

## Webová aplikace pro výuku množin bodů dané vlastnosti

Oponentský posudek diplomové práce Anety Tarabíkové

Cílem práce bylo připravit výukovou webovou aplikaci zaměřenou na množiny bodů dané vlastnosti. Práce byla odevzdána v tištěné podobě, součástí je však i výukový web určený především středoškolským studentům, na nějž se autorka v úvodu odkazuje a byl připraven s úmyslem začlenit jej do *Portálu středoškolské matematiky* spravovaného KDM MFF UK.

Studentka se, v souladu se zadáním, zaměřila na množiny bodů dané vlastnosti v rovině. Práce je členěna do čtyř kapitol. V první jsou zavedeny, resp. připomenuty, potřebné základní pojmy. Druhá kapitola je věnována množinám bodů vyučovaným na základní škole. Třetí a čtvrtá kapitola jsou už ryze středoškolské. Ve třetí kapitole je pozornost věnována jednak množinám bodů z kapitoly druhé, avšak definovaným jako množiny středů jistých kružnic, a množině bodů, z nichž je daná úsečka vidět pod úhlem o dané velikosti. Čtvrtá kapitola se týká kuželoseček – jsou v ní připomenuty standardní definice kuželoseček jako množin bodů v rovině a podrobněji je pojednáno o kuželosečkách jako množinách středů kružnic. Toto téma je rozšiřující i z pohledu střední školy. Škoda, že nebyly zařazeny poměrové definice elipsy a hyperboly, avšak to nebylo součástí zadání, není to tedy myšleno z mé strany jako výtka.

Text tištěné a webové verze je prakticky totožný. On-line verze je obohacena o interaktivní prvky – applety vytvořené v GeoGebře, které z pochopitelných důvodů jsou v tištěné verzi pouze v podobě obrázků. Oceňuji v úvodu on-line podoby stručný návod k ovládní appletů a informace k orientaci na webu.

Na první pohled práce působí přehledně a kultivovaně, má jasnou strukturu, orientace na webu je intuitivní a ovládní appletů též. Autorka se snažila použít formu matematického vyjadřování přístupnou předpokládanému okruhu čtenářů. Bohužel však práce obsahuje značné množství chyb.

Za největší problém považuji stírání rozdílů mezi definicemi a větami, které je navíc do jisté míry – alespoň dle prohlášení autorky – vědomé.

*Nutno si uvědomit, že jelikož provádíme důkaz, že nalezená množina (resp. geometrický útvar) splňuje dané vlastnosti, měli bychom přísně vzato všechny uvedené definice nazývat větami. Pro naše účely je však důležité, který geometrický útvar dané množině odpovídá a jak ho nazýváme, proto i nadále budeme užívat pojmu „definice“ [s. 6]*

V začátcích důkazů/odvození často chybí jasně vymezené předpoklady a není zřejmý cíl, na závěr pak není shrnuto dokázané. Dokázaná vlastnost se někdy objevuje jako součást definice (např. def. 7, s. 24; def. 9, s. 27); stejné pojmy jsou definovány dvěma různými způsoby, přičemž ten druhý přístup je vlastně dokazován (druhá verze definice by měla být dle mého názoru už větou) apod. Například:

- Na s. 12 je dokazována definice kružnice (zde jsem naprosto zmatena, co je smyslem důkazu).
- Na s. 17 [osa úsečky] měla být na základě appletu jen vytvořena hypotéza, že výslednou množinou je kolmice k dané úsečce procházející jejím středem, avšak v prvním odstavci pod obr. 2.8 autorka formuluje tuto hypotézu spíše jako fakt, resp. částečně ji hned dokazuje. Následně ji dokazuje pečlivěji. Definice osy úsečky je až na s. 19. U definice postrádám shrnutí výše dokázaných vlastností této množiny. U souvisejícího příkladu 2.2.2 se píše, že „uvedené tvrzení lze dokázat pomocí definice 5“, ale to právě nelze – jen samotná definice, která pouze zavádí pojem „osa úsečky“ k důkazu nestačí, je třeba využít i výše dokázané vlastnosti osy.

- Nepovažuji za šťastné definovat kružnici pomocí pojmu kružnice (def. 13, s. 35).
- Text v rámečku „Rozšiřující učivo“ na s. 47 je zbytečně složitý; tětíkový čtyřúhelník není k důkazu potřeba, vše je důsledkem věty o obvodovém a středovém úhlu. Text je chaotický, není jasné, co se vlastně dokazuje – nejprve to vypadá, že cílem je ukázat, že velikost úhlu  $AS_1B$  je  $(360^\circ - 2\alpha)$ , ale závěrem myšlenek je, že velikost úhlu  $AXB$  je  $\alpha$ .

Domnívám se, že původně bylo zamýšleno práci stavět následovně:

1. Stanovení, jakou množinu bodů hledáme (v této fázi je třeba jasně formulovat předpoklady, co má pro hledané body platit).
2. Vytvoření hypotézy na základě appletu, neboli provedeme „odhad“, o jakou křivku se jedná.
3. Hypotézu dokážeme.
4. Nakonec definujeme, že tuto množinu nazveme tak a tak, a popřípadě shrneme její – výše dokázané – vlastnosti.

V tomto duchu je text veden např. od s. 14 dále při výkladu Thalétovy kružnice, ale jinak má v tomto systému autorka značný zmatek, který se promítá i do řešení příkladů.

Kromě uvedeného problému s definicemi a větami se v práci vyskytují i další odborné chyby, např.

- nesprávný slovosled generující matematickou nepřesnost až chybu, např.:

s.	nyní	mělo by být
5 <sup>5</sup>	Množinou bodů $M...$	Množinou $M$ bodů...
17 <sup>6</sup>	Průsečíky kružnic $X_1$ a $X_2...$	Průsečíky $X_1, X_2$ kružnic ...
57 <sup>4</sup> aj.	Množina všech středů kružnic, ...	Množina středů všech kružnic, ...

- s. 5 aj (často se opakuje): „...[kružnice]... mn. bodů, které mají od středu **stejnou** vzdálenost  $r$ “ Stejnou s čím?
- s. 9: úsečka nazývána kolmicí (ale „kolmice“ je dle mého názoru přímka)
- píšeme-li o úhlu (např. úhel  $AYB$  apod.), je třeba upřesnit, který ze dvou možností máme v dané situaci na mysli – zda konvexní, či nekonvexní, např. s. 21 – zde absence termínu „konvexní“ způsobuje, že některé dále odvozené závěry nejsou pravdivé (osa nekonvexního úhlu by vypadala jinak, než jak je zde popsáno)
- v druhé části odvození Thalétovy kružnice (při zkoumání bodů, které na kružnici neleží) je opomenuto šetření bodů přímky  $AB$
- s. 18: v důkazu chybí možnost, kdy bod  $Y$  leží v polorovině s hraniční přímkou  $o_{AB}$  určené bodem  $A$
- 18<sub>5</sub>: polopřímce  $SA$  (nikoliv  $AS$ )
- o dvou splývajících bodech říkáme, že jsou totožné, nikoliv shodné (opakuje se)
- 22<sup>2</sup>: Je osou (konvexního) úhlu přímka, nebo polopřímka? (v jednom řádku se objevuje obojí)
- 23<sup>1</sup>: používá se věta  $usu$ , nikoliv  $Ssu$ , jak je uvedeno
- s. 38, def. 23:  $r_1$  je větší než  $r_2$ , nikoliv menší
- s. 39, def. 24: na obr. 3.7, k němuž se def. vztahuje, je  $d < r$ , v textu se píše  $d > r$
- s. 53, obr. 4.3: u hyperboly obráceně znak nerovnosti; pozor,  $\alpha$  musí být omezená i shora
- v úloze 4.5.2 se pracuje s úsečkou  $AT$ , ale je třeba uvažovat přímku  $AT$ , jinak ne vždy vznikne hledaný průsečík s osou úsečky  $BT$
- 71<sub>1</sub>: přímky  $\rightarrow$  kružnice
- je třeba vyhnout se používání nezavedeného označení (např. s. 23: body  $P'_1, P'_2$ ; s. 26: přímka  $o_{pq}$  aj.), v def. 28, s. 58 je absence zavedení délky  $a$  vyloženě problematická

Dále si dovolím podat některá doporučení, která by mohla přispět k zvýšení úrovně předložené práce po stránce didaktické.

- Doporučuji neomezovat se jen na konkrétní situace, ale více zobecňovat (např. s. 8: vysvětlení vzdálenosti bodu od úsečky – postrádám zobecnění, pro které body měříme vzdálenost „kolmo“, pro které od bodu  $A$  a pro které od bodu  $B$ ).
- S. 10: je zavádějící/diskutabilní psát, že trojúhelníky  $ABC$  a  $MNO$  jsou shodné, když  $ABC \cong NOM$ .
- U komentářů appletů zpravidla chybí na začátku jasné vysvětlení, co je pevně dáno, která vlastnost se má zachovat a co je dynamické (např. s. 14, applet na obr. 2.4: postrádám v úvodu informaci, že  $AB$  je pevně dána a že u bodu  $X$  má být vždy pravý úhel).
- Doporučuji respektovat pořadí předchozího kroku při úpravách a dosazování (např.  $15^3$ : raději  $\alpha + \beta + \beta + \alpha = \dots$ ) či při přepisu názvu úhlu (např.  $44_{1-2}$ : úhel  $BY_2X_2$  vs.  $X_2Y_2B$ ) apod.
- V zadání příkladu 2.2.2 (s. 19) je matoucí, že bod  $S$  je de facto dán (jasně vymezen jako průsečík os stran daného trojúhelníku a označen) a následně se má zkoumat, kde se nachází „střed  $S$ “ kružnice opsané – proč je to v zadání prozrazeno? Navíc pod obr. 2.11 se znovu píše „tento bod označíme  $S$ “. Obdobně zadání př. 2.3.2, str. 24.
- Při konstrukci kružnice, která se dotýká nějakého zadaného objektu, doporučuji vždy sestrojiti i bod dotyku (dříve, než kružnici), např. obr. 3.9, obr. 3.10 aj.
- Při práci s kružnicovými oblouky určenými jen krajními body je vždy třeba specifikovat, který ze dvou možných oblouků máme na mysli.
- Obr. 3.23, zápis konstrukce – bod 4: požadavek na  $B$  různé od  $P$  je zbytečný ( $P$  neleží v  $M$ , nemůže být tedy ani v uvedeném průniku).
- Na začátku kapitoly 4 je zmíněn pojem „regulární kuželosečka“, který žák SŠ spíše nezná. Měl by být objasněn.
- Formulace „elipsa je podobná kružnici“ (s. 53) je zavádějící.
- Když už jsou zmíněny singulární kuželosečky (s. 54), mohly by být uvedeny všechny (chybí prázdná množina).
- Doporučuji rozlišovat pojmy délková a numerická výstřednost (tedy nepsat v případě délkové výstřednosti jen o „výstřednosti“).
- V učebním textu bych se vyhnula obrátům jako „Konstrukce... není vůbec jednoduchá“, není to příliš motivační.
- Jsou-li v obrázku číselné osy, měly by být popsány (aby bylo zřejmé, co je jednotka), viz obr. 4.15.
- S. 67: Je zbytečné  $|AB|$  rozdělovat na  $|BS| + |SA|$ .
- S. 68: „kružnice mají jeden společný bod a zároveň jedna z kružnic není uvnitř druhé kružnice“ lze říci jednoduše, že kružnice mají vnější dotyk.

Po jazykové stránce je práce na přijatelné úrovni. Pravopisné chyby se v ní vyskytují jen v malé míře (zpravidla se jedná o absenci čárek v souvětích). Našla jsem několik překlepů:

- $7^9$ : tato -> tyto;  $7_1$ : chybí tečka; obr. 2.6 – značení bodů neodpovídá textu;  $17^7$ : bodu -> bodů;  $32_{11}$ : hledet -> hledat;  $55_{10}$ :  $P \rightarrow p$ ;  $55_6$ :  $AB \rightarrow A, B$ ;  $65_4$ :  $E \rightarrow E'$ ;  $68_1$ : jednou záměna indexu u  $r$ , obdobný omyl i na s. 69;  $70_9$ : = -> + aj.
- obr. 1.2: chybí index ( $X_3$ )
- nesprávný odkaz na obr.: s. 59 odkaz na 4.9 namísto 4.10

Plynulost čtení by zvýšilo, kdyby se autorka vyhnula větám se dvěma podmínkami (např. 8<sup>2-3</sup>: „... vzdálenost... nemůže být délka...“; def. 16, s. 36: „Množina... je sjednocení...“; 67<sub>6</sub>: „Vzniklý útvar tedy je hyperbola.“ aj.). Dále doporučuji jednotný pravopis jmen antických matematiků (Thaletova kružnice vs. Pýthagorova věta) a ve snaze přiblížit se jazyku žáků nesklouzávat k vyjadřovacím zkratkám typu:

- s. 19: „Nejjednodušším příkladem využití osy úsečky je kružnice opsaná trojúhelníku.“
- s. 29: „Ekvidistantu úsečky si lze představit jako sjednocení... kružnice a ekvidistanty přímky.“
- s. 62: „Pro elipsu musí z definice platit vztah  $e = \{X \in E_2; |XE| + |XF| = 2a\}$ .“

Občas se vyskytuje problém se skloňováním delších vazeb, např. 34<sub>4</sub>: „osy pásů daných přímkami“, 49<sub>6</sub>: „jsou... využitím postupu uvedeného v appletu...“.

V tištěném textu jsou patrné některé typografické nedostatky, upozorním však jen na dva, které se vyskytují zároveň i v on-line verzi. Autorka všude používá spojovník namísto pomlčky a v obrázcích není sjednocena velikost popisků – v některých obrázcích jsou popisky příliš velké (např. obr. 2.5, 2.6, 2.7, 2.9 aj.).

Celkový dojem z obrázků a appletů mám však veskrze pozitivní, je jich značné množství, vhodně ilustrují popisované situace, jsou názorné.

Použitá literatura je adekvátní, řádně citovaná, pouze jsem nenašla odkaz na publikaci [3] a v seznamu literatury je překlep – v položce [4] vypadlo v názvu „r“. *Seznam použitých znaků* (výstižnější by byl název *Seznam použitého značení*) mohl být podrobnější (chybí v něm např. symbol pro kolmost).

Na autorku mám následující dotazy:

- Setkala se autorka s jinými definicemi pojmu ovál, než s tou použitou na s. 29?
- Může autorka upřesnit/rozvést myšlenku v rámečku „rozšiřující učivo“ na str. 66? Zdá se mi velmi stručná a nejasná... (Jakou velikost má potom hlavní poloosa? Jak jsou určeny asymptoty, o nichž se zde píše, když hyperbola zanikne?)
- S. 5: je zmíněn důkaz sporem, ale popis dále důkazu sporem neodpovídá, podle mne se jedná o důkaz obměněné implikace původního tvrzení. Jaký je rozdíl mezi těmito typy důkazů a jak by v uvedené situaci vypadal důkaz sporem (stačí jeho začátek)?
- S. 6: je uvedeno, že nelze psát v množném čísle „množina bodů daných vlastností“ s argumentem, že daná vlastnost je vždy jediná. Jsem jiného názoru – třeba kružnicový oblouk můžu vnímat jako množinu bodů, které mají od jistého bodu danou vzdálenost a zároveň náleží jistému úhlu, tedy jako body mající vlastnosti dvě. Je v mé úvaze tedy chyba?

Závěr:

Přestože posudek nevyznívá pozitivně a upozorňuje na četné nedostatky, domnívám se, že autorka zadání v podstatě splnila a doporučuji předloženou diplomovou práci k obhajobě na učitelském studiu. Nemohu však, vzhledem k výše uvedeným chybám, souhlasit se zařazením on-line verze v této podobě na *Portál středoškolské matematiky*. Navrhuji hodnocení *dobře*.

V Praze dne 1. 2. 2024

RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.