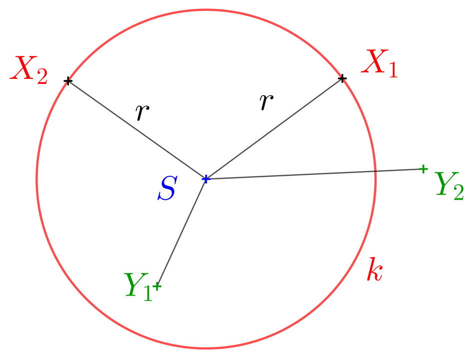
Obrázek 2.1: Applet - vykreslení kružnice

Z appletu 2.1 vidíme, že množinou bodů dané vlastnosti je kružnice. Toto pozorování nyní dokážeme.

Každý bod, který do množiny patří, má od bodu S stejnou vzdálenost, kterou označíme r. Všechny ostatní body, tj. body, které mají od bodu S vzdálenost větší nebo menší, do množiny nepatří.

Jak je uvedeno v kapitole 1.1, musíme nyní dokázat následující dvě podmínky

1. všechny body, které do množiny patří, mají od bodu S stejnou vzdálenost r,
2. každý bod, který do množiny nepatří, nemá od bodu S vzdálenost r.



Obrázek 2.2: Kružnice - ilustrace ke zdůvodnění

1. Body X_1 a X_2 na *obr.* 2.2 mají od středu S vzdálenost r, patří tedy do dané množiny.

2. Oproti tomu bod Y_1 má od bodu S vzdálenost menší než r a bod Y_2 má od bodu S vzdálenost větší než r, proto ani jeden do množiny nepatří.

Pomocí výše ověřených vlastností tedy můžeme formulovat definici zkoumané množiny.

Definice 2. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost $r > 0$, se nazývá* ***kružnice** k **se středem** S **a poloměrem** r; značíme ji $k(S, r)$.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme $k = \{X \in E_2; |XS| = r\}$.

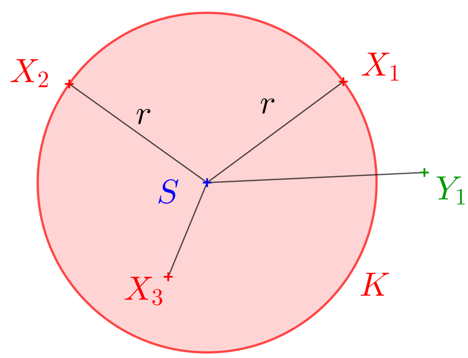
Nyní se zamyslíme nad bodem Y_1 na *obr.* 2.2. Jistě znáte množinu bodů, do které bod Y_1 patří, viz *obr.* 2.3.

Úloha k zamyšlení: O jakou množinu se jedná?

Řešení: Ano, skutečně se jedná o *kruh*.

Definice 3. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S vzdálenost stejnou nebo menší než $r > 0$, se nazývá* ***kruh** K **se středem** S **a poloměrem** r; značíme ho $K(S, r)$.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme $K = \{X \in E_2; |XS| \leq r\}$.

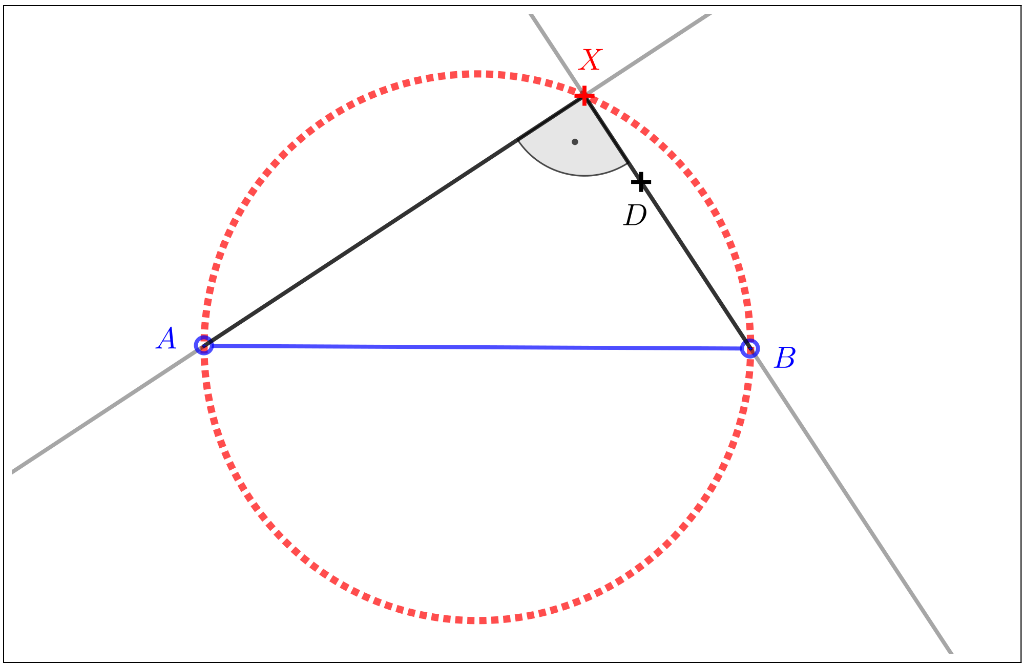


Obrázek 2.3: Kruh - ilustrace ke zdůvodnění

V příkladu 2.1.2 si připomeneme další významnou kružnici, kterou známe ze základní školy.

Příklad 2.1.2

V appletu na obr. 2.4 je zobrazen pravoúhlý ΔABX s pravým úhlem u vrcholu X. Pohybujte bodem D nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu a zjistěte, jakou množinu tvoří body X.



Obrázek 2.4: Applet - vykreslení Thaletovy kružnice

Nepřekvapí nás, že se jedná o kružnici s průměrem AB. Zvláštní pozornost však musíme věnovat bodům A a B. Pokud by bod X byl totožný s bodem A, nebo B, trojúhelník ABX by neexistoval, proto tyto dva body do množiny nepatří.

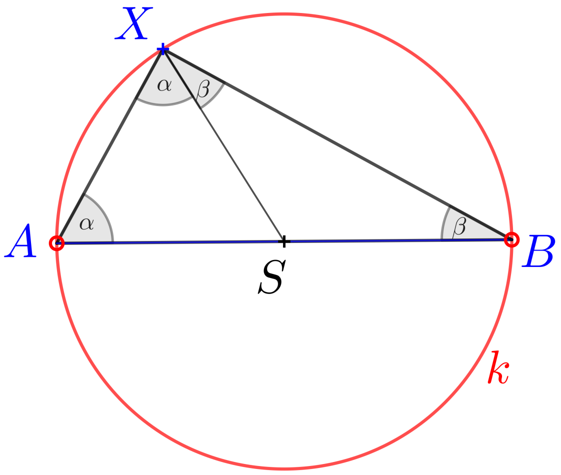
Nyní musíme dokázat, že se skutečně jedná o kružnici s průměrem AB bez bodů A, B. Z předchozí kapitoly víme, že důkaz bude obsahovat dvě části, a to:

1. každý bod X z dané množiny je vrcholem pravoúhlého trojúhelníku ABX s pravým úhlem u vrcholu X,
2. bod, který není obsažen v dané množině, není vrcholem pravoúhlého trojúhelníku ABX s pravým úhlem u vrcholu X.

1. K první části důkazu jsou v *obr* 2.5 vyznačeny úhly α a β. Z definice kružnice pro libovolný bod X na kružnici k platí $|AS| = |SB| = |SX|$, a proto jsou ΔASX a ΔSBX rovnoramenné. Z toho plyne $|\angle SAX| = |\angle AXS| = \alpha$ a $|\angle SBX| = |\angle BXS| = \beta$. (Je zřejmé, že bod X nemůže být totožný s bodem A nebo B, jelikož by trojúhelník neexistoval.)

Z vlastností každého trojúhelníku víme, že součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°, tedy

$$|\angle AXB| + |\angle XBA| + |\angle BAX| = 180°.$$



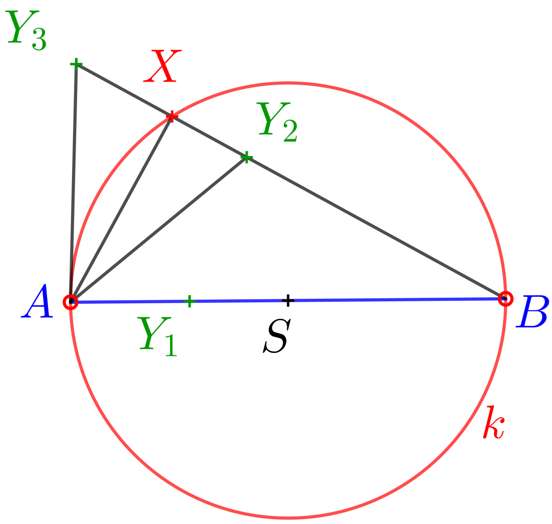
Obrázek 2.5: Kružnice s vyznačenými úhly α, β

Velikost úhlu u vrcholu X lze vyjádřit jako $|\angle AXB| = |\angle AXS| + |\angle BXS|$. Dostaneme tedy rovnost

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°,$$

kterou lze upravit na $\alpha + \beta = 90°$. Úhel u vrcholu X je tedy pravý.

2. Zbývá dokázat druhou část, tedy že pro každý bod Y, který na kružnici neleží, úhel AYB není pravý. Dle polohy bodu Y vůči kružnici k dostaneme dvě situace zobrazené na následujícím *obr.* 2.6.



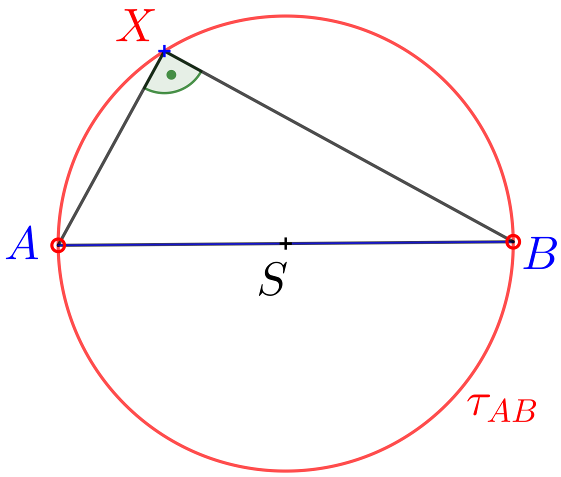
Obrázek 2.6: Kružnice - různé polohy bodu Y

Může nastat situace, kdy bod Y, $Y = Y_1$, leží na odvěsně XB. (Zvolíme-li bod Y_1 libovolně uvnitř kružnice k, pak existuje bod X takový, že Y_1 leží na odvěsně XB.) Z předchozí části důkazu víme, že $|\angle AXB| = 90°$ a ΔAXY_1 je pravoúhlý, proto úhel AY_1X musí být ostrý (plyne ze součtu velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku) a úhel k němu vedlejší, tj. $\angle AY_1B$, musí být tupý.

Dále může nastat situace, kdy bod Y, $Y = Y_2$, je vnějším bodem kružnice k. Opět platí, že $|\angle AXB| = 90°$, a jelikož trojúhelník AXY_2 je pravoúhlý s pravým úhlem u X, musí být $\angle AY_2B$ ostrý. Zde jsme uvažovali takový bod Y_2, který leží na $\mapsto BX$. Stejně tak by mohl ležet na $\mapsto AX$, důkaz by však probíhal obdobným způsobem.

Definice 4. *Množina všech vrcholů X pravoúhlého trojúhelníku ABX s přeponou AB v rovině se nazývá **Thaletova kružnice nad průměrem** AB; značíme ji τ_{AB}.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme
$\tau_{AB} = \{X \in E_2; |\angle AXB| = 90°\}$, viz *obr.* 2.7.



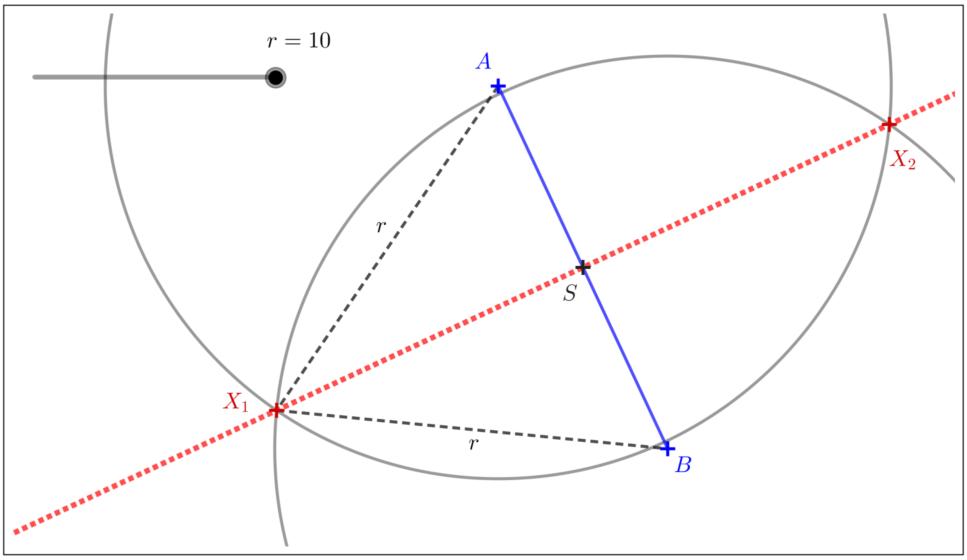
Obrázek 2.7: Thaletova kružnice

2.2 Osa úsečky

Další množinou bodů dané vlastnosti je *osa úsečky*. Naším úkolem v tomto případě bude nalézt množinu bodů, které mají od dané úsečky stejnou vzdálenost.

Příklad 2.2.1

Na appletu na *obr.* 2.8 je dána úsečka AB, střed úsečky S a kružnice se středem A, resp. B, a poloměrem r, který lze měnit posuvníkem. Průsečíky kružnic X_1 a X_2 mají od bodu A a B stejnou vzdálenost. Měňte velikost poloměru r na posuvníku nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu. Zkoumejte, jaké vlastnosti má množina vykreslená body X_1 a X_2. Jaký útvar vznikne, aby pro jeho body platilo $|AX| = |BX|$?



Obrázek 2.8: Applet - vykreslení osy úsečky

Všimli jsme si, že se v appletu na *obr.* 2.8 zobrazila přímka, která je kolmá k úsečce AB a prochází bodem S. Kolmost přímky k úsečce AB plyne ze shodnosti trojúhelníků X_1BS a X_1AS (dle věty 1 *sss*). Úhly BSX_1 a ASX_1 proto jsou shodné a jejich součet musí být 180°, tedy úhly BSX_1 a ASX_1 jsou kolmé.

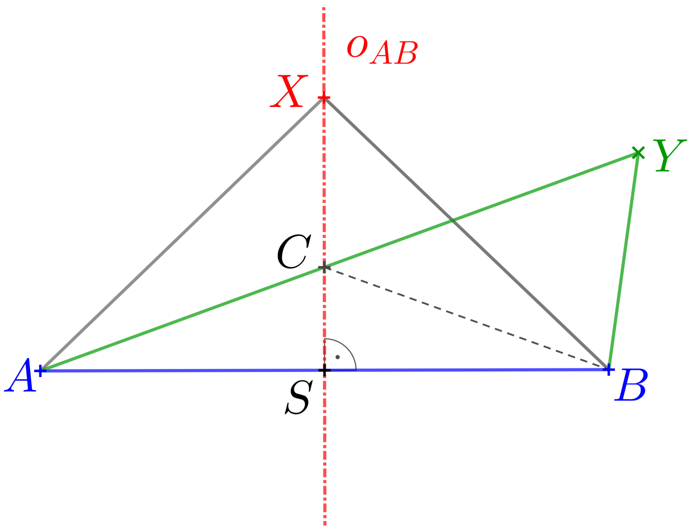
Dokažme tedy, že daná přímka splňuje požadavky kladené na množinu bodů dané vlastnosti.

K ověření obou podmínek z definice 1 množiny bodů jsou v *obr.* 2.9 vyznačeny pomocné body C, Y a střed S úsečky AB.

1. Nyní ukážeme, že každý bod přímky o_{AB} má od krajních bodů úsečky stejnou vzdálenost. Výsledná přímka je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem S. Zřejmě $|AS| = |SB|$, proto jsou ΔSAX a ΔSBX shodné (podle věty 2 *sus*), tedy pro každý bod X dané přímky platí, že $|AX| = |BX|$.

2. Ověření druhé podmínky, že každý bod neležící na dané přímce nemá od bodů A a B stejnou vzdálenost, je o něco obtížnější. Uvažujme bod Y, který neleží na ose o ani na přímce AB. Z trojúhelníkové nerovnosti musí v ΔBYC platit

$$|BY| < |YC| + |BC|$$



Obrázek 2.9: Osa úsečky s vyznačenými body C a Y

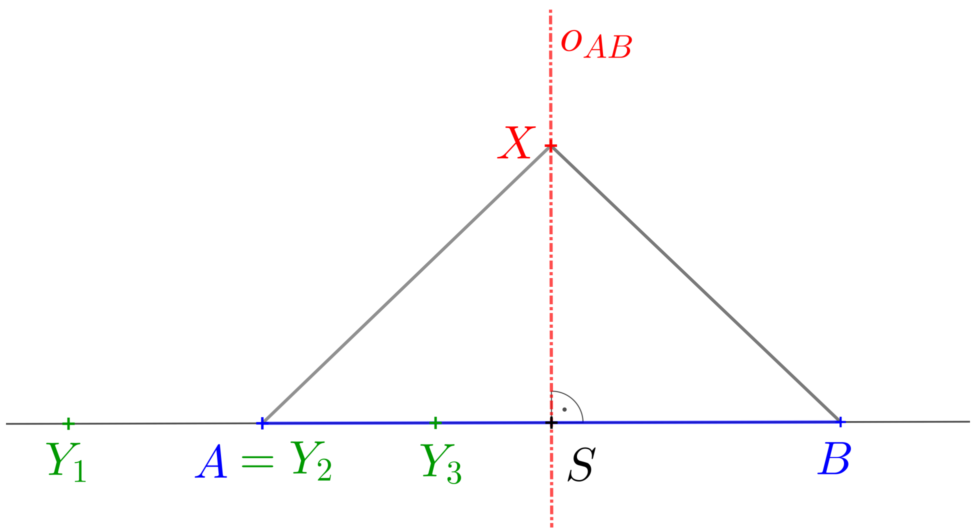
a zároveň víme, že pro každý bod C osy o platí, že $|AC| = |BC|$. Proto

$$|BY| < |YC| + |AC| .$$

Úsečky YC a AC dohromady tvoří úsečku AY, tedy platí nerovnost

$$|BY| < |AY| ,$$

a bod Y tedy nepatří do dané množiny. Nyní uvažujme bod Y, který neleží na ose o, ale leží na přímce AB, přičemž Y se nerovná S. Na *obr.* 2.10 jsou vyznačeny tři možné polohy bodu Y pouze na polopřímce AS. Bod Y_1 leží na opačné polopřímce k polopřímce AS vně úsečky AS, bod Y_2 je shodný s bodem A a bod Y_3 je vnitřním bodem úsečky AS.



Obrázek 2.10: Osa úsečky s vyznačenými polohami bodu Y

Začneme bodem Y_1, jehož vzdálenost od bodu A je $|Y_1A|$. Vzdálenost od bodu B je $|Y_1A|+|AB|$. Je tedy zřejmé, že vzdálenost bodu Y_1 od bodů A, B není stejná.

Je-li bod Y shodný s bodem A, tj. $Y = Y_2$, je vzdálenost bodů A a Y_2 nulová, zatímco vzdálenost bodů Y_2 a B je rovna velikosti úsečky AB. Opět tedy vzdálenost bodu Y_2 od bodů A a B není stejná.

Je-li bod Y shodný s Y_3, tj. $Y = Y_3$, musí platit, že $|AY_3| < |AS|$. Bod S je středem úsečky AB, platí tedy rovnost $|AS| = |BS|$. Zároveň platí, že vzdálenost $|BS| < |BY_3|$. Odtud dostaneme nerovnost $|AY_3| < |BS| < |BY_3|$. Tedy vzdálenost bodu Y_3 od bodů A a B není stejná.

Obdobným způsobem bychom postupovali, pokud by bod Y ležel na polopřímce BS. Ověřili jsme tedy, že kolmice procházející bodem S je skutečně množinou bodů, která má od bodů A, B stejnou vzdálenost a body neležící na této kolmici stejnou vzdálenost od bodů A, B nemají. Tuto množinu nazýváme *osou úsečky* AB. Jedna z nejčastějších definic osy úsečky jako množiny bodů dané vlastnosti je následující.

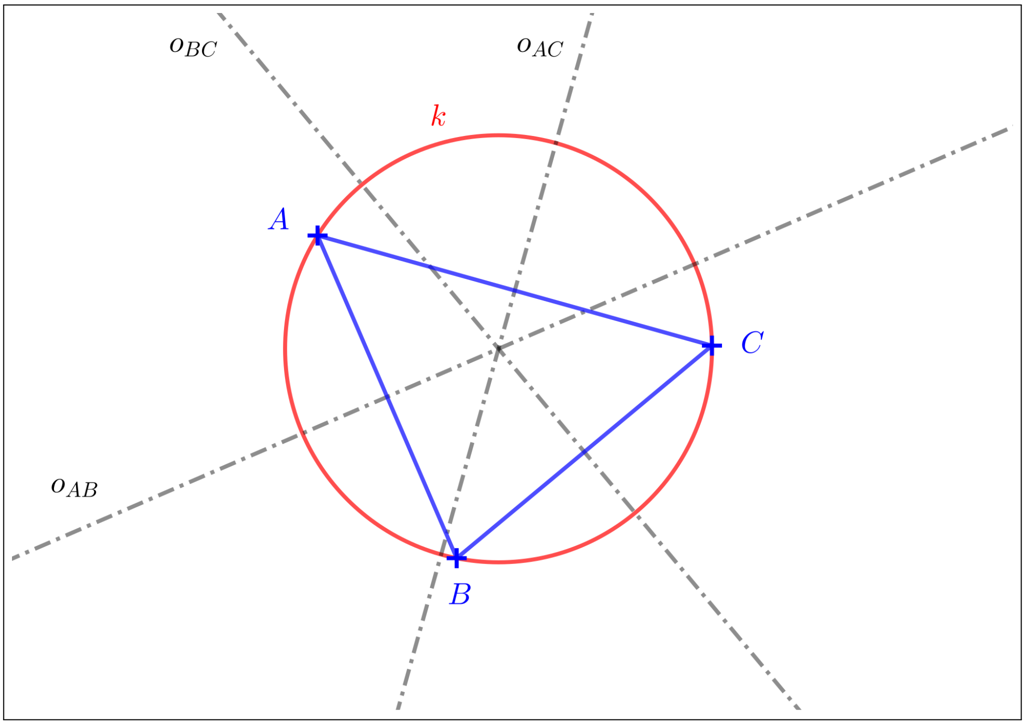
Definice 5. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daných bodů A, B, $A \neq B$, stejnou vzdálenost, se nazývá* ***osa úsečky*** *AB; značíme ji o_{AB}.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme
$o_{AB} = \{X \in E_2; |AX| = |BX|\}$.

Nejjednodušším příkladem využití osy úsečky je *kružnice opsaná* trojúhelníku.

Příklad 2.2.2

Na appletu na *obr.* 2.11 je zobrazen trojúhelník ABC, osy stran trojúhelníku o_{AB}, o_{AC}, o_{BC}, průsečík těchto os S a kružnice k opsaná trojúhelníku ABC. Měňte polohu vrcholů trojúhelníku a zkoumejte, kde se nachází střed S kružnice opsané.



Obrázek 2.11: Applet - kružnice opsaná

Z appletu lze odhadnout, že střed kružnice opsané je průsečíkem os stran trojúhelníku, tento bod označíme S.

Uvedené tvrzení lze dokázat pomocí definice 5 osy úsečky. Jelikož kružnice opsaná prochází všemi vrcholy trojúhelníku, musí být vzdálenost středu S opsané kružnice od vrcholů trojúhelníku stejná. Bod S má stejnou vzdálenost od vrcholů A, B právě tehdy, když S je bodem o_{AB}, a od vrcholů B, C právě tehdy, když S je bodem o_{BC}. Platí tedy následující vztahy:

$$(|AS| = |BS| \wedge |BS| = |CS|) \Rightarrow |AS| = |BS| = |CS|$$

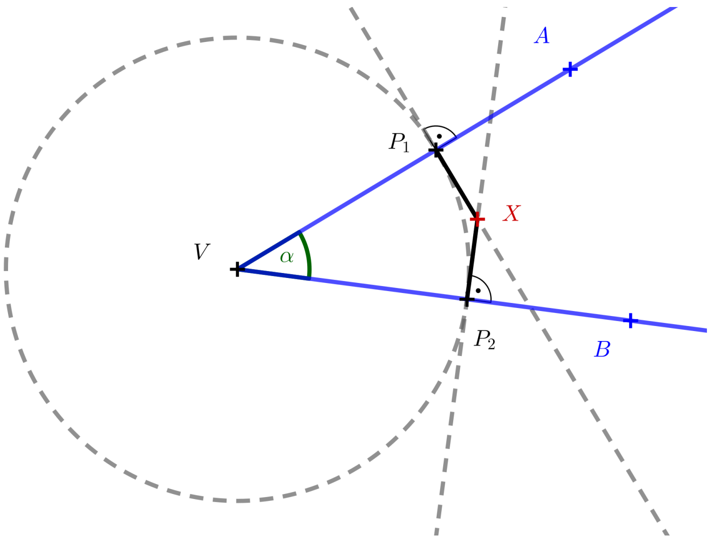
Dokázali jsme tedy, že bod S má stejnou vzdálenost od bodů A, B i C. Zároveň vzdálenost bodů A, B a C od středu S je poloměrem r opsané kružnice.

Průsečík os o_{AB} a o_{BC} je bodem i osy o_{AC}. Všechny tři osy mají jeden společný průsečík, a to právě bod S.

2.3 Osa úhlu

Další množinou bodů, kterou známe ze základní školy, je *osa úhlu*. Mějme dány dvě polopřímky se společným počátkem, které svírají nenulový úhel α. Naším úkolem bude nalézt množinu bodů úhlu α, které jsou od ramen tohoto úhlu stejně vzdáleny.

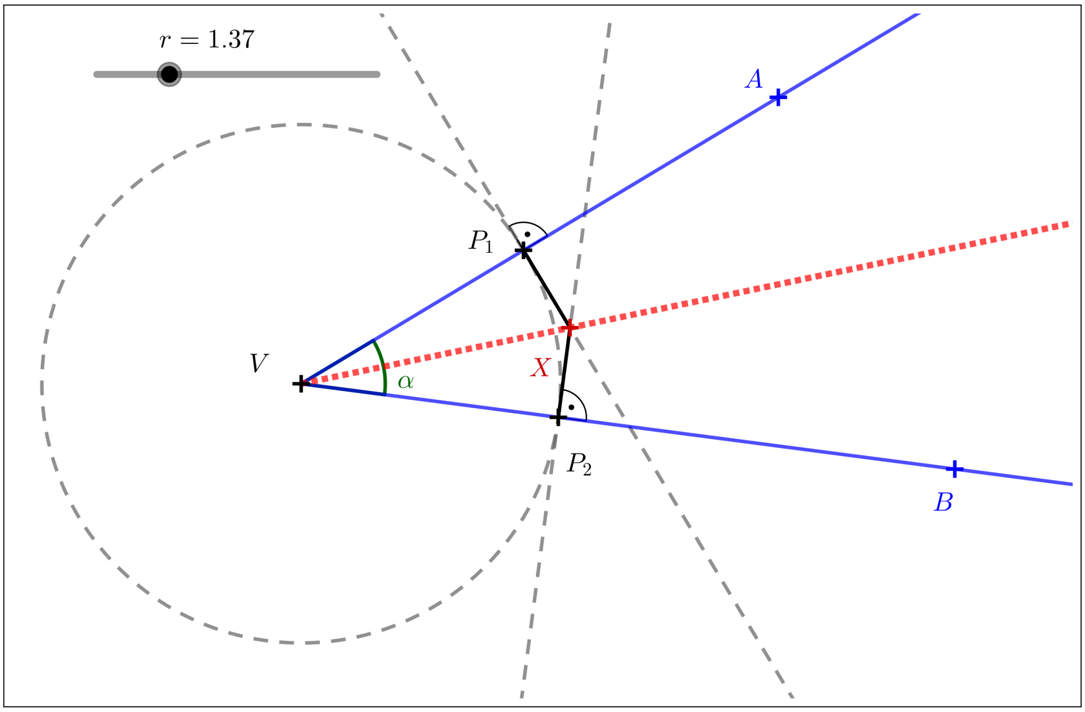
Abychom našli množinu bodů náležejících úhlu α, které mají od ramen úhlu α stejnou vzdálenost, musíme nalézt takové body X náležející úhlu α, které mají od $\mapsto VA$ a $\mapsto VB$ stejnou vzdálenost. Vzdálenost bodu X od polopřímky hledáme pomocí kolmého průmětu P_1, resp. P_2 bodu X na polopřímku VA, resp. VB. Vzdálenost je potom dána velikostí úsečky XP_1, resp. XP_2.



Obrázek 2.12: Úhel α s vyznačenými body X, P_1, P_2

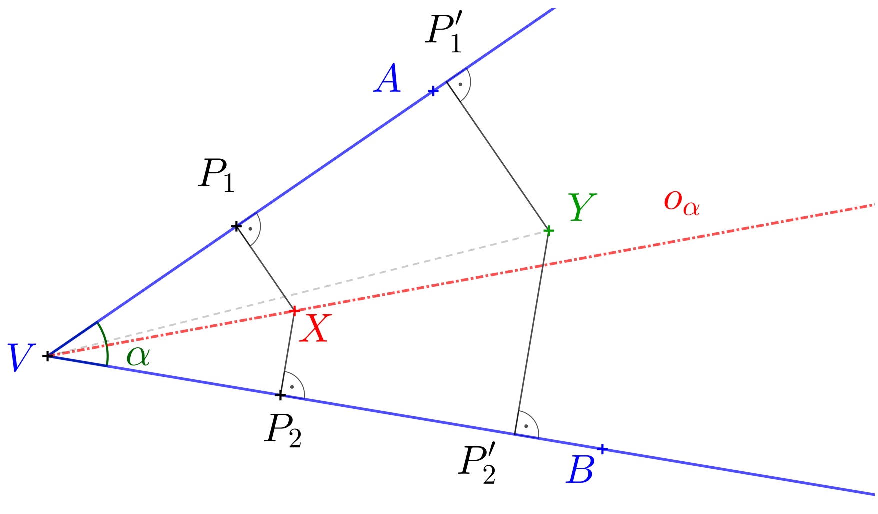
Příklad 2.3.1

V následujícím appletu na *obr.* 2.13 je zobrazen úhel α vymezený polopřímkami VA a VB. V appletu je sestrojen bod X, který má stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu, tj. vzdálenost $|XP_1| = |XP_2|$. (Zobrazená kružnice se středem V a poloměrem r zajišťuje, že body P_1 a P_2 mají od bodu V stejnou vzdálenost.) V appletu měňte poloměr r na posuvníku nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu. Jaký geometrický útvar vykreslují polohy bodu X?



Obrázek 2.13: Applet - osa úhlu

Hledanou množinou bodů, které mají od ramen úhlu α stejnou vzdálenost, je polopřímka s počátkem ve vrcholu úhlu. Jedná se tedy o přímku, která dělí daný úhel na dva shodné úhly, tedy osa úhlu.



Obrázek 2.14: Osa úhlu s vyznačenými body X, Y, P_1, P_2, P_1', P_2'

Dokážeme nyní, že množinou bodů je osa úhlu α, viz *obr.* 2.14.

1. Nejdříve ukážeme, že pro každý bod X osy úhlu α platí, že $|\mapsto VA,X| = |\mapsto VB,X|$. Začneme situací, kdy je bod X shodný s vrcholem V. Podmínka $|\mapsto VA,X| = |\mapsto VB,X|$ je potom splněna snadno, jelikož vzdálenost vrcholu V od polopřímek VA a VB je nulová.

Pro bod X různý od vrcholu V využijeme *obr.* 2.14, kde jsou zobrazeny body P_1 a P_2, což jsou paty kolmic k ramenům úhlu procházející bodem X. Ze shodnosti

ΔVP_2X a ΔVP_1X (podle věty 4 *Ssu* - trojúhelníky mají společnou přeponu, shodují se v úhlu u vrcholu V a u vrcholů P_1 a P_2 je pravý úhel - tedy i úhel u vrcholu X je shodný) plyne, že úsečky XP_1 a XP_2 jsou shodné. Body na polopřímce s počátkem ve vrcholu úhlu jsou tedy hledanou množinou.

2. Nyní zdůvodníme, že každý bod úhlu α, který má od polopřímek VA a VB stejnou vzdálenost, je bodem polopřímky o_α, tj. osy úhlu. Poznamenejme, že v tomto případě druhou podmínku z definice 1 množiny bodů nedokazujeme sporem jako v předchozích kapitolách, ale přímo z definice. K tomuto důkazu využijeme toho, že osa úhlu rozděluje daný úhel na dva shodné úhly.

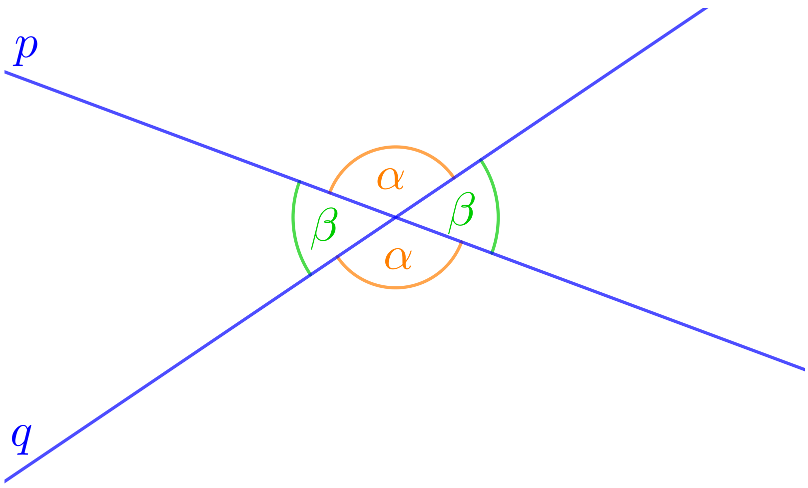
Mějme libovolný bod Y náležející úhlu α, který má od polopřímek VA a VB stejnou vzdálenost (v *obr.* 2.14 je bod zobrazen pouze ilustračně, neodpovídají tedy vzdálenosti od polopřímek VA a VB). Zároveň víme, že u vrcholů P_1' a P_2' je pravý úhel a trojúhelníky VYP_1' a VYP_2' mají společnou přeponu VY. Proto jsou trojúhelníky VYP_1' a VYP_2' shodné podle věty 4 *Ssu*, z čehož plyne rovnost velikostí úhlů $P_1'VY$ a $P_2'VY$. Úsečka VY tedy dělí daný úhel α na dva shodné úhly, bod Y musí tedy ležet na ose úhlu α.

Nyní můžeme formulovat definici osy úhlu jako množinu bodů dané vlastnosti.

Definice 6. *Množina všech bodů v rovině, které náleží úhlu α a zároveň mají od jeho ramen stejnou vzdálenost, se nazývá* ***osa úhlu*** *α; značíme ji o_α.*

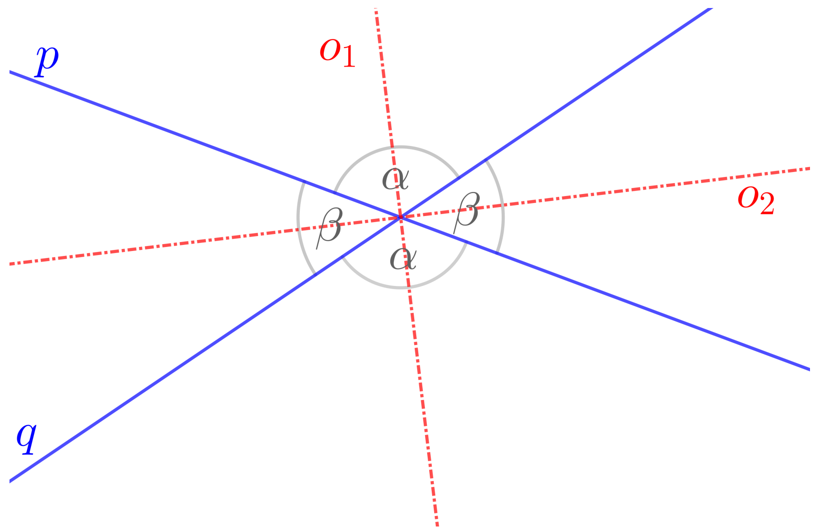
Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme
$o_\alpha = \{X \in \alpha; |X, \mapsto VA| = |X, \mapsto VB|\}$.

Pomocí osy úhlu lze definovat i osu různoběžek p a q, které svírají dvě dvojice úhlů velikostí α a β, viz obr. 2.15.



Obrázek 2.15: Různoběžky s vyznačenými úhly α a β

Sestrojíme-li osy všech čtyř úhlů vymezených přímkami p a q, tak sjednocením os vrcholových úhlů dostaneme dvě přímky o_1 a o_2, viz *obr.* 2.16. Z definice 6 osy úhlu víme, že osa rozdělí úhel na dva stejné úhly. Zároveň jsou úhly α a β navzájem vedlejší, platí tedy $\alpha + \beta = 180°$. Přímky o_1 a o_2 tedy svírají úhel velikosti $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90°$, tj. jsou navzájem kolmé.



Obrázek 2.16: Osa různoběžek

Definice 7. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daných různoběžek p a q stejné vzdálenosti, je sjednocení dvou navzájem kolmých přímek.*

Symbolicky zapisujeme $o_1 \cup o_2 = \{X \in E_2; |Xp| = |Xq|\}$.
Příkladem využití osy úhlu je určení středu *kružnice vepsané*.

Příklad 2.3.2

Na appletu na *obr.* 2.17 je zobrazen trojúhelník ABC, osy vnitřních úhlů trojúhelníku o_α, o_β, o_γ, průsečík těchto os S a kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC. Měňte polohu vrcholů trojúhelníku a zkoumejte, kde se nachází střed S kružnice vepsané.

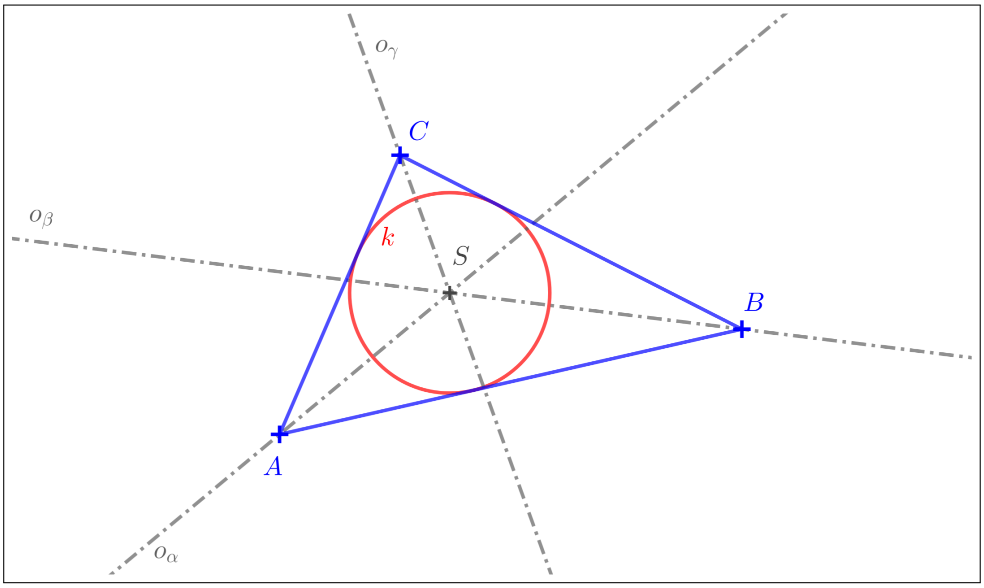
Vidíme, že střed kružnice vepsané je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku, tento bod označíme S.

To lze dokázat pomocí definice 6 osy úhlu. Jelikož se kružnice vepsaná dotýká všech stran trojúhelníku, musí být střed S vepsané kružnice stejně vzdálen od všech stran trojúhelníku. Bod S má stejnou vzdálenost od stran AB a AC právě tehdy, když S je bodem o_α, a od stran AB a BC právě tehdy, když S je bodem o_β. Platí tedy následující vztahy:

$$(|AB, S| = |AC, S| \wedge |AB, S| = |BC, S|) \Rightarrow |AB, S| = |AC, S| = |BC, S|$$

Dokázali jsme tedy, že bod S má stejnou vzdálenost od všech stran trojúhelníku. Zároveň vzdálenost středu S od stran trojúhelníku je poloměrem r vepsané kružnice.

Z výše uvedených vztahů pro vzdálenosti také vyplývá, že všechny tři osy mají společný průsečík, a to právě bod S.



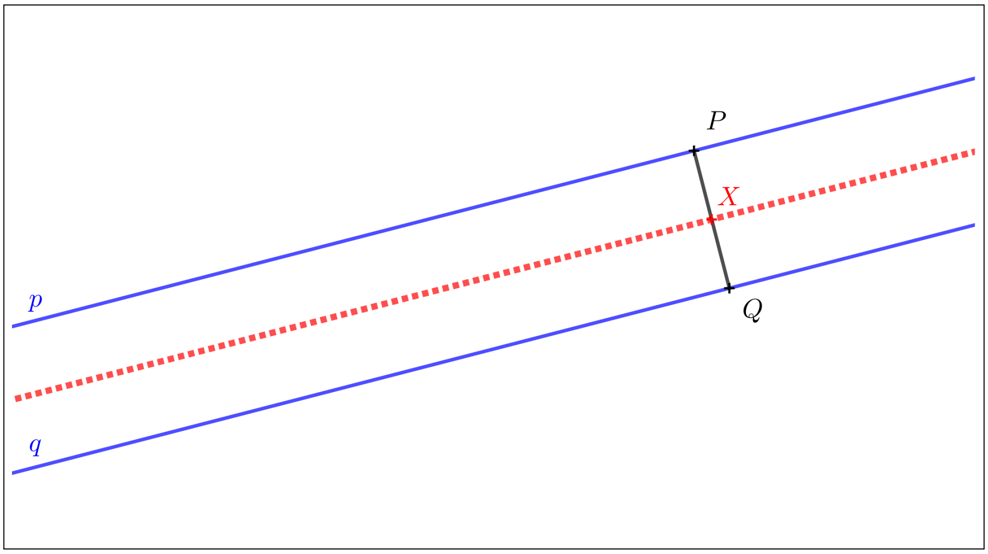
Obrázek 2.17: Applet - kružnice vepsaná

2.4 Osa rovinného pásu

Další množinou bodů, kterou známe ze základní školy, je *osa rovinného pásu*. Mějme dány dvě rovnoběžné přímky p a q. Naším úkolem bude nalézt množinu bodů, které mají od obou přímek stejnou vzdálenost.

Příklad 2.4.1

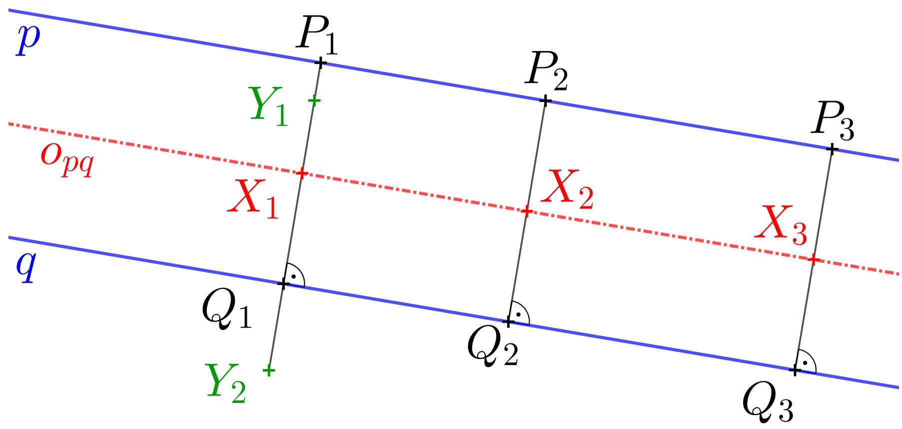
Na následujícím appletu na *obr.* 2.18 je zobrazen rovinný pás určený dvěma rovnoběžkami p a q, kde $p \neq q$. Úsečka PQ je kolmá k přímkám p a q a bod X je středem úsečky PQ. Pohybujte bodem P nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu. Jaký vznikne útvar, aby platilo $|pX| = |qX|$?



Obrázek 2.18: Applet - osa rovinného pásu

Z appletu na *obr.* 2.18 vidíme, že vznikne přímka, která je rovnoběžná s přímkami p a q a má od obou stejnou vzdálenost.

Toto pozorování však musíme dokázat.



Obrázek 2.19: Osa rovinného pásu s vyznačenými body X_1, X_2, X_3, Y

1. Nejdříve ukážeme, že každý bod přímky o_{pq} splňuje podmínku $|pX| = |qX|$. Splnění dané podmínky pro každý bod X na ose plyne z toho, jakým způsobem určujeme vzdálenost dvou rovnoběžných přímek. Potom platí $|po_{pq}| = |qo_{pq}|$.

2. Dále je třeba zdůvodnit, že každý bod Y, který na ose o_{pq} neleží, nesplňuje podmínku $|pX| = |qX|$. Zvolíme-li bod Y, který neleží na ose o_{pq}, jeho vzdálenost od přímek p a q hledáme na kolmici vedené bodem Y k přímce p a q. V *obr.* 2.19 je zobrazen bod Y_1 uvnitř pásu a jelikož neleží na ose, není středem úsečky P_1Q_1. Vzdálenost Y_1P_1 a Y_2Q_1 je tedy různá. Obdobně pro bod Y_2, který leží vně pásu.

Můžeme tedy formulovat následující definici.

Definice 8. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daných rovnoběžek p, q, $p \neq q$, stejnou vzdálenost, se nazývá* ***osa rovinného pásu*** *daného přímkami p, q; značíme ji o_{pq}.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme $o_{pq} = \{X \in E_2; |Xp| = |Xq|\}$.

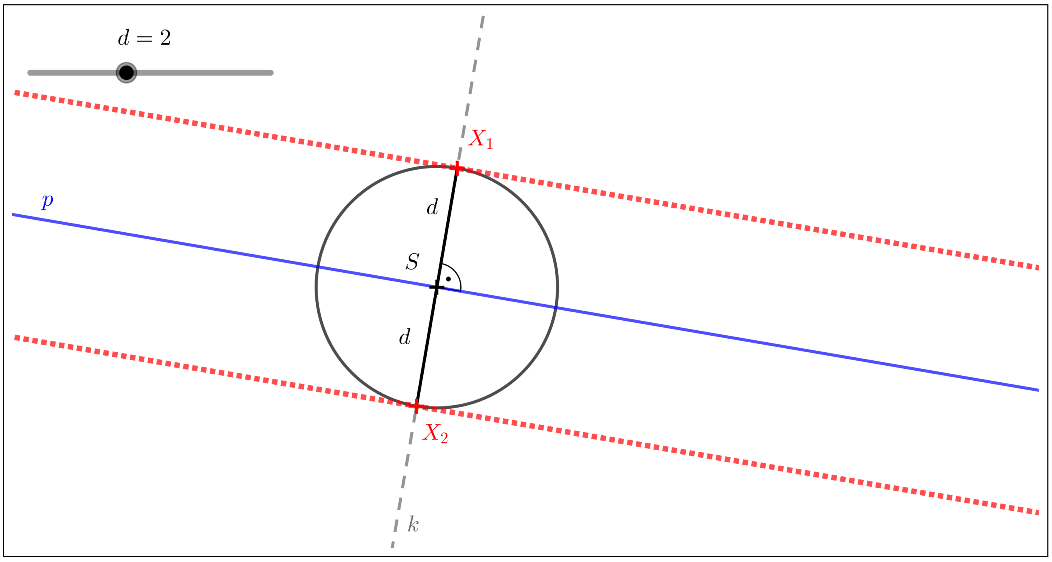
Další množina bodů, kterou budeme zkoumat, úzce souvisí s osou rovinného pásu. Jedná se o *ekvidistantu přímky.*

2.4.1 Ekvidistanta přímky

Jak napovídá název, budeme nyní hledat množinu všech bodů, které mají od dané přímky p stejnou vzdálenost d.

Příklad 2.4.2

Na následujícím appletu na *obr.* 2.20 je zobrazena přímka p, bod S ležící na přímce p, kolmice k k přímce p procházející bodem S a kružnice se středem S a poloměrem d. Body X_1, X_2 jsou průsečíky kružnice a přímky k. Pohybujte bodem S nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu. Jaký vznikne útvar, aby platilo $|pX| = |d|$?



Obrázek 2.20: Applet - ekvidistanta přímky

Množinou bodů, které mají od dané přímky p stejnou vzdálenost d, je dvojice dvou rovnoběžných přímek stejně vzdálených od přímky p. Jejich sjednocení nazýváme *ekvidistantou přímky* p.

Nejdříve ověříme podmínky, které musí body hledané množiny bodů splňovat.

1. Ukážeme, že každý bod X, který je bodem sjednocení dvou přímek rovnoběžných s přímkou p, splňuje $|pX| = |d|$. Toto plyne přímo z určení vzdálenosti rovnoběžných přímek, tj. každý bod X na jedné z rovnoběžných přímek má od dané přímky p stejnou vzdálenost. Tato vzdálenost je v našem případě d.

2. Dále ukážeme, že každý bod Y, který na jedné z rovnoběžek e_1, e_2 neleží, nesplňuje podmínku $|pX| = |d|$. Na obrázku 2.21 jsou vyznačeny body Y_1 a Y_2. Bod Y_1 je od přímky p vzdálený o délku úsečky P_1Y_1, platí tedy, že
$|pY_1| = |Y_1Z_1|+|Z_1P_1|$. Velikost úsečky Z_1P_1 je d, platí tedy, že $|pY_1| = |Y_1Z_1|+d$. Vzdálenost bodu Y_1 od přímky p je tedy větší než d.

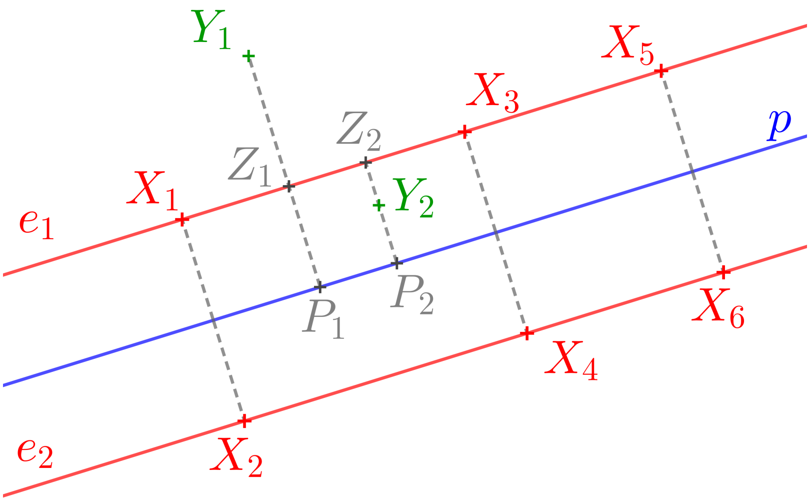
Vzdálenost bodu Y_2 a přímky p je $|pY_2| = |P_2Z_2| - |Z_2Y_2|$, kde $|P_2Z_2| = d$. Platí tedy $|pY_2| = d - |Z_2Y_2|$, proto je vzdálenost bodu Y_2 od přímky p menší než d.

Definice 9. *Množinu všech bodů v rovině, které mají od dané přímky p danou vzdálenost $d > 0$, nazveme* ***ekvidistantou přímky*** *p; značíme ji e_1 a e_2. Ekvidistantou je sjednocení dvou přímek rovnoběžných k přímce p.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme $e_1 \cup e_2 = \{X \in E_2; |Xp| = d\}$, viz *obr.* 2.21.

Jak bylo zmíněno výše, ekvidistanta přímky skutečně souvisí s osou rovinného pásu. V případě osy rovinného pásu hledáme množinu bodů, které jsou od dvou rovnoběžek p a q stejně vzdáleny. Výsledkem je jedna přímka - osa rovinného pásu o_{pq}. Pokud bychom naopak hledali body stejně vzdálené od osy o_{pq}, původní přímky p a q by tvořily ekvidistantu přímky o_{pq}.

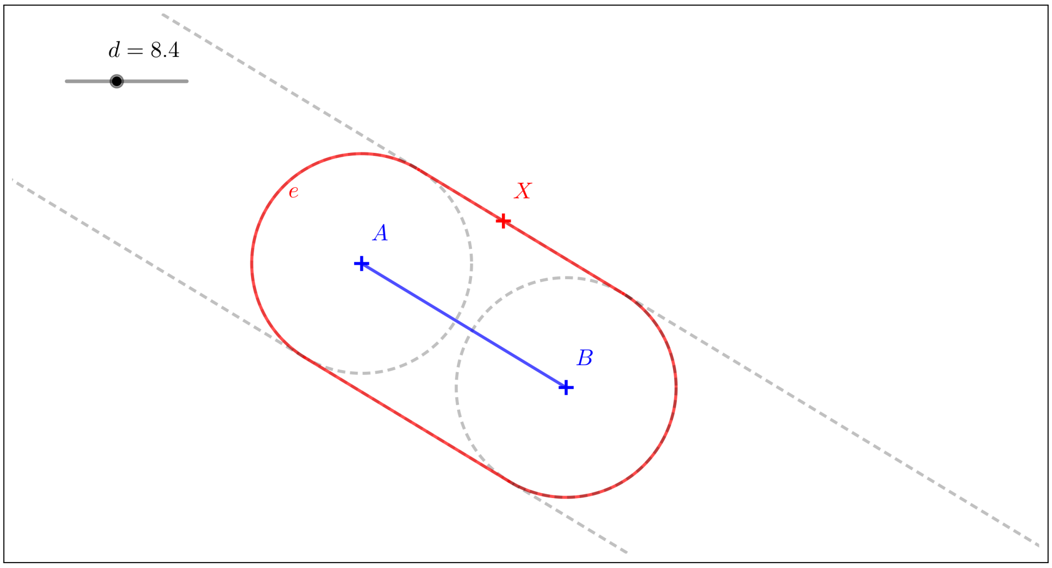
Další méně častou ekvidistantou, se kterou se můžeme setkat, je *ekvidistanta úsečky AB*. Hledejme nyní množinu bodů, které mají od zadané úsečky AB stejnou vzdálenost d.



Obrázek 2.21: Ekvidistanta přímky p s vyznačenými polohami bodů X, Y

Příklad 2.4.3

Na následujícím appletu na *obr.* 2.22 je zobrazena úsečka AB, kružnice se středem A, resp. B, a poloměrem d a dvě rovnoběžné přímky vzdálené o d od přímky určené body AB. Rozmyslete, jak vzniká ekvidistanta úsečky a pozorujte, jak se ekvidistanta úsečky e mění se změnou vzdálenosti d a se změnou polohy krajních bodů úsečky AB.



Obrázek 2.22: Applet - ekvidistanta úsečky

Při sestrojení ekvidistanty úsečky AB využíváme znalostí:

- množina všech bodů stejně vzdálených od daného bodu (v tomto případě od bodů A a B) je kružnice,
- množina všech bodů stejně vzdálených od přímky (v tomto případě přímka, na které leží úsečka AB) je ekvidistanta přímky.

Ekvidistantu úsečky si potom lze představit jako sjednocení dvou množin dané vlastnosti, a to *kružnice* a *ekvidistanty přímky*. Tento geometrický útvar budeme nazývat *ovál*.

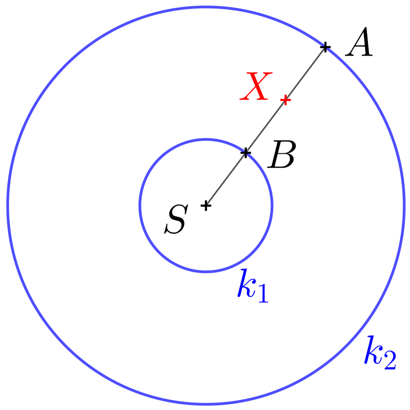
V appletu na *obr.* 2.22 je vidět „propojení“ ekvidistanty přímky a kružnice. Ekvidistanta úsečky je tvořena těmi body ekvidistanty přímky, jejichž kolmý průmět se zobrazí na úsečku AB. Z definice vzdálenosti bodu od úsečky ale víme, že vzdálenost úsečky a bodu, jehož kolmý průmět se zobrazí mimo úsečku, je rovna vzdálenosti daného bodu a bližšího krajního bodu této úsečky. V tomto případě se tedy jedná množinu bodů, které mají od zadaného krajního bodu úsečky konstantní vzdálenost, tj. kružnice.

Dále lze pozorovat, že pokud je vzdálenost d, kterou má mít hledaná množina od úsečky, výrazně větší v porovnání s délkou úsečky, větší část ekvidistanty tvoří půlkruhy. Oproti tomu, je-li délka úsečky výrazně větší než vzdálenost d, větší část ekvidistanty úsečky je tvořena ekvidistantami přímky.

2.5 Osa mezikruží

Mějme dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1)$ a $k_2(S, r_2)$, kde $r_1 < r_2$. Nyní budeme hledat takovou množinu bodů, které mají od obou kružnic stejnou vzdálenost. Využijeme při tom znalost pojmu vzdálenost bodu od kružnice.

Hledejme nyní body X tak, aby měly od obou kružnic k_1 a k_2 stejnou vzdálenost. Je přitom zřejmé, že hledané body X budou ležet v mezikruží vymezeném kružnicemi k_1 a k_2. Zvolíme-li na kružnici k_2 libovolný bod A a sestrojíme poloměr AS, pak bod B je průsečíkem poloměru AS a kružnice k_1. Je zřejmé, že střed úsečky AB splňuje požadovanou vlastnost, viz *obr.* 2.23.



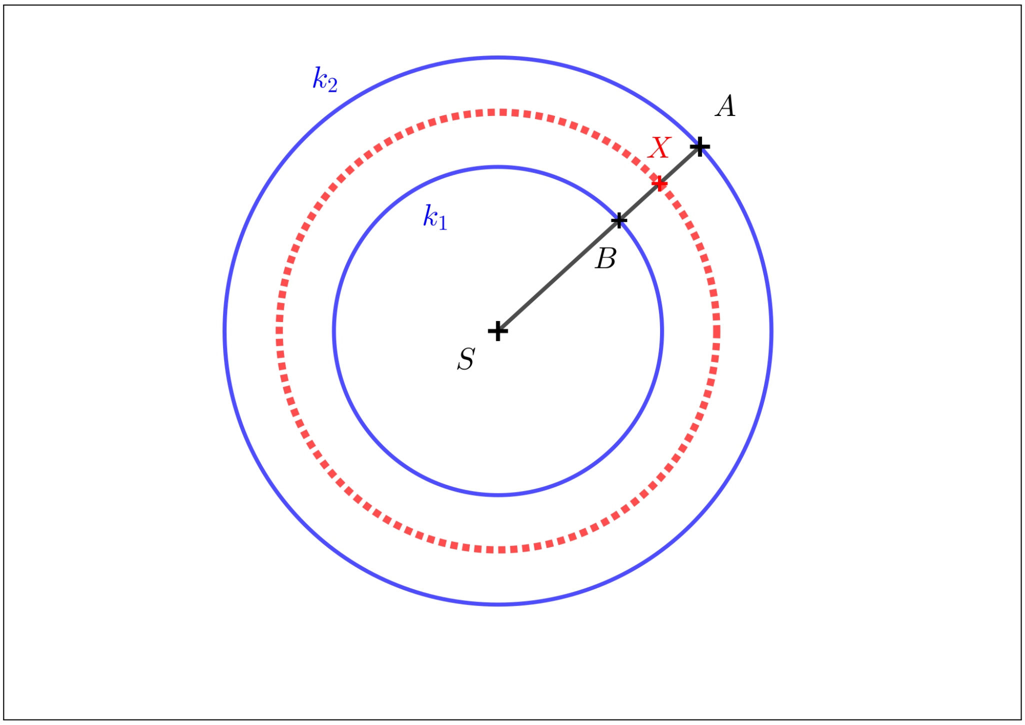
Obrázek 2.23: Konstrukce bodu X

Příklad 2.5.1

Na appletu na *obr.* 2.24 jsou zobrazeny dvě soustředné kružnice k_1, k_2 se středem S a bod X, který je středem úsečky AB, kde $A \in k_1$ a $B \in k_2$. Bod X má stejnou vzdálenost od obou kružnic. V appletu pohybujte bodem A nebo zapněte animaci v levém dolním rohu appletu. Jakou množinu bodů vykreslí polohy středů úsečky AB při změně polohy bodu A na k_2?

Z appletu na *obr.* 2.24 vidíme, že vznikne kružnice se středem v bodě S. Poloměr hledané kružnice je vzdálenost bodů S a X, kterou lze vyjádřit jako

$$|SX| = r_1 + \frac{1}{2}|AB| = r1 + \frac{1}{2}(r_2 - r_1) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$



Obrázek 2.24: Applet - osa mezikruží

Zjištěný poznatek dokážeme, nalezenou množinu bodů označíme o, viz *obr.* 2.25.

1. Nyní ověříme, že každý bod nalezené kružnice má požadovanou vlastnost, tj. má od obou kružnic stejnou vzdálenost. Z definice vzdálenosti bodu od kružnice víme, že vzdálenost bodu X od kružnice k_1 je $|BX|$ a vzdálenost bodu X od kružnice k_2 je $|AX|$. Zároveň nalezená kružnice má střed S a poloměr $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Lze tedy rozepsat

$$|Xk_1| = |AX| = |SX| - r_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) - r_1 = \frac{1}{2}(r_2 - r_1),$$

$$|Xk_2| = |BX| = r_2 - |SX| = r_2 - \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}(r_2 - r_1).$$

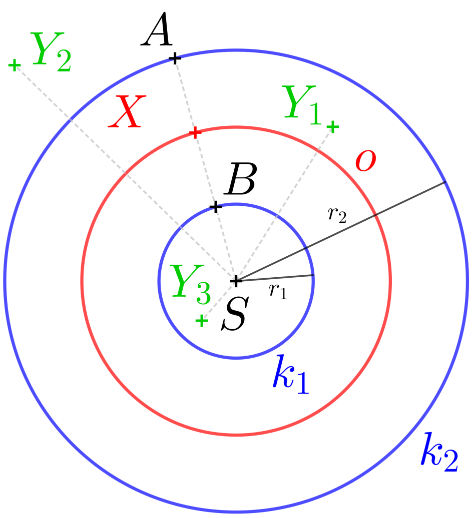
Uvedené vztahy jsou shodné, tedy kružnice o má od obou zadaných kružnic stejnou vzdálenost.

2. Ukážeme, že každý bod Y, který má danou vlastnost, musí ležet na kružnici o se středem S a poloměrem $\frac{r_1+r_2}{2}$. Předpokládejme tedy, že $|Yk_1| = |Yk_2|$ (v *obr.* 2.25 jsou body Y zobrazeny pouze ilustračně, neodpovídají tedy vzdálenosti od kružnic k_1, k_2). Leží-li bod Y v mezikruží určeném kružnicemi k_1 a k_2, tj. $Y = Y_1$, lze vzdálenost bodu Y_1 od kružnice k_1 vyjádřit jako $r_2 - r_1 - |Y_1k_2|$. Dostaneme tedy rovnici

$$r_2 - r_1 - |Y_1k_2| = |Y_1k_2|,$$

ze které po úpravě dostaneme

$$|Y_1k_2| = \frac{1}{2}(r_2 - r_1).$$



Obrázek 2.25: Osa o mezikruží s vyznačenými body X, Y_1, Y_2, Y_3

Vzdálenost bodu Y_1 od kružnice k_2 je tedy rovna polovině $|AB|$, což odpovídá bodům na kružnice se středem S a poloměrem $\frac{r_1+r_2}{2}$. Z *obr.* 2.25 je zřejmé, že body Y, které leží vně mezikruží (např. bod $Y = Y_2$, či $Y = Y_3$), nemohou mít stejnou vzdálenost od obou kružnic. Lze tedy formulovat definici.

Definice 10. *Množinu všech bodů v rovině, které mají od daných kružnic $k_1(S, r_1)$ a $k_2(S, r_2)$, $r_1 \neq r_2$ stejnou vzdálenosti nazveme **osou mezikruží**; značíme ji $o(S, \frac{r_1+r_2}{2})$.*

Symbolicky danou množinu bodů zapisujeme
$o(S, \frac{r_1+r_2}{2}) = \{X \in E_2; |Xk_1| = |Xk_2|\}$.

Poznamenejme, že pokud by se rovnaly poloměry kružnic r_1 a r_2, vznikla by jediná kružnice, tudíž nelze hovořit o ose mezikruží.

2.5.1 Ekvidistanta kružnice

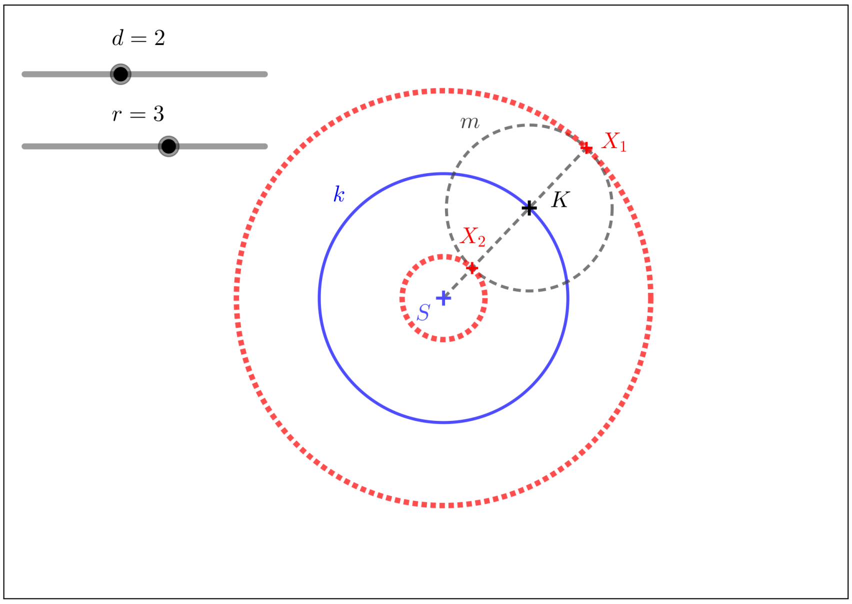
Obdobně jako v předchozí kapitole zabývající se osou rovinného pásu, i v případě osy mezikruží lze hledet množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost d od dané kružnice k, tj *ekvidistantu kružnice.*

Příklad 2.5.2

Na následujícím appletu na *obr.* 2.26 je zobrazena kružnice k se středem S a poloměrem r, bod K, který leží na kružnici k, a kružnice m se středem K a poloměrem d. Pohybujte bodem K po kružnici k a zkoumejte, jaký vznikne útvar, aby platilo $|Xk| = d$. Pomocí posuvníku měňte poloměr r a vzdálenost d a pozorujte, jak se bude výsledný útvar měnit při změnách r a d.

Z appletu na *obr.* 2.26 jsme zjistili, že mohou nastat celkem tři situace, viz *obr.* 2.27. V závislosti na vzdálenosti d je *ekvidistantou kružnice*:

- pro $r < d$ je to jedna kružnice $e_1(S, r + d)$,



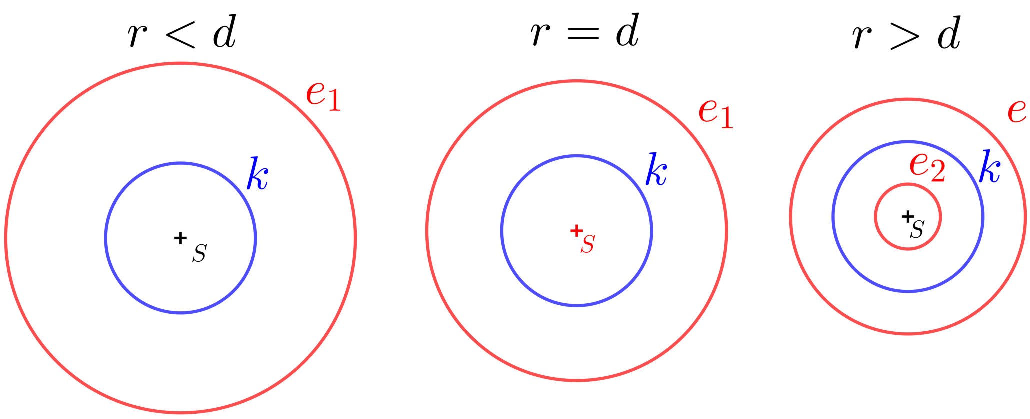
Obrázek 2.26: Applet - ekvidistanta kružnice

- pro $r = d$ je to jedna kružnice $e_1(S, 2r)$ a bod S,
- pro $r > d$ jsou to dvě kružnice $e_1(S, r + d)$ a $e_2(S, r - d)$.

Zdůvodnění všech tří situací by probíhala obdobně jakou u osy mezikruží, a to s využitím poloměrů r a d.

Definice 11. *Množinu všech bodů v rovině, které mají od dané kružnice $k(S, r)$ danou vzdálenost $d > 0$, nazveme **ekvidistantou kružnice** k; značíme ji e_1, resp. e_2.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme $e_1 \cup e_2 = \{X \in E_2; |Xk_1| = d\}$.

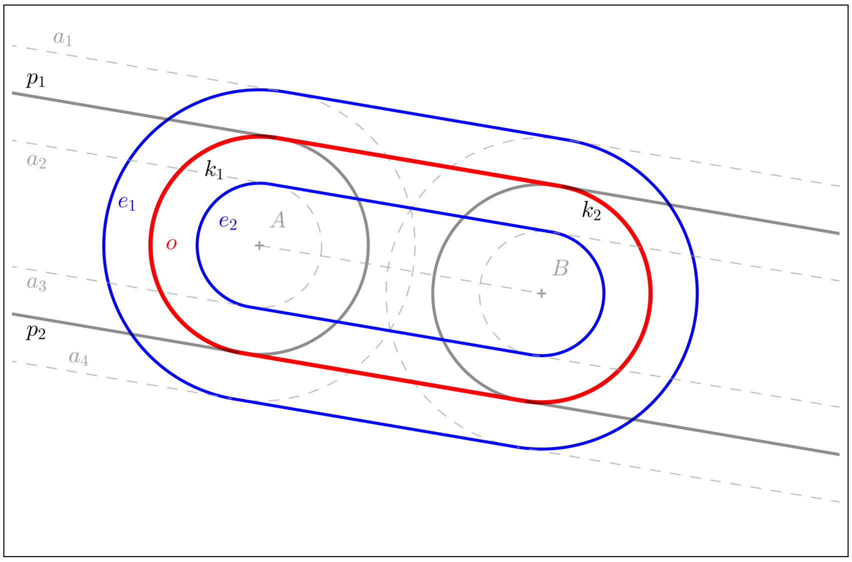


Obrázek 2.27: Ekvidistanta kružnice k

V předchozí kapitole jsme se věnovali ekvidistantě úsečky neboli oválu. Nyní hledejme množinu bodů, která má od dvou oválů stejnou vzdálenost, tj. *osu oválu*.

Příklad 2.5.3

Na následujícím appletu na *obr.* 2.28 jsou zobrazeny dva ovály e_1 a e_2, které vznikly jako ekvidistanty stejné úsečky AB. Pomocí šipek v levém dolním rohu si zobrazte jednotlivé kroky řešení úlohy a pozorujte, jaký útvar bude osou oválů e_1 a e_2. Vysvětlete.



Obrázek 2.28: Applet - osa oválů

V appletu na *obr.* 2.28 jsou jako první sestrojeny přímky p_1 a p_2. Přímky vznikly jako osy pásů daného přímkami a_1 a a_2, resp. a_3 a a_4, na kterých leží části oválů. Následně jsou sestrojeny osy mezikruží kružnic, které tvoří „boční části" oválu. V posledním kroku je sestrojena osa o oválů e_1 a e_2, která je také oválem.

3. Rozšíření poznatků ze základní školy

3.1 Množiny bodů dané vlastnosti definované pomocí středů kružnic

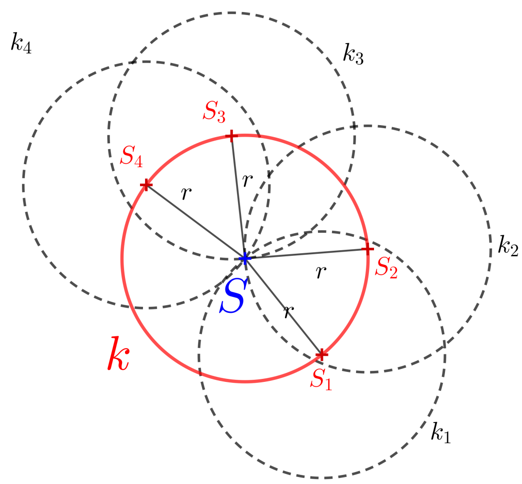
Definice, které jsou uvedeny v předchozích kapitolách, nejsou jedinými možnými definicemi daných množin bodů dané vlastnosti. Všechny dosud uvedené definice využívaly pojmu vzdálenosti. Dalším způsobem, jak lze množiny bodů dané vlastnosti zkoumat, je pomocí zadaného bodu (resp. jiného útvaru), kterým prochází (resp. kterého se dotýkají) všechny možné kružnice.

3.1.1 Kružnice

Připomeňme si definici kružnice z kapitoly 2.1 *Kružnice a kruh*.

Definice 12. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost $r > 0$, se nazývá* ***kružnice*** k ***se středem*** S ***a poloměrem*** r*; značíme ji* $k(S, r)$.

Mějme zadaný bod S a hledejme množinu středů všech kružnic, které daným bodem prochází a mají poloměr r, viz *obr.* 3.1. Je zřejmé, že všechny středy kružnic budou od bodu S vzdáleny právě o poloměr r a z definice uvedené výše víme, že množina všech bodů, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost, je kružnice.



Obrázek 3.1: Kružnice jako množina středů kružnic

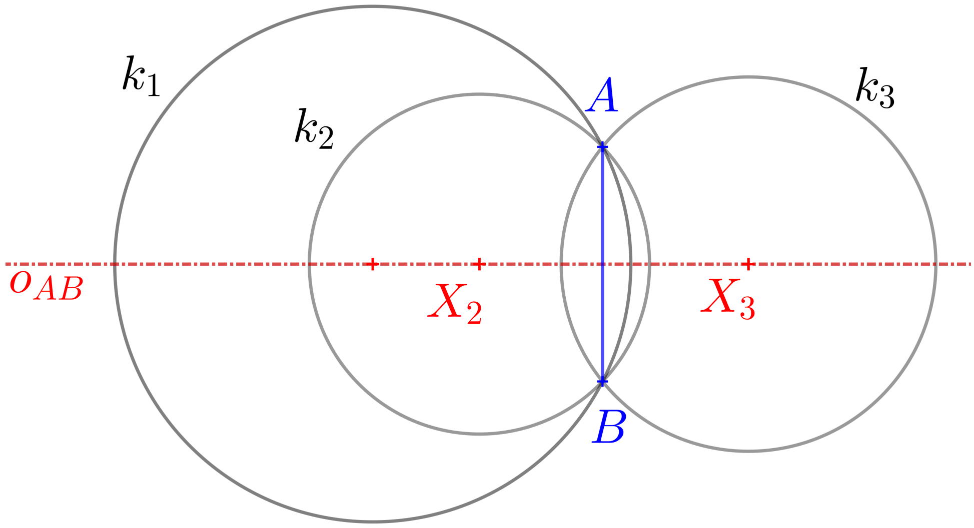
Definice 13. *Množina středů všech kružnic o poloměru r, které prochází daným bodem S, se nazývá* ***kružnice*** k ***se středem*** S ***a poloměrem*** r*; značíme ji* $k(S, r)$.

3.1.2 Osa úsečky

Již jsme definovali osu úsečky AB v kapitole 2.2 *Osa úsečky* následujícím způsobem.

Definice 14. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daných bodů A, B, $A \neq B$, stejnou vzdálenost, se nazývá* ***osa úsečky*** *AB; značíme ji o_{AB}.*

Nyní budeme hledat množinu středů kružnic, které prochází krajními body úsečky AB, viz *obr.* 3.2. Na rozdíl od předchozí definice kružnice však tyto kružnice nemusí mít stejný poloměr.



Obrázek 3.2: Osa úsečky jako množina středů kružnic procházejících body A, B

Víme, že body A, B musí mít od hledaných středů stejnou vzdálenost, proto tyto středy leží na ose úsečky AB.

Definice 15. *Množina středů všech kružnic procházejících body A, B, $A \neq B$, se nazývá* ***osa úsečky*** *AB; značíme ji o_{AB}.*

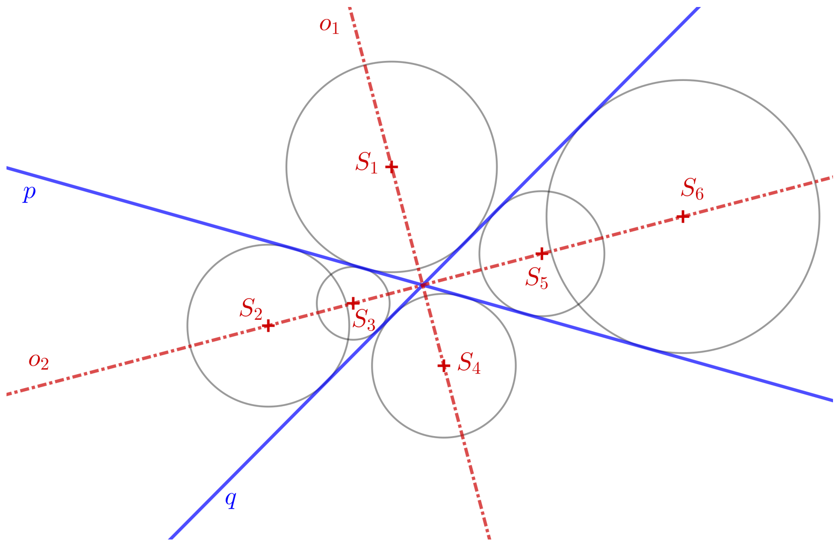
3.1.3 Osa různoběžek

V kapitole 2.3 *Osa úhlu* jsme definovali osu různoběžek následujícím způsobem.

Definice 16. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daných různoběžek p a q stejné vzdálenosti, je sjednocení dvou navzájem kolmých přímek; nazýváme ji* ***osa různoběžek*** *p, q a značíme $o_1 \cup o_2$.*

Naším cílem je definovat osu různoběžek pomocí středů kružnic. Víme, že libovolný bod ležící na ose různoběžek má od daných různoběžek stejnou vzdálenost, viz *obr.* 3.3. Zaměříme se nyní na průsečík přímek p a q. Průsečík různoběžek nemůže být středem dotýkající se kružnice, jelikož vzdálenost průsečíku od obou přímek je 0.

Definice 17. *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou různoběžek p a q, je sjednocení dvou navzájem kolmých přímek bez jejich průsečíku.*



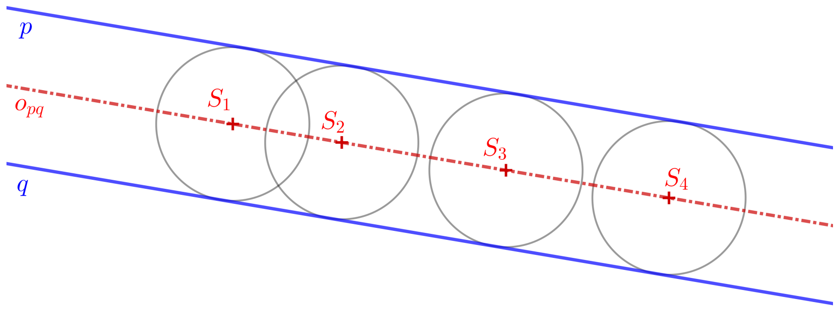
Obrázek 3.3: Osa různoběžek bez jejich průsečíku jako množina středů kružnic

3.1.4 Osa rovinného pásu a ekvidistanta přímky

V kapitole 2.4 *Osa rovinného pásu* jsme uvedli následující definici.

Definice 18. *Množina všech bodů v rovině, které mají od daných rovnoběžek p, q, $p \neq q$, stejnou vzdálenost, se nazývá* ***osa rovinného pásu*** *daného přímkami p, q; značíme ji o_{pq}.*

Osa rovinného pásu je přímka, která je rovnoběžná s danými rovnoběžkami a od obou má stejnou vzdálenost. Nepřekvapí nás proto, jak bude vypadat její definice pomocí středů kružnic. Středy všech hledaných kružnic mají stejnou vzdálenost od daných rovnoběžek, tj. leží na jedné přímce tak, jak je zobrazeno na *obr.* 3.4.



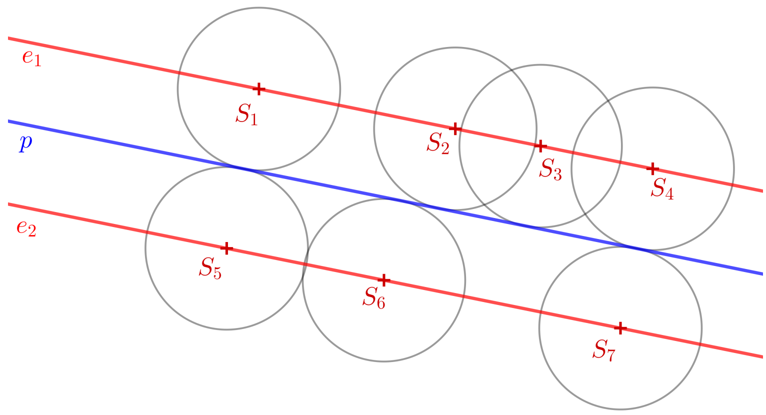
Obrázek 3.4: Osa rovinného pásu jako množina středů kružnic

Definice 19. *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek p, q, $p \neq q$, se nazývá osa rovinného pásu daného přímkami p, q; značíme ji o_{pq}.*

V kapitole 2.4 *Osa rovinného pásu* jsme uvedli ještě množinu bodů, která s osou rovinného pásu úzce souvisí, a to ekvidistantu přímky. Připomeňme klasickou definici pomocí pojmu vzdálenosti.

Definice 20. *Množinu všech bodů v rovině, které mají od dané přímky p danou vzdálenost $d > 0$, nazveme* ***ekvidistantou přímky*** *p; značíme ji e_1 a e_2.*

I nyní se jedná o opačný problém k hledání osy rovinného pásu a pomocí *obr.* 3.5 snadno odvodíme definici ekvidistanty přímky pomocí středů kružnic.



Obrázek 3.5: Ekvidistanta přímky jako množina středů kružnic

Definice 21. *Množina středů všech kružnic o poloměru $d > 0$, které se dotýkají dané přímky p, nazveme* ***ekvidistantou přímky*** *p; značíme ji $e_1 \cup e_2$.*

3.1.5 Osa mezikruží a ekvidistanta kružnice

Připomeňme definici uvedenou v kapitole 2.5 *Osa mezikruží.*

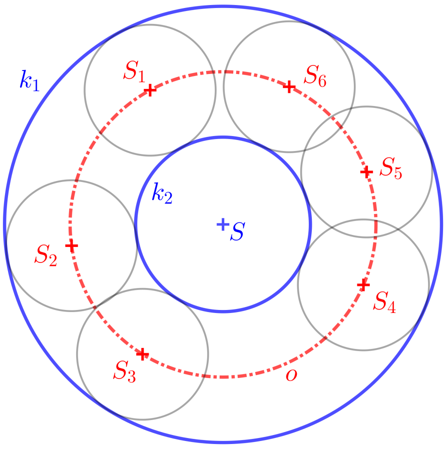
Definice 22. *Množinu všech bodů v rovině, které mají od daných kružnic $k_1(S, r_1)$ a $k_2(S, r_2)$, $r_1 \neq r_2$ stejnou vzdálenosti nazveme* ***osou mezikruží*** *ohraničeného kružnicemi k_1, k_2; značíme ji $o(S, \frac{r_1+r_2}{2})$.*

Na *obr.* 3.6 je zobrazeno, jakým způsobem lze definovat osu mezikruží pomocí středů kružnic. Hledáme středy takových kružnic, které mají s jednou ze zadaných kružnic vnitřní dotyk a s druhou vnější dotyk. Středy těchto kružnic tedy musí mít stejnou vzdálenost od daných kružnic k_1 a k_2.

Definice 23. *Množinu středů všech kružnic, které mají s jednou ze zadaných kružnic $k_1(S, r_1)$ a $k_2(S, r_2)$, $r_1 < r_2$, vnitřní dotyk a s druhou vnější dotyk, nazveme* ***osou mezikruží****; značíme ji $o(S, \frac{r_1+r_2}{2})$.*

Poznamenejme, že podmínku, aby kružnice s nalezeným středem měla s jednou ze zadaných kružnic vnitřní dotyk a s druhou vnější dotyk, nelze vynechat. Pokud bychom připustili vnitřní dotyk s oběma zadanými kružnicemi, množina středů těchto kružnic by od zadaných kružnic neměla stejnou vzdálenost.

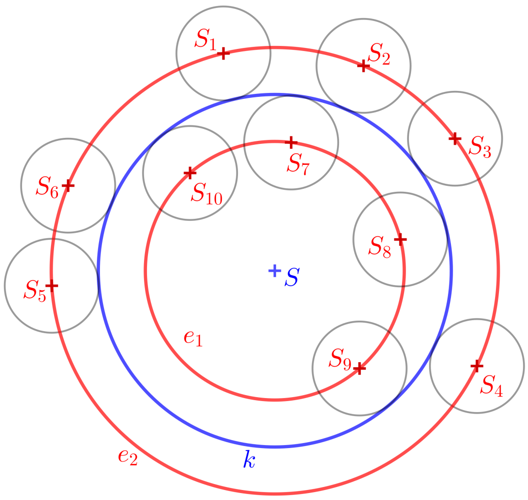
Poslední množina, kterou známe z kapitoly 2.5 *Osa mezikruží*, je ekvidistanta kružnice. V tomto případě se však omezíme pouze na situace, kde $d > r$.



Obrázek 3.6: Osa mezikruží jako množina středů kružnic

Definice 24. *Množinu všech bodů v rovině, které mají od dané kružnice $k(S, r)$ danou vzdálenost $d > r$, nazveme **ekvidistantou kružnice** k; značíme ji e_1, resp. e_2.*

Ekvidistantu kružnice lze definovat pomocí středů kružnic obdobným způsobem jako u ekvidistanty přímky, viz *obr.* 3.7.



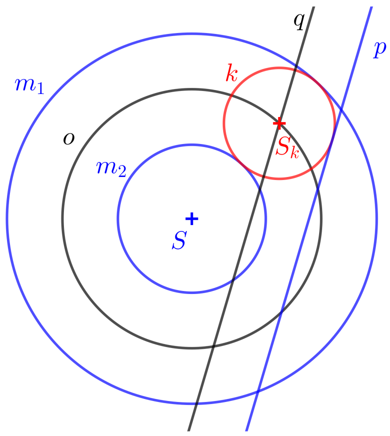
Obrázek 3.7: Ekvidistanta kružnice jako množina středů kružnic

Definice 25. *Množina středů všech kružnic o poloměru $d > r$, které se dotýkají dané kružnice $k(S, r)$, nazveme ekvidistantou kružnice k; značíme ji e_1, resp. e_2.*

Úloha 3.1.1

Jsou dány soustředné kružnice $m_1(S, r_1)$, $m_2(S, r_2)$, kde $r_2 < r_1$, a přímka p, pro kterou platí $r_2 < |Sp| < r_1$. Sestrojte všechny kružnice, které mají s kružnicí m_1 vnitřní dotyk a s kružnicí m_2 vnější dotyk a dotýkají se přímky p.

Rozbor



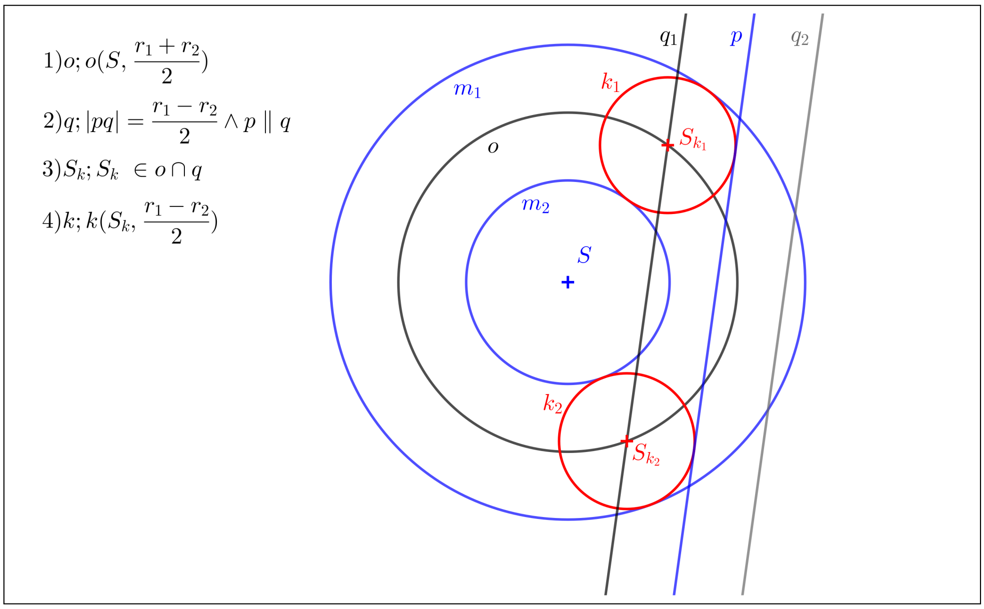
Obrázek 3.8: Ilustrace k řešení úlohy 3.1.1

Množinou středů kružnic, které se současně dotýkají daných kružnic $m_1(S, r_1)$ a $m_2(S, r_2)$ a leží v mezikruží kružnic m_1 a m_2, je osa mezikruží (v *obr.* 3.8 označena o). Poloměr osy mezikruží je roven $\frac{r_1+r_2}{2}$.

Střed S_k hledané kružnice k musí mít od obou daných kružnic vzdálenost $\frac{r_1-r_2}{2}$. Stejnou vzdálenost musí mít tedy i od přímky p. Množina bodů, které mají od přímky p stejnou vzdálenost $\frac{r_1-r_2}{2}$ je rovnoběžka q, pro kterou platí $|qp| = \frac{r_1-r_2}{2}$.

Střed S_k hledané kružnice je průsečíkem kružnice o a přímky q. Poloměr kružnice k je roven $\frac{r_1-r_2}{2}$.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.9: Applet - konstrukce a zápis konstrukce úlohy 3.1.1

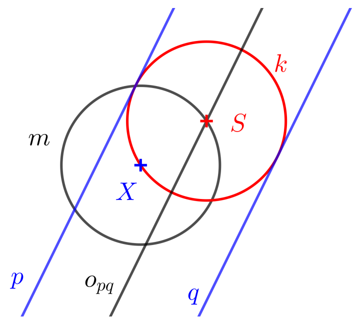
Závěr

Při dodržení podmínky $r_2 < |Sp| < r_1$ nezávisí počet řešení na poloze přímky p. Úloha 3.1.1 má tedy 2 řešení, viz applet na *obr.* 3.9.

Úloha 3.1.2

Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p, q a bod X, který leží uvnitř pásu daného přímkami p a q. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímek p, q a $X \in k$.

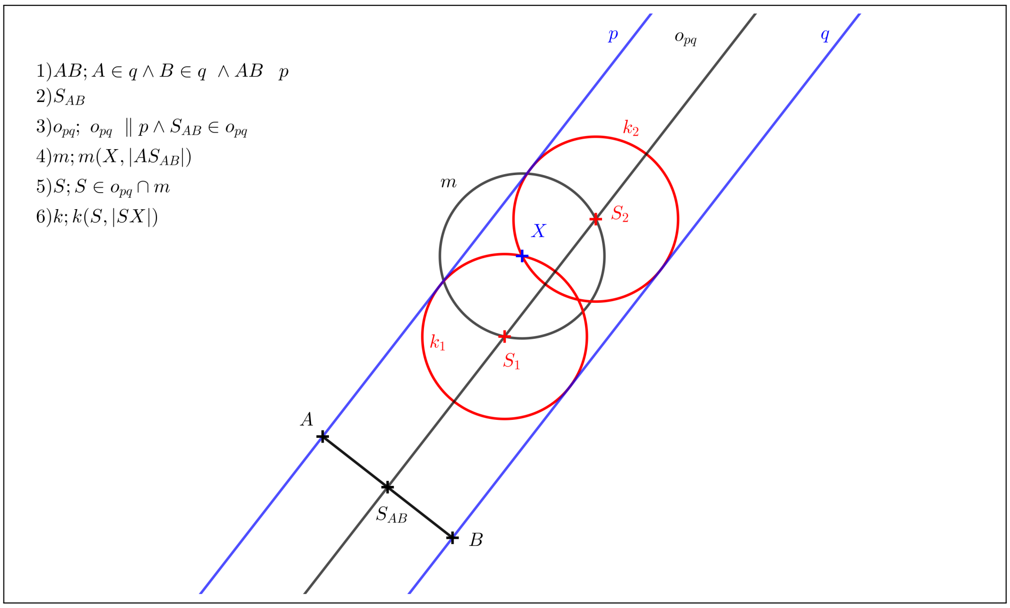
Rozbor



Obrázek 3.10: Ilustrace k řešení úlohy 3.1.2

Množina středů kružnic, které se dotýkají dvou rovnoběžných přímek p a q je osa rovinného pásu daného přímkami p a q, na *obr.* 3.10 je označená o_{pq}. Poloměr hledané kružnice musí být roven $\frac{|pq|}{2}$, proto je střed S hledané kružnice k průsečíkem osy rovinného pásu o_{pq} a kružnice $m(X, \frac{|pq|}{2})$.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.11: Applet - konstrukce a zápis konstrukce úlohy 3.1.2

Závěr

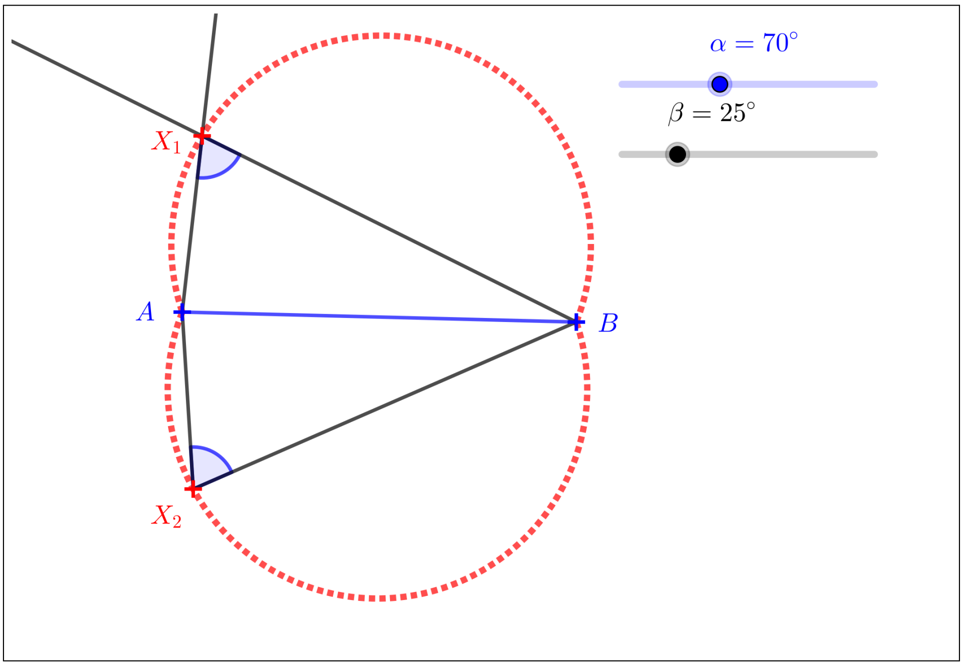
Úloha 3.1.2 má 2 řešení, viz applet na *obr.* 3.11. Počet řešení nezávisí na konkrétní poloze bodu X uvnitř pásu, což lze ověřit v appletu na *obr.* 3.11.

3.2 Kružnicové oblouky

Další množina, kterou si rozebereme, se obvykle probírá až na střední škole. Jedná se o množinu bodů, z nichž vidíme úsečku pod daným úhlem α, kde $\alpha \in (0°; 180°)$.

Příklad 3.2.1

V následujícím appletu na *obr.* 3.12 je zobrazena úsečka AB, kde $A \neq B$ (tj. úsečka nenulové délky), a posuvník, pomocí kterého lze měnit zadaný úhel α. Polopřímka BX_1 svírá s úsečkou AB úhel β a polopřímka AX_1 svírá s úsečkou AB úhel $180° - \alpha - \beta$. Tím je zajištěno, aby úhel AX_1B byl roven α. Bod X_2 je souměrně sdružený s bodem X_1 podle úsečky AB. V appletu měňte velikosti úhlu β pomocí posuvníku a sledujte, jakou množinu vykreslují polohy bodů X_1 a X_2 pro zvolené α. Poté zkoumejte, jak se mění tvar nalezené množiny bodů, pokud změníte velikost úhlu α.



Obrázek 3.12: Applet - kružnicové oblouky

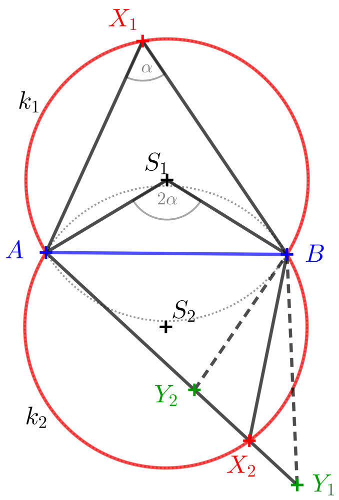
Úloha k zamyšlení: Jaký geometrický útvar vznikne?

Řešení: Z appletu na *obr.* 3.12 se jeví, že množina bodů, z nichž vidíme úsečku AB pod daným úhlem $\alpha \in (0°; 180°)$, je sjednocení dvou kružnicových oblouků. Do množiny nepatří krajní body úsečky A a B a poloměr kružnicových oblouků závisí na úhlu α.

Jelikož množina bodů závisí na úhlu α, budeme nejdříve zkoumat vzniklý útvar ve třech různých situacích. Interval $(0°; 180°)$ rozdělíme na tři možnosti, a to $\alpha \in (0°; 90°)$, $\alpha = 90°$ a $\alpha \in (90°; 180°)$.

$\alpha \in (0°; 90°)$

Pomocí appletu na *obr.* 3.12 jsme zjistili, že množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem α jsou dva shodné kružnicové oblouky, jejichž poloměr a poloha středu se mění podle úhlu α.



Obrázek 3.13: Množina bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $\alpha \in (0°; 90°)$

Musíme dokázat, že každý bod X dané množiny má požadovanou vlastnost a zároveň každý bod, který do dané množiny nepatří, požadovanou vlastnost nemá. Úhel AS_1B, resp. AS_2B na *obr.* 3.13, je středový úhel příslušný ke kružnicovému oblouku AB, který v daném úhlu leží, a zároveň $\angle AXB$ je obvodový úhel příslušný kružnicovému oblouku AB, který v daném úhlu leží. Je-li bod S_1, resp. S_2, zkonstruován tak, aby platilo $|\angle AS_1B| = |\angle AS_2B| = 2\alpha$, na základě vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem příslušných ke stejnému oblouku musí platit $|\angle AXB| = \alpha$.

Nyní se podíváme na bod Y_1, který leží vně kružnicového oblouku. V trojúhelníku BX_2Y_1 musí platit, že součet velikostí vnitřních úhlů je roven 180°. Tedy

$$|\angle BX_2Y_1| + |\angle X_2Y_1B| + |\angle Y_1BX_2| = 180°.$$

Zároveň však víme, že $\angle AX_2B = \alpha$ je vedlejší k $\angle BX_2Y_1$. Platí tedy

$$180° - \alpha + |\angle X_2Y_1B| + |\angle Y_1BX_2| = 180°,$$

což lze upravit na

$$|\angle X_2Y_1B| + |\angle Y_1BX_2| = \alpha.$$

Z toho plyne, že velikost úhlu X_2Y_1B je menší než α. Zbývá dokázat, že bod Y_2 ležící uvnitř kruhového oblouku také danou vlastnost nesplňuje. Obdobnou úvahou lze zjistit, že pro ΔBY_2X_2 platí

$$|\angle BX_2Y_2| + |\angle X_2Y_2B| + |\angle Y_2BX_2| = 180°,$$

$$\alpha + |\angle X_2Y_2B| + |\angle Y_2BX_2| = 180°.$$

Úhel X_2Y_2B je vedlejší k úhlu AY_2B, platí tedy

$$\alpha + 180° - |\angle AY_2B| + |\angle Y_2BX_2| = 180°,$$

$$\alpha + |\angle Y_2BX_2| = |\angle AY_2B|.$$

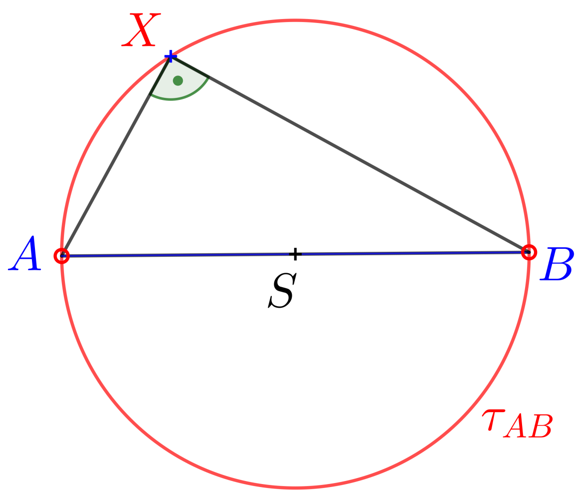
Proto velikost úhlu AY_2B musí být větší než α. Tím jsme zdůvodnili následující tvrzení.

Věta 9. *Množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $\alpha \in (0°; 90°)$, jsou dva větší kružnicové oblouky AB kružnic $k_1(S_1, |AS_1|)$ a $k_2(S_2, |AS_2|)$, které jsou souměrně sdružené podle přímky AB, vyjma bodů A a B. Pro body S_1 a S_2 platí $|\angle AS_1B| = |\angle AS_2B| = 2\alpha$ a zároveň leží na ose úsečky AB.*

$\alpha = 90°$

Snadno ověřitelným případem je pravý úhel. Jistě si uvědomíme, že se jedná o kružnici, ze které vyloučíme body A a B. Tento útvar jsme rozebrali v kapitole 2.1 *Kružnice a kruh*, jedná se o Thaletovu kružnici, viz *obr.* 3.14.

Věta 10. *Množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $90°$, je Thaletova kružnice nad průměrem AB.*



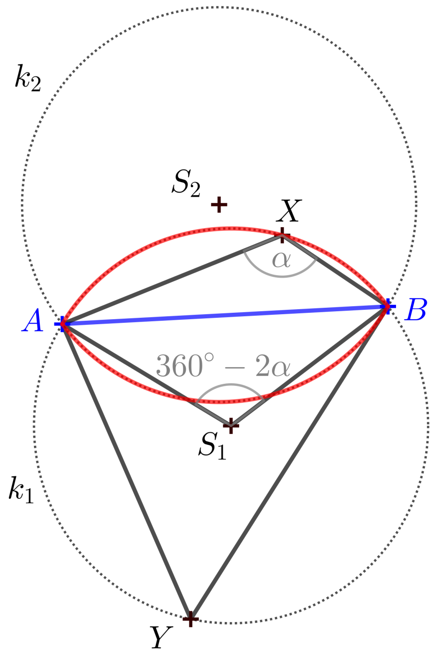
Obrázek 3.14: Množina bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $90°$

$\alpha \in (90°; 180°)$

V appletu na *obr.* 3.12 bylo možné měnit velikost úhlu α i na hodnoty z intervalu $(90°; 180°)$. Lze tedy rovnou formulovat následující tvrzení.

Věta 11. *Množinou bodů v rovině, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $\alpha \in (90°; 180°)$, jsou dva menší kružnicové oblouky AB kružnic $k_1(S_1, |AS_1|)$ a $k_2(S_2, |AS_2|)$, které jsou souměrně sdružené podle přímky AB, vyjma bodů A, B. Pro body S_1 a S_2 platí $|\angle AS_1B| = |\angle AS_2B| = 360° - 2\alpha$ a zároveň leží na ose úsečky AB.*

Důkaz uvedeného tvrzení plyne z důkazu pro úhel $\alpha \in (0°; 90°)$ a využívají se v něm vlastnosti tětivového čtyřúhelníku.



Obrázek 3.15: Množina bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $\alpha \in (90°; 180°)$

Rozšiřující učivo: Tvrzení je obdobné jako pro úhel velikosti $\alpha \in (0°; 90°)$. Liší se pouze v tom, kterou část oblouku uvažujeme (v které polorovině vymezené přímkou AB, a v podmínce, která musí platit pro úhly AS_1B a AS_2B. Proč je podmínka pro velikost středových úhlů uvedena ve tvaru $360° - 2\alpha$, ukazuje následující *obr.* 3.16. Zelenou barvou je znázorněn úhel α. Jelikož přímka p byla zkonstruována tak, aby s polopřímkou AY svírala pravý úhel (tj. červeně vyznačený úhel), musí pro $\angle BAS_1$ (tj. modře vyznačený úhel) platit
$|\angle BAS_1| = \alpha - 90°$.
Trojúhelník AS_1B je rovnoramenný, musí tedy platit

$$180° = 2(\alpha - 90°) + |\angle AS_1B|\,,$$

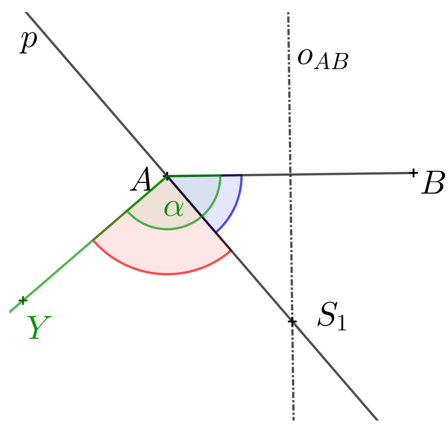
z čehož po úpravě plyne uvedená podmínka $|\angle AS_1B| = 360° - 2\alpha$.
To, že velikost úhlu AS_1B je rovna $360° - 2\alpha$, lze zdůvodnit vlastnostmi tětivového čtyřúhelníku, kde součet velikostí dvou protějších vnitřních úhlů je vždy roven 180°. V *obr.* 3.15 je zobrazen tětivový čtyřúhelník $AYBX$, kde bod X je vrcholem požadovaného úhlu α, a kružnice jemu opsaná k_1. Úhel AS_1B je středový úhel příslušný k oblouku kružnice k_1, který v něm leží, a $\angle AYB$ je obvodový úhel příslušný stejnému oblouku kružnice k_1. Je-li bod S_1 zkonstruován tak, aby platilo $|\angle AS_1B| = 360° - 2\alpha$, musí platit rovnost $2\,|\angle AYB| = 360° - 2\alpha$, kterou lze upravit na

$$|\angle AYB| + \alpha = 180°.$$

V tětivovém čtyřúhelníku zároveň musí platit

$$|\angle AYB| + |\angle AXB| = 180°.$$

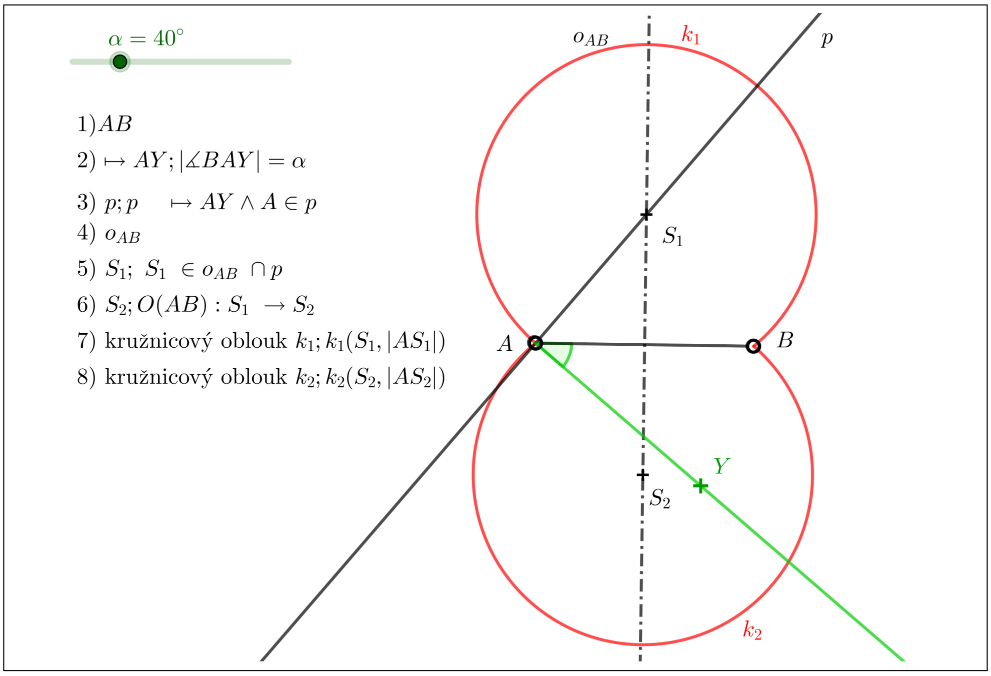
Odtud je tedy vidět, že $|\angle AXB| = \alpha$. Obdobně bychom mohli provést důkaz pro libovolný bod z dané množiny bodů. Druhá část důkazu by proběhla obdobně jako pro úhel z intervalu $(0°; 90°)$.



Obrázek 3.16: Konstrukce středu S_1

Příklad 3.2.2

Z uvedených důkazů plyne konstrukce množiny bodů, ze kterých je danou úsečku AB vidět pod úhlem α. V appletu na *obr.* 3.17 lze měnit velikost úhlu α. Šipkou v levém dolním rohu zobrazte jednotlivé kroky konstrukce včetně zápisu. Pro další část výkladu je v appletu na *obr.* 3.17 možné velikosti úhlu α měnit až do velikosti 179° (při úhlu velikosti 180° by nevznikl trojúhelník AXB). Na základě appletu zdůvodněte správnost konstrukce množiny bodů dané vlastnosti pro úhly z intervalu $(0°; 90°)$.



Obrázek 3.17: Applet - konstrukce kružnicových oblouků

Konstrukce plyne ze zdůvodnění tvrzení 9 pro úhel z intervalu $(0°; 90°)$. Úhel AS_1B je středový úhel příslušný ke kružnicovému oblouku AB, který v daném úhlu leží, a zároveň $\angle AXB$ je obvodový úhel příslušný kružnicovému oblouku AB, který v daném úhlu leží. Jelikož ΔABS_1 je rovnoramenný, musí být úhly u vrcholů A a B shodné a zároveň musí platit $|\angle BAS_1| = |\angle ABS_1| = 90° - \alpha$. Z toho plyne

$$180° = |\angle AS_1B| + |\angle ABS_1| + |\angle BAS_1|\,,$$

$$180° = |\angle AS_1B| + 90° - \alpha + 90° - \alpha = |\angle AS_1B| + 180° - 2\alpha,$$

$$2\alpha = |\angle AS_1B|\,.$$

Konstrukce tedy skutečně byla provedena tak, aby úhel AS_1B byl roven 2α. Obdobně by proběhl důkaz pro střed S_2, který je souměrně sdružený se středem S_1 podle osy AB.

Pro úplnost uvedeme další možnosti velikosti úhlu α, a to $\alpha = 180°$ a $\alpha = 0°$. V těchto případech se však nejedná o kružnicové oblouky.

$\alpha = 180°$

Jako první lze zkoumat $\alpha = 180°$. To nastane pouze tehdy, leží-li bod X na úsečce AB. Pokud by však bod X byl shodný s bodem A nebo B, nevznikl by úhel, musíme tedy tyto body z množiny vyloučit, viz *obr.* 3.18.

Věta 12. *Množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $180°$, je úsečka AB vyjma bodů A a B.*

Obrázek 3.18: Množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $180°$

$\alpha = 0°$

Podobný, ne však stejný případ je pro $\alpha = 0°$. V takovém případě musí bod X ležet na přímce AB, bez úsečky AB. Zároveň musíme opět vyloučit body A a B, viz *obr.* 3.19.

Věta 13. *Množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $0°$, je přímka AB vyjma úsečky AB.*

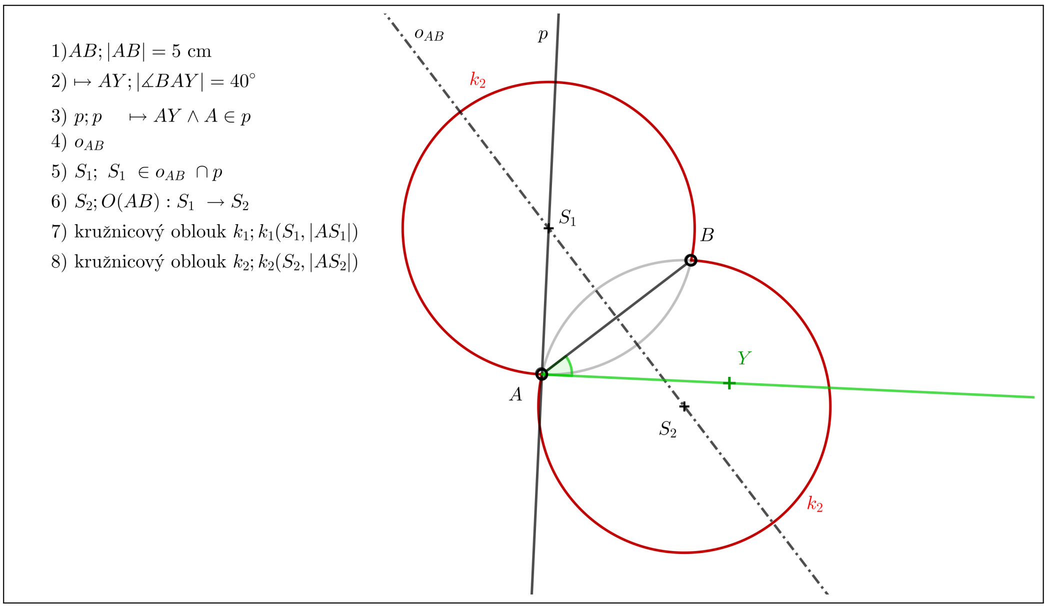
Obrázek 3.19: Množinou bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $0°$

Následující dvě úlohy jsou konkrétním využitím postupu uvedeném v appletu na *obr.* 3.17, proto se v jejich řešení omezíme pouze na část konstrukce a zápis konstrukce.

Úloha 3.2.1

Je dána úsečka AB, $|AB| = 5$ cm. Sestrojte množinu bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem $40°$.

Konstrukce a zápis konstrukce

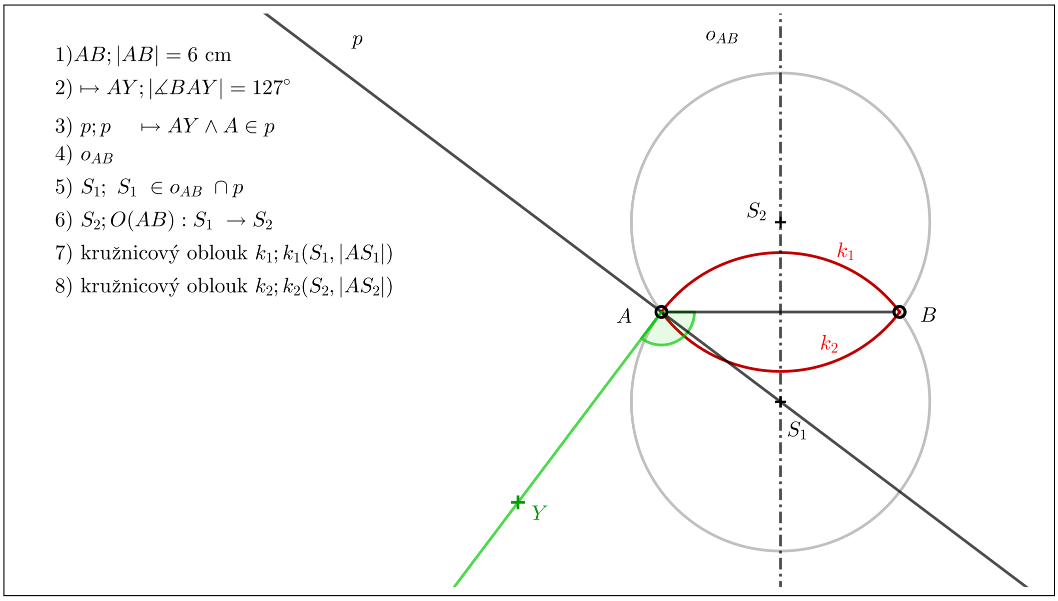


Obrázek 3.20: Applet - konstrukce a zápis konstrukce úlohy 3.2.1

Úloha 3.2.2

Je dána úsečka AB, $|AB| = 6$ cm. Sestrojte množinu bodů, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem 127°.

Konstrukce a zápis konstrukce

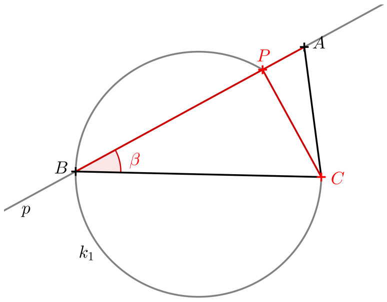


Obrázek 3.21: Applet - konstrukce a zápis konstrukce úlohy 3.2.2

Úloha 3.2.3

Je dána úsečka CP, $|CP| = 6$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které úsečka CP je výškou ke straně c a zároveň platí $\beta = 50°$ a $c = 4$ cm.

Rozbor

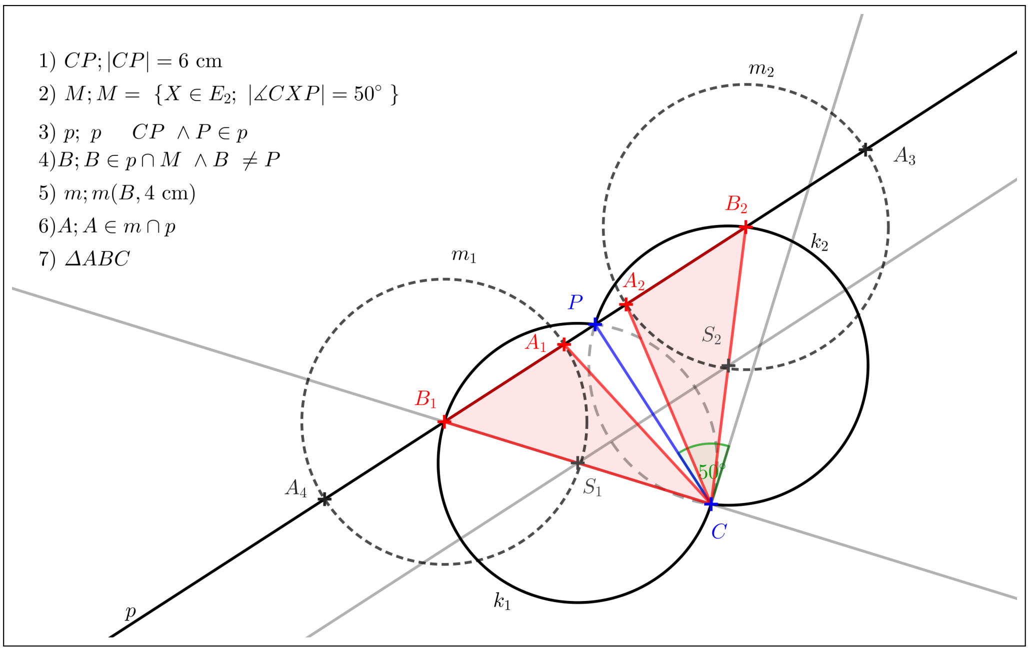


Obrázek 3.22: Ilustrace k řešení úlohy 3.2.3

Jelikož je dána úsečka CP, musíme právě touto úsečkou začít. Strana c je kolmá k úsečce CP, musí tedy ležet na přímce p, která je kolmá k úsečce CP a prochází bodem P. Hledaný bod B leží jednak na přímce p, jednak je bodem množiny bodů M, ze kterých je úsečka CP vidět pod úhlem 50°, tj. náleží sjednocení kružnicových oblouků k_1 a k_2.

Bod B je tedy průsečíkem přímky p a množiny M. Strana c měří 4 cm, proto je bod A průsečíkem přímky p a kružnice se středem v bodě B a poloměrem 4 cm.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.23: Applet - konstrukce a zápis konstrukce úlohy 3.2.3

Závěr V konstrukci jsou vyznačeny i body A_3 a A_4. Pokud bychom však zkonstruovali trojúhelník A_3B_2C, resp. A_4B_1C, trojúhelníky by nesplňovaly zadání, jelikož velikost úhlu β by potom nebyla 50°. Úloha 3.2.3 má tedy 2 řešení, viz applet na *obr.* 3.23.

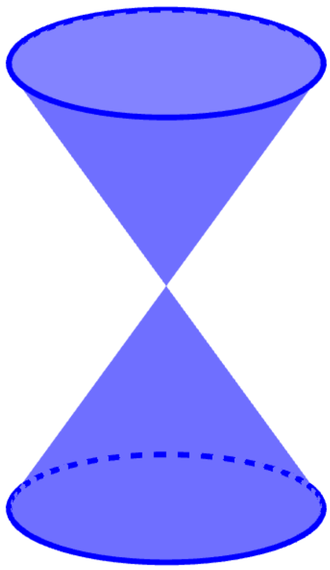
4. Kuželosečky

4.1 Kuželosečky jako množiny středů kružnic

Dalšími množinami bodů, kterými se budeme zabývat, jsou *kuželosečky.* Na střední škole jste se zabývali zejména kuželosečkami regulárními, tedy parabolou, hyperbolou, kružnicí a elipsou, a to zejména z pohledu analytické geometrie. Zaměříme se pouze na regulární kuželosečky z pohledu planimetrie. Zopakujeme základní vlastnosti kuželoseček a následně zavedeme kuželosečky jako množiny středů kružnic dané vlastnosti.

Následující kapitoly věnující se parabole, elipse a hyperbole tedy vychází z předpokladu, že studenti ze střední školy znají základní pojmy, které s danými kuželosečkami souvisí. Pojmy tedy nejsou kompletně zavedeny a odvozeny, pouze zopakovány.

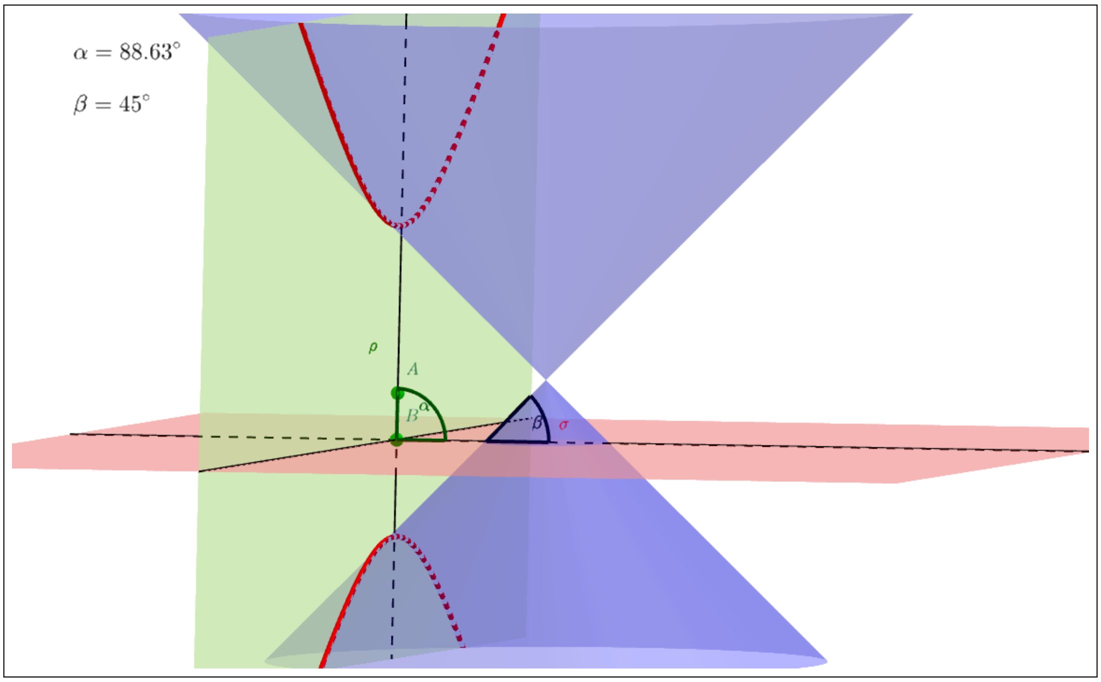
Kuželosečky vzniknou řezem rotační kuželové plochy. Kuželovou plochu si jednoduše můžeme představit jako plášť nekonečně vysokého dvojkužele (tj. dva shodné kužely spojené vrcholem, viz *obr.* 4.1). Povedeme-li potom příslušný řez kuželové plochy rovinou, získáme jednu z kuželoseček - *parabola, hyperbola, elipsa* (případně *kružnice*, které jsme se věnovali v kapitole 2.1 Kružnice a kruh).



Obrázek 4.1: Dvojkužel

Příklad 4.1.1

V následujícím appletu na *obr.* 4.2 je zobrazena část kuželové plochy a roviny σ a ρ. Rovina σ je kolmá k ose kuželové plochy. Pohybujte bodem A pro změnu odchylky rovin σ a ρ a bodem B pro změnu pozice roviny ρ. Jak budou vypadat jednotlivé křivky, které vzniknou jako řez kuželové plochy rovinou ρ?

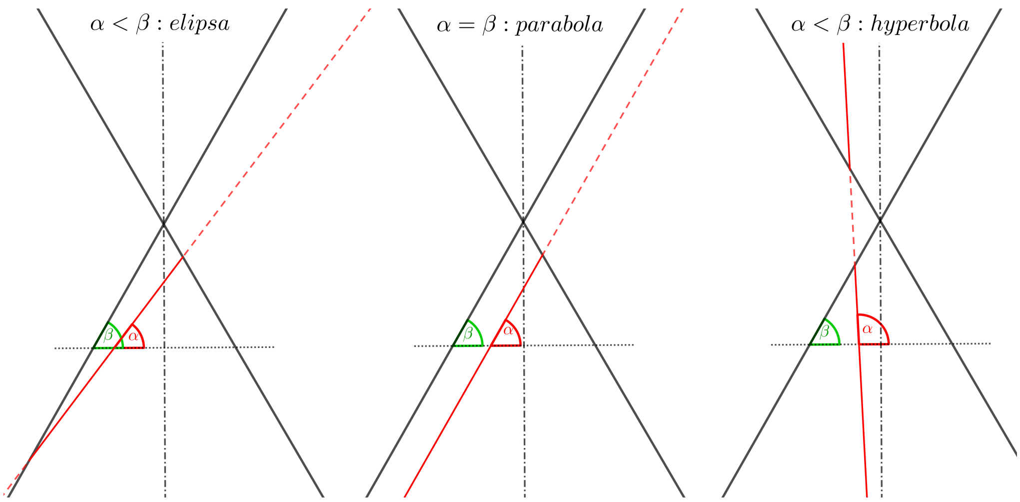


Obrázek 4.2: Applet - řez kuželem

Mohou nastat celkem tři situace. Je-li

- $\alpha < \beta$, vznikne uzavřená křivka podobná kružnici - *elipsa*,
- $\alpha = \beta$, vznikne neuzavřená křivka na jedné části kuželové plochy - *parabola*,
- $\alpha > \beta$, vznikne neuzavřená křivka na obou částech kuželové plochy - *hyperbola*.

Všimněte si také, že čím více se velikost úhlu α přibližuje 0°, tím více se elipsa podobá kružnici. Tuto skutečnost více okomentujeme v kapitole 4.3 věnující se *Elipse*. Uvedené poznatky shrnuje *obr.* 4.3, na kterém jsou schematicky zachyceny tři situace řezu kuželové plochy rovinou dle vztahů mezi velikostmi úhlů α a β.



Obrázek 4.3: Druhy kuželoseček

Vraťme se nyní k appletu na *obr.* 4.3. Kromě uvedených regulárních kuželoseček (elipsa, parabola, hyperbola, kružnice) mohou nastat další speciální případy - pokud rovina řezu prochází vrcholem kuželu. Takovým kuželosečkám se říká *singulární* a jedná se o

- *bod*: rovina řezu prochází pouze vrcholem a zároveň $\alpha < \beta$,
- *přímka*: rovina řezu prochází vrcholem a zároveň $\alpha = \beta$,
- *dvě různoběžné přímky*: rovina řezu prochází vrcholem a zároveň $\alpha > \beta$.

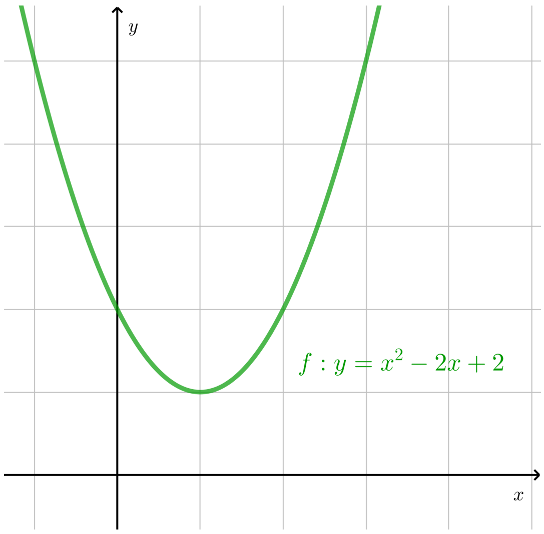
Na kuželové ploše nelze řezem získat další singulární kuželosečku, a to dvě rovnoběžné přímky. Ty vzniknou na válcové ploše při řezu rovinou rovnoběžnou s osou válcové plochy.

4.2 Parabola

S parabolou jste se setkali dříve v souvislosti s kvadratickou funkcí, která má předpis

$$f : y = ax^2 + bx + c,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla a $a \neq 0$. Například graf funkce $f : y = x^2 - 2x + 2$ vypadá následujícím způsobem.



Obrázek 4.4: Graf kvadratické funkce

Více se o kvadratických funkcích lze dozvědět na webu [2] věnujícím se *Kvadratickým funkcím.*

Jak bylo řečeno v předchozí kapitole, parabolu znáte již z [12] *analytické geometrie*, jako množinu bodů definovanou pomocí pojmu vzdálenost.

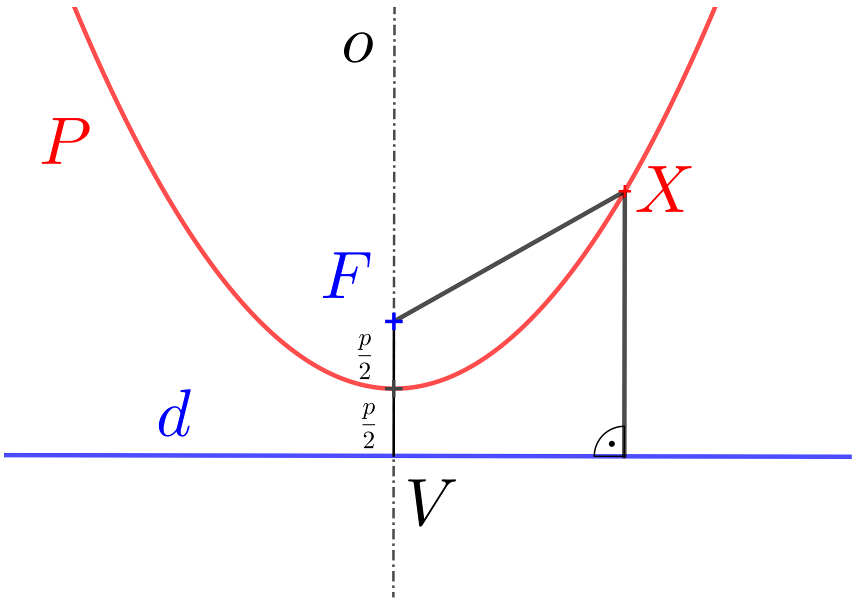
Definice 26. *Množina všech bodů, které mají od daného bodu F a přímky d, $F \notin d$, stejnou vzdálenost, se nazývá* ***parabola****; značíme ji p.*

Symbolicky výše uvedenou definici zapisujeme $P = \{X \in E_2; |XF| = |Xd|\}$.

Z *obr.* 4.5 je zřejmé, že zobrazená parabola je osově souměrná podle přímky o procházející vrcholem paraboly. Připomeneme základní pojmy, související s parabolou:

- *ohnisko paraboly*: bod F,
- *vrchol paraboly*: bod V,
- *řídicí přímka paraboly*: přímka d taková, že $F \notin d$,
- *parametr paraboly*: vzdálenost bodu F od řídicí přímky.

Vrchol paraboly přitom musí být od ohniska stejně vzdálený jako od řídicí přímky, přičemž tato vzdálenost je rovna polovině *parametru paraboly.*



Obrázek 4.5: Parabola s vyznačenou přímkou p a body X, F

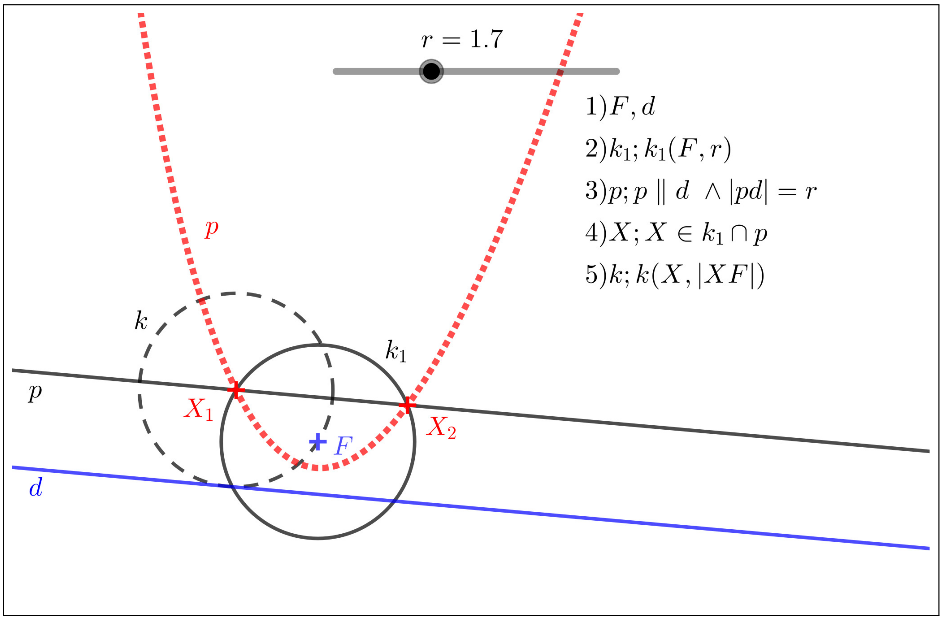
4.2.1 Parabola jako množina středů kružnic

Následující text byl inspirován publikací [7].

V kapitole 3.1 *Množiny bodů dané vlastnosti definované pomocí středů kružnic* jsme se zabývali již známými množinami bodů, avšak hledané body byly středy kružnic s požadovanou vlastností. Obdobným způsobem je možné se zabývat i parabolou. Stejně jako v předchozích částech textu musíme vyjít ze zadaných prvků - tedy ohniska F a řídicí přímky d.

Příklad 4.2.2

Určete množinu středů kružnic, které se dotýkají přímky d a prochází bodem F, $F \notin d$. V appletu na *obr.* 4.6 je uvedena konstrukce požadované množiny středů kružnic. Šipkou v levém dolním rohu zobrazte jednotlivé kroky konstrukce včetně zápisu. Po dokončení konstrukce jedné kružnice splňující dané podmínky měňte velikost poloměru r na posuvníku, čímž vykreslíte požadovanou množinu bodů.

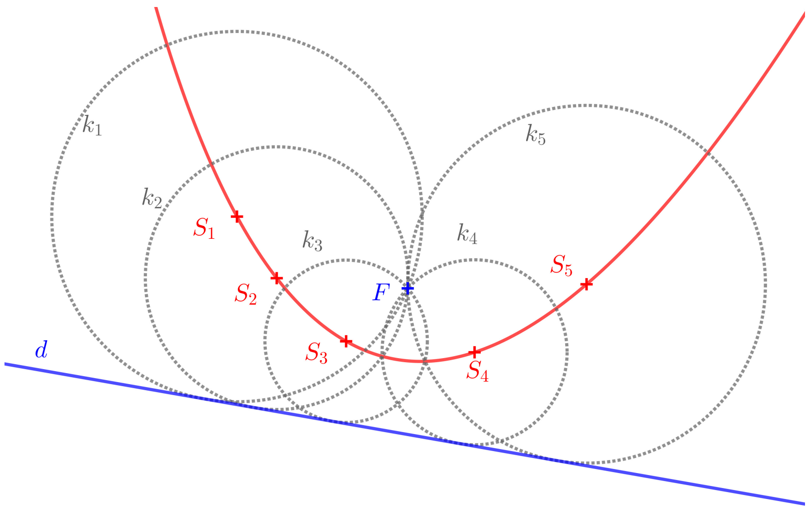


Obrázek 4.6: Applet - konstrukce středů kružnic tvořících parabolu

Uvedenou konstrukcí v appletu na *obr.* 4.6 skutečně vznikne parabola. Rovnoběžka p má vzdálenost r od hledaného bodu X a každý bod kružnice k_1 taktéž.

Lze tedy definovat parabolu jako množinu středů kružnic, viz *obr.* 4.7.

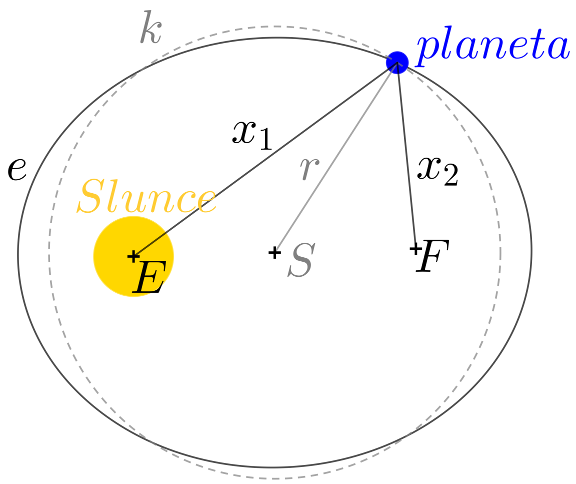
Definice 27. *Množina všech středů kružnic, které prochází daným bodem F a dotýkají se přímky d, $F \notin d$, se nazývá **parabola**; značíme ji p.*



Obrázek 4.7: Parabola jako množina středů kružnic

4.3 Elipsa

Elipsa je geometrický útvar, o kterém jsme jistě už mnohokrát slyšeli. Připomeňme si například první Keplerův zákon, který říká, že planety obíhají okolo Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.



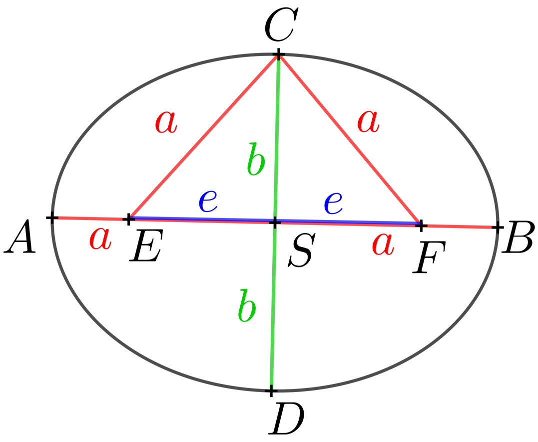
Obrázek 4.8: První Keplerův zákon

V *obr.* 4.8 je zobrazen pohyb planety okolo Slunce, které se nachází v ohnisku E elipsy e. Vidíme, že vzdálenost planety od Slunce, tj. vzdálenost x_1 se však při pohybu po elipse mění. Současně se však mění i vzdálenost x_2. Připomeňme definici elipsy, kterou známe z [12] *analytické geometrie*, jako množinu bodů definovanou pomocí pojmu vzdálenost.

Definice 28. *Mějme dány dva různé body E a F takové, že platí $2a > |EF|$. Množina všech bodů, které mají od bodů E a F součet vzdáleností roven $2a$, se nazývá **elipsa**; značíme ji e.*

Symbolicky výše uvedenou vlastnost zapisujeme
$e = \{X \in E_2; |XE| + |XF| = 2a\}$. Konstanta a je délka *hlavní poloosy*.
Na *obr.* 4.9 jsou zobrazeny důležité charakteristiky elipsy:

- bod S: *střed elipsy*,
- přímka EF: *hlavní osa elipsy*,
- body AB elipsy ležící na přímce EF: *hlavní vrcholy elipsy*,
- přímka kolmá k hlavní ose procházející středem: *vedlejší osa elipsy*,
- body CD elipsy ležící na vedlejší ose: *vedlejší vrcholy elipsy*,
- úsečka spojující hlavní vrchol elipsy a střed, tj. AS, BS: *hlavní poloosa*,
- úsečka spojující vedlejší vrchol elipsy a střed, tj. CS, DS: *vedlejší poloosa*,
- úsečka spojující ohnisko elipsy a střed, tj. ES, FS: *excentricita, výstřednost.*



Obrázek 4.9: Elipsa s vyznačenými délkami a, b, a e

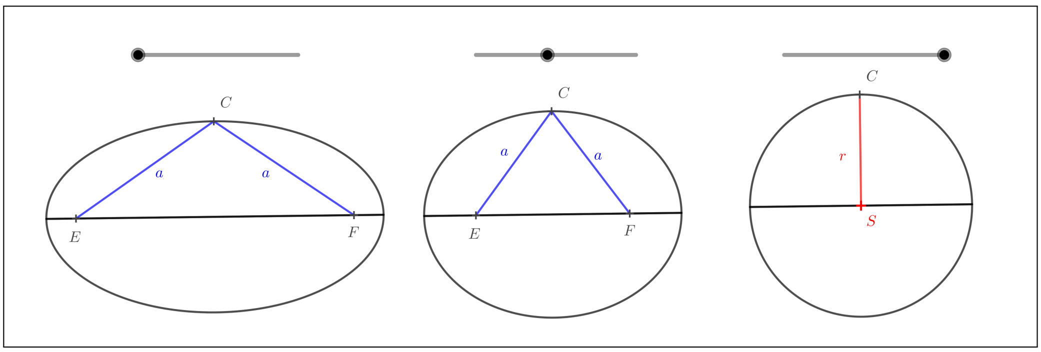
Délku hlavní poloosy značíme a, vedlejší poloosy b a vzdálenost ohnisek od středu elipsy značíme e, viz *obr.* 4.9. Pro uvedené délky úseček platí vztah

$$a^2 = e^2 + b^2$$

Již v úvodu této kapitoly bylo zmíněno, že elipsa úzce souvisí s kružnicí. V appletu na *obr.* 4.9 pohybujte ohnisky tak, aby vznikl útvar co nejbližší kružnici.

Úloha k zamyšlení: Může se z elipsy stát kružnice?

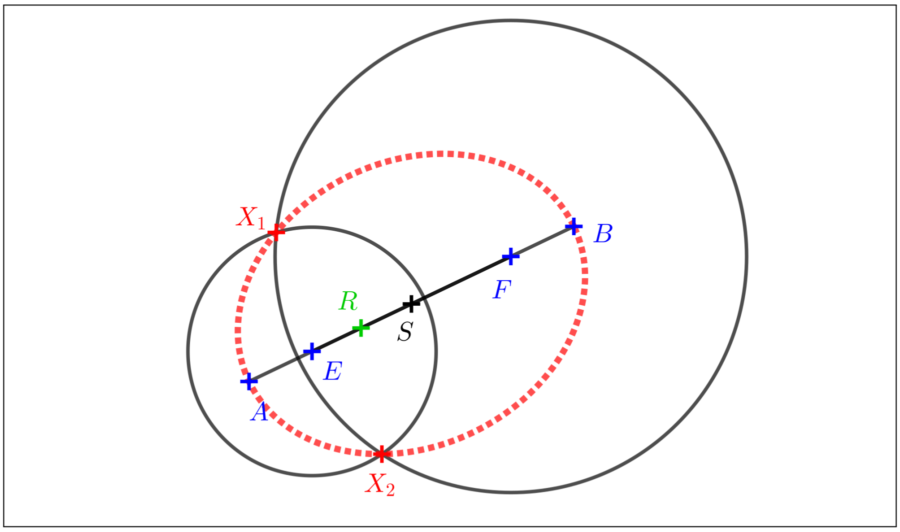
Řešení: V definici elipsy jsme sice požadovali, aby $E \neq F$, ale právě pro tuto polohu se stane z elipsy kružnice. Pokud bychom tedy podmínku $E \neq F$ vynechali, kružnice by byla speciální případ elipsy, kdy se ohniska rovnají a velikost hlavní i vedlejší poloosy je rovna poloměru kružnice, jak je znázorněno v appletu na *obr.* 4.10.



Obrázek 4.10: Applet - kružnice jako speciální případ elipsy

4.3.1 Příklad 4.3.1

V appletu na *obr.* 4.11 je zobrazena hlavní poloosa elipsy, hlavní vrcholy A a B a ohniska E a F. Bod X_1, resp. X_2, je průsečíkem kružnic k_1 a k_2 tak, aby $k_1(E, |AR|)$ a $k_2(F,|BR|)$. Bod R leží na úsečce EF a lze s ním pohybovat. Při pohybu bodem R se vykresluje stopa bodu X_1, resp. X_2. Na základě appletu ověřte, že vzniklá množina bodů je skutečně elipsa.



Obrázek 4.11: Applet - konstrukce elipsy

Vzniklá množina bodů je elipsa, jelikož bod X_1, resp. X_2, vznikl jako průsečík kružnic k_1 a k_2.

Bod X_1 má od ohniska E vzdálenost rovnou poloměru kružnice k_1 a od ohniska F vzdálenost rovnou poloměru kružnice k_2, tj. $|X_1E| = |AR|$ a $|X_1F| = |BR|$. Bod R leží na úsečce AB, jejíž délku označíme $2a$, potom platí

$$|X_1E| + |X_1F| = |AR| + |RB| = |AB| = 2a,$$

což splňují všechny body elipsy. Stejné vztahy platí pro bod X_2. Z konstrukce je zřejmé, že žádný jiný bod kromě průsečíků kružnic k_1, k_2 tuto vlastnost nesplňuje. Vzniklý útvar tedy skutečně je elipsa.

4.3.2 Elipsa jako množina středů kružnic

Následující text byl inspirován publikací [7].

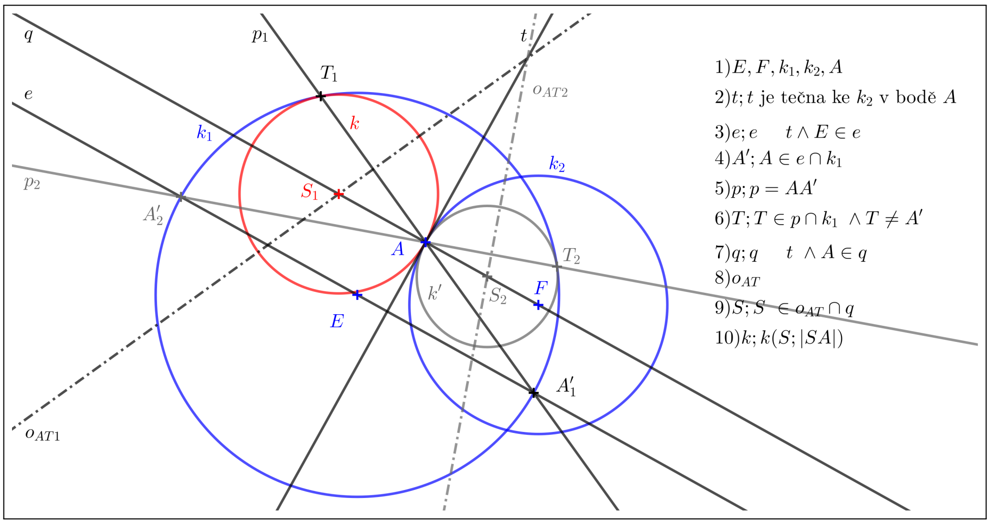
V předchozí kapitole jsme hledali parabolu jako množinu středů kružnic, které se dotýkají řídicí přímky a prochází ohniskem. Nyní se budeme věnovat úkolu o něco náročnějšímu.

Příklad 4.3.2

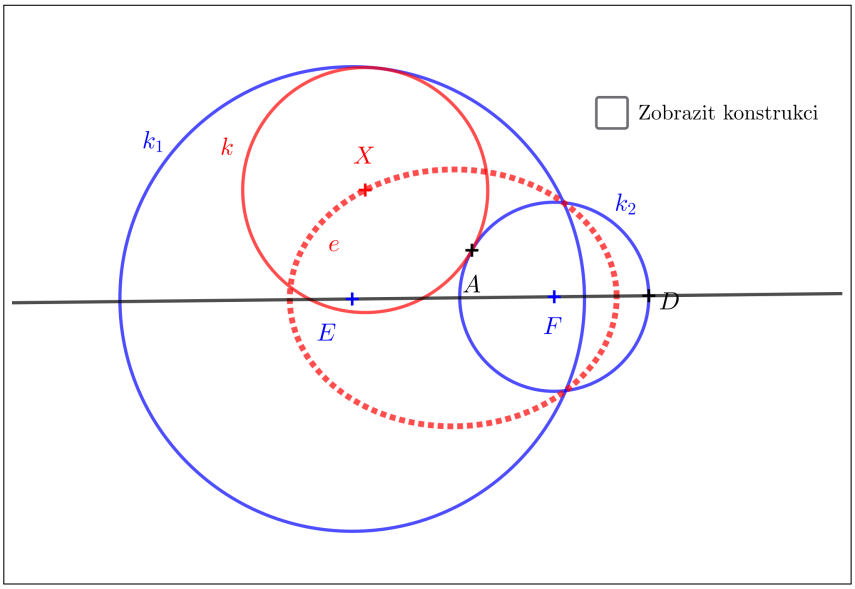
Mějme zadané dva různé body - ohniska E a F, a dvě kružnice $k_1(E, r_1)$, $k_2(F, r_2)$, tak aby vzdálenost ohnisek byla menší, než součet poloměrů kružnic, tj. $|EF| < r_1 + r_2$. Hledejme nyní množinu středů takových kružnic k, které mají s jednou z kružnic k_1, nebo k_2 vnitřní dotyk a s druhou dotyk vnější.

Využijte applet na na *obr.* 4.13, ve kterém lze pomocí bodu D měnit poloměr kružnice k_2 a polohu ohniska F. Pohybujte bodem A po kružnici k_2 a pozorujte, jaký útvar vykreslí střed kružnice k a jak se situace změní při změně polohy bodů D a F. Zaškrtávacím políčkem lze zobrazit, jakým způsobem byl bod X zkonstruován.

Rozšiřující učivo: Konstrukce bodu elipsy v tomto případě není vůbec jednoduchá. Jedná se o jednu z tzv. Apolloniových úloh, kdy ke dvou zadaným kružnicím k_1 a k_2 a bodu A ležícím na jedné z nich hledáme kružnici, která se zadaných kružnic dotýká a prochází bodem A. V našem případě navíc požadujeme, aby hledaná kružnice měla s jednou z kružnic vnější a s druhou vnitřní dotyk. V appletu na *obr.* 4.12 si šipkou v levém dolním rohu zobrazte jednotlivé kroky konstrukce včetně zápisu.
Z konstrukce je vidět, že pokud bychom neměli podmínku, aby hledaná kružnice měla s jednou z kružnic vnější a s druhou vnitřní dotyk, úloha by měla dvě řešení. Druhé řešení, které pro nás není v tuto chvíli podstatné je v konstrukci zobrazeno světle šedou barvou.



Obrázek 4.12: Applet - konstrukce jednoho bodu elipsy



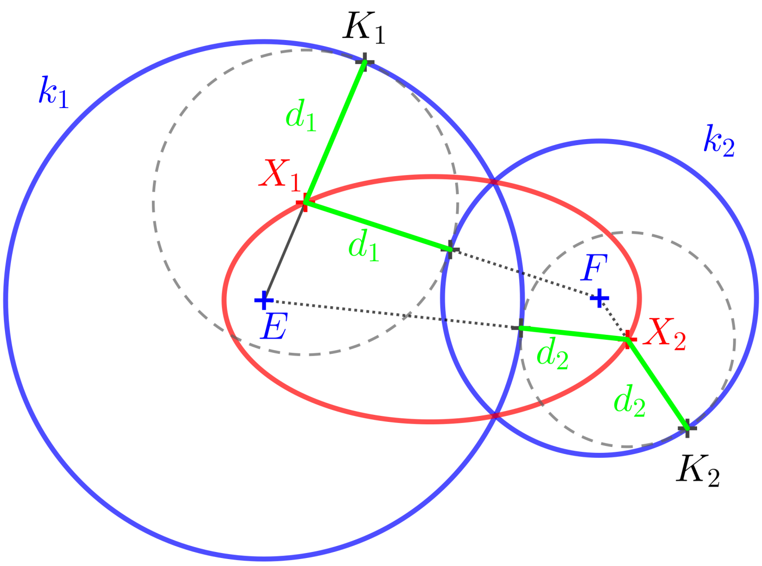
Obrázek 4.13: Applet - elipsa jako množina středů kružnic

V appletu na *obr.* 4.13 vidíme, že množina středů kružnic, které danou podmínku splňují je zřejmě elipsa. Při přibližování ohnisek se elipsa více podobá kružnici, což odpovídá poznatku rozebranému výše. Pokud se zvětší poloměr kružnice

k_2, zvětší se i velikost hlavní a vedlejší poloosy elipsy, a leží-li kružnice k_2 uvnitř kružnice k_1, leží i celá elipsa uvnitř kružnice k_1.

Dále si můžeme všimnou, že nachází-li se bod A uvnitř kružnice k_1, kružnice k má s kružnicí k_1 vnitřní dotyk a s kružnicí k_2 vnější dotyk, zatímco nachází-li se bod A vně kružnice k_1, kružnice k má s kružnicí k_1 vnější dotyk a s kružnicí k_2 vnitřní dotyk.

Dokažme nyní, že útvar, který vznikl v appletu na *obr.* 4.13 je skutečně elipsa.



Obrázek 4.14: Elipsa jako množina středů kružnic

Pro elipsu musí z definice platit vztah $e = \{X \in E_2; |XE| + |XF| = 2a\}$. V *obr.* 4.14 jsou vyznačeny poloměry hledaných kružnic. Zaměříme se nyní na bod X_1, který je středem kružnice, která je uvnitř kružnice k_1. Vzdálenost X_1, E lze vyjádřit pomocí poloměru zadané kružnice následujícím způsobem.

$$|X_1E| = |K_1E| - |K_1X_1| = r_1 - d_1$$

Obdobným způsobem lze vyjádřit i vzdálenost X_1F.

$$|X_1F| = r_2 + d_1$$

Jejich součet je tedy

$$|X_1E| + |X_1F| = r_1 - d_1 + r_2 + d_1 = r_1 + r_2,$$

což je konstantní hodnota. Musí tedy platit rovnosti

$$2a = r_1 + r_2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Obdobným způsobem lze postupovat pro bod X_2, který je středem kružnice ležící uvnitř kružnice k_2.

$$|X_2E| + |X_2F| = r_1 + d_2 + r_2 - d_2 = r_1 + r_2 = 2a$$

Elipsu tedy lze definovat pomocí středů kružnic následujícím způsobem.

Definice 29. *Mějme dány dva různé body, tj. ohniska E a F, a dvě kružnice $k_1(E, r_1)$, $k_2(F, r_2)$, tak aby platilo $|EF| < r_1 + r_2$. Množina všech středů kružnic, které se zadanou kružnicí k_1, resp. k_2, mají vnitřní dotyk a s kružnicí k_2, resp. k_1 vnější dotyk, se nazývá* ***elipsa****; značíme ji e.*

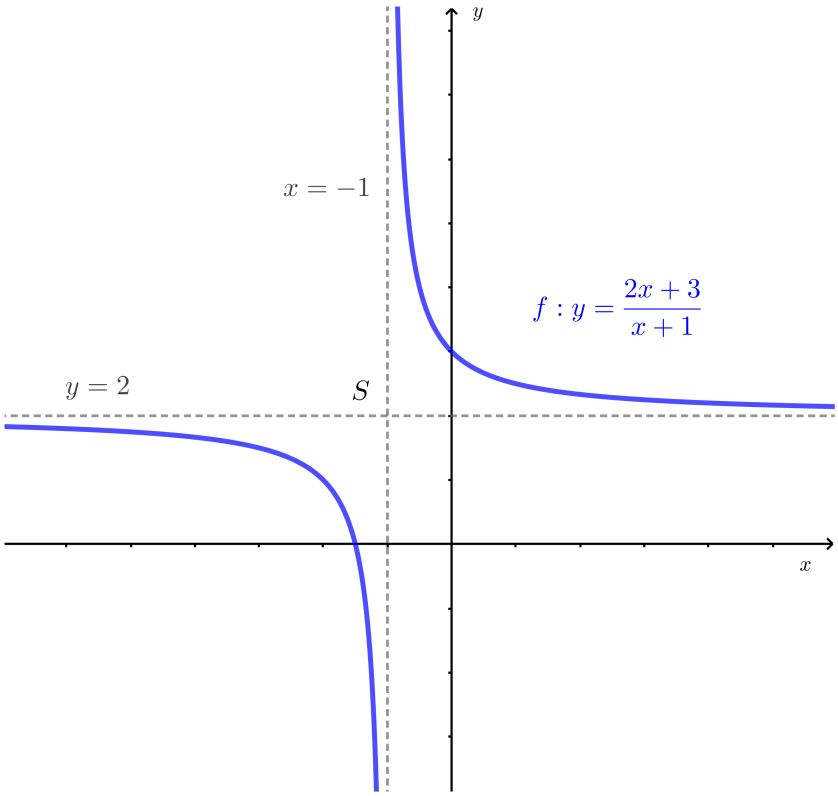
4.4 Hyperbola

Poslední kuželosečkou, kterou se budeme zabývat, je hyperbola. S hyperbolou jsme se setkali již na základní škole, konkrétně při hledání grafu nepřímé úměrnosti. Na střední škole se potom rozšiřuje nepřímá úměrnost v lineární lomenou funkci, která má předpis

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

Mějme například funkci danou předpisem $f : y = \frac{2x+3}{x+1}$. Předpis lze upravit na tvar $f : y = 2 + \frac{1}{x+1}$, ze kterého lze určit souřadnice středu hyperboly. Graf dané funkce tedy vypadá následujícím způsobem.



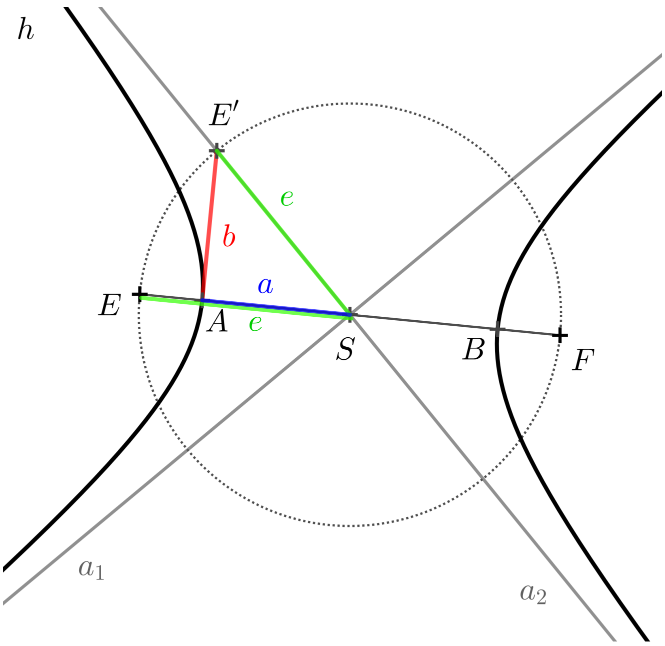
Obrázek 4.15: Graf lineární lomené funkce f

Více o lineární lomené funkci na webu [2] v tématu věnujícím se *Lineární lomené funkci*.

Připomeňme definici hyperboly, kterou známe z z [12] *analytické geometrie*, jako množinu bodů definovanou pomocí pojmu vzdálenost.

Definice 30. *Mějme dány dva body E a F, pro které platí $|EF| > 2a$. Množina všech bodů, které mají od bodů E a F absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnu $2a$, se nazývá* ***hyperbola****; značíme ji h.*

Symbolicky výše uvedenou vlastnost zapisujeme
$h = \{X \in E_2; ||XE| - |XF|| = 2a\}$. Konstanta a je délka *hlavní poloosy*.

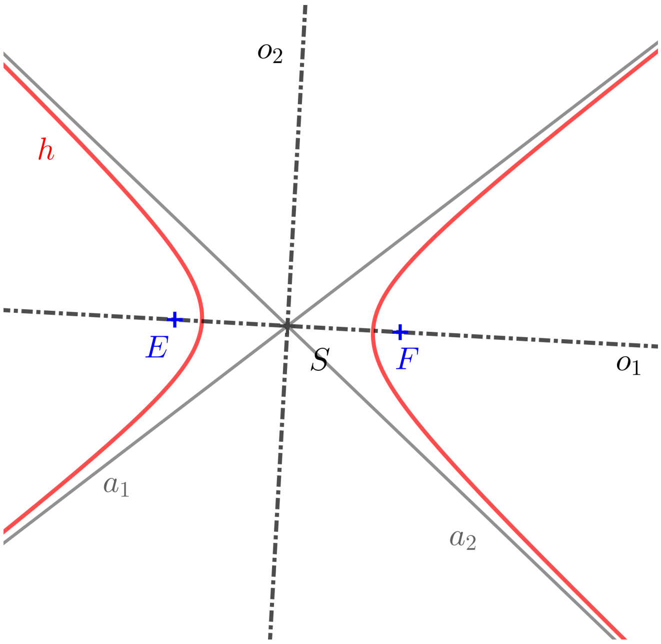


Obrázek 4.16: Hyperbola a její vlastnosti

Na *obr.* 4.16 a 4.17 jsou zobrazeny důležité charakteristiky hyperboly:

- bod S: *střed hyperboly*,
- přímka EF: *hlavní osa hyperboly* o_1,
- body AB hyperboly ležící na přímce EF: *hlavní vrcholy hyperboly*,
- přímka kolmá k hlavní ose procházející středem: *vedlejší osa elipsy* o_2,
- úsečka spojující ohnisko hyperboly a střed, tj. ES, FS: *excentricita, výstřednost*,
- přímky a_1, a_2: *asymptoty hyperboly*,
- úsečka spojující hlavní vrchol hyperboly a střed, tj. AS, BS: *hlavní poloosa*,
- úsečka spojující bod E a bod A, tj. $E'A$: *vedlejší poloosa*.

Z *obr.* 4.16 je také vidět, že mezi velikostmi poloos a excentricitou platí z Pýthagorovy věty rovnost $e^2 = a^2 + b^2$ a že hyperbola je středově souměrná podle bodu S.



Obrázek 4.17: Hyperbola

Na *obr.* 4.17 je vidět několik vlastností hyperboly.

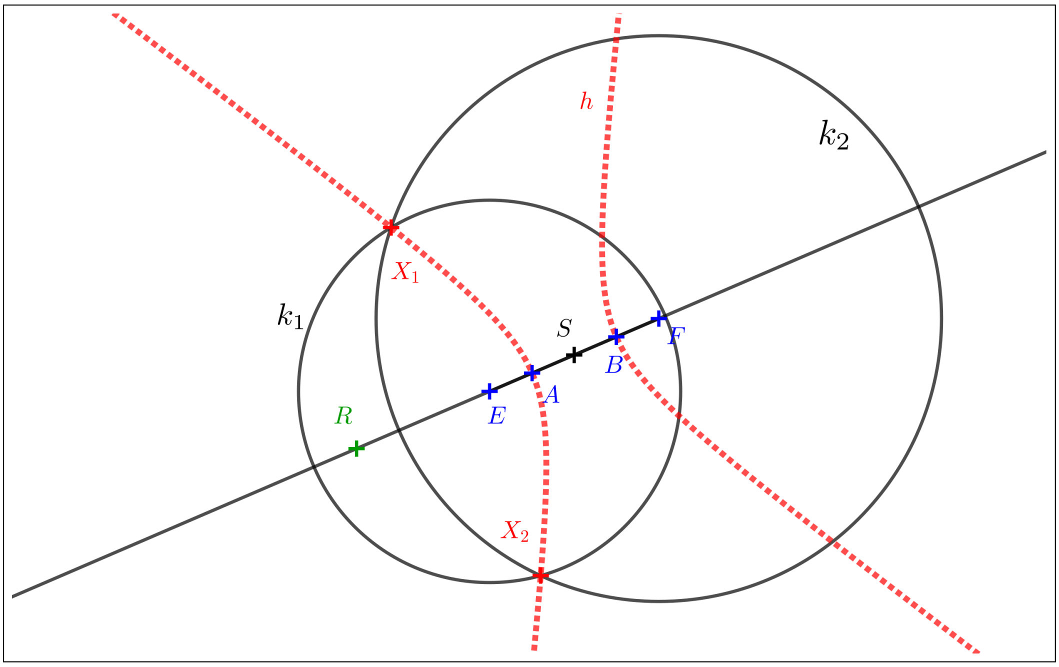
- hyperbola má dvě navzájem kolmé osy souměrnosti o_1 a o_2,
- asymptoty a_1 a a_2 nemusí být vždy navzájem kolmé,
- hyperbola je osově souměrná podle os úhlů, které svírají asymptoty,
- hyperbola je složena ze dvou částí, kterým říkáme *větve hyperboly*,
- střed S je středem úsečky EF.

Rozšiřující učivo: Co by se stalo, kdyby ohniska E a F nebyla různá?

Řešení: Ohniska by splynula se středem hyperboly a z hyperboly by se staly dvě přímky shodné s jejími asymptotami.

4.4.1 Příklad 4.4.1

V appletu na *obr.* 4.18 je zobrazena hlavní poloosa hyperboly, hlavní vrcholy A a B a ohniska E a F. Bod X_1, resp. X_2, je průsečíkem kružnic k_1 a k_2 tak, aby $k_1(E, |AR|)$ a $k_2(F, |BR|)$. Bod R leží na přímce EF a lze s ním pohybovat. Při pohybu bodem R se vykresluje stopa bodu X_1, resp. X_2. Kružnice k_1 a k_2 se protnou pouze, pokud se bod R nachází vně úsečky EF. Na základě appletu ověřte, že sestrojená množina bodů je skutečně hyperbola.



Obrázek 4.18: Applet - konstrukce hyperboly

Zamyslíme se nad tím, zda sestrojená množina bodů je skutečně hyperbola. Bod X_1 má od ohniska E vzdálenost rovnou poloměru kružnice k_1 a od ohniska F vzdálenost rovnou poloměru kružnice k_2, tj. $|X_1E| = |AR|$ a $|X_1F| = |BR|$. Bod R musí ležet vně úsečky EF. Leží-li bod R na opačné polopřímce k polopřímce EA, lze vyjádřit poloměr kružnice k_1 jako součet

$$|AR| = |AE| + |ER|.$$

A poloměr kružnice k_2 jako součet

$$|BR| = |BS| + |SA| + |AE| + |ER|.$$

Rozdíl je tedy roven

$$\begin{aligned}|BR| - |AR| = |BS| + |SA| + |AE| + |ER| - (|AE| + |ER|) = \\ = |BS| + |SA| = |AB|.\end{aligned}$$

Již však víme, že vzdálenost bodů A a B můžeme označit $2a$ a dostáváme tedy výsledek

$$|BR| - |AR| = 2a.$$

Stejné vztahy platí pro bod X_2. Pokud by se bod R ležel na polopřímce opačné k polopřímce FB, výpočet by probíhal analogicky. Vzniklý útvar tedy je hyperbola, tedy platí absolutní hodnota rozdílu $||XE| - |XF|| = 2a$.

4.4.2 Hyperbola jako množina středů kružnic

Následující text byl inspirován publikací [7].

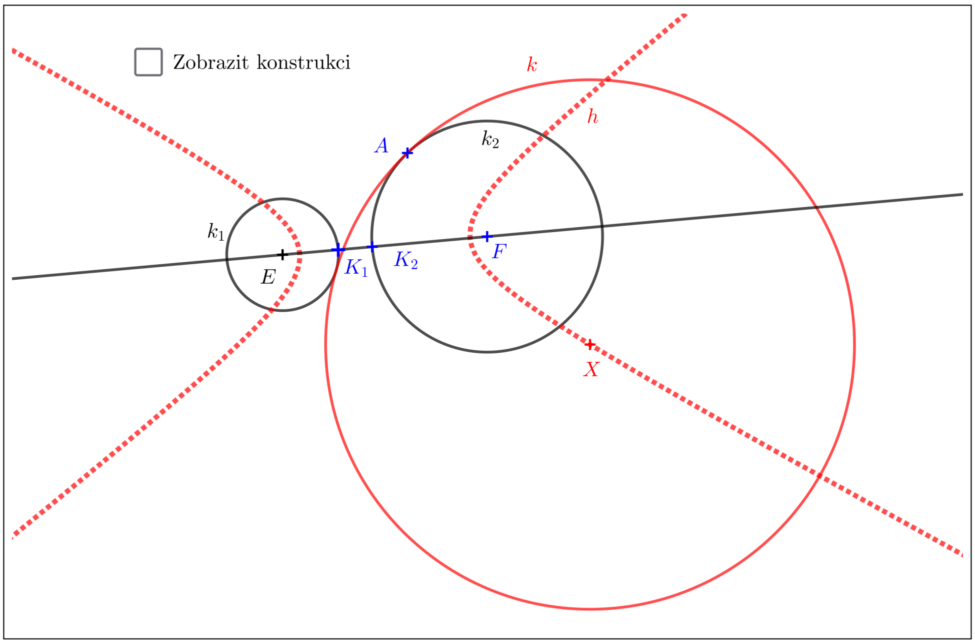
V předchozí kapitole 4.3 *Elipsa* jsme se mimo jiné zabývali elipsou jako množinou středů kružnic dané vlastnosti. Pro nalezení takové množiny jsme měli zadána dvě ohniska E a F, a dvě kružnice $k_1(E, r_1)$, $k_2(F, r_2)$, tak aby platilo $|EF| < r_1 + r_2$.

Elipsa je potom množina středů takových kružnic, které mají s jednou z kružnic k_1 a k_2 vnitřní dotyk a s druhou dotyk vnější. Nyní se budeme obdobným způsobem zabývat hyperbolou a uvidíme, že nejde o úlohu významně obtížnější.

Příklad 4.4.2

V appletu na *obr.* 4.19 jsou dány dva různé body E a F, a dvě kružnice $k_1(E, r_1)$, $k_2(F, r_2)$ tak, jak tomu bylo u elipsy. Kružnice k je konstruována tak, aby s jednou z kružnic k_1 a k_2 vnitřní dotyk a s druhou dotyk vnější.

Pohybujte bodem A po kružnici k_2 a pozorujte, jaký útvar vykreslí střed kružnice k. Dále pohybujte body K_1, K_2 a F (tj. měňte polohu a poloměry kružnic) a zkoumejte, kdy středy kružnice k (při pohybu bodem A po kružnici k_2) začnou vykreslovat hyperbolu. Co musí platit pro poloměry kružnic r_1 a r_2, aby hledanou množinou středů byla hyperbola? Zaškrtávacím políčkem lze zobrazit, jakým způsobem byl bod X zkonstruován.



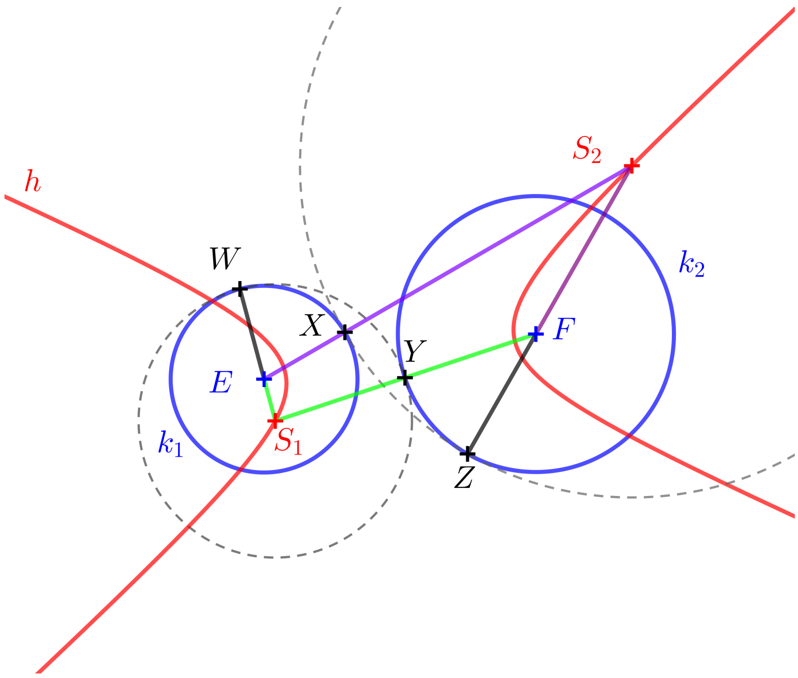
Obrázek 4.19: Applet - hyperbola jako množina středů kružnic

Hyperbola s ohnisky E, Fvznikne, pokud kružnice k_1 a k_2 nemají žádný společný bod nebo pokud mají jeden společný bod a zároveň jedna z kružnic není uvnitř druhé kružnice. Pro poloměry tedy musí platit $r_1 + r_2 \leq |EF|$.

Dokažme nyní, že skutečně uvedeným způsobem vznikne hyperbola. Na *obr.* 4.20 jsou zobrazeny dva středy S_1, S_2 kružnic, které mají s kružnicemi k_1 a k_2 vnější nebo vnitřní dotyk, každý na jedné větvi hyperboly.

Zaměříme se nyní na bod S_1. Vyjádříme absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností bodu S_1 od ohnisek hyperboly, tj. $||ES_1| - |FS_1||$. Označíme-li poloměr hledané kružnice se středem S_1 písmenem d_1, můžeme vzdálenost $|ES_1|$ vyjádřit jako $d_1 - r_1$. Obdobně $|FS_1|$ lze vyjádřit jako $d_1 + r_2$. Tedy

$$||ES_1| - |FS_1|| = |d_1 - r_1 - (d_1 + r_1)| = |-r_1 - r_2| = r_1 + r_2.$$



Obrázek 4.20: Hyperbola jako množina středů kružnic

Využili jsme toho, že poloměry kružnic r_1 a r_2 jsou nezáporná čísla. Součet $r_1 + r_2$ je konstantní, musí tedy platit

$$2a = r_1 + r_2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Obdobným způsobem lze postupovat pro bod S_2 na druhé větvi hyperboly. Označíme-li poloměr hledané kružnice se středem S_2 písmenem d_2, můžeme psát

$$||ES_2| - |FS_2|| = |r_1 + d_2 - (d_2 + r_1)| = |r_1 + r_2| = r_1 + r_2.$$

$$2a = r_1 + r_2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Hyperbolu pak pomocí středů kružnic lze definovat následujícím způsobem.

Definice 31. *Mějme dány dva různé body, ohniska E a F, a dvě kružnice $k_1(E, r_1)$, $k_2(F, r_2)$ tak, aby platilo $r_1 + r_2 \leq |EF|$. Množina všech středů kružnic, které se zadanou kružnicí k_1, resp. k_2, mají vnitřní dotyk a s kružnicí k_2, resp. k_1, vnější dotyk, se nazývá **hyperbola**; značíme ji h.*

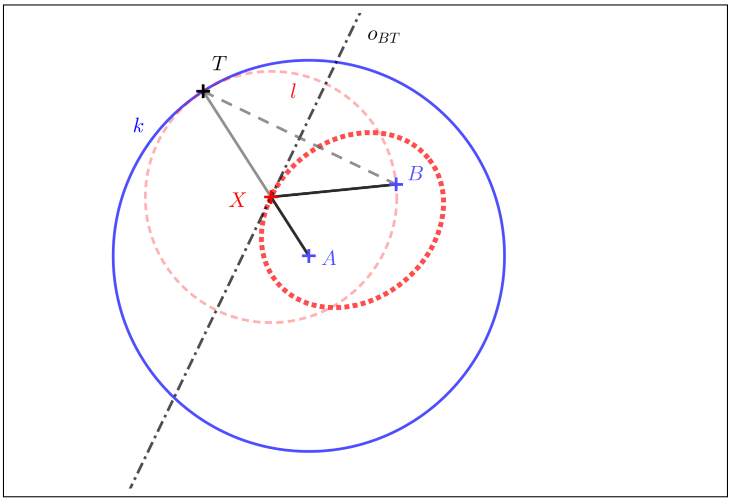
4.5 Úlohy

Následující úlohy byly inspirovány sbírkou úloh [5].

Úloha 4.5.1

Mějme zadanou kružnici $k(A, r)$ a bod B uvnitř kružnice k. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k a prochází bodem B.

V appletu na *obr.* 4.21 je zobrazena kružnice $k(A, r)$ a bod B uvnitř kružnice k. Na kružnici k je zvolen libovolný bod T, kterým lze pohybovat. Střed kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě T a prochází bodem B leží na ose úsečky TB. Zároveň střed kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě T, leží na poloměru AT. Hledaný střed kružnice je tedy průsečíkem osy o_{BT} a úsečky AT. Pohybujte bodem T nebo zapněte animaci v levém dolním rohu a pozorujte, jakou množinu vykreslují polohy bodu X.



Obrázek 4.21: Applet - ilustrace k řešení úlohy 4.5.1

Z appletu se zdá, že hledanou množinou středů kružnic je elipsa s ohnisky A, B. Abychom dokázali, že výslednou množinou je elipsa s ohnisky A, B, musí pro každý její bod X platit, že součet jeho vzdáleností od ohnisek je konstantní, tj. $|AX| = |BX| = konst.$

Bod X leží na ose úsečky BT, proto platí $|TX| = |BX|$. Vzdálenost AX lze vyjádřit jako

$$|AX| = r - |TX|$$

a vzdálenost BX lze vyjádřit jako

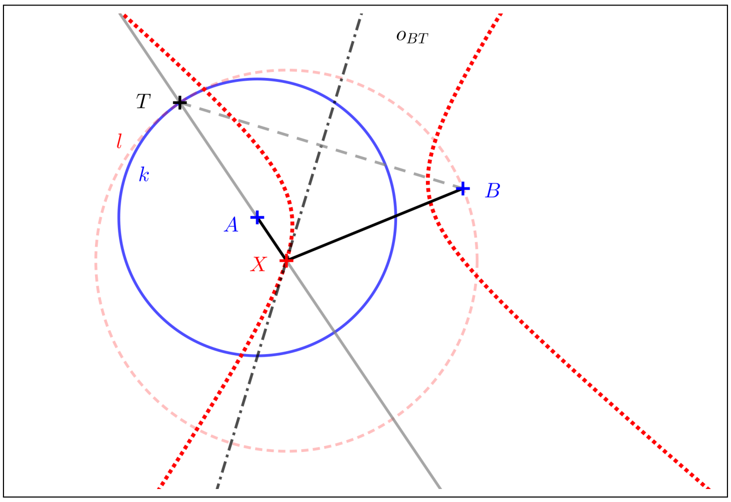
$$|BX| = |TX|$$

Platí tedy $|AX| + |BX| = r - |TX| + |TX| = r$. Poloměr r je ale konstantní. Množinou středů všech kružnic, které se dotýkají přímky k a prochází bodem B, je tedy elipsa s ohnisky A, B.

Úloha 4.5.2

Mějme zadanou kružnici $k(A, r)$ a bod B vně kružnice k. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice k a prochází bodem B.

V appletu na *obr.* 4.22 je zobrazena kružnice $k(A, r)$ a bod B vně kružnice k. Na kružnici k je zvolen libovolný bod T, kterým lze pohybovat. Střed kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě T a prochází bodem B leží na ose úsečky TB. Zároveň střed kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě T, leží na poloměru AT. Hledaný střed kružnice je tedy průsečíkem osy o_{BT} a úsečky AT. Pohybujte bodem T nebo zapněte animaci v levém dolním rohu a pozorujte, jakou množinu vykreslují polohy bodu X.



Obrázek 4.22: Applet - ilustrace k řešení úlohy 4.5.2

Z appletu se zdá, že hledanou množinou středů kružnic je hyperbola s ohnisky A, B. Tuto hypotézu lze opět dokázat s využitím definice hyperboly, tj. platí $||XA| - |XB|| = konst.$

Bod X leží na ose TB, tedy platí $|TX| = |XB|$.

Vzdálenost TX lze rozepsat následovně.

$$|TX| = |BX| = |TA| + |AX|$$

Úsečka TA je poloměrem r kružnice k, tedy

$$|BX| = r + |AX|$$

Odtud dostaneme rozdíl

$$|BX| - |AX| = r.$$

Při jinak zvolené poloze bodu T bychom dostali $|AX| - |BX| = r$, platí tedy $||AX| - |BX|| = r$, což odpovídá definici hyperboly.

Množinou středů všech kružnic, které se dotýkají přímky k a prochází bodem B, je tedy hyperbola s ohnisky A, B.

Závěr

V rámci diplomové práce vznikly webové stránky pro podporu výuky množin bodů dané vlastnosti na základních a středních školách. Po obhajobě této práce budou stránky zveřejněny na Portálu středoškolské matematiky, který vytváří Katedra didaktiky matematiky MFF UK. V první části práce jsou zopakovány poznatky o množinách bodů dané vlastnosti, které by žáci měli znát ze základní školy, doplněné o důkazy vět, které se obvykle vyučují až na školách středních. Dále je práce rozšířena kapitolou věnující se čistě středoškolskému učivu – kružnicové oblouky, ve které je rozebráno i několik vzorově vyřešených úloh.

Kromě středoškolského učiva práce pokrývá i množiny bodů dané vlastnosti a kuželosečky definované pomocí středů kružnic. V kapitole Kuželosečky vycházíme z předpokladu, že se studenti s kuželosečkami již setkali v analytické geometrii a rozšiřujeme tyto znalosti rozšiřující látkou.

Většina kapitol je uvedena pomocí příkladu doplněného appletem vytvořeného v programu GeoGebra. K lepšímu pochopení textu jsou v práci zahnuty i ilustrační obrázky taktéž tvořené v GeoGebře.

Literatura

[1] V. Moravcová, J. Hromadová: *Základy planimetrie pro učitelské studium*, Matfyzpress, Praha, 2021

[2] J. Richter: *Webové stránky určené pro výuku funkcí na střední škole*, Praha, 2007
(11. 10. 2023: https://www.karlin.mff.cuni.cz/∼portal/funkce/?page=title)

[3] J. Herman, V. Chrápavá, E. Jančovičová, J. Šimša: *Geometrické konstrukce*, Prometheus, Praha, 1998

[4] J. Molnár: *Planimetie*. Prometheus, Praha, 2011

[5] J. Petáková: *Matematika*. Prometheus, Praha, 2021

[6] E. Pomykalová: *Matematika pro gymnázia*. Prometheus, Praha, 2010

[7] E. Schwarzová: *Kuželosečky jako množiny bodů dané vlastnosti*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2018

[8] J. Vyšín: *Geometrická místa*. Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1950

[9] G. Wentworth, D. E. Smith: *Plane and Solid Geometry*. Merchant Books, Boston, 2007

[10] A. S. Posamentier: *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*. Key College Publishing, New York, 2002

[11] J. Kouřim a kol.: *Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ*. SPN, Praha, 1985

[12] J. Končel: *Využití internetu ve výuce analytické geometrie na střední škole*, Praha, 2009
(11. 1. 2024: https://www.karlin.mff.cuni.cz/∼portal/analytickageometrie/kuzelosecky.php)

Seznam obrázků