

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Lucie Rakušanová

# **Výuka objemů a povrchů oblých těles na střední škole s podporou webové aplikace**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Učitelství matematiky pro střední školy

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední  
školy – Učitelství francouzského jazyka a  
literatury pro střední školy

Praha 2023



Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora



Ráda bych poděkovala vedoucí své diplomové práce, doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za zapůjčení literatury, mnoho odborných rad, vřelý přístup a především za dostatek trpělivosti při vytváření této práce. Dále bych chtěla poděkovat Mgr. Zdeňkovi Halasovi, DiS., Ph.D. za konzultace historického výtahu a PhDr. Aleně Šarounové, CSc. za odborné konzultace z oblasti stereometrie.



Název práce: Výuka objemů a povrchů oblých těles na střední škole s podporou webové aplikace

Autor: Bc. Lucie Rakušanová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce je zaměřená na objemy a povrchy těles, zejména na objemy a povrchy mnohostěnů a oblých těles, které jsou součástí výuky geometrie (stereometrie) na středních školách. Webové stránky vytvořené v rámci práce mají sloužit jako podpůrný a doplňkový materiál jak pro studenty, tak pro jejich pedagogy. Stránky zahrnují řadu fotografií, obrázkových ilustrací a interaktivní prvky usnadňující uživateli pochopení látky. Mezi interaktivní prvky řadíme applety vytvořené v programu dynamické geometrie jménem GeoGebra, hypertextové odkazy a krokovaná řešení úloh. Dále práce obsahuje množství řešených příkladů a závěrečný souhrnný test.

Klíčová slova: oblá tělesa, objem, povrch, výuka matematiky

Title: Teaching volumes and surfaces of round solids in high school with the support of a web application

Author: Bc. Lucie Rakušanová

Department of Mathematics Education: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis is focused on the volume and surface area of solids, particularly on the volume and surface area of polyhedra and round solids, which are part of the high school curriculum of geometry (stereometry). The purpose of website is to provide supporting and complementary material for students as well as for their teachers. The website contains several photographs, illustrations and interactive components that make it easier to understand the topics. Interactive elements include applets created in a dynamic geometry application called GeoGebra, hyperlinks, and step-by-step exercise solving. Furthermore, the thesis is supplemented by solved problems and a final summary test.

Keywords: round solids, volume, surface, teaching of mathematics





# Obsah

Úvod	5
<b>1 Motivace</b>	<b>7</b>
1.1 Tělesa kolem nás	7
1.2 Poznámky z historie	10
<b>2 Základní pojmy</b>	<b>13</b>
2.1 Tělesa	13
2.2 Mnohostěny	16
2.3 Platónská tělesa	22
2.3.1 Dualita platónských těles	27
2.4 Archimédovská tělesa	31
2.5 Oblá tělesa	36
2.6 Objem a povrch	40
2.6.1 Objem	40
2.6.2 Povrch	46
<b>3 Hranoly</b>	<b>49</b>
3.1 Hranoly	49
3.2 Zavedení těles hranolového typu	51
3.3 Klasifikace hranolů	56
3.3.1 Konvexní a nekonvexní hranoly	56
3.3.2 Kolmé a kosé hranoly	56
3.3.3 Pravidelné a nepravidelné hranoly	57
3.4 Další typy hranolů	60
3.4.1 Rovnoběžnostěny	60
3.5 Anti-modely hranolů	61
3.6 Objem hranolu	64
3.7 Povrch hranolu	73
3.8 Objemy a povrchy dalších typů hranolů	78
3.8.1 Kvádr	78
3.8.2 Krychle	79
3.9 Úlohy I	83
<b>4 Jehlany</b>	<b>87</b>
4.1 Jehlany	87
4.2 Zavedení těles jehlanového typu	88
4.3 Klasifikace jehlanů	91
4.3.1 Konvexní a nekonvexní jehlany	92
4.3.2 Pravidelné a nepravidelné jehlany	92
4.4 Další typy jehlanů	97
4.4.1 Čtyřstěn	97
4.4.2 Komolý jehlan	99
4.5 Anti-modely jehlanů	101
4.6 Objem jehlanu	102
4.7 Povrch jehlanu	113

4.8	Objemy a povrchy dalších typů jehlanů . . . . .	119
4.8.1	Čtyřstěn . . . . .	119
4.8.2	Komolý jehlan . . . . .	122
4.9	Úlohy II . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěnů</b>	<b>131</b>
<b>6</b>	<b>Válce</b>	<b>143</b>
6.1	Válce . . . . .	143
6.2	Zavedení těles válcového typu . . . . .	146
6.2.1	Jak vzniká rotační válec . . . . .	150
6.3	Klasifikace válců . . . . .	151
6.3.1	Kolmé a kosé válce . . . . .	151
6.4	Další typy válců . . . . .	154
6.4.1	Válce s kruhovou podstavou . . . . .	154
6.4.2	Válce s jinou než kruhovou podstavou . . . . .	155
6.5	Antimodely válců . . . . .	159
6.6	Objem válce . . . . .	164
6.7	Povrch válce . . . . .	168
6.8	Objemy a povrchy dalších typů válců . . . . .	170
6.9	Úlohy III . . . . .	171
<b>7</b>	<b>Kužele</b>	<b>173</b>
7.1	Kužele . . . . .	173
7.2	Zavedení těles kuželového typu . . . . .	178
7.2.1	Jak vzniká rotační kužel . . . . .	181
7.3	Klasifikace kuželů . . . . .	183
7.3.1	Rotační a nerotační kužele . . . . .	183
7.4	Další typy kuželů . . . . .	185
7.4.1	Kužele s kruhovou podstavou . . . . .	185
7.4.2	Kužele s jinou než kruhovou podstavou . . . . .	189
7.5	Antimodely kuželů . . . . .	194
7.6	Objem kužele . . . . .	197
7.7	Povrch kužele . . . . .	200
7.8	Objemy a povrchy dalších typů kuželů . . . . .	205
7.8.1	KOMOLÝ KUŽEL . . . . .	207
7.9	Úlohy IV . . . . .	214
7.9.1	Úloha 7.9.1 . . . . .	214
7.9.2	Úloha 7.9.2 . . . . .	215
7.9.3	Úloha 7.9.3 . . . . .	216
<b>8</b>	<b>Koule</b>	<b>219</b>
8.1	Koule . . . . .	219
8.2	Zavedení koule – jak vzniká koule . . . . .	223
8.3	Koule a její části . . . . .	226
8.3.1	Kulová úseč . . . . .	227
8.3.2	Kulový vrchlík . . . . .	228
8.3.3	Kulová výseč . . . . .	228
8.3.4	Kulová vrstva . . . . .	230
8.3.5	Kulový pás . . . . .	230

8.4	Antimodel koule . . . . .	230
8.5	Objem koule . . . . .	233
8.6	Povrch koule . . . . .	235
8.6.1	Řešení . . . . .	238
8.7	Objemy a povrchy částí koule . . . . .	238
8.7.1	KULOVÝ VRCHLÍK, KULOVÁ ÚSEČ A KULOVÁ VÝSEČ . . . . .	238
8.7.2	KULOVÁ VRSTVA A KULOVÝ PÁS. . . . .	240
8.8	Úlohy V . . . . .	241
<b>9</b>	<b>Souhrnný test</b>	<b>245</b>
	<b>Závěr</b>	<b>251</b>
	<b>Literatura</b>	<b>253</b>
	<b>Literatura</b>	<b>255</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>257</b>
	<b>Seznam zdrojů nevlastních obrázků</b>	<b>267</b>



# Úvod

Tyto webové stránky vznikly jako diplomová práce na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v letech 2022–2023. Bakalářská práce z roku 2020 byla rozšířena o zmínku o deltaedrech a romboedrech v podkapitole Mnohostěny; o podkapitoly Archimédovská tělesa a Oblá tělesa a o tři celé kapitoly týkající se oblých těles – Válce, Kužele a Koule. Práce má sloužit jako podpůrný a doplňkový materiál k výuce geometrie na středních a základních školách, který bude využíván jak studenty, tak jejich pedagogy k hlubšímu ponoření do krás stereometrie. Stereometrie jako součást školské matematiky bývá jednou z těch náročnějších partií, jelikož je třeba mít rozvinutou prostorovou představivost. Tato schopnost nám bývá nápomocna i k lepšímu vnímání světa okolo nás v běžném životě.

V této práci se budeme zabývat tělesy, jejich objemy a povrchy. Webové stránky jsou uspořádány do osmi hlavních kapitol, z nichž každá je dále rozdělena na další podkapitoly. V první kapitole Motivace si uvedeme názorné příklady ze světa kolem nás, kde všude můžeme tělesa hledat, a pokusíme se stručně nastínit historický vývoj oblastí geometrie související hlavně s objemy a povrchy těles. V druhé kapitole Základní pojmy si nejprve charakterizujeme potřebné pojmy, na kterých budou stavět následující kapitoly. Předmětem výkladu budou především konvexní mnohostěny a oblá tělesa. Konvexní mnohostěny dále rozčleníme na hranoly a jehlany, kterým je postupně věnována třetí a čtvrtá kapitola. Pátá kapitola Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěnů je věnována úlohám s krokovaným odkrývacím řešením na výpočet objemů a povrchů nekonvexních mnohostěnů. Oblá tělesa dále rozčleníme na válce, kužele a koule, kterým je postupně věnována šestá, sedmá a osmá kapitola.

Ve stěžejních kapitolách Hranoly, Jehlany, Válce, Kužele a Koule si postupně tato tělesa zavedeme, klasifikujeme je podle různých kritérií, odvodíme si vzorce pro jejich objemy a povrchy a představíme si řešené příklady. V podkapitolách Úlohy I, Úlohy II, Úlohy III, Úlohy IV, Úlohy V si uvedeme krokovaná odkrývací řešení jednotlivých úloh na procvičení daného tématu. Devátá kapitola nabízí možnost ověřit si nabyté vědomosti v souhrnném testu o devíti úlohách.

Učební text je doplněn o řadu fotografií a obrázkových ilustrací převážně zobrazených v pravoúhlé axonometrii tak, aby tyto ilustrace odpovídaly co nejvíce realitě. Některé ilustrace jsou zobrazeny v kosoúhlém promítání. Webová stránka navíc obsahuje applety, které jsou vytvořeny v programu dynamické geometrie jménem GeoGebra.

Webová verze se od tištěné liší v několika bodech. V tištěné verzi bakalářské práce jsou applety převedeny do formy obrázků, neodpovídá číslování obrázků, úlohy s krokovaným řešením mají rovnou uvedené řešení, rozšiřující učivo je zařazeno mezi výukový text a rejstřík pojmů je vynechán.

Webová stránka je dočasně dostupná na adrese <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rakusanova/objemyaobsahy>. Po obhajobě bakalářské práce budou stránky zveřejněny na portále středoškolské matematiky, který vytváří Katedra didaktiky matematiky MFF UK. Pro nejlepší zobrazení stránek se doporučuje použít některý z těchto prohlížečů: Google Chrome, Mozilla Firefox, Opera, Safari.



# 1. Motivace

## 1.1 Tělesa kolem nás

Každý z nás má jistě určitou představu o pojmu *těleso*, protože se s nimi setkáváme již od raného dětství. Od doby, kdy naše smysly začínají vnímat tento svět, pozorujeme tyto prostorové útvary. Ať už to jsou díly dětské stavebnice, pozemní stavby, obaly na potraviny nebo kola automobilu. S tělesy se setkáváme jak u předmětů běžného života, tak i v technických, přírodních a uměleckých oborech, zejména v architektuře a stavitelství, v řemeslné výrobě, ve strojírenství a v lékařství (obr. 1.1–1.4).



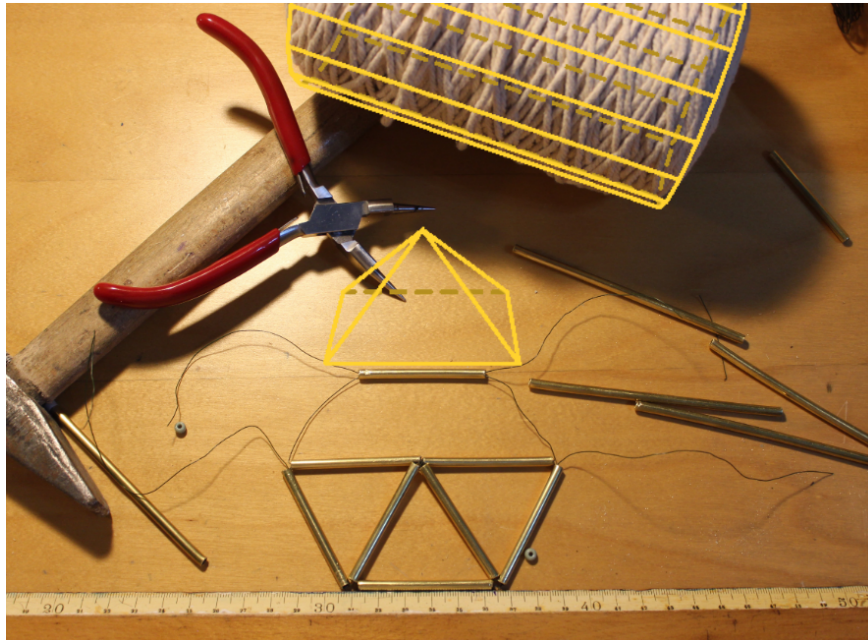
Obrázek 1.1: Cheopsova pyramida – model pravidelného čtyřbokého jehlanu [1]

Na obr. 1.1 je zobrazena známá Cheopsova pyramida v Egyptě, která odpovídá pravidelnému čtyřbokému jehlanu. Podstava jehlanu je čtverec a stěny jsou tvořeny čtyřmi shodnými rovnoramennými trojúhelníky. Tato stavba je první a současně jediná do dnešní doby zachovaná stavba ze 7 klasických divů světa.



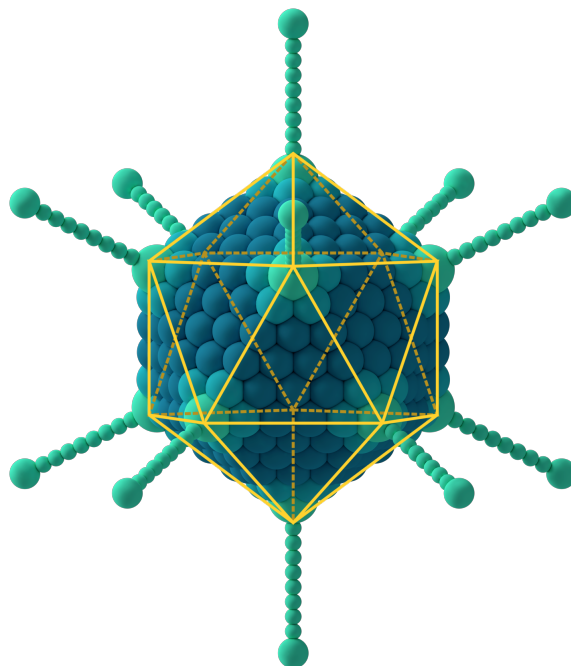
Obrázek 1.2: Stanice metra Lužiny, Praha – modely osekaného dvacetistěnu a hranolů [2]

Na obr. 1.2 je uprostřed zachycen osekaný dvacetistěn v proskleném provedení. Řadíme jej mezi polopravidelná neboli Archimédova či archimédovská tělesa. Jeho stěny jsou tvořeny dvanácti pravidelnými pětiúhelníky a dvaceti pravidelnými šestiúhelníky. Podstavec osekaného dvacetistěnu má tvar pravidelného pětibokého hranolu a je obklopen lavicí pětiúhelníkového půdorysu. Po obou stranách nástupiště je umístěna řada sloupů ve tvaru čtyřbokých hranolů – kvádrů.



Obrázek 1.3: Řemeslná výroba – model sítě pravidelného čtyřbokého jehlanu a model válce

Obr. 1.3 ilustruje postupy v řemeslné výrobě v podobě animace – složením sítě dostáváme pravidelný čtyřboký jehlan. Dále pozorujeme špulku bavlněné příze, která má tvar válce s kruhovou podstavou. Válců lze modelovat pomocí  $n$ -bokých hranolů.

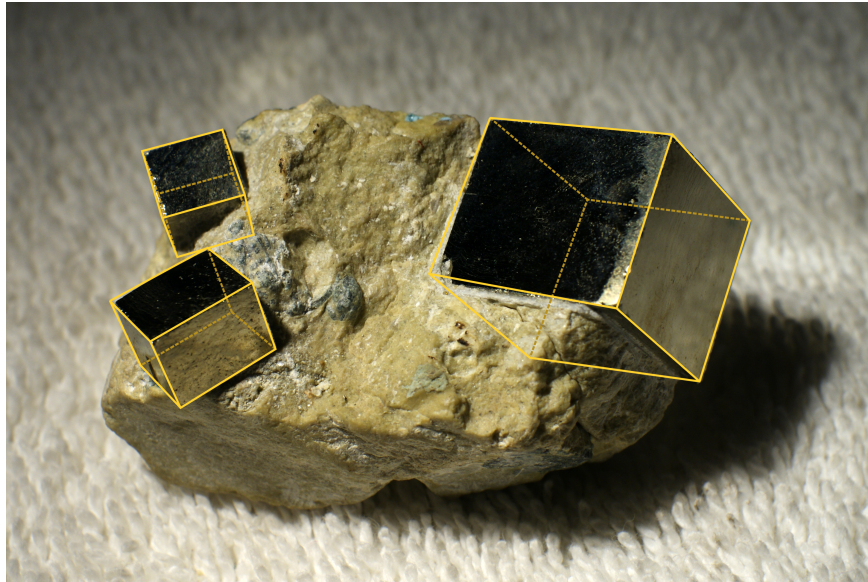


Obrázek 1.4: Kapsida viru – model dvacetistěnu [3]



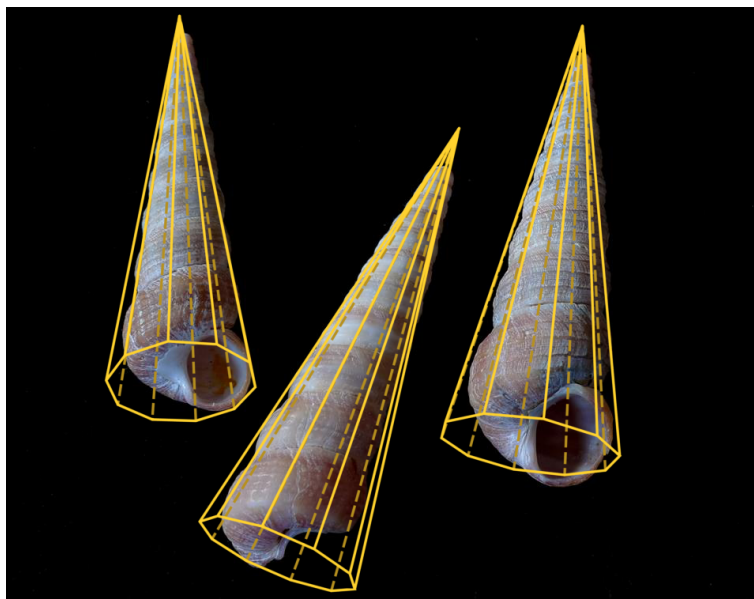
Na obr. 1.4 vidíme model kapsidy viru, tj. proteinového pláště virové částice. Tvar modelu připomíná pravidelný dvacetistěn, který se řadí mezi Platónova či platónská tělesa. Jeho plášť je tvořen dvaceti shodnými rovnostrannými trojúhelníky.

Navíc i v samotné přírodě nacházíme tělesa například ve formě krystalů minerálů nebo jako schránky živočichů (obr. 1.5 a obr. 1.6).



Obrázek 1.5: Krystaly pyritu – modely krychle [4]

Tvar minerálu je dán jeho vnitřní stavbou – krystalovou strukturou, která vzniká zákonitým trojrozměrným opakováním atomů, iontů nebo molekul, z nichž je minerál složen. Na obr. 1.5 se nachází pyrit neboli disulfid železnatý. Halit (sůl kamenná) také tvoří krystaly ve tvaru krychle, tento tvar mohou mít také krystaly mědi, diamantu či stříbra.



Obrázek 1.6: Schránka mořského plže – modely desetibokých jehlanů [5]

Na posledním obrázku 1.6 jsou vyobrazeny schránky věžule obecné, které mají přibližně tvar kužele. Kužele lze modelovat pomocí  $n$ -bokých jehlanů.

## 1.2 Poznámky z historie

*Geometrie* pracuje se vzdálenostmi, objemy a povrchy geometrických útvarů. Slovo *geometrie* vzniklo ve starověku a je odvozeno z řeckých slov *gé* („země“) a *metria* („měření“). Postupně se vyčleňovala na *planimetrii* (geometrii v rovině, rovinnou geometrii) a *stereometrii* (geometrii v prostoru, prostorovou geometrii). Slovo *stereometrie* (z řeckých slov *stereos* „prostor“ a *metria*) bylo zavedeno starořeckým filozofem Aristotelem (4. stol. př. n. l.), zatímco slovo *planimetrie* (z latinského slova *plānum* „rovina“ a řeckého *metria*) vzniklo až ve středověku po vzoru *stereometrie*. Rozvoj *geometrie* vycházel z požadavků tehdy existující společnosti a souvisel se vznikem architektury, astronomie, optiky, perspektivy, kartografie, balistiky a dalších odvětví.

Ve starověku se některé z vůbec prvních geometrických výpočtů pravděpodobně vztahovaly ke stavbám budov, vyměrování pozemků, dodávek potravin nebo výrobě artefaktů pro náboženské účely. Ve starověkých mezopotámských a egyptských textech se objevují zápisy o výpočtech objemů. Starověký egyptský *Rhindův papyrus* z první poloviny 2. tisíciletí př. n. l. zahrnuje úlohy na výpočet objemu obilných sýpek tvaru kvádrů (popřípadě krychle) a válce s kruhovou podstavou. *Moskevský papyrus* také z první poloviny 2. tisíciletí př. n. l. zahrnuje návod na výpočet objemu komolého jehlanu.

Ze starověké Mezopotámie (období Starobabylónské říše z období první poloviny 2. tisíciletí př. n. l.) se dále dochovaly hliněné tabulky obsahující praktické úlohy na výpočet objemů nebo rozměrů různých staveb (domů, náspů, přehrad, kanálů, opevnění apod.). Podobné úlohy o výpočtech objemů těles ze stavební praxe nalezneme ve staročínské knize *Matematika v devíti kapitolách* (z 1. stol. př. n. l.).



Obrázek 1.7: Písaři ve starověku [0]

Jedním z největších matematiků helénistického období byl Eukleidés (2. pol. 4. stol.–1. pol. 3. stol. př. n. l.), který se soustavně zabýval nejen planimetrií, ale také *stereometrií*. Do této doby známé *stereometrické poznatky* byly sepsány v posledních třech kapitolách (jedenácté, dvanácté a třinácté) Eukleidových *ZÁKLADŮ*. Poslední třináctá kapitola také obsahuje pojednání o pravidelných mnohostěnech, kde Eukleidés přináší důkaz, proč neexistuje více než pět pravidelných mnohostěnů (podle filozofa Platóna z 5.–4. stol. př. n. l. zvaných Platónova či platónská tělesa). Další významný řecký matematik byl Archimédés ze Syrakús (3. stol. př. n. l.), který odvodil pravidla pro výpočet povrchů a objemů různých těles (např. koule, elipsoidu, úseče rotačního paraboloidu a průniku dvou válců). Jeho objevy jsou začátkem

myšlenek, na kterých byl po dvou tisících letech budován integrální počet. Integrální počet je využíván jako obecný nástroj pro výpočet objemů a povrchů těles (součást vysokoškolské matematiky). Archimédés se zabýval polopřavidelnými konvexními mnohostěny, proto se dnes nazývají Archimédovými či archimédovskými tělesy.

V římském impériu patřili mezi nejvýznamnější alexandrijské matematiky v oblasti geometrie Hérón (1. stol. n. l.) a Pappos (2. pol. 3. stol.–1. pol. 4. stol. n. l.). Hérónovo dílo *Stereometrie* se zabývá kromě měření objemů geometrických těles i měřením například objemů staveb, divadel, amfiteátrů, plaveckých bazénů, studní, lodí a vinného sudu. Pappova *Matematická sbírka* má podobu stručné a jasné příručky nejen geometrie s historickými poznámkami, zlepšeními a obměnami existujících vět a důkazů. Mnohé výsledky starověkých autorů se zachovaly jen díky této sbírce. Mimo jiné vyslovil obecné pravidlo pro výpočet objemů rotačních těles, rovněž známé jako Pappos–Guldinovy věty.

V novověku to byl právě Johannes Kepler (pražský hvězdář a matematik německého původu), který znovu objevil Pappova a Hérónova díla v průběhu 16. a 17. století a dále s nimi pracoval. V 18. století vyslovuje švýcarský matematik Leonhard Euler pro konvexní mnohostěny větu o vztahu mezi počtem vrcholů, stěn a hran mnohostěnu (tzv. Eulerovu větu).

Tento historický výtah vychází z [Polák (2014) s. 285, 331], z [Pomykalová (2009) s. 122] a z [Rooney (2017) s. 61, 69].



## 2. Základní pojmy

### 2.1 Tělesa

Již víme, že planimetrie neboli rovinná geometrie se zabývá rovinnými geometrickými objekty, tj. rovinnými útvary. Stereometrie neboli prostorová geometrie se zabývá prostorovými geometrickými objekty, tj. prostorovými útvary. Nejdříve si v této kapitole zavedeme pojem **těleso**. Tento pojem je obtížné definovat bez vysokoškolských poznatků. Pro potřeby výuky nebudeme v celé práci zavádět exaktní definici tělesa ani plochy jako hranice, neboť tím bychom přesahovali rámec učiva středních škol. Využijeme následující definici, která vychází ze středoškolských učebnic [Polák (2014) s. 328] a z [Pomykalová (2009) s. 123].

#### Definice

**Geometrickým tělesem** (zkráceně **tělesem**) se nazývá prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Tedy tento útvar je ohraničený uzavřenou plochou, která je jeho součástí a kterou označujeme jako hranice, resp. povrch.

Prostorové útvary (tělesa), stejně jako rovinné útvary, můžeme klasifikovat podle určitých kritérií. K základnímu rozdělení patří dělení na tělesa **konvexní** a **nekonvexní** [VYŠÍN (1964), s. 5].

#### Definice

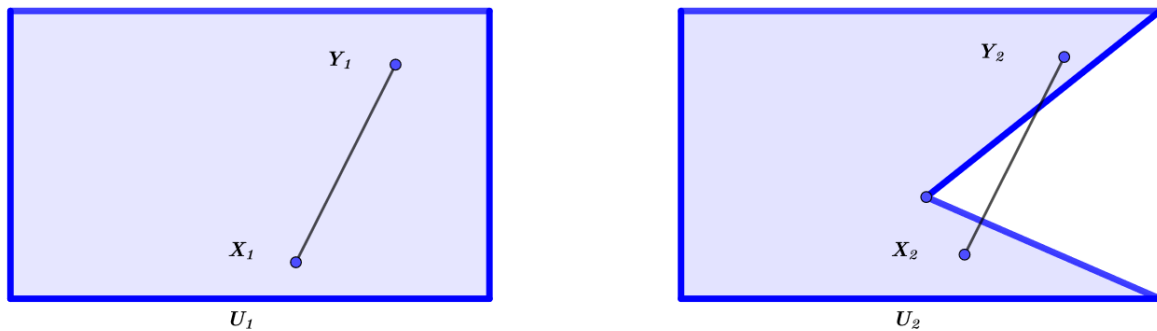
Geometrický prostorový útvar  $U$  nazýváme **konvexním**, pokud úsečka spojující kterékoli jeho dva body také náleží tomuto útvaru  $U$ . V opačném případě je daný útvar **nekonvexní**.

Konvexní prostorové útvary kolem nás poznáváme následovně.

#### Poznámka

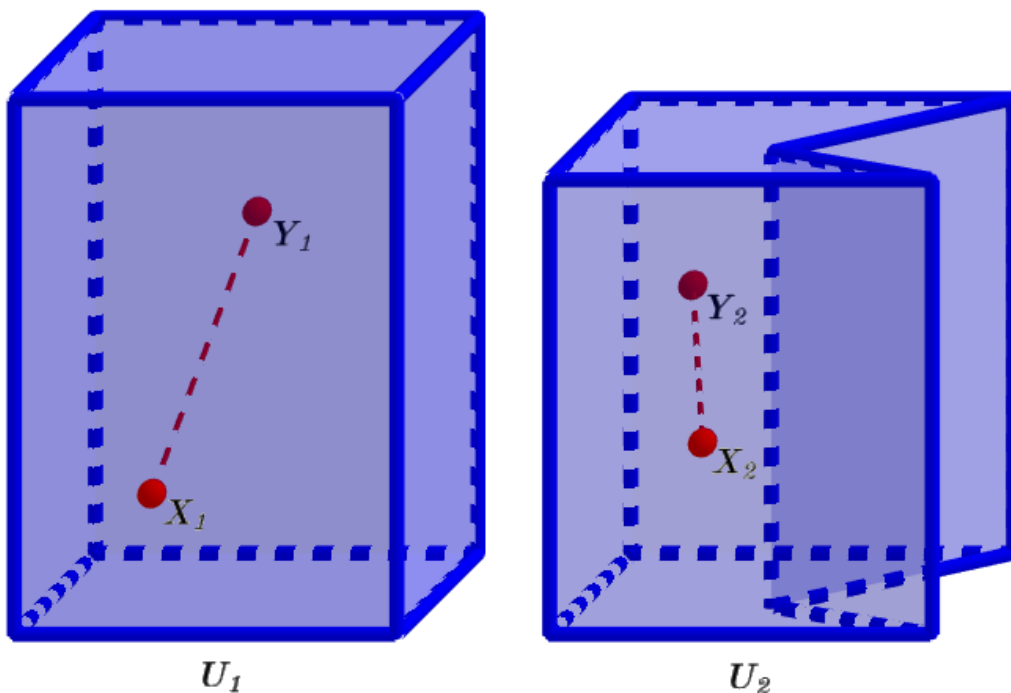
Představme si tovární halu ve tvaru kvádrů, jehož všechny body můžeme po dvojicích spojit napjatým drátem (aniž by byl drát někde ohnutý). Tovární hala představuje konvexní útvar  $U$  v prostoru, napjatý drát představuje spojnicí bodů  $X, Y$  čili úsečku  $XY$ . Představme si tovární halu s půdorysem ve tvaru podkovy, tak kvůli jejímu „otevřenému dvoru“ by tato tovární hala představovala útvar nekonvexní, protože existují dvojice bodů spojené drátem, který leží částečně nebo úplně vně haly.

Na následujícím obr. 2.1 se nachází dva rovinné útvary – konvexní čtyřúhelník  $U_1$  a nekonvexní pětiúhelník  $U_2$ .



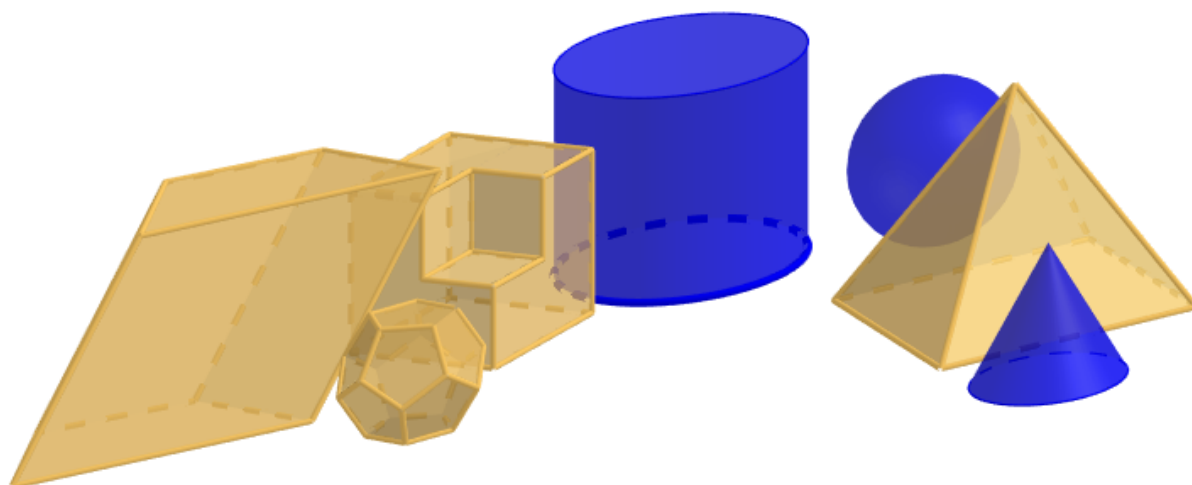
Obrázek 2.1: Konvexní čtyřúhelník  $U_1$  a nekonvexní pětiúhelník  $U_2$  v rovině

Na následujícím obr. 2.2 se nachází dva prostorové útvary – konvexní čtyřboký hranol  $U_1$  a nekonvexní pětiboký hranol  $U_2$ .



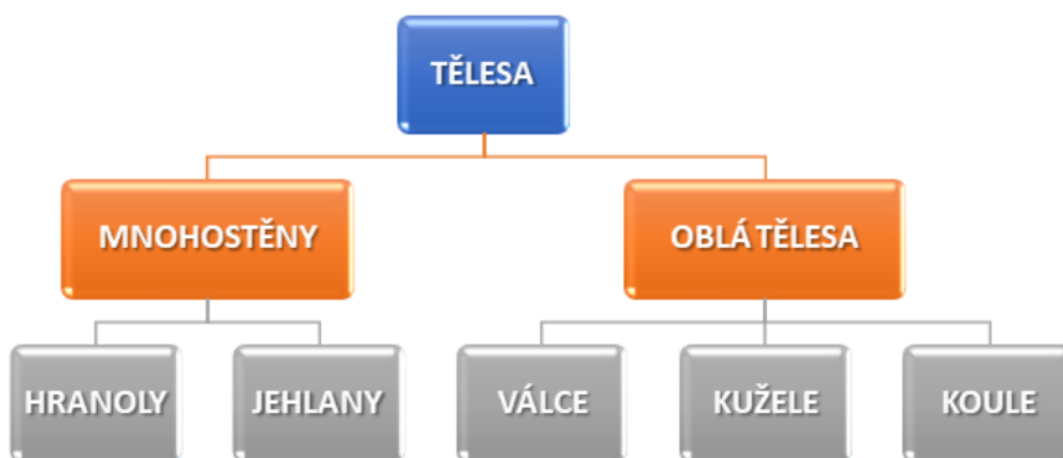
Obrázek 2.2: Konvexní čtyřboký hranol  $U_1$  a nekonvexní pětiboký hranol  $U_2$  v prostoru

Vzhledem k množství geometrických těles si zavedeme jen některá tělesa, vytvoříme si přehled těch těles, která se používají ve školské matematice, a uvedeme si k nim konkrétní příklady na výpočet jejich objemů a povrchů. Školská tělesa můžeme rozdělit do dvou základních skupin na **mnohostěny** a **oblá tělesa** (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Skupina těles v prostoru (mnohostěny a oblá tělesa)

Mnohostěny lze členit do podskupin na **hranoly** a **jehlany**. Oblá tělesa rozdělujeme do podskupin na **válce**, **kužele** a **koule** (obr. 2.4). V kapitolách této práce se budeme zabývat mnohostěny.



Obrázek 2.4: Hierarchické schéma těles

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato práce věnovat konvexním mnohostěm, ale v šesté kapitole Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěm si ukážeme příklady s řešením a krokovaně úlohy na výpočet objemů a povrchů nekonvexních mnohostěm.

## 2.2 Mnohostěny

Připomeneme si pojem mnohoúhelníku, který známe z planimetrie [Kadleček (1996) s. 122].

### Definice

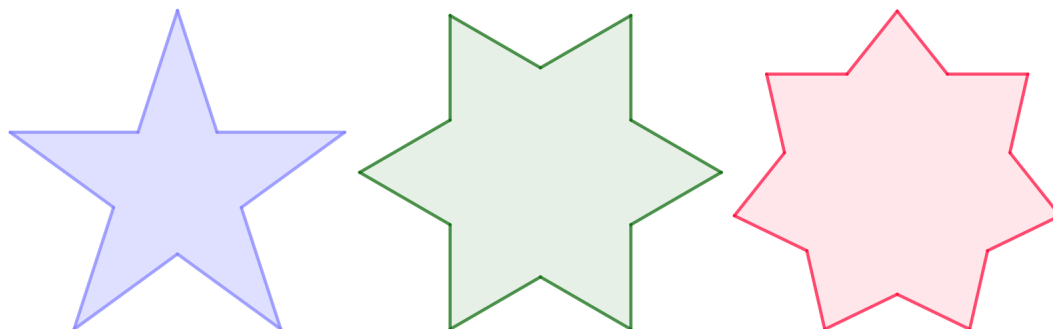
**Mnohoúhelník** (polygon) je obrazec ohraničený uzavřenou lomenou čarou, která sama sebe neprotíná.

Kromě obecného mnohoúhelníku zavádíme také pravidelný mnohoúhelník.

### Definice

Za **pravidelný mnohoúhelník** je považován takový, jenž má všechny strany i vnitřní úhly shodné.

Mnohoúhelníky také nazýváme  $n$ -úhelníky, kde  $n \in \mathbb{N}$  udává počet vrcholů mnohoúhelníku. Z definice pravidelného mnohoúhelníku vyplývá, že nemůžeme mezi ně řadit například nekonvexní hvězdicovité mnohoúhelníky (obr. 2.5).



Obrázek 2.5: Nekonvexní hvězdicovité mnohoúhelníky (pěticípý, šesticípý a sedmicípý)

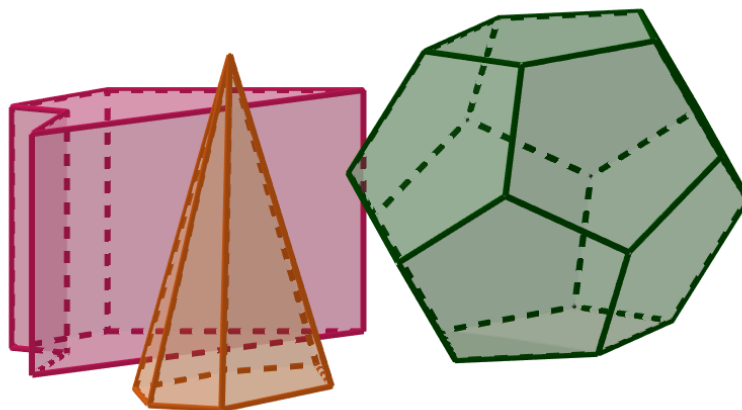
Mnohostěny v prostoru jsou analogií mnohoúhelníků v rovině. Následující zavedení mnohostěny vychází z [Kadleček (1996) s. 147] a z [Pomykalová (2009) s. 127].

### Definice

**Mnohostěn** (polyedr,  $n$ -stěn) je každé těleso, jehož hranice, resp. povrch je sjednocením  $n$  mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží ve stejné rovině. Součástí mnohostěny (jako každého tělesa) je i jeho vnitřek.

Na následujícím obr. 2.6 s mnohostěny se nachází nekonvexní pětiboký kolmý hranol, nepravidelný šestiboký jehlan a pravidelný dvanáctistěn.



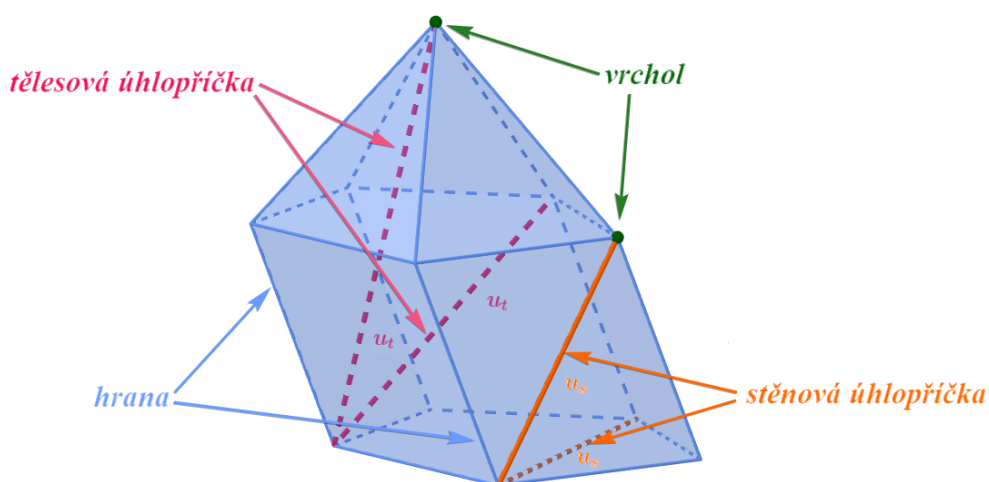


Obrázek 2.6: Skupina mnohostěňů v prostoru

Z definice mnohostěnu plyne, že jeho **stěny** tvoří mnohoúhelníky. Zavádíme následující pojmy ilustrované na obr. 2.7:

#### Definice

- Strany těchto mnohoúhelníků (průsečnice stěn) označujeme jako **hrany** mnohostěnu.
- Body, v nichž se hrany sbíhají (vrcholy mnohoúhelníků) jsou zároveň **vrcholy** mnohostěnu.
- Úsečka, která spojuje dva vrcholy mnohostěnu ležící v jedné jeho stěně a která není hranou příslušného mnohostěnu, se nazývá **stěnová úhlopříčka** mnohostěnu.
- Úsečka, která spojuje dva vrcholy mnohostěnu a která neleží v téže stěně, se nazývá **tělesová úhlopříčka** mnohostěnu.



Obrázek 2.7: Obecný jedenáctiboký mnohostěň

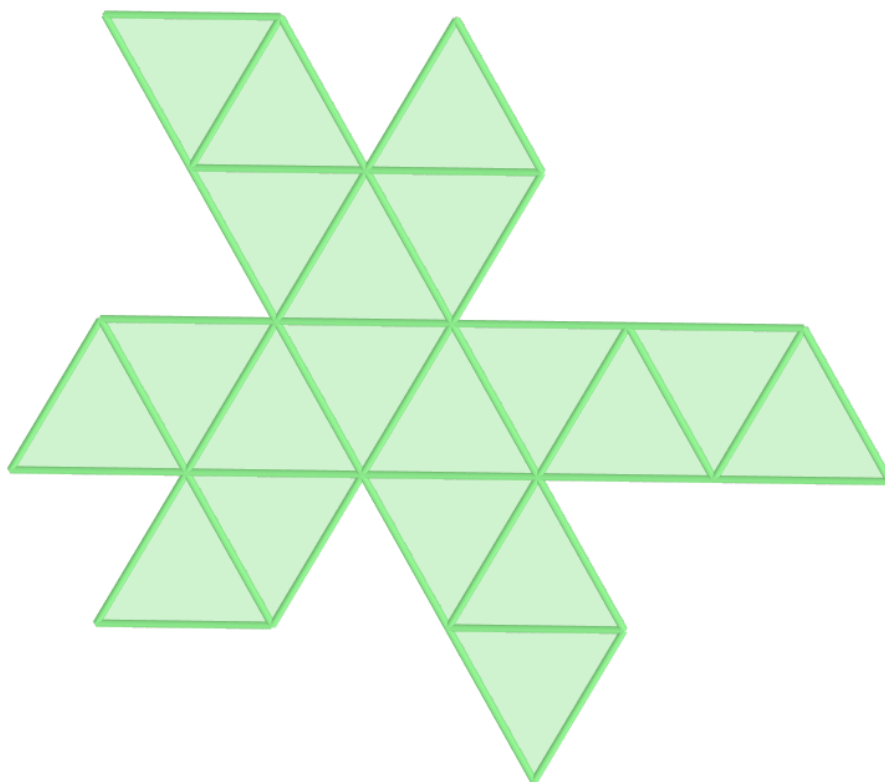
### Poznámka

- Stěny, které mají společnou hranu, se nazývají **sousední stěny**.
- Vrcholy, které leží na stejné hraně, se nazývají **sousední vrcholy**.

Umístěním všech stěn mnohostěnu do vhodného uskupení v jedné rovině tak, aby vznikl jeden rovinný obrazec, získáme **sít mnohostěnu** (obr. 2.8).

### Poznámka

Nezapomínejme, že každá sestava všech stěn mnohostěnu sít nutně tvořit nemusí. Stěny musí být vhodně umístěny tak, aby bylo možné tuto sít složit pouhým ohýbáním papíru (v případě vyrobeného papírového modelu).



Obrázek 2.8: Sít mnohostěnu (pravidelného dvacetistěnu)

Názvy mnohostěňů souvisí s počtem jejich stěn.

### Poznámka

Mnohostěny jsou pojmenovávány podle počtu stěn (čtyři a více). Jejich cizojazyčné názvy pocházejí z řečtiny. Tedy dostáváme následující názvy mnohostěňů: čtyřstěn (tetraedr), pětistěn (pentaedr), šestistěn (hexaedr), sedmistěn (heptaedr), osmistěn (oktaedr), devítistěn (nonaedr), desetistěn (dekaedr), jedenáctistěn (undekaedr), dvanáctistěn (dodekaedr), dvacetistěn (ikosaedr) atd. Pro běžně používané mnohostěny máme samostatná označení, jako je krychle a kvádr (případy šestistěnu), jehlan apod.

Kromě obecného mnohostěnu zavádíme také pravidelný mnohostěn.

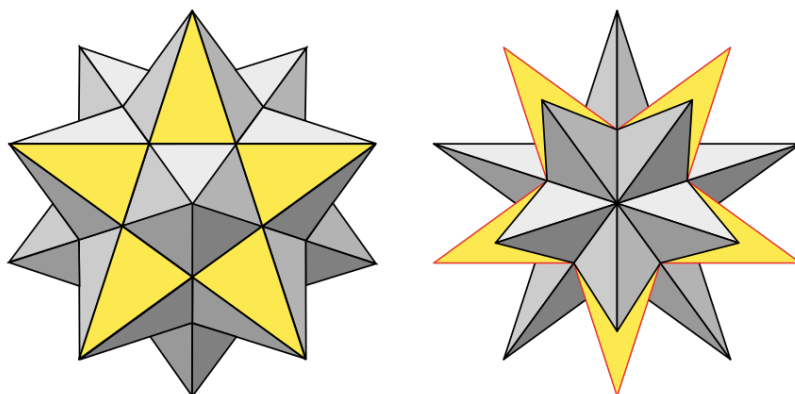
### Definice

**Pravidelným mnohostěnem** nazýváme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné  $n$ -úhelníky ( $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) a zároveň z každého vrcholu vychází stejný počet hran  $q$  ( $q \geq 3$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ).

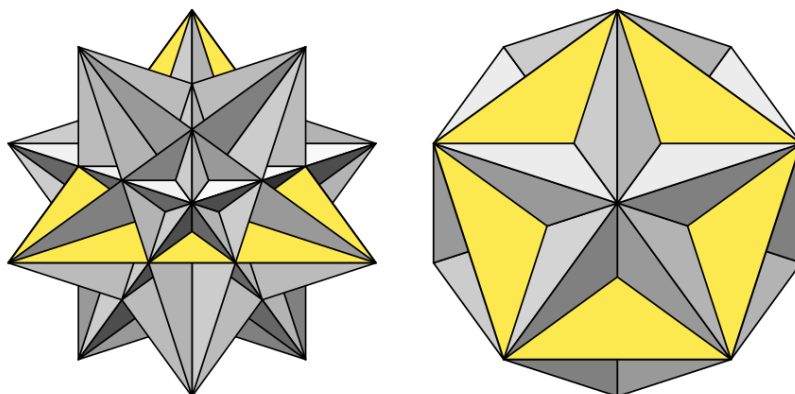
Pravidelné konvexní mnohostěny nazýváme **Platónovými** či **platónskými** tělesy. Těmto tělesům se budeme věnovat v samostatné kapitole.

### Poznámka

Pokud v definici pravidelného mnohostěnu vynecháme podmínku konvexnosti tělesa, tak mezi pravidelné mnohostěny můžeme zařadit i nekonvexní Kepler-Poinsotovy mnohostěny. Čtyři Kepler-Poinsotova tělesa patří do skupiny tzv. hvězdicovitých mnohostěňů, které vznikají z platónských těles. Na obr. 2.9 jsou vyobrazena Keplerova tělesa – malý a velký hvězdicovitý dvanáctistěn. Na obr. 2.10 jsou vyobrazeny Poinsotova tělesa – velký dvacetistěn a velký dvanáctistěn.



Obrázek 2.9: Keplerova tělesa [7]



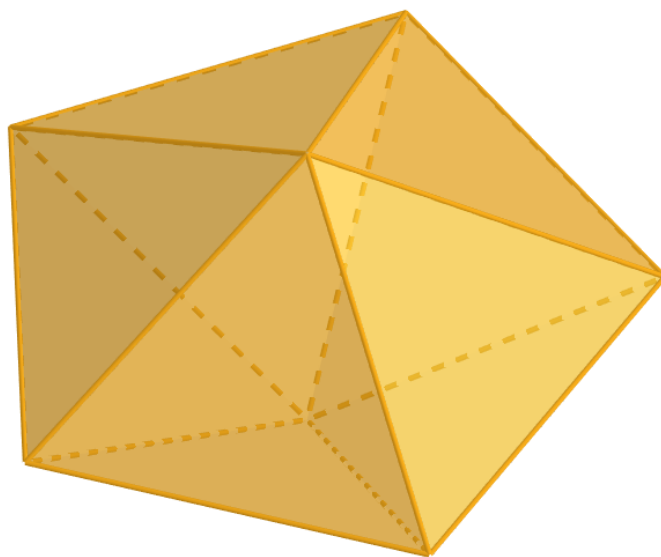
Obrázek 2.10: Poinsotova tělesa [7]

Kromě konvexního obecného a pravidelného mnohostěnu zavádíme také polopravidelný konvexní mnohostěn.

Polopravidelné konvexní mnohostěny nazýváme **Archimédovými** či **archimédovskými** tělesy. Těmto tělesům se budeme věnovat v samostatné kapitole.

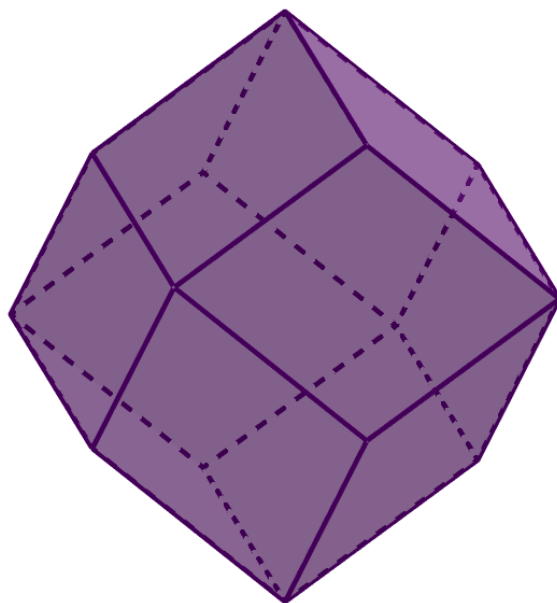
Dále si uvedeme skupiny konvexních mnohostěňů, jejichž stěny jsou sice navzájem shodné, ale nemůžeme je všechny řadit mezi pravidelné mnohostěny (pouze některé z nich jsou pravidelnými mnohostěny), protože počet jejich hran vycházející z každého vrcholu není vždy stejný:

- **Deltaedry**, neboli  $n$ -stěny, jsou konvexní mnohostěny, jejichž stěnami jsou navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky. Existuje osm konvexních deltaedrů ( $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20$ ), z nichž tři řadíme mezi platónská tělesa (čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn – splňují podmínku stejného počtu hran vycházejících z každého vrcholu). Na obr. 2.11 je vyobrazen desetiboký deltaedr (pětiboký dvojjehlan).



Obrázek 2.11: Desetiboký deltaedr - pětiboký dvojjehlan

- **Romboedry** jsou konvexní mnohostěny, jejichž stěnami jsou navzájem shodné kosočtverce. Tyto kosočtverce mají délky úhlopříček v poměru  $1 : \sqrt{2}$ . Mezi romboedry řadíme kosočtverečný dvanáctistěn, kosočtverečný dvacetistěn nebo kosočtverečný třicetistěn, které nespĺňují podmínku stejného počtu hran vycházejících z každého vrcholu (na obr. 2.12 vidíme dva typy vrcholů - se třemi a čtyřmi hranami). I kosý hranol jménem klenec můžeme zařadit do této skupiny.



Obrázek 2.12: Romboedr - kosočtverečný dvanáctistěn

Minerál ze skupiny granátu, tzv. andradit, tvoří krystaly ve tvaru kosočtverečného dvanáctistěnu (obr. 2.13)



Obrázek 2.13: Krystal andraditu ve tvaru kosočtverečného dvanáctistěnu [71]

Následující věta zvaná **Eulerova věta** je užitečným nástrojem pro zkoumání počtů stěn, vrcholů a hran jednotlivých konvexních mnohostěnů.

### Věta

Součet počtu vrcholů a stěn konvexního mnohostěnu je roven počtu jeho hran zvětšenému o dvě. Označíme-li  $s$  počet stěn,  $h$  počet hran,  $v$  počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí:

$$s + v = h + 2.$$

*Rozšiřující poznámka.* Důkaz této věty jde nad rámec středoškolských znalostí a lze ho nalézt zde: <https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/50/slavik.pdf>.

V souladu s rámcovými vzdělávacími programy matematiky pro druhý stupeň základní školy a pro školy střední se budeme zabývat zejména mnohostěny konvexními. V této práci se z konvexních mnohostěnu zabýváme především hranoly a jehlany.

## 2.3 Platónská tělesa

V této samostatné kapitole se budeme zabývat Platónovými či platónskými tělesy, protože jejich „dokonalé“ struktury byla vždy věnována velká pozornost a tato tělesa našla uplatnění jak v architektuře nebo designu, tak třeba i v nanotechnologiích [Ashrafi a Diudea (2016) s. 61–81].

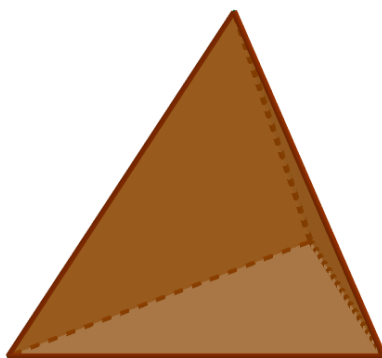
### Definice

**Platónovo** či **platónské těleso** je konvexní pravidelný mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a zároveň z každého vrcholu vychází stejný počet hran.

Pokud uvažujeme v rovině všechny pravidelné  $n$ -úhelníky, tak jich existuje nekonečně mnoho ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ), zatímco pravidelných konvexních  $n$ -stěnu v prostoru existuje právě pět (obr. 2.14–2.18).

### Pravidelný čtyřstěn

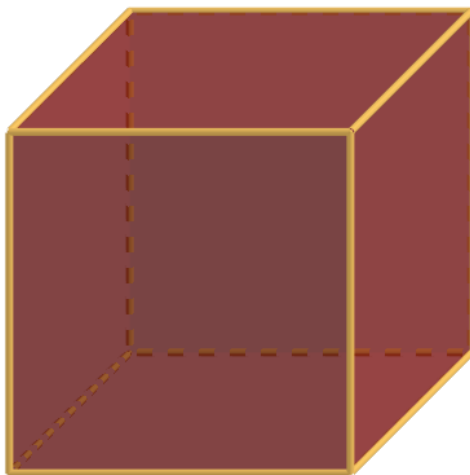
Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou tvořeny čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Toto těleso má čtyři vrcholy a šest hran, viz obr. 2.14.



Obrázek 2.14: Pravidelný čtyřstěn

## Pravidelný šestistěn

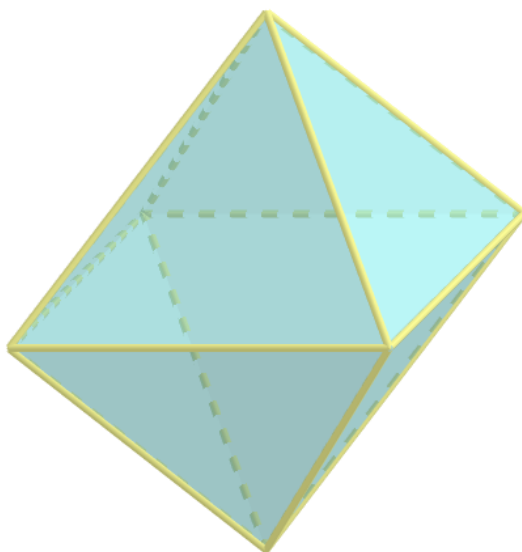
Pravidelným šestistěnem je krychle. Jeho stěny jsou tvořeny šesti shodnými čtverci. Toto těleso má osm vrcholů a dvanáct hran, viz obr. 2.15.



Obrázek 2.15: Pravidelný šestistěn

## Pravidelný osmistěn

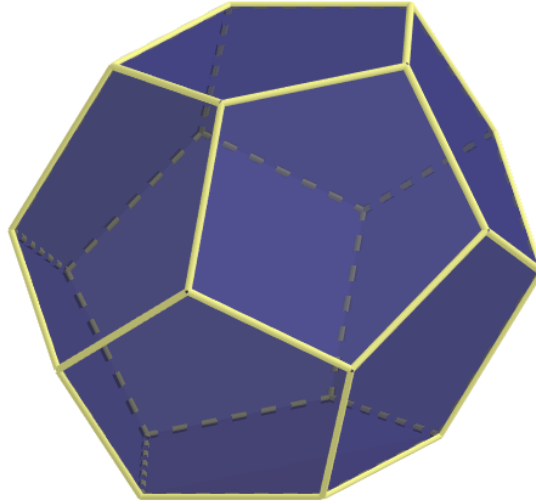
Stěny pravidelného osmistěnu jsou tvořeny osmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Toto těleso si můžeme představit jako sjednocení dvou shodných těles, a to pravidelných čtyřbokých jehlanů se společnou podstavou. Toto těleso má šest vrcholů a dvanáct hran, viz obr. 2.16.



Obrázek 2.16: Pravidelný osmistěn

## Pravidelný dvanáctistěn

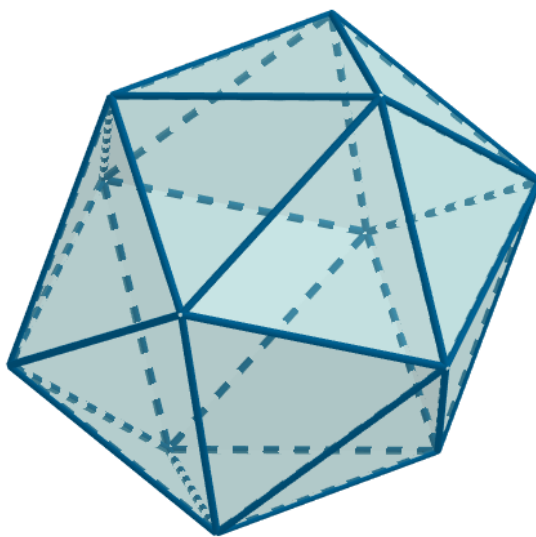
Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou tvořeny dvanácti shodnými pravidelnými pětiúhelníky. Toto těleso má dvacet vrcholů a třicet hran, viz obr. 2.17.



Obrázek 2.17: Pravidelný dvanáctistěn

## Pravidelný dvacetistěn

Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou tvořeny dvaceti shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Toto těleso má dvanáct vrcholů a třicet hran, viz obr. 2.18.



Obrázek 2.18: Pravidelný dvacetistěn

Následující věta uvádí počet konvexních pravidelných mnohostěnů.



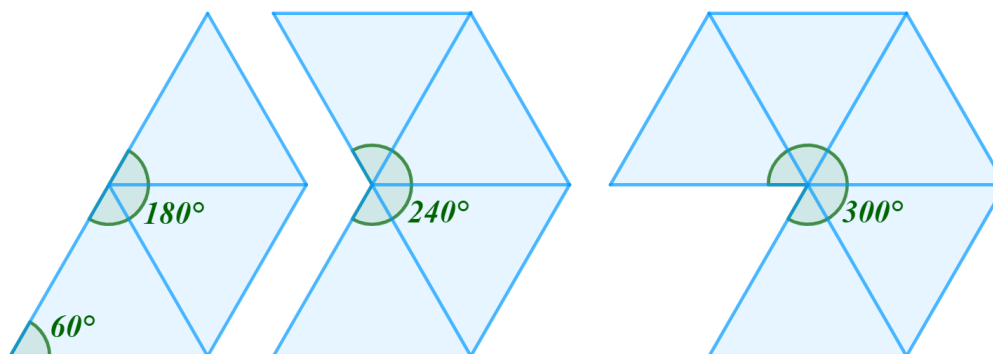
## Věta

Existuje právě pět konvexních pravidelných mnohostěnů.

Předvedeme si důkaz, proč existuje právě pět konvexních pravidelných mnohostěnů. Plášť pravidelného mnohostěnu je tvořen shodnými pravidelnými mnohoúhelníky a žádné dva pravidelné mnohoúhelníky neleží ve stejné rovině. Součet velikostí vnitřních úhlů ve stěnách u jednoho vrcholu, ve kterém se sbíhají hrany, musí být menší než  $360^\circ$  (v opačném případě by stěny incidující s daným vrcholem ležely v jedné rovině) a zároveň každý vrchol mnohostěnu inciduje alespoň se třemi stěnami, aby mohlo vzniknout prostorové těleso.

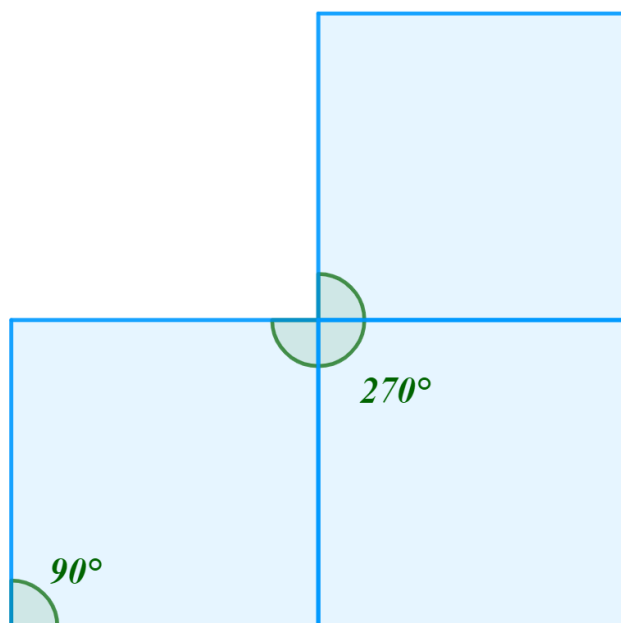
- **Stěnami mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky**

Velikost vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku je  $60^\circ$ . Na základě této skutečnosti se mohou v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu stýkat stěny tři (čtyřstěn), čtyři (osmistěn) nebo pět (dvacetistěn), kde součty velikostí úhlů u vrcholu budou popořadě  $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$ ,  $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$  nebo  $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$ , viz obr. 2.19. V případě počtu stěn vyššího než pět bychom již přesáhli omezující podmínku ( $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ ).



Obrázek 2.19: Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu pravidelného čtyřstěnu, osmistěnu a dvacetistěnu

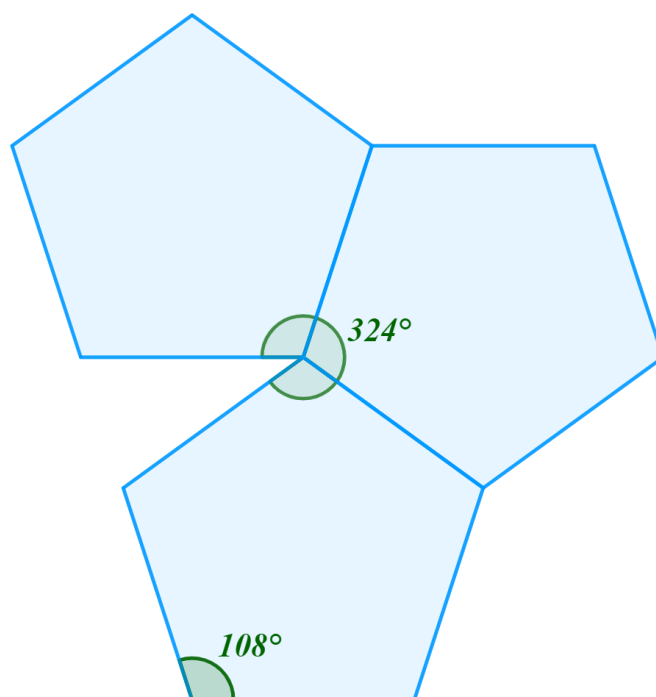
- **Stěnami mnohostěnu jsou pravidelné čtyřúhelníky – čtverce** Velikost vnitřních úhlů pravidelného čtyřúhelníku je  $90^\circ$ . Na základě této skutečnosti se mohou v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu stýkat pouze tři stěny (krychle), kde součet velikostí úhlů u vrcholu bude  $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ , viz obr. 2.20. V případě počtu stěn vyššího než tři bychom již přesáhli omezující podmínku ( $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ ).



Obrázek 2.20: Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu krychle

- Stěnami mnohostěnu jsou pravidelné pětiúhelníky

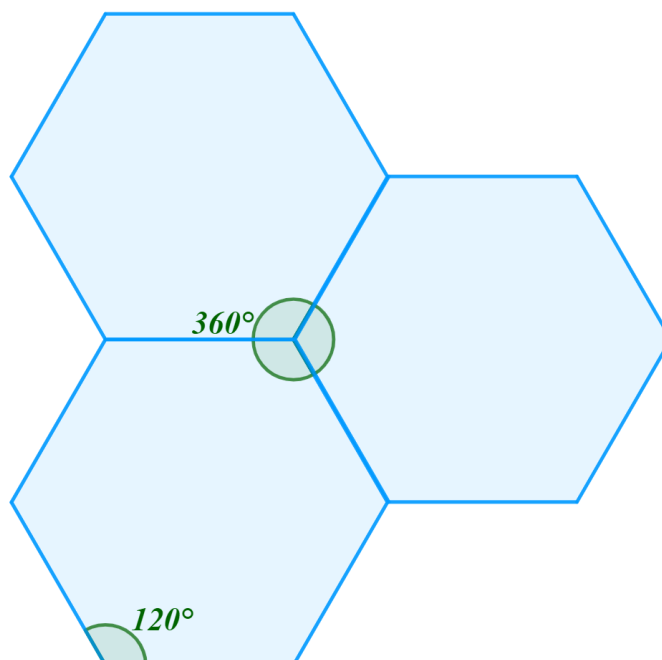
Velikost vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku je  $108^\circ$ . Na základě této skutečnosti se mohou v jednom vrcholu pravidelného mnohostěnu stýkat pouze tři stěny (dvanáctistěn), kde součet velikostí úhlů u vrcholu bude  $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$ , viz obr. 2.21. V případě počtu stěn vyššího než tři bychom již přesáhli omezující podmínku ( $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$ ).



Obrázek 2.21: Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu dvanáctistěnu

- Stěnami mnohostěnu jsou pravidelné šestiúhelníky

Velikost vnitřních úhlů pravidelného šestiúhelníku je  $120^\circ$ . Pokud se budou stýkat tři stěny v jednom vrcholu, tak součet velikostí úhlů u vrcholu bude  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ . Tím jsme přesáhli omezující podmínku a stěny incidující s daným vrcholem leží v jedné rovině, proto neexistuje pravidelný konvexní mnohostěn, který by měl za stěny šestiúhelníky, viz obr. 2.22.



Obrázek 2.22: Šestiúhelníky incidující s daným vrcholem ležící v jedné rovině

Obdobně toto tvrzení platí pro pravidelné  $n$ -úhelníky s vyšším počtem vrcholů než šest. Tímto jsme ukázali, že pravidelných konvexních mnohostěnů je právě pět.  $\square$

Obdobně jako pravidelným mnohoúhelníkům vepisujeme a opisujeme kružnici, tak každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu (platónskému tělesu) je možné sestrojít vepsanou a opsanou kulovou plochu.

- **Vepsaná kulová plocha** se dotýká všech stěn platónského tělesa v jejich středech.
- **Opsaná kulová plocha** obsahuje všechny vrcholy platónského tělesa. Středů těchto dvou kulových ploch splývají v jednom bodě.

### 2.3.1 Dualita platónských těles

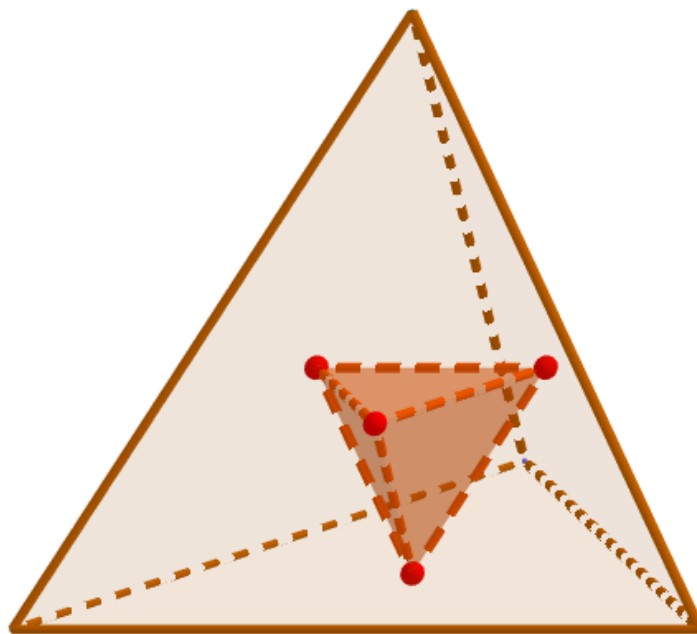
Následující definice je převzata z [Dohnalova (2016) str. 41].

#### Definice

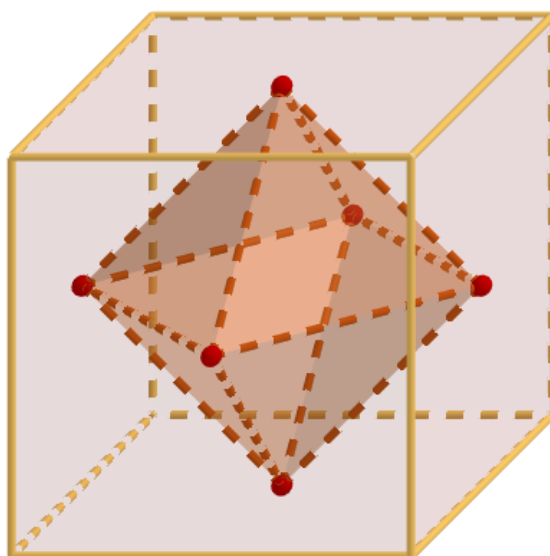
Ke každému pravidelnému mnohostěnu existuje mnohostěn jemu duální, jehož vrcholy leží ve středech stěn mnohostěnu původního.

Tedy středy jednotlivých stěn platónského tělesa tvoří vrcholy dalšího platónského tělesa. Hrany nového mnohostěnu tvoří úsečky spojující vrcholy v sousedních stěnách. Takto získaný

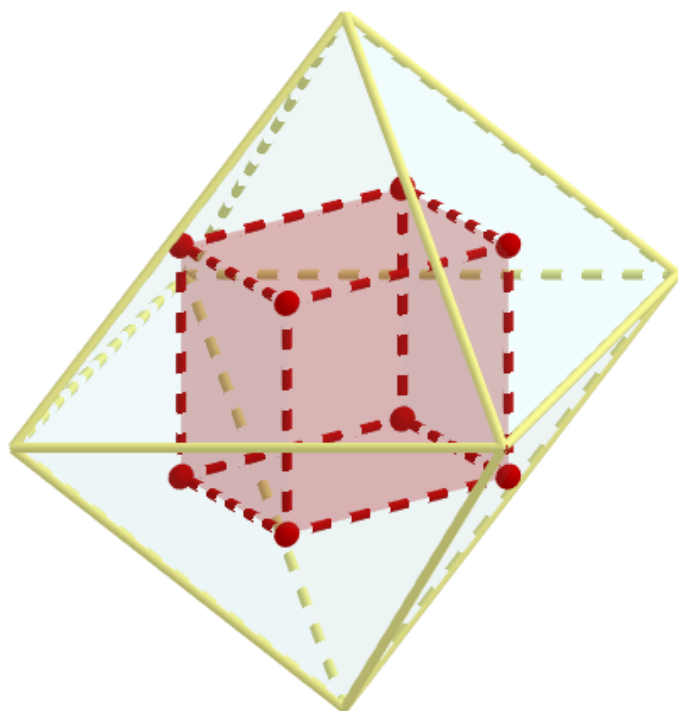
mnohostěn se nazývá duální mnohostěn k mnohostěnu výchozímu. Tuto vlastnost pojmenováváme jako dualita platónských těles. Pravidelný čtyřstěn je duální sám se sebou (obr. 2.23). Pravidelný šestistěn je duální s pravidelným osmistěnem a naopak (obr. 2.24–2.25). Pravidelný dvanáctistěn je duální s pravidelným dvacetistěnem a naopak (obr. 2.26–2.27).



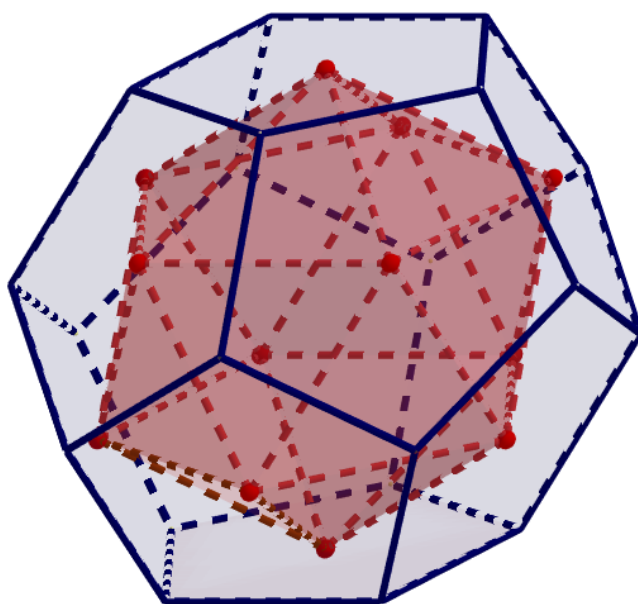
Obrázek 2.23: Dualní mnohostěn k čtyřstěnu – čtyřstěn



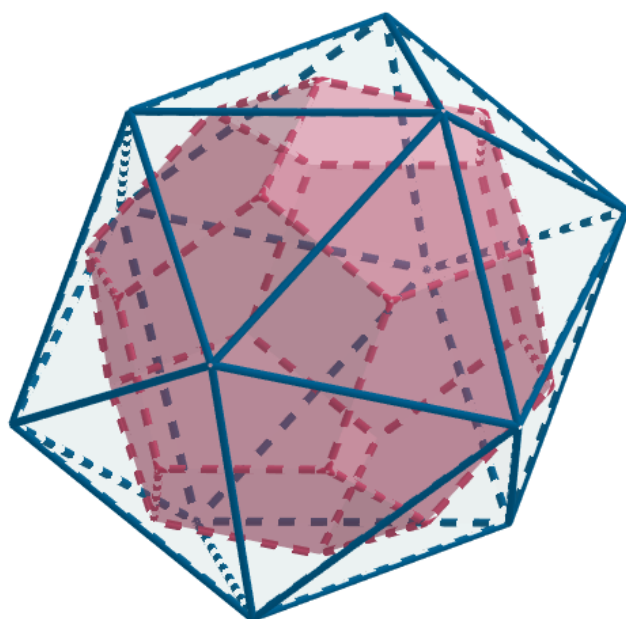
Obrázek 2.24: Dualní mnohostěn ke krychli – osmistěn



Obrázek 2.25: Dualní mnohostěn k osmistěnu – krychle



Obrázek 2.26: Dualní mnohostěn k dvanáctistěnu – dvacetistěn



Obrázek 2.27: Dualní mnohostěn k dvacetistěnu – dvanáctistěn

Platónská tělesa nacházejí uplatnění v různých oblastech lidské činnosti, například z herního světa jsou známé hrací kostky vyobrazené na obr. 2.28. Na jejich stěnách se postupně nacházejí čísla od 1 do 6. V některých stolních hrách (Dungeons & Dragons) se hraje i s jinými tvary kostek (obr. 2.29), ale vždy kostky budou mít tvar pravidelného mnohostěnu, protože pravděpodobnost dopadu na jednotlivé stěny by měla být stejná.



Obrázek 2.28: Hrací kostka ve tvaru krychle [9]



Obrázek 2.29: Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pravidelných mnohostěnů [10]

## 2.4 Archimédovská tělesa

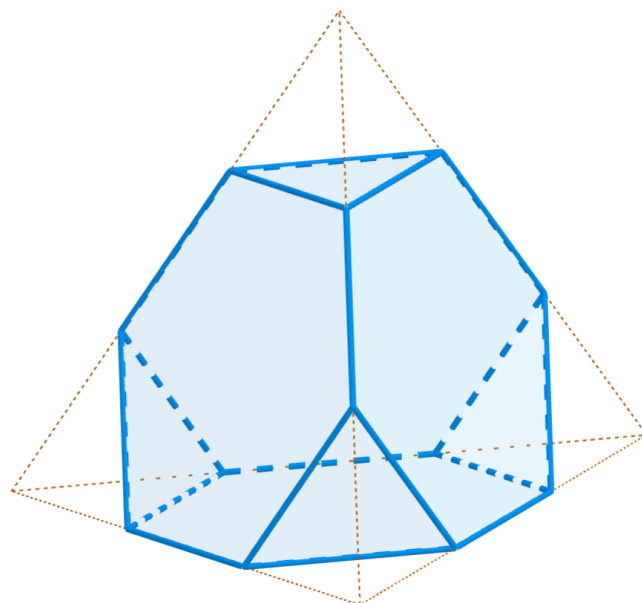
V této samostatné kapitole se budeme zabývat **Archimédovými** či **archimédovskými tělesy**, protože jejich „polodokonalé“ struktúře byla vždy věnována pozornost a tato tělesa našla uplatnění jak v architektúře nebo designu, tak třeba i v nanotechnologiích [[19], s. 69]. Patří mezi polopravidelné mnohostěny a vznikají různými způsoby osekávání nebo natočení z těles platónských.

### Definice

**Polopravidelným mnohostěnem** (nebo též archimédovským či Archimédovým tělesem) nazýváme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné  $n$ -úhelníky ( $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ ) dvou, nebo více typů (z hlediska počtu jejich stran) a zároveň v každém vrcholu se setkává ve stejném pořadí stejný počet stěn téhož typu) [ [17], [4] ]

Tyto mnohostěny jsou jednoznačně určeny posloupností čísel, která udává pořadí a označuje typy jednotlivých mnohoúhelníků, které se stýkají v jednom vrcholu. Příkladem je osekáný čtyřstěn, který je určený posloupností (3,6,6). To znamená, že se v každém vrcholu daného tělesa stýká vždy po řadě jeden rovnostranný trojúhelník a dva shodné pravidelné šestiúhelníky. Tento osekáný čtyřstěn vznikl z pravidelného čtyřstěnu, tj. z platónského tělesa, osekáním, viz obr. 2.30. Takovýchto archimédovských těles existuje třináct. [[4], s. 7].

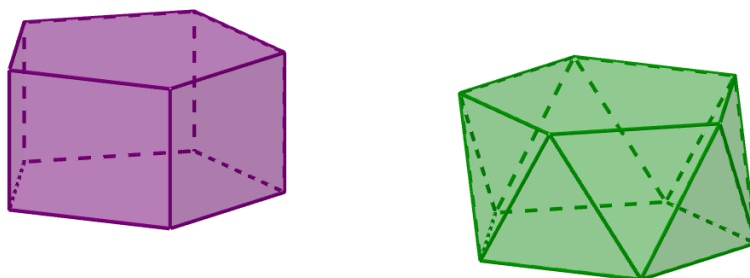
*Rozšiřující poznámka.* Více o archimédovských tělesech můžete najít zde: <http://hdl.handle.net/20.500.11956/78442> [[4]] .



Obrázek 2.30: Applet – osekáný čtyřstěn (3,6,6)

#### Poznámka

Výše uvedená definice polopravidelných mnohostěnů je také platná pro rovnostranné hranoly, jejichž všechny hrany jsou stejně dlouhé. Pro tuto vlastnost bývají někdy k polopravidelným, tj. archimédovským mnohostěnům také zařazeny. Tímto způsobem jsme schopni zavést nekonečně mnoho polopravidelných mnohostěnů. Například  $n$ -boký rovnostranný hranol se nazývá  $n$ -boká prizma; jeho výška je rovna délce strany pravidelných  $n$ -úhelníků tvořících podstavu. Pokud pootočíme horní podstavu hranolu o úhel  $\frac{360^\circ}{2n}$  a spojíme protější vrcholy, dostaneme těleso, které také splňuje definici polopravidelného mnohostěnu; toto těleso se nazývá  $n$ -boký antihranol (obr. 2.31). [[4], s. 7]

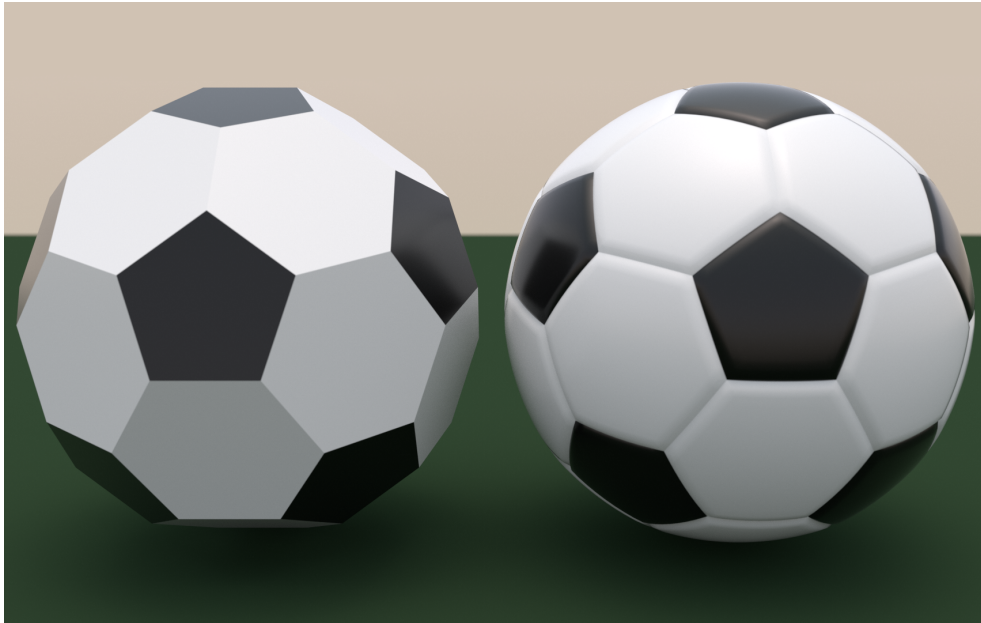


Obrázek 2.31: Pětiboký rovnostranný hranol a pětiúhelníkový antihranol

Představitelem archimédovského tělesa v běžném životě je fotbalový míč, který se tvarem blíží osekánu dvacetistěnu, který je určen posloupností (5,6,6). Jeho stěny se skládají z



dvanácti pravidelných pětiúhelníků a dvaceti pravidelných šestiúhelníků – v klasické podobě jsou pětiúhelníky z černé kůže a šestiúhelníky z bílé, viz obr. 2.32.



Obrázek 2.32: Osekaný dvacetistěn (vlevo) připomínající fotbalový míč (vpravo) [73]

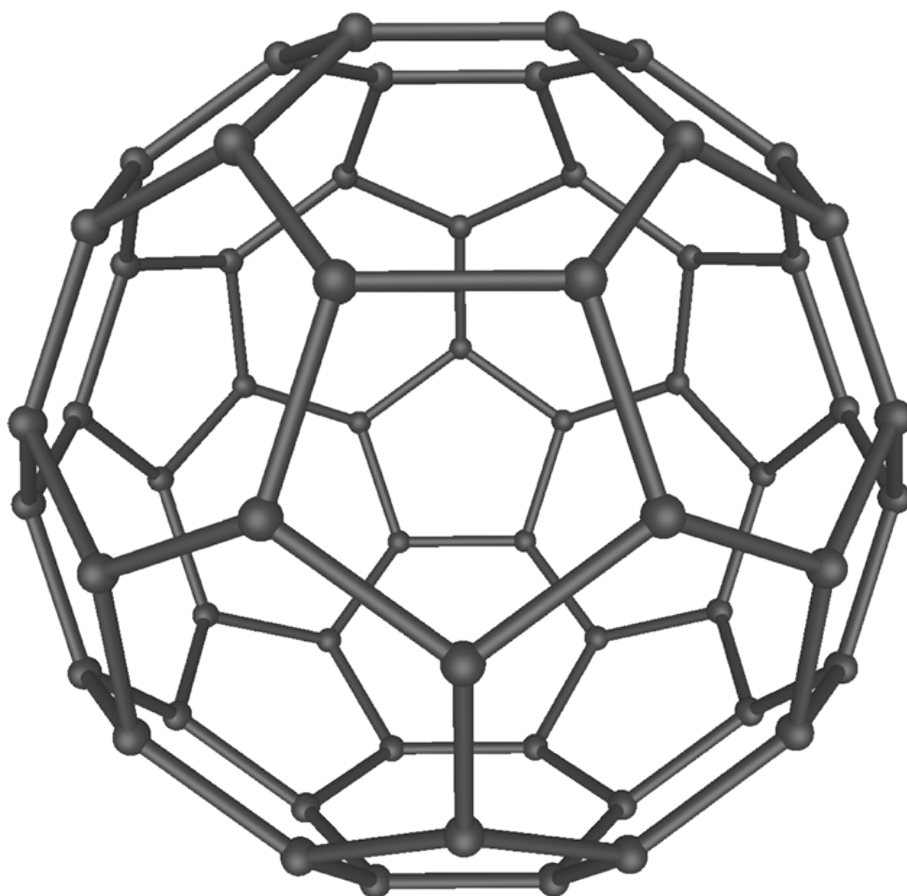
Vzhled rakouské meteorologické stanice nad Innsbruckem byl inspirován osekaným dvacetistěnem (2.33).



Obrázek 2.33: Meteorologická stanice ve tvaru osekaného dvacetistěnu (Patscherkofel, Rakousko) [72]

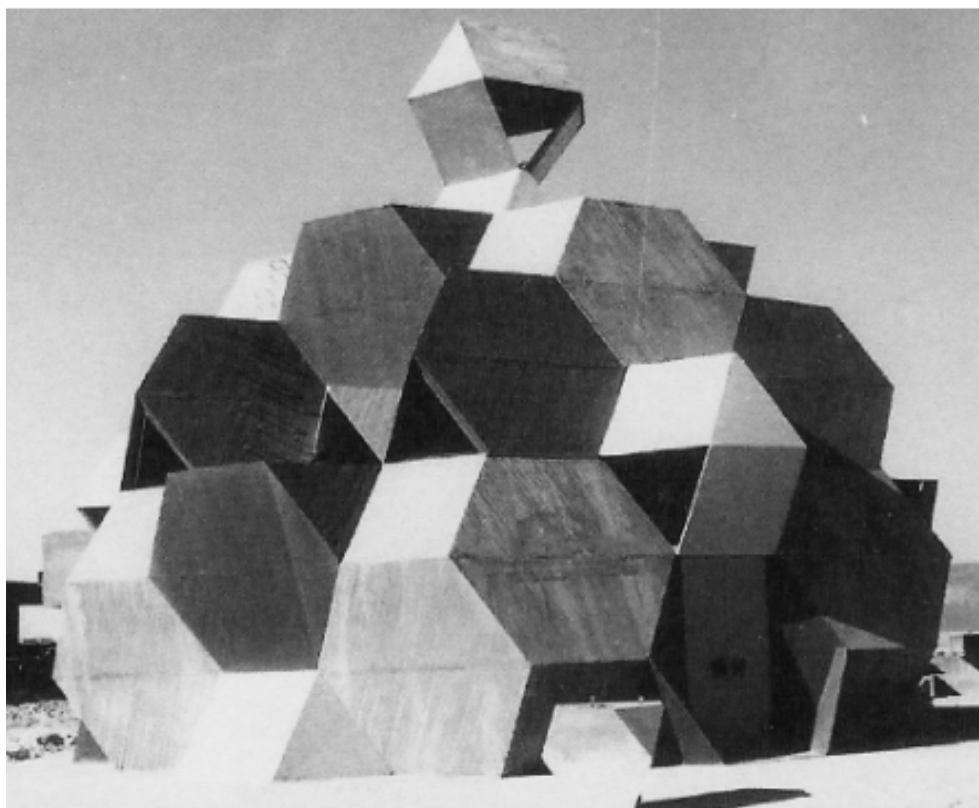
Archimédova tělesa nacházejí uplatnění v různých oblastech lidské činnosti, například ve

světě chemie. V 70. letech 20. století intenzivně probíhal výzkum molekuly uhlíku  $C_{60}$ , jejichž atomy tvoří vrcholy osekaneého dvacetistěnu (obr. 2.34). Molekula  $C_{60}$  patří mezi tzv. fullereny, které byly pojmenovány podle architekta R. B. Fullera, který projektoval tzv. geodetické kopule. Fullereny nacházejí uplatnění v biofarmaceutice, optice nebo elektronice [19].



Obrázek 2.34: Molekula atomů uhlíku ve tvaru osekaneého dvacetistěnu – fulleren  $C_{60}$

Použití fullerenu  $C_{60}$  v architektuře můžeme vidět u nás v Praze ve stanici metra Lužiny (obr. 1.2) i ve světě v dílech architektů Alfreda Neumanna a Zvi Heckera (obr. 2.35 – 2.36).



Obrázek 2.35: Synagoga podle návrhu architektů A. Neumann a Z. Hecker (Negev, Izrael) [[17], s. 86, obr. 23]



Obrázek 2.36: Komplex budov ve čtvrti Ramot Polin podle návrhu architektů A. Neumann a Z. Hecker (Jeruzalém, Izrael) [75]

## 2.5 Oblá tělesa

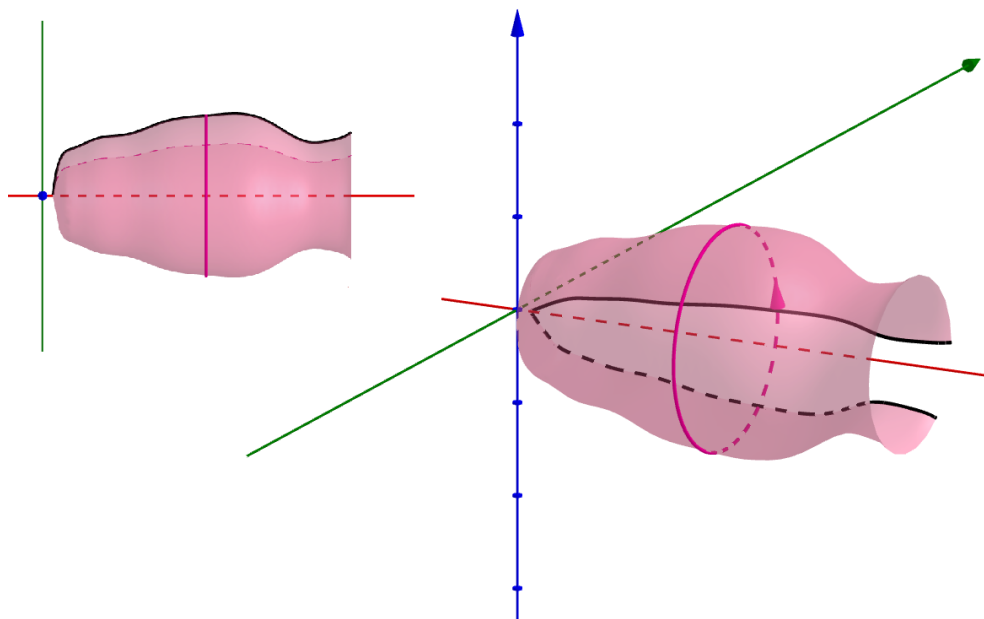
Vedle významné skupiny těles zvané mnohostěny, jež můžeme nazvat tělesy „hranatými“, nacházíme další skupinu těles, a to tělesa oblá. Ve školské matematice se hlavně zabýváme válci, kužely a koulemi, mezi kterými se také vyskytují tělesa vzniklá rotací, tzv. rotační tělesa.

### Definice

**Rotačním tělesem** rozumíme těleso, které vznikne rotací rovinného obrazce kolem dané přímky, tzv. **osy rotačního tělesa**.

### Poznámka

Rovinným obrazcem rotujícím kolem osy rotačního tělesa může být například čtverec, obdélník, kruh, ale i jednoduchá rovinná nebo prostorová křivka. Rotací křivky okolo osy vzniká rotační plocha, která ohraničuje rotační těleso (obr. 2.37).



Obrázek 2.37: Rotační plocha vzniklá rotací jednoduché křivky okolo osy

Keramická váza vzniklá na hrncářském kruhu připomíná tvar rotační plochy, kdy okolo svislé osy rotujeme jednoduchou rovinnou křivku, viz obr. 2.38.



Obrázek 2.38: Keramická váza ve tvaru rotační plochy [76]

S objekty připomínajícími rotační tělesa se můžeme setkat v běžném životě. Rozhledna Doubravka v pražském lesoparku v Kyjích se skládá ze tří rotačních těles (obr. 2.39).



Obrázek 2.39: Rozhledna Doubravka skládající se z rotačních těles (Praha 14, ČR)

V singapurském parku Gardens of the bay se nacházejí solární „superstromy“ mající tvar rotačních těles připomínající trumpetu (obr. 2.40).



Obrázek 2.40: Solární „superstromy“ ve tvaru rotačních těles (Singapur, Singapurská republika) [78]

Motivy známých oblých těles se objevuje i v architektuře. Střecha budovy Sydney Opera House je tvořena částmi kulových ploch. (obr. 2.41).



Obrázek 2.41: Střecha budovy Sydney Opera House tvořená částmi kulových ploch (Sydney, Austrálie) [79]

Chladicí věže temelínské jaderné elektrárny jsou postaveny ve tvaru jednoduchého rotačního hyperboloidu, který vzniká rotací jedné mimoběžky kolem druhé (obr. 2.42).



Obrázek 2.42: Chladicí věže jaderné elektrárny Temelín ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Temelín, ČR) [80]

Přímořský maják na Ukrajině Stanislav Range Front Light je vybudován rovněž ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (obr. 2.43).



Obrázek 2.43: Přímořský maják Stanislav Range Front Light ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Chersonská oblast, Ukrajina) [81]

#### Poznámka

Ve středoškolské matematice rozdělujeme probíraná oblá tělesa na **VÁLCE**, **KUŽELE** a **KOULE**, kterými se budeme v této práci zabývat v dalších kapitolách.

## 2.6 Objem a povrch

Nejprve si položíme několik otázek z různých oblastí lidské činnosti.

- Kolik čtyřicetikilových kbelíků bílé malířské barvy bude zapotřebí na jeden nátěr kancelářského komplexu, jestliže celková plocha nátěru je  $1\,850\text{ m}^2$ ? Vydátnost/kryvost jedné vrstvy je  $8\text{ m}^2/\text{kg}$  (obr. 2.44).



Obrázek 2.44: Čtyřicetikilová malířská barva

- V bazénu pro slony v zoologické zahradě se musí čtyřikrát měsíčně vyměnit polovina vody. Kolik korun činí měsíční náklady na vodu, jestliže cena vodného a stočného (dohromady) je  $94\text{ Kč}/\text{m}^3$  a bazén má tvar kvádru o rozměrech  $4\text{ m}$ ,  $5\text{ m}$  a  $6\text{ m}$ ?

K vyřešení těchto úloh potřebujeme umět určit objem a povrch těles. Tyto pojmy si nyní vysvětlíme.

### 2.6.1 Objem

Výpočet objemu tělesa lze pokládat za jedno z nejstarších využití geometrie v praktickém životě. Objem tělesa se ve školské matematice zavádí obvykle takto [Pomykalová (2009) s. 149], [Polák (2014) s. 328], [Kadleček (1996) s. 212]:

#### Definice

**Objem  $V$**  tělesa  $T$  je kladné číslo, přiřazené tělesu tak, že platí:

1. Shodná tělesa mají sobě rovné objemy.
2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů dílčích těles (aditivita objemu).
3. Objem krychle, jejíž hrana má délku  $1$  ( $\text{mm}$ ,  $\text{cm}$ ,  $\text{m}$  ...), je roven  $1$  ( $\text{mm}^3$ ,  $\text{cm}^3$ ,  $\text{m}^3$  ...).



Objem se značí písmenem  $V$  (počáteční písmeno latinského slova volumen znamenající právě objem).

Tedy objem  $V$  tělesa udává, jakou „část prostoru toto těleso zabírá“ ve srovnání s jednotkovou krychlí (krychle s hranou jednotkové délky). Zároveň objem  $V$  je fyzikální veličina, ke které je přiřazena číselná hodnota a jednotka. Číselná hodnota je závislá na volbě jednotky. Měřicí jednotkou objemu je metr krychlový (značka  $\text{m}^3$ ). Z  $\text{m}^3$  jsou odvozeny jeho násobky nebo díly pomocí dekadických předpon ( $\text{mm}^3$ ,  $\text{cm}^3$ ,  $\text{dm}^3$ ,  $\text{km}^3$ ). Pro specializované oblasti se používají vedlejší jednotky – objem je možné také udávat v litrech (l) nebo hektolitrech (hl).

Následuje obr. 2.45 s tabulkou převodních vztahů pro milimetr krychlový ( $\text{mm}^3$ ), centimetr krychlový ( $\text{cm}^3$ ), decimetr krychlový ( $\text{dm}^3$ ), metr krychlový ( $\text{m}^3$ ) a kilometr krychlový ( $\text{km}^3$ ).

<b>1 mm<sup>3</sup></b>	=	<b>0,00 1 cm<sup>3</sup></b>	=	<b>0,000 001 dm<sup>3</sup></b>	=	<b>0,000 000 001 m<sup>3</sup></b>
1 000 mm <sup>3</sup>	=	1 cm <sup>3</sup>	=	0,001 dm <sup>3</sup>	=	0,000 001 m <sup>3</sup>
1 000 000 mm <sup>3</sup>	=	1 000 cm <sup>3</sup>	=	1 dm <sup>3</sup>	=	0,001 m <sup>3</sup>
1 000 000 000 mm <sup>3</sup>	=	1 000 000 cm <sup>3</sup>	=	1 000 dm <sup>3</sup>	=	1 m <sup>3</sup>
		1 m <sup>3</sup>	=	0,000 000 001 km <sup>3</sup>		
		1 000 000 000 m <sup>3</sup>	=	1 km <sup>3</sup>		

Obrázek 2.45: Tabulka převodních vztahů jednotek objemu

Objem se často vyjadřuje v jednotkách odvozených od litru (vedlejší jednotka).

Definice
$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$

Následuje obr. 2.46 s tabulkou převodních vztahů pro mililitr (ml), centilitr (cl), decilitr (dl), litr (l) a hektolitr (hl).

1 ml	=	0,1 cl	=	0,01 dl	=	0,001 l
10 ml	=	1 cl	=	0,1 dl	=	0,01 l
100 ml	=	10 cl	=	1 dl	=	0,1 l
1 000 ml	=	100 cl	=	10 dl	=	1 l
		1 l	=	0,01 hl		
		100 l	=	1 hl		

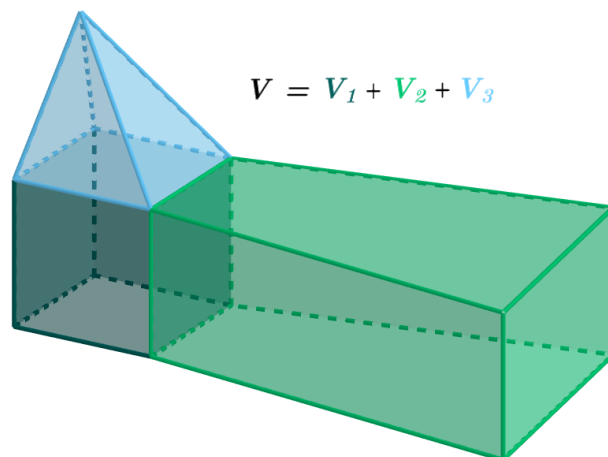
Obrázek 2.46: Tabulka převodních vztahů vedlejších jednotek objemu

#### Poznámka

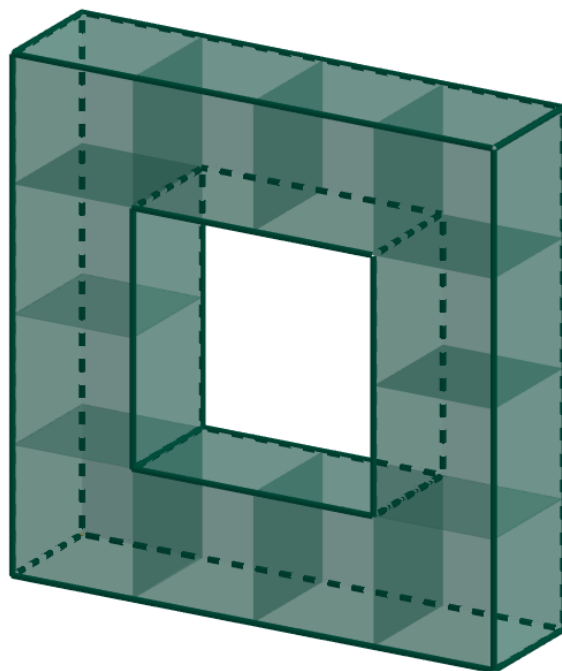
Jedna ze základních vlastností objemu tělesa (**aditivní vlastnost – aditivita objemu**) se využívá při určování objemů těles, která se dají rozložit na konečný počet nepronikajících se těles s objemy  $V_1, V_2, \dots, V_n$  a platí:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

Ilustrace této vlastnosti objemu jsou na obr. 2.47–2.48.

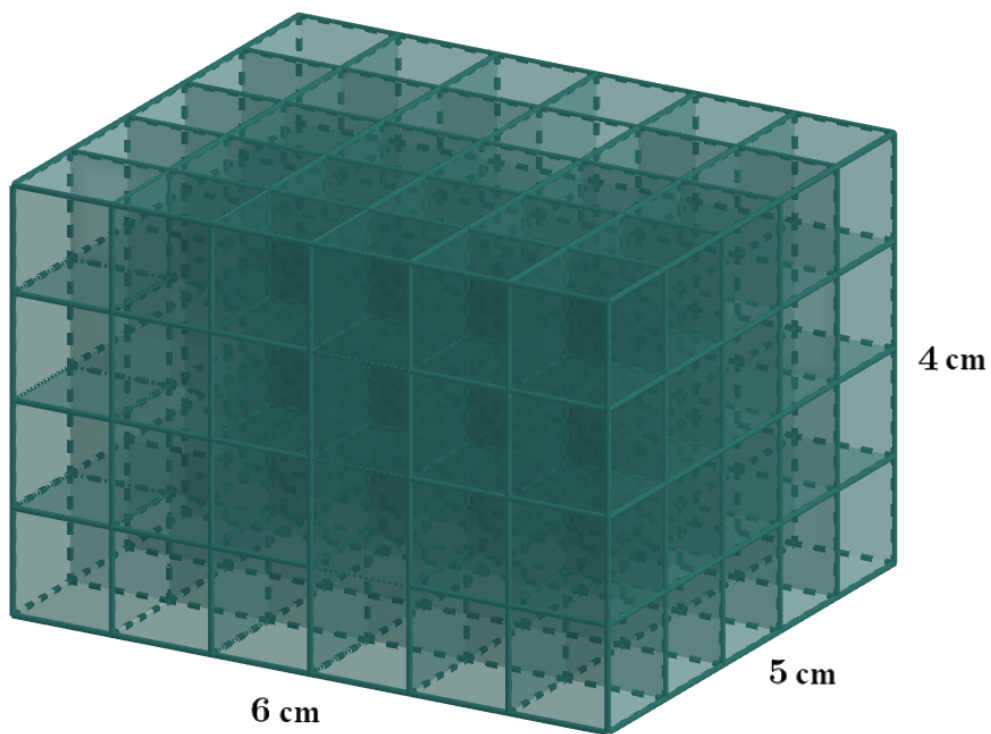


Obrázek 2.47: Těleso složené ze tří různých těles



Obrázek 2.48: Těleso složené z dvanácti krychlí

Názorně lze určovat objem některých těles tak, že je rozložíme na konečný počet nepronikajících se jednotkových krychlí a objem tělesa je číselně roven počtu těchto krychlí. Na obr. 2.49 máme znázorněný kvádr s rozměry 6 cm, 5 cm a 4 cm, jehož objem je  $120 \text{ cm}^3$ , neboť se dá rozložit na 120 krychlíček o hraně 1 cm. Objem tohoto kvádru je dán součinem jeho tří rozměrů.



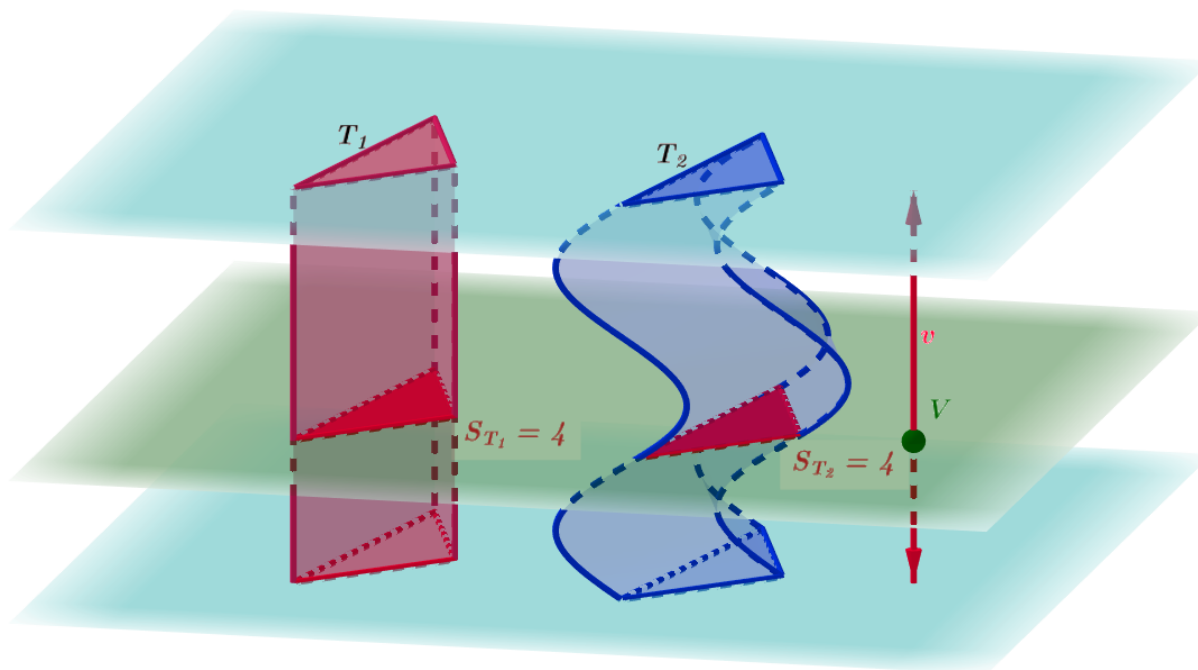
Obrázek 2.49: Kvádr rozložený na 120 jednotkových krychlí

Další z nástrojů pro určení objemu těles je tzv. **Cavalieriho princip** [[[3], s. 263].

#### Věta

Jsou-li dána tělesa  $T_1, T_2$  a rovina  $\alpha$  taková, že pro každou rovinu s ní rovnoběžnou je obsah jejího průniku s tělesem  $T_1$  roven obsahu jejího průniku s tělesem  $T_2$ , mají obě tělesa stejný objem.

V následujícím obr. 2.50 jsou zobrazena dvě tělesa  $T_1, T_2$ . Obsah řezů  $S_{T_1}$  a  $S_{T_2}$  rovinami rovnoběžnými s rovinou, na které jsou tělesa umístěna, je stále stejný.



Obrázek 2.50: Ilustrace Cavalieriho principu

#### Poznámka

Tento způsob určení objemu je pojmenován po italském matematikovi jménem Bonaventura Cavalieri (1598-1647), který byl žákem Galilea Galileiho.

Cavalieriho princip lze názorně vymodelovat pomocí sloupečku mincí, karet nebo ruletních žetonů. Sloupec žetonů má též objem při zachování výšky sloupečku, ať žetony tvoří svislý či šikmý sloupec. Na obr. 2.51 se nacházejí dva svislé sloupce žetonů, které představují model válce a kvádra. Na obr. 2.52 se nacházejí dva šikmé sloupce žetonů.



Obrázek 2.51: Svislý sloupec žetonů



Obrázek 2.52: Šikmý sloupec žetonů

#### Poznámka

Ve středoškolské matematice Cavalieriho princip nedokazujeme, neboť důkaz vychází ze znalostí integrálního počtu.

## 2.6.2 Povrch

Obsah rovinného obrazce se ve školské matematice zavádí obvykle takto [[9b], s. 65–66]:

### Definice

**Obsah  $S$**  obrazce je kladné číslo, přiřazené obrazci tak, že platí:

1. Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.
2. Jestliže je obrazec složen z několika nepronikajících se obrazců, je jeho obsah roven součtu obsahů dílčích obrazců (aditivita obsahu).
3. Obsah čtverce, jehož strana má délku 1 (mm, cm, m ...), je roven 1 ( $\text{mm}^2$ ,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{m}^2$  ...).

Povrch tělesa je zaveden v následující definici, která vychází z [Kadleček (1996) s. 227] a z [Pomykalová (2009) s. 150]:

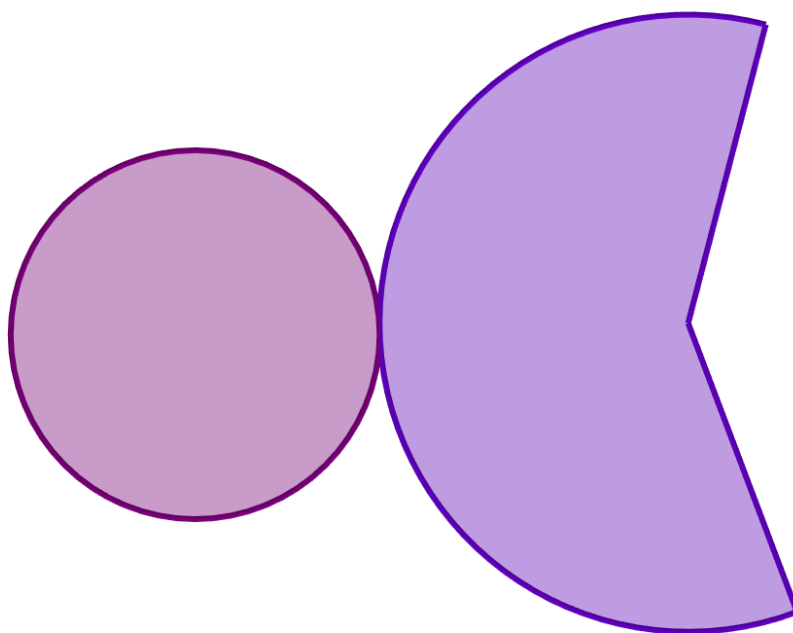
### Definice

**Povrchem  $S$**  tělesa  $T$  se rozumí obsah plochy, která je hranicí tělesa  $T$ .

Povrch se značí písmenem  $S$  (počáteční písmeno latinského slova superficie znamenající právě povrch/obsah).

### Poznámka

Je-li hranice tělesa složena z jednoduchých rovinných obrazců (např. mnohoúhelníků u mnohostěnu) nebo je-li „rozvinutelná“ do rovinné sítě (např. u rotačního válce či kužele viz obr. 2.53), pak povrch tělesa je roven součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se hranice (resp. síť hranice) skládá.



Obrázek 2.53: Síť kužele

Položme si otázku, v jakých případech nelze hranici tělesa rozvinout do rovinné sítě. Vzpomeňme si na část kůry z oloupaného pomeranče nebo na odtržený kus míče, u kterých se nám nepodaří jejich fragmenty „rozvinout“ čili „narovnat“ do roviny (obr. 2.54). Sít koule tedy neexistuje.



Obrázek 2.54: Pomerančová kůra nerozložitelná do rovinné sítě

V případě, že bychom chtěli určit povrch tělesa, jehož hranici neumíme rozvinout do rovinné sítě, lze povrch tělesa pokrýt tenkou vrstvou materiálu (například alobalu) a na základě jeho hustoty a hmotnosti určit objem tělesa. Zvážíme materiál, kterým jsme pokryli těleso. Hmotnost  $m$  použitého materiálu je

$$m = \rho \cdot V,$$

kde  $\rho$  je hustota materiálu a  $V$  je objem materiálu. Vyjádříme objem materiálu, který je

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Pak můžeme přibližně určit povrch tělesa

$$S \doteq \frac{V}{d},$$

kde  $d$  označuje tloušťku materiálu. Čím bude vrstva použitého materiálu tenčí, tím bude povrch určen přesněji. Pro přesnou geometrickou úvahu, pomocí níž lze definovat povrch i takovýchto těles, jejichž hranice se neskládá jen z rovinných obrazců, je třeba znát limitní počet.

Povrch  $S$  je také fyzikální veličina, ke které je přiřazena číselná hodnota a jednotka. Číselná hodnota je závislá na volbě jednotky. Měřicí jednotkou povrchu je metr čtvereční (značka  $\text{m}^2$ ). Z  $\text{m}^2$  jsou vyjádřeny násobky nebo díly pomocí dekadických předpon ( $\text{mm}^2$ ,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{dm}^2$ ,  $\text{km}^2$ ). Pro specializované oblasti se používají vedlejší jednotky. Výměra pozemků se udává v arech (ar) nebo hektarech (ha). Za nestandardní jednotku povrchu se považuje například akr (anglo-americká měrná jednotka, 1 akr = 0,404 685 hektaru).

Následuje obr. 2.55 s tabulkou převodních vztahů pro milimetr krychlový ( $\text{mm}^2$ ), centimetr krychlový ( $\text{cm}^2$ ), decimetr krychlový ( $\text{dm}^2$ ), metr krychlový ( $\text{m}^2$ ), kilometr krychlový ( $\text{km}^2$ ), ar (ar) a hektar (ha).

1 $\text{mm}^2$	=	0,01 $\text{cm}^2$	=	0,000 1 $\text{dm}^2$	=	0,000 001 $\text{m}^2$						
100 $\text{mm}^2$	=	1 $\text{cm}^2$	=	0,01 $\text{dm}^2$	=	0,000 1 $\text{m}^2$						
10 000 $\text{mm}^2$	=	100 $\text{cm}^2$	=	1 $\text{dm}^2$	=	0,01 $\text{m}^2$						
1 000 000 $\text{mm}^2$	=	10 000 $\text{cm}^2$	=	100 $\text{dm}^2$	=	1 $\text{m}^2$	=	0,01 ar	=	0,000 1 ha	=	0,000 001 $\text{km}^2$
					100 $\text{m}^2$	=	1 ar	=	0,01 ha	=	0,000 1 $\text{km}^2$	
					10 000 $\text{m}^2$	=	100 ar	=	1 ha	=	0,01 $\text{km}^2$	
					1 000 000 $\text{m}^2$	=	10 000 ar	=	100 ha	=	1 $\text{km}^2$	

Obrázek 2.55: Tabulka převodních vztahů jednotek obsahu



# 3. Hranoly

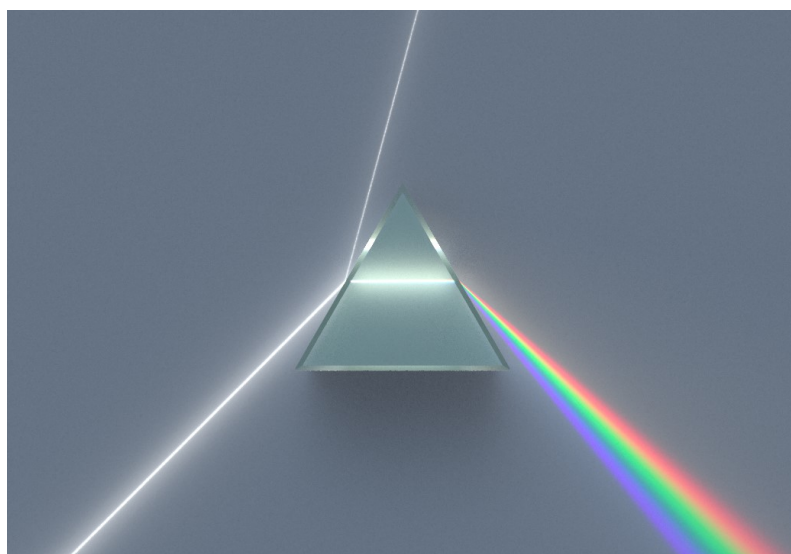
## 3.1 Hranoly

V této kapitole se budeme zabývat typem tělesa využívaném také v praktickém životě. Zamysleme se, co by si takový truhlář nebo tesař počal bez opracovaných dubových trámů, smrkových prken a fošen? Na obr. 3.1 se nacházejí dubové trámy; tak jako většina řeziva se vyrábějí na pilách se stavebním řezivem a my si je můžeme koupit jako hranol o požadované délce.



Obrázek 3.1: Dubové trámy ve tvaru hranolů

Hranoly rovněž nacházíme v podobě součástek různých přístrojů. Takový periskop je optický přístroj, který umožňuje posádce ponořené ponorky sledovat objekty na hladině. Moderní periskopy jsou namísto zrcadel vybaveny optickými hranoly. Přes řadu čoček a teleskopů se obraz díky těmto hranolům odráží do okuláru. Na obr. 3.2 vidíme optický hranol rozkládající bílé světlo na duhové spektrum.



Obrázek 3.2: Optický trojboký hranol – rozklad světla pomocí hranolu [9]

Navíc i ve světě umění, respektive hudby nacházíme trojboký optický hranol, přesněji jeho motiv. Tento motiv použila kapela Pink Floyd na obal svého studiového alba The Dark Side of the Moon (obr. 3.3).



Obrázek 3.3: Motiv optického hranolu – obal vinylové desky The Dark side of the moon

Motiv hranolu se objevuje i v architektuře. Výšková budova Flatiron Building byla postavena na začátku 20. století ve tvaru trojbokého hranolu.



Obrázek 3.4: Flatiron Building ve tvaru trojbokého hranolu (USA, New York City) [10]

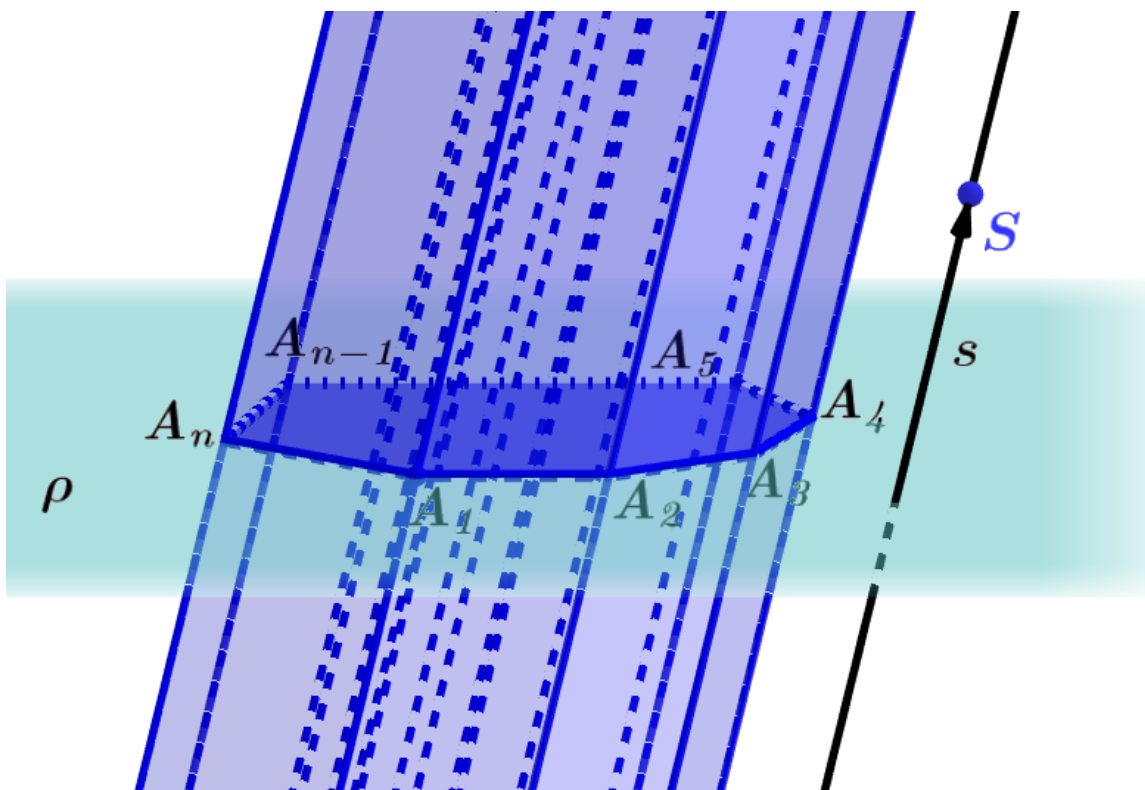
### Poznámka

Z gastronomie známe hranolky. Slovo hranolky je skutečně odvozeno od slova hranol. Jedná se o zdvojnásobení množného čísla slova hranolek. Tudíž při objednávání smaženého sýra říkáme jediné s hranolky, nikoli nesprávně s hranolkami.

## 3.2 Zavedení těles hranolového typu

Mějme dán  $n$ -úhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  v rovině  $\rho$  a přímku  $s$ , která je s rovinou  $\rho$  různoběžná. Tento mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  nazveme **řídící mnohoúhelník**. Jako  **$n$ -boký hranolový prostor** označíme sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou  $s$  a které protínají řídící mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$ . Každou přímku rovnoběžnou s přímkou  $s$  pokládáme za **směrovou přímku** hranolového prostoru.

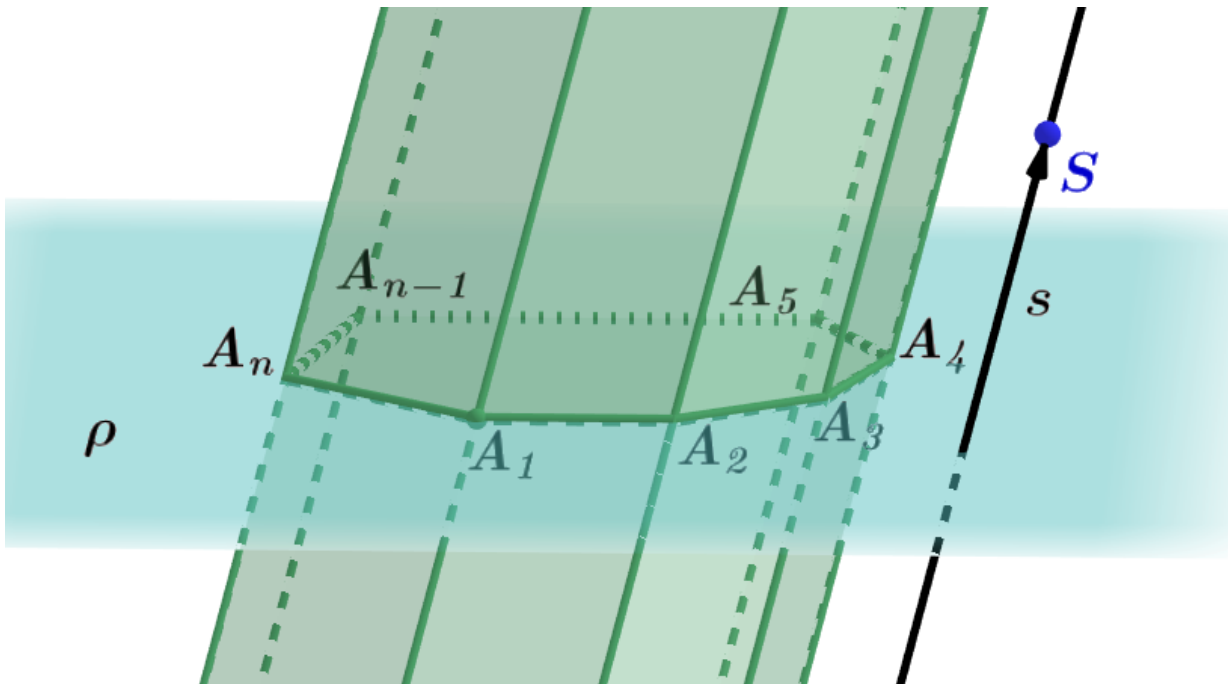
Na následujícím obr. 3.5 se nachází řídící  $n$ -úhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  v rovině  $\rho$  a směrová přímka  $s$ , které určují  $n$ -boký hranolový prostor.



Obrázek 3.5: Hranolový prostor  $n$ -boký

Jako  **$n$ -bokou hranolovou plochu** označujeme sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou  $s$  a které protínají obvod řídícího mnohoúhelníku. Hranolovou plochu pokládáme za hranici hranolového prostoru.

Na následujícím obr. 3.6 je zobrazen obvod řídicího  $n$ -úhelníku  $A_1A_2 \dots A_n$  v rovině  $\rho$  a směrová přímka  $s$ , které dohromady určují  $n$ -bokou hranolovou plochu.

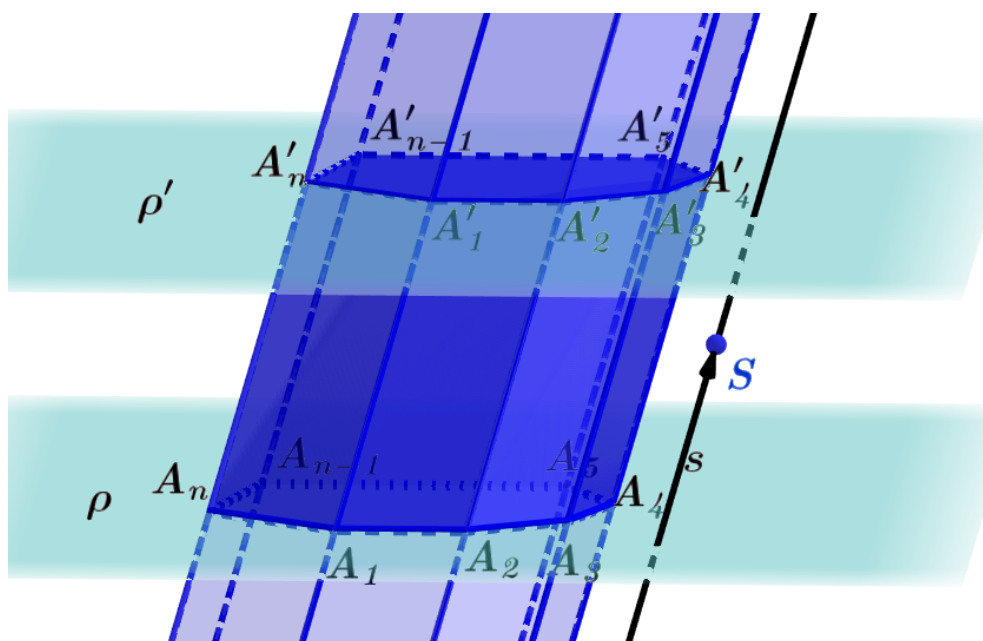


Obrázek 3.6: Hranolová plocha  $n$ -boká

**Definice**

Průnikem  $n$ -bokého hranolového prostoru a prostorové vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou rovnoběžné s přímkou  $s$ , získáme těleso, které nazýváme  **$n$ -boký hranol**.

Na následujícím obr. 3.7 je zobrazen průnik  $n$ -bokého hranolového prostoru a prostorové vrstvy, která je ohraničená dvěma různými rovnoběžnými rovinami. Vznikne tak  $n$ -boký hranol.



Obrázek 3.7: Hranol  $n$ -boký

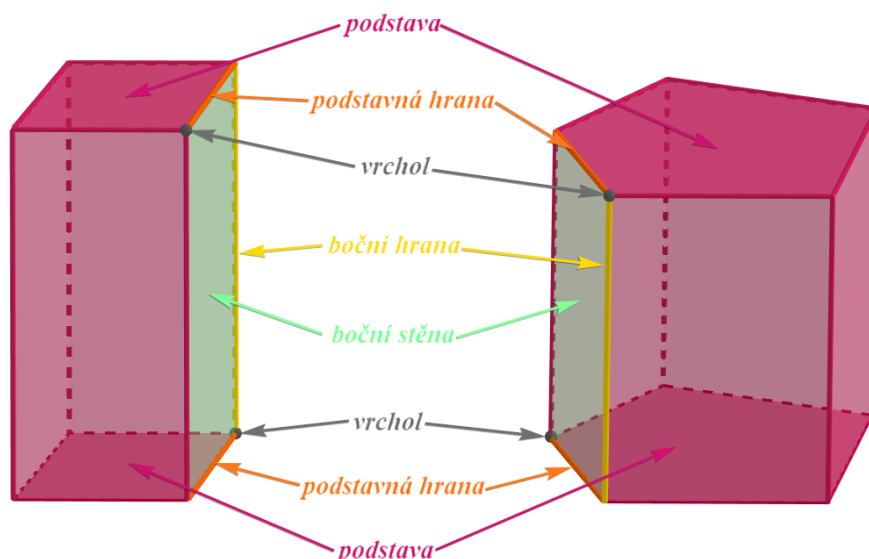
### Poznámka

Pojmenovávání hranolů je odvozeno od typu řídicího mnohoúhelníku. Například hranol, jehož podstavou je šestiúhelník, je označován jako **šestiboký hranol**.

### Definice

Za **podstavy** hranolu jsou označovány mnohoúhelníky, které tvoří řezy hraničních rovin vrstvy s hranolovým prostorem. Rovnoběžníky, jež nejsou podstavami hranolu, označujeme jako **boční stěny** hranolu a dohromady tvoří **plášť hranolu**. Za **vrcholy** hranolu považujeme vrcholy stěn. Strany podstav hranolu označujeme jako **podstavné hrany**, ostatní hrany označujeme jako **boční hrany** hranolu.

Na následujícím obr. 3.8 jsou tyto pojmy ilustrované.

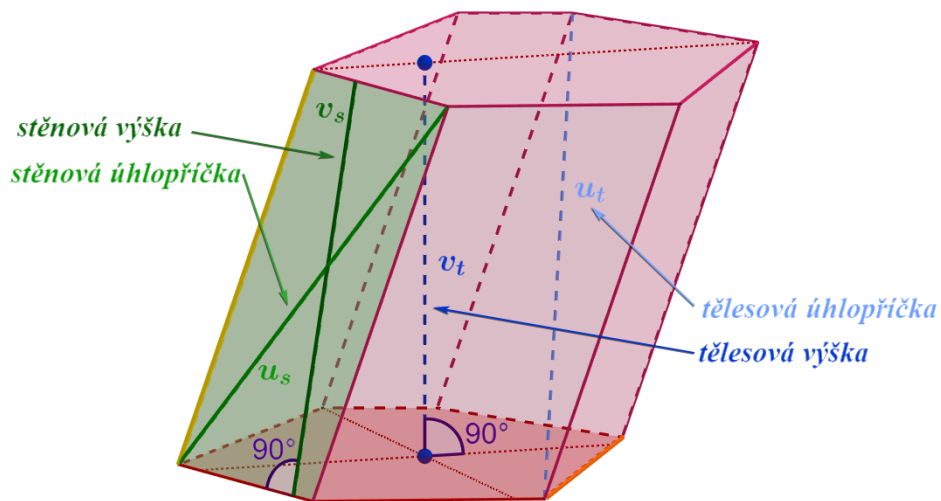


Obrázek 3.8: Vrcholy, hrany a stěny hranolů

### Definice

Vzdálenost podstav hranolu se nazývá **tělesová výška** nebo také **výška hranolu**. Vzdálenost podstavných hran ve stejné boční stěně se nazývá **stěnová výška**. Boční stěny hranolu tvoří rovnoběžníky, jejich úhlopříčky se nazývají **stěnové úhlopříčky** hranolu. Úsečka, která spojuje dva vrcholy hranolu neležící ve stejné stěně, se nazývá **tělesová úhlopříčka**.

Tyto pojmy jsou ilustrované na následujícím obr. 3.9.



Obrázek 3.9: Výšky a úhlopříčky hranolu

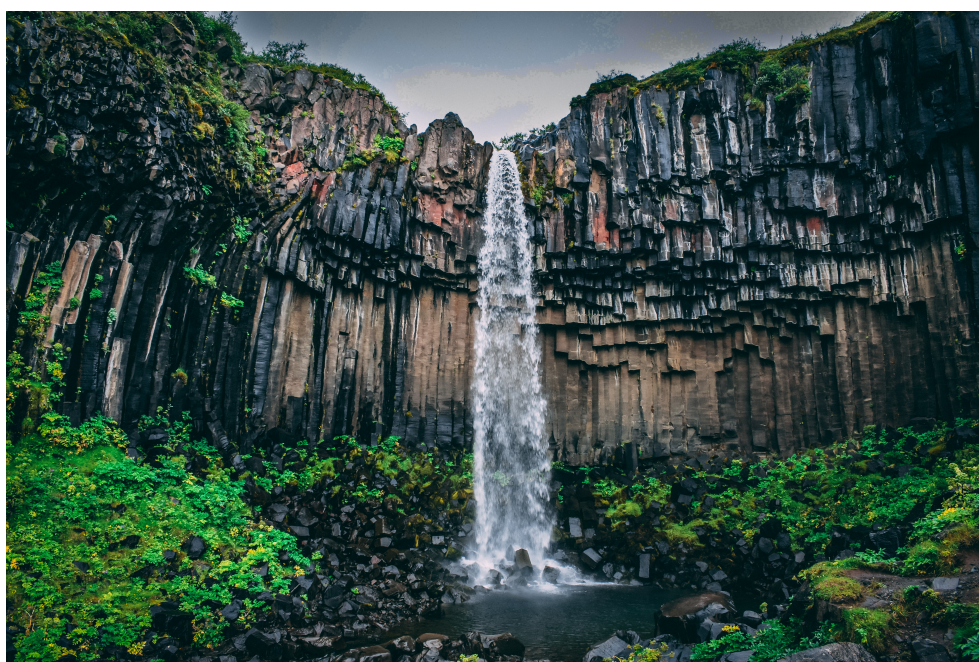
V České republice můžeme pozorovat zajímavé přírodní úkazy ve tvaru hranolu. Čedičové kamenné varhany nazývané Panská skála jsou tvořeny šestibokými hranoly a jsou chráněnou geologickou památkou (obr. 3.10). Ze světových podobných přírodních úkazů stojí za to zmínit Obrův chodník v Severním Irsku tvořený hranoly s podstavami ve tvaru pětiúhelníku (obr. 3.11) nebo skalní útvary v okolí vodopádů Svartifoss na Islandu připomínající hranoly (obr. 3.12).



Obrázek 3.10: Čedičové varhany Panská skála tvořeny šestibokými hranoly (Českolipsko) [11]



Obrázek 3.11: Obrův chodník tvořeny pětibokými hranoly (Severní Irsko) [12]



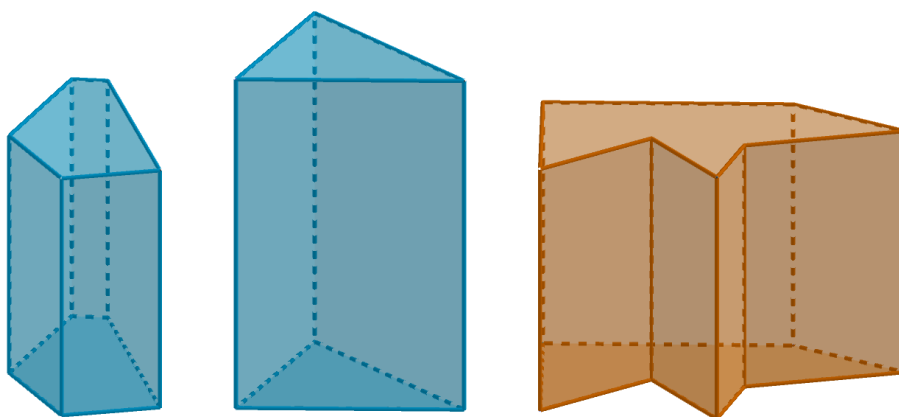
Obrázek 3.12: Vodopády Svartifoss (Island) [13]

## 3.3 Klasifikace hranolů

Hranoly můžeme klasifikovat podle různých kritérií.

### 3.3.1 Konvexní a nekonvexní hranoly

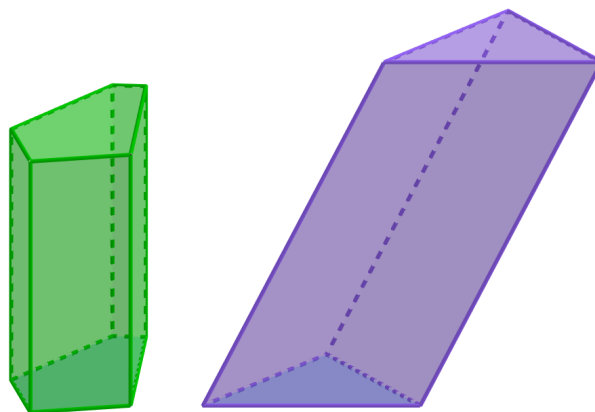
Hranoly, obdobně jako jiné typy těles, lze dělit na **konvexní** a **nekonvexní**. Tyto pojmy jsme si již zavedli v předcházející kapitole. Zda je hranol konvexní, resp. nekonvexní, souvisí s tím, zda jsou konvexní, resp. nekonvexní jeho podstavy. Na obr. 3.13 jsou zobrazeny dva konvexní a jeden nekonvexní hranol.



Obrázek 3.13: Konvexní pětiboký hranol a trojboký hranol, nekonvexní sedmiboký hranol

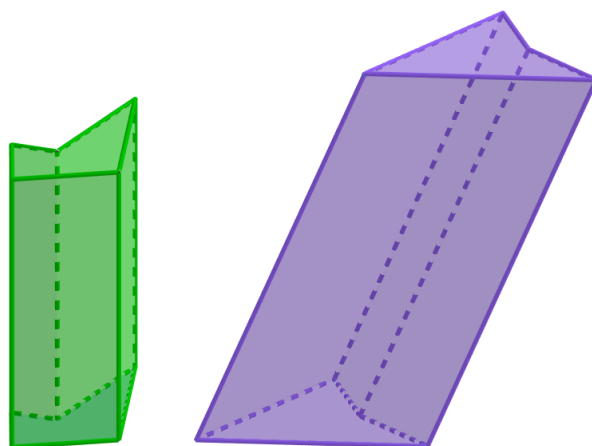
### 3.3.2 Kolmé a kosé hranoly

Dalším kritériem, podle kterého lze klasifikovat hranoly, je odchylka směrové přímky hranolového prostoru a roviny podstavy. Hranol, jehož boční stěny jsou kolmé k podstavě (čili směrová přímka je kolmá k rovině podstavy), se nazývá **kolmý n-boký hranol**, v opačném případě jde o **kosý n-boký hranol** (ilustrace těchto pojmů viz obr. 3.14–3.15).



Obrázek 3.14: Konvexní kolmý pětiboký hranol a konvexní kosý trojboký hranol





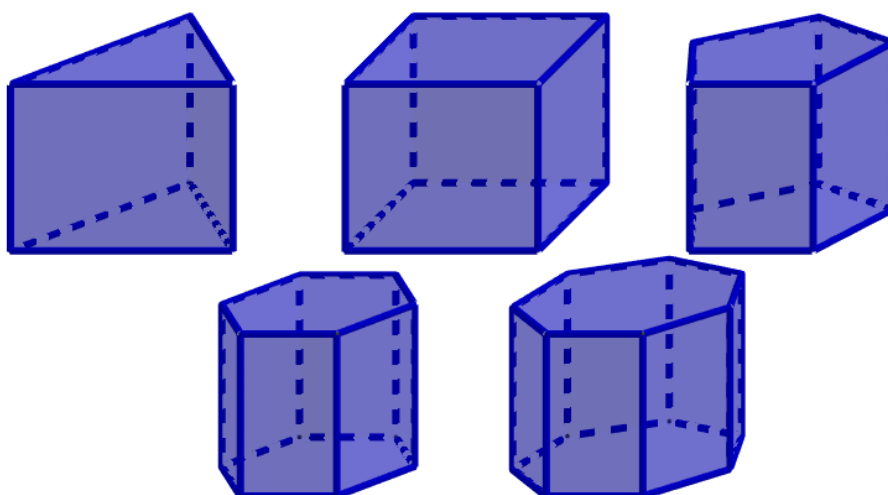
Obrázek 3.15: Nekonvexní kolmý pětiboký hranol a nekonvexní kosý čtyřboký hranol

### 3.3.3 Pravidelné a nepravidelné hranoly

Kolmý hranol, jehož podstavami jsou shodné pravidelné  $n$ -úhelníky, se nazývá **pravidelný  $n$ -boký hranol**, v opačném případě jde o **nepravidelný  $n$ -boký hranol**. Na následujícím obr. 3.16 se nachází skupina pěti pravidelných kolmých hranolů.

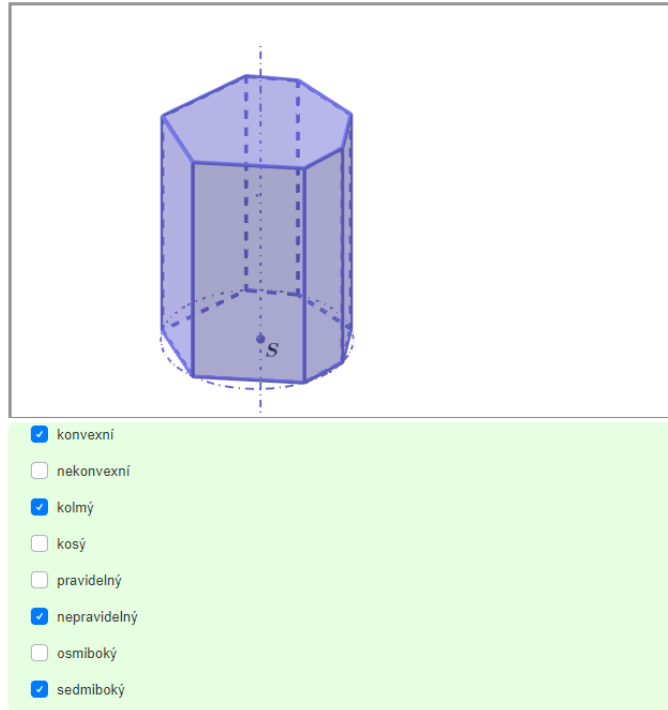
#### Poznámka

Pravidelné tedy mohou být pouze konvexní kolmé hranoly. Potom je možné v názvu hranolu vynechat slovo kolmý a slovo konvexní.

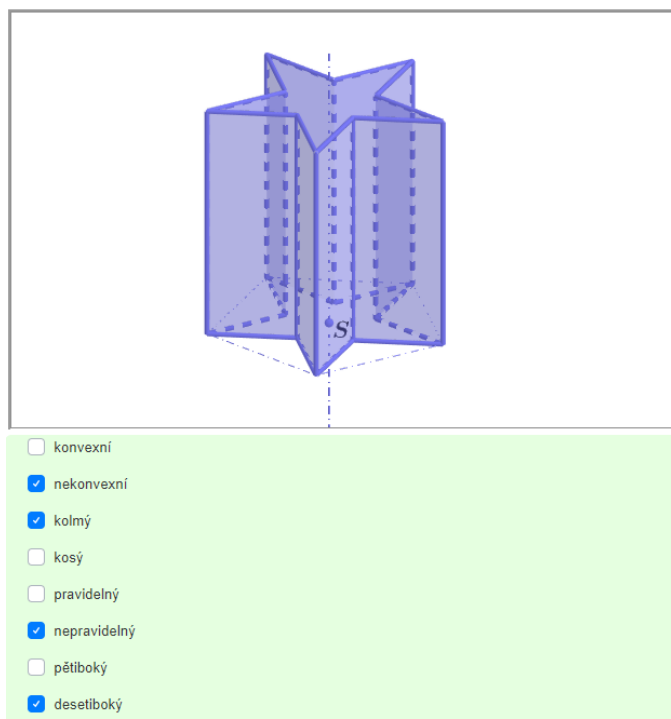


Obrázek 3.16: Zleva (horní řada): pravidelný trojboký hranol, pravidelný čtyřboký hranol, pravidelný pětiboký hranol; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký hranol a pravidelný sedmiboký hranol

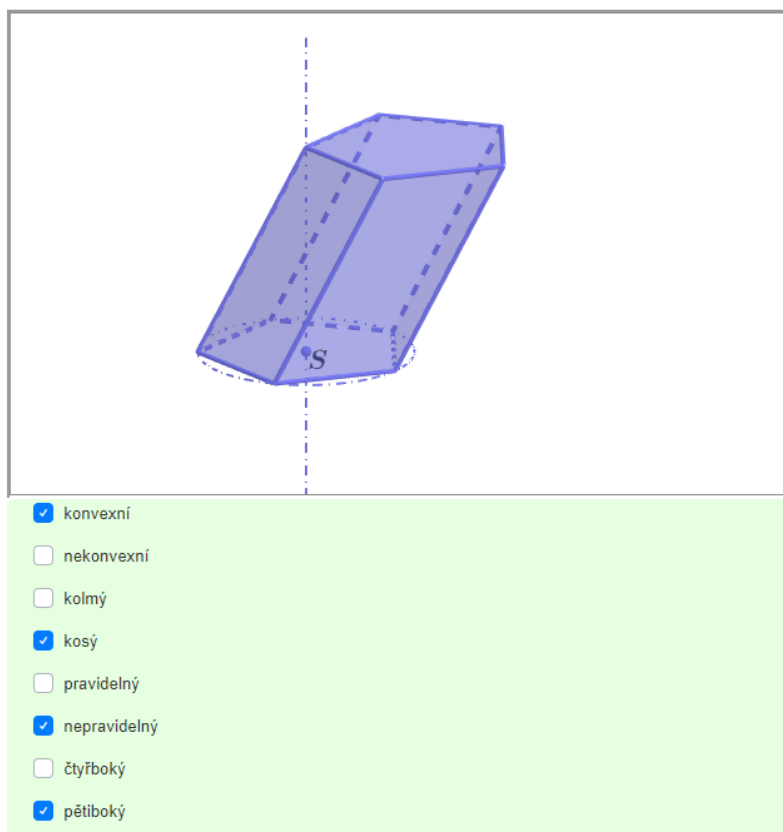
**Úloha 3.3.1** Následující obr. 3.17–3.20 obsahují úlohy na ověření znalostí z klasifikace hranolů. V každé úloze je jedna a více možných správných tvrzení o příslušných hranolech. Bod  $S$  je těžištěm podstavy. Jakmile vyplníte ve webové verzi všechny správné odpovědi, celé okénko možností zezelená.



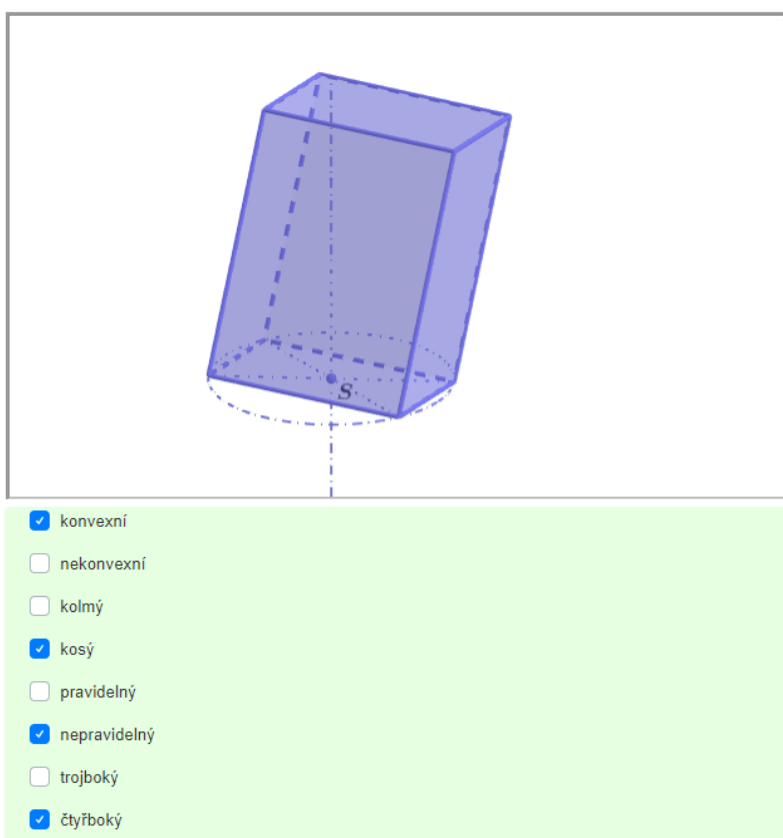
Obrázek 3.17: O jaký hranol se jedná?



Obrázek 3.18: O jaký hranol se jedná?



Obrázek 3.19: O jaký hranol se jedná?



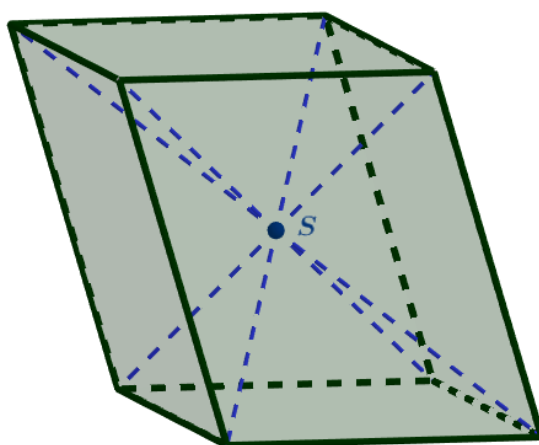
Obrázek 3.20: O jaký hranol se jedná?

## 3.4 Další typy hranolů

Ve školské matematice často pracujeme s následujícím typem hranolů, a to rovnoběžnostěny, které si postupně představíme.

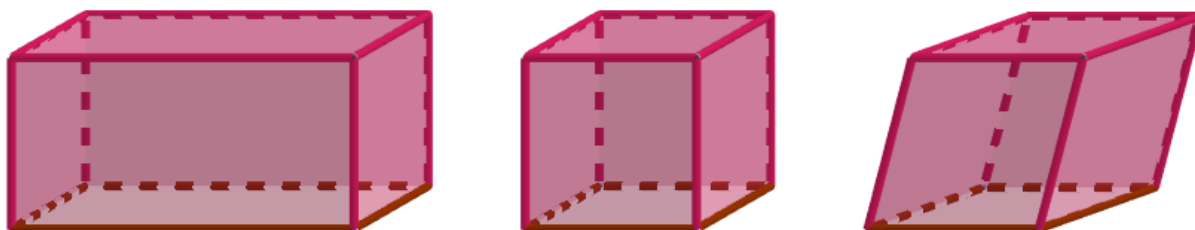
### 3.4.1 Rovnoběžnostěny

Čtyřboký hranol, jehož podstavami jsou shodné rovnoběžníky, se nazývá **rovnoběžnostěn** (obr. 3.21). Stěny rovnoběžnostěny tvoří tři dvojice navzájem rovnoběžných a shodných rovnoběžníků. Za podstavy můžeme považovat jakoukoli dvojici těchto rovnoběžných stěn. Tělesové úhlopříčky rovnoběžnostěny se protínají v jednom bodě, který je středem těchto úhlopříček.



Obrázek 3.21: Obecný rovnoběžnostěn

Kvádr, krychle nebo útvar zvaný klenec jsou příklady rovnoběžnostěnů (obr. 3.22). Za **kvádr** označujeme kolmý hranol, jehož podstavy jsou obdélníky (případně čtverce). Délky tří hran, které vychází z jednoho vrcholu hranolu, se nazývají **rozměry kvádru** – **délka**, **šířka** a **výška kvádru**. **Krychle** je speciální případ kvádru, jehož délka, šířka a výška jsou stejné. **Klenec** (neboli romboedr) je rovnoběžnostěn, jehož všech šest stěn jsou navzájem shodné kosočtverce.



Obrázek 3.22: Zleva: kvádr, krychle a klenec

Znáte kostkový cukr? Ještě ve 20. letech 19. století se cukr v habsburské monarchii prodával ve tvaru cukrových homolí. Při odsekávání cukru z homole se údajně kolem roku 1843 zranila manželka majitele dačického cukrovaru. A tak poprosila manžela, aby s tím něco udělal. Ten o pár týdnů později přišel s krabicí plnou kostek cukru, viz obr. 3.23.



Obrázek 3.23: Kostky cukru ve tvaru krychle

### 3.5 Anti-modely hranolů

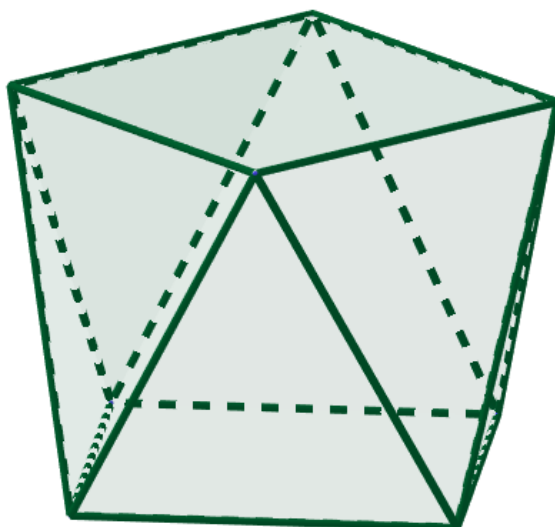
Předtím, než přejdeme k samotnému zavedení vzorců pro výpočet objemů a povrchů hranolů, si ověříme pochopení předchozích pojmů z této kapitoly. Uvedeme si tzv. anti-modely hranolů.

Anti-modelem hranolu zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice hranol připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o hranol nejedná. Prvním příkladem je těleso s názvem **prismatoid**. Jeho rovnoběžné podstavy jsou sice mnohoúhelníky (nemusejí být shodné), avšak boční stěny mají tvar lichoběžníků či trojúhelníků. Na obr. 3.24 se nachází mrakodrap One World Trade Center postavený ve městě New York. Podstavec má tvar kolmého čtyřbokého hranolu a horní část budovy zase tvar prismatoidu.



Obrázek 3.24: One World Trade Center (USA, New York City) [14]

Dalším příkladem anti-modelu hranolu je těleso označované názvem **antihranol** vyobrazené na obr. 3.25. Řadí se mezi mnohostěny, dokonce i mezi Archimédovská tělesa, a je to speciální případ prismatoidu. Tento antihranol má, obdobně jako všechny hranoly, dvě podstavy navzájem rovnoběžné (navíc shodné), avšak jeho boční stěny nejsou rovnoběžníky, nýbrž rovnostranné trojúhelníky.

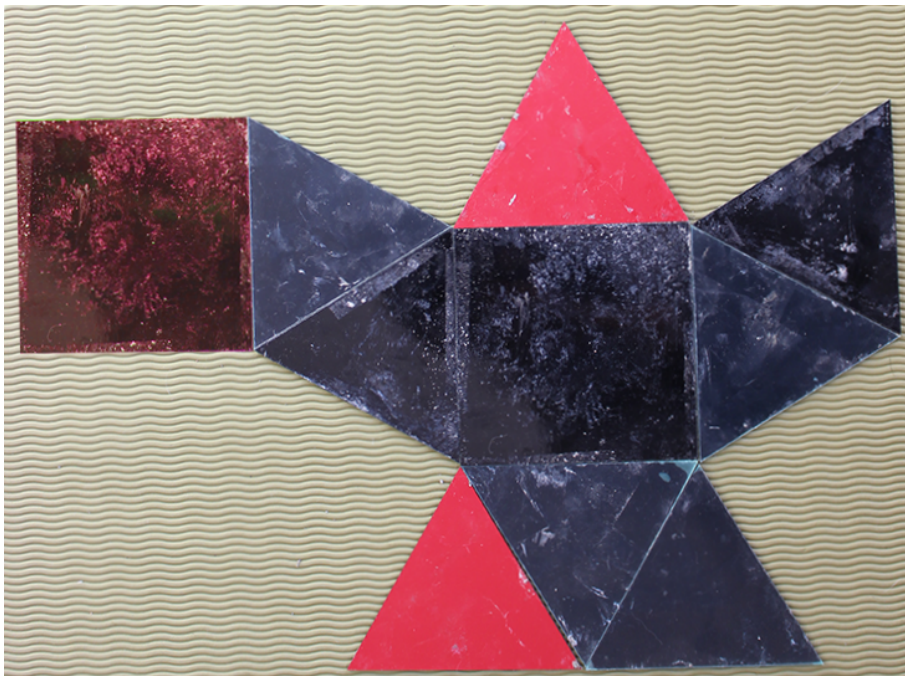


Obrázek 3.25: Čtvercový antihranol

V podobě čtvercového antihranolu je z betonu odlit obal na květináč (obr. 3.26). Forma pro odlitek je vytvořena ze sítě tělesa tak, jak vidíme na obr. 3.27.



Obrázek 3.26: Obal na květináč ve tvaru čtvercového antihranolu



Obrázek 3.27: Forma pro odlitek čtvercového antihranolu rozložená v jeho síť

Třetím příkladem anti-modelu je těleso zvané **klín**, jehož jedna podstava je mnohoúhelník, zatímco „druhá podstava“ klínu přechází v pouhou úsečku zvanou ostří. Klín nacházíme například v podobě valbové střechy tzv. Řeznické věže v německém městě Ulm (obr. 3.28).



Obrázek 3.28: Řeznická věž s valbovou střechou ve tvaru klínu (Ulm, Německo) [15]

### 3.6 Objem hranolu

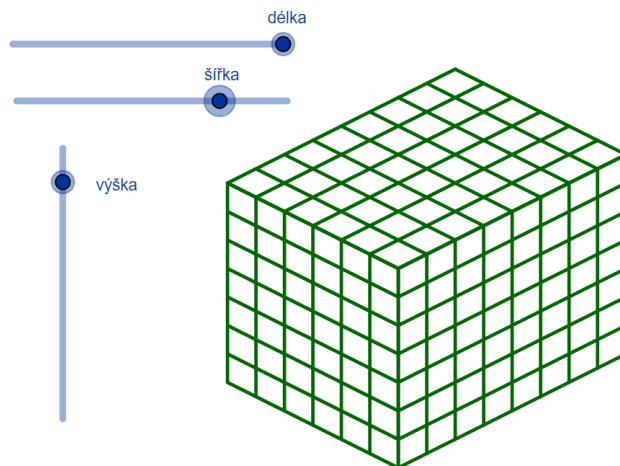
V této kapitole si představíme, jak se počítá objem hranolu. Při odvození vzorce pro objem hranolu vycházíme ze **vzorce pro objem kvádru** o hranách délky  $a, b, c$ , který známe ze základní školy. Na základní škole kvádr rozřezáme na krychličky s hranou jednotkové délky. Krychlička s hranou jednotkové délky má jednotkový objem. Potom objem kvádru odpovídá počtu krychliček vynásobenému (jednotkovým) objemem krychličky.

Tedy objem  **$V$  kvádru** o rozměrech  $a, b, c$  je

$$V = abc.$$

Na následujícím obr. 3.29 se nachází ilustrace vztahu mezi rozměry kvádru  $a, b, c$  v centimetrech a jeho objemem. Délka hrany jednotkové krychle v obrázku je 1 cm.





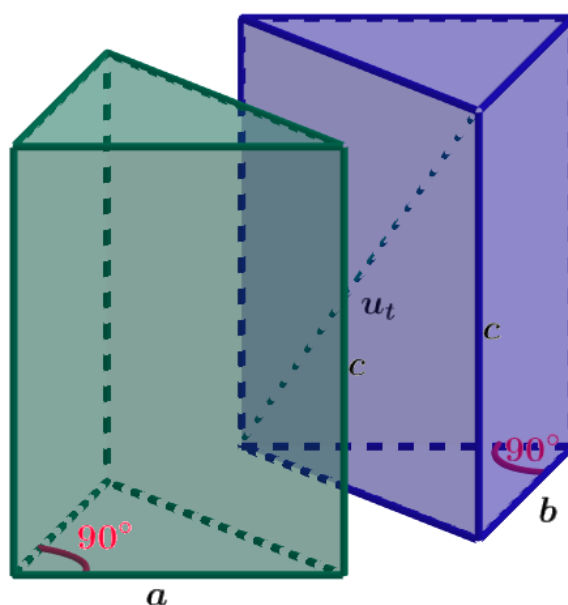
$$V = abc = 8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 336 \text{ cm}^3$$

Obrázek 3.29: Objem kváдру je roven celkovému počtu jednotkových krychlí

## Odvození vzorce pro objem $n$ -bokého hranolu

Nejdříve odvodíme vzorec pro konvexní kolmé hranoly, potom pro konvexní kosé hranoly a nakonec platnost vztahu pro objem hranolu zobecníme na libovolný nekonvexní hranol.

Kvádr o podstavních hranách délky  $a, b$  můžeme rozříznout rovinou kolmou k podstavám a obsahující tělesovou úhlopříčku na dva shodné kolmé trojboké hranoly, které mají za podstavy pravoúhlé trojúhelníky (obr. 3.30). Podle první vlastnosti objemu se jejich objemy rovnají a podle druhé vlastnosti objemu objem kváдру dostaneme součtem objemů obou kolmých trojbokých hranolů. Tedy objem  $V$  kolmého trojbokého hranolu, jehož podstavy jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky, je roven polovině objemu původního kváдру.



Obrázek 3.30: Kvádr rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly

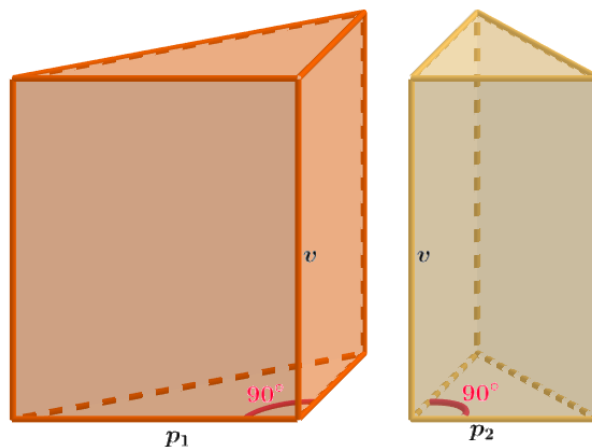
Z předchozího tvrzení vyplývá, že pokud jsou rozměry původního kvádrů  $a, b, c$ , pak pro objem  $V$  dílčího kolmého trojbokého hranolu, jehož podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky, platí

$$V = \frac{1}{2}abc = \left(\frac{1}{2}ab\right)c.$$

Výraz  $\frac{1}{2}ab$  určuje obsah trojúhelníkové podstavy, označíme ho  $S_p$ , výška hranolu  $v = c$ . Pro objem kolmého trojbokého hranolu, jehož podstava je pravoúhlý trojúhelník, platí

$$V = S_p v.$$

V případě, že podstavou kolmého trojbokého hranolu je obecný trojúhelník, víme, že nejvýše jeden jeho vnitřní úhel je tupý. Díky tomu lze trojúhelník vždy rozdělit jednou jeho výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Víme tedy, že lze rozdělit každý kolmý trojboký hranol, jehož podstavy nejsou pravoúhlé trojúhelníky, na dva kolmé trojboké hranoly stejné výšky, jejichž podstavy  $p_1, p_2$  jsou pravoúhlé trojúhelníky (obr. 3.31).



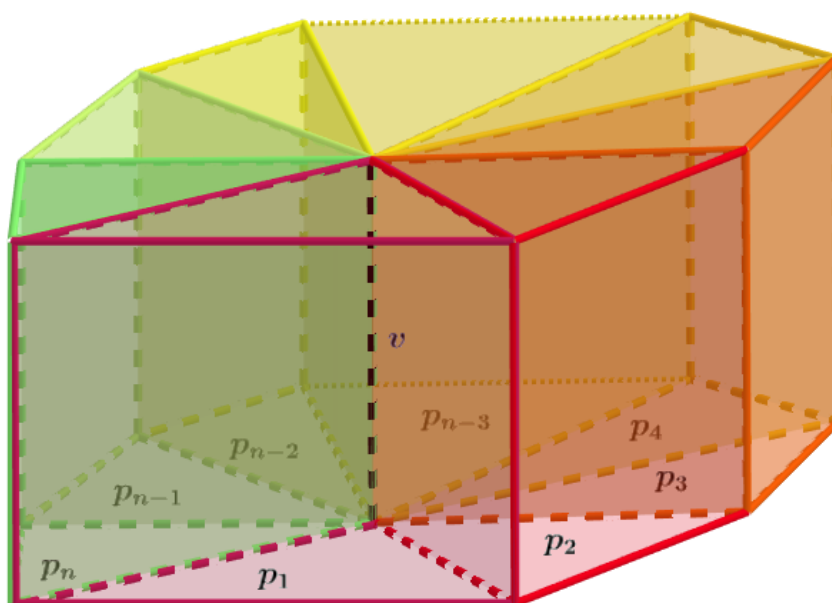
Obrázek 3.31: Kolmý trojboký hranol rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly

Označme  $V_1$  a  $V_2$  jejich objemy,  $S_{p_1}$  a  $S_{p_2}$  obsahy jejich podstav. Potom pro obsah podstavy  $S_p$  daného hranolu platí  $S_p = (S_{p_1} + S_{p_2})$ . Oba dílčí kolmé trojboké hranoly mají stejné výšky jako daný hranol. Podle druhé vlastnosti objemu je objem daného hranolu

$$V = V_1 + V_2 = S_{p_1}v + S_{p_2}v = (S_{p_1} + S_{p_2})v = S_p v.$$

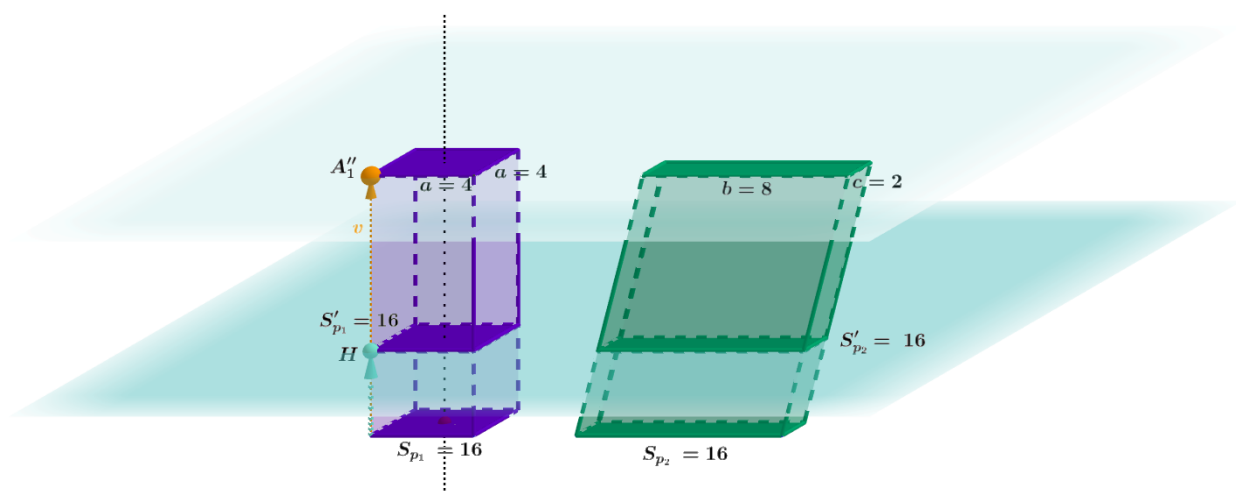
Konvexní kolmý  $n$ -boký hranol jsme schopni rozložit na  $n$  kolmých trojbokých hranolů se stejnou výškou  $v$  (obr. 3.32). Součet obsahů  $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots, S_{p_n}$  jejich podstav se rovná obsahu  $S_p$  podstavy daného hranolu a výšky jsou stejné. Podle druhé vlastnosti objemu je objem daného hranolu

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = S_{p_1}v + S_{p_2}v + \dots + S_{p_n}v = (S_{p_1} + S_{p_2} + \dots + S_{p_n})v = S_p v.$$



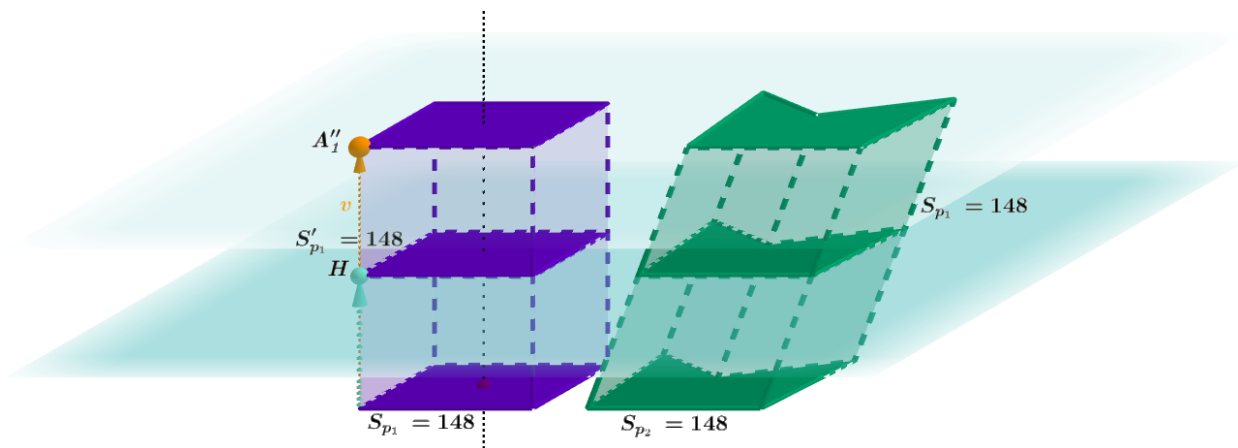
Obrázek 3.32: Kolmý hranol rozdělený na  $n$  kolmých trojbokých hranolů

Pomocí Cavalieriho principu lze dokázat platnost stejného vzorce i pro objem libovolného kosého hranolu. Uvažujme kolmý a kosý hranol o stejné výšce, jejichž podstavy leží ve stejné rovině a mají stejný obsah. Řezy kolmým i kosým hranolem vedené rovnoběžně s rovinou jejich podstav v libovolné výšce jsou vždy shodné s podstavou, protože rovina řezu je s ní rovnoběžná; obsahy řezu kolmého i kosého hranolu jsou shodné. Tudíž objemy těchto hranolů jsou si rovny. Na obr. 3.33 se nachází kolmý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru čtverce o straně  $a$  a kosý čtyřboký hranol s podstavou ve tvaru obdélníku o stranách  $b, c$ , jejichž podstavy mají stejný obsah (veličiny jsou uvedeny bez jednotek).



Obrázek 3.33: Využití Cavalieriho principu pro kolmý a kosý hranol se stejnými  $S_p$  a  $v$

S využitím Cavalieriho principu lze rovněž dokázat platnost stejného vzorce i pro objem libovolného nekonvexního hranolu. Uvažujme konvexní a nekonvexní hranol o stejné výšce, jejichž podstavy leží ve stejné rovině a mají stejný obsah. Řezy konvexním i nekonvexním hranolem vedené rovnoběžně s rovinou jejich podstav v libovolné výšce jsou vždy shodné s podstavou, protože rovina řezu je s ní rovnoběžná; obsahy řezu konvexního i nekonvexního hranolu jsou shodné. Tudíž objemy těchto hranolů jsou si rovny. Na obr. 3.34 se nachází konvexní čtyřboký hranol a nekonvexní pětiboký hranol, jejichž podstavy mají stejný obsah (veličiny jsou uvedeny bez jednotek).



Obrázek 3.34: Využití Cavalieriho principu pro konvexní a nekonv. hranol se stejnými  $S_p$  a  $v$

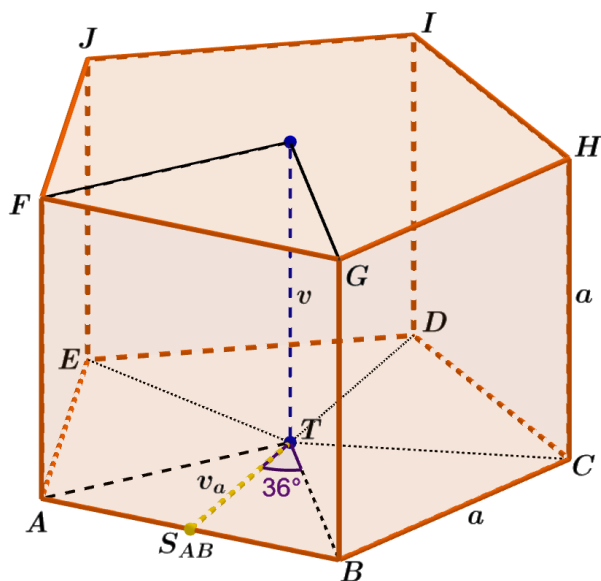
Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

#### Věta

**Objem  $V$**  libovolného **hranolu** vypočítáme tak, že obsah podstavy  $S_p$  vynásobíme jeho výškou  $v$ , platí

$$V = S_p v.$$

**Příklad 3.6.1** Vypočítejte objem  $V$  pravidelného pětibokého hranolu  $ABCDEFGHIJ$ . Jeho boční stěny jsou tvořeny shodnými čtverci o straně délky  $a = 5$  cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

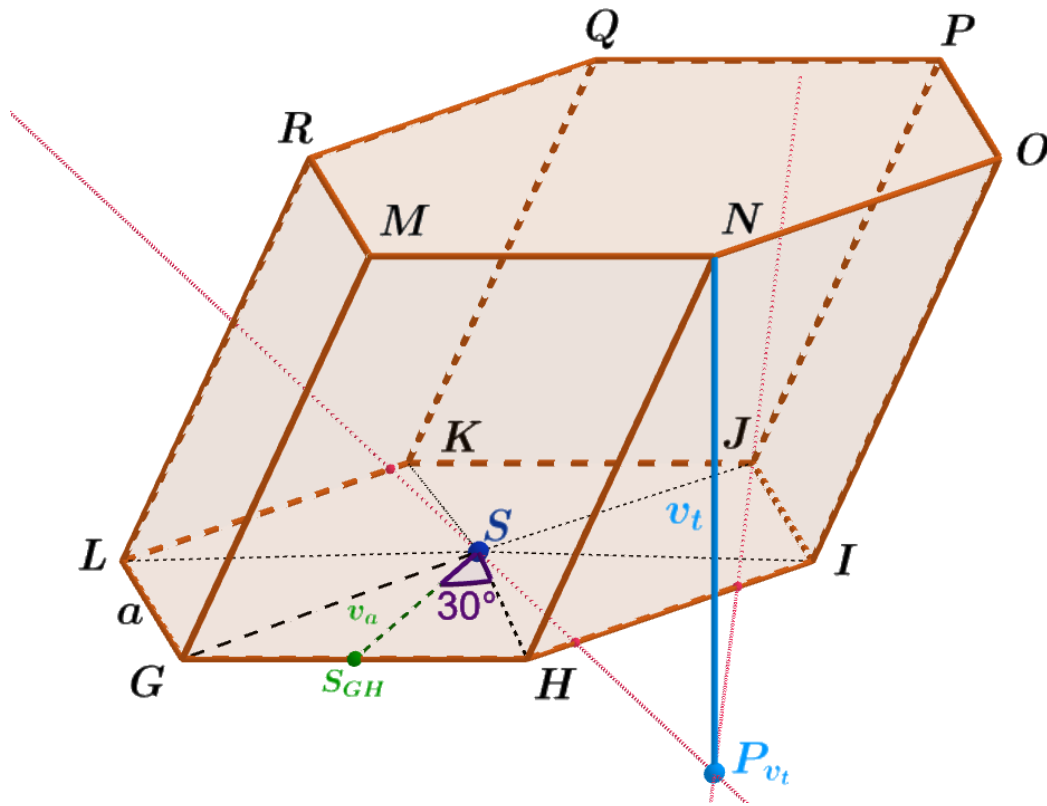


Obrázek 3.35: Ilustrace Příkladu 3.6.1

### Řešení

- Pro objem  $V$  hranolu platí  $V = S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v$ .
- Podstavami hranolu  $ABCDEFGHIJ$  jsou pravidelné pětiúhelníky o straně  $a = 5$  cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 3.35);  $S_{\triangle ABT} = \frac{av_a}{2}$ . Z  $\triangle AS_{AB}T$  vyjádříme  $v_a$ ;  
 $v_a = \cot 36^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 2,5 \text{ cm} \doteq 3,441 \text{ cm}$ .  
Tedy  $S_{\triangle ABT} = \frac{5 \cdot 3,441}{2} \text{ cm}^2 \doteq 8,603 \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = 5 \cdot S_{\triangle ABT} = 5 \cdot 8,603 \text{ cm}^2 \doteq 43,015 \text{ cm}^2$ .
- Jelikož jsou boční stěny pravidelného pětibokého hranolu tvořeny shodnými čtverci, tak tělesová výška  $v$  má stejnou velikost jako podstavná hrana;  $v = a = 5$  cm.
- Pro objem hranolu platí:  $V = S_p v = 43,015 \cdot 5 \text{ cm}^3 \doteq 215,08 \text{ cm}^3$ .
- Objem daného pravidelného pětibokého hranolu je po zaokrouhlení  $215,08 \text{ cm}^3$ .

**Příklad 3.6.2** Je dán kosý šestiboký hranol  $GHIJKLMNOPQR$ , jehož podstavy jsou pravidelné šestiúhelníky o straně  $a = 4$  dm. Jeho tělesová výška  $v_t = 6$  dm. Jaký je objem  $V$  tohoto hranolu? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

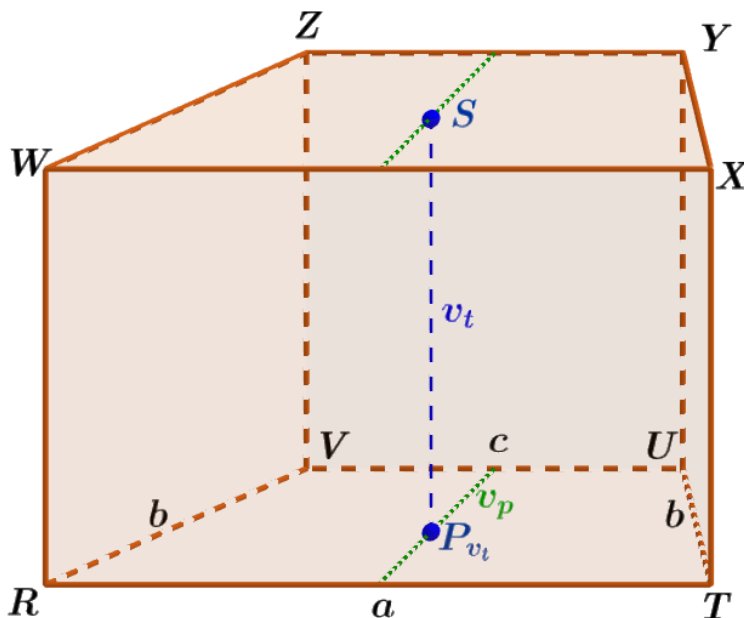


Obrázek 3.36: Ilustrace Příkladu 3.6.2

### Řešení

- Pro objem  $V$  hranolu platí  $V = S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v_t$ .
- Podstavami hranolu  $GHIJKLMNOPQR$  jsou pravidelné šestiúhelníky o straně  $a = 6$  dm. Pravidelný šestiúhelník rozložíme na šest shodných rovnostranných trojúhelníků (obr. 3.36);  $S_{\triangle GHS} = \frac{av_a}{2}$ . Z  $\triangle S_{GH}HS$  vyjádříme  $v_a$ ;  
 $v_a = \cot 30^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,732 \cdot 2 \text{ dm} \doteq 3,464 \text{ dm}$ .  
Tedy  $S_{\triangle GHS} = \frac{4 \cdot 3,464}{2} \text{ dm}^2 \doteq 6,928 \text{ dm}^2$ .
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = 6 \cdot S_{\triangle GHS} = 6 \cdot 6,928 \text{ dm}^2 \doteq 41,892 \text{ dm}^2$ .
- Tělesová výška  $v_t = |P_{v_t}N| = 6 \text{ dm}$ .
- Pro objem hranolu platí:  $V = S_p v_t = 41,892 \cdot 6 \text{ dm}^3 \doteq 251,35 \text{ dm}^3$ .
- Objem daného kosého šestibokého hranolu je po zaokrouhlení  $251,35 \text{ dm}^3$ .

**Příklad 3.6.3** Je dán kolmý čtyřboký hranol  $RTUVWXYZ$ , jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky  $a = 8$  m a  $c = 4,5$  m. Výška  $v_p$  lichoběžníku je 4 m, pro tělesovou výšku hranolu platí  $v_t = 5$  m. Vypočítejte objem  $V$  tohoto hranolu.



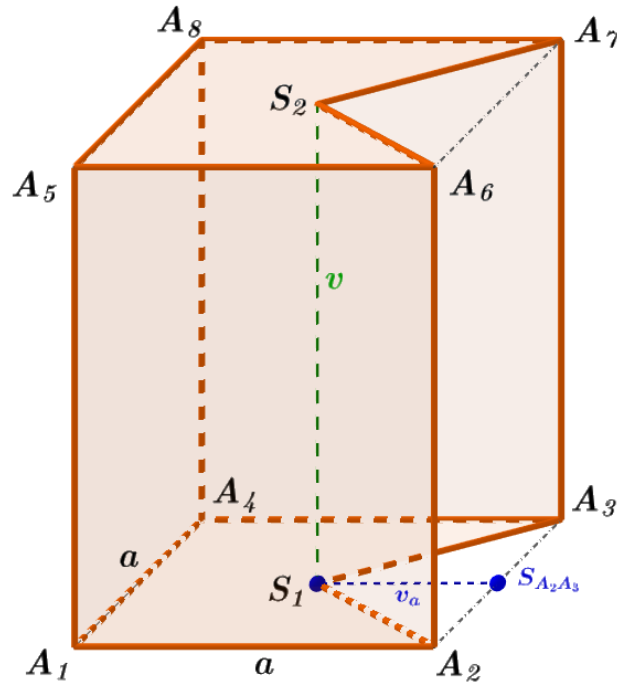
Obrázek 3.37: Ilustrace Příkladu 3.6.3

### Řešení

- Pro objem  $V$  hranolu platí  $V = S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v_t$ .
- Podstavami hranolu  $RTUVWXYZ$  jsou shodné rovnoramenné lichoběžníky o základnách délky  $a = 8$  m a  $c = 4,5$  m (obr. 3.37). Vypočítáme obsah  $S_p$  jedné podstavy, tedy obsah rovnoramenného lichoběžníku;  

$$S_p = S_{RTUV} = \frac{(a + c) \cdot v_p}{2} = \frac{(8 + 4,5) \cdot 4}{2} \text{ m}^2 = 25 \text{ m}^2.$$
- Pro objem hranolu platí:  $V = S_p v = 25 \cdot 5 \text{ m}^3 = 125 \text{ m}^3.$
- Objem kolmého čtyřbokého hranolu  $RTUVWXYZ$  je  $125 \text{ m}^3.$

**Příklad 3.6.4** Vyjádřete objem nekonvexního pětibokého kolmého hranolu  $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$ , který vznikl z pravidelného čtyřbokého hranolu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  o podstavné hraně  $a$  a výšce  $v$  odseknutím kolmého trojbokého hranolu o stejné výšce  $v$ , jehož dolní podstavou je  $\triangle A_2A_3S_1$ , kde  $S_1$  je střed čtveřové podstavy  $A_1A_2A_3A_4$ .



Obrázek 3.38: Ilustrace Příkladu 3.6.4

### Řešení

- Pro objem  $V$  hranolu platí  $V = S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v$ .
- Podstavami hranolu  $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$  jsou shodné nekonvexní pětiúhelníky vzniklé ze čtveřce  $A_1A_2A_3A_4$  odseknutím rovnoramenného  $\triangle A_2A_3S_1$  s výškou  $v_a = \frac{a}{2}$  (obr. 3.38). Vyjádříme obsah  $S_p$  jedné podstavy, tedy obsah nekonvexního pětiúhelníku  $A_1A_2S_1A_3A_4$ ;  $S_p = a^2 - \frac{a \cdot v_a}{2} = a^2 - \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ .
- Pro objem hranolu platí:  $V = S_p v = \frac{3a^2 v}{4}$ .
- Objem kolmého čtyřbokého hranolu  $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$  je  $\frac{3a^2 v}{4}$ .



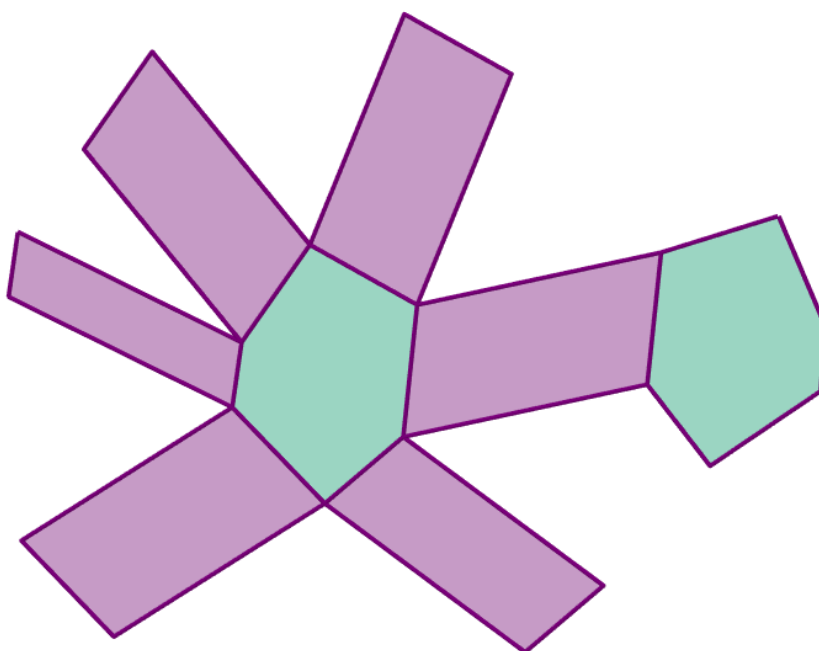
## 3.7 Povrch hranolu

Tak jako u povrchu tělesa je i povrch hranolu roven součtu obsahů všech jeho stěn, tedy obsahu jeho sítě, viz obr. 3.39. Sít' hranolu je tvořena dvěma shodnými podstavami a jeho pláštěm, viz obr. 3.40.

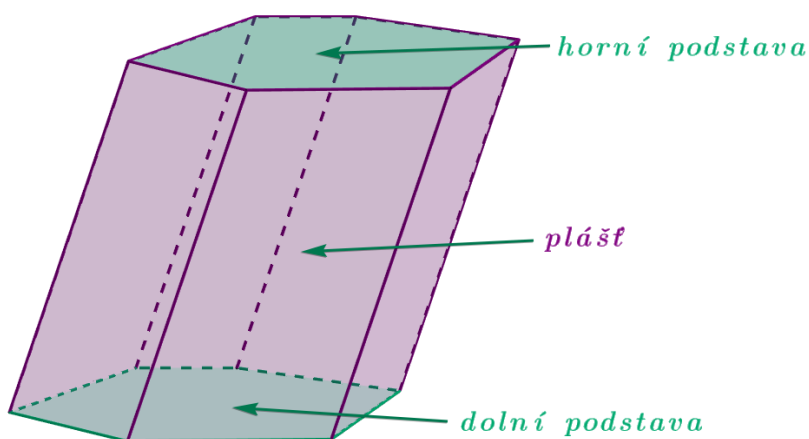
### Věta

**Povrch  $S$  hranolu** je roven součtu obsahů  $S_p$  jeho dvou podstav a obsahu jeho bočních stěn, tj. pláště  $S_{pl}$ , platí:

$$S = 2S_p + S_{pl}.$$



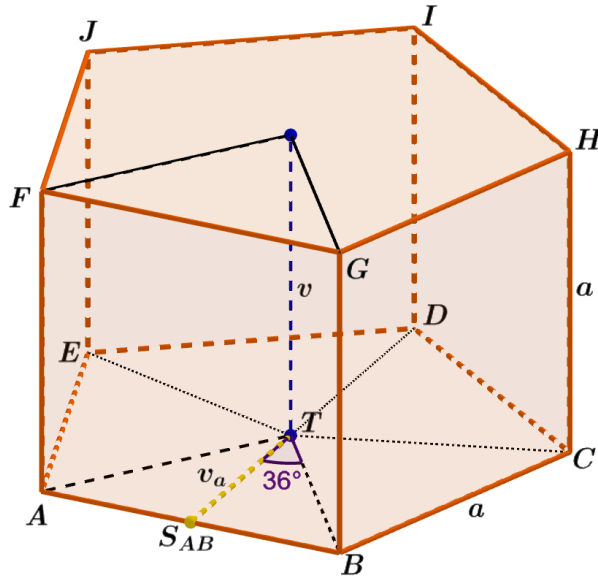
Obrázek 3.39: Sít' šestibokého kosého hranolu



Obrázek 3.40: Povrch šestibokého kosého hranolu - plášť a podstavy

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.1.

**Příklad 3.7.1** Vypočítejte povrch  $S$  pravidelného pětibokého hranolu  $ABCDEFGHJIJ$ . Jeho boční stěny jsou tvořeny shodnými čtverci o straně délky  $a = 5$  cm. Bod  $T$  je těžištěm podstavy. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



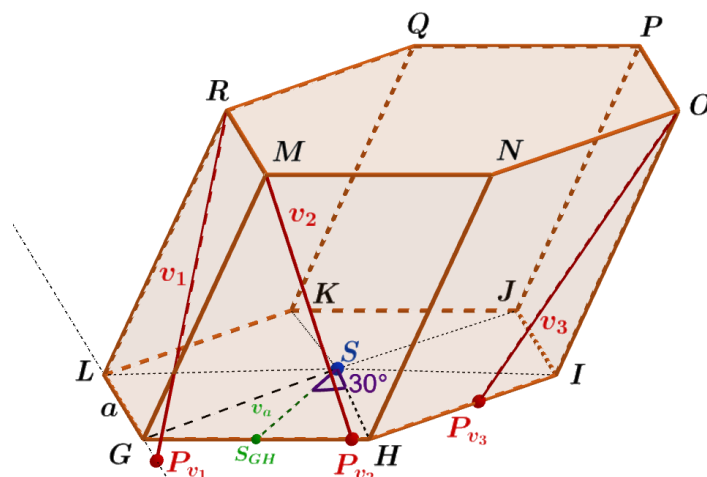
Obrázek 3.41: Ilustrace Příkladu 3.7.1

## Řešení

- Pro povrch  $S$  hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl}$ , tedy potřebujeme znát obsahy podstav  $S_p$  daného hranolu a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Podstavami hranolu  $ABCDEFGHJIJ$  jsou pravidelné pětiúhelníky o straně délky  $a = 5$  cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoarmenných trojúhelníků (obr. 3.41);  $S_{\triangle ABT} = \frac{av_a}{2}$ . Z  $\triangle AS_{AB}T$  vyjádříme  $v_a$ ;  
 $v_a = \cot 36^\circ \cdot \frac{a}{2} = 1,376 \cdot 2,5 \text{ cm} \doteq 3,441 \text{ cm}$ . Tedy  $S_{\triangle ABT} = \frac{5 \cdot 3,441}{2} \text{ cm}^2 \doteq 8,603 \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = 5 \cdot S_{\triangle AS_{AB}T} = 5 \cdot 8,603 \text{ cm}^2 \doteq 43,015 \text{ cm}^2$ .
- Pro určení obsahu pláště  $S_{pl}$  hranolu, si uvědomíme, že jeho plášť je tvořen pěti shodnými čtverci o straně délky  $a = 5$  cm:  $ABGF$ ,  $BCHG$ ,  $CDIH$ ,  $DEJI$ ,  $EAFJ$ . Určíme obsah čtverce  $ABFG$ .
- $S_{ABFG} = a^2 = 25 \text{ cm}^2$ ;  $S_{pl} = 5 \cdot S_{ABFG} = 125 \text{ cm}^2$ .
- Pro povrch hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 43,015 \text{ cm}^2 + 125 \text{ cm}^2 \doteq 211,03 \text{ cm}^2$ .
- Povrch daného pravidelného pětibokého hranolu je po zaokrouhlení  $211,03 \text{ cm}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.2.

**Příklad 3.7.2** Je dán kosý šestiboký hranol  $GHIJKLMNOPQR$ , jehož podstavy jsou pravidelné šestiúhelníky o straně  $a = 4$  dm. Jeho tělesová výška  $v_t = 6$  dm. Výška  $v_1$  kosodélníku  $LGMR$  je 6,11 dm. Výška  $v_2$  kosodélníku  $GHNM$  je 7,23 dm. Výška  $v_3$  kosodélníku  $HION$  je 7,95 dm. Jaký je povrch  $S$  tohoto hranolu? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



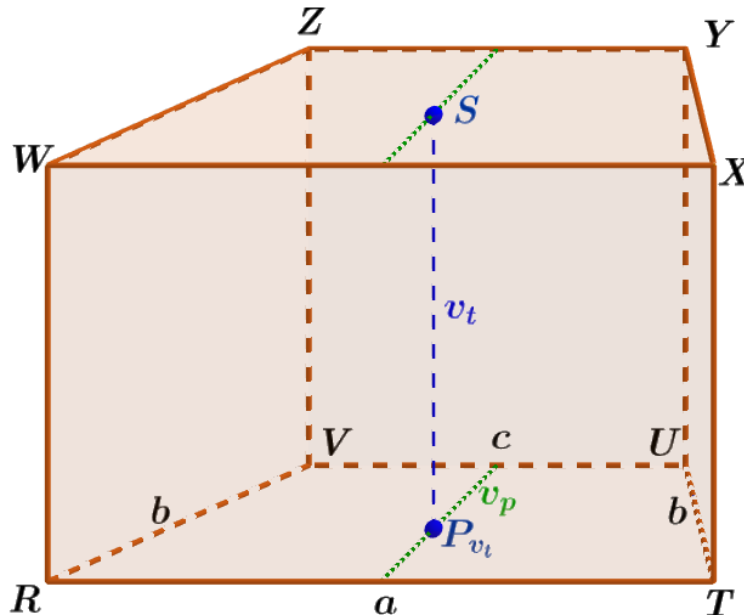
Obrázek 3.42: Ilustrace Příkladu 3.7.2

### Řešení

- Pro povrch  $S$  hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl}$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Podstavami hranolu  $GHIJKLMNOPQR$  jsou pravidelné šestiúhelníky o straně délky  $a = 6$  dm (obr. 3.42). Pravidelný šestiúhelník rozložíme na šest shodných rovnostranných trojúhelníků;  $S_{\triangle GHS} = \frac{av_a}{2}$ . Z  $\triangle S_GHS$  vyjádříme  $v_a$ ;  
 $v_a = \cot 30^\circ \cdot \frac{a}{2} = 1,732 \cdot 2 \text{ dm} \doteq 3,464 \text{ dm}$ . Tedy  $S_{\triangle GHS} = \frac{4 \cdot 3,464}{2} \text{ dm}^2 \doteq 6,928 \text{ dm}^2$ .
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = 6 \cdot S_{\triangle GHS} = 6 \cdot 6,928 \text{ dm}^2 \doteq 41,892 \text{ dm}^2$ .
- Plášť hranolu je tvořen třemi dvojicemi navzájem shodných kosodélníků  
 $S_{pl} = 2 \cdot S_{LGMR} + 2 \cdot S_{GHNM} + 2 \cdot S_{HION}$ .
- Výška  $v_1$  kosodélníku  $LGMR$  je rovna výšce kosodélníku  $IJPO$ ;  $v_1 = 6,11$  dm.  
Výška  $v_2$  kosodélníku  $GHNM$  je rovna výšce kosodélníku  $JKQP$ ;  $v_2 = 7,23$  dm.  
Výška  $v_3$  kosodélníku  $HION$  je rovna výšce kosodélníku  $KLRQ$ ;  $v_3 = 7,95$  dm.
- Vypočítáme obsahy jednotlivých stěn – kosodélníků;  
 $S_{LGMR} = a \cdot v_1 = 4 \cdot 6,11 \text{ dm}^2 = 24,440 \text{ dm}^2$ ,  
 $S_{GHNM} = a \cdot v_2 = 4 \cdot 7,23 \text{ dm}^2 = 28,920 \text{ dm}^2$ ,  
 $S_{HION} = a \cdot v_3 = 4 \cdot 7,95 \text{ dm}^2 = 31,800 \text{ dm}^2$ .
- Dosadíme hodnoty;  $S_{pl} = 2 \cdot S_{LGMR} + 2 \cdot S_{GHNM} + 2 \cdot S_{HION} =$   
 $= 2 \cdot 24,440 \text{ dm}^2 + 2 \cdot 28,920 \text{ dm}^2 + 2 \cdot 31,800 \text{ dm}^2 = 170,320 \text{ dm}^2$ .
- Pro povrch hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 41,892 \text{ dm}^2 + 170,320 \text{ dm}^2 \doteq 254,10 \text{ dm}^2$ .
- Povrch daného kosého šestibokého hranolu je po zaokrouhlení  $254,10 \text{ dm}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.3.

**Příklad 3.7.3** Je dán kolmý čtyřboký hranol  $RTUVWXYZ$ , jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky  $a = 8$  m,  $c = 4,5$  a dvěma rameny délky  $b = 4,3$  m. Výška  $v_p$  lichoběžníku je 4 m a pro délku tělesové výšky platí  $v_t = 5$  m. Vypočítejte povrch  $S$  tohoto hranolu. Výsledek uveďte na jedno desetinné místo.



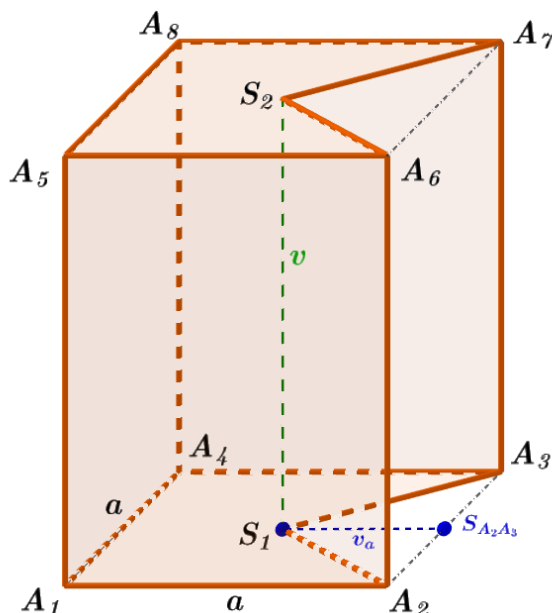
Obrázek 3.43: Ilustrace Příkladu 3.7.3

### Řešení

- Pro povrch  $S$  hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl}$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Podstavami daného hranolu jsou shodné rovnoramenné lichoběžníky o ramenech délky  $a = 8$  m,  $c = 4,5$  m (obr. 3.43). Vypočítáme obsah  $S_p$  jedné podstavy, tedy obsah rovnoramenného lichoběžníku;  $S_p = S_{RTUV} = \frac{(a+c) \cdot v_p}{2} = \frac{(8+4,5) \cdot 4}{2} \text{ m}^2 = 25 \text{ m}^2$ .
- Plášť hranolu je tvořen čtyřmi obdélníky, a to  $RTXW$ ,  $VUYZ$  a jednou dvojicí navzájem shodných obdélníků  $RVZW$ ,  $TUZX$ .
- Vypočítáme obsahy jednotlivých stěn – obdélníků;  
 $S_{RTXW} = a \cdot v_t = 8 \cdot 5 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$ ,  
 $S_{VUYZ} = c \cdot v_t = 4,5 \cdot 5 \text{ m}^2 = 22,50 \text{ m}^2$ ,  
 $S_{RVZW} = b \cdot v_t = 4,3 \cdot 5 \text{ m}^2 = 21,50 \text{ m}^2$ .
- Dosadíme;  $S_{pl} = S_{RTXW} + S_{VUYZ} + 2 \cdot S_{RVZW} = 40 \text{ m}^2 + 22,50 \text{ m}^2 + 2 \cdot 21,50 \text{ m}^2 = 105,50 \text{ m}^2$ .
- Pro povrch hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 25 \text{ m}^2 + 105,50 \text{ m}^2 \doteq 155,5 \text{ m}^2$ .
- Povrch kolmého čtyřbokého hranolu  $RTUVWXYZ$  je  $155,5 \text{ m}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch hranolu z Příkladu 3.6.4.

**Příklad 3.7.4** Vyjádřete povrch nekonvexního kolmého pětibokého hranolu  $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$ , který vznikl z pravidelného čtyřbokého hranolu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  o podstavné hraně  $a$  a výšce  $v$  odsekutím kolmého trojbokého hranolu o stejné výšce  $v$ , jehož dolní podstavou je  $\triangle A_2S_1A_3$ , kde  $S_1$  je střed čtvercové podstavy  $A_1A_2A_3A_4$ .



Obrázek 3.44: Ilustrace Příkladu 3.7.4

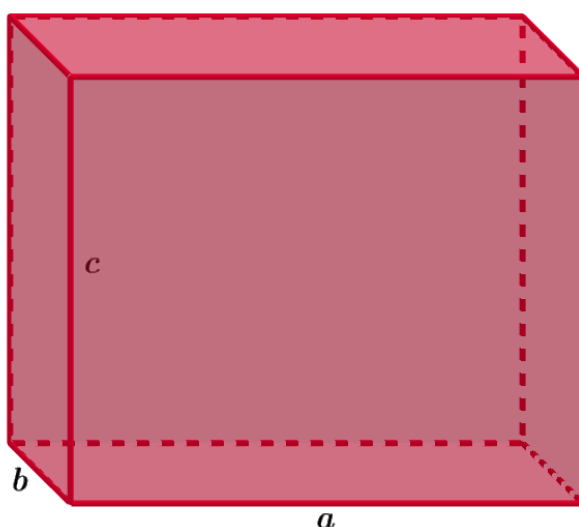
### Řešení

- Pro povrch  $S$  hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl}$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Podstavami hranolu  $A_1A_2S_1A_3A_4A_5A_6S_2A_7A_8$  jsou nekonvexní pětiúhelníky vzniklé ze čtverce  $A_1A_2A_3A_4$  odsekutím rovnoramenného  $\triangle A_2S_1A_3$  s výškou  $v_a = \frac{a}{2}$  (obr. 3.44). Vyjádříme obsah  $S_p$  jedné podstavy, tj. obsah nekonvexního pětiúhelníku  $A_1A_2S_1A_3A_4$ ;  $S_p = a^2 - \frac{a \cdot v_a}{2} = a^2 - \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ .
- Plášť je tvořen jednou trojicí navzájem shodných obdélníků  $A_1A_2A_6A_5$ ,  $A_3A_4A_8A_7$ ,  $A_4A_1A_5A_8$  a jednou dvojicí navzájem shodných obdélníků  $A_2S_1S_2A_6$ ,  $S_1A_3A_7S_2$ .
- Vyjádříme obsahy jednotlivých stěn – obdélníků;  $S_{A_1A_2A_6A_5} = av$ ,  $S_{A_2S_1S_2A_6} = |A_2S_1| \cdot v$ , kde Pýthagorovou větou vyjádříme délku úsečky  $A_2S_1$ ;  $|A_2S_1| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (v_a)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}$ . Tedy  $S_{A_2S_1S_2A_6} = \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot v = \frac{\sqrt{2}av}{2}$ .
- Dosadíme;  $S_{pl} = 3 \cdot S_{A_1A_2A_6A_5} + 2 \cdot S_{A_2S_1S_2A_6} = 3 \cdot av + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}av}{2} = 3av + \sqrt{2}av = av \cdot (3 + \sqrt{2})$ .
- Pro povrch hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot \frac{3a^2}{4} + av \cdot (3 + \sqrt{2}) = \frac{3a^2}{2} + av \cdot (3 + \sqrt{2}) = a \cdot \left(\frac{3a}{2} + v \cdot (3 + \sqrt{2})\right)$ .
- Povrch daného nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je  $a \cdot \left(\frac{3a}{2} + v \cdot (3 + \sqrt{2})\right)$ .

## 3.8 Objemy a povrchy dalších typů hranolů

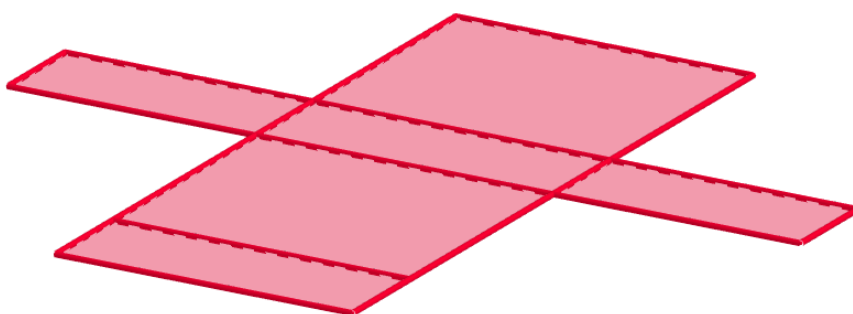
### 3.8.1 Kvádr

Za **kvádr** považujeme kolmý hranol, jehož podstavou je obdélník nebo čtverec. Tudíž se jedná o čtyřboký hranol. V případě, že podstavy kváдру jsou čtverce, jedná se o pravidelný čtyřboký hranol. Stěny kváдру ležící naproti sobě jsou shodné obdélníky nebo čtverce. Za **rozměry kváдру** označujeme délky  $a, b, c$  tří hran vycházejících ze stejného vrcholu (obr. 3.45). Stěnové úhlopříčky v protějších stěnách kváдру mají stejnou délku a zároveň všechny tělesové úhlopříčky kváдру mají stejnou délku.



Obrázek 3.45: Kvádr s vyznačenými rozměry  $a, b, c$  zobrazen v levém náhledu

**Sít kváдру** se skládá ze všech jeho šesti stěn (obr. 3.46).



Obrázek 3.46: Sít kváдру skládající se ze šesti stěn

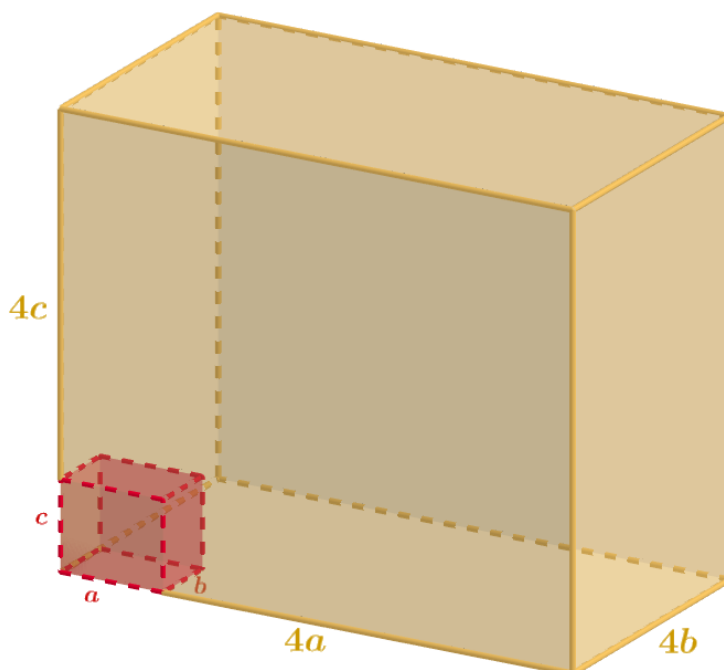
**Objem  $V$  kváдру** o rozměrech  $a, b, c$  je

$$V = abc.$$

**Povrch  $S$  kváдру** o rozměrech  $a, b, c$  je

$$S = 2ab + 2(ac + bc) = 2(ab + ac + bc).$$

**Příklad 3.8.1** Kolikrát se zvětší objem a povrch kvádru, jestliže všechny jeho rozměry zvětšíme čtyřikrát?



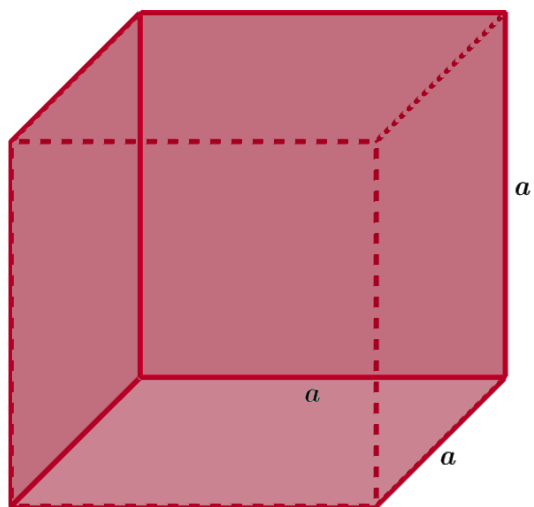
Obrázek 3.47: Ilustrace Příkladu 3.8.1

### Řešení

- Označme si rozměry původního kvádru  $a, b, c$  (obr. 3.47). Pro objem původního kvádru platí  $V = abc$ ; pro povrch původního kvádru platí  $S = 2(ab + ac + bc)$ .
- Rozměry kvádru zvětšené čtyřikrát (nového kvádru) jsou  $4a, 4b, 4c$ .
- Objem nového kvádru je  $V_k = 4a \cdot 4b \cdot 4c = 64 \cdot abc$ .
- Povrch nového kvádru je  $S_k = 2(4a \cdot 4b + 4a \cdot 4c + 4b \cdot 4c) = 2 \cdot 16(ab + ac + bc) = 32(ab + ac + bc)$ .
- Jestliže všechny rozměry kvádru zvětšíme čtyřikrát, objem se zvětší šedesátčtyřikrát a povrch se zvětší třicetdvakrát.

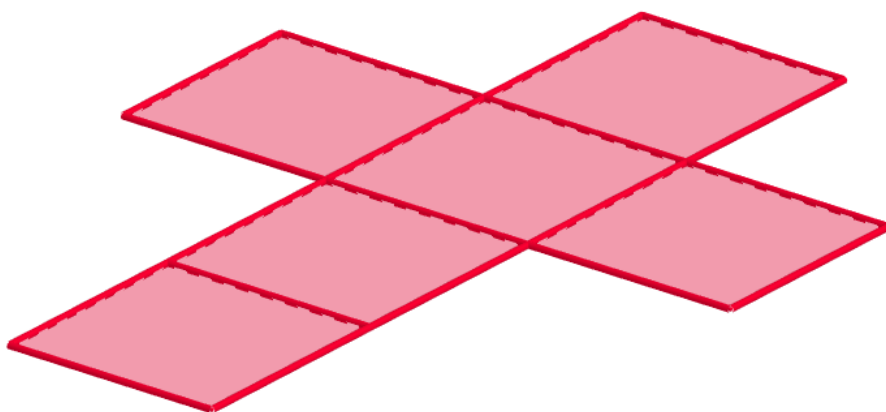
### 3.8.2 Krychle

**Krychle** je speciální případ kvádru, jehož rozměry se rovnají ( $a = b = c$ ); nebo-li výška krychle je rovna délce podstavné hrany. Na obr. 3.48 je vidět, že všechny její stěny jsou shodné čtverce. Krychle je pravidelným šestistěnem. Stěnové úhlopříčky krychle jsou navzájem shodné, totéž platí i pro tělesové úhlopříčky krychle.



Obrázek 3.48: Krychle zobrazena v levém pohledu

**Síť krychle** (obr. 3.49) se skládá ze šesti shodných čtverců.



Obrázek 3.49: Síť krychle skládající se ze šesti shodných stěn

**Objem  $V$  krychle** o podstavné hraně  $a$  je

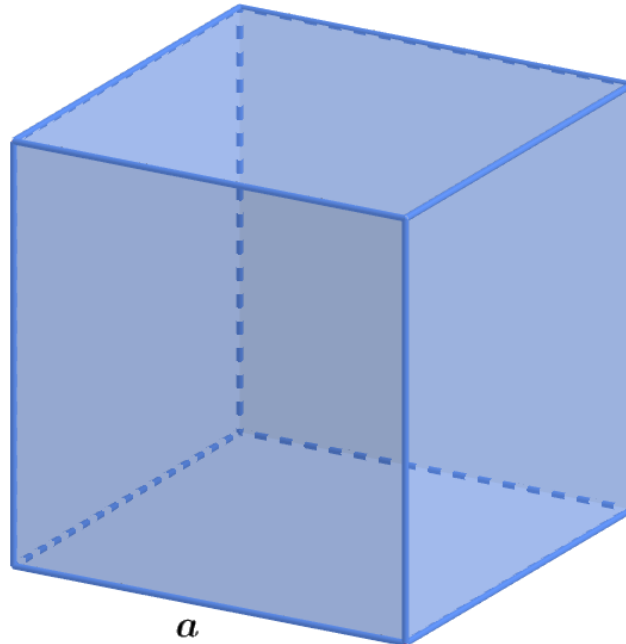
$$V = a^3.$$

**Povrch  $S$  krychle** o podstavné hraně  $a$  je

$$S = 6a^2.$$



**Příklad 3.8.2** Součet délek všech hran krychle je 132 mm. Jaký je objem a povrch této krychle?

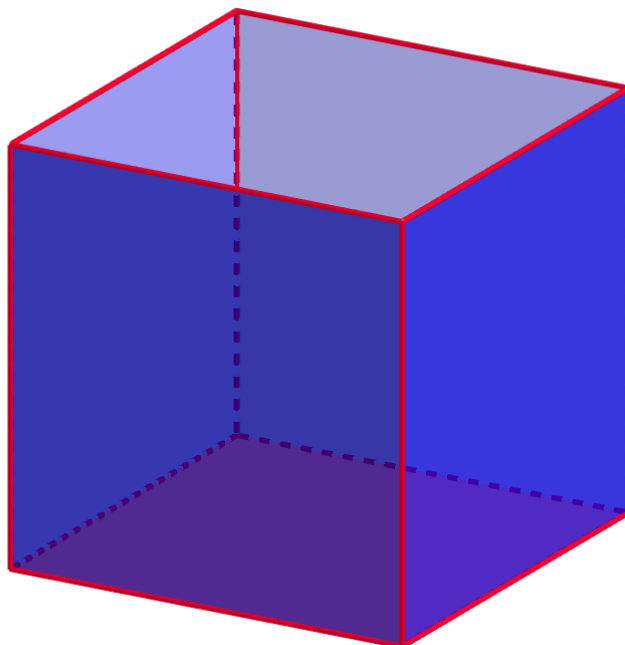


Obrázek 3.50: Ilustrace Příkladu 3.8.2

### Řešení

- Vzhledem k zadání potřebujeme pro výpočet objemu  $V$  i povrchu  $S$  určit počet hran. Krychle má dvanáct hran (obr. 3.50).
- Pro délku jedné hrany platí  $132 : 12 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$ .
- Pro objem krychle platí:  $V = a^3 = 11^3 \text{ mm}^3 = 1\,331 \text{ mm}^3$ .
- Pro povrch krychle platí:  $S = 6a^2 = 6 \cdot 11^2 \text{ mm}^2 = 726 \text{ mm}^2$ .
- Objem krychle je  $1\,331 \text{ mm}^3$  a povrch krychle je  $726 \text{ mm}^2$ .

**Příklad 3.8.3** Vnitřní povrch nádrže na dešťovou vodu ve tvaru krychle bez horní podstavy je  $245 \text{ m}^2$ . Kolik hektolitrů vody nádrž pojme tak, jestliže hladina vody bude splývat s horní podstavou?



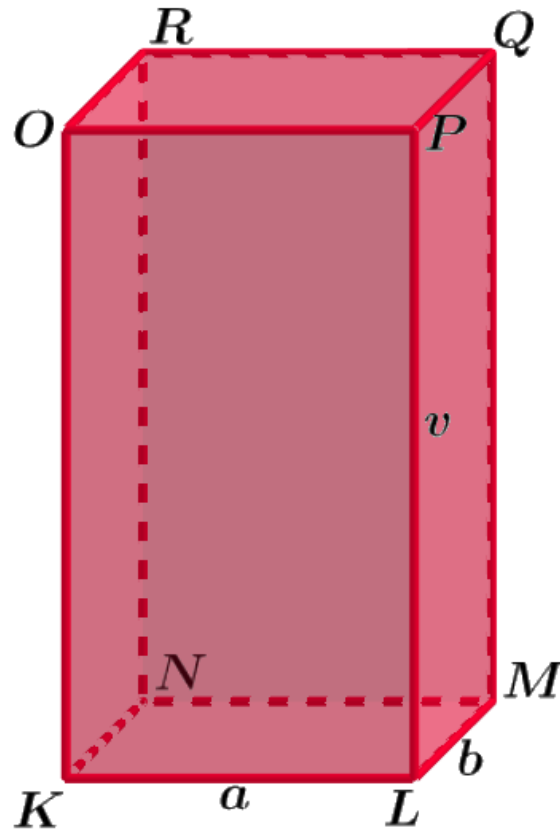
Obrázek 3.51: Ilustrace Příkladu 3.8.3

### Řešení

- V tomto případě se povrch krychlové nádrže skládá z dolní podstavy a čtyř bočních stěn (5 shodných čtverců);  $245 \text{ m}^2 / 5 = 49 \text{ m}^2$  (obr.3.51).
- Délku  $a$  hrany krychle dostaneme takto:  $a = \sqrt{49} \text{ m} = 7 \text{ m}$ .
- K výpočtu objemu vody, kterou nádrž pojme, je potřeba určit objem krychle o hraně  $7 \text{ m}$ ;  $V = a^3 = 7^3 \text{ m}^3 = 343 \text{ m}^3$ .
- Převédeme  $343 \text{ m}^3$  na hl:  $1 \text{ m}^3 = 10 \text{ hl}$ ;  $343 \text{ m}^3 = 3\,430 \text{ hl}$ .
- Nádrž pojme  $3\,430$  hektolitrů vody.

### 3.9 Úlohy I

**Úloha 3.9.1** Vypočítejte objem  $V$  kváдру  $KLMNOPQR$ , jehož podstavy jsou obdélníky o rozměrech  $a = 8$  m a  $b = 5$  m. Výška  $v$  kváдру je rovna trojnásobku délky kratšího rozměru podstavy.

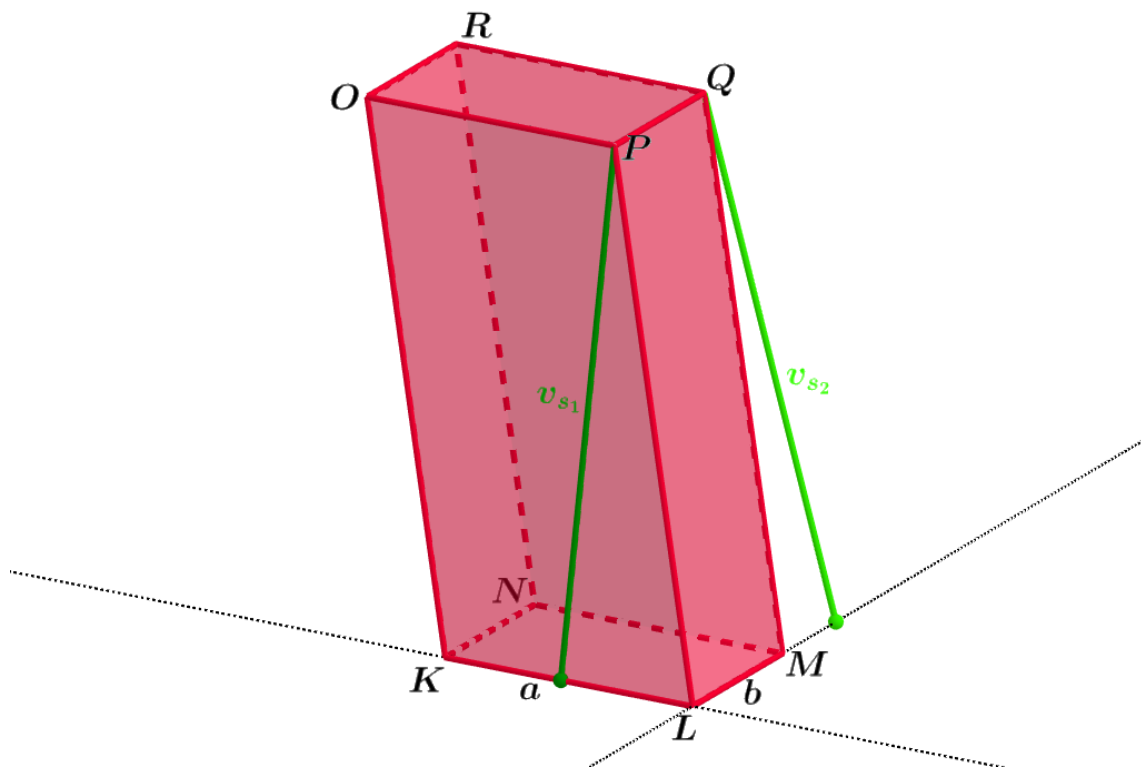


Obrázek 3.52: Ilustrace Úlohy 3.9.1

#### Řešení

- Kvádr řadíme mezi hranoly. Pro objem  $V$  hranoly platí:  $V = S_p v$ . Výšku  $v$  kváдру známe:  $v = 3 \cdot b = 3 \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}$ .
- Obsah podstavy  $S_p$  kváдру je roven obsahu obdélníku  $KLMN$ :  
 $S_p = a \cdot b = 8 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 40 \text{ m}^2$  (obr. 3.52).
- Dosadíme  $S_p$ :  $V = S_p v = 40 \text{ m}^2 \cdot 15 \text{ m} = 600 \text{ m}^3$ .
- Úlohu lze řešit také s využitím vzorce pro objem kváдру  
 $V = abv = ab \cdot 3b = 3ab^2 = 3 \cdot 8 \cdot 25 \text{ m}^3 = 600 \text{ m}^3$ .
- Objem  $V$  kváдру  $KLMNOPQR$  je  $600 \text{ m}^3$ .

**Úloha 3.9.2** Vypočítejte povrch  $S$  kosého čtyřbokého hranolu  $KLMNOPQR$ , jehož podstavy jsou obdélníky o rozměrech  $a = 8$  m a  $b = 5$  m. Stěnová výška  $v_{s_1}$  stěny  $KLPO$  měří 15,3 m a stěnová výška  $v_{s_2}$  stěny  $LMQP$  měří 15,6 m. Výsledek uveďte na jedno desetinné místo.



Obrázek 3.53: Ilustrace Úlohy 3.9.2

### Řešení

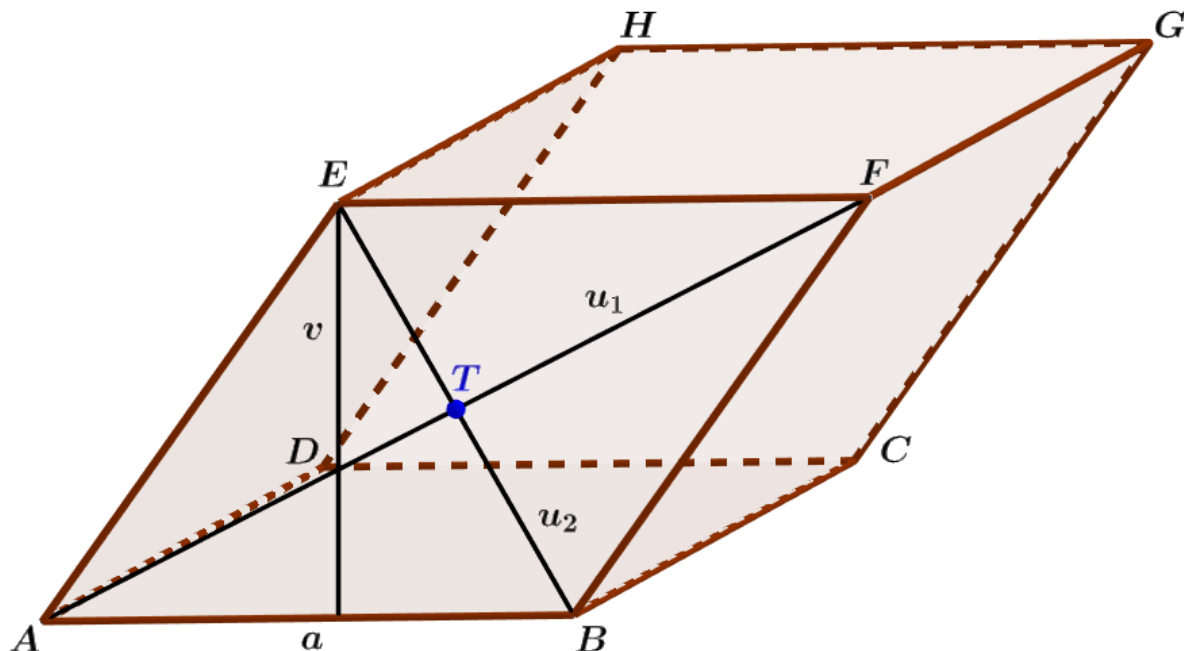
- Pro povrch  $S$  hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl}$ .
- Obsah podstavy  $S_p$  hranolu je roven obsahu obdélníku  $KLMN$ :  
 $S_p = a \cdot b = 8 \cdot 5 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$  (obr. 3.53).
- Obsah pláště  $S_{pl}$  kosého čtyřbokého hranolu je roven součtu obsahů všech bočních stěn. U tohoto hranolu jsou boční stěny tvořeny čtyřmi rovnoběžníky  $KLPO$ ,  $LMQP$ ,  $MNRQ$  a  $NKOR$ , z nichž každé dvě protější stěny jsou shodné:  $KLPO \cong MNRQ$  a  $LMQP \cong NKOR$ . Tedy  $S_{pl} = 2S_{KLPO} + 2S_{LMQP}$ .
- Vypočítáme obsah rovnoběžníku  $KLPO$ ;  $S_{KLPO} = a \cdot v_{s_1} = 8 \cdot 15,3 \text{ m}^2 = 122,40 \text{ m}^2$ .
- Vypočítáme obsah rovnoběžníku  $LMQP$ ;  $S_{LMQP} = b \cdot v_{s_2} = 5 \cdot 15,6 \text{ m}^2 = 78,00 \text{ m}^2$ .
- Vypočítáme obsah pláště hranolu  
 $S_{pl} = 2S_{KLPO} + 2S_{LMQP} = 2 \cdot 122,40 \text{ m}^2 + 2 \cdot 78,00 \text{ m}^2 = 400,80 \text{ m}^2$ .
- Vypočítáme povrch hranolu  
 $S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 40 \text{ m}^2 + 400,80 \text{ m}^2 = 480,8 \text{ m}^2$ .
- Povrch  $S$  kosého čtyřbokého hranolu  $KLMNOPQR$  je  $480,8 \text{ m}^2$ .

**Úloha 3.9.3** Určete v centimetrech tloušťku (výšku)  $v$  pracovní kuchyňské desky z mramoru, která má obdélníkový půdorys a její hmotnost je 70 kg. Hustota  $\rho$  mramoru je  $2\,800\text{ kg/m}^3$ , obsah pracovní plochy je  $4\text{ m}^2$ .

### Řešení

- Pracovní deska má tvar kvádru, pro jehož objem  $V$  platí  $V = S_p v$ . Obsah podstavy známe;  $S_p = 4\text{ m}^2$ .
- Výšku  $v$  hranolu vyjádříme ze vzorce pro objem hranolu;  $v = \frac{V}{S_p}$ .
- Objem  $V$  hranolu vyjádříme ze vztahu mezi hmotností  $m$  a hustotou  $\rho$ ;  
 $V = \frac{m}{\rho} = \frac{70}{2\,800}\text{ m}^3 = 0,025\text{ m}^3$ .
- Vyjádříme neznámou  $v$ ;  $v = \frac{V}{S_p} = \frac{0,025}{4}\text{ m} = 0,062\,5\text{ m}$ .
- Délku výšky  $v$  čili tloušťku mramorové desky převedeme na centimetry:  
 $v = 0,062\,5\text{ m} = 6,25\text{ cm}$ .
- Tloušťka mramorové pracovní kuchyňské desky je  $6,25\text{ cm}$ .

**Úloha 3.9.4** Vypočítejte objem  $V$  a povrch  $S$  rovnoběžnostěnu  $ABCDEFGH$  zvaného klenec. Stěnové úhlopříčky  $u_1, u_2$  v každé stěně měří 6 dm a 32 cm. Výška klence měří 2,82 dm. Výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa a uveďte výsledky v decimetrech krychlových a čtverečních.



Obrázek 3.54: Ilustrace Úlohy 3.9.4

### Řešení

- Klenec řadíme mezi kosé hranoly, jeho stěny jsou navzájem shodné kosočtverce (obr. 3.54). Pro jeho objem  $V$  platí  $V = S_p v$ . Výšku klence známe;  $v = 2,82$  dm.
- Obsah podstavy  $S_p$  je roven obsahu kosočtverce  $S_p = a \cdot v$ . Výšku kosočtverce známe (je zároveň rovna výšce klenec):  $v = 2,82$  dm.
- Stranu  $a$  kosočtverce vyjádříme například pomocí Pýthagorovy věty z pravoúhlého  $\triangle ABT$  (úhlopříčky kosočtverce jsou k sobě kolmé); délka  $|AT| = \frac{1}{2}u_1 = 3$  dm; délku  $u_2$  převedeme na decimetry;  $|BT| = \frac{1}{2}u_2 = 1,6$  dm;  
 $a = \sqrt{3^2 + (1,6)^2}$  dm =  $\sqrt{(11,56)}$  dm = 3,4 dm.
- Vypočítáme obsah podstavy  $S_p = a \cdot v = 3,4 \cdot 2,82$  dm<sup>2</sup>  $\doteq 9,588$  dm<sup>2</sup>.
- Vypočítáme objem klenec  $V = S_p v = 9,588 \cdot 2,82$  dm<sup>3</sup>  $\doteq 27,04$  dm<sup>3</sup>.
- Pro povrch  $S$  hranolu platí  $S = 2S_p + S_{pl}$ . Jelikož je síť klenec tvořena šesti shodnými kosočtverci a již jsme vypočítali obsah jedné stěny (podstavy  $S_p$ ), pro povrch  $S$  klenec platí  $S = 6S_p = 6 \cdot 9,588$  dm<sup>2</sup>  $\doteq 57,53$  dm<sup>2</sup>.
- Objem  $V$  klenec  $ABCDEFGH$  je po zaokrouhlení 27,04 dm<sup>3</sup> a jeho povrch  $S$  je po zaokrouhlení 57,53 dm<sup>2</sup>.

# 4. Jehlany

## 4.1 Jehlany

V této kapitole se budeme zabývat dalšími tělesy, a to jehlany. Pokud bychom se zamysleli, kde se nacházejí objekty ve tvaru jehlanů, tak nás napadají starověké pyramidy nebo moderní skleněná pyramida sloužící jako hlavní vchod do Paláce Louvre v Paříži (obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Skleněná pyramida na nádvoří Paláce Louvre ve tvaru čtyřbokého jehlanu [16]

Ze starověkého Egypta rovněž známe monolitické památníky symbolizující paprsky slunce – obelisky mající tvar čtyřbokého hranolce, na jehož horní podstavě je umístěn právě čtyřboký jehlan. U nás ho můžeme najít na třetím nádvoří Pražského hradu (obr. 4.2).



Obrázek 4.2: Obelisk se zakončením ve tvaru čtyřbokého jehlanu na Pražském hradě

Ve tvaru osmibokého jehlanu je postavena rozhledna nacházející se na Moravě u obce Ocmanice (obr. 4.3).



Obrázek 4.3: Patnáctimetrová rozhledna ve tvaru osmibokého jehlanu (Ocmanice) [17]

#### Poznámka

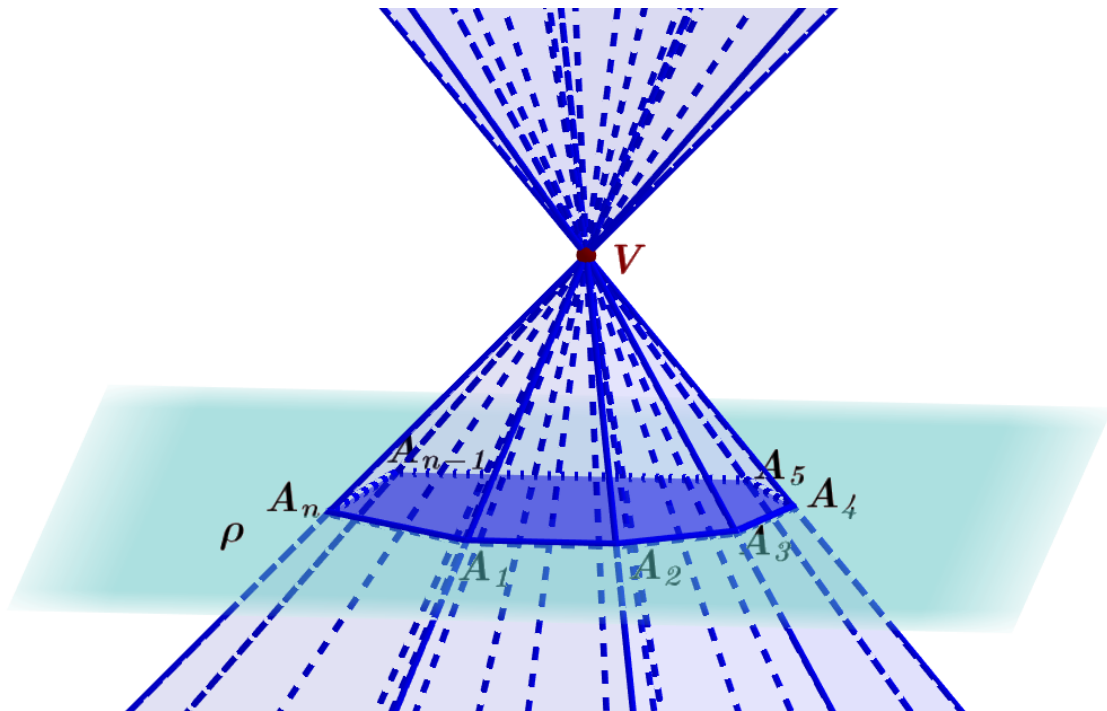
Obdobně k názvu pro skupinu mnohostěnů – tělesa hranolového typu, zde zavedeme název pro další skupinu mnohostěnů – **tělesa jehlanového typu**.

## 4.2 Zavedení těles jehlanového typu

Tak, jako hranolový prostor, hranolovou plochu a hranol, zavádíme jehlanový prostor, jehlanovou plochu a jehlan. Mějme dán řídicí  $n$ -úhelník  $A_1A_2 \dots A_n$ , který leží v rovině  $\rho$ , a dále bod  $V$ , který v této rovině neleží, potom jako  **$n$ -boký jehlanový prostor** označujeme sjednocení všech přímek, které procházejí bodem  $V$  a které protínají mnohoúhelník  $A_1A_2 \dots A_n$ .

Na následujícím obr. 4.4 se nachází řídicí  $n$ -úhelník  $A_1A_2 \dots A_n$  v rovině  $\rho$  a bod  $V$ , které určují zobrazený  $n$ -boký jehlanový prostor.

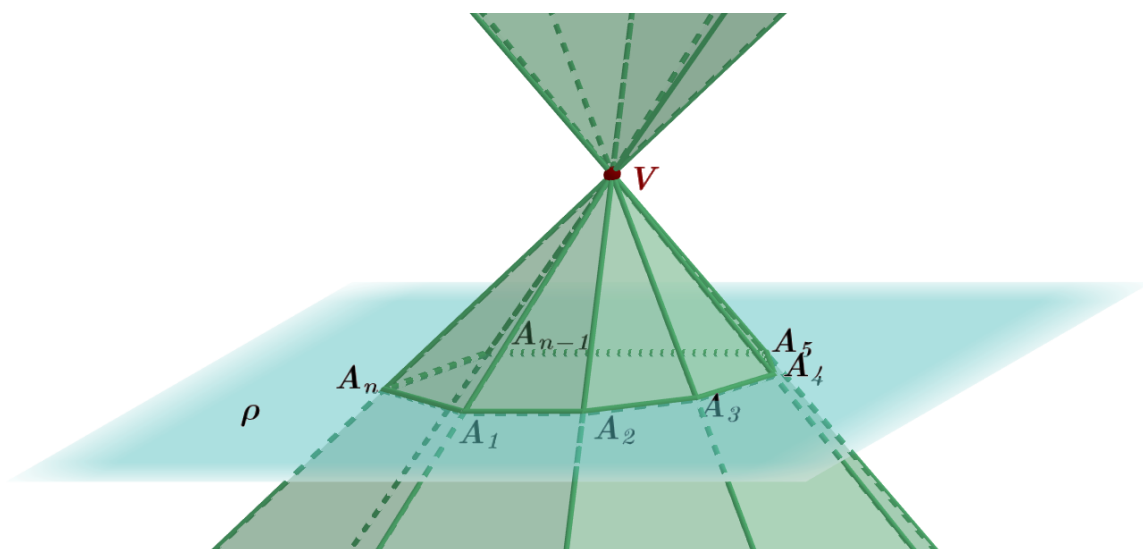




Obrázek 4.4: Jehlanový prostor  $n$ -boký

Jako  **$n$ -bokou jehlanovou plochu** označujeme sjednocení všech přímek, které procházejí bodem  $V$  a které protínají obvod řídicího mnohoúhelníku. Jehlanovou plochu pokládáme za hranici jehlanového prostoru. Bod  $V$  nazýváme **vrcholem** jehlanové plochy či jehlanového prostoru. Každou přímku procházející bodem  $V$  pokládáme za **vrcholovou přímku**.

Na obr. 4.5 se nachází obvod řídicího  $n$ -úhelníku  $A_1A_2 \dots A_n$  v rovině  $\rho$  a bod  $V$ , které dohromady určují  $n$ -bokou jehlanovou plochu.

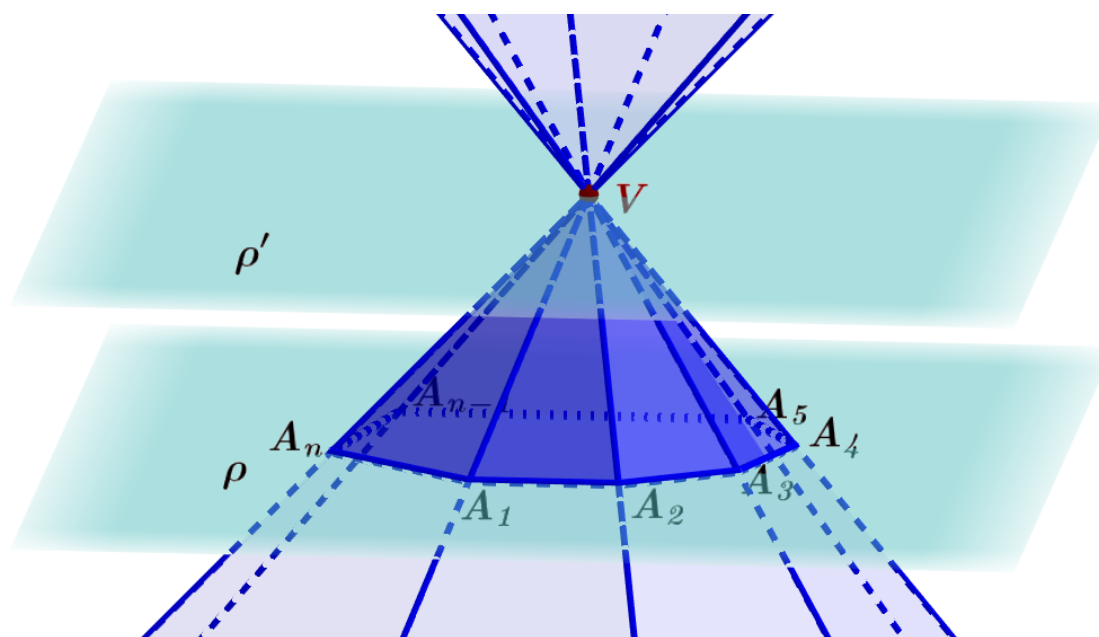


Obrázek 4.5: Jehlanová plocha  $n$ -boká

### Definice

Průnikem  $n$ -bokého jehlanového prostoru a prostorové vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s daným prostorem pouze jediný společný bod, kterým je vrchol  $V$  jehlanového prostoru, získáme těleso, které nazýváme  **$n$ -boký jehlan**.

Na obr. 4.6 je zobrazen průnik  $n$ -bokého jehlanového prostoru a prostorové vrstvy. Vznikne tak  $n$ -boký jehlan.



Obrázek 4.6: Jehlan  $n$ -boký

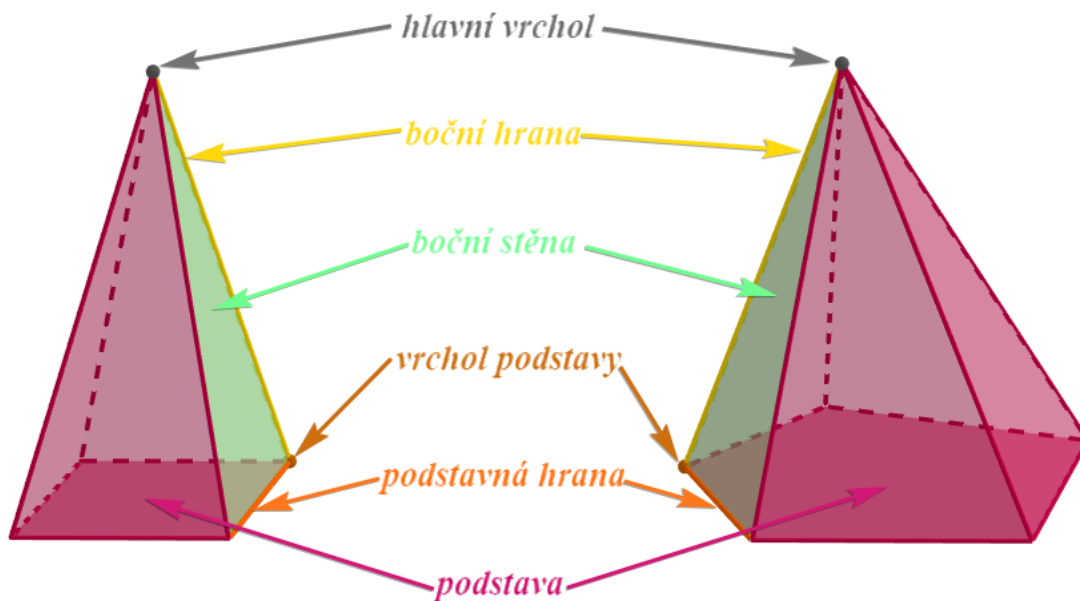
### Poznámka

Názvosloví jehlanů je odvozeno od typu řídicího mnohoúhelníku. Například jehlan, jehož podstava je šestiúhelník, je označován jako **šestiboký jehlan**.

### Definice

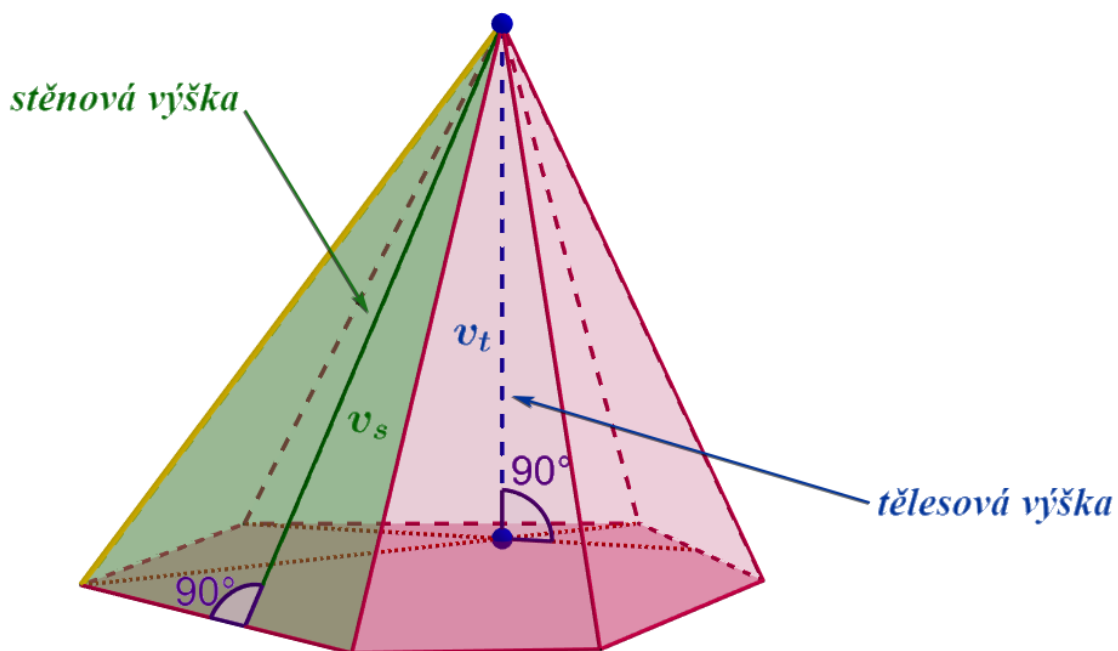
Vrchol jehlanového prostoru bod  $V$  se stává **hlavním vrcholem jehlanu**. Řídicí mnohoúhelník, který leží v rovině  $\rho$ , označujeme jako **podstavu jehlanu**. Jeho vrcholy nazýváme **vrcholy podstavy**. Stěny jehlanu obsahující hlavní vrchol označujeme jako **boční stěny jehlanu** a dohromady tvoří **plášť jehlanu**. Každá boční stěna jehlanu má tvar trojúhelníku. Strany řídicího mnohoúhelníku (podstavy) jehlanu označujeme jako **podstavné hrany**, ostatní hrany označujeme jako **boční hrany jehlanu**.

Uvedené pojmy jsou ilustrovány na obr. 4.7.



Obrázek 4.7: Vrcholy, hrany a stěny jehlanů

Vzdálenost roviny podstavy a hlavního vrcholu  $V$  se nazývá **tělesová výška** nebo také **výška jehlanu**. vzdálenost hlavního vrcholu od podstavné hrany v boční stěně je **stěnová výška jehlanu**. Tyto pojmy jsou ilustrovány na následujícím obr. 4.8.



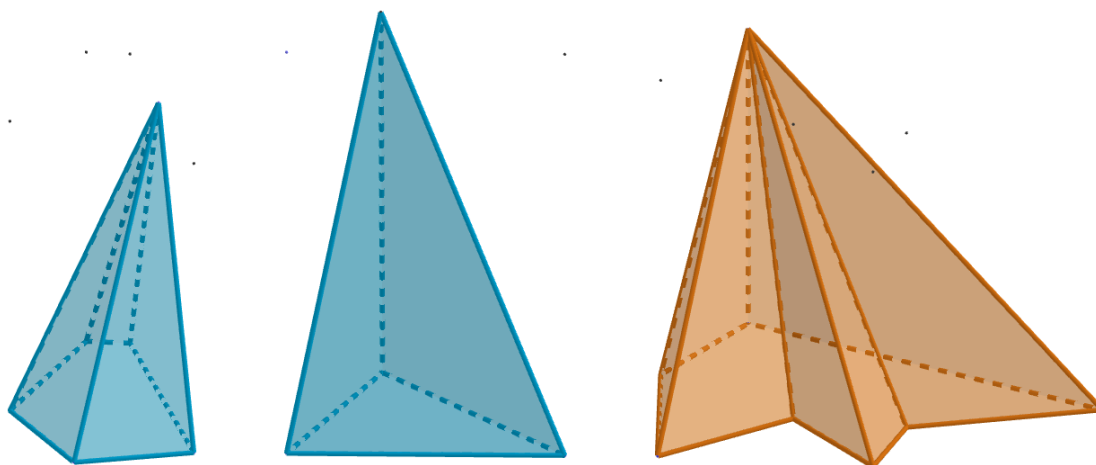
Obrázek 4.8: Tělesová a stěnová výška jehlanu

### 4.3 Klasifikace jehlanů

Jehlany můžeme klasifikovat podle různých kritérií.

### 4.3.1 Konvexní a nekonvexní jehlany

Jehlany, obdobně jako jiné typy těles, lze dělit na **konvexní** a **nekonvexní**. Tyto pojmy jsme si již zavedli v předcházející kapitole. Zda je jehlan konvexní, resp. nekonvexní, souvisí s tím, zda je konvexní, resp. nekonvexní jeho podstava. Na obr. 4.9 jsou zobrazeny dva konvexní a jeden nekonvexní jehlan.



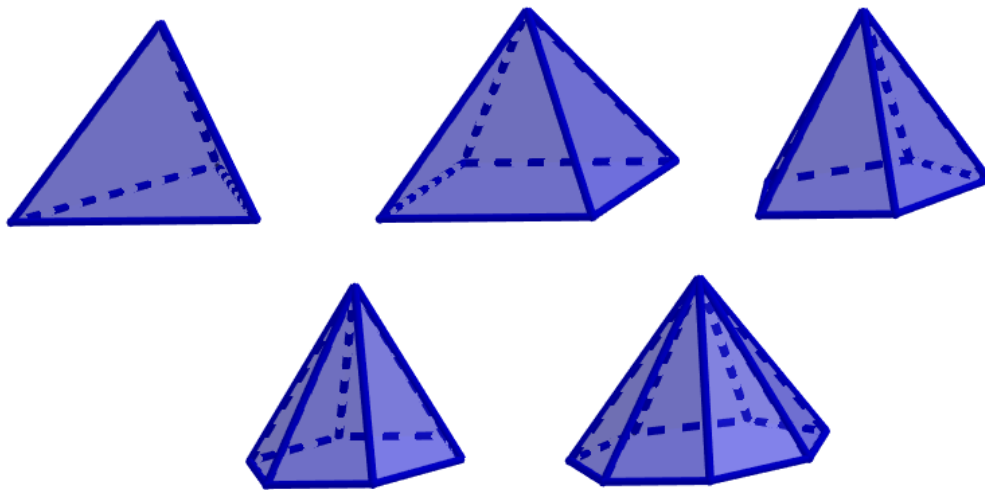
Obrázek 4.9: Konvexní pětiboký jehlan a trojboký jehlan, nekonvexní sedmiboký jehlan

### 4.3.2 Pravidelné a nepravidelné jehlany

#### Poznámka

Jehlany nerozdělujeme na kolmé a kosé, tak jako hranoly v předcházející kapitole, neboť u jehlanu nemáme přímkou určující směr jehlanového prostoru.

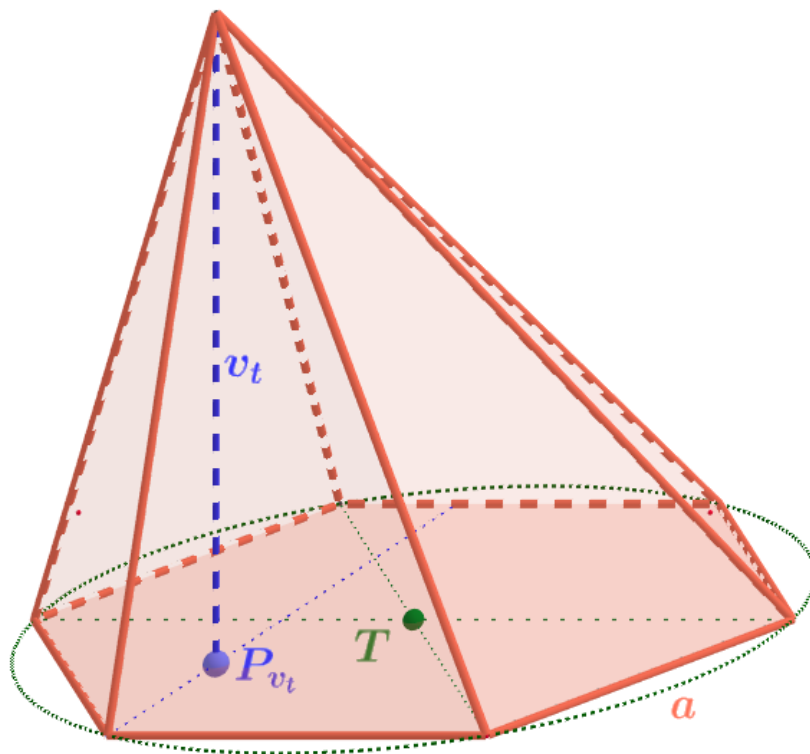
Jehlan, jehož podstavou je pravidelný  $n$ -úhelník a jehož pata tělesové výšky se nachází v těžišti podstavy (těžistěm pravidelného mnohoúhelníku rozumíme střed kružnice tomuto  $n$ -úhelníku opsané a vepsané), se nazývá **pravidelný  $n$ -boký jehlan** (obr. 4.10), v opačném případě jde o **nepravidelný  $n$ -boký jehlan**. Stěny pravidelného  $n$ -bokého jehlanu jsou vždy navzájem shodné trojúhelníky. Například podstavou pravidelného pětibokého jehlanu je pravidelný pětiúhelník a boční stěny jsou navzájem shodné rovnoramenné (případně rovnostranné) trojúhelníky.



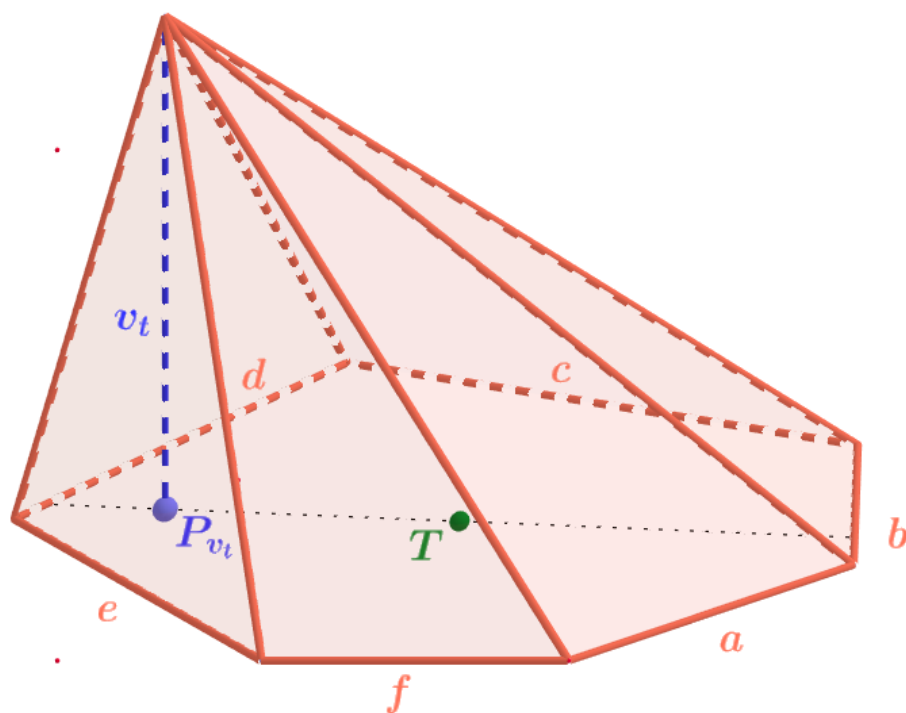
Obrázek 4.10: Zleva (horní řada): pravidelný trojboký jehlan, pravidelný čtyřboký jehlan, pravidelný pětiboký jehlan; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký jehlan a pravidelný sedmiboký jehlan

**Poznámka**

Jehlan, jehož podstavou je pravidelný  $n$ -úhelník a pata jeho tělesové výšky se nenachází v těžišti podstavy, není pravidelný, neboť stěny nejsou navzájem shodné trojúhelníky (obr. 4.11). Jehlan, jehož podstavou je nepravidelný  $n$ -úhelník, bez ohledu na umístění paty jeho tělesové výšky rovněž není pravidelný (obr. 4.12).

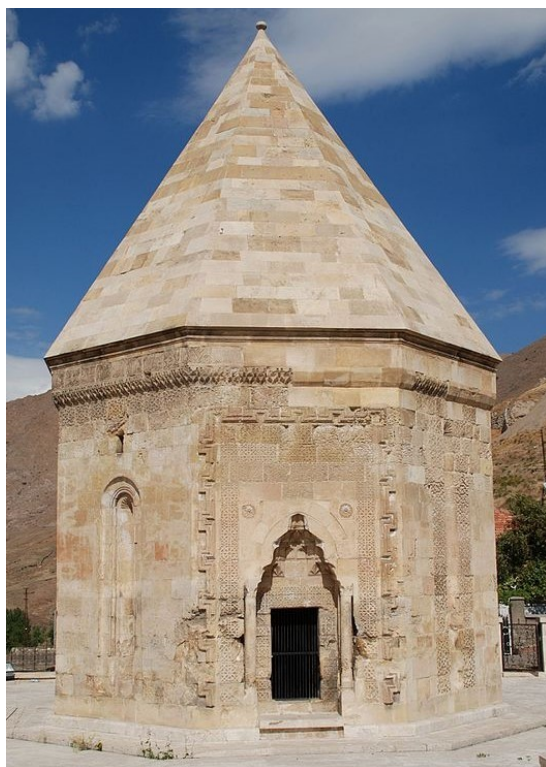


Obrázek 4.11: Nepravidelný jehlan s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku



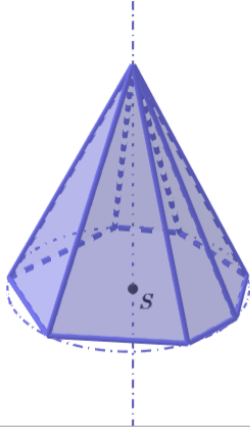
Obrázek 4.12: Nepravidelný jehlan s podstavou ve tvaru nepravidelného šestiúhelníku

S pravidelnými jehlany se můžeme setkat v architektuře. Například jde o střechu mauzolea v tureckém Divriği, která má tvar pravidelného šestibokého jehlanu (obr. 4.13).



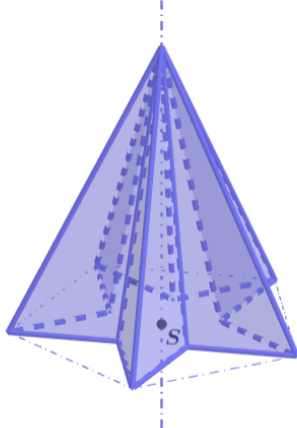
Obrázek 4.13: Střecha mauzolea ve tvaru pravidelného šestibokého jehlanu (Divriği) [18]

**Úloha 4.3.1** Následující obr. 4.14–4.17 obsahují úlohy na ověření znalostí z klasifikace jehlanů. V každé úloze je jedna a více možných správných tvrzení o příslušných jehlanech. Bod  $S$  je těžištěm podstavy. Jakmile vyplníte ve webové verzi všechny správné odpovědi, celé okénko možností zezelená.



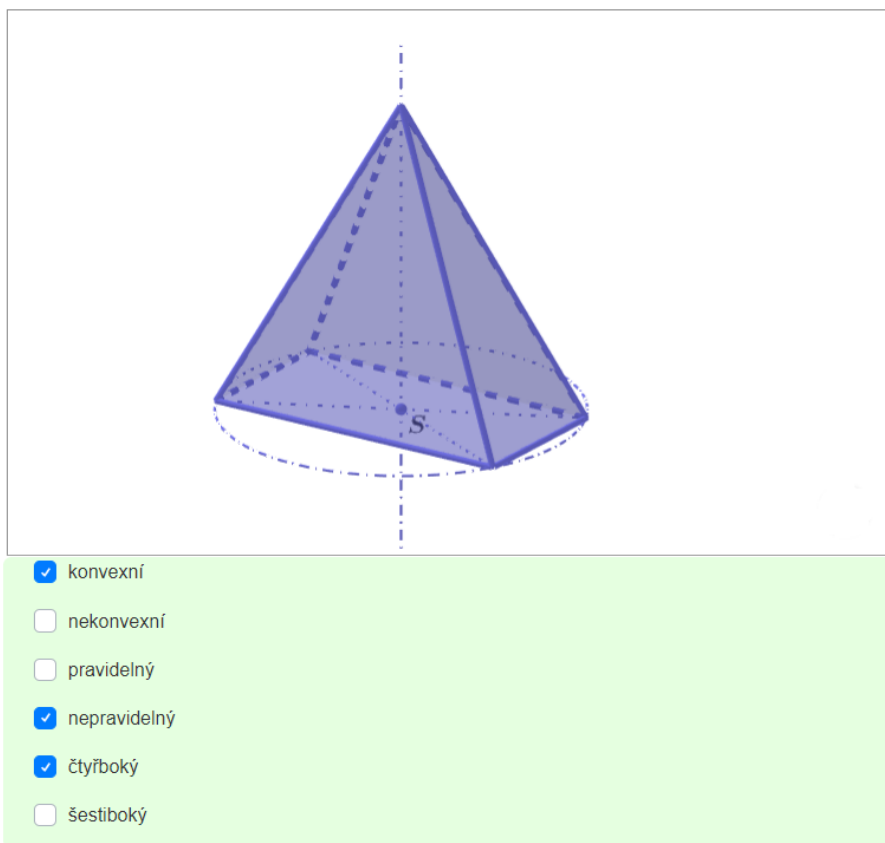
konvexní  
 nekonvexní  
 pravidelný  
 nepravidelný  
 osmiboký  
 sedmiboký

Obrázek 4.14: O jaký jehlan se jedná?

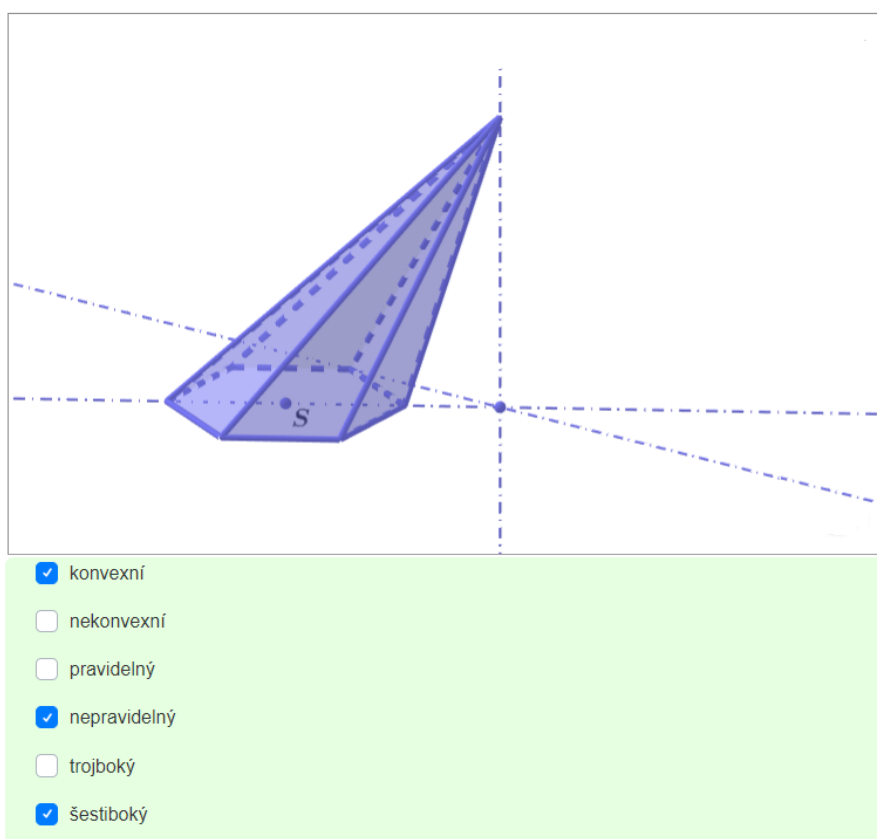


konvexní  
 nekonvexní  
 pravidelný  
 nepravidelný  
 pětiboký  
 desetiboký

Obrázek 4.15: O jaký jehlan se jedná?



Obrázek 4.16: O jaký jehlan se jedná?



Obrázek 4.17: O jaký jehlan se jedná?

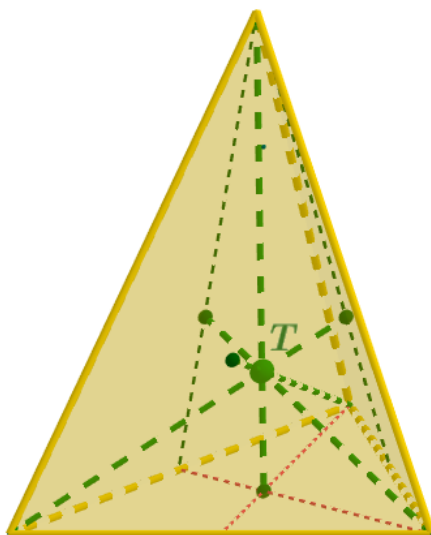


## 4.4 Další typy jehlanů

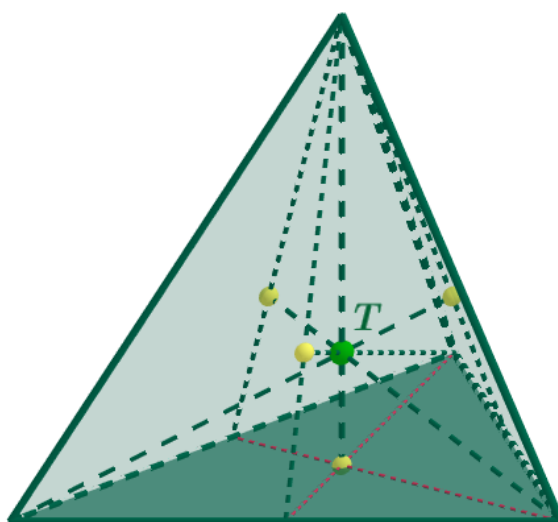
Ve školské matematice pracujeme s následujícími typy jehlanů, které si postupně představíme.

### 4.4.1 Čtyřstěn

Trojboký jehlan, což je jehlan s nejmenším počtem stěn čtyři, nazýváme **čtyřstěn** (obr. 4.18). Jsou-li jeho stěny tvořeny čtyřmi navzájem shodnými rovnostrannými trojúhelníky, jedná se o **pravidelný čtyřstěn** (pravidelný tetraedr, viz obr. 4.19, který řadíme mezi Platónská tělesa). Za **těžnici** čtyřstěnu je pokládána spojnice libovolného vrcholu čtyřstěnu s těžištěm protější stěny. **Těžiště čtyřstěnu** je bod, ve kterém se všechny čtyři těžnice čtyřstěnu protínají. Vzdálenost těžiště od vrcholu se rovná třem čtvrtinám délky příslušné těžnice.



Obrázek 4.18: Čtyřstěn a jeho těžiště



Obrázek 4.19: Pravidelný čtyřstěn a jeho těžiště

Během 2. světové války vznikly železobetonové protitankové zátarasy tzv. „dračí zuby“ ve tvaru pravidelného čtyřřstěnu (obr. 4.20–4.21). Ty byly používány k zamezení průjezdu tanků. Z praktického hlediska bylo velmi výhodné využít právě tvar pravidelného čtyřřstěnu pro instalaci zátaras, jelikož ať dopadla na jakoukoli stěnu, pozice zábrany zůstala vždy stejná. Dnes tyto zátarasy nacházejí využití ke stabilizaci dna pod jezem nebo k dočasné uzavírce cesty.



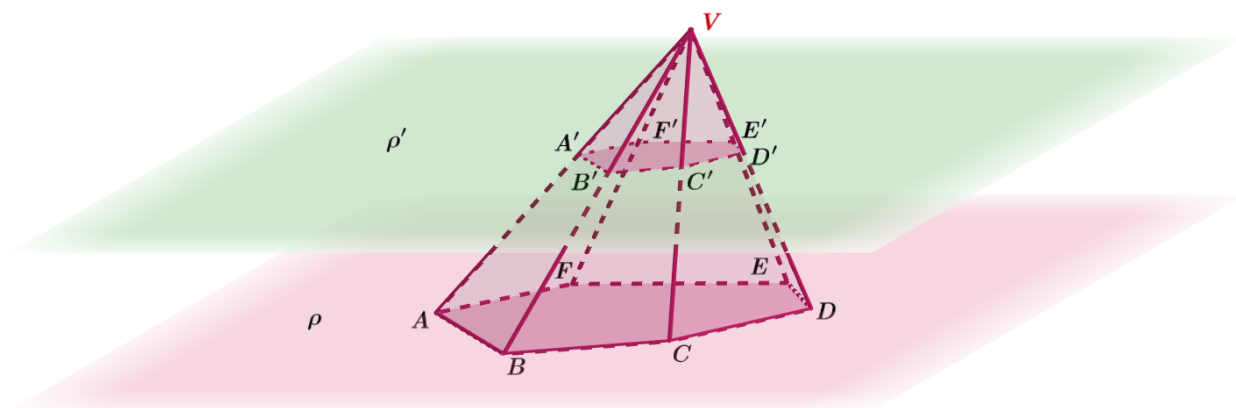
Obrázek 4.20: Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřřstěnu (SLO, Pivka) [19]



Obrázek 4.21: Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřřstěnu (CZ, Nové Údolí)

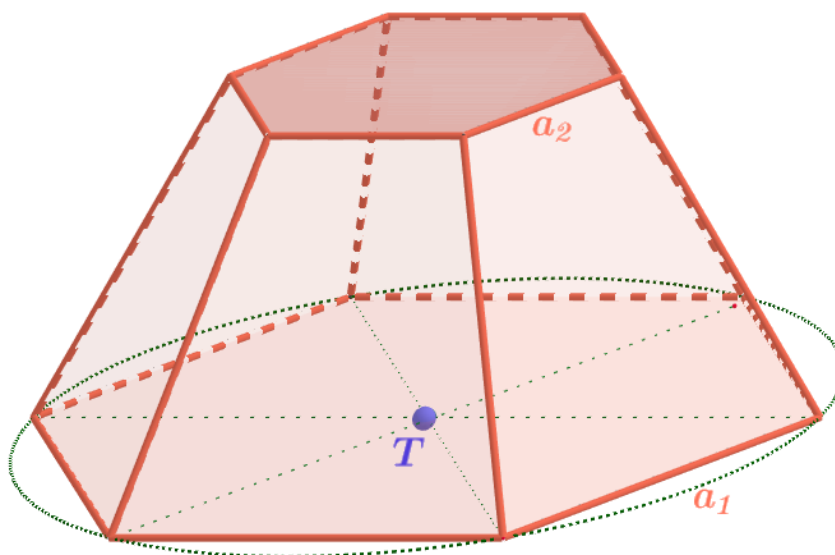
### 4.4.2 Komolý jehlan

Jehlany narozdíl od hranolů jsou tělesa mající hlavní vrchol. Pokud jehlan seřízeme rovinou rovnoběžnou s podstavou, vznikají dvě tělesa. Jedno těleso je opět jehlan s hlavním vrcholem  $V$ , jeho tělesová výška je menší než výška původního jehlanu. Druhé těleso označujeme jako **komolý jehlan**, který má dvě podstavy ležící v rovnoběžných rovinách (obr. 4.22).



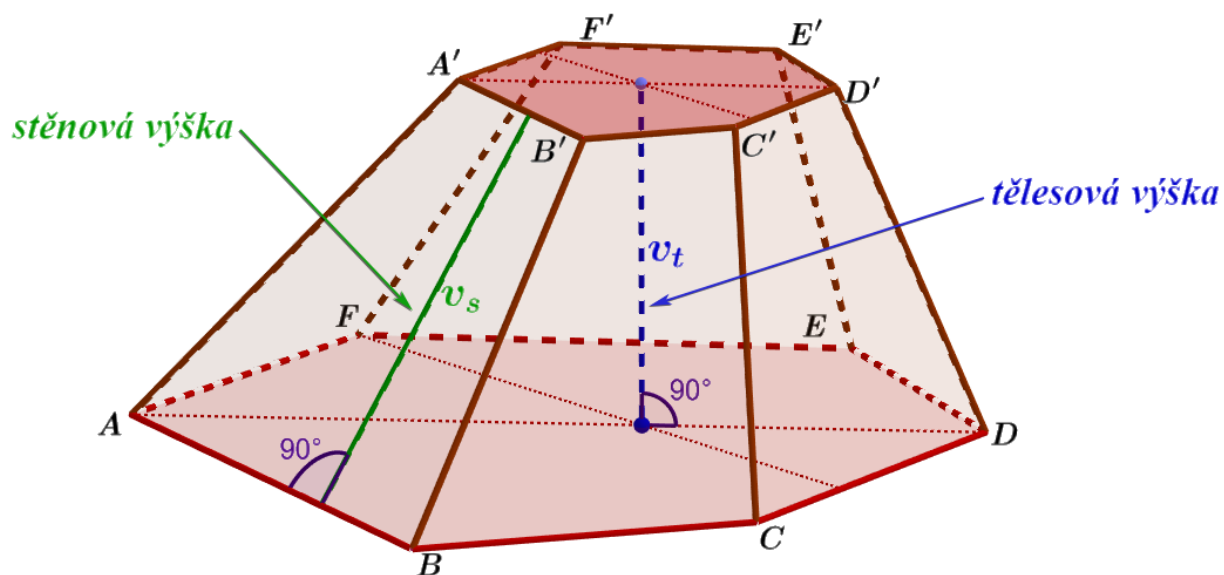
Obrázek 4.22: Vznik komolého jehlanu

Pokud jsou podstavami komolého jehlanu navzájem podobné pravidelné  $n$ -úhelníky a boční stěny jsou tvořeny shodnými rovnoramennými lichoběžníky, pak se jedná o **pravidelný komolý jehlan** (obr. 4.23).



Obrázek 4.23: Pravidelný komolý šestiboký jehlan

Podstavy komolého jehlanu jsou dva podobné mnohoúhelníky a boční stěny jsou lichoběžníky. Tělesová výška neboli **výška komolého jehlanu** je rovna vzdálenosti rovin jeho podstav a stěnová výška je vzdálenost podstavních hran ležících ve stejné boční stěně (obr. 4.24).



Obrázek 4.24: Stěny a výšky komolého šestibokého jehlanu

V Estonsku nacházíme dřevěné megaphony k poslouchání zvuků lesa. V nejširším místě měří tři metry a byly vytvořeny studenty uměleckoprůmyslové školy ve tvaru pláště devítibokého komolého jehlanu (obr. 4.25).



Obrázek 4.25: Lesní megaphony ve tvaru devítibokého komolého jehlanu (EST, Võru) [20]

## 4.5 Anti-modely jehlanů

Předtím, než přejdeme k zavedení vzorců pro výpočet objemů a povrchů jehlanů, si ověříme pochopení předchozích pojmů. Uvedeme si tzv. anti-modely jehlanů.

Anti-modelem jehlanu zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice jehlan připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o jehlan nejedná. Prvním příkladem je těleso nazývané v architektuře **dvojjehlan** vyobrazené na obr. 4.26. Řadí se mezi mnohostěny a vzniká sjednocením dvou jehlanů se shodnými podstavami. Čtyřboký dvojjehlan označujeme jako osmistěn. Pravidelný osmistěn řadíme mezi Platónská tělesa.



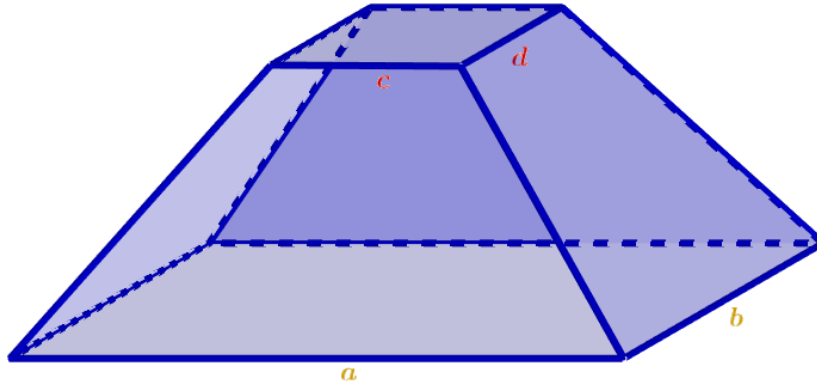
Obrázek 4.26: Stojan na květinu ve tvaru čtyřbokého dvojjehlanu (osmistěnu)

Jako druhý příklad anti-modelu jehlanu si uvedeme těleso zvané **trapezoedr**. Je ohraničen sudým počtem stěn majících tvar čtyřúhelníků – deltoidů. Na obr. 4.27 jsou vyobrazeny desetiboké hrací kostky ze hry Dungeons & Dragons, jež mají tvar pětibokého trapezoedru.



Obrázek 4.27: Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pětibokého trapezoedru [21]

Třetím příkladem anti-modelu jehlanu je těleso zvané **hranolec**. Jedná se o prismaoid vzniklý osekáním krychle. Podstavy tvaru obdélníku (ležící v rovnoběžných rovinách) si nejsou podobné, viz obr. 4.28, kde  $\frac{a}{c} \neq \frac{d}{b}$ . Pokud by byly podstavy hranolce podobné obdélníky (případně čtverce), jednalo by se o čtyřboký komolý jehlan.



Obrázek 4.28: Hranolec

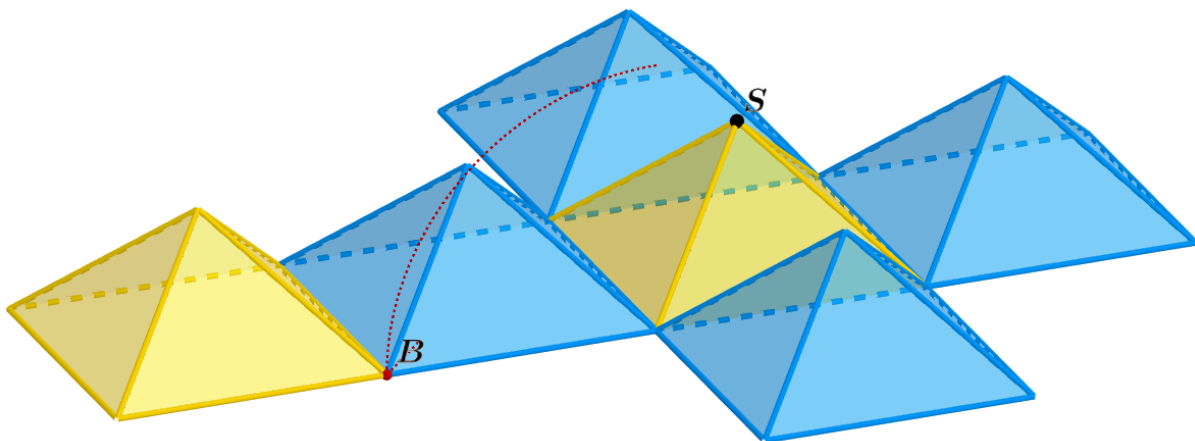
## 4.6 Objem jehlanu

V této kapitole si představíme, jak se počítá objem jehlanu. Pro odvození vzorce pro objem jehlanu vycházíme z objemu krychle o hraně délky  $a$ .

Tedy objem  $V$  krychle o hraně délky  $a$  je

$$V = a^3.$$

Vzorec pro objem jehlanu můžeme nastínit rozdělením krychle na šest shodných čtyřbokých jehlanů (obr. 4.29). Jelikož podstava každého ze šesti čtyřbokých jehlanů je zároveň jednou stěnou krychle, bude se jednat o pravidelné čtyřboké jehlany. Mají jediný společný bod – hlavní vrchol, který je umístěný ve středu neboli těžišti krychle (bod  $S$ ), tedy jejich výška je  $\frac{a}{2}$ .



Obrázek 4.29: Krychle rozdělená na šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů

Krychli lze tedy složit z šesti shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů o podstavě hraně  $a$ , tělesové výšce  $\frac{a}{2}$ . Můžeme tedy vyjádřit objem  $V_j$  jednoho jehlanu pomocí objemu  $V_k$  krychle o hraně  $a$ , tedy

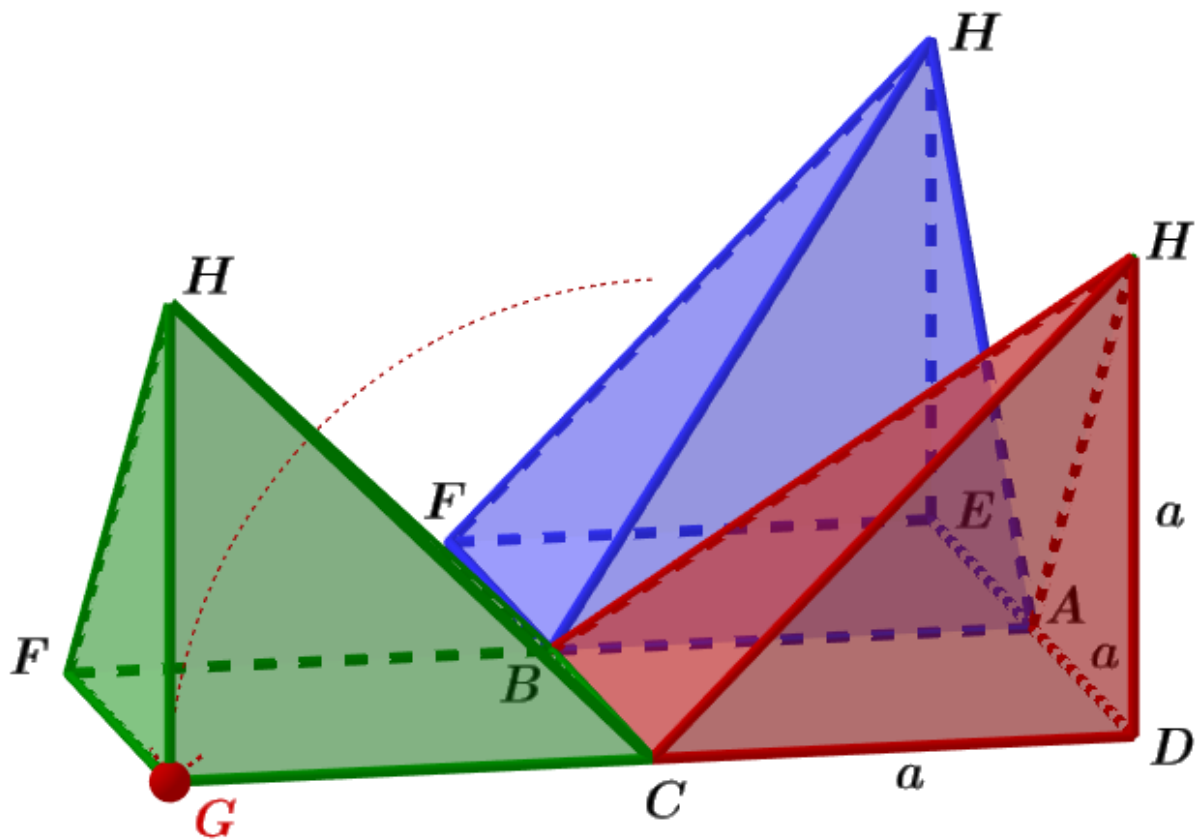
$$V_j = \frac{V_k}{6} = \frac{a^3}{6}.$$

Pro objem  $V_j$  dílčího pravidelného jehlanu, jehož podstava je čtverec o straně  $a$  ( $S_p = a^2$ ) a jehož výška  $v$  je  $\frac{a}{2}$ , platí

$$V_j = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} S_p v.$$

### Odvození vzorce pro objem $n$ -bokého jehlanu

Pomocí krychle si také odvodíme objem trojbokého jehlanu. Nejprve si ještě ukážeme, že objem čtyřbokého jehlanu, který není pravidelný, lze odvodit obdobně jako pro pravidelný čtyřboký jehlan. Krychli  $ABCDEFGH$  rozdělíme na tři shodné nepronikající se jehlany  $CDABH$ ,  $GCBFH$  a  $BAEFH$  se čtvercovou podstavou o straně  $a$  a tělesovou výškou rovněž délky  $a$  (obr. 4.30). Podle první vlastnosti objemu se jejich objemy rovnají a podle druhé vlastnosti objemu platí, že objem krychle je součtem objemů těchto tří čtyřbokých jehlanů. Tedy objem  $V$  tohoto čtyřbokého jehlanu se čtvercovou podstavou je roven třetině objemu původní krychle.



Obrázek 4.30: Krychle rozdělená na tři čtyřboké jehlany  $CDABH$ ,  $GCBFH$  a  $BAEFH$

Z předchozího tvrzení vyplývá, že pokud podstava je čtverec o straně  $a$  ( $S_p = a^2$ ) a tělesová výška je též délky  $a$ , tak pro objem uvedeného čtyřbokého jehlanu platí

$$V = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{1}{3}S_p v.$$

Nyní zvolíme kolmý trojboký hranol  $KLMNOP$  namísto krychle a pomocí něho odvodíme vzorec pro objem trojbokých jehlanů. Tento kolmý trojboký hranol  $\mathcal{H}$  rozdělíme na tři nepronikající se trojboké jehlany  $KLMN$ ,  $NOPL$  a  $LMPN$  (obr. 4.31). Víme podle druhé vlastnosti objemu, že objem celého kolmého trojbokého hranolu je roven součtu objemů tří trojbokých jehlanů:

$$V(\mathcal{H}) = V(KLMN) + V(NOPL) + V(LMPN).$$

Nyní budeme zjišťovat, zda tři nepronikající se trojboké jehlany  $KLMN$ ,  $NOPL$  a  $LMPN$  mají stejné objemy. Nejdříve dokážeme rovnost objemů trojbokých jehlanů  $KLMN$ ,  $NOPL$ . Objemy jehlanů  $KLMN$  a  $NOPL$  se rovnají, neboť jehlany jsou shodné, jelikož podstavami obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky  $KLM$  a  $NOP$  a jehlany mají zároveň shodné všechny boční stěny. Vycházíme z první vlastnosti objemu, která uvádí, že shodná tělesa mají sobě rovné objemy a platí

$$V(KLMN) = V(NOPL).$$

Dále potřebujeme dokázat rovnost objemů trojbokých jehlanů  $NOPL$  a  $LMPN$ . Trojboký jehlan  $NOPL$  s podstavou  $NOP$  a hlavním vrcholem v bodě  $L$  překlápíme na trojboký jehlan s podstavou  $LOP$  a hlavním vrcholem v bodě  $N$ .

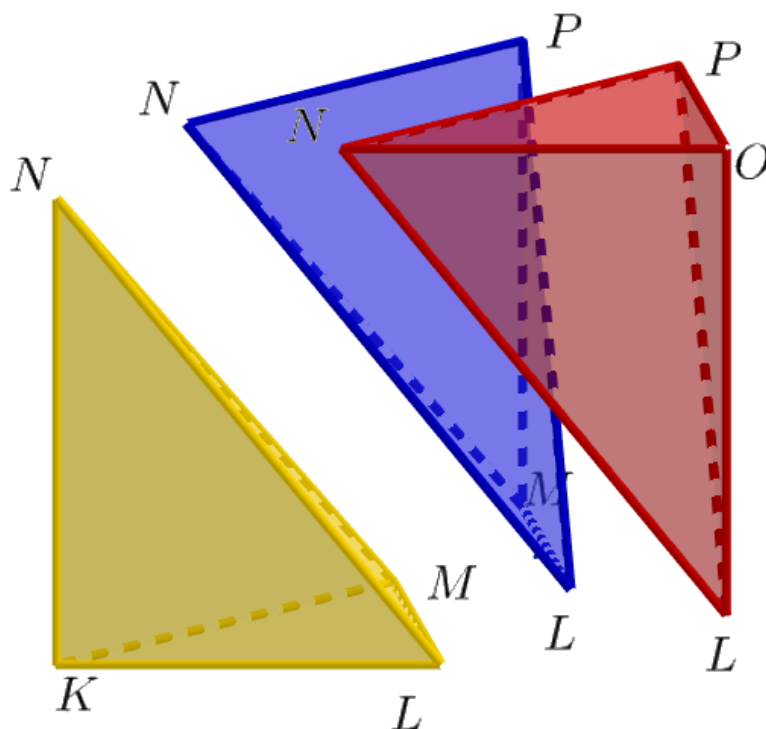
Objemy jehlanů  $LOPN$  a  $LMPN$  se rovnají, neboť platí Cavalieriho princip, jelikož podstavami obou jehlanů jsou shodné trojúhelníky  $LOP$  a  $LMP$  (protože rovnoběžník  $LMOP$  je rozdělený stěnovou úhlopříčkou  $LP$  na dva shodné trojúhelníky – podstavy  $LOP$  a  $LMP$ ); dále mají stejnou tělesovou výšku (protože tyto dva trojboké jehlany dohromady tvoří čtyřboký jehlan  $LMOPN$  s podstavou  $LMOP$  a hlavním vrcholem v bodě  $N$ ). Platí

$$V(LOPN) = V(LMPN).$$

Tím jsme dokázali, že tři trojboké jehlany  $KLMN$ ,  $NOPL$  a  $LMPN$  mají stejný objem. Jelikož se jejich objemy rovnají, tak pro trojboké jehlany platí

$$V = \frac{1}{3}V(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}S_p v.$$





Obrázek 4.31: Trojboký hranol  $\mathcal{H}$  rozdělený na tři trojboké jehlany

Pro určení objemu  $n$ -bokého jehlanu ( $n \in \mathbb{N}, n > 3$ ) využijeme Cavalieriho princip. Mějme dán trojboký nebo čtyřboký jehlan se čtvercovou podstavou a další  $n$ -boký tak, že podstavy daných jehlanů mají stejný obsah podstavy  $S_p$  a stejnou výšku  $v$ . Umístíme je do roviny  $\rho$ . Mnohoúhelníky vzniklé řezem jehlanů rovinou  $\sigma$ ,  $\sigma \parallel \rho$ , jsou stejnolehle s podstavami jehlanů, a tedy podobné. Středů stejnolehlostí jsou umístěny v hlavních vrcholech těchto jehlanů. Koeficient podobnosti je u těchto řezů stejný, platí

$$k = \frac{v_1}{v},$$

*Rozšiřující poznámka.* Stejnolehlost – Definice je převzata z [[10], s. 59].

#### Definice

**Stejnolehlost**  $H(S, \kappa)$  (neboli homotetie) určená bodem  $S$  a nenulovým reálným číslem  $\kappa$  je zobrazení v prostoru, ve kterém se zobrazí bod  $S$  na bod  $S' = S$  a každý bod  $X \neq S$  na bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ .

Pro  $\kappa > 0$  leží bod  $X'$  na polopřímce  $SX$ ;  
pro  $\kappa < 0$  leží bod  $X'$  na polopřímce opačné k polopřímce  $SX$ .

Bod  $S$  nazýváme **středem stejnolehlosti**, číslo  $\kappa$  nazýváme **koeficientem stejnolehlosti**.

Bod  $X'$  je obrazem bodu  $X$  ve stejnolehlosti se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$ ; zapisujeme takto:  $H(S, \kappa) : X \rightarrow X'$ .

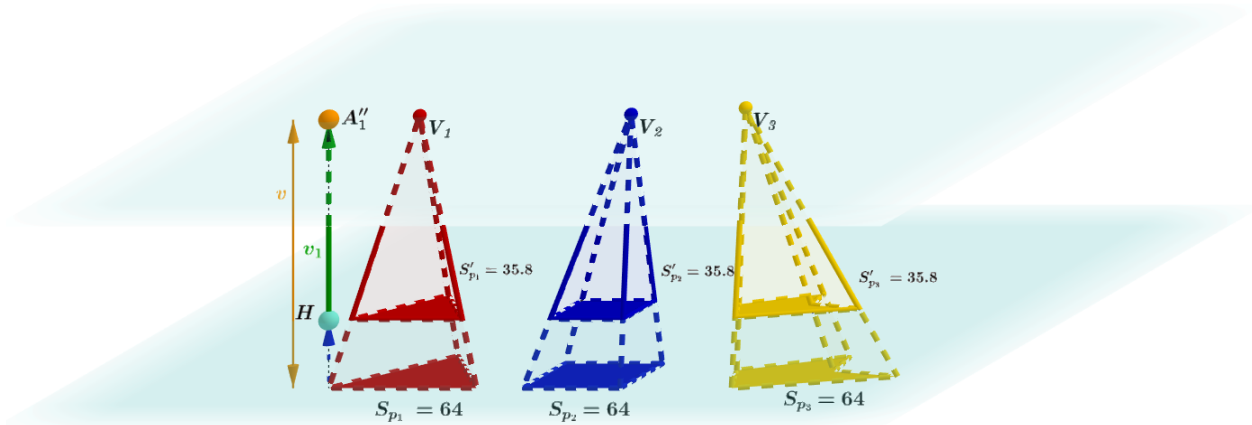
kde  $v$  je vzdálenost hlavních vrcholů jehlanů od roviny  $\rho$  jejich podstav a  $v_1$  je vzdálenost hlavních vrcholů jehlanů od roviny řezu  $\sigma$ . S využitím stejnolehlosti dostáváme vztah mezi obsahem řezu  $S$  a obsahem podstavy  $S_p$ :

$$S = k^2 S_p.$$

Díky rovnosti obsahů podstav a stejnému koeficientu podobnosti  $k$  u obou jehlanů platí i rovnost pro obsahy řezů. Z Cavalieriho principu vyplývá, že tyto jehlany mají stejný objem, tj. i pro  $n$ -boký jehlan platí

$$V = \frac{1}{3} S_p v.$$

Uvažujme konvexní pravidelný trojboký, konvexní nepravidelný čtyřboký a nekonvexní pěti-boký jehlan o stejné výšce, jejichž podstavy leží ve stejné rovině a mají stejný obsah (veličiny jsou uvedeny bez jednotek), viz obr. 4.32. Řezy těmito třemi jehlany vedené rovnoběžně s rovinou jejich podstav v libovolné výšce jsou vždy podobné s podstavou, protože rovina řezu je s ní rovnoběžná. Tudíž objemy těchto jehlanů jsou si rovny.



Obrázek 4.32: Využití Cavalieriho principu a stejnolehlosti pro tři jehlany se stejnými obsahy podstav  $S_p$  a se stejnými výškami  $v$

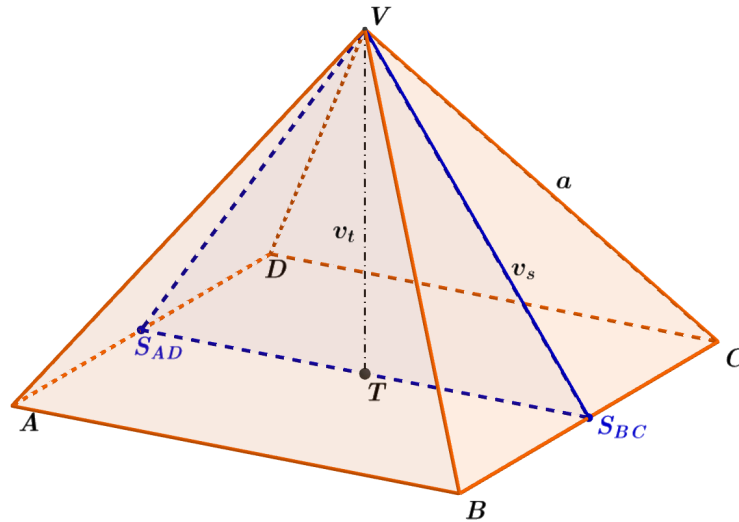
Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

### Věta

**Objem  $V$**  libovolného jehlanu s tělesovou výškou  $v$  a obsahem podstavy  $S_p$  je dán vztahem

$$V = \frac{1}{3} S_p v.$$

**Příklad 4.6.1** Vypočítejte objem  $V_j$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$ . Jeho boční stěny jsou tvořené shodnými rovnostrannými trojúhelníky o straně délky  $a = 5$  cm, bod  $T$  je středem jeho podstavy. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



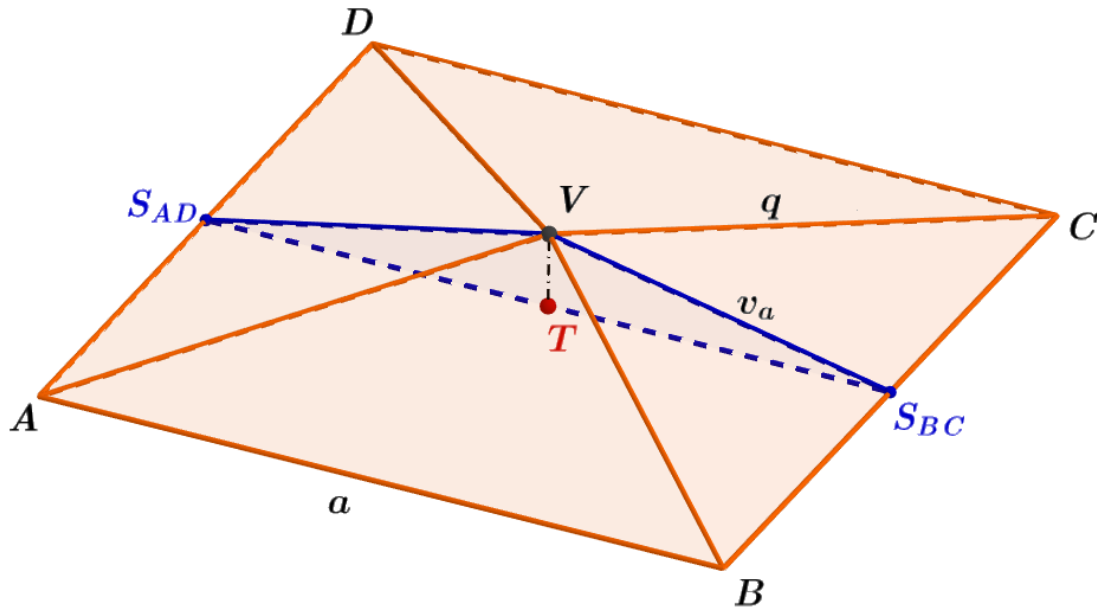
Obrázek 4.33: Ilustrace Příkladu 4.6.1

### Řešení

- Pro výpočet objemu  $V_j$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v_t$ .
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky, tak podstavou jehlanu je čtverec  $ABCD$  o straně  $a = 5$  cm (obr. 4.33).
- Obsah čtvercové podstavy  $S_p = a^2 = 25$  cm<sup>2</sup>.
- Tělesovou výšku  $v_t$  určíme například pomocí rovnoramenného  $\triangle S_{BC}S_{AD}V$ . Vyjádříme délku jeho stran;  $|S_{BC}S_{AD}| = a$ ;  $|TS_{BC}| = \frac{1}{2}a$ .
- Pro délku stěnové výšky  $v_s$  ( $v_s = |S_{BC}V|$ ) každé boční stěny platí  $v_s = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tuto hodnotu vypočítáme Pýthagorovou větou například z rovnostranného  $\triangle BCV$ , který rozdělíme pomocí  $v_s$  na dva pravoúhlé trojúhelníky.
- Z pravoúhlého  $\triangle VTS_{BC}$  pomocí Pýthagorovy věty vyjádříme délku  $v_t$ ;  

$$v_t = \sqrt{\left(\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$
 cm.
- Pro objem jehlanu platí:  $V_j = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}$  cm<sup>3</sup> =  $\frac{5^3\sqrt{2}}{6}$  cm<sup>3</sup>  $\doteq 29,5$  cm<sup>3</sup>.
- Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  je po zaokrouhlení 29,5 cm<sup>3</sup>.

**Příklad 4.6.2** Vypočítejte objem  $V_j$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$ . Jeho boční stěny jsou tvořené shodnými rovnoramennými trojúhelníky se základnami délky  $a = 4\sqrt{6}$  cm a rameny délky  $q = 7$  cm.

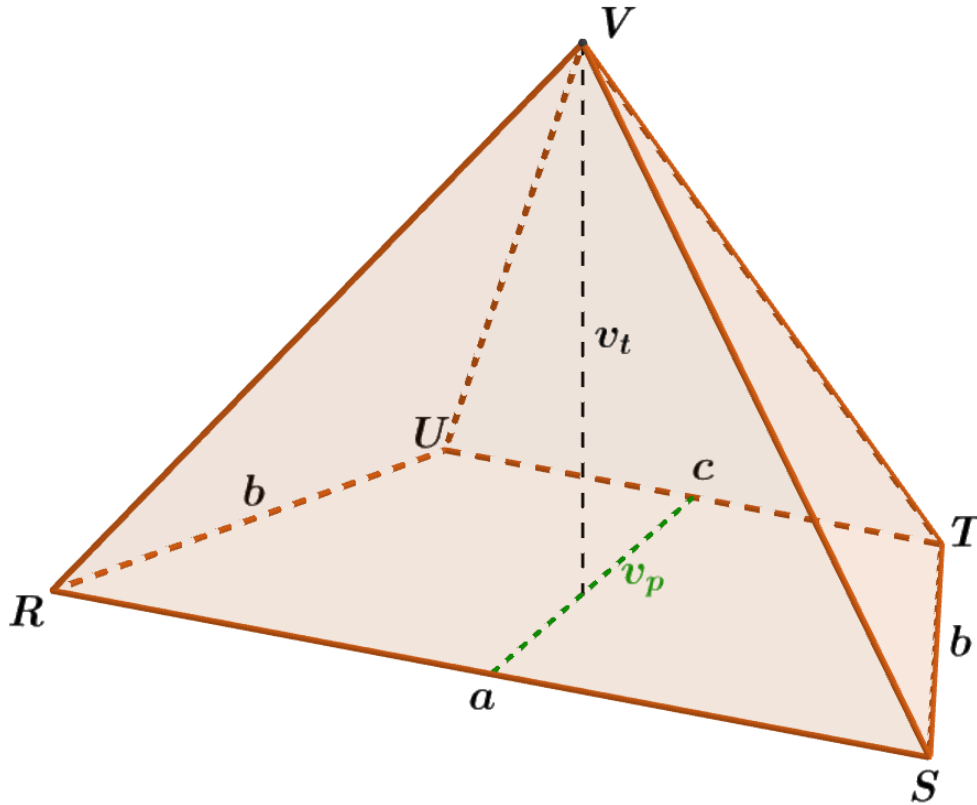


Obrázek 4.34: Ilustrace Příkladu 4.6.2

### Řešení

- Pro výpočet objemu  $V_j$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a výšku  $v_t$ .
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu tvořeny rovnoramennými trojúhelníky se základnou délky  $a = 4\sqrt{6}$  cm a rameny délky  $q = 7$  cm, tak podstava jehlanu  $ABCD$  je čtverec o straně délky  $a$  (obr. 4.34).
- $S_p = a^2 = (4\sqrt{6})^2 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$ .
- Tělesová výška  $v_t$  jehlanu je zároveň vyškou k základně rovnoramenného  $\triangle S_{AD}S_{BC}V$ . Základna tohoto trojúhelníku je rovna  $a = |S_{AD}S_{BC}| = 4\sqrt{6}$  cm.
- Ramena rovnoramenného  $\triangle S_{AD}S_{BC}V$  vypočítáme z pravoúhlého  $\triangle S_{BC}CV$ , kde pomocí Pýthagorovy věty určíme  $v_a$ ;  
 $|S_{AD}V| = |VS_{BC}| = v_a = \sqrt{q^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{7^2 - (\frac{4\sqrt{6}}{2})^2} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ .
- Délku tělesové výšky  $v_t$  vypočítáme z pravoúhlého  $\triangle VTS_{BC}$ , kde pomocí Pýthagorovy věty určíme  $v_t$ ;  
 $|VT| = v_t = \sqrt{(v_a)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{5^2 - (\frac{4\sqrt{6}}{2})^2} \text{ cm} = \sqrt{1} \text{ cm} = 1 \text{ cm}$ .
- Pro objem jehlanu platí:  $V_j = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 96 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 32 \text{ cm}^3$ .
- Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  je  $32 \text{ cm}^3$ .

**Příklad 4.6.3** Je dán čtyřboký jehlan  $RSTUV$ , jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky  $a = 8$  dm,  $c = 4,5$  dm a dvěma rameny délky  $b = 4,3$  dm. Pro výšku  $v_p$  rovnoramenného lichoběžníku platí  $v_p = 4$  dm. Výška jehlanu měří 4,97 dm. Vypočítejte objem  $V_j$  tohoto jehlanu. Výsledek uveďte na dvě desetinná místa.



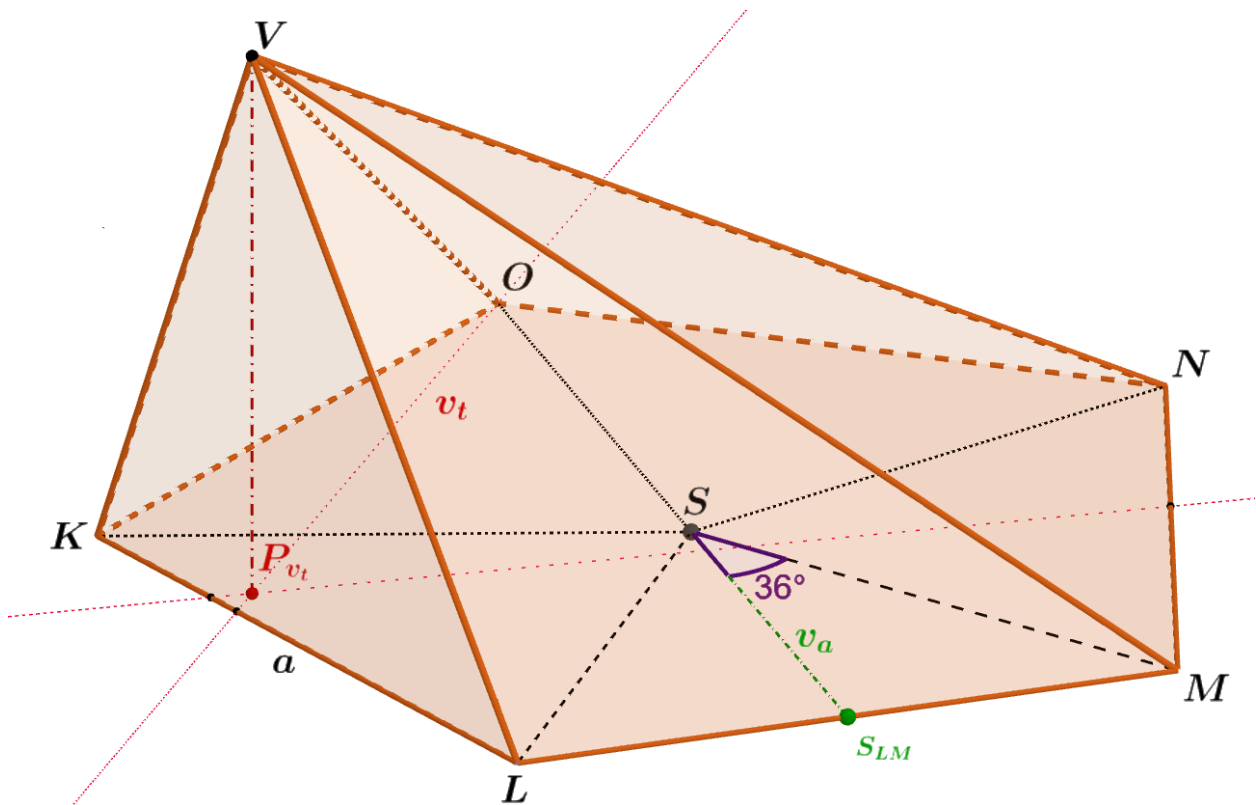
Obrázek 4.35: Ilustrace Příkladu 4.6.3

### Řešení

- Pro výpočet objemu  $V_j$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v_t$ .
- Pro obsah podstavy  $S_p$  ve tvaru lichoběžníku platí  

$$S_p = \frac{(a + c) \cdot v_p}{2} = \frac{(8 + 4,5) \cdot 4}{2} \text{ dm}^2 = 25 \text{ dm}^2.$$
- Výška jehlanu  $v_t = 4,97$  dm (obr. 4.35).
- Pro objem jehlanu platí:  $V_j = \frac{1}{3} S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 4,97 \text{ dm}^3 \doteq 41,42 \text{ dm}^3.$
- Objem čtyřbokého jehlanu  $RSTUV$  je po zaokrouhlení  $41,42 \text{ dm}^3.$

**Příklad 4.6.4** Je dán pětiboký jehlan  $KLMNOV$ , jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník o straně  $a = 10$  m. Výška  $v_t$  jehlanu měří 8,42 m. Určete jeho objem  $V_j$ . Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

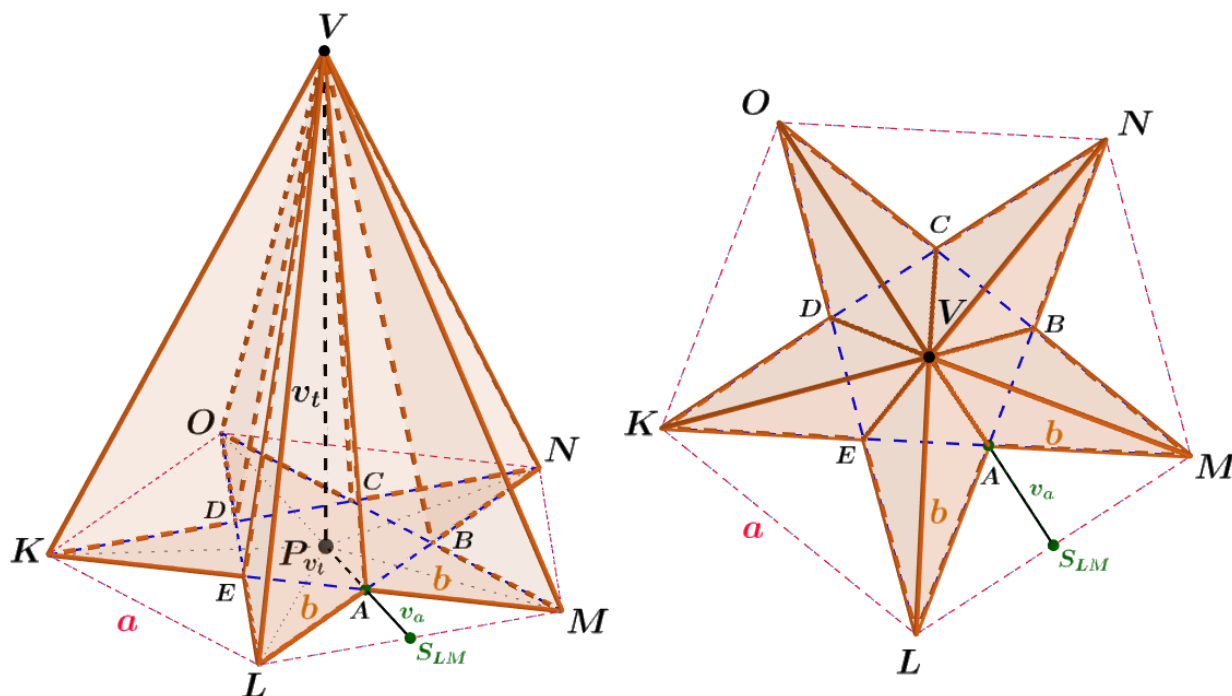


Obrázek 4.36: Ilustrace Příkladu 4.6.4

### Řešení

- Pro výpočet objemu  $V_j$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v_t = 8,42$  m.
- Podstavou daného jehlanu je pravidelný pětiúhelník o straně  $a = 10$  m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 4.36);  
 $S_{\triangle LMS} = \frac{av_a}{2}$ .  
Z  $\triangle SS_{LM}M$  vyjádříme  $v_a$ ;  $v_a = \cot 36^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 5 \text{ m} \doteq 6,882$  m.  
Tedy  $S_{\triangle LMS} = \frac{10 \cdot 6,882}{2} \text{ m}^2 \doteq 34,410 \text{ m}^2$ ;  $S_p = 5 \cdot S_{\triangle LMS} = 5 \cdot 34,410 \text{ m}^2 = 172,050 \text{ m}^2$ .
- Výška jehlanu  $v_t = 8,42$  m.
- Pro objem jehlanu platí:  $V_j = \frac{1}{3} S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 172,050 \cdot 8,42 \text{ m}^3 \doteq 482,89 \text{ m}^3$ .
- Objem pětibokého jehlanu  $KLMNOV$  je po zaokrouhlení  $482,89 \text{ m}^3$ .

**Příklad 4.6.5** Je dán nekonvexní desetiboký jehlan  $KELAMBNCODV$ . Podstavou tohoto jehlanu je pentagram, tj. pěticípý nekonvexní hvězdicovitý mnohoúhelník se stranami stejné délky. Pentagram vznikl z pravidelného konvexního pětiúhelníku o straně  $a = 5$  m. Výška  $v_t$  jehlanu je 8,55 m. Určete jeho objem  $V_j$ . Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.37: Ilustrace Příkladu 4.6.5

## Řešení

- Pro výpočet objemu  $V_j$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v_t = 8,55$  m.
- Obsah podstavy  $S_p$  ve tvaru pentagramu (obr. 4.37) vypočítáme tak, že od obsahu  $S_1$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$  odečteme pětinasobek obsahu rovnoramenného  $\triangle LMA$  o základně  $a = 5$  m a ramenech  $b$ ;  
 $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA}$ . Je třeba vypočítat  $S_{\triangle LMA}$ .
- Vyjádříme  $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2}$ . Je třeba vypočítat  $v_a$ .
- Z pravoúhlého  $\triangle S_{LM}MA$  pomocí Pýthagorovy věty vyjádříme délku  $v_a$ ;  
 $v_a = \sqrt{|AM|^2 - |S_{LM}M|^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}$ . Je třeba vypočítat  $|AM| = b$ .
- Přepona  $|AM| = b$  pravoúhlého  $\triangle S_{LM}MA$  je zároveň ramenem rovnoramenného  $\triangle LMA$ ; a také část úhlopříčky  $KM$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$ . Úhlopříčky konvexního pravidelného pětiúhelníku jsou všechny stejně dlouhé a každé dvě se vzájemně dělí v poměru  $\varphi$  nazývaném zlatý řez; číslo  $\varphi$  je zlatým číslem;  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . V tomto případě se úhlopříčky  $KM, NL$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$  protínají v bodě  $A$ . Tedy pomocí zlatého řezu vyjádříme poměr mezi

úsečkami:  $\frac{|KM|}{|KA|} = \frac{|KA|}{|AM|} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Vyjádříme délku úsečky  $|KA| = a = 5$  m, jelikož  $\triangle KAN \sim \triangle KNO$  a tvoří kosočtverec  $KANO$ ;  $|KA| = a$ . Ze vztahu  $\frac{|KA|}{|AM|} = \varphi$  vyjádříme  $|AM| = b$ ;  $|AM| = \frac{|KA|}{\varphi}$ , tedy  $|AM| = \frac{a}{\varphi} = \frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ m} \doteq 3,090 \text{ m}$ .

- Vypočítáme  $v_a$ ;  $v_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{3,090^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \text{ m} \doteq 1,816 \text{ m}$ .
- Obsah  $\triangle LMA$  je  $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2} = \frac{5 \cdot 1,816}{2} \text{ m} = 4,540 \text{ m}^2$ .
- Vypočítáme obsah  $S_1$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$  o straně  $a = 5$  m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků;  $S_{\triangle LMP_{vt}} = \frac{a \cdot |P_{vt}S_{LM}|}{2}$ . Z  $\triangle P_{vt}S_{LM}M$  vyjádříme výšku  $|P_{vt}S_{LM}|$ ;

$$|P_{vt}S_{LM}| = \cot 36^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 2,5 \text{ m} \doteq 3,441 \text{ m}.$$

$$\text{Tedy } S_{\triangle LMP_{vt}} = \frac{5 \cdot 3,441}{2} \text{ m}^2 \doteq 8,606 \text{ m}^2.$$

$$\text{Tedy } S_1 = 5 \cdot S_{\triangle LMP_{vt}} = 5 \cdot 8,606 \text{ m}^2 = 43,030 \text{ m}^2.$$

- Pro obsah podstavy platí  $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA} = 43,030 \text{ m}^2 - 5 \cdot 4,540 \text{ m}^2 = 20,330 \text{ m}^2$ .
- Pro objem jehlanu platí  $V_j = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot 20,330 \cdot 8,55 \text{ m}^3 \doteq 57,94 \text{ m}^3$ .
- Objem daného nekonvexního desetibokého jehlanu je po zaokrouhlení  $57,94 \text{ dm}^3$ .



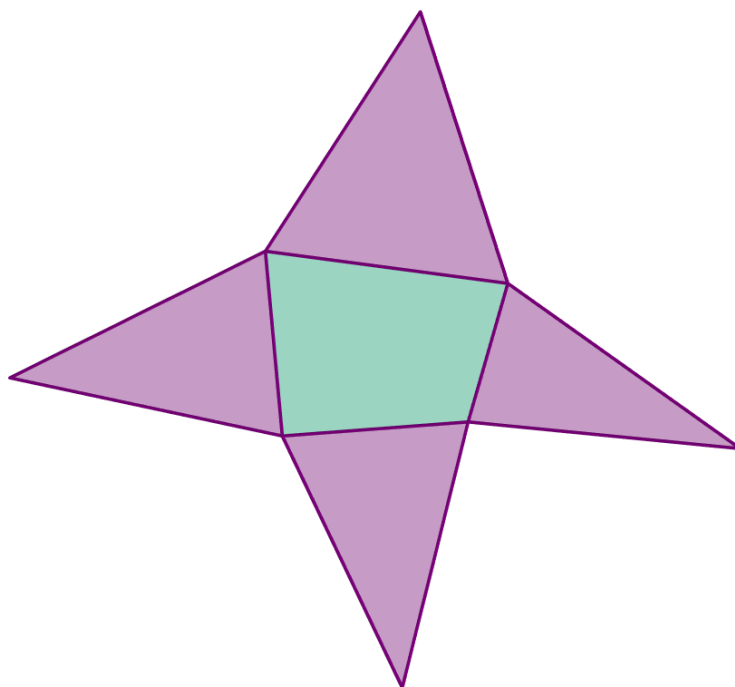
## 4.7 Povrch jehlanu

Tak jako u povrchu tělesa je i povrch jehlanu roven součtu obsahů všech jeho stěn, tedy obsahu jeho sítě (obr. 4.38). Sít jehlanu je tvořena jednou podstavou a jeho pláštěm (obr. 4.39).

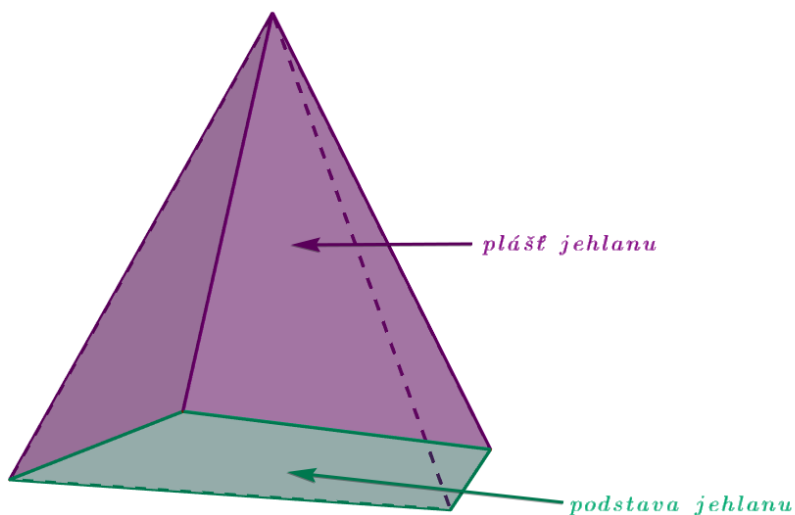
### Věta

**Povrch  $S$  jehlanu** je součtem obsahu jeho podstavy  $S_p$  a obsahu jeho bočních stěn, tj. pláště  $S_{pl}$ ; tedy platí

$$S = S_p + S_{pl}.$$



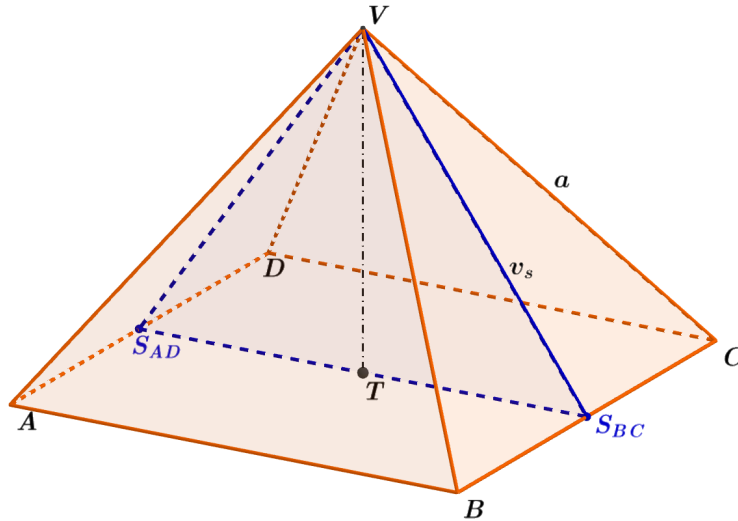
Obrázek 4.38: Sít čtyřbokého jehlanu



Obrázek 4.39: Plášť a podstava čtyřbokého jehlanu zobrazeného v levém pohledu

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.1.

**Příklad 4.7.1** Vypočítejte povrch  $S$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$ . Jeho boční stěny jsou tvořené rovnostrannými trojúhelníky o straně délky  $a = 5$  cm, bod  $T$  je středem jeho podstavy. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



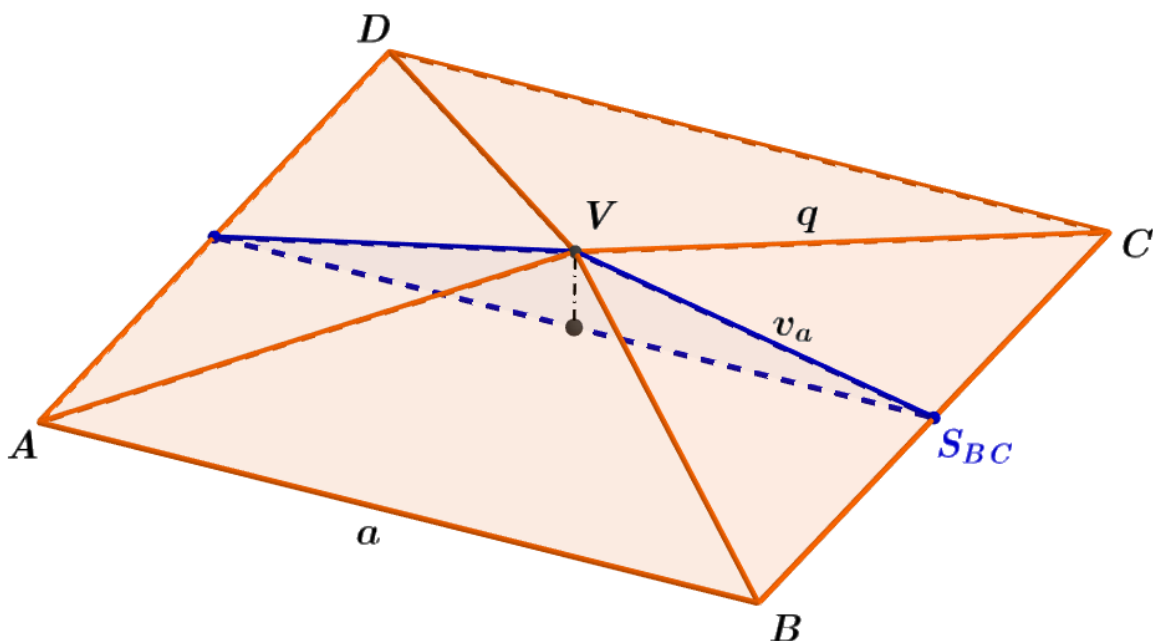
Obrázek 4.40: Ilustrace Příkladu 4.7.1

### Řešení

- Pro výpočet povrchu jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu navzájem shodné rovnostranné trojúhelníky, tak podstava jehlanu  $ABCD$  je čtverec se stranou délky  $a = 5$  cm (obr. 4.40).
- $S_p = a^2 = 25$  cm<sup>2</sup>.
- Plášť jehlanu je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými  $\triangle ABV$ ,  $\triangle BCV$ ,  $\triangle CDV$  a  $\triangle DAV$ . Určíme obsah  $\triangle BCV$ .
- Pro obsah tohoto trojúhelníku platí  $S = \frac{av_a}{2}$ , kde  $a$  je délka základny a  $v_a$  je výška k základně. Tedy  $a = 5$  cm;  $v_a = v_s$ , kde  $v_s$  je stěnová výška jehlanu. Tu jsme již určili v příkladu 3.6.1, tj.  $v_s = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- Obsah  $\triangle BCV$  je  $S_{\triangle BCV} = \frac{av_a}{2} = \frac{av_s}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$  cm<sup>2</sup> =  $25\frac{\sqrt{3}}{4}$  cm<sup>2</sup>.
- Pro obsah pláště jehlanu platí  $S_{pl} = 4S_{\triangle BCV} = 25\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>  $\doteq 43,30$  cm<sup>2</sup>.
- Pro povrch  $S$  jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl} = 25$  cm<sup>2</sup> +  $43,30$  cm<sup>2</sup>  $\doteq 68,3$  cm<sup>2</sup>.
- Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  je po zaokrouhlení  $68,3$  cm<sup>2</sup>.

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.2.

**Příklad 4.7.2** Vypočítejte povrch  $S$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$ . Jeho boční stěny jsou tvořené shodnými rovnoramennými trojúhelníky se základnami délky  $a = 4\sqrt{6}$  cm a rameny délky  $q = 7$  cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



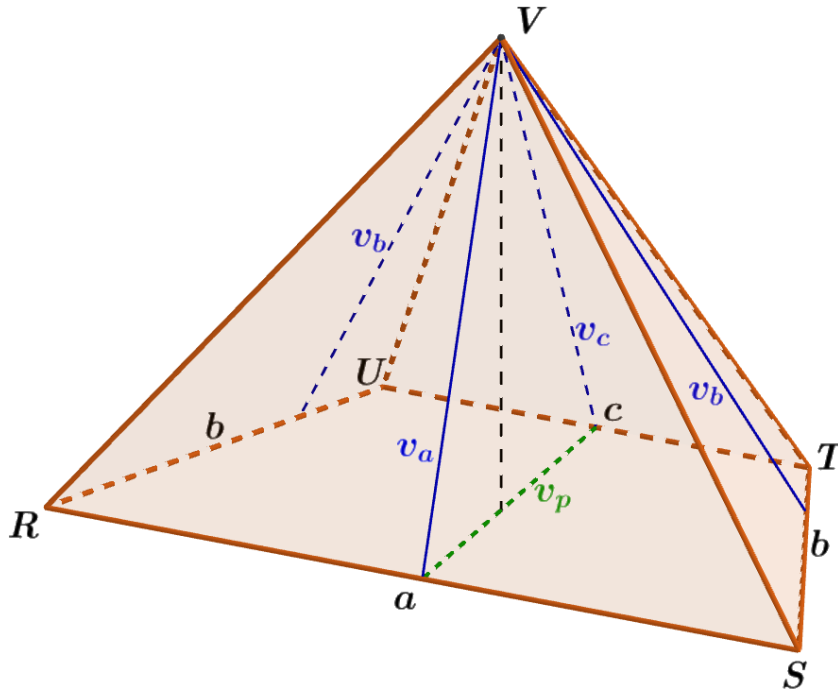
Obrázek 4.41: Ilustrace Příkladu 4.7.2

### Řešení

- Pro výpočet povrchu jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Jsou-li boční stěny pravidelného čtyřbokého jehlanu tvořeny rovnoramennými trojúhelníky se základnou délky  $a = 4\sqrt{6}$  cm a rameny délky  $q = 7$  cm, tak podstava jehlanu  $ABCD$  je čtverec o straně délky  $a$ .
- $S_p = a^2 = (4\sqrt{6})^2 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$ .
- Plášť jehlanu je tvořen čtyřmi shodnými rovnoramennými  $\triangle ABV$ ,  $\triangle BCV$ ,  $\triangle CDV$  a  $\triangle DAV$ . Určíme obsah  $\triangle BCV$ .
- Pro obsah  $S$  trojúhelníku platí  $S = \frac{av_a}{2}$ , kde  $a$  je délka základny a  $v_a$  je výška k základně. Tedy  $a = 4\sqrt{6}$  cm.  
Z pravouhlého  $\triangle S_{BCV}CV$  pomocí Pýthagorovy věty určíme  $v_a$ ;  
 $v_a = \sqrt{q^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{4\sqrt{6}}{2}\right)^2} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ .
- Obsah boční stěny  $BCV$  je dán vztahem  $S_{\triangle BCV} = \frac{av_a}{2} = 10\sqrt{6} \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah pláště jehlanu platí  $S_{pl} = 4S_{\triangle BCV} = 40\sqrt{6} \text{ cm}^2 \doteq 97,979 \text{ cm}^2$ .
- Pro povrch jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl} = 96 \text{ cm}^2 + 97,979 \text{ cm}^2 \doteq 193,98 \text{ cm}^2$ .
- Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  je po zaokrouhlení  $193,98 \text{ cm}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.3.

**Příklad 4.7.3** Je dán čtyřboký jehlan  $RSTUV$ , jehož podstavou je rovnoramenný lichoběžník o základnách délky  $a = 8$  dm,  $c = 4,5$  dm a dvěma rameny délky  $b = 4,3$  dm. Pro výšku  $v_p$  lichoběžníku platí  $v_p = 4$  dm. Pro délky stěnových výšek platí  $v_a = 5,3$  dm,  $v_b = 5,8$  dm,  $v_c = 5,4$  dm. Vypočítejte povrch  $S$  tohoto jehlanu. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



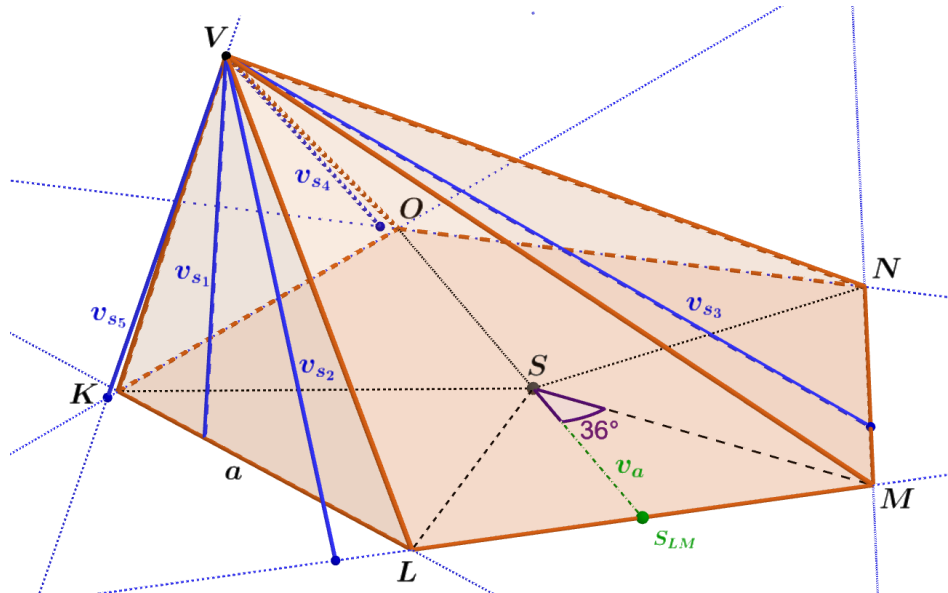
Obrázek 4.42: Ilustrace Příkladu 4.7.3

### Řešení

- Pro výpočet povrchu jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ . Pro obsah podstavy tvaru lichoběžníku platí  $S_p = \frac{(a+c) \cdot v_p}{2} = \frac{(8+4,5) \cdot 4}{2} \text{ dm}^2 = 25 \text{ dm}^2$  (obr. 4.42).
- Plášť jehlanu  $RSTUV$  je tvořen čtyřmi  $\triangle RSV$ ,  $\triangle STV$ ,  $\triangle TUV$  a  $\triangle URV$ . Určíme obsah každého z nich.
- Pro obsah  $S$  obecného trojúhelníku platí  $S = \frac{av_a}{2}$ , kde  $a$  je délka základny a  $v_a$  je výška k základně.
- Tedy v našem případě  $S_{\triangle RSV} = \frac{av_a}{2} = \frac{8 \cdot 5,3}{2} \text{ dm}^2 = 21,200 \text{ dm}^2$ .  
 $S_{\triangle STV} = S_{\triangle URV} = \frac{bv_b}{2} = \frac{4,3 \cdot 5,8}{2} \text{ dm}^2 = 12,470 \text{ dm}^2$ .
- $S_{\triangle TUV} = \frac{cv_c}{2} = \frac{4,5 \cdot 5,4}{2} \text{ dm}^2 = 12,150 \text{ dm}^2$ .
- Pro obsah pláště jehlanu platí  $S_{pl} = S_{\triangle RSV} + 2S_{\triangle STV} + S_{\triangle TUV} = 21,200 \text{ dm}^2 + (2 \cdot (12,470) \text{ dm}^2) + 12,150 \text{ dm}^2 = 58,290 \text{ dm}^2$ .
- Pro povrch jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl} = 25 \text{ dm}^2 + 58,290 \text{ dm}^2 \doteq 83,29 \text{ dm}^2$ .
- Povrch čtyřbokého jehlanu  $RSTUV$  je  $83,29 \text{ dm}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.4.

**Příklad 4.7.4** Je dán pětiboký jehlan  $KLMNOV$ , jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník o straně  $a = 10$  m. Pro stěnové výšky jehlanu platí  $v_{s_1} = 8,44$  m,  $v_{s_2} = 10,87$  m,  $v_{s_3} = 15,66$  m,  $v_{s_4} = 13,69$  m a  $v_{s_5} = 8,93$  m. Určete jeho povrch  $S$ . Výsledek uveďte na dvě desetinná místa.



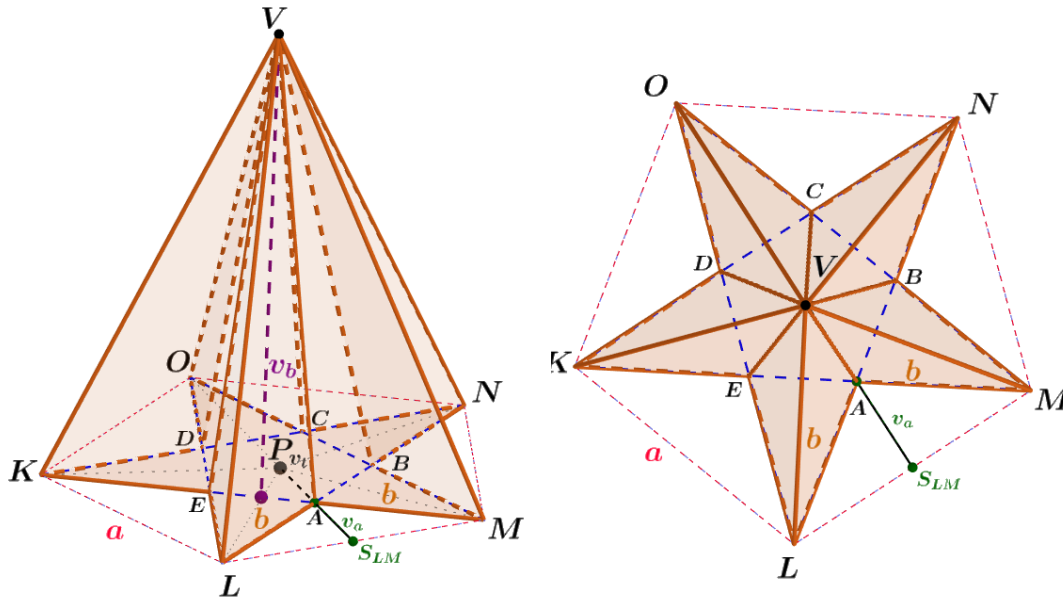
Obrázek 4.43: Ilustrace Příkladu 4.7.4

### Řešení

- Pro výpočet povrchu  $S$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Podstavou daného jehlanu je pravidelný pětiúhelník o straně  $a = 10$  m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 4.43);  $S_{\Delta LMS} = \frac{av_a}{2}$ . Z  $\triangle S S_{LM} M$  vyjádříme  $v_a$ ;  $v_a = \cot 36^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 5 \text{ m} \doteq 6,882 \text{ m}$ . Tedy  $S_{\Delta LMS} = \frac{10 \cdot 6,882}{2} \text{ m}^2 \doteq 34,410 \text{ m}^2$ ;  $S_p = 5 \cdot S_{\Delta LMS} = 5 \cdot 34,410 \text{ m}^2 = 172,050 \text{ m}^2$ .
- Plášť daného jehlanu je tvořen pěti různými trojúhelníky:  $\triangle KLV$ ,  $\triangle LMV$ ,  $\triangle MNV$ ,  $\triangle NOV$  a  $\triangle OKV$ . Určíme obsah každého z nich.
- Pro obsah  $S$  obecného trojúhelníku platí  $S = \frac{av_a}{2}$ , kde  $a$  je délka základny a  $v_a$  je výška k základně. Vypočítáme obsahy daných trojúhelníků.
- Tedy v tomto případě  $S_{\Delta KLV} = \frac{av_{s_1}}{2} = \frac{10 \cdot 8,44}{2} \text{ m}^2 = 42,200 \text{ m}^2$ .  
 $S_{\Delta LMV} = \frac{av_{s_2}}{2} = \frac{10 \cdot 10,87}{2} \text{ m}^2 = 54,350 \text{ m}^2$ .  $S_{\Delta MNV} = \frac{av_{s_3}}{2} = \frac{10 \cdot 15,66}{2} \text{ m}^2 = 78,300 \text{ m}^2$ .  
 $S_{\Delta NOV} = \frac{av_{s_4}}{2} = \frac{10 \cdot 13,69}{2} \text{ m}^2 = 68,450 \text{ m}^2$ .  $S_{\Delta OKV} = \frac{av_{s_5}}{2} = \frac{10 \cdot 8,93}{2} \text{ m}^2 = 44,650 \text{ m}^2$ .
- Pro obsah pláště jehlanu platí:  $S_{pl} = S_{\Delta KLV} + 2S_{\Delta LMV} + S_{\Delta MNV} + S_{\Delta NOV} + S_{\Delta OKV} = 42,200 \text{ m}^2 + 54,350 \text{ m}^2 + 78,300 \text{ m}^2 + 68,450 \text{ m}^2 + 44,650 \text{ m}^2 = 287,950 \text{ m}^2$ .
- Pro povrch jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl} = 172,050 \text{ m}^2 + 287,950 \text{ m}^2 \doteq 460,00 \text{ m}^2$ .
- Povrch pětibokého jehlanu  $KLMNO$  je  $460,00 \text{ m}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch jehlanu z Příkladu 4.6.5.

**Příklad 4.7.5** Je dán nekonvexní desetiboký jehlan  $KELAMBNCODV$ , jehož podstavou je pentagram – pěticípý nekonvexní hvězdicovitý mnohoúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé, vzniklý z pravidelného konvexního pětiúhelníku o straně  $a = 5$  m. Stěnová výška  $v_b$  jehlanu je 8,52 m. Určete jeho povrch  $S$ . Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.44: Ilustrace Příkladu 4.7.5

### Řešení

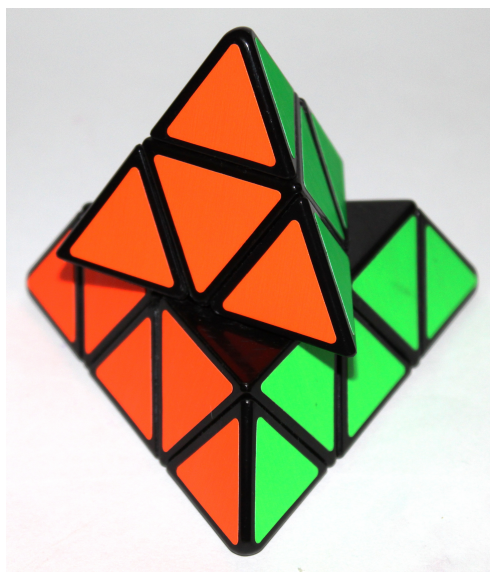
- Pro výpočet objemu  $V_j$  jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Obsah podstavy  $S_p$  ve tvaru pentagramu (obr. 4.44) vypočítáme tak, že od obsahu  $S_1$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$  odečteme pětinasobek obsahu rovno-ramenného  $\triangle LMA$  o základně  $a = 5$  m a ramenech  $b$ ;  
 $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA}$ . Je třeba vypočítat  $S_{\triangle LMA}$ .
- Vyjádříme  $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2}$ . Je třeba vypočítat  $v_a$ .
- Z pravoúhlého  $\triangle S_{LM}MA$  pomocí Pýthagorovy věty vyjádříme délku  $v_a$ ;  
 $v_a = \sqrt{|AM|^2 - |S_{LM}M|^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}$ . Je třeba vypočítat  $|AM| = b$ .
- Přepona  $|AM| = b$  pravoúhlého  $\triangle S_{LM}MA$  je zároveň ramenem rovno-ramenného  $\triangle LMA$ ; a také část úhlopříčky  $KM$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$ . Úhlopříčky konvexního pravidelného pětiúhelníku jsou všechny stejně dlouhé a každé dvě se vzájemně dělí v poměru  $\varphi$  nazývaném zlatý řez; číslo  $\varphi$  je zlatým číslem;  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . V tomto případě se úhlopříčky  $KM, NL$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$  protínají v bodě  $A$ . Tedy pomocí zlatého řezu vyjádříme poměr mezi úsečkami:  $\frac{|KM|}{|KA|} = \frac{|KA|}{|AM|} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Vyjádříme délku úsečky  $|KA| = a = 5$  m, jelikož  $\triangle KAN \cong \triangle NOK$  a tvoří kosočtverec  $KANO$ ;  $|KA| = a$ . Ze vztahu  $\frac{|KA|}{|AM|} = \varphi$  vyjádříme  $|AM| = b$ ;  $|AM| = \frac{|KA|}{\varphi}$ , tedy  $|AM| = \frac{a}{\varphi} = \frac{5}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$  m  $\doteq 3,090$  m.

- Vypočítáme  $v_a$ ;  $v_a = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{3,090^2 - (\frac{5}{2})^2}$  m  $\doteq 1,816$  m.
- Obsah  $\triangle LMA$  je  $S_{\triangle LMA} = \frac{av_a}{2} = \frac{5 \cdot 1,816}{2}$  m = 4,540 m<sup>2</sup>.
- Vypočítáme obsah  $S_1$  konvexního pravidelného pětiúhelníku  $KLMNO$  o straně  $a = 5$  m. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků;  $S_{\triangle LMP_{vt}} = \frac{a \cdot |P_{vt}S_{LM}|}{2}$ . Z  $\triangle P_{vt}S_{LM}M$  vyjádříme výšku  $|P_{vt}S_{LM}|$ ;  
 $|P_{vt}S_{LM}| = \cot 36^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 1,376 \cdot 2,5$  m  $\doteq 3,441$  m.  
Tedy  $S_{\triangle LMP_{vt}} = \frac{5 \cdot 3,441}{2}$  m<sup>2</sup>  $\doteq 8,606$  m<sup>2</sup>.  
Tedy  $S_1 = 5 \cdot S_{\triangle LMP_{vt}} = 5 \cdot 8,606$  m<sup>2</sup> = 43,030 m<sup>2</sup>.
- Pro obsah podstavy platí  $S_p = S_1 - 5 \cdot S_{\triangle LMA} = 43,030$  m<sup>2</sup> - 5 · 4,540 m<sup>2</sup> = 20,330 m<sup>2</sup>.
- Plášť daného jehlanu je tvořen deseti navzájem shodnými trojúhelníky.  
Pro obsah pláště platí  $S_{pl} = 10 \cdot S_{\triangle LAV}$ ;  $S_{\triangle LAV} = \frac{bv_b}{2} = \frac{3,090 \cdot 8,52}{2}$  m = 13,163 m<sup>2</sup>.  
Tedy  $S_{pl} = 10 \cdot S_{\triangle LAV} = 10 \cdot 13,163$  m<sup>2</sup> = 131,630 m<sup>2</sup>.
- Pro povrch jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl} = 20,330$  m<sup>2</sup> + 131,630 m<sup>2</sup>  $\doteq 151,96$  m<sup>2</sup>.
- Povrch nekonvexního desetibokého jehlanu  $KELAMBNCODV$  je 151,96 m<sup>2</sup>.

## 4.8 Objemy a povrchy dalších typů jehlanů

### 4.8.1 Čtyřstěn

Z herního světa je známá Rubikova kostka ve tvaru krychle, ale rovněž existuje atypická Rubikova kostka ve tvaru pravidelného trojbokého jehlanu (pravidelného čtyřstěnu), zvaná Pyraminx, vyobrazená na obr. 4.45.

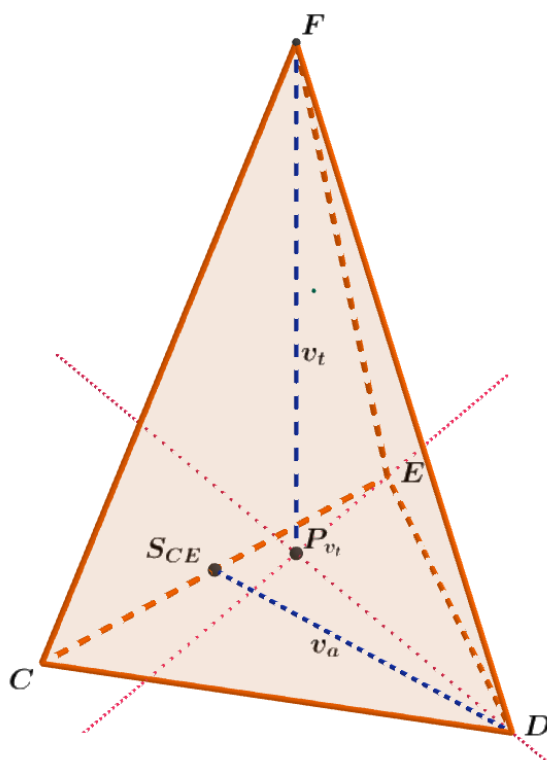


Obrázek 4.45: Atypická Rubikova kostka (Pyraminx) ve tvaru pravidelného čtyřstěnu [22]

### Poznámka

Nezapomínejme, že existují i pravidelné trojboké jehlany, které ale nejsou pravidelnými čtyřstěny. Ovšem všechny trojboké jehlany můžeme nazývat čtyřstěny.

**Příklad 4.8.1** Vypočítejte objem  $V$  čtyřstěnu  $CDEF$ . Jeho podstava je rovnostranný trojúhelník  $CDE$  o straně 8 mm a délka jeho tělesové výšky  $v$  je  $v = 10$  mm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



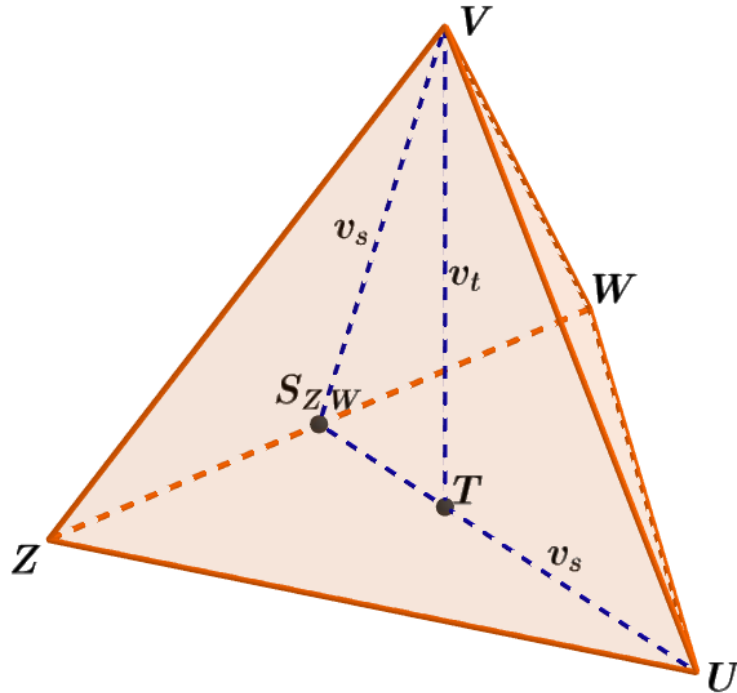
Obrázek 4.46: Ilustrace Příkladu 4.8.1

### Řešení

- Pro objem  $V$  jehlanu platí  $V = \frac{1}{3}S_p v$ . Potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$ , délku tělesové výšky  $v$  známe  $v = |P_V F| = 10$  mm.
- Body  $S_{CD}$ ,  $S_{CE}$  jsou středy příslušných stran trojúhelníku (obr. 4.46).
- Obsah podstavy  $S_p$  je roven obsahu rovnostranného trojúhelníku o straně  $a = 8$  mm. Pro obsah trojúhelníku platí  $S_{\triangle CDE} = \frac{a \cdot v_a}{2}$ .
- Pro délku stěnové výšky  $v_a$  této podstavy platí  $v_a = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tuto hodnotu určíme pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého  $\triangle S_{CE}DC$ ;  $v_a = 8 \frac{\sqrt{3}}{2}$  mm.
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí  $S_p = S_{\triangle CDE} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{8 \cdot 8 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \text{ mm}^2 = 16\sqrt{3} \text{ mm}^2$ .
- Pro objem  $V$  jehlanu platí  $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 10 \text{ mm}^3 = \frac{160}{3}\sqrt{3} \text{ mm}^3 \doteq 92,38 \text{ mm}^3$ .
- Objem čtyřstěnu  $CDEF$  je po zaokrouhlení  $92,38 \text{ mm}^3$ .



**Příklad 4.8.2** Povrch pravidelného čtyřstěnu  $UVWZ$  o hraně  $a = 5$  m je  $\frac{50\sqrt{3}}{2}$  m<sup>2</sup>. Určete jeho objem  $V$ . Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



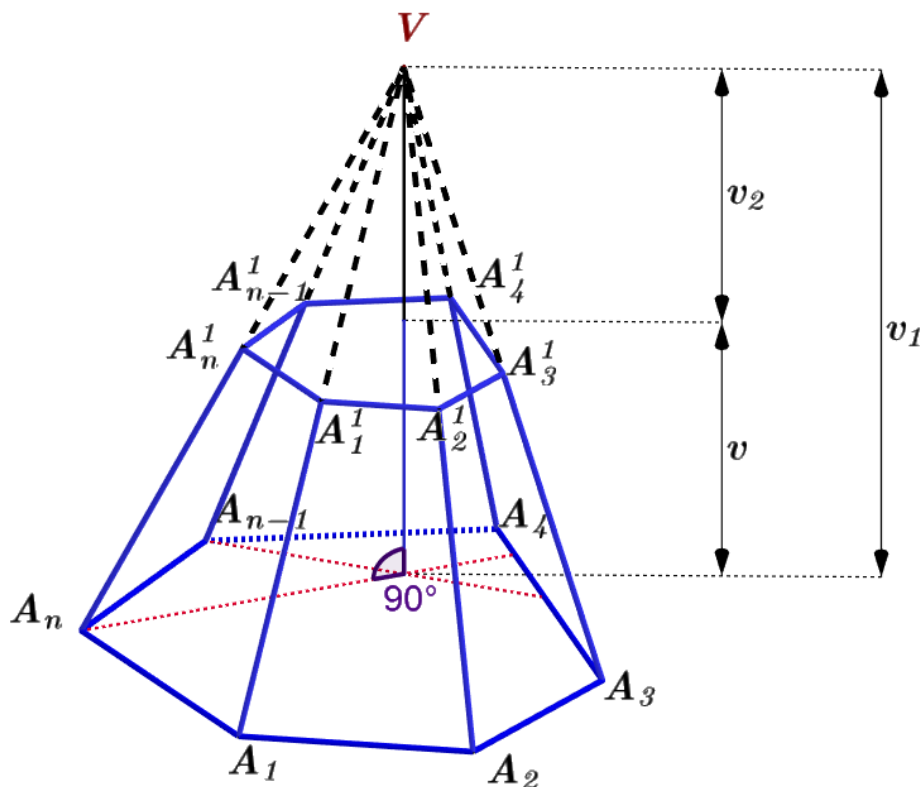
Obrázek 4.47: Ilustrace Příkladu 4.8.2

### Řešení

- Jelikož je čtyřstěn pravidelný, všechny jeho stěny včetně podstavy tvoří shodné rovnostranné trojúhelníky o straně  $a$ . Pro výpočet objemu čtyřstěnu potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a délku tělesové výšky  $v_t$  (obr. 4.47).
- Pro povrch  $S$  jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl} = \frac{50\sqrt{3}}{2}$  m<sup>2</sup>.
- Povrch čtyřstěnu je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, tudíž platí:  $S_p = \frac{S}{4} = \frac{50\sqrt{3}}{4}$  m<sup>2</sup> =  $\frac{25\sqrt{3}}{4}$  m<sup>2</sup>.
- Víme, že  $v_t = |TV|$ , neboť bod  $T$  je patou tělesové výšky čtyřstěnu a současně je těžištěm trojúhelníku  $ZUW$ . Vycházíme například z rovnoramenného  $\triangle UVS_{ZW}$ . Vyjádříme délku jeho stran:  $|VU| = 5$  cm;  $|US_{ZW}| = |VS_{ZW}| = v_s$ .
- Pro délku stěnové výšky  $v_s$  každé boční stěny platí  $v_s = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Tuto hodnotu vypočítáme Pýthagorovou větou například z rovnostranného  $\triangle ZUW$ , který rozdělíme pomocí  $v_s$  na dva pravouhlé trojúhelníky.
- Víme, že  $TV$  je výška trojúhelníku  $UVS_{ZW}$ , která je kolmá k  $US_{ZW}$ .  $US_{ZW}$  je zároveň těžnice  $\triangle ZUW$ . Z čehož vyplývá, že  $|TU| = \frac{2}{3}|US_{ZW}| = \frac{2}{3}v_s = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$  m.
- Z pravouhlého  $\triangle TUV$  vyjádříme  $v_t$  pomocí Pýthagorovy věty;  $v_t = \sqrt{(a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2)} = \sqrt{(25 - (\frac{5\sqrt{3}}{3})^2)} = \sqrt{\frac{50}{3}}$  m =  $5\sqrt{\frac{2}{3}}$  m.
- Pro objem  $V$  jehlanu platí:  $V = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{125\sqrt{2}}{12}$  m<sup>3</sup>  $\doteq 14,73$  m<sup>3</sup>.
- Objem pravidelného čtyřstěnu  $UVWZ$  je po zaokrouhlení  $14,73$  m<sup>3</sup>.

## 4.8.2 Komolý jehlan

Pro odvození vzorce pro  $V$  komolého jehlanu vezmeme komolý jehlan  $A_1A_2\dots A_nA_1^1A_2^2\dots A_n^1$  s tělesovou výškou  $v$ , který doplníme o jehlan  $A_1^1A_2^1\dots A_n^1V$  s tělesovou výškou  $v_2$  na jehlan  $A_1A_2\dots A_nV$  s tělesovou výškou  $v_1$  (obr. 4.48).



Obrázek 4.48: Komolý jehlan

Pro objemy  $V_1, V_2$  jehlanů s výškami  $v_1, v_2$  a pro objem  $V$  komolého jehlanu platí

$$V_1 = V + V_2,$$

tj.

$$V = V_1 - V_2.$$

Jsou-li  $S_1$  a  $S_2$  obsahy podstav komolého jehlanu, platí

$$V = \frac{1}{3}S_1v_1 - \frac{1}{3}S_2v_2.$$

Jelikož  $v_1 = v + v_2$  dostáváme

$$V = \frac{1}{3}S_1(v + v_2) - \frac{1}{3}S_2v_2$$

čili

$$V = \frac{1}{3}S_1v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2)v_2.$$

Podstavy komolého jehlanu jsou podobné mnohoúhelníky, z čehož vyplývá, že koeficient podobnosti  $k$  je:

*Rozšiřující poznámka.* Stejnolehlost – Definice je převzata z [[10], s. 59].

### Definice

**Stejnolehlost**  $H(S, \kappa)$  (neboli homotetie) určená bodem  $S$  a nenulovým reálným číslem  $\kappa$  je zobrazení v prostoru, ve kterém se zobrazí bod  $S$  na bod  $S' = S$  a každý bod  $X \neq S$  na bod  $X'$  tak, že  $|X'S'| = |\kappa| \cdot |XS|$ .

Pro  $\kappa > 0$  leží bod  $X'$  na polopřímce  $SX$ ;  
pro  $\kappa < 0$  leží bod  $X'$  na polopřímce opačné k polopřímce  $SX$ .

Bod  $S$  nazýváme **středem stejnolehlosti**, číslo  $\kappa$  nazýváme **koeficientem stejnolehlosti**.

Bod  $X'$  je obrazem bodu  $X$  ve stejnolehlosti se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$ ; zapisujeme takto:  $H(S, \kappa) : X \rightarrow X'$ .

$$k = \frac{v_2}{v_1};$$

a pro obsahy podstav komolého jehlanu platí

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2;$$

tedy

$$k = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Tudíž

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Postupnými úpravami dostáváme (pro  $v_1 = v + v_2$ )

$$v_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}v.$$

Dostáváme  $V$  komolého jehlanu:

$$V = \frac{1}{3}S_1v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2)\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}v.$$

Rozdíl  $S_1 - S_2$  rozložíme na součin  $(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})$  a upravíme na výsledný tvar:

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)v. \quad \square$$

Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

**Věta**

**Objem  $V$  komolého jehlanu** s tělesovou výškou  $v$ , jehož podstavy mají obsah  $S_1, S_2$ , je

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v.$$

Dále si uvedeme vztah pro povrch komolého jehlanu:

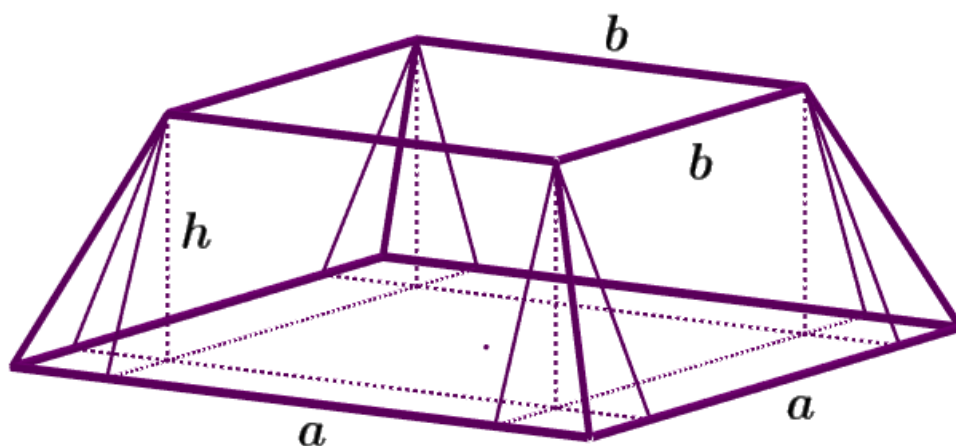
**Věta**

Pro **povrch  $S$  komolého jehlanu** platí

$$S = S_1 + S_2 + S_{pl},$$

kde  $S_1, S_2$  jsou obsahy podstav a  $S_{pl}$  je obsah pláště.

Následující vysvětlení způsobu určení objemu pravidelného komolého jehlanu vychází z [Bečvar (2003) s. 97–99]. K objemu pravidelného komolého jehlanu pravděpodobně dospěli již staří Egypťané. Na moskevském papyrusu se nachází úloha na výpočet pravidelné komolé pyramidy, tedy pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu (obr. 4.49).



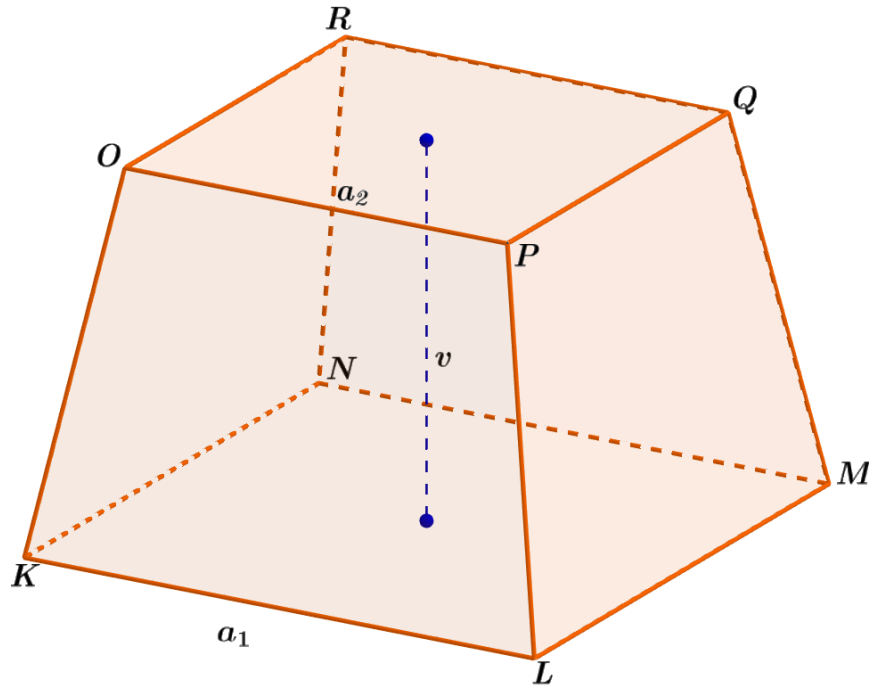
Obrázek 4.49: Ilustrace k odvození vzorce pro objem komolého jehlanu

Uvažujme pravidelný komolý čtyřboký jehlan o podstavných hranách  $a, b$  a výšce  $h$ . Toto těleso rozložíme na devět částí: jeden pravidelný čtyřboký hranol výšky  $h$  o podstavné hraně délky  $b$ ; čtyři jehlany výšky  $h$  s čtvercovou podstavou o hraně  $\frac{a-b}{2}$ ; a čtyři shodné trojboké hranoly, každý z nich má objem rovný polovině objemu kváдру výšky  $h$  a o rozměrech podstavy  $b, \frac{a-b}{2}$ . Pokud sečteme objemy dílčích těles z obr. 4.49, dostáváme se k následujícímu vztahu:

$$V = b^2 h + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \cdot h + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a-b}{2} \cdot h = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2),$$

který odpovídá vzorci pro objem komolého jehlanu, jelikož  $\frac{h}{3} = \frac{1}{3} \cdot h$ , kde  $h = v$ ; dále  $a^2 = S_1$ ;  $ab = \sqrt{S_1 S_2}$  a  $b^2 = S_2$ , kde  $S_1, S_2$  jsou obsahy podstav komolého jehlanu.

**Příklad 4.8.3** Určete tělesovou výšku  $v$  pravidelného komolého čtyřbokého jehlanu  $KLMNOPQR$ , jehož dolní podstava má stranu délky  $a_1 = 8$  dm a horní podstava má stranu délky  $a_2 = 6$  dm. Objem  $V$  tohoto komolého jehlanu je  $271,3$  dm<sup>3</sup>. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 4.50: Ilustrace k Příkladu 4.8.3

### Řešení

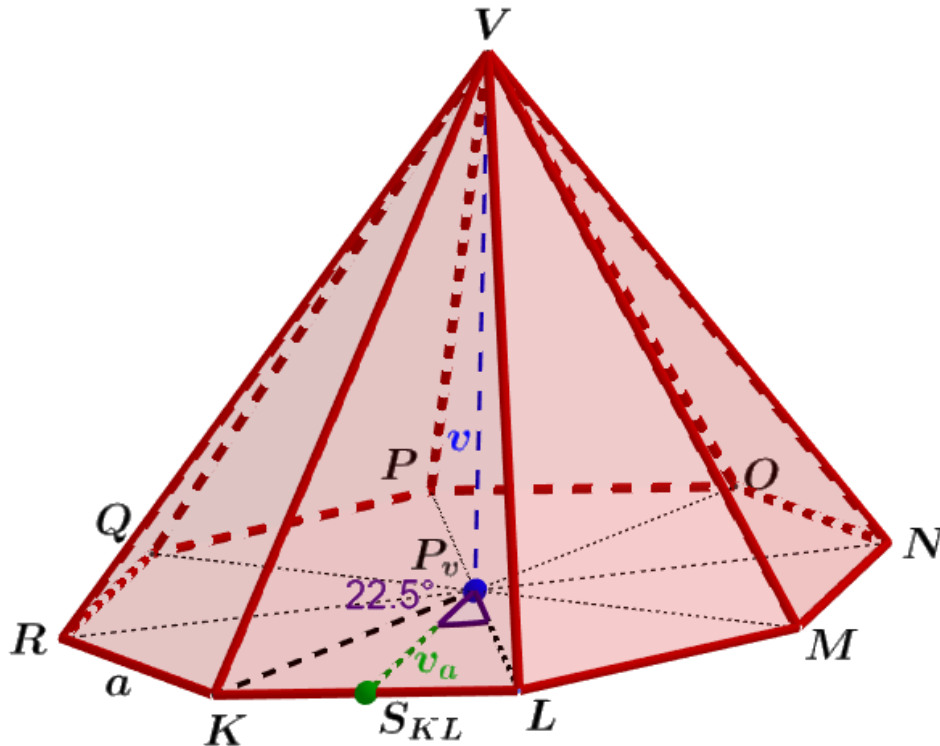
- Pro výpočet objemu komolého jehlanu s obsahy podstav  $S_1$ ,  $S_2$  a výšce  $v$  použijeme vzorec  $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v$ .
- Jedná se o pravidelný komolý čtyřboký jehlan, jeho podstavy jsou čtverce. Délka strany čtverce tvořícího dolní podstavu je  $a_1 = 8$  dm; obsah této podstavu je  $S_1 = a_1^2 = 64$  dm<sup>2</sup> (obr. 4.50).
- Délka strany čtverce tvořící horní podstavu je  $a_2 = 6$  dm; obsah této podstavu je  $S_2 = a_2^2 = 36$  dm<sup>2</sup>.
- Ze vzorce pro objem  $V$  komolého jehlanu vyjádříme neznámou  $v$ , přičemž  $S_1, S_2$  již známe;  $v = \frac{3V}{(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}$  a dosadíme obsahy podstav;

$$v = \frac{3V}{(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)} = \frac{3 \cdot 271,3}{(64 + \sqrt{64 \cdot 36} + 36)} \text{ dm} \doteq 5,5 \text{ dm}.$$

- Tělesová výška  $v$  po zaokrouhlení činí 5,5 dm.

## 4.9 Úlohy II

**Úloha 4.9.1** Vypočítejte objem  $V_j$  pravidelného osmibokého jehlanu  $KLMNOPQRV$ . Podstavná hrana jehlanu měří  $a = 8,3$  cm a výška  $v$  jehlanu je  $14,6$  cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

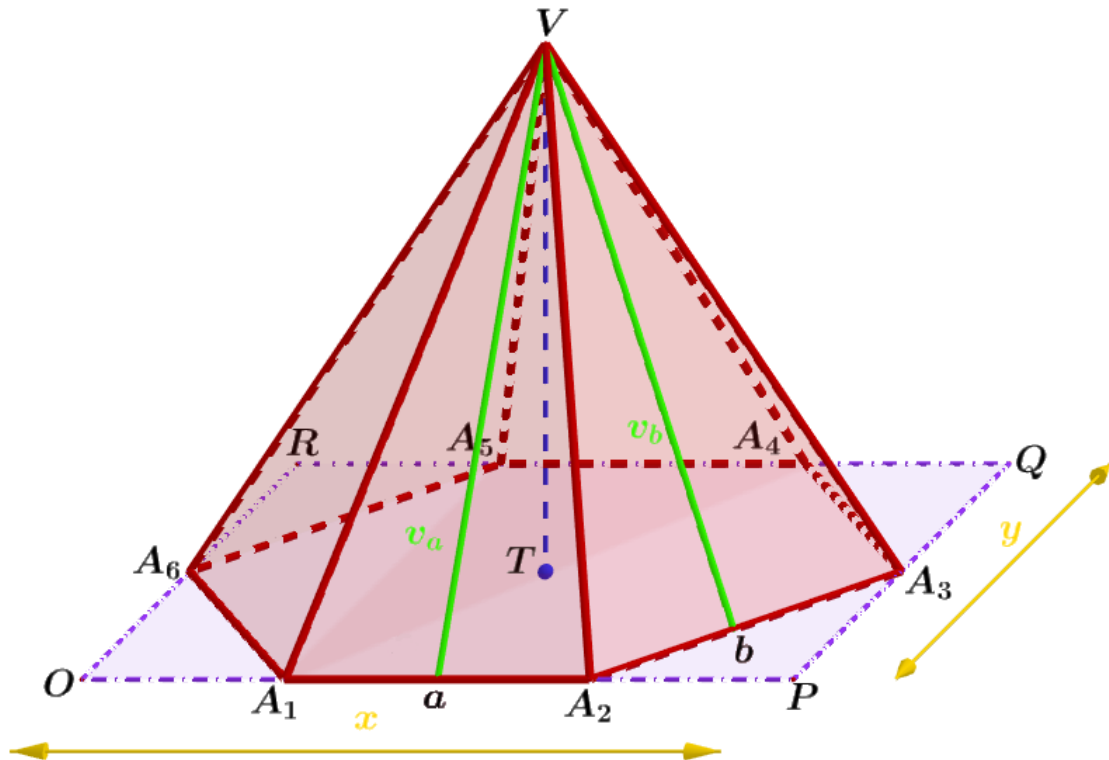


Obrázek 4.51: Ilustrace k Úloze 4.9.1

### Řešení

- Pro objem  $V_j$  jehlanu platí:  $V_j = \frac{1}{3}S_p v$ . Výšku  $v$  jehlanu známe:  $v = 14,6$  cm (obr. 4.51).
- Obsah podstavy  $S_p$  jehlanu je roven obsahu pravidelného osmiúhelníku  $KLMNOPQR$ . Pravidelný osmiúhelník rozložíme na osm shodných rovnoramenných trojúhelníků:  $S_p = 8 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$ . Je třeba vypočítat  $v_a$ .
- Z  $\triangle SKLP_v$  vyjádříme  $v_a$ ;  $v_a = \cot 22,5^\circ \cdot \frac{a}{2} \doteq 2,414 \cdot 4,150 \text{ m} \doteq 10,018 \text{ m}$ .
- Tedy  $S_p = 8 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4a \cdot v_a = 4 \cdot 8,3 \cdot 10,018 \text{ cm}^2 \doteq 332,598 \text{ cm}^2$ .
- Dosadíme do vzorce pro výpočet objemu jehlanu:  
 $V_j = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3} \cdot 332,598 \cdot 14,6 \text{ cm}^3 \doteq 1\,618,64 \text{ cm}^3$ .
- Objem  $V_j$  daného pravidelného osmibokého jehlanu je po zaokrouhlení  $1\,618,64 \text{ cm}^3$ .

**Úloha 4.9.2** Vypočítejte povrch  $S$  šestibokého jehlanu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$ , jehož podstava je vepsána do obdélníku  $OPQR$  o rozměrech  $x = 14$  m a  $y = 12$  m (obr. 4.52). Podstava  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  je osově souměrná podle osy  $A_3A_6$ . Znáte  $|OA_1| = 4$  m,  $|A_1A_2| = 6$  m,  $|A_2P| = 4$  m,  $|PA_3| = 6$  m a  $|A_3Q| = 6$  m. Bod  $T$  je těžištěm podstavy a současně patou tělesové výšky jehlanu a také středem obdélníku. Výška  $v_a$  trojúhelníku  $A_1A_2V$  je zároveň těžnicí  $t_a$  tohoto trojúhelníku a měří 12 m. Výška  $v_b$  trojúhelníku  $A_2A_3V$  měří 11,91 m. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 4.52: Ilustrace k Úloze 4.9.2

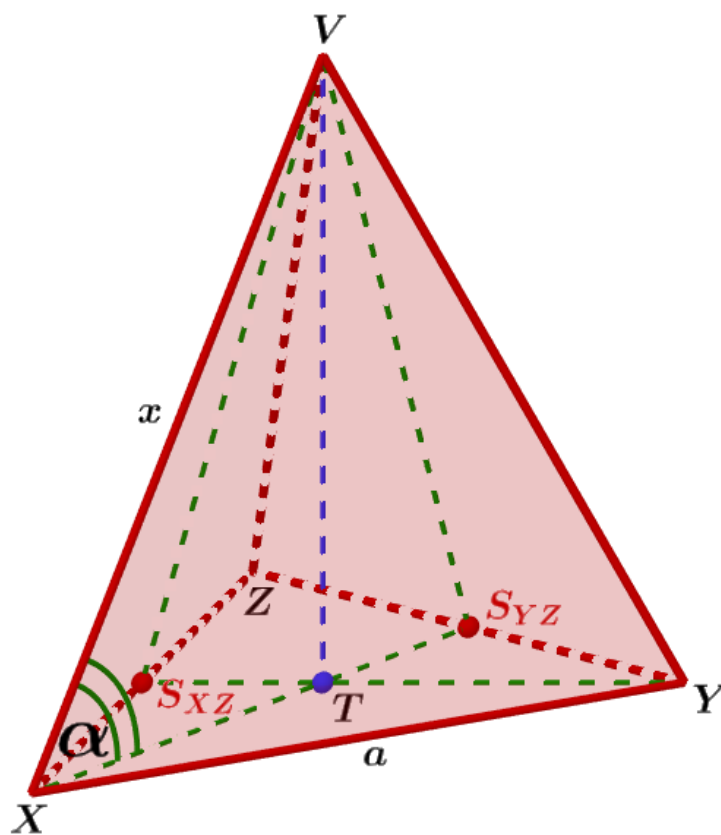
### Řešení

- Pro povrch  $S$  jehlanu platí:  $S = S_p + S_{pl}$ .
- Obsah podstavy  $S_p$  jehlanu je roven obsahu šestiúhelníku  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ , který vypočítáme tak, že od obsahu  $S_1$  obdélníku  $OPQR$  odečteme součet čtyř obsahů pravoúhlých trojúhelníků:  $\triangle OA_1A_6$ ,  $\triangle A_2PA_3$ ,  $\triangle A_3QA_4$  a  $\triangle A_5RA_6$ .
- Pro obsah  $S_1$  obdélníku  $OPQR$  platí:  $S_1 = xy = 14 \cdot 12 \text{ m}^2 = 168 \text{ m}^2$ .
- Jelikož se obsahy pravoúhlých trojúhelníků  $OA_1A_6$ ,  $A_2PA_3$ ,  $A_3QA_4$  a  $A_5RA_6$  rovnají, stačí vypočítat obsah jednoho z nich:  $S_{\triangle A_1A_6O} = \frac{|OA_1| \cdot |OA_6|}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ m}^2$ .
- Pro obsah podstavy jehlanu platí:  $S_p = S_1 - 4 \cdot S_{\triangle A_1A_6O} = 168 \text{ m}^2 - 4 \cdot 12 \text{ m}^2 = 120 \text{ m}^2$ .
- Plášť tohoto jehlanu je složen ze šesti trojúhelníků. Trojúhelník  $A_1A_2V$  je rovnoramenný, protože  $v_a = t_a$ . Jelikož je podstava  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  osově souměrná podle

osy  $A_3A_6$ , platí:  $\triangle A_1A_2V \cong \triangle A_4A_5V$ . Zbylé čtyři trojúhelníky  $A_2A_3V$ ,  $A_3A_4V$ ,  $A_5A_6V$  a  $A_6A_1V$  jsou shodné podle věty *sss*:  $\triangle A_2A_3V \cong \triangle A_3A_4V \cong \triangle A_5A_6V \cong \triangle A_6A_1V$ .

- Pro obsah  $\triangle A_1A_2V$  platí:  $S_{\triangle A_1A_2V} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{6 \cdot 12}{2} \text{ m}^2 = 36 \text{ m}^2$ .
- Pro obsah  $\triangle A_2A_3V$  platí:  $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{b \cdot v_b}{2}$ . Základnu tohoto  $\triangle A_2A_3V$  vypočítáme Pýthagorovou větou pomocí pravoúhlého trojúhelníku  $A_2A_3P$ :  
 $b = \sqrt{|A_2P|^2 + |PA_3|^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} \text{ m} \doteq 7,211 \text{ m}$ .  
Tedy  $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{7,211 \cdot 11,91}{2} \text{ m}^2 \doteq 42,942 \text{ m}^2$ .
- Obsah pláště  $S_{pl}$  je roven součtu obsahů všech jeho bočních stěn a platí:  
 $S_{pl} = 2S_{\triangle A_1A_2V} + 4S_{\triangle A_2A_3V} = 2 \cdot 36 \text{ m}^2 + 4 \cdot 42,942 \text{ m}^2 = 243,768 \text{ m}^2$ .
- Dosadíme do vzorce pro výpočet povrchu  $S$  jehlanu:  
 $S = S_p + S_{pl} = 120 \text{ m}^2 + 243,768 \text{ m}^2 \doteq 363,77 \text{ m}^2$ .
- Povrch  $S$  šestibokého jehlanu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$  je po zaokrouhlení  $363,77 \text{ m}^2$ .

**Úloha 4.9.3** Určete délku  $x$  boční hrany čtyřstěnu  $XYZV$ . Podstavou čtyřstěnu je rovnostranný  $\triangle XYZ$  o straně délky  $a = 10 \text{ dm}$ . Odchylka hrany čtyřstěnu a roviny podstavy je  $\alpha = 60^\circ$ . Pata výšky čtyřstěnu leží v těžišti podstavy v bodě  $T$ . Body  $S_{XZ}$ ,  $S_{YZ}$  jsou středy příslušících stran trojúhelníku. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



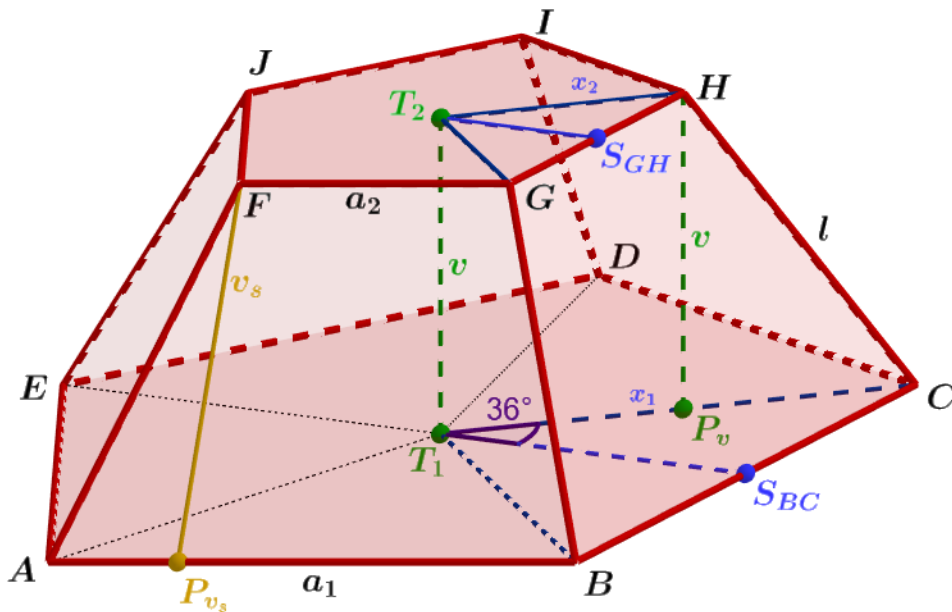
Obrázek 4.53: Ilustrace k Úloze 4.9.3



## Řešení

- Pro výpočet délky  $x$  boční hrany čtyřřtěnu budeme vycházet z pravoúhlého  $\triangle XTV$ . Nyní potřebujeme vypočítat délku základny  $XS_{YZ}$  trojúhelníku  $\triangle XS_{YZ}V$ .
- Při určení délky základny, která je zároveň těžnicí rovnostranného  $\triangle XYZ$  o straně  $a = 10$  dm, vycházíme například z pravoúhlého  $\triangle XYS_{YZ}$  a vypočítáme ji pomocí Pýthagorovy věty:  $|XS_{YZ}| = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{10^2 - 5^2}$  dm  $\doteq 8,66$  dm (obr. 4.53).
- Dále platí:  $|XT| = \frac{2}{3} \cdot |XS_{YZ}| = \frac{2}{3} \cdot 8,66$  dm  $\doteq 5,77$  dm.
- Úhel  $\alpha = 60^\circ = |\angle VXS_{YZ}|$ .
- Pro určení délky boční hrany  $x$  čtyřřtěnu  $XYZV$  vycházíme z pravoúhlého  $\triangle XTV$  a platí:  $x = \frac{|XT|}{\cos 60^\circ} = \frac{5,77}{\cos 60^\circ}$  dm  $\doteq 11,5$  dm.
- Délka boční hrany  $x$  čtyřřtěnu  $XYZV$  je po zaokrouhlení 11,5 dm.

**Úloha 4.9.4** Vypočtěte objem  $V$  a povrch  $S$  pravidelného pětibokého komolého jehlanu  $ABCDEFGH IJ$ . Délka hrany dolní podstavy  $a_1 = 10$  cm, délka hrany horní podstavy  $a_2 = 5,11$  cm a délka boční hrany pravidelného pětibokého komolého jehlanu  $l = 7,3$  cm. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 4.54: Ilustrace k Úloze 4.9.4

## Řešení

- Pro objem  $V$  komolého jehlanu platí:  $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v$ . Potřebujeme vypočítat obsah  $S_1$  dolní podstavy, obsah  $S_2$  horní podstavy a jeho výšku  $v$ . Bod  $T_1$  je těžištěm dolní podstavy; bod  $T_2$  je těžištěm horní podstavy.
- Obsah  $S_1$  dolní podstavy tohoto komolého jehlanu je roven obsahu pravidelného pětiúhelníku o straně  $a_1 = 10$  cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 4.54);  $S_{\triangle BCT_1} = \frac{a_1 v_{a_1}}{2}$ . Z  $\triangle BS_{BC}T_1$  vyjádříme  $v_{a_1}$ ;  $v_{a_1} = \cot 36^\circ \cdot \frac{a_1}{2} \doteq \cot 36^\circ \cdot 5$  cm  $\doteq 6,88$  cm.  
Tedy  $S_{\triangle BCT_1} = \frac{10 \cdot 6,88}{2}$  cm<sup>2</sup>  $\doteq 34,40$  cm<sup>2</sup>. Tudíž  $S_1 = 5 \cdot 34,40$  cm<sup>2</sup>  $\doteq 172,00$  cm<sup>2</sup>.

- Obsah  $S_2$  horní podstavy tohoto komolého jehlanu je roven obsahu pravidelného pětiúhelníku o straně  $a_2 = 5,11$  cm. Pravidelný pětiúhelník rozložíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků;  $S_{\triangle GHT_2} = \frac{a_2 v_{a_2}}{2}$ . Z  $\triangle GS_{GH}T_2$  vyjádříme  $v_{a_2}$ ;  
 $v_{a_2} = \cot 36^\circ \cdot \frac{a_2}{2} \doteq \cot 36^\circ \cdot 2,56 \text{ cm} \doteq 3,52 \text{ cm}$ .  
Tedy  $S_{\triangle GHT_2} = \frac{5,11 \cdot 3,52}{2} \text{ cm}^2 \doteq 8,99 \text{ cm}^2$ . Tudíž  $S_2 = 5 \cdot 8,99 \text{ cm}^2 \doteq 44,95 \text{ cm}^2$ .
- Pro určení výšky  $v$  jehlanu vycházíme z pravoúhlého lichoběžníku  $T_1CT_2H$ ; délku dolní základny  $T_1C$  tohoto lichoběžníku označíme jako  $|T_1C| = x_1$ ; délku horní základny  $T_2H$  tohoto lichoběžníku označíme jako  $|T_2H| = x_2$ .
- Pro určení délky  $x_1$  vycházíme například z rovnoramenného trojúhelníku  $BCT_1$ , který rozdělíme podle jeho výšky (ta je zároveň těžnicí) na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pravoúhlý  $\triangle S_{BC}CT_1$  má při vrcholu  $T_1$  úhel, pro který platí  $|\angle S_{BC}T_1C| = 36^\circ$ . Pro  $x_1$  platí:  $x_1 = \frac{a_1}{\sin 36^\circ} \doteq 8,51 \text{ cm}$ .
- Pro určení délky  $x_2$  vycházíme například z rovnoramenného trojúhelníku  $GHT_2$ , který rozdělíme podle jeho výšky (ta je zároveň těžnicí) na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pravoúhlý  $\triangle S_{GH}HT_2$  má při vrcholu  $T_2$  úhel, pro který platí  $|\angle S_{GH}T_2H| = 36^\circ$ . Pro  $x_2$  platí:  $x_2 = \frac{a_2}{\sin 36^\circ} \doteq 4,35 \text{ cm}$ .
- Pro určení výšky  $v$  tohoto komolého jehlanu vycházíme z pravoúhlého lichoběžníku  $T_1CT_2H$ ;  $P_v$  je pata kolmice z bodu  $H$  k dolní základně  $x_1$ . Pro výšku jehlanu platí:  $|T_1T_2| = |P_vH| = v$ . Nyní vycházíme z pravoúhlého  $\triangle P_vHC$  a délku  $v$  vypočítáme pomocí Pýthagorovy věty;  $|P_vH| = v$ ;  $|CH| = l = 7,3 \text{ cm}$ ;  $|P_vC| = x_1 - x_2 = 4,16 \text{ cm}$ :  
 $v = \sqrt{l^2 - |P_vC|^2} = \sqrt{7,3^2 - 4,16^2} \text{ cm} \doteq 6,00 \text{ cm}$ .
- Pro objem  $V$  komolého jehlanu platí  
 $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)v = \frac{1}{3}(172,00 + \sqrt{172,00 \cdot 44,95} + 44,95) \cdot 6 \text{ cm}^3 \doteq 609,8 \text{ cm}^3$ .
- Pro povrch  $S$  komolého jehlanu platí  $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$ . Plášť pravidelného pětibokého komolého jehlanu se skládá z pěti shodných rovnoramenných lichoběžníků. Bod  $P_{v_s}$  je pata výšky boční stěny tohoto komolého jehlanu. Vypočítáme obsah jednoho z nich, k tomu potřebujeme určit Pýthagorovou větou délku  $v_s$  výšky tohoto lichoběžníku;  $|P_{v_s}F| = v_s$ ;  $|AF| = l = 7,3 \text{ cm}$ ;  $|P_{v_s}A| = \frac{a_1 - a_2}{2} \doteq 2,45 \text{ cm}$ :  
 $v_s = \sqrt{l^2 - |P_{v_s}A|^2} = \sqrt{7,3^2 - 2,45^2} \text{ cm} \doteq 6,88 \text{ cm}$ .  
 $S_{ABFG} = a_1 \cdot v_s = 10 \cdot 6,88 \text{ cm}^2 = 68,80 \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah pláště tohoto komolého jehlanu platí:  
 $S_{pl} = 5 \cdot S_{ABFG} = 5 \cdot 68,80 \text{ cm}^2 \doteq 344 \text{ cm}^2$ .
- Pro povrch tohoto komolého jehlanu platí:  
 $S = S_1 + S_2 + S_{pl} = 172,00 \text{ cm}^2 + 44,95 \text{ cm}^2 + 344 \text{ cm}^2 \doteq 561,0 \text{ cm}^2$ .
- Objem  $V$  pravidelného pětibokého komolého jehlanu  $ABCDEFGHIIJ$  je po zaokrouhlení  $609,8 \text{ cm}^3$  a povrch  $S$  pravidelného pětibokého komolého jehlanu  $ABCDEFGHIIJ$  je po zaokrouhlení  $561,0 \text{ cm}^2$ .

## 5. Objemy a povrchy nekonvexních mnohostěňů

V této kapitole se budeme zabývat nekonvexními mnohostěny, se kterými se ve středoškolských učebnicích zřídka setkáváme. Ze světa kolem nás si uvedeme několik architektonických staveb ve tvaru nekonvexních mnohostěňů (obr. 5.1–5.5).



Obrázek 5.1: Budova Civil Justice Centre (Manchester, Velká Británie) [23]



Obrázek 5.2: Wotrubův kostel (Víděň, Rakousko) [24]



Obrázek 5.3: Komplex budov Habitat 67 (Montreal, Quebec) [25]



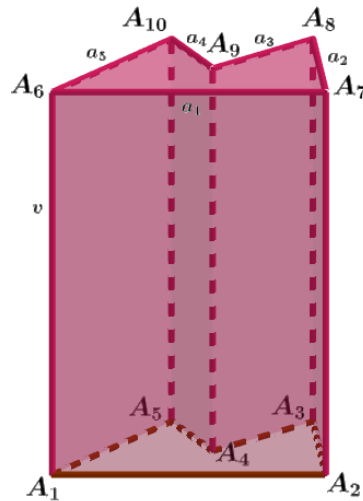
Obrázek 5.4: Mrakodrap MahaNakhon (Bangkok, Thajsko) [26]



Obrázek 5.5: Budova Čínské ústřední televize (Peking, Čína) [27]

Následně si uvedeme několik příkladů s řešením a krokovaných úloh na výpočet objemu a povrchu nekonvexních mnohostěnů.

**Příklad 5.1.1** Vypočítejte objem  $V$  a povrch  $S_h$  nekonvexního kolmého pětibokého hranolu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$  vyobrazeném na obr. 5.6. Obsah  $S$  nekonvexního pětiúhelníku  $A_1A_2A_3A_4A_5$  je  $8,44 \text{ cm}^2$ . Délky stran nekonvexního pětiúhelníku  $A_6A_7A_8A_9A_{10}$  jsou  $a_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $a_2 = a_5 = 3 \text{ cm}$  a  $a_3 = a_4 = 2 \text{ cm}$ . Tělesová výška  $v$  hranolu je  $7 \text{ cm}$ . Výsledky uveďte na jedno desetinné místo.

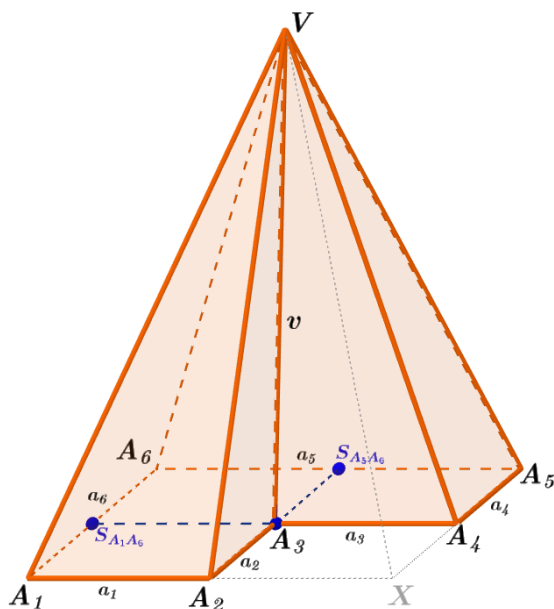


Obrázek 5.6: Ilustrace k Příkladu 5.1.1

### Řešení

- Pro objem  $V$  libovolného hranolu platí  $V = S_p v$ . Výška  $v$  tohoto hranolu měří  $7 \text{ cm}$ .
- Podstavy daného hranolu jsou navzájem shodné nekonvexní pětiúhelníky (obr. 5.6). Podstavy tělesa jsou shodné útvary, mají tedy i shodné obsahy. Pro obsah podstavy platí  $S_p = S_{A_1A_2A_3A_4A_5} = 8,44 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme objem  $V$  tohoto hranolu:  $V = S_p v = 8,44 \text{ cm}^2 \cdot 7 \text{ cm} \doteq 59,1 \text{ cm}^3$ .
- Pro povrch  $S_h$  hranolu platí vztah  $S_h = 2S_p + S_{pl}$ .
- Obsah pláště  $S_{pl}$  nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je roven součtu obsahů všech bočních stěn. U tohoto hranolu jsou boční stěny tvořeny pěti obdélníky  $A_1A_2A_7A_6$ ,  $A_2A_3A_8A_7$ ,  $A_3A_4A_9A_8$ ,  $A_4A_5A_{10}A_9$  a  $A_5A_1A_6A_{10}$ , z nichž dvě dvojice stěn jsou shodné:  $A_2A_3A_8A_7 \cong A_5A_1A_6A_{10}$  a  $A_3A_4A_9A_8 \cong A_4A_5A_{10}A_9$ .  
Tedy  $S_{pl} = 2S_{A_2A_3A_8A_7} + 2S_{A_3A_4A_9A_8} + S_{A_1A_2A_7A_6}$ .
- Vypočítáme obsah obdélníku  $A_2A_3A_8A_7$ :  $S_{A_2A_3A_8A_7} = a_2 \cdot v = 3 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 21 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme obsah obdélníku  $A_3A_4A_9A_8$ :  $S_{A_3A_4A_9A_8} = a_3 \cdot v = 2 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 14 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme obsah obdélníku  $A_1A_2A_7A_6$ :  $S_{A_1A_2A_7A_6} = a_1 \cdot v = 5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 35 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme obsah pláště  $S_{pl}$  tohoto hranolu:  
 $S_{pl} = 2S_{A_2A_3A_8A_7} + 2S_{A_3A_4A_9A_8} + S_{A_1A_2A_7A_6} = 2 \cdot 21 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 14 \text{ cm}^2 + 35 \text{ cm}^2 = 105 \text{ cm}^2$ .
- Povrch  $S_h$  tohoto hranolu je:  $S_h = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot 8,44 \text{ cm}^2 + 105 \text{ cm}^2 \doteq 121,9 \text{ cm}^2$ .
- Objem daného nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je  $59,1 \text{ cm}^3$  a jeho povrch je  $121,9 \text{ cm}^2$ .

**Příklad 5.1.2** Vypočtěte objem  $V_j$  a povrch  $S$  nekonvexního šestibokého jehlanu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$ , který vznikl z pravidelného čtyřbokého jehlanu  $A_1XA_5A_6V$  o podstavné hraně  $a = 6$  cm a tělesové výšce  $v = 8$  cm „odříznutím“ čtyřbokého jehlanu  $A_2XA_4A_3V$  se čtvercovou podstavou o straně  $\frac{a}{2}$  a stejné tělesové výšce, viz obr. 5.1.2. Bod  $A_3$  je patou tělesové výšky  $v$ ,  $|A_3V| = 8$  cm, body  $S_{A_1A_6}$ ,  $S_{A_5A_6}$  jsou středy příslušných hran. Výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 5.7: Ilustrace k Příkladu 5.1.2

## Řešení

- Pro objem  $V_j$  jehlanu platí  $V_j = \frac{1}{3}S_p v$ . Výšku  $v$  tohoto jehlanu známe;  $v = |A_3V| = 8$  cm.
- Délky podstavných hran jsou  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 3$  cm a  $a_5 = a_6 = 6$  cm (obr. 5.7).
- Ukážeme si tři způsoby výpočtu objemu daného nekonvexního šestibokého jehlanu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$ :
  1. \* Obsah podstavy  $S_p$  tohoto jehlanu je roven obsahu nekonvexního šestiúhelníku  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ , který lze rozdělit na tři shodné nepřekrývající se čtverce  $A_1A_2A_3S_{A_1A_6}$ ,  $A_3A_4A_5S_{A_5A_6}$  a  $A_3S_{A_5A_6}A_6S_{A_1A_6}$  o straně  $a = 3$  cm.
    - \* Vypočítáme obsah jednoho ze čtverců:  $S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = a^2 = 3^2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$ .
    - \* Vypočítáme obsah podstavy:  $S_p = 3 \cdot S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = 3 \cdot 9 \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$ .
    - \* Vypočítáme objemu jehlanu:  $V_j = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3} \cdot 27 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 72 \text{ cm}^3$ .
  2. \* Daný jehlan  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$  lze rozdělit na tři shodné nepronikající se čtyřboké jehlany  $A_1A_2A_3S_{A_1A_6}V$ ,  $A_3A_4A_5S_{A_5A_6}V$  a  $A_3S_{A_5A_6}A_6S_{A_1A_6}V$ , jejichž podstavy jsou shodné čtverce o straně  $a = 3$  cm. Tyto čtyřboké jehlany mají shodnou tělesovou výšku  $v = |A_3V| = 8$  cm.
    - \* Objem nekonvexního šestibokého jehlanu je roven součtu objemů tří shodných čtyřbokých jehlanů, které se nepronikají. Vypočítáme obsah podstavy a také objem jednoho z nich:  $S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = a^2 = 3^2 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$ ,  
 $V_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}V} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} v = \frac{1}{3}9 \text{ cm}^2 \cdot 8 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^3$ .

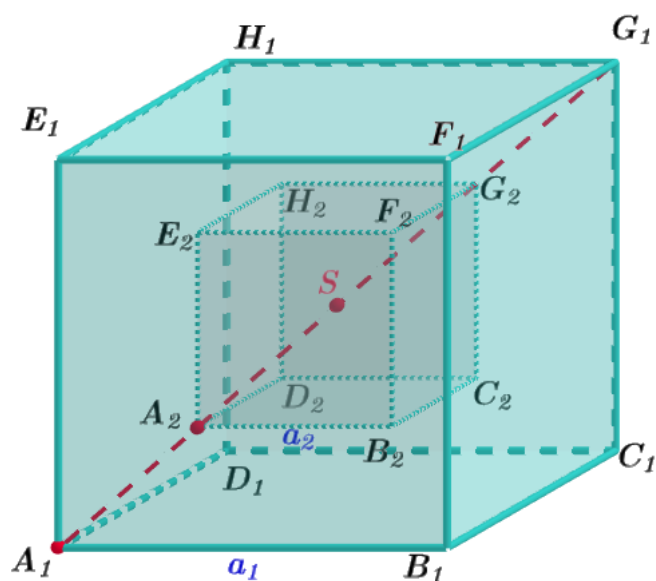
\* Objem nekonvexního jehlanu je:  $V_j = 3V_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}V} = 3 \cdot 24 \text{ cm}^3 = 72 \text{ cm}^3$ .

3. \* Výpočet je možné také provést odečtením objemu jednoho dílčího jehlanu  $A_2XA_4A_3V$  od objemu původního jehlanu  $A_1XA_5A_6V$  neboli objem  $V_j$  nekonvexního jehlanu  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6V$  je roven  $\frac{3}{4}$  objemu původního pravidelného čtyřbokého jehlanu  $A_1XA_5A_6V$ , jelikož tento jehlan lze složit ze čtyř shodných čtyřbokých jehlanů.

- Pro povrch  $S$  jehlanu platí  $S = S_p + S_{pl}$ ;  $S_p$  jsme již vypočítali:  
 $S_p = 3 \cdot S_{A_1A_2A_3S_{A_1A_6}} = 27 \text{ cm}^2$ .
- Obsah pláště  $S_{pl}$  nekonvexního šestibokého jehlanu je roven součtu obsahů všech bočních stěn. U tohoto jehlanu jsou boční stěny tvořeny šesti trojúhelníky  $A_1A_2V$ ,  $A_2A_3V$ ,  $A_3A_4V$ ,  $A_4A_5V$ ,  $A_5A_6V$  a  $A_6A_1V$ , přičemž tři dvojice těchto trojúhelníků jsou shodné:  $\triangle A_1A_2V \cong \triangle A_4A_5V$ ,  $\triangle A_2A_3V \cong \triangle A_3A_4V$  a  $\triangle A_5A_6V \cong \triangle A_6A_1V$ . Tedy  $S_{pl} = 2S_{A_1A_2V} + 2S_{A_2A_3V} + 2S_{A_5A_6V}$ .
- Vypočítáme obsah pravoúhlého trojúhelníku  $A_1A_2V$ :  $S_{\triangle A_1A_2V} = \frac{a_1 \cdot v_{a_1}}{2}$ ;  
 $v_{a_1} = A_2V = S_{A_5A_6V}$ ; úsečka  $S_{A_5A_6V}$  je také ramenem rovnoramenného  $\triangle A_2S_{A_5A_6}V$ , který rozdělíme podle jeho výšky  $v$  na dva pravoúhlé trojúhelníky. Z pravoúhlého  $\triangle A_3S_{A_5A_6}V$  vypočítáme Pýthagorovou větou délku jeho přepony  $S_{A_5A_6V}$ :  
 $|S_{A_5A_6V}| = \sqrt{3^2 + 8^2} \text{ cm} = \sqrt{73} \text{ cm} \doteq 8,54 \text{ cm}$ ;  $|S_{A_5A_6V}| = v_{a_1} = 8,54 \text{ cm}$ .  
Tedy  $S_{\triangle A_1A_2V} = \frac{a_1 \cdot v_{a_1}}{2} = \frac{3 \cdot 8,54}{2} \text{ cm} = 12,81 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme obsah pravoúhlého trojúhelníku  $A_2A_3V$ :  $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{a_2 \cdot v_{a_2}}{2}$ ;  
přičemž  $v_{a_2} = v = 8 \text{ cm}$ . Tedy  $S_{\triangle A_2A_3V} = \frac{a_2 \cdot v}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme obsah rovnoramenného trojúhelníku  $A_5A_6V$ :  $S_{\triangle A_5A_6V} = \frac{a_5 \cdot v_{a_5}}{2}$ ;  
přičemž  $v_{a_5} = S_{A_5A_6V} = v_{a_1} = 8,54 \text{ cm}$ .  
Tedy  $S_{\triangle A_5A_6V} = \frac{a_5 \cdot v_{a_5}}{2} = \frac{6 \cdot 8,54}{2} \text{ cm} = 25,62 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme obsah pláště  $S_{pl}$  tohoto jehlanu:  $S_{pl} = 2S_{A_1A_2V} + 2S_{A_2A_3V} + 2S_{A_5A_6V} =$   
 $= 2 \cdot 12,81 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 12 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 25,62 \text{ cm}^2 = 100,86 \text{ cm}^2$ .
- Vypočítáme povrch  $S$  tohoto hranolu:  
 $S = S_p + S_{pl} = 27 \text{ cm}^2 + 100,86 \text{ cm}^2 \doteq 127,9 \text{ cm}^2$ .
- Objem daného nekonvexního kolmého pětibokého hranolu je  $72 \text{ cm}^3$  a jeho povrch je  $127,9 \text{ cm}^2$ .

**Příklad 5.1.3** Vypočítejte objem  $V$  a povrch  $S$  nekonvexního dvanáctistěnu  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$  vyobrazeném na obr. 5.8. Bod  $S$  je středem pomyslné pomocné krychle  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$  i vnitřní dutiny ve tvaru krychle  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ . Dále platí  $|A_1A_2| = |A_2S| = \sqrt{3} \text{ m}$ , poměr délek úseček  $|A_1A_2| : |A_2G_1|$  je roven  $1 : 3$ .



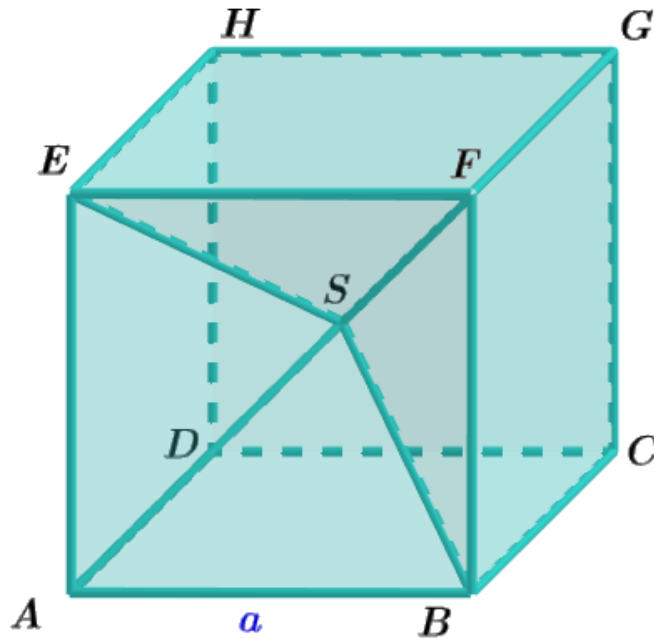


Obrázek 5.8: Ilustrace k Příkladu 5.1.3

### Řešení

- Objem  $V$  daného dvanáctistěnu vypočítáme tak, že od objemu  $V_1$  krychle  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$  o hraně  $a_1$  odečteme objem  $V_2$  krychle  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$  o hraně  $a_2$ :  $V = V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} - V_{A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2}$ .
- Pro objem  $V_1$  platí  $V_1 = V_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1} = a_1^3$ . Musíme tedy určit  $a_1$ .
- Vypočítáme délku hrany  $a_1$  krychle  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ . Pro stěnovou úhlopříčku  $u_{s_1}$  krychle o hraně  $a_1$  platí  $u_{s_1} = a_1\sqrt{2}$ ; pro tělesovou úhlopříčku  $u_{t_1}$  krychle o hraně  $a_1$  platí  $u_{t_1} = a_1\sqrt{3}$ . Vycházíme z pravoúhlého  $\triangle A_1C_1G_1$ :  $A_1C_1 = u_{s_1} = a_1\sqrt{2}$ ,  $C_1G_1 = a_1$ ,  $G_1A_1 = u_{t_1} = a_1\sqrt{3}$ . Víme, že  $|A_1A_2| = \sqrt{3}$  m;  $|A_1A_2| : |A_2G_1| = 1 : 3$ ;  $u_t = |A_1G_1| = 4 \cdot |A_1A_2| = 4\sqrt{3}$  m. Tedy  $a_1 = 4$  m.
- Vypočítáme objem krychle  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ :  $V_1 = a_1^3 = 64$  m<sup>3</sup>.
- Pro objem  $V_2$  platí  $V_2 = V_{A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2} = a_2^3$ .
- Vypočítáme délku hrany  $a_2$  krychle  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ . Pro stěnovou úhlopříčku  $u_{s_2}$  krychle o hraně  $a_2$  platí  $u_{s_2} = a_2\sqrt{2}$ ; pro tělesovou úhlopříčku  $u_{t_2}$  krychle o hraně  $a_2$  platí  $u_{t_2} = a_2\sqrt{3}$ . Vycházíme z pravoúhlého  $\triangle A_2C_2G_2$ :  $A_2C_2 = u_{s_2} = a_2\sqrt{2}$ ,  $C_2G_2 = a_2$ ,  $G_2A_2 = u_{t_2} = a_2\sqrt{3}$ . Víme, že  $|A_2S| = \sqrt{3}$  m;  $|A_2S| : |SG_2| = 1 : 1$ ;  $u_{t_2} = |A_2G_2| = 2 \cdot |A_2S| = 2\sqrt{3}$  m. Tedy  $a_2 = 2$  m.
- Vypočítáme objem krychle  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ :  $V_2 = a_2^3 = 8$  m<sup>3</sup>.
- Vypočítáme objem dvanáctistěnu:  $V = V_1 - V_2 = 64$  m<sup>3</sup> -  $8$  m<sup>3</sup> =  $56$  m<sup>3</sup>.
- Povrch  $S$  mnohostěnu vypočítáme tak, že spočítáme obsah jeho sítě čili sečteme obsahy všech jeho stěn. Jeho stěny jsou tvořeny šesti shodnými čtverci o straně  $a_1$  a šesti shodnými čtverci o straně  $a_2$ :  $S = (6 \cdot a_1^2) + (6 \cdot a_2^2) = 96$  m<sup>2</sup> +  $24$  m<sup>2</sup> =  $120$  m<sup>2</sup>.
- Objem nekonvexního dvanáctistěnu je  $56$  m<sup>3</sup> a jeho povrch je  $120$  m<sup>2</sup>.

**Příklad 5.1.4** Vyjádřete objem  $V$  a povrch  $S$  nekonvexního devítistěnu  $ABCDEFGHS$  vyobrazeném na obr. 5.9. Bod  $S$  je středem pomyslné pomocné krychle  $ABCDEFGH$  o hraně  $a$ .

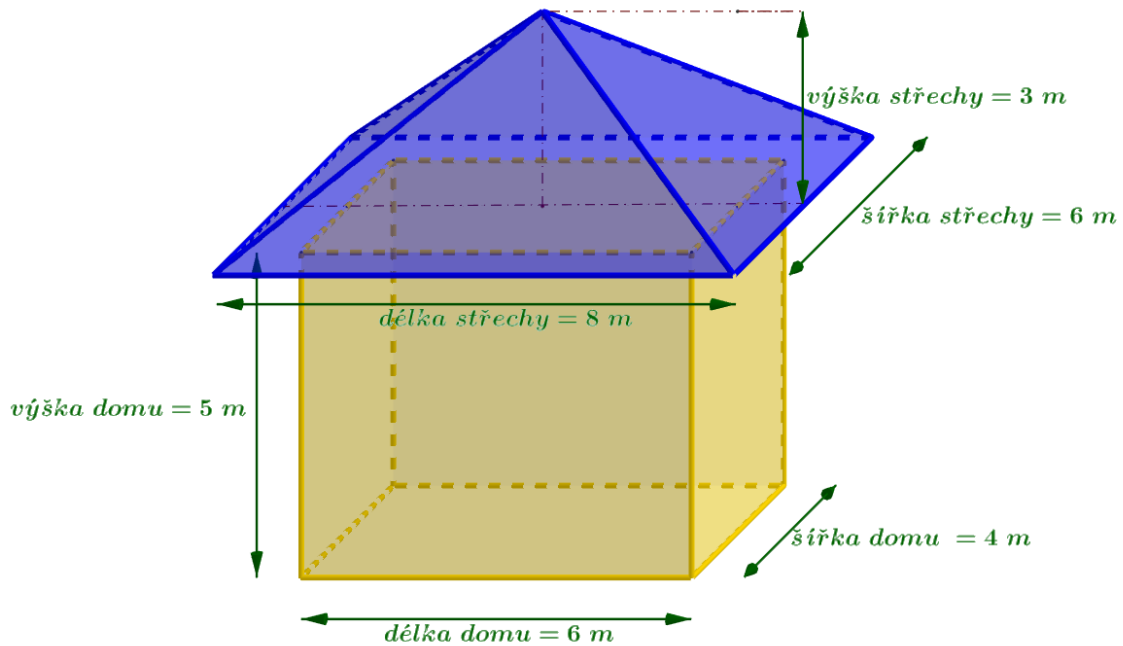


Obrázek 5.9: Ilustrace k Příkladu 5.1.4

### Řešení

- Objem  $V$  daného devítistěnu vyjádříme tak, že od objemu  $V_1$  krychle  $ABCDEFGH$  o hraně  $a$  odečteme objem  $V_2$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABFES$  s výškou  $\frac{1}{2}a$ :  
 $V = V_{ABCDEFGH} - V_{ABFES}$ .
- Pro objem  $V_1$  platí  $V_1 = a^3$ .
- Pro objem  $V_2$  platí  $V_2 = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}a^2 \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{6}a^3$ .
- Vyjádříme objem dvanáctistěnu:  $V = V_1 - V_2 = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$ .
- Povrch  $S$  mnohostěnu určíme tak, že vyjádříme obsah jeho sítě čili sečteme obsahy všech jeho stěn. Jeho stěny jsou tvořeny pěti shodnými čtverci o straně  $a$  a čtyřmi shodnými rovnoramennými trojúhelníky o základně  $a$  a výšce  $v_a$ . Tedy  $S = 5a^2 + 4 \frac{a \cdot v_a}{2}$ .
- Pro určení  $v_a$  potřebujeme znát délku  $b$  ramena rovnoramenného trojúhelníku, kterou vyjádříme pomocí délky tělesové úhlopříčky  $u_t$  krychle  $ABCDEFGH$  o hraně délky  $a$  takto:  $b = \frac{1}{2}u_t = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ . Výšku  $v_a$  (která je zároveň těžnicí) rovnoramenného trojúhelníku o základně délky  $a$  a ramenech délky  $b$  vyjádříme pomocí Pýthagorovy věty z pravoúhlého  $\triangle SABBS$ ;  $v_a = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ .
- Vyjádříme povrch tohoto devítistěnu:  
 $S = 5a^2 + 4 \frac{a \cdot v_a}{2} = 5a^2 + 4 \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a}{2} = 5a^2 + a^2\sqrt{2} = a^2(5 + \sqrt{2})$ .
- Objem nekonvexního devítistěnu  $ABCDEFGHS$  je  $V = \frac{5}{6}a^3$  a jeho povrch je  $S = a^2(5 + \sqrt{2})$ .

**Úloha 5.1.1** Na obr. 5.10 je dán dům se střechou ve tvaru čtyřbokého jehlanu včetně rozměrů domu. Vypočítejte povrch obvodových zdí (otvory pro okna zanedbejte) a objem střechy (půdy) tohoto domu.



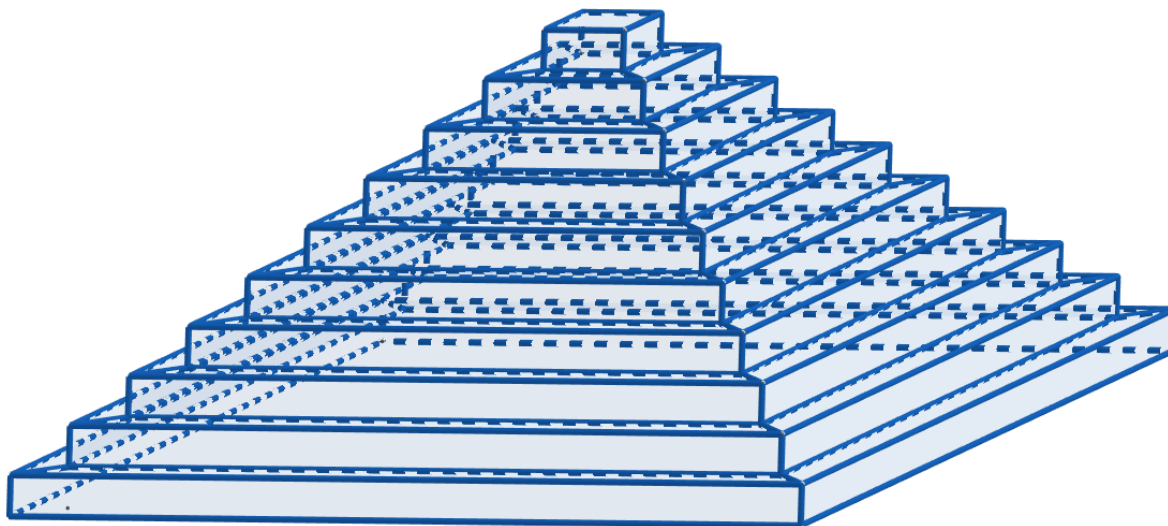
Obrázek 5.10: Ilustrace k Úloze 5.1.1

### Řešení

- Pro určení povrchu obvodových zdí tohoto domu, musíme vypočítat obsah stěn, které tvoří obvodové zdi.
- Obvodové zdi domu jsou tvořeny dvěma dvojicemi navzájem shodných obdélníků.
- První dvojice obdélníků má rozměry délky domu  $a = 6$  m a výšky domu  $c = 5$  m. Obsah  $S_1$  tohoto obdélníku je  $S_1 = a \cdot c = 6 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 30 \text{ m}^2$ .
- Druhá dvojice obdélníků má rozměry šířky domu  $b = 4$  m a výšky domu  $c = 5$  m. Obsah  $S_2$  tohoto obdélníku je  $S_2 = b \cdot c = 4 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$ .
- Vypočítáme obsah  $S_O$  obvodových stěn:  

$$S_O = 2S_1 + 2S_2 = 2 \cdot 30 \text{ m}^2 + 2 \cdot 20 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2.$$
- Pro určení objemu půdy tohoto domu, musíme vypočítat objem  $V$  čtyřbokého jehlanu, jehož podstava je obdélník o rozměrech délky střechy  $d = 8$  m a šířky střechy  $e = 6$  m a jehož výška  $v$  je rovna výšce střechy  $f = 3$  m.
- Pro objem  $V$  jehlanu platí:  $V = \frac{1}{3}S_p v$ .
- Obsah podstavy  $S_p$  tohoto čtyřbokého jehlanu je  $S_p = d \cdot e = 8 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$ .
- Pro objem jehlanu platí  $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}S_p f = \frac{1}{3} \cdot 48 \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ m} = 48 \text{ m}^3$ .
- Povrch obvodových zdí daného domu je  $100 \text{ m}^2$  a objem jeho půdy je  $48 \text{ m}^3$ .

**Úloha 5.1.2** Vypočítejte objem  $V$  tělesa vyobrazeném na obr. 5.11, které představuje model starověkého chrámu zvaného zikurrat. Je složeno z deseti stupňů – pravidelných čtyřbokých hranolů. Délka podstavné hrany prvního stupně je 40 m, každý další stupeň (hranol) má podstavnou hranu o 4 metry kratší. Výška  $v$  každého dalšího stupně (hranolu) je 2 m.



Obrázek 5.11: Ilustrace k Úloze 5.1.2

### Řešení

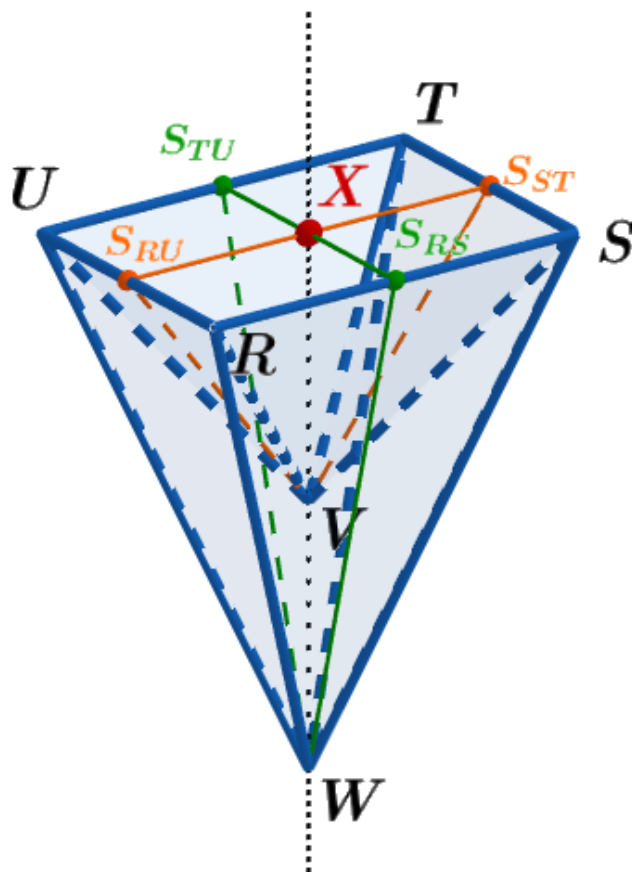
- Objemu tohoto nekonvexního tělesa je roven součtu objemů  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9, 10$ ) jednotlivých pravidelných čtyřbokých hranolů:  

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10}.$$
- Pro objem  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9, 10$ ) každého pravidelného čtyřbokého hranolu platí:  

$$V_i = S_{p_i} v.$$
Výška každého hranolu je rovna  $v = 2$  m.
- Určíme délky podstavných hran  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9, 10$ ) jednotlivých hranolů;  $a_1 = 40$  m;  $a_2 = 36$  m;  $a_3 = 32$  m;  $a_4 = 28$  m;  $a_5 = 24$  m;  $a_6 = 20$  m;  $a_7 = 16$  m;  $a_8 = 12$  m;  $a_9 = 8$  m;  $a_{10} = 4$  m.
- Vypočítáme obsahy podstav  $S_{p_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 9, 10$ ) jednotlivých hranolů;  $S_{p_i} = a_i^2$ :  
 $S_{p_1} = 1\,600$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_2} = 1\,296$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_3} = 1\,024$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_4} = 784$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_5} = 576$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_6} = 400$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_7} = 256$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_8} = 144$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_9} = 64$  m<sup>2</sup>;  $S_{p_{10}} = 16$  m<sup>2</sup>.
- Vypočítáme objemy  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9, 10$ ) jednotlivých hranolů;  $V_i = S_{p_i} v$ :  
 $V_1 = 1\,600$  m<sup>2</sup> · 2 m = 3 200 m<sup>3</sup>;  $V_2 = 1\,296$  m<sup>2</sup> · 2 m = 2 592 m<sup>3</sup>;  
 $V_3 = 1\,024$  m<sup>2</sup> · 2 m = 2 048 m<sup>3</sup>;  $V_4 = 784$  m<sup>2</sup> · 2 m = 1 568 m<sup>3</sup>;  
 $V_5 = 576$  m<sup>2</sup> · 2 m = 1 152 m<sup>3</sup>;  $V_6 = 400$  m<sup>2</sup> · 2 m = 800 m<sup>3</sup>;  $V_7 = 256$  m<sup>2</sup> · 2 m = 512 m<sup>3</sup>;  
 $V_8 = 144$  m<sup>2</sup> · 2 m = 288 m<sup>3</sup>;  $V_9 = 64$  m<sup>2</sup> · 2 m = 128 m<sup>3</sup>;  $V_{10} = 16$  m<sup>2</sup> · 2 m = 32 m<sup>3</sup>.
- Vypočítáme objem  $V$  složeného nekonvexního tělesa:  

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} = 3\,200$$
 m<sup>3</sup> + 2 592 m<sup>3</sup> + 2 048 m<sup>3</sup> + 1 568 m<sup>3</sup> + 1 152 m<sup>3</sup> + 800 m<sup>3</sup> + 512 m<sup>3</sup> + 288 m<sup>3</sup> + 128 m<sup>3</sup> + 32 m<sup>3</sup> = 12 320 m<sup>3</sup>.
- Objem modelu starověkého chrámu zvaného zikurrat je 12 320 m<sup>3</sup>.

**Úloha 5.1.3** Vypočítejte objem  $V$  a povrch  $S$  nekonvexního osmistěnu  $RSTUVW$  zobrazeném na obr. 5.12; toto těleso vzniklo „rozdílem“ dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů se shodnými podstavami a různými výškami. Bod  $X$  je středem čtverce  $RSTU$ ,  $|WX| = 8$  km,  $|VX| = 4$  km,  $a = |RS| = 6$  km. Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.



Obrázek 5.12: Ilustrace k Úloze 5.1.3

### Řešení

- Objem  $V$  nekonvexního osmistěnu  $RSTUVW$  vypočítáme tak, že od objemu  $V_1$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $RSTUW$  o podstavné hraně  $a = 6$  km a výšce  $v_1 = |WX| = 8$  km odečteme objem  $V_2$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $RSTUV$  o podstavné hraně  $a = 6$  km a výšce  $v_2 = |VX| = 4$  km:  $V = V_1 - V_2$ .
- Pro objem  $V_1$  platí  $V_1 = \frac{1}{3}S_p v_1 = a^2 \cdot v_1 = 36 \text{ km}^2 \cdot 8 \text{ km} = 288,00 \text{ km}^3$ .
- Pro objem  $V_2$  platí  $V_2 = \frac{1}{3}S_p v_2 = a^2 \cdot v_2 = 36 \text{ km}^2 \cdot 4 \text{ km} = 144,00 \text{ km}^3$ .
- Vypočítáme objem nekonvexního osmistěnu:  
 $V = V_1 - V_2 = 288 \text{ km}^3 - 144 \text{ km}^3 = 144,0 \text{ km}^3$ .
- Povrch  $S$  mnohostěnu určíme tak, že vypočítáme obsah jeho sítě čili sečteme obsahy všech jeho stěn. Jeho stěny jsou tvořeny dvěma čtveřicemi rovnoramenných trojúhelníků, v každé čtveřici jsou trojúhelníky shodné. První čtveřice shodných rovnoramenných trojúhelníků má základnu  $a$ , délku ramen  $b$  a délku výšky  $v_3$ . Druhá čtveřice shodných rovnoramenných trojúhelníků má základnu  $a$ , délku ramen  $c$  a délku výšky  $v_4$ . Tedy  $S = 4 \cdot \frac{a \cdot v_3}{2} + 4 \cdot \frac{a \cdot v_4}{2}$ .

- Body  $S_{RS}, S_{ST}, S_{TU}, S_{RU}$  jsou středy příslušných hran.
- Pro určení výšky  $v_3$  potřebujeme znát  $|WS_{RS}| = |WS_{TU}| = v_3$ , která je zároveň délkou ramene rovnoramenného trojúhelníku  $\triangle S_{RS}S_{TU}W$ . Tento rovnoramenný  $\triangle S_{RS}S_{TU}W$  o základně délky  $a = 6$  km rozdělíme výškou  $v_1$  na dva pravoúhlé trojúhelníky a vyjádříme  $v_3$  pomocí Pythagorovy věty:  

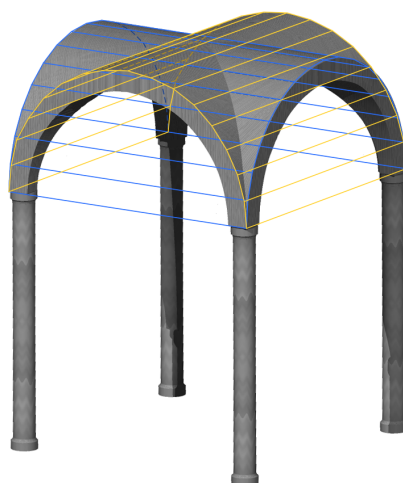
$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} \text{ km} = \sqrt{8^2 + 3^2} \text{ km} = \sqrt{73} \text{ km} \doteq 8,54 \text{ km}.$$
- Pro určení výšky  $v_4$  potřebujeme znát  $|VS_{ST}| = |VS_{RU}| = v_4$ , která je zároveň délkou ramene rovnoramenného trojúhelníku  $\triangle S_{ST}S_{RU}V$ . Tento rovnoramenný  $\triangle S_{ST}S_{RU}V$  o základně délky  $a = 6$  km rozdělíme výškou  $v_2$  na dva pravoúhlé trojúhelníky a vyjádříme  $v_4$  pomocí Pythagorovy věty:  

$$v_4 = \sqrt{v_2^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} \text{ km} = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ km} = \sqrt{25} \text{ km} = 5 \text{ km}.$$
- Vypočítáme povrch tohoto osmistěnu:  $S = 4 \cdot \frac{a \cdot v_3}{2} + 4 \cdot \frac{a \cdot v_4}{2} =$   
 $= 4 \cdot \frac{6 \cdot 8,54}{2} \text{ km}^2 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \text{ km}^2 \doteq 4 \cdot 25,62 \text{ km}^2 + 4 \cdot 15 \text{ km}^2 \doteq 162,5 \text{ km}^2.$
- Objem nekonvexního osmistěnu  $RSTUVW$  je  $144,0 \text{ km}^3$  a jeho povrch je  $162,5 \text{ km}^2$ .

# 6. Válce

## 6.1 Válce

V této kapitole se budeme zabývat dalším typem tělesa využívaném v mnoha různých odvětvích. Jedním z nich je architektura. Jak by mohly být realizovány stavební konstrukce bez znalosti těles označovaných za válce? Příkladem těchto konstrukcí mohou být oblouky a klenby. Na obr. 6.1 částí dvou válců. Přejetím kurzoru myši přes následující obrázek zobrazíte obrysy těles z fotografie.



Obrázek 6.1: Křížová klenba skládající se z částí dvou válců [42]

Případně, jak by mohla být postavená rotunda sv. Jiří a sv. Vojtěcha na hoře Říp, jejíž konstrukce se skládá z dvou celých válců a jedné části válce (obr. 6.2)?



Obrázek 6.2: Rotunda sv. Jiří a sv. Vojtěcha na hoře Říp (CZ)[43]

I u dalších architektonických konstrukcí bylo využito tvaru válců, viz vodárenská věž poblíž města Mittweida v Německu (obr. 6.3).



Obrázek 6.3: Vodárenská věž (Mittweida, Německo) [44]

Mohli bychom si klást otázku, proč taková studna i tunel jsou velmi často ve tvaru válce. Důvod by mohl být ten, že nejjednodušší technika jejich konstrukce je vertikální, případně horizontální vrtání výkonnými stroji do půdy, a tedy konstruueme v průřezu kruh, který postupně vytahujeme do prostoru a dostáváme pomyslný válec. Na obr. 6.4 se nachází studna válcového tvaru v budově Černínského paláce a na obr. 6.5 je vyobrazený tunel v sopečné jeskyni Gruta do Carvão na Azorách.



Obrázek 6.4: Studna v prostorách Ministerstva zahraničních věcí (Praha, CZ)





Obrázek 6.5: Betonový tunel (Ponta Delgada, Portugalsko)

Dalším příkladem odvětví, kde využíváme tělesa ve tvaru válce, by mohlo být vodohospodářství. Zde uvedeme příklad vodovodních trubek (obr. 6.6), které mají válcový tvar. A dále v chemickém průmyslu, konkrétně v laboratořích, nacházíme padesátimililitrový odměrný válec, viz obr. 6.7.



Obrázek 6.6: Vodovodní trubky ve tvaru válce [47]



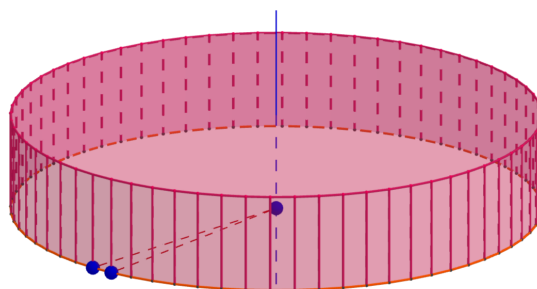
Obrázek 6.7: Odměrný válec s červenou tekutinou v chemické laboratoři (vpravo)

## 6.2 Zavedení těles válcového typu

### Poznámka

V kontextu válců bychom si mohli připomenout  $n$ -boký pravidelný hranol. Kdybychom si představili například 100-boký pravidelný hranol  $n = 100$ , tak by tento 100-boký pravidelný hranol připomínal spíše válec. Na následujícím appletu (obr. 6.8) se nachází animace, ve které se postupně mění počty vrcholů podstavy  $n$ -bokého pravidelného hranolu,  $n \in \mathbb{N}; n = \{3, 4, \dots, 100\}$ .

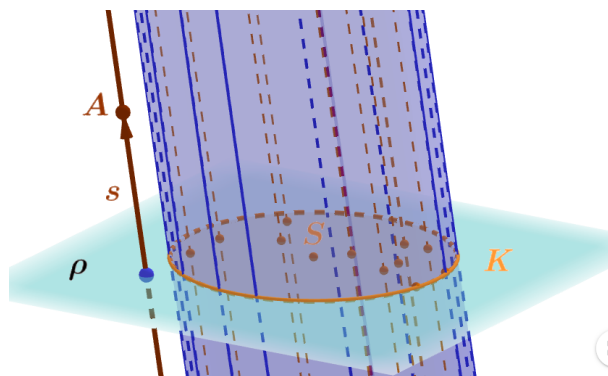
$$n \in \mathbb{N}; n = \{3, 4, \dots, 100\}$$



Obrázek 6.8:  $n$ -boký pravidelný hranol

Tak, jako hranolový prostor, hranolovou plochu a hranol, zavádíme kuželový prostor, kuželovou plochu a kužel. Mějme dán kruh  $K$  se středem  $S$  v rovině  $\rho$  a přímku  $s$ , která je s rovinou  $\rho$  různoběžná. Jako **válcový prostor** označíme sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou  $s$  a které protínají daný kruh  $K$ . Každou přímku rovnoběžnou s přímkou  $s$  nazýváme **směrovou přímkou** válcového prostoru.

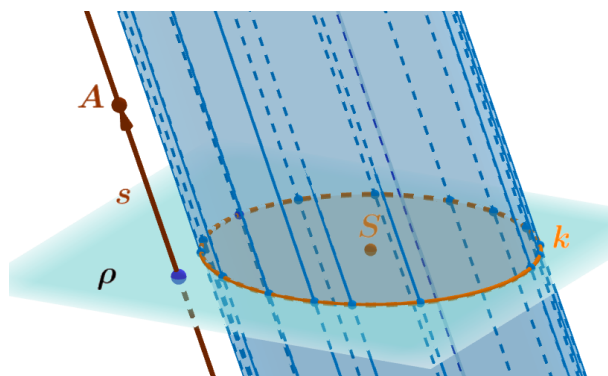
Na následujícím appletu (obr. 6.9) se nachází **kruh**  $K$  se středem  $S$  v rovině  $\rho$  a **směrová přímka**  $s$ , které určují zobrazený **válcový prostor**. Změnou polohy **bodů**  $A$  měníme tvar válcového prostoru.



Obrázek 6.9: Válcový prostor

Jako **válcovou plochu** označujeme sjednocení všech přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou  $s$  a které protínají kružnici  $k$ , kterou je daný kruh  $K$  vymezen. Válcovou plochu pokládáme za hranici válcového prostoru.

Na appletu (obr. 6.10) se nachází **kružnice**  $k$  v rovině  $\rho$  a směrová přímka  $s$ , které dohromady určují **válcovou plochu**. Změnou polohy **bodů**  $A$  měníme tvar kuželové plochy.

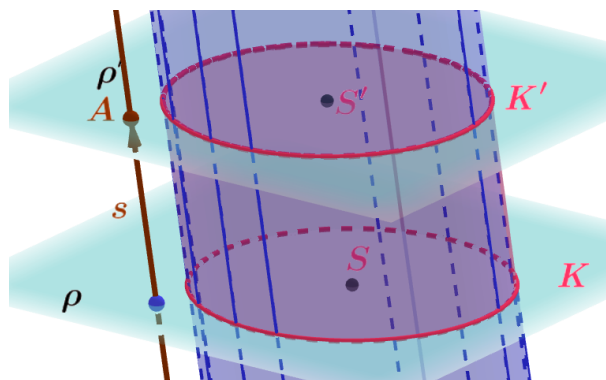


Obrázek 6.10: Válcová plocha

#### Definice

Průnikem válcového prostoru a prostorové vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou rovnoběžné s přímkou  $s$ , získáme těleso, které nazýváme **válec**.

Na následujícím appletu (obr. 6.11) je zobrazen průnik válcového prostoru a prostorové vrstvy, která je ohraničená dvěma různými rovnoběžnými rovinami. Vznikne tak **válec**. Změnou polohy **bodů**  $A$  měníme tvar válce a zároveň měníme tloušťku prostorové vrstvy.

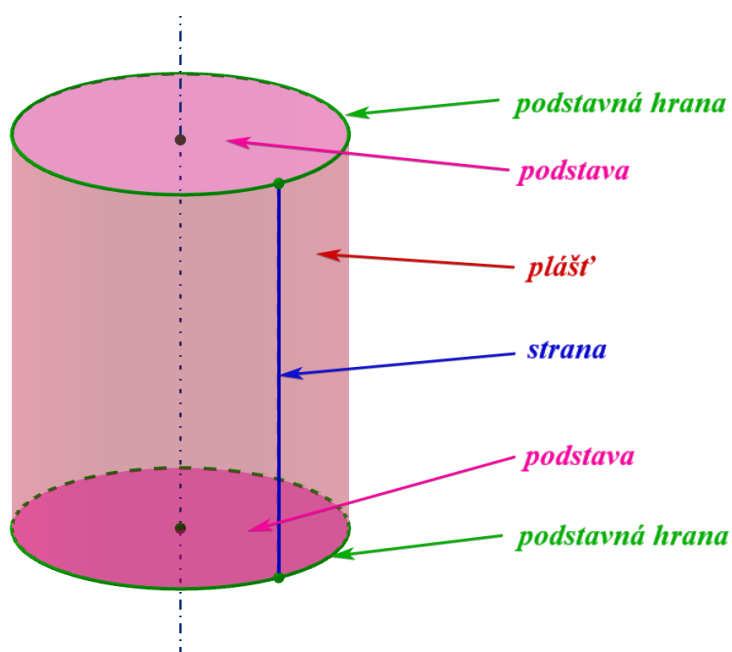


Obrázek 6.11: Válec

### Definice

Za **podstavy** válce jsou označovány kruhy, které tvoří řezy hraničních rovin vrstvy s válcovým prostorem. Kružnici ležící v podstavě válce označujeme jako **podstavnou hranu**. **Pláštěm válce** je sjednocení všech úseček, které prochází podstavnou hranou a zároveň jsou rovnoběžné se směrovou přímkou  $s$ . Jednotlivé polohy těchto úseček označujeme jako **strany válce**.

Na následujícím obr. 6.12 jsou tyto pojmy ilustrované.

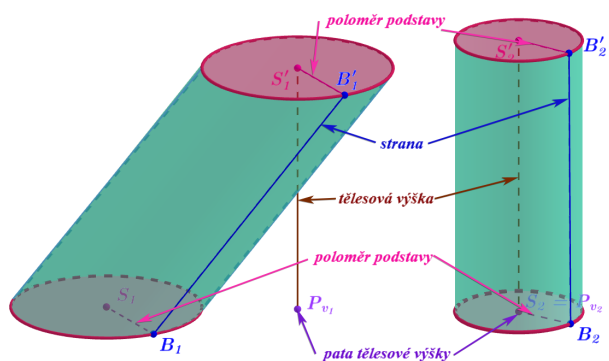


Obrázek 6.12: Podstavy, podstavná hrana, plášť válce a strana válce

### Definice

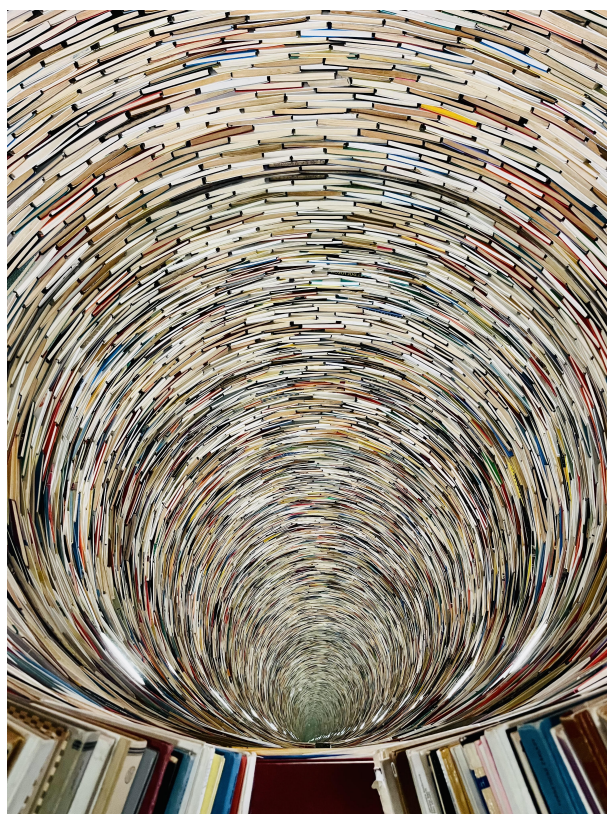
Vzdálenost podstav válce se nazývá **tělesová výška** nebo také **výška válce**.

Tento pojem je ilustrovaný na následujícím obr. 6.13.



Obrázek 6.13: Tělesová výška, strana válce a poloměr podstavy

Iluzi nekonečné válcové plochy evokuje umělecká instalace za pomoci zrcadel jménem Sloup vědění nacházející se v pražské Ústřední knihovně na Mariánském náměstí. Sloup skládající se z osmi tisíc svazků knih vytvořil slovenský výtvarník Matej Krén v roce 1998, viz obr. 6.14.



Obrázek 6.14: Sloup vědění připomínající nekonečnou válcovou plochu ve foyer Ústřední knihovny v Praze

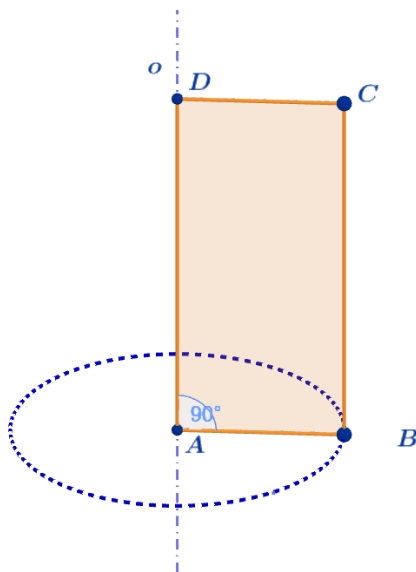
Kromě předchozího zavedení těles válcového typu, můžeme ještě zavést tzv. rotační válec dalším způsobem, a to následovně.

## 6.2.1 Jak vzniká rotační válec

### Definice

**Rotační válec** vytvoříme rotací obdélníku, resp. čtverce, okolo přímky, ve které je obsažena jedna jeho strana. Jednotlivé body této úsečky vytvoří rotací podstavy rotačního válce, resp. kruhy. Rotací zbývajících stran obdélníku vznikne plášť kužele.

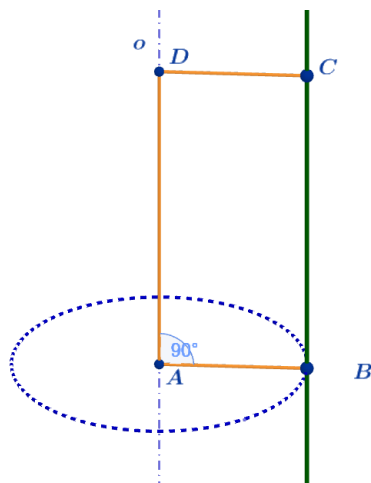
Je dán obdélník, případně čtverec,  $ABCD$  a osa rotace  $o$ , která obsahuje stranu  $BC$ , rotací obdélníku, případně čtverce,  $ABCD$  okolo této osy  $o$  dostáváme rotační válec s poloměrem podstavy  $r = |AB| = |DC|$  a výškou  $v = |BC| = |AD|$ . Podstavy rotačního válce, resp. 2 kruhy, vznikají rotací úseček  $AB$  a  $CD$ . Plášť rotačního válce vzniká rotací úsečky  $AD$  a strana rotačního válce je každá dílčí poloha úsečky  $AD$ . Průměr podstavy je roven dvojnásobku poloměru  $d = 2r = |AA'|$ , viz obr. 6.15.



Obrázek 6.15: Vznik rotačního válce rotací obdélníku okolo osy  $o$

### Definice

Rotací přímky  $|BC|$  okolo osy  $o$  vzniká **rotační válcová plocha**. Prostor touto plochou ohraničený označujeme **rotační válcový prostor**. Rotační válcová plocha je všech množina bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od osy rotace  $o$  je kladná a zároveň konstantní. Na následujícím obr. 6.16 je ilustrovaná rotační válcová plocha.



Obrázek 6.16: Vznik válcové plochy rotací přímky  $BC$  okolo osy  $o$

## 6.3 Klasifikace válců

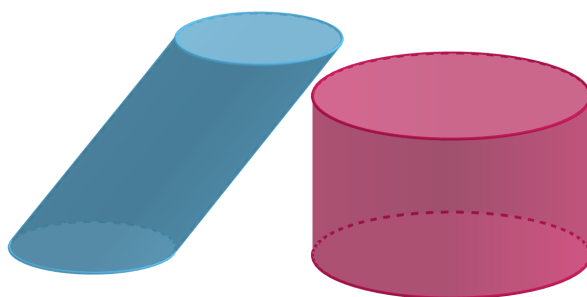
Válce můžeme klasifikovat podle následujícího kritéria.

### 6.3.1 Kolmé a kosé válce

Kritérium, podle kterého lze klasifikovat válce, je odchylka směrové přímky válcového prostoru a roviny podstavy. Válec, jehož strany jsou kolmé k podstavě (čili směrová přímka je kolmá k rovině podstavy), se nazývá **kolmý válec**. Každý kolmý válec s kruhovou podstavou můžeme označit jako **rotační**, neboť může vzniknout rotací, jak jsme si zavedli v předchozí kapitole. Pokud jeho strany nejsou kolmé k podstavě, tak se jedná o **kosý válec** (ilustrace těchto pojmů viz obr. 6.17).

#### Poznámka

Kosý válec nemůže vzniknout rotací.



Obrázek 6.17: Zleva: Kosý válec a kolmý válec neboli rotační

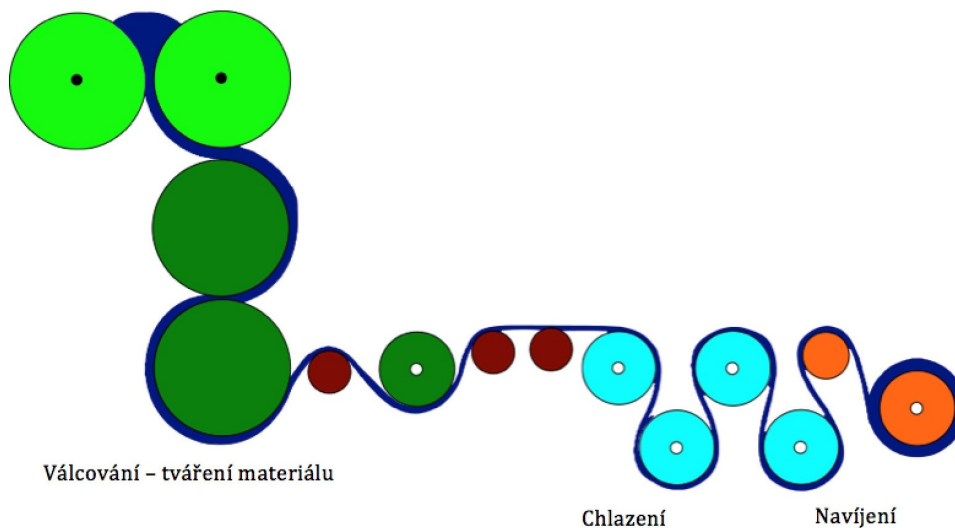
A co takové válcování? Za zmínku stojí pární válec, jenž sloužil v minulosti k zpevnování pozemních komunikací, dnes již je takovýto funkční parní stroj spíše unikát a v současnosti

tento druh práce obstarávají hutní stroje, jejichž nejdůležitější částí je tzv. „běhoun“ či „kulidlo“, který má právě tvar kolmého válce, viz obr. 6.18.



Obrázek 6.18: Parní válec u firmy Magyar Kozut (Kisbéri, Maďarsko) [111]

Kromě válcování silnic, rovněž válcujeme kovy, plasty nebo papír. Jedná se o proces trvalé změny tvaru mezi několika válci, které se otáčejí a které hmotu prodlužují nebo zmenšují její průřez. K tomu nám slouží soustavy kolmých válců tzv. kalandrovací stroje (obr. 6.19).

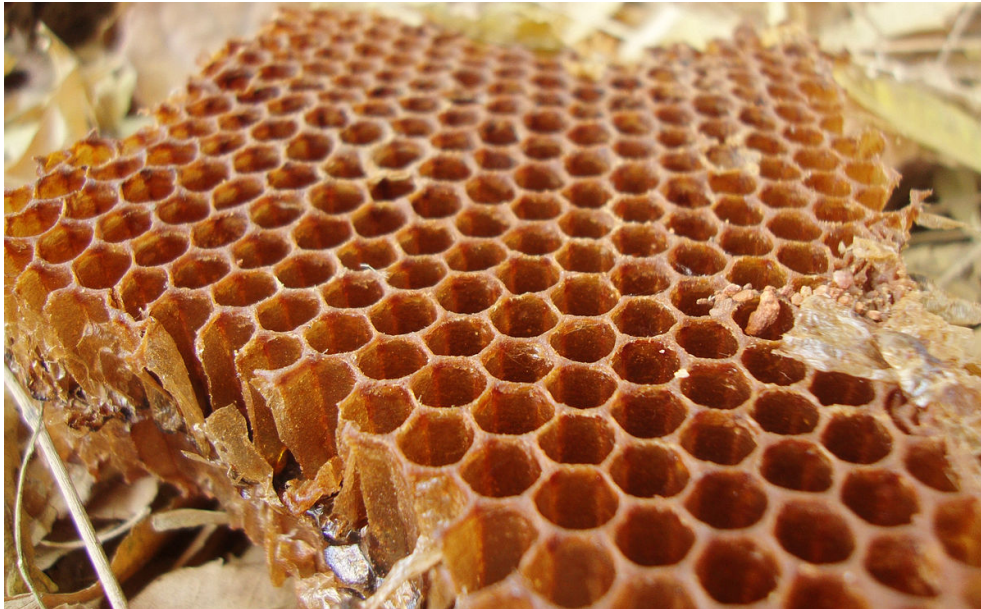


Obrázek 6.19: Schéma kalandrovacího stroje obsahující kolmé válce [46]

Zajímavost ze světa hmyzu – výzkumy inženýrů zjistily, že charakteristický šestiboký tvar buněk v plástvi není úmyslem včelího úsilí. Na podobě plástve se podílí obecné fyzikální



zákony a vlastnosti vosku. Po bedlivém sledování stavby pláství inženýři zjistili, že základní voskové stavební buňky pláství jsou vystavěny nejprve ve tvaru pláště kolmého válce díky rotační symetrii včelího těla. Válcovitý tvar ovšem nevydrží dlouho kvůli zvýšené teplotě včelích těl (45°C). Vosk se stává tvárným a tekutým. Tvar jednotlivých buněk se následně mění tak, jak zákony mechaniky určují (působení povrchového napětí v místech dotyku). Buňky válcovitého tvaru se přeměňují a následně tuhnou ve tvaru pláště šestibokých hranolů. Navíc u včelích pláství pozorujeme zajímavý fakt, a to ten, že šestiboký tvar jednotlivých buněk odpovídá i šestičetné symetrii celé plástve – každá buňka je obklopena šesti buňkami identického tvaru a velikosti, viz obr. 6.20. [[15]]



Obrázek 6.20: Jednotlivé buňky včelí plástve původně vytvářené ve tvaru pláště kolmého válce [89]

Tvar připomínající kosý válec bychom mohli najít u těstovin, a to u konkrétního typu – penne, jedná se o těstoviny rourovitěho tvaru se zkosenými konci. Každá těstovina by tedy tvořila pomyslný plášť kosého válce (obr. 6.21).



Obrázek 6.21: Těstoviny typu penne ve tvaru pláště kosého válce

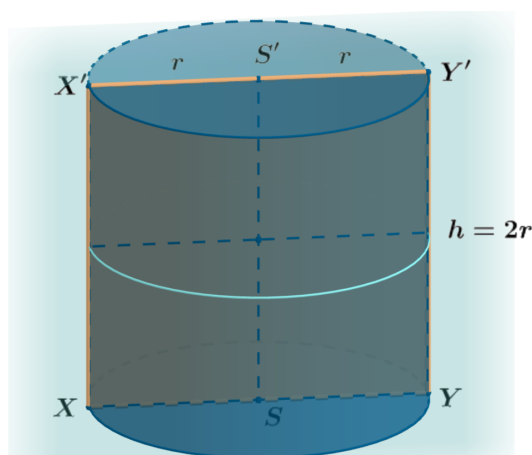
## 6.4 Další typy válců

Existují ještě další typy válců, které si nyní postupně představíme.

### 6.4.1 Válce s kruhovou podstavou

#### Rovnostranný válec

Kolmý neboli rotační válec, jehož osovým řezem (řez rovinou obsahující osu válce) je čtverec, se nazývá **rovnostranný válec** (obr. 6.22). Výška  $h$  tohoto válce o poloměru podstav  $r$  je rovna  $2r$ . Veškeré rovnostranné válce jsou si navzájem podobné.



Obrázek 6.22: Rovnostranný válec

Za základní jednotku hmotnosti soustavy SI je považován kilogram. V současné době se jedná o jedinou jednotku soustavy SI, která nebyla odvozena od přírodního jevu nebo fyzikální vlastnosti hmoty, ale je odvozena od prototypu. Takovýmto prototypem je rovnostranný

válec, jehož výška je rovna 39 mm stejně tak jako průměr jeho podstavy. Je vyrobený ze slitiny 90 % platiny a 10 % iridia. U nás v České republice je státní etalon hmotnosti uchován v Českém hydrometeorologickém institutu, viz obr. 6.23.

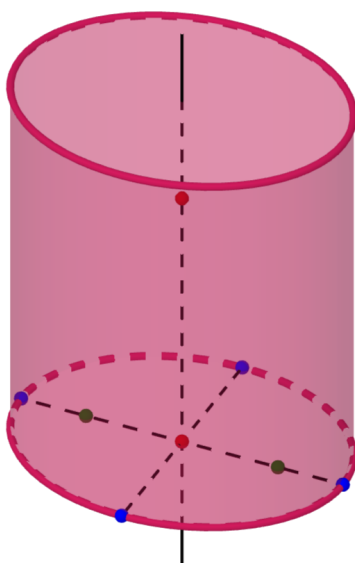


Obrázek 6.23: Český státní etalon hmotnosti ve tvaru rovnostranného válce [62]

#### 6.4.2 Válce s jinou než kruhovou podstavou

Můžeme nalést i jiné typy válců než ty s kruhovou podstavou.

Válec, jehož podstavné hrany jsou shodné elipsy místo kružnice, nazýváme **eliptický válec**, viz obr. 6.24.



Obrázek 6.24: Eliptický válec

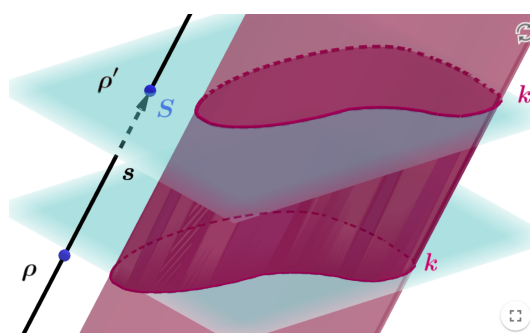
Pokud bychom se vydali do CHKO Český ráj, mohli bychom se zajít podívat na vrch Humprecht, kde se nachází stejnojmenný zámek ve tvaru eliptického válce, viz obr. 6.25.



Obrázek 6.25: Zámek Humprecht ve tvaru eliptického válce v CHKO Český ráj (Sobotka, CZ) [47]

#### Poznámka

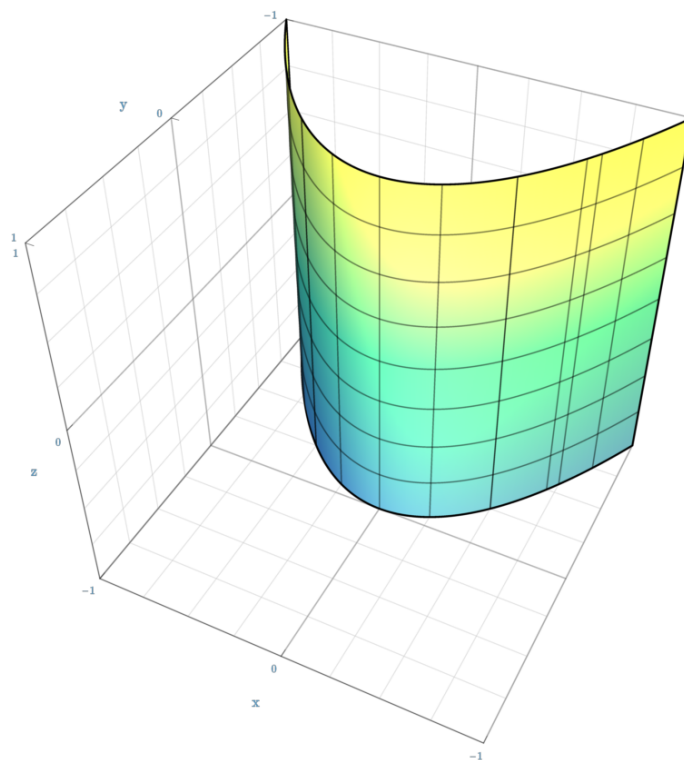
Místo elipsy jako podstavné hrany kužele bychom mohli uvažovat jakoukoli jednoduchou uzavřenou křivku  $k$ , která by určovala tvar podstavy. Jednalo by se o zobecněnou válcovou plochu, zobecněný válcový prostor a zobecněný válec, viz následující obr. 6.26. Změnou polohy bodu  $S$  měníme polohu směrové přímky  $s$  a zároveň měníme tloušťku prostorové vrstvy zobecněného válce.



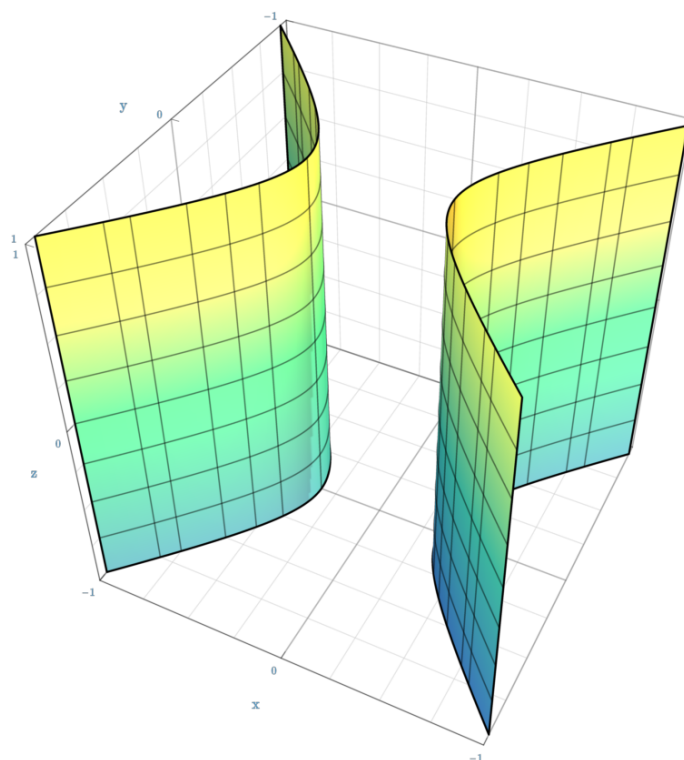
Obrázek 6.26: Zobecněný válec

#### Poznámka

Křivka ohraničující podstavu by mohla být i neuzavřená. V tomto případě bychom dostali například parabolickou nebo hyperbolickou válcovou plochu, viz obr. 6.27 a obr. 6.28.

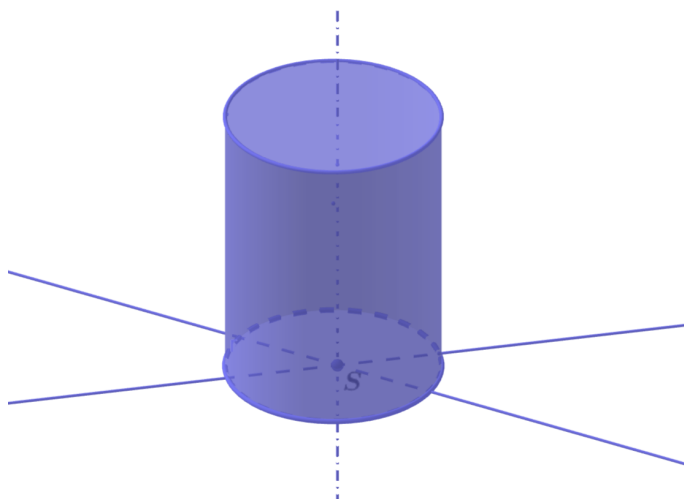


Obrázek 6.27: Parabolická válcová plocha [63]

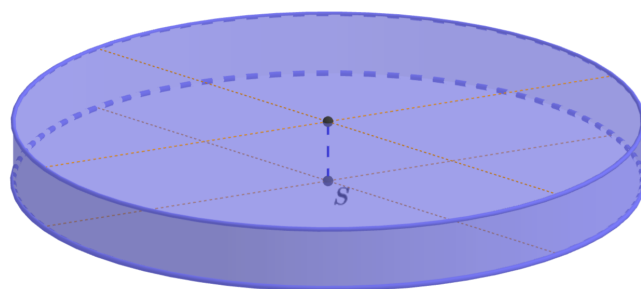


Obrázek 6.28: Hyperbolická válcová plocha [64]

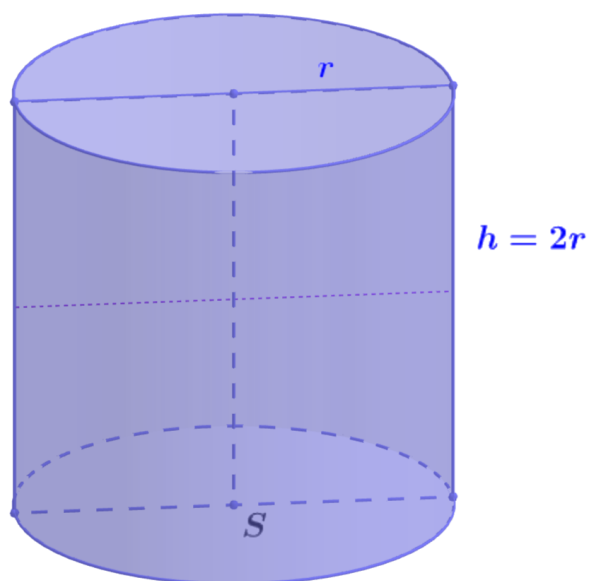
**Úloha 6.4.1** Pod následujícími applety si můžete ověřit znalosti z klasifikace válců. Z uvedených možností vyberte správná tvrzení (jedno) o válcích vyobrazených na obr. 6.29–6.33, kde bod  $S$  je těžištěm podstavy. Správná odpověď se zobrazuje zeleně, nesprávná červeně. Jakmile vyplníte všechny správné odpovědi, celé okénko možností zezelená.



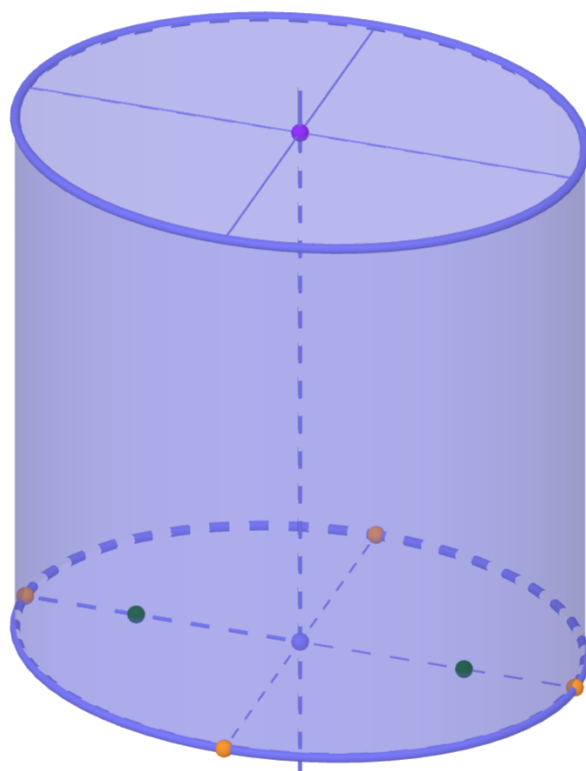
Obrázek 6.29: O jaký válec se jedná?



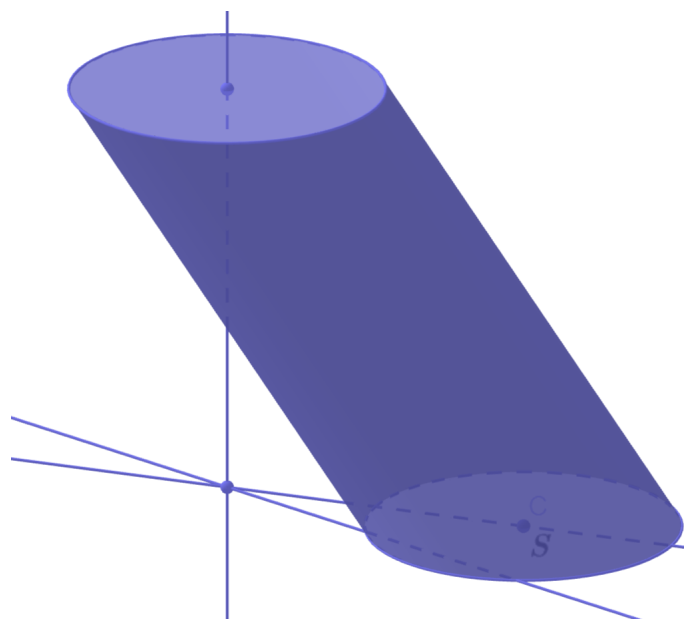
Obrázek 6.30: O jaký válec se jedná?



Obrázek 6.31: O jaký válec se jedná?



Obrázek 6.32: O jaký válec se jedná?



Obrázek 6.33: O jaký válec se jedná?

## 6.5 Antimodely válců

Předtím, než přejdeme k samotnému zavedení vzorců pro výpočet objemů a povrchů válců, si ověříme pochopení předchozích pojmů z této kapitoly. Uvedeme si tzv. antimodely válců.

Antimodelem válce zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice válec

připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o válec nejedná. Prvním příkladem je těleso, které bychom mohli označit za **seříznutý válec**. Na rozdíl od válce se jedná o těleso, které vznikne po odříznutí jeho jedné části rovinou, která není rovnoběžná s podstavami válce, viz obr. 6.34.



Obrázek 6.34: Antimodel válce – budova planetária Tycho de Brahe ve tvaru seříznutého válce (Kodaň, Dánsko) [86]

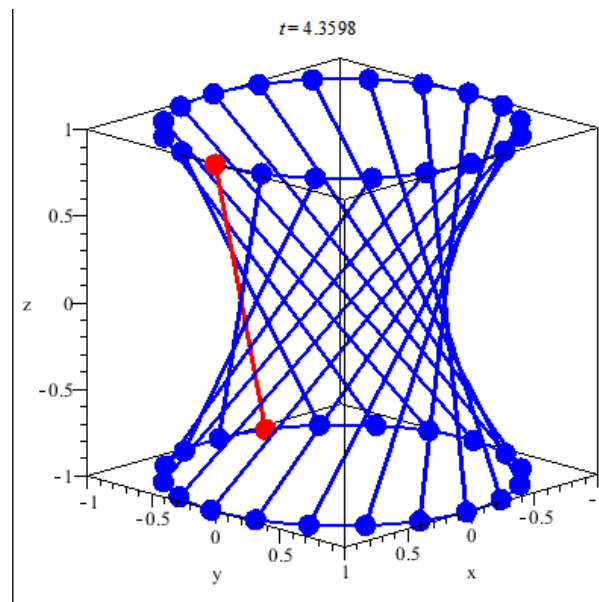
Za další příklad antimodelu válce ze světa kolem nás bychom mohli považovat sud na obrázku 6.35. Je zřejmé, že pláštěm tohoto tělesa není sjednocení všech úseček, které mají své koncové body na podstavných hranách a které jsou rovnoběžné se směrovou přímkou nějakého válcového prostoru.





Obrázek 6.35: Sud

Jako další příklad antimodelu válce si představíme jednodílný rotační hyperboloid, který je přímkovou plochou, který vzdáleně připomíná „zkroucenou válcovou plochu“. Na obr. 6.36 se nachází animace přechodu mezi kolmou válcovou plochou a hyperboloidem, navíc od hyperboloidu se dostaneme až ke kuželové ploše.



Obrázek 6.36: Animace přechodu od kolmé válcové plochy přes hyperboloid až ke kuželové ploše [45]

Mnoho staveb je vybudováno ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu, viz obr. 6.37–6.39. ■



Obrázek 6.37: Vodárenská věž ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Les Essarts-le-Roi, Francie) [83]



Obrázek 6.38: Řídící věž letecké dopravy ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Newcastle, UK) [84]



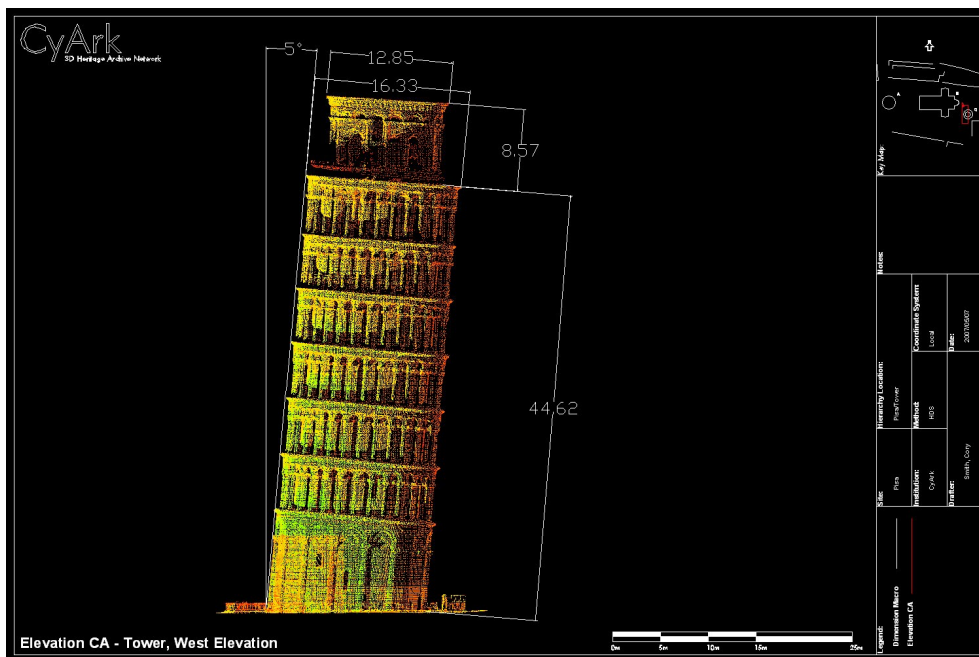
Obrázek 6.39: Nadzemní spojovací koridor mezi budovami ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Manchester, UK) [85]

### Poznámka

Mohlo by se zdát, že se šikmá věž v italském městě Pisa jeví jako kosý válec, ale původním záměrem nebylo, aby tato věž byla šikmá. V prvotních architektonických plánech se mělo jednat o tvar kolmého válce. Postupem času se věž naklonila z důvodu mělce založených základů vybudovaných v měkké hornině. Jedná se tedy o nakloněný kolmý válec, který se propadl na jedné straně do země. Abychom tuto věž mohli považovat za kosý válec, musely by se podstavy nacházet v rovnoběžných rovinách a směrová přímka válce by nebyla kolmá k rovinám podstav. Tato věž sloužící jako zvonice je součástí katedrálního komplexu na Náměstí zázraků (obr. 6.40) a její odchylka od vertikálního směru je v současné době  $5^\circ$  (obr. 6.41).



Obrázek 6.40: Katedrální náměstí (Pisa, Itálie) [87]



Obrázek 6.41: 3D scanning šikmé věže (Pisa, Itálie) [88]

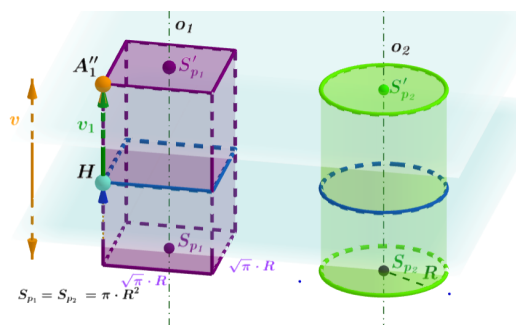
## 6.6 Objem válce

### Poznámka

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato kapitola věnovat pouze válcům s kruhovou podstavou.

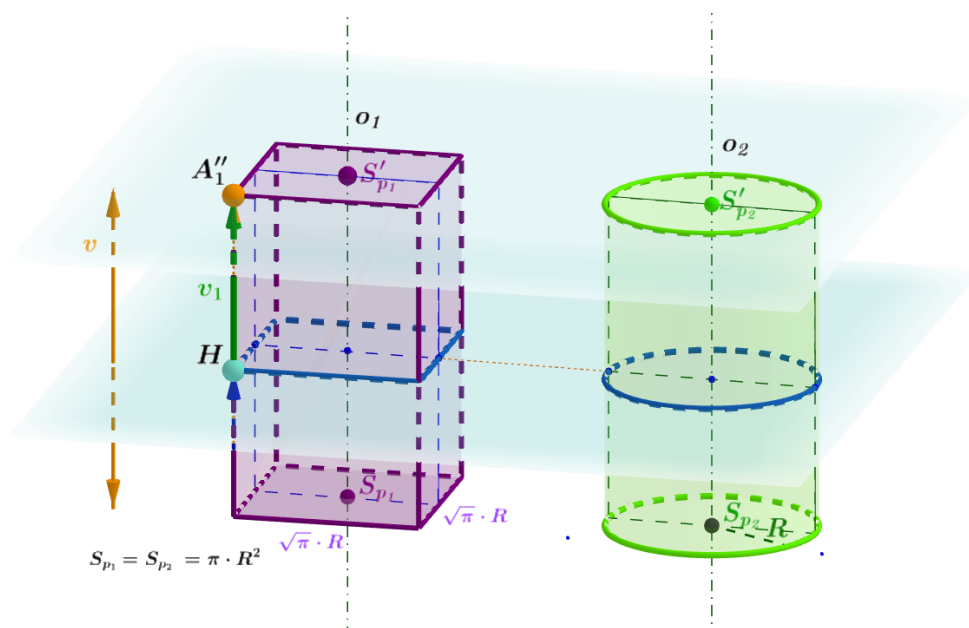
V této kapitole si představíme, jak se počítá objem válce s kruhovou podstavou o poloměru  $r$  a výškou  $v$ . Objem rotačního válce odvodíme pomocí Cavalieriho principu a s využitím **vztahu pro objem hranolu**, který jsme si odvodili v předchozí kapitole.

Je dán rotační válec s poloměrem podstavy  $R$  a s tělesovou výškou  $v$  a pravidelný čtyřboký hranol – hranol se čtvercovou podstavou o podstavné hraně  $a = \sqrt{\pi}R$  se stejnou tělesovou výškou  $v$ , jehož objem již umíme vyčítat. Nejdříve určíme obsahy jejich podstav. Obsah podstavy pravidelného čtyřbokého hranolu je  $S_{p_1} = a^2 = (\sqrt{\pi}R)^2 = \pi R^2$ . Obsah podstavy rotačního válce je roven obsahu kruhu o poloměru  $R$ , tj.  $S_{p_2} = \pi R^2$ . Je zřejmé, že obě tělesa mají stejný obsah podstavy.



Obrázek 6.42: Využití Cavalieriho principu využití při odvození objemu rotačního válce

Nyní sestojíme pro obě tělesa řez rovinou rovnoběžnou s podstavami, který vedeme v libovolné výšce  $h$  od roviny jejich podstav mezi podstavami a vrcholy těles. A ukážeme shodnost obsahů řezů v libovolné výšce. Pro využití Cavalieriho principu potřebujeme znát obsahy daných řezů. K tomu využijeme obr. 6.42, kde změnou polohy bodu  $H$  měníme výšku  $v_1$ . Změnou polohy bodu  $A''_1$  měníme jejich tělesovou výšku. Na obr. 6.43 je vidět, že řezem rotačního válce je kruh o poloměru  $R$  a řez hranolu je čtverec s délkou strany  $\sqrt{\pi}R$ . Oba řezy tedy mají stejný obsah.



Obrázek 6.43: Shodnost obsahů řezů hranolu a válce v libovolné výšce

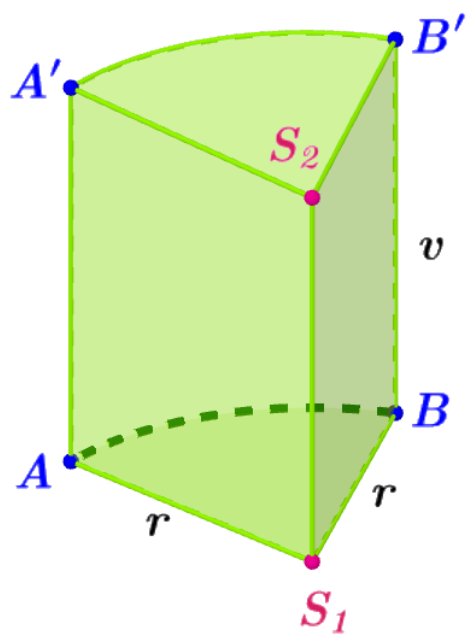
Tedy řezy tímto hranolem a válcem jsou vždy shodné s podstavami, z čehož vyplývá, že obsahy řezů v libovolné výšce jsou si rovny. Je splněna podmínka pro použití Cavalieriho principu a objem válce se tedy vypočítá obdobně jako objem libovolného hranolu  $V = S_p v$ . Také pro objem kosého válce platí stejný vztah, což bychom opět zdůvodnili obdobně pomocí Cavalieriho principu.

Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

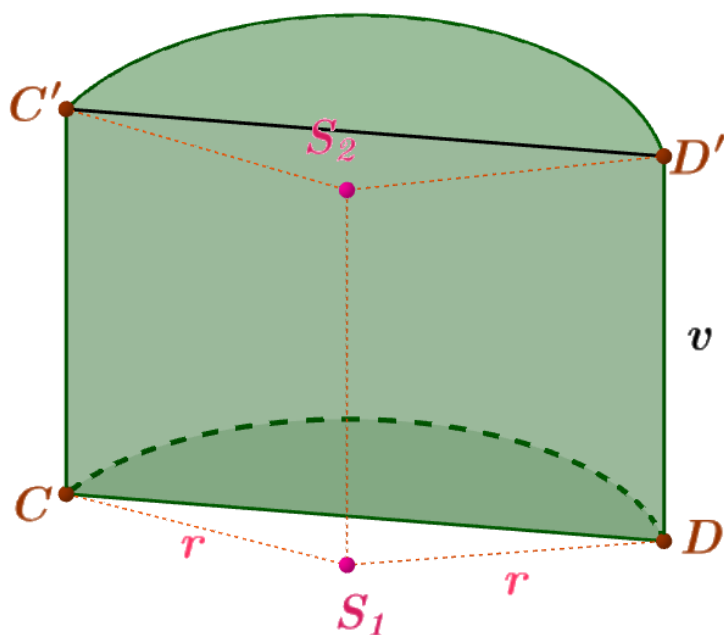
#### Věta

**Objem  $V$  libovolného válce s kruhovou podstavou** o poloměru  $r$  s tělesovou výškou  $v$  je dán vztahem  $V = S_p v = \pi r^2 v$ , kde  $S_p$  je obsah podstavy.

Vzorec pro výpočet objemu libovolného válce  $V = S_p v$  rovněž funguje pro výseč (obr. 6.44) nebo úseč (obr. 6.45) rotačního válce. Tedy pro části rotačního válce, jejichž podstavami je kruhová výseč, resp. kruhová úseč.

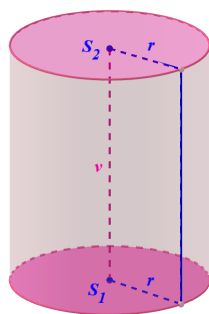


Obrázek 6.44: Výseč rotačního válce



Obrázek 6.45: Úseč rotačního válce

**Příklad 6.6.1** Vypočítejte objem  $V$  rotačního válce. Poloměr jeho podstavy  $r = 4$  cm a jeho výška  $v = 10$  cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

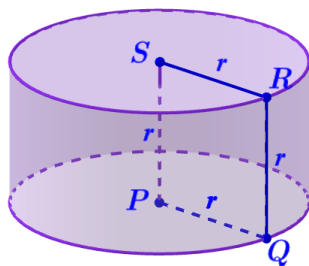


Obrázek 6.46: Ilustrace Příkladu 6.6.1

### Řešení

- Pro objem  $V$  válce platí  $V = S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v$ .
- Podstavou válce je kruh o poloměru  $r = 4$  cm (obr. 6.46).
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 \text{ cm}^2 \doteq 50,266 \text{ cm}^2$ .
- Pro objem válce platí:  $V = S_p v = 50,266 \cdot 10 \text{ cm}^3 \doteq 502,660 \text{ cm}^3$ .
- Objem válce je po zaokrouhlení  $502,66 \text{ cm}^3$ .

**Příklad 6.6.2** Vypočítejte objem  $V$  rotačního válce, který vznikl rotací čtverce  $PQRS$  okolo strany  $PS$ . Strana čtverce  $r = 4$  m. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 6.47: Ilustrace Příkladu 6.6.2

### Řešení

- Tento válec vznikl rotací čtverce  $PQRS$  s délkou strany  $r = |PQ| = 4$  m; tedy výška válce  $v = r = 4$  m a poloměr podstavy válce je rovněž  $r = 4$  m (obr. 6.47).
- Pro objem  $V$  válce platí  $V = S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v = 4$  m.
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 \text{ m}^2 \doteq 50,266 \text{ m}^2$ .
- Pro objem válce platí:  $V = S_p v = 50,266 \cdot 4 \text{ m}^3 = 201,064 \text{ m}^3$ .
- Objem válce je po zaokrouhlení  $201,06 \text{ m}^3$ .

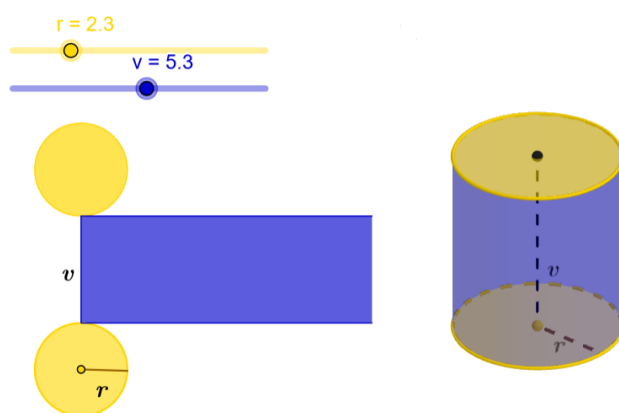
## 6.7 Povrch válce

### Poznámka

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato kapitola věnovat pouze válcům s kruhovou podstavou.

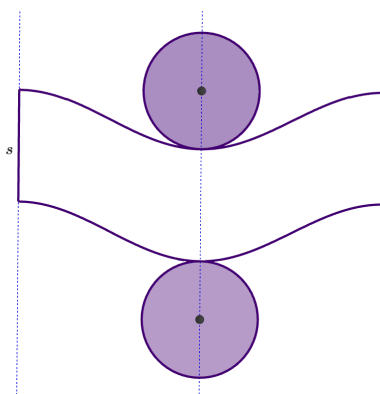
Umístěním podstav a rozvinutím pláště válce do vhodného uskupení v jedné rovině tak, aby vznikl rovinný obrazec, získáme **sít válce**, viz obr. 6.48. Sít válce je tvořena dvěma shodnými podstavami (kruhy) a jeho pláštěm. U kolmého, tj. rotačního válce je pláštěm obdélníkem, případně čtverc (pokud se výška válce rovná obvodu kruhu tvořící podstavu).

Na následujícím obrázku lze zkoumat vliv změny poloměru  $r$  a jeho tělesové výšky  $v$  na vzhled sítě rotačního válce.



Obrázek 6.48: Sít válce

Sít kosého válce je složitější obrazec než sít rotačního válce, viz obr. 6.49.



Obrázek 6.49: Sít kosého válce

Tak, jako u povrchu tělesa, je i povrch válce roven obsahu jeho sítě.

### Věta

**Povrch  $S$  libovolného válce s kruhovou podstavou** je roven součtu obsahů  $S_p$  jeho dvou podstav a obsahu jeho pláště  $S_{pl}$ , platí:  $S = 2S_p + S_{pl}$ .

Pláštěm rotačního válce je vždy pravoúhlý rovnoběžník – obdélník, případně čtverec:

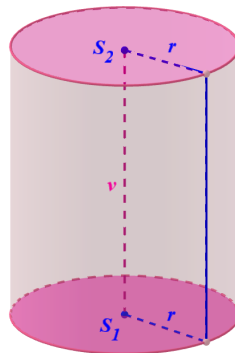


### Věta

Pro **povrch  $S$  rotačního válce** s poloměrem jeho podstav  $r$  a výškou  $v$  platí:  
 $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$ .

Nyní vypočítáme povrch válce z Příkladu 6.6.1.

**Příklad 6.7.1** Vypočítejte povrch  $S$  rotačního válce. Poloměr jeho podstavy  $r = 4$  cm a jeho výška  $v = 10$  cm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



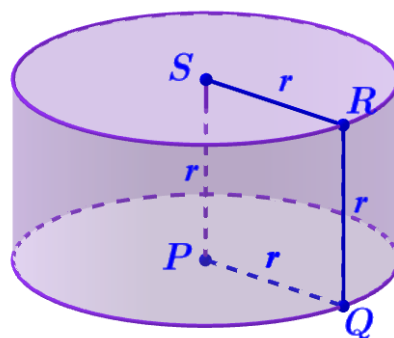
Obrázek 6.50: Ilustrace Příkladu 6.7.1

### Řešení

- Pro povrch  $S$  válce platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$ , tedy dosadíme; potřebujeme znát poloměr podstav  $r = 4$  cm a výšku  $v = 10$  cm (obr. 6.50).
- Pro povrch válce platí:  $S = 2\pi r(r + v) = 2\pi \cdot 4 \cdot (4 + 10) \text{ cm}^2 \doteq 351,858 \text{ cm}^2$ .
- Povrch válce je po zaokrouhlení  $351,86 \text{ cm}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch válce z Příkladu 6.6.2.

**Příklad 6.7.2** Vypočítejte povrch  $S$  rotačního válce, který vznikl rotací čtverce  $PQRS$  okolo strany  $PS$ . Strana čtverce  $a = 4$  m. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 6.51: Ilustrace Příkladu 6.7.2

## Řešení

- Pro povrch  $S$  válce platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$ , tedy dosadíme; potřebujeme znát poloměr podstav  $r = 4$  m a výšku  $v = 4$  m (obr. 6.51).
- Pro povrch válce platí:  $S = 2\pi r(r + v) = 2\pi \cdot 4 \cdot (4 + 4) \text{ m}^2 \doteq 201,062 \text{ m}^2$ .
- Povrch válce je po zaokrouhlení  $201,06 \text{ m}^2$ .

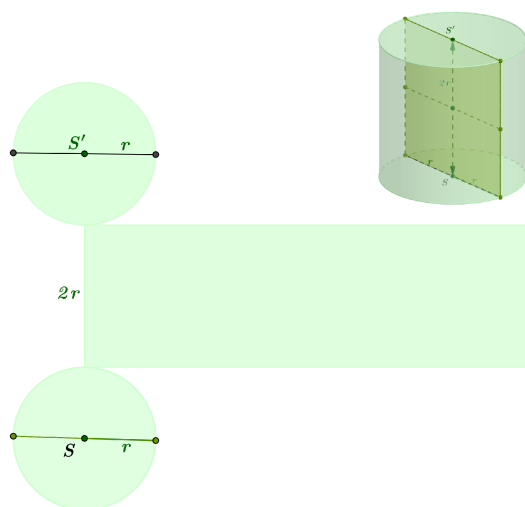
## 6.8 Objemy a povrchy dalších typů válců

### Poznámka

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato kapitola věnovat pouze válcům s kruhovou podstavou.

### ROVNOSTRANNÝ VÁLEC

**Příklad 6.8.1** Vypočítejte objem  $V$  a povrch  $S$  rovnostranného válce o poloměru podstav  $r = 5$  dm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 6.52: Ilustrace Příkladu 6.8.1

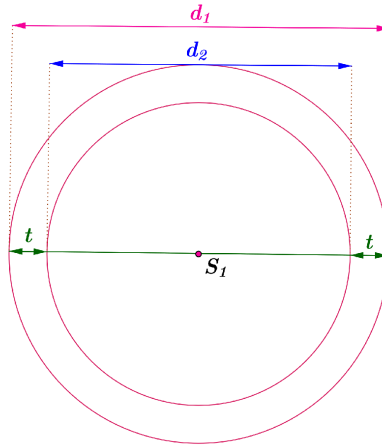
## Řešení

- Pro objem  $V$  válce platí  $V = S_p v = \pi r^2 v$ . Známe  $r = 5$  dm a víme, že je válec rovnostranný, tedy jeho tělesová výška je  $v = 2r = |SS'| = 10$  dm (obr. 6.52).
- Pro obsah podstav  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 \text{ dm}^2 \doteq 78,540 \text{ dm}^2$ .
- Pro objem válce platí:  $V = S_p v = 78,540 \cdot 10 \text{ dm}^3 \doteq 785,400 \text{ dm}^3$ .
- Pro povrch  $S$  válce platí  $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + 2r)$ , tedy dosadíme  $r = 5$  cm.
- Pro povrch válce platí:  $S = 2\pi r(3r) = 2\pi \cdot 5 \cdot (15) \text{ dm}^2 \doteq 471,239 \text{ dm}^2$ .

- Objem válce je po zaokrouhlení 785,40 dm<sup>3</sup>.
- Povrch válce je po zaokrouhlení 471,24 dm<sup>2</sup>.

## 6.9 Úlohy III

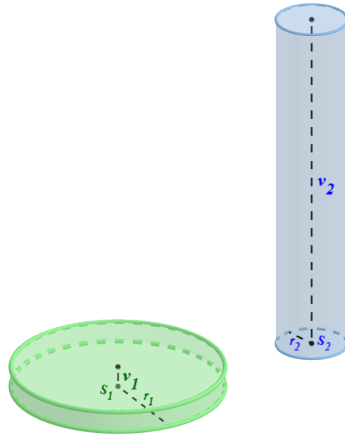
**Úloha 6.9.1** Železná trubka délky  $h = 100$  cm má vnější průměr 10 cm a vnitřní průměr 8 cm (obr. 6.53). Určete hmotnost trubky v kilogramech a obsah celého jejího povrchu. Hustota železa je 7,87 g/cm<sup>3</sup>. Výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 6.53: Ilustrace k úloze 6.9.1

- Potřebujeme tedy vypočítat hmotnost  $m$  železné trubky, pro kterou platí:  $m = \frac{V}{\rho}$ . Nejprve vypočítáme její celkový objem  $V$ ;  $\rho = 7,87$  g/cm<sup>3</sup>.
- Její objem je možné vyjádřit jako rozdíl dvou rotačních válců  $V_1, V_2$  s poloměry podstav  $r_1 = \frac{d_1}{2} = 5$  cm,  $r_2 = \frac{d_2}{2} = 4$ ; válce mají stejné středy podstav a stejnou výšku  $h = 100$  cm. Platí:  $V = V_1 - V_2 = \pi \cdot r_1^2 \cdot h - \pi \cdot r_2^2 \cdot h = \pi \cdot h (r_1^2 - r_2^2) = \pi \cdot 100 (5^2 - 4^2) \text{ cm}^3 \doteq 2\,827,433 \text{ cm}^3$ .
- Dosadíme objem trubky do vztahu pro hmotnost:  $m = \frac{2\,827,433}{7,87} \text{ g} = 359,267 \text{ g}$ .
- Pro povrch  $S$  trubky platí  $S = 2 \cdot (S_{p_1} - S_{p_2}) + S_{pl_1} + S_{pl_2}$ . Vypočítáme:  $S_{p_1} = \pi r_1^2 = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 \doteq 78,540 \text{ cm}^2$ ;  $S_{p_2} = \pi r_2^2 \text{ cm}^2 = \pi \cdot 4^2 \doteq 50,266 \text{ cm}^2$ ;  $S_{pl_1} = 2\pi r_1 \cdot h = 2\pi \cdot 5 \cdot 100 \text{ cm}^2 \doteq 3\,141,593 \text{ cm}^2$ ;  $S_{pl_2} = 2\pi r_2 \cdot h = 2\pi \cdot 4 \cdot 100 \text{ cm}^2 \doteq 2\,513,274 \text{ cm}^2$ .
- Dosadíme mezivýsledky, platí:  $S = (2 \cdot (78,540 - 50,266) + 3\,141,593 + 2\,513,274) \text{ cm}^2 = 5\,711,415 \text{ cm}^2$ .
- Trubka váží po zaokrouhlení 0,36 kg.
- Je potřeba aplikovat barvu na 0,57 m<sup>2</sup> po zaokrouhlení.

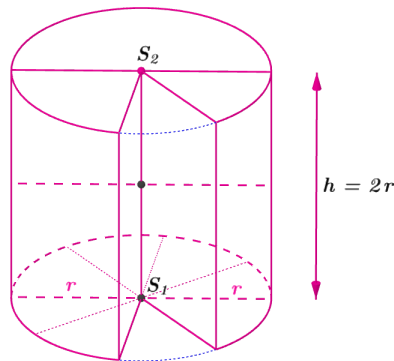
**Úloha 6.9.2** Je dána mince a neostrouhaná tužka, oba objekty mají tvar rotačního válce (obr. 6.54). Objem mince je roven  $V_1 = 2\,121$  mm<sup>3</sup>, její poloměr  $r_1 = 15$  mm a výška  $v_1 = 3$  mm. Poloměr tužky  $r_2 = 5$  mm. Jaká je výška  $v_2$  tužky, jestliže její objem  $V_2$  je roven trojnásobku  $V_1$ ? Výsledek zaokrouhlete na celá čísla.



Obrázek 6.54: Ilustrace k Úloze 6.9.2

- Nejprve vypočítáme objem mince:  $V_1 = \pi r_1^2 v_1 = \pi \cdot 15^2 \cdot 3 \text{ mm}^3 \doteq 2\,121 \text{ mm}^3$ .
- Pro objem tužky platí:  $V_2 = \pi r_2^2 v_2 = 3 \cdot V_1 = 3 \cdot 2\,121 \text{ mm}^3 = 6\,363 \text{ mm}^3$ . Potřebujeme vyjádřit  $v_2$  ze vztahu pro  $V_2$ .
- Pro výšku tužky platí:  $v_2 = \frac{V_2}{\pi r_2^2} = \frac{6\,363}{\pi \cdot 5^2} \text{ mm} \doteq 81 \text{ mm}$ .
- Výška tužky je rovna po zaokrouhlení 81 mm.

**Úloha 6.9.3** Někdo snědl  $\frac{1}{8}$  dortu, která měla objem  $V_{1/8} = 21,206 \text{ cm}^3$ . Dort má tvar rovnostranného válce. Určete poloměr  $r$  dortu (obr. 6.55). Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.



Obrázek 6.55: Ilustrace k úloze 6.9.3

- Pro objem  $V$  celého dortu ve tvaru rovnostranného válce o poloměru  $r$  a výšce  $h = 2r$  platí:  $V = \pi r^2 2r = 2\pi r^3$ . Pro objem daného kousku dortu platí:  $V_{1/8} = \frac{1}{8} 2\pi r^3 = 21,206 \text{ cm}^3$ . Potřebujeme zjistit poloměr  $r$ .
- Vyjádříme poloměr dortu  $r = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V_{1/8}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 21,206}{\pi}} \text{ cm} \doteq 3,000 \text{ cm}$ .
- Poloměr dortu je roven po zaokrouhlení 3 cm.

# 7. Kužele

## 7.1 Kužele

V této kapitole se budeme zabývat následujícími tělesy, a to kuželi. Pokud bychom se zamysleli, kde se nacházejí objekty ve tvaru kuželů, tak by nás mohli napadnout dopravní kužele (obr. 7.1) nebo střechy některých staveb jako například v italském městě Alberobello, které se vyznačuje netradiční architekturou místních bílých domků ze suchého zdiva s šedivou kuželovitou střechou řadící se ke stylu Trullo. Dokonce jsou díky této unikátní architektuře zapsané na seznamu UNESCO, viz obr. 7.2.



Obrázek 7.1: Dopravní kužele [61]



Obrázek 7.2: Bílé domky ze suchého zdiva nazývané Trulli (Alberobello, Itálie) [60]

I v samotné krajině nacházíme objekty kuželovitého tvaru, příkladem jsou tzv. Čokoládové vrchy na filipínském ostrově Bohol, které jsou tvořeny vápencem a díky zdějšimu vlhkému oceánskému klimatu a probíhající erozi mají právě tento tvar (obr. 7.3) [16].



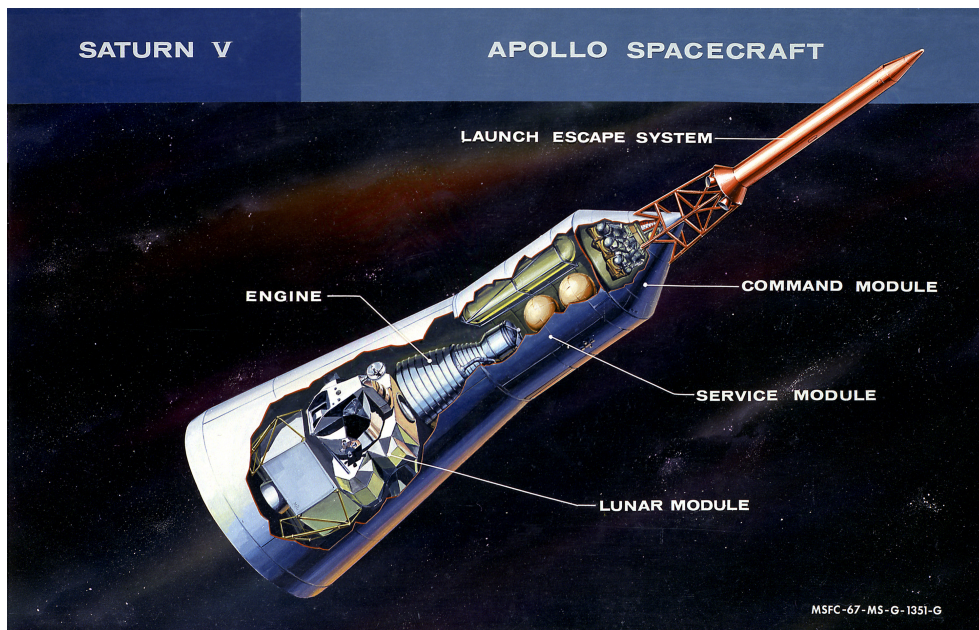
Obrázek 7.3: Čokoládové vrchy kuželovitého tvaru (Bohol, Filipíny) [59]

Dále se v okrasných zahradách pomocí uměleckého tvarování objevují stromy kuželovitého tvaru. Příkladem je Longwoods Gardens v americké Pennsylvánii, viz obr. 7.4.

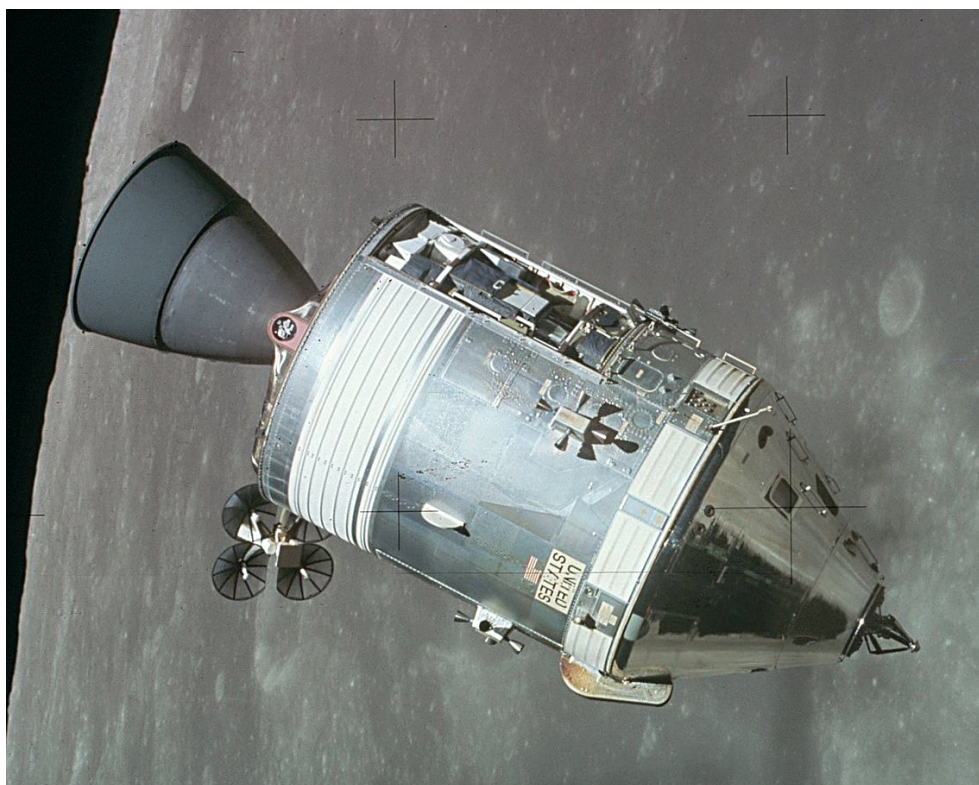


Obrázek 7.4: Umělecké tvarování stromů do kuželovité podoby (Pennsylvánie, USA) [58]

Ve tvaru kužele byl rovněž vybudován řídicí modul rakety Saturn 5, která úspěšně dopravila na Měsíc v roce 1971 posádku letu Apolla 15 (obr. 7.5–6).

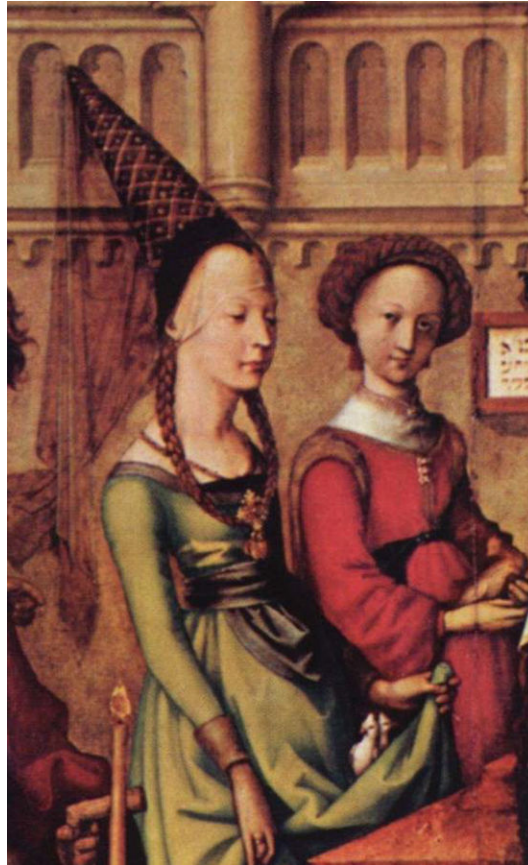


Obrázek 7.5: Nákres rakety Saturn 5 s řídicím modulem ve tvaru kužele, mise Apollo 15 [56]



Obrázek 7.6: Řídicí modul ve tvaru kužele a servisní modul ve tvaru válce mise Apollo 15 [57]

A v průběhu 14. a 15. století se nosily tzv. burgundské čepce (hennin), jež byly kuželovitého tvaru, viz dílo německého malíře Hanse Holbeina staršího na obr. 7.7.



Obrázek 7.7: Žena nosící hennin na obraze Presentation of Christ Child in the temple [55]

Tradiční vietnamskou pokrývkou hlavy je tzv. nón lá vyrobená z palmových listů a slouží k ochraně proti slunci nebo dešti (obr. 7.8).

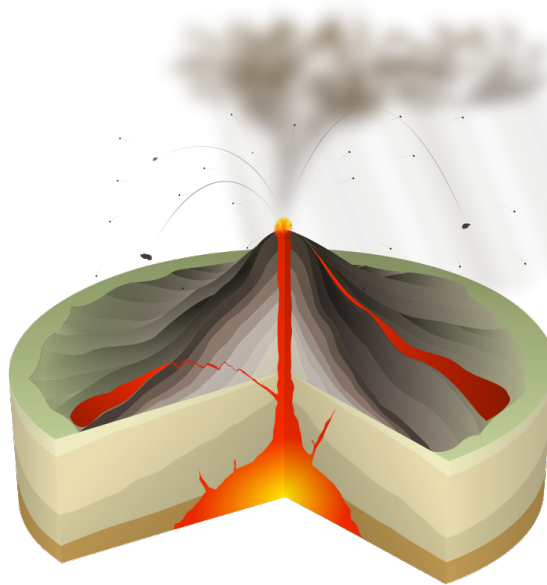


Obrázek 7.8: Tradiční pokrývka hlavy nón lá mající tvar pláště kužele [54]

A také by se nám mohlo vybavit z hodin zeměpisu termín sopečný kužel, který v důsledku



svého vzniku většinou připomíná tvar kužele, viz schématický řez vyobrazující erupci a vznik tzv. sypaného kužele na obr. 7.9. V České republice se pozůstatky sypaného kužele nacházejí v CHKO Český ráj – vrchol Trosky se stejnojmenným hradem (obr. 7.10).



Obrázek 7.9: Schématický řez vzniku sypaného kužele [53]



Obrázek 7.10: Vrchol Trosky se stejnojmenným hradem jako pozůstatek sopečného kužele (Liberecko, ČR) [52]

#### Poznámka

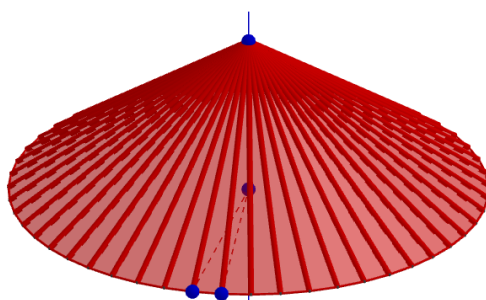
Jelikož používáme název pro skupinu oblých těles – tělesa válcového typu, obdobně zavádíme název pro skupinu oblých těles – tělesa kuželového typu.

## 7.2 Zavedení těles kuželového typu

### Poznámka

V kontextu kuželů bychom si mohli připomenout  $n$ -boký pravidelný jehlan. Kdybychom si představili například 100-boký pravidelný jehlan  $n = 100$ , tak by tento 100-boký pravidelný jehlan připomínal spíše kužel. Na následujícím appletu (obr. 7.11) se nachází animace, ve které se postupně mění počty vrcholů podstavy  $n$ -bokého pravidelného jehlanu,  $n \in \mathbb{N}; n = \{3, 4, \dots, 100\}$ .

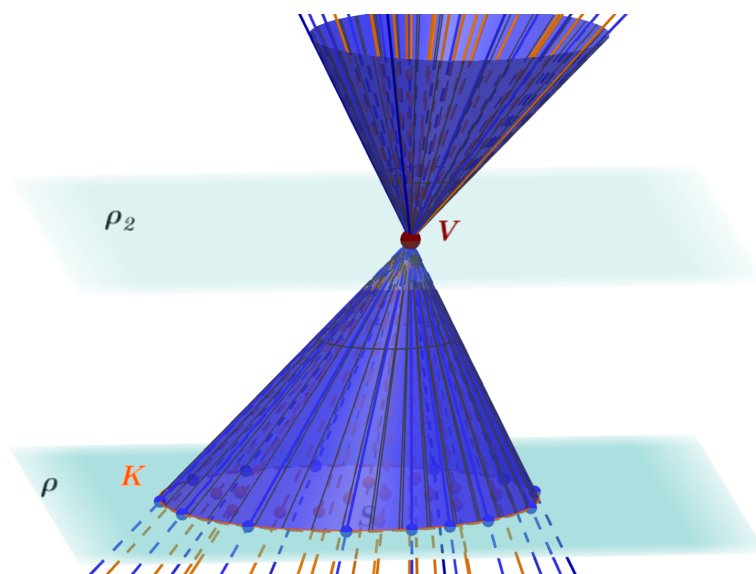
$$n \in \mathbb{N}; n = \{3, 4, \dots, 100\}$$



Obrázek 7.11:  $n$ -boký pravidelný jehlan

Tak, jako válcový prostor, válcovou plochu a válec, zavádíme kuželový prostor, kuželovou plochu a kužel. Mějme dán kruh  $K$  se středem  $S$ , který leží v rovině  $\rho$ , a dále bod  $V$ , který v této rovině neleží, potom jako **kuželový prostor** označujeme sjednocení všech přímek, které procházejí bodem  $V$  a které protínají kruh  $K$ .

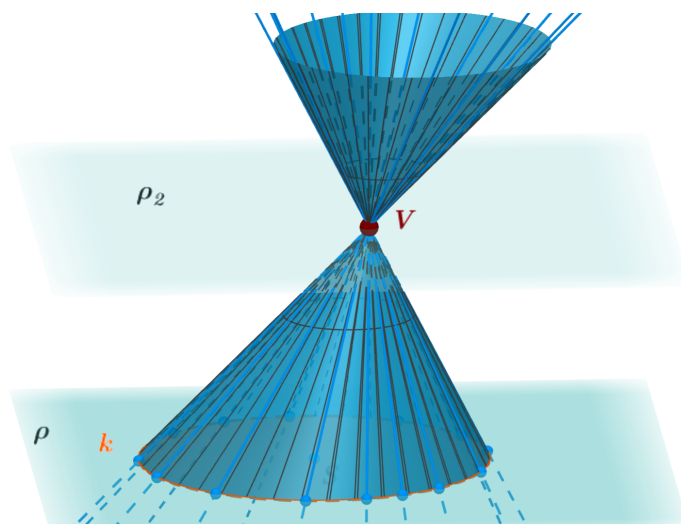
Na následujícím obr. 7.12) se nachází kruh  $K$  se středem  $S$  v rovině  $\rho$  a bod  $V$ , které určují zobrazený kuželový prostor. Změnou polohy bodu  $V$  v rovině  $\rho_2$  měníme tvar kuželového prostoru.



Obrázek 7.12: Kuželový prostor

Jako **kuželovou plochu** označujeme sjednocení všech přímek, které procházejí bodem  $V$  a které protínají kružnici  $k$ , kterou je daný kruh  $K$  vymezen. Kuželovou plochu pokládáme za hranici kuželového prostoru. Bod  $V$  nazýváme **vrcholem** kuželové plochy či kuželového prostoru. Každou přímku procházející bodem  $V$  nazýváme za **vrcholovou přímkou**.

Na obr. 7.13 se nachází **kružnice**  $k$  v rovině  $\rho$  a **bod**  $V$ , které dohromady určují **kuželovou plochu**. Změnou polohy **bodu**  $V$  měníme tvar kuželové plochy.

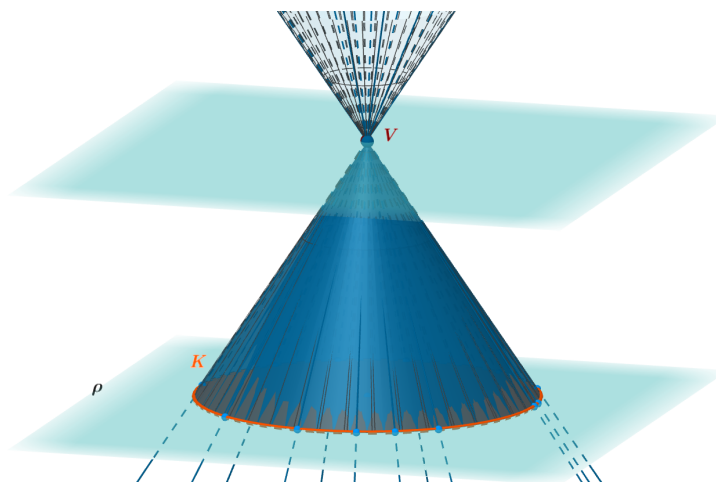


Obrázek 7.13: Kuželová plocha

#### Definice

Průnikem kuželového prostoru a prostorové vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s daným prostorem pouze jediný společný bod, kterým je vrchol  $V$  kuželového prostoru, získáme těleso, které nazýváme **kužel**.

Na obr. 7.14 je zobrazen průnik kuželového prostoru a prostorové vrstvy.

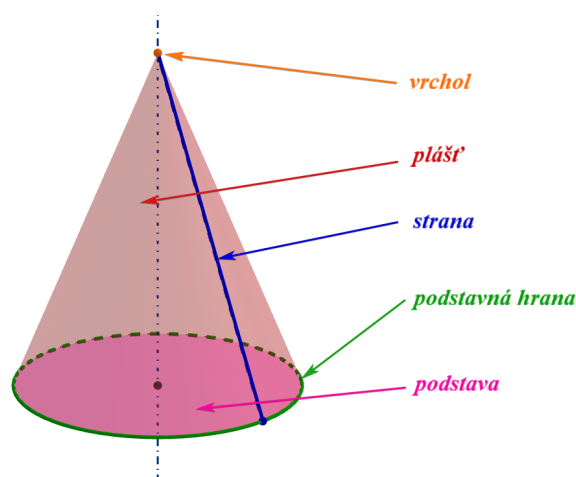


Obrázek 7.14: Kužel

## Definice

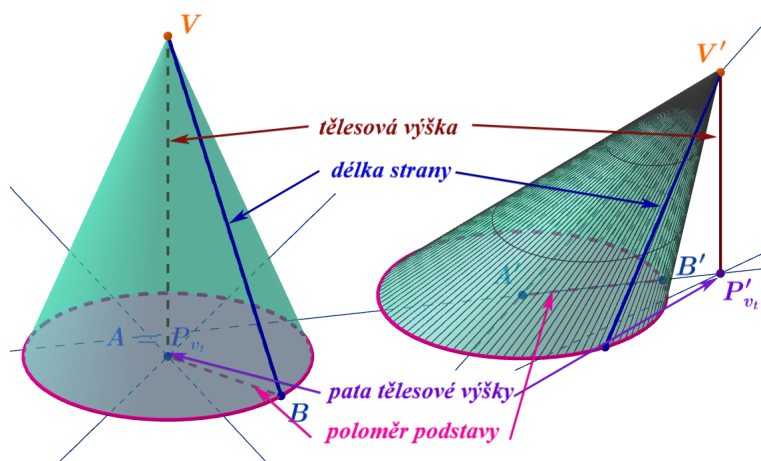
Bod  $V$  se nazývá **vrcholem kužele**. Kruh, který leží v rovině  $\rho$ , označujeme jako **podstavu** kužele. Kružnici vymežující kruh  $K$  v podstavě kužele označujeme jako **podstavnou hranu**. **Pláštěm kužele** je sjednocení všech úseček, které prochází podstavnou hranou a také vrcholem  $V$ . Jednotlivé polohy těchto úseček označujeme jako **strany kužele**.

Uvedené pojmy jsou ilustrovány na obr. 7.15.



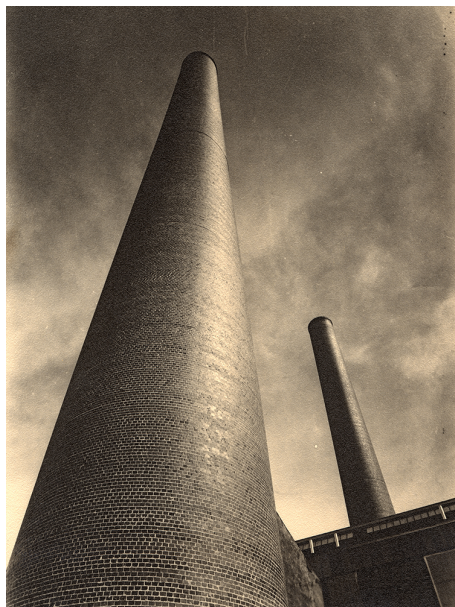
Obrázek 7.15: Vrchol, podstava, podstavná hrana, plášť a strana kužele

Vzdálenost roviny podstavy a vrcholu  $V$  se nazývá **tělesová výška** nebo také **výška kužele**, jedná se rovněž o vzdálenost paty tělesové výšky a vrcholu kužele. Vzdálenost vrcholu od podstavné hrany je rovna délce **strany kužele**. Poloměr podstavy kužele je roven vzdálenosti středu podstavy od podstavné hrany, tj.  $|AB| = |A'B'|$ . Tyto pojmy jsou ilustrované na následujícím obr. 7.16.



Obrázek 7.16: Tělesová výška, strana kužele a poloměr podstavy

Zajímavostí je, že v jednoúběžníkové perspektivě se může válec jevit jako kužel. V projektivní geometrii si můžeme válec představit jako kužel, jehož vrchol se nachází v nekonečnu. Na obr. 7.17 se nachází komín ve tvaru válce směřující k obloze, který v této perspektivě vizuálně odpovídá spíše kuželu.



Obrázek 7.17: Komín ve tvaru válce jeví se jako kužel[48]

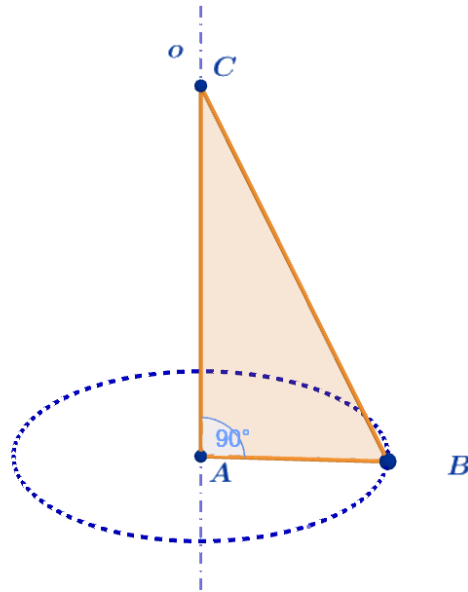
Kromě předchozího zavedení těles kuželového typu, můžeme ještě zavést tzv. rotační kužel dalším způsobem, a to následovně.

### 7.2.1 Jak vzniká rotační kužel

#### Definice

**Rotační kužel** vzniká rotací pravoúhlého trojúhelníku okolo přímky, na které leží jedna jeho odvěsna. Jednotlivé body druhé z odvěsen vytvoří rotací podstavu rotačního kužele, resp. kruh. Rotací zbývající strany (přepony) daného pravoúhlého trojúhelníku vznikne plášť kužele.

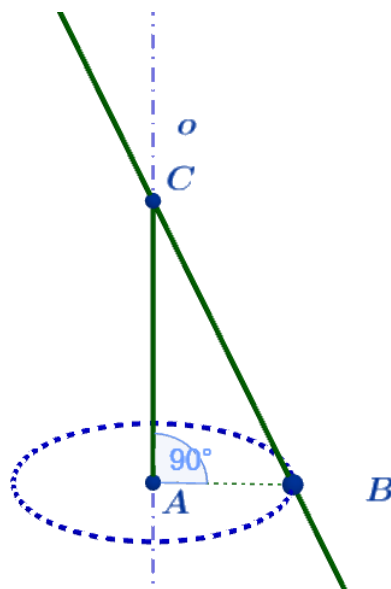
Je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  a osa rotace  $o$ , na které leží jeho odvěsna  $AC$ . Rotací trojúhelníku  $ABC$  okolo této osy  $o$  dostáváme rotační kužel s poloměrem podstavy  $r = |AB|$  a výškou  $v = |AC|$ . Podstava rotačního kužele, tj. kruhu, vzniká rotací úsečky  $AB$ . Plášť rotačního kužele vzniká rotací úsečky  $BC$  a strana rotačního kužele je každá dílčí poloha úsečky  $BC$ . Průměr podstavy je roven dvojnásobku poloměru  $d = 2r$ , viz obr. 7.18.



Obrázek 7.18: Vznik rotačního kužele rotací pravoúhlého trojúhelníku okolo osy  $o$

#### Definice

Rotací přímky  $BC$  okolo osy  $o$  vzniká **rotační kuželová plocha**. Prostor touto plochou ohraničený označujeme **rotační kuželový prostor**. Na následujícím obr. 7.19 je ilustrovaná rotační kuželová plocha.



Obrázek 7.19: Vznik rotační kuželové plochy rotací přímky  $BC$  okolo osy  $o$

#### Poznámka

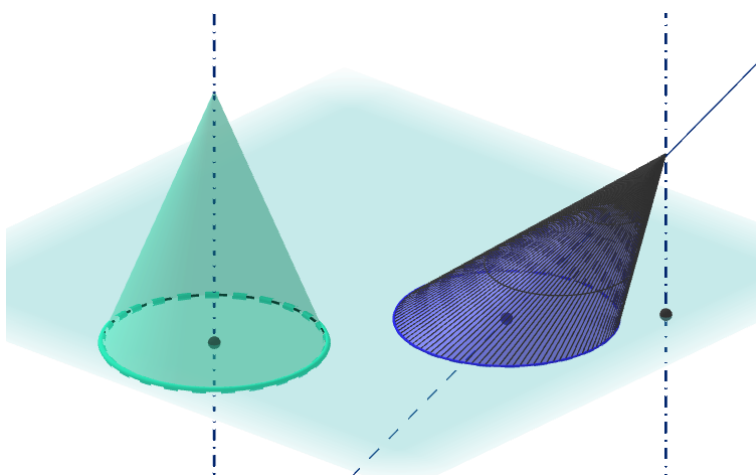
U rotačního kužele platí pro jeho poloměr podstavy  $r$ , tělesovou výšku  $v$  a stranu  $s$  **Pýthagorova věta**:  $s^2 = r^2 + v^2$ .

## 7.3 Klasifikace kuželů

Kužele můžeme klasifikovat podle následujícího kritéria.

### 7.3.1 Rotační a nerotační kužele

Kužele můžeme klasifikovat podle toho, zda mohou vzniknout rotací pravoúhlého trojúhelníku okolo jedné z jeho odvěsen, nebo ne. Kužel, jehož podstavou je kruh a jehož pata tělesové výšky se nachází v těžišti podstavy (ve středu kruhu), se nazývá **rotační kužel**. V opačném případě se jedná o **nerotační kužel**. Nerotační kužel s kruhovou podstavou se vyznačuje tím, že pata jeho tělesové výšky neleží v těžišti podstavy (ve středu kruhu), neboli přímka určená jeho vrcholem a středem podstavy není kolmá k rovině podstavy, viz obr. 7.20.



Obrázek 7.20: Zleva: rotační a nerotační

S rotačními kuželi se můžeme setkat v architektuře. Například jde o objekty na střeše německého muzea Bundeskunsthalle v Bonnu (obr. 7.21).



Obrázek 7.21: Muzeum Bundeskunsthalle s objekty na střeše ve tvaru rotačních kuželů (Bonn, Německo)

I v každodenním životě nacházíme předměty ve tvaru pláště rotačního kužele – například mezi sklenicemi na nápoje či kornouty na zmrzlinu, viz obr. 7.22–7.23.



Obrázek 7.22: Sklenice ve tvaru pláště rotačního kužele



Obrázek 7.23: Kornout na zmrzlinu ve tvaru pláště rotačního kužele

Ve světě mořské fauny existuje plž, jehož schránka je ve tvaru nerotačního kužele, viz obr. 7.24.





Obrázek 7.24: Schránka mořského plže ve tvaru nerotačního kužele

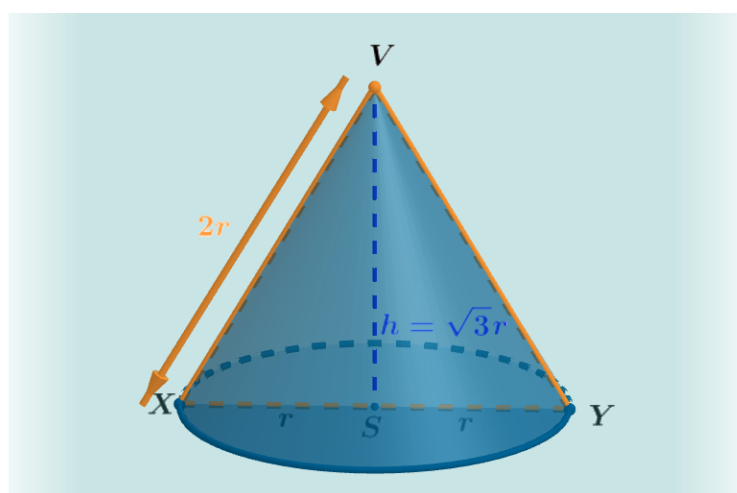
## 7.4 Další typy kuželů

Existují ještě další typy kuželů, které si nyní postupně představíme.

### 7.4.1 Kužele s kruhovou podstavou

#### Rovnostranný kužel

Rotační kužel, jehož osovým řezem (řez rovinou obsahující osu kužele neboli jeho tělesovou výšku) je rovnostranný trojúhelník, se nazývá **rovnostranný kužel** (obr. 7.25). Výška  $h$  je rovna  $\sqrt{3}r$ , kde  $r$  je poloměr podstavy. Veškeré rovnostranné kužele jsou si navzájem podobné.



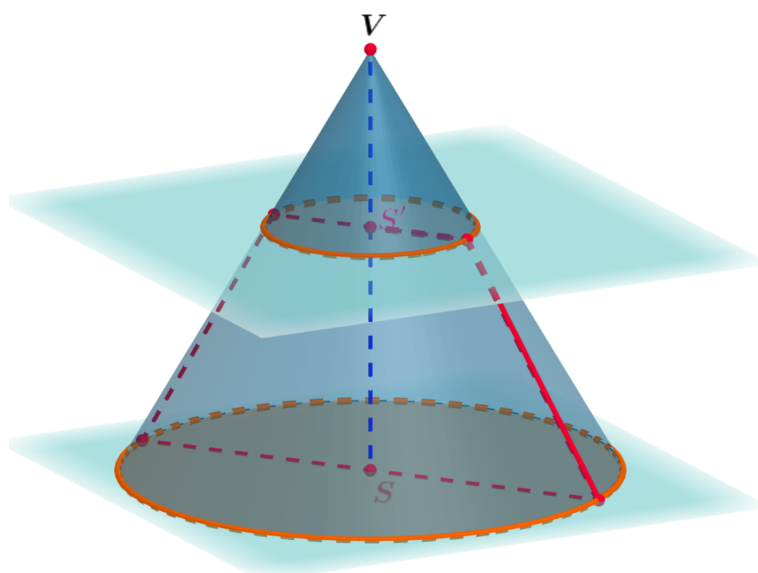
Obrázek 7.25: Rovnostranný kužel

### Poznámka

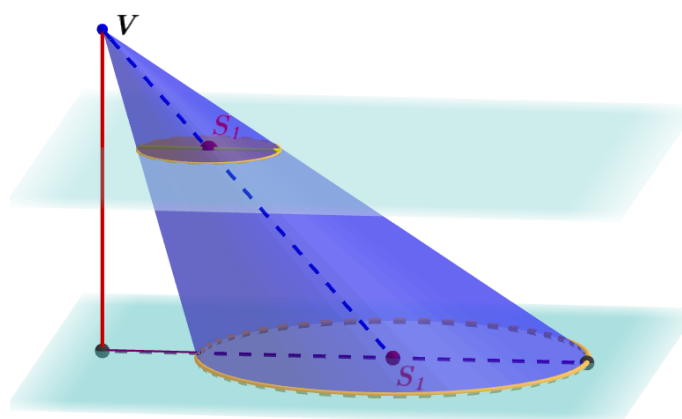
Zajímavostí je, že by se dal povrch pláště rovnostranného kužele rovněž vypočítat jako polovina obsahu kruhu o poloměru  $r$ , jelikož jeho plášť se skládá z kruhové výseče se středovým úhlem  $180^\circ$  a poloměru  $r$ .

### Komolý kužel

Kužely narozdíl od válců jsou tělesa mající jeden vrchol. Pokud kužel seřízneme rovinou rovnoběžnou s podstavou a zároveň ležící mezi rovinou  $\rho$  a  $V$ , vznikají dvě tělesa. Jedno těleso je opět kužel s vrcholem  $V$ , avšak jeho tělesová výška je menší než výška původního kužele. Druhé těleso označujeme jako **komolý kužel**, který má dvě podstavy ležící v rovnoběžných rovinách. Podstavy komolého kužele jsou vždy dva podobné kruhy (nikoli shodné). Pokud komolý kužel vznikl z rotačního kužele, pak se jedná o **rotační komolý kužel** (obr. 7.26). Pokud komolý kužel vznikl z nerotačního kužele, pak by se jednalo o **nerotační komolý kužel** (obr. 7.27).

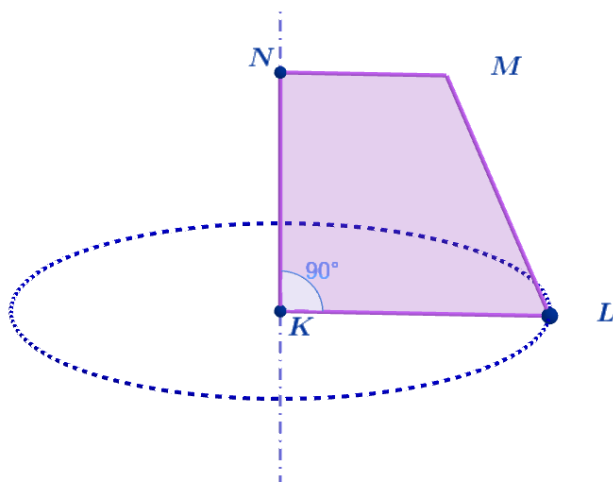


Obrázek 7.26: Vznik rotačního komolého kužele



Obrázek 7.27: Vznik nerotačního komolého kužele

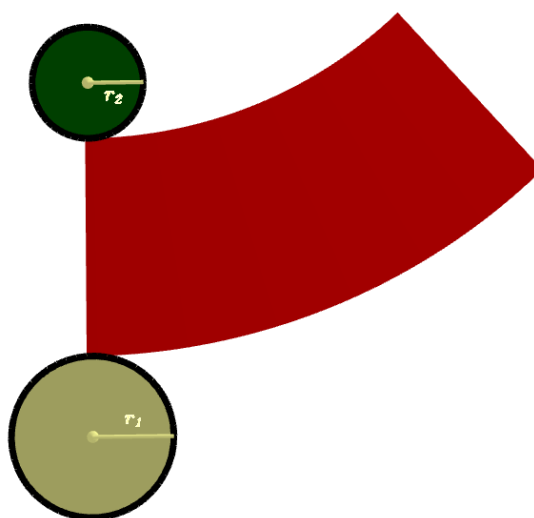
Rotační komolý kužel může rovněž vzniknout rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem jeho kratšího ramene, viz obr. 7.28.



Obrázek 7.28: Vznik rotačního komolého kužele rotací pravoúh. lichoběžníku okolo přímky KN

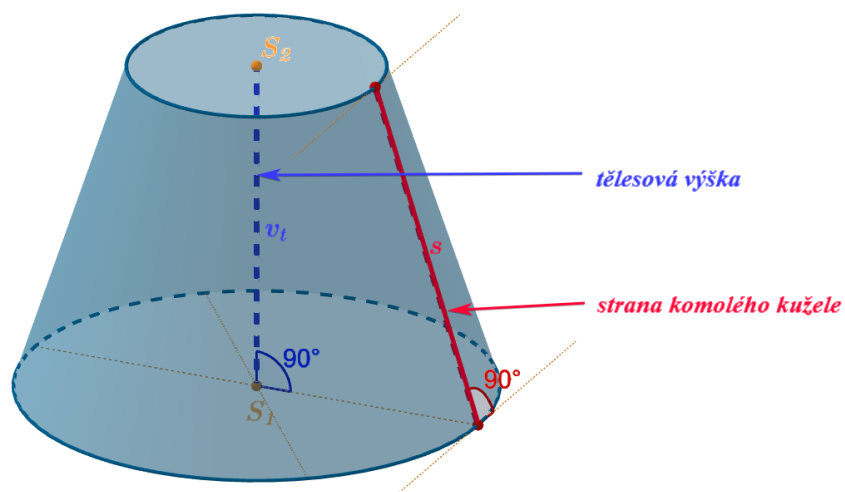
Podstavy komolého kužele jsou dva podobné kruhy (nikoli shodné) a pláštěm je část kuželové plochy, kterou získáme rozdílem dvou kruhových výsečí (se stejným středem a středovým úhlem) nebo jako průnik úhlu s mezikružím (kde střed mezikružím je shodný s vrcholem úhlu). Sít komolého kužele je tedy tvořena 2 podobnými podstavami, tj. kruhy o různých poloměrech, a jeho pláštěm.

V obr. 7.29 můžete pomocí posuvníku měnit poloměr horní podstavy rotačního komolého kužele. Pokud by horní podstava měla nulový poloměr a přešla v jediný bod, dostali bychom rotační kužel, pokud by podstavy byly shodné kruhy, dostali bychom rotační neboli kolmý válec. Dále můžete síť tělesa složit do tělesa pomocí posuvníku.



Obrázek 7.29: Sít rotačního komolého kužele

Tělesová výška neboli **výška komolého kužele** je rovna vzdálenosti rovin jeho podstav a délka **strany komolého kužele** je vzdálenost jeho dvou podstavních hran (obr. 7.30).



Obrázek 7.30: Tělesová výška a strana komolého kužele

Na portugalských ostrovech Azorech nacházíme větrný mlýn, jehož tělo je postaveno ve tvaru komolého kužele a jehož střecha je ve tvaru rotačního kužele (obr. 7.31).



Obrázek 7.31: Tělo větrného mlýna ve tvaru komolého kužele a jeho střecha ve tvaru rotačního kužele (Azory, Portugalsko)

V Jihoafrické republice se nachází vodárenská věž, jež je zkonstruována ve tvaru komolého kužele, architektonickou zajímavostí je, že stojí na podstavě s menším poloměrem. (obr. 7.32).

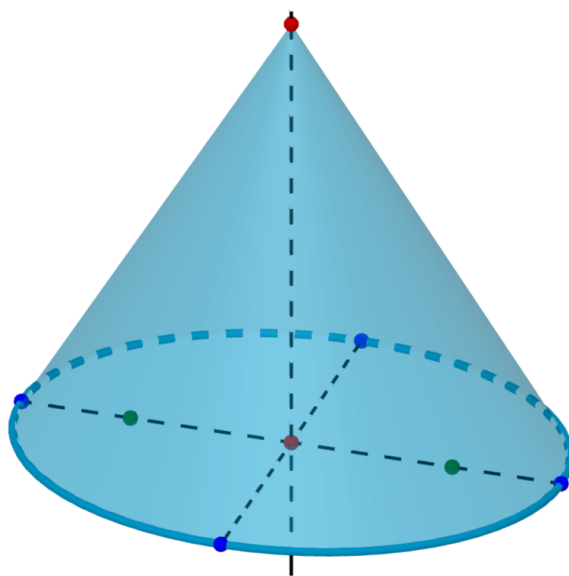


Obrázek 7.32: Vodárenská věž ve tvaru komolého kužele (Midrand, JAR)

#### 7.4.2 Kužele s jinou než kruhovou podstavou

Můžeme nalést i jiné typy kuželů, jejichž podstavou není kruh.

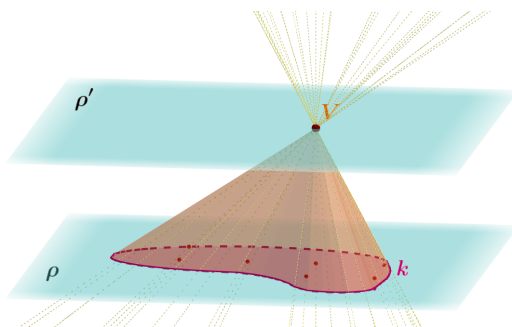
Kužel, jehož podstavná hrana je elipsa místo kružnice, nazýváme **eliptický kužel**, viz obr. 7.33, kde je možné natočit pohled tak, aby byla vidět podstava.



Obrázek 7.33: Eliptický kužel

### Poznámka

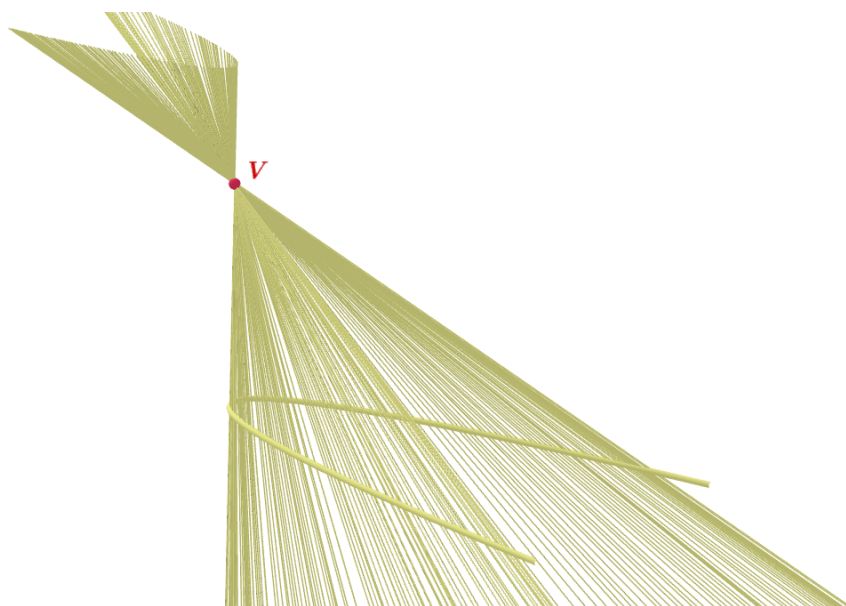
Místo elipsy jako podstavné hrany kužele bychom mohli uvažovat jakoukoli jednoduchou uzavřenou křivku  $k$ , která by určovala tvar podstavy. Obdobně jako v Dalšíh typech válců bychom mohli zavést i další pojmy, jako jsou zobecněná kuželová plocha, zobecněný kuželový prostor a zobecněný kužel, viz následující obr. 7.34. Změnou polohy bodu  $V$  měníme polohu vrcholu zobecněného kužele  $V$  v rovině  $\rho'$ .



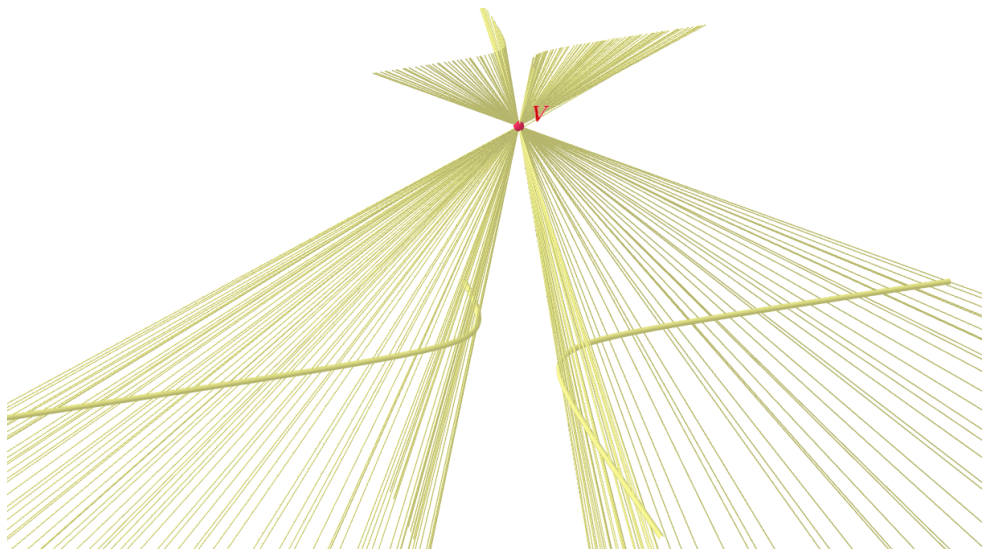
Obrázek 7.34: Zobecněný kužel

### Poznámka

Křivka ohraničující podstavu by mohla být i neuzavřená. V tomto případě bychom dostali například parabolickou nebo hyperbolickou kuželovou plochu, viz obr. 7.35 a obr. 7.36

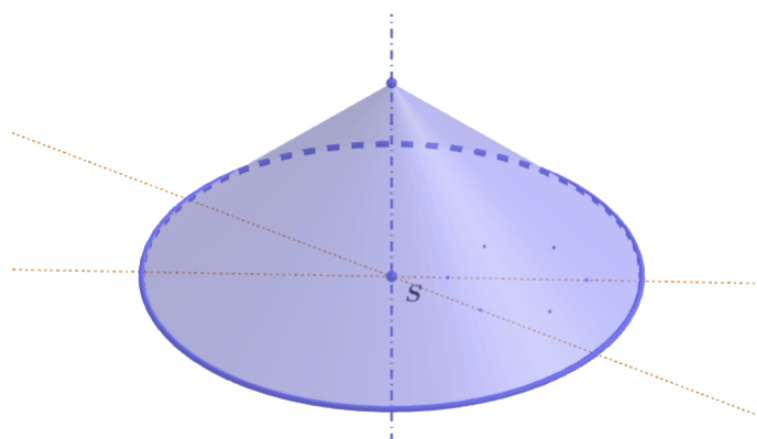


Obrázek 7.35: Parabolická kuželová plocha>



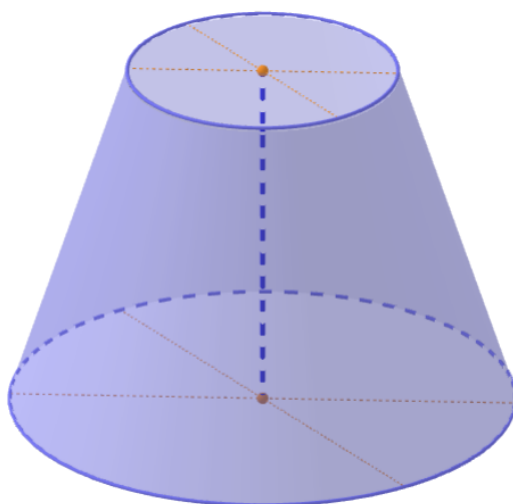
Obrázek 7.36: Hyperbolická kuželová plocha

**Úloha 7.4.1** Pod následujícími applety si můžete ověřit znalosti z klasifikace kuželů. Z uvedených možností vyberte správná tvrzení (jedno a více) o kuželech vyobrazených na obr. 7.37–7.4.41, kde bod  $S$  je těžištěm podstavy (středem kruhu). Správná odpověď se zobrazuje zeleně, nesprávná červeně. Jakmile vyplníte všechny správné odpovědi, celé okénko možností zezelená.



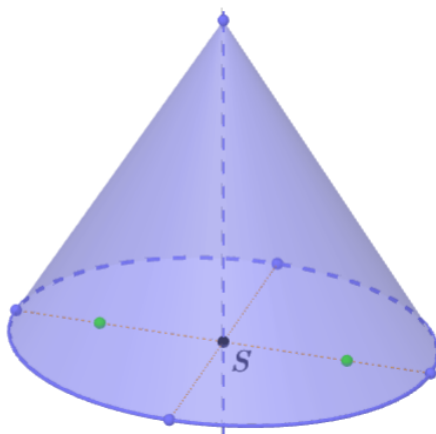
- nerotační
- rovnostranný
- rotační
- eliptický
- rotační komolý
- nerotační komolý

Obrázek 7.37: O jaký kužel se jedná?



- nerotační
- rovnostranný
- rotační
- eliptický
- rotační komolý
- nerotační komolý

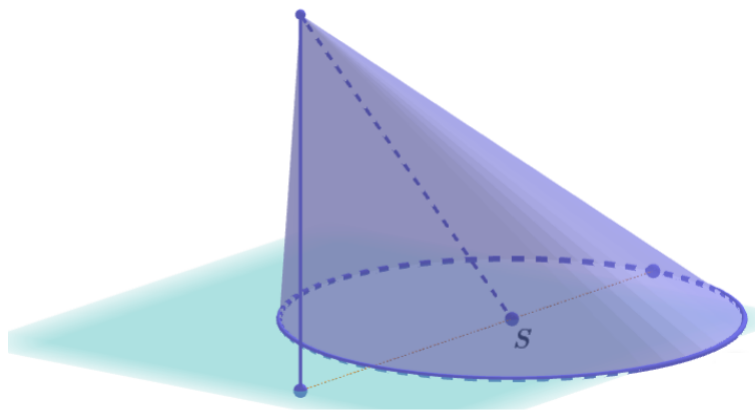
Obrázek 7.38: O jaký kužel se jedná?



- nerotační
- rovnostranný
- rotační
- eliptický
- rotační komolý
- nerotační komolý

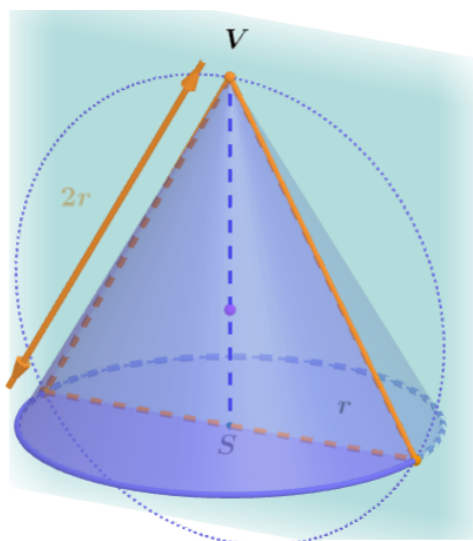
Obrázek 7.39: O jaký kužel se jedná?





- nerotační
- rovnostranný
- rotační
- eliptický
- rotační komolý
- nerotační komolý

Obrázek 7.40: O jaký kužel se jedná?



- nerotační
- rovnostranný
- rotační
- eliptický
- rotační komolý
- nerotační komolý

Obrázek 7.41: O jaký kužel se jedná?

## 7.5 Antimodely kuželů

Předtím, než přejdeme k zavedení vzorců pro výpočet objemů a povrchů kuželů, si ověříme pochopení předchozích pojmů. Uvedeme si tzv. antimodely kuželů.

Antimodelem kuželu zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice kužel připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o kužel nejedná. Prvním příkladem je těleso vzniklé "zkroucením" pravidelného osmibokého jehlanu. Na rozdíl od kuželu se nejedná o rotační ani oblé těleso. Ve francouzském městě se nachází střecha kostela vybudovaná v tomto tvaru (obr. 7.42).



Obrázek 7.42: Antimodel kuželu – střecha kostela Saint-Laurent ve tvaru zkrouceného osmibokého jehlanu (Ceyzériat, Francie) [66]

Jako druhý příklad antimodelu kuželu si uvedeme „těleso připomínající tvarem „úl“. Na obr. 7.43 se nachází slaměný úl. Jedná se o rotační těleso s kruhovou podstavou, ale na rozdíl od kužele jeho plášť vznikl rotací zaoblené křivky, nikoli přímky, jako je tomu u rotačního kužele. Ve tvaru úlů jsou postaveny uhelné pece v dnes již opuštěném americkém městě Ward, kde se těžilo stříbro (obr. 7.44) a také komplex domků v iránské Majara Residence na ostrově Hormuz (obr. 7.45).



Obrázek 7.43: Včelí slaměné úly



Obrázek 7.44: Uhelné pece ve tvaru připomínající úl (Ward, Nevada)



Obrázek 7.45: Domky Majara Residence ve tvaru připomínající úl (ostrov Hormuz, Irán)

Posledním příkladem antimodelu kužele je jednodílný rotační hyperboloid, protože se jedná o "objekt" s kruhovou podstavou, ale jeho plášť není shodný s pláštěm rotačního kužele. Ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu byl vybudován televizní vysílač a hotel Ještěd na stejnojmenném vrcholu, viz obr. 7.46. Jedná se o rotační plochu.



Obrázek 7.46: Televizní vysílač Ještěd ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Liberec, CZ)

Na obr. 7.47 se nachází Reunification Monument vybudovaný ve tvaru připomínající kužel, ale pláštěm by tato stavba kuželu neodpovídala, obdobně jako předcházející televizní vysílač na Ještědu.



Obrázek 7.47: Reunification Monument připomínající tvar kužele (Yaoundé, Kamerun) [77]

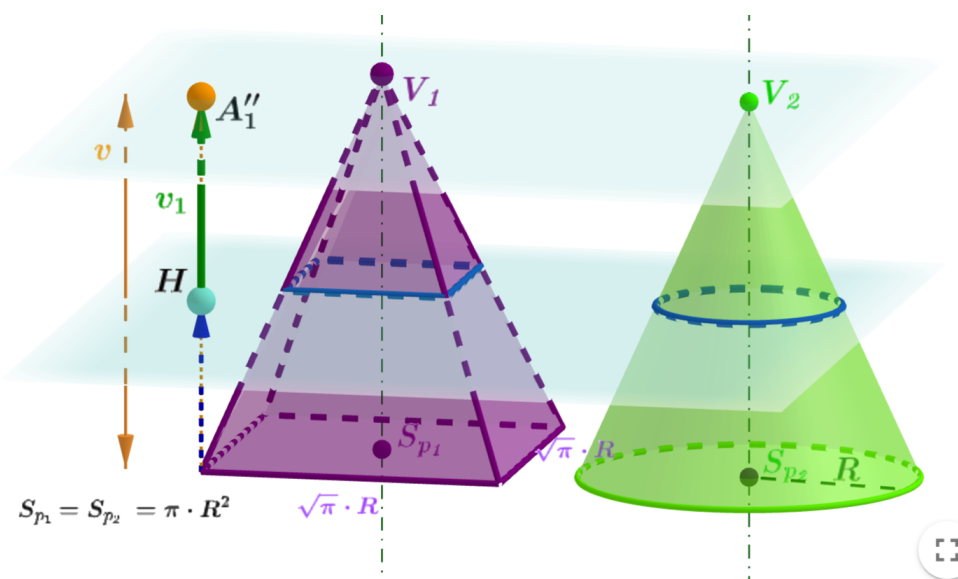
## 7.6 Objem kužele

### Poznámka

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato kapitola věnovat pouze kuželům s kruhovou podstavou.

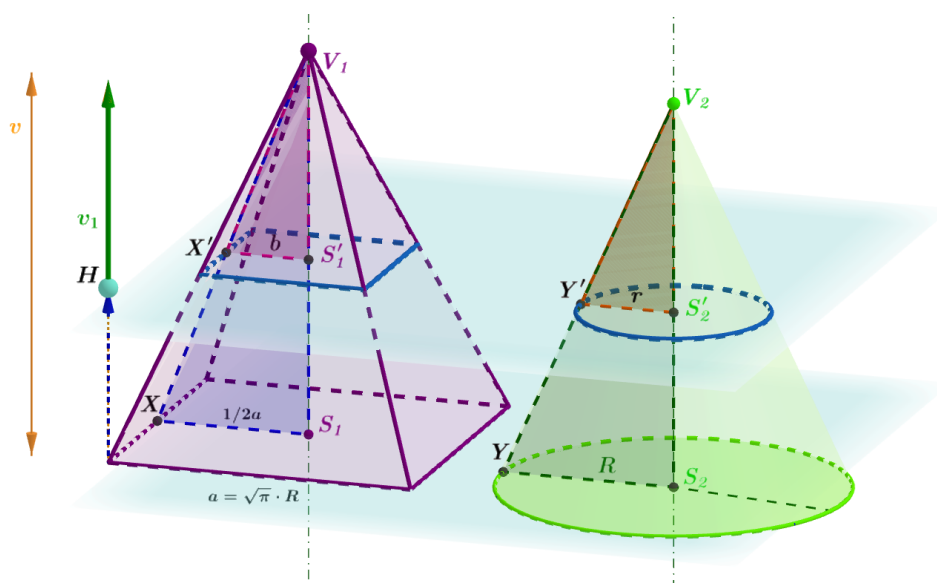
V této kapitole si představíme, jak se počítá objem kužele s kruhovou podstavou o poloměru  $r$  a výškou  $v$ . Objem rotačního kužele odvodíme pomocí Cavalieriho principu a s využitím vztahu pro objem jehlanu, který jsme si odvodili v předchozí kapitole.

Je dán rotační kužel s poloměrem podstavy  $R$  a s tělesovou výškou  $v$  a pravidelný čtyřboký jehlan – jehlan se čtvercovou podstavou o podstavné hraně  $a = \sqrt{\pi}R$  se stejnou tělesovou výškou  $v$ , jehož objem již umíme vypočítat. Nejdříve určíme obsahy jejich podstav. Obsah podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu je  $S_{p_1} = a^2 = (\sqrt{\pi}R)^2 = \pi R^2$ . Obsah podstavy rotačního kužele je roven obsahu kruhu o poloměru  $R$ , tj.  $S_{p_2} = \pi R^2$ . Je zřejmé, že obě tělesa mají stejný obsah podstavy.



Obrázek 7.48: Využití Cavalieriho principu a stejnolehlosti při odvození objemu rotačního válce

Nyní sestojíme pro obě tělesa řez rovinou rovnoběžnou s podstavami, který vedeme v libovolné výšce  $h$  od roviny jejich podstav mezi podstavami a vrcholy těles. A ukážeme shodnost obsahů řezů v libovolné výšce. Pro využití Cavalieriho principu potřebujeme znát obsahy daných řezů. K tomu využijeme obr. 7.48, kde změnou polohy bodu  $H$  měníme výšku  $v_1$ . Změnou polohy bodu  $A''_1$  měníme jejich tělesovou výšku. Na obr. 7.49 je vidět, že řezem rotačního kužele je kruh o poloměru  $r$  a řez jehlanu je čtverec s délkou strany  $2b$ . Oba řezy tedy mají stejný obsah. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá, že v daném jehlanu je trojúhelník  $X S_1 V_1$  podobný s trojúhelníkem  $X' S'_1 V_1$  dle věty UU. A v daném kužele je trojúhelník  $Y S_2 V_2$  podobný s trojúhelníkem  $Y' S'_2 V_2$  rovněž dle věty UU. Koeficient podobnosti u daného jehlanu i kužele je  $k = \frac{r}{R} = \frac{a}{b} \in (0, 1)$ .



Obrázek 7.49: Shodnost obsahů řezů jehlanu a kužele v libovolné výšce

Tedy řezy tímto jehlanem a kuželem jsou vždy podobné s podstavami, z čehož vyplývá, že obsahy řezů v libovolné výšce jsou si rovny. Je splněna podmínka pro použití Cavalieriho

principu a objem kužele se tedy vypočítá obdobně jako objem libovolného jehlanu  $V = \frac{1}{3}S_p v$ . Také pro objem kosého kužele platí stejný vztah, což bychom opět zdůvodnili obdobně pomocí Cavalieriho principu.

Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

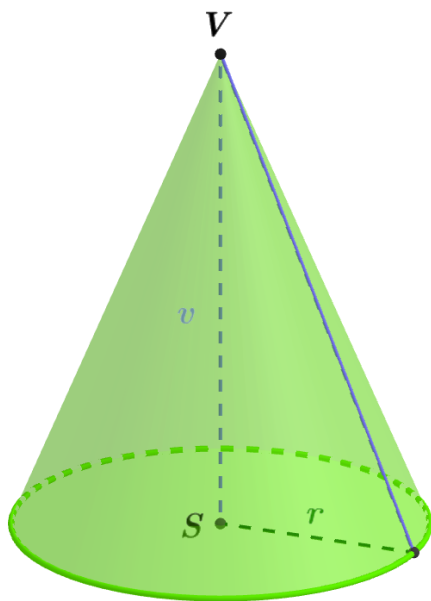
#### Věta

**Objem  $V$  libovolného kužele s kruhovou podstavou** o poloměru  $r$  s tělesovou výškou  $v$  je dán vztahem

$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

kde  $S_p$  je obsah podstavy.

**Příklad 7.6.1** Vypočítejte objem  $V$  rotačního kužele. Poloměr jeho podstavy  $r = 5$  cm a jeho výška  $v = 12$  cm (obr. 7.50). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

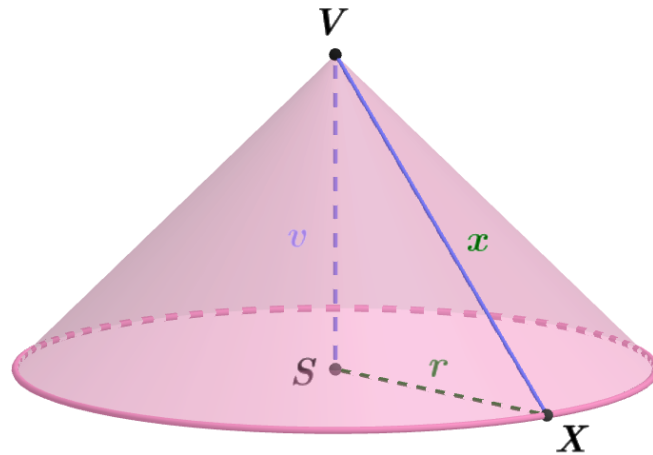


Obrázek 7.50: Ilustrace Příkladu 7.6.1

#### Řešení

- Pro objem  $V$  kužele platí  $V = \frac{1}{3}S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v$ .
- Podstavou kužele je kruh o poloměru  $r = 5$  cm.
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 \doteq 78,540 \text{ cm}^2$ .
- Pro objem kužele platí:  $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}78,540 \cdot 12 \text{ cm}^3 \doteq 314,160 \text{ cm}^3$ .
- Objem kužele je po zaokrouhlení  $314,16 \text{ cm}^3$ .

**Příklad 7.6.2** Vypočítejte objem  $V$  rotačního kužele, který vznikl rotací rovnoramenného trojúhelníku  $SXV$  okolo odvěsny  $SV$ , kde  $SV = v$ . Délka přepony daného trojúhelníku je  $x = |XV| = 9\sqrt{2}$  m (obr. 7.51). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 7.51: Ilustrace Příkladu 7.51

### Řešení

- Tento kužel vznikl rotací rovnoramenného trojúhelníku  $SXV$  s délkou přepony  $x = |XV| = 9\sqrt{2}$  m; tedy potřebujeme vypočítat délku jeho odvěsny  $v = |SV| = r = |SX|$ , abychom zjistili výšku kužele  $v$  a poloměr jeho podstavy  $r$ .
- Z délky přepony rovnoramenného trojúhelníku  $SXV$  dostáváme Pýthagorovou větou délku odvěsny:  $x^2 = 2r^2$ , tj.  $162 = 2r^2$ , tedy  $r = v = 9$  m.
- Pro objem  $V$  kužele platí  $V = \frac{1}{3}S_p v$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a jeho výšku  $v$ .
- Podstavou kužele je kruh o poloměru  $r = 9$  m.
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 9^2 \text{ m}^2 \doteq 254,469 \text{ m}^2$ .
- Pro objem kužele platí:  $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}254,469 \cdot 9 \text{ m}^3 \doteq 763,407 \text{ m}^3$ .
- Objem kužele je po zaokrouhlení  $763,41 \text{ m}^3$ .

## 7.7 Povrch kužele

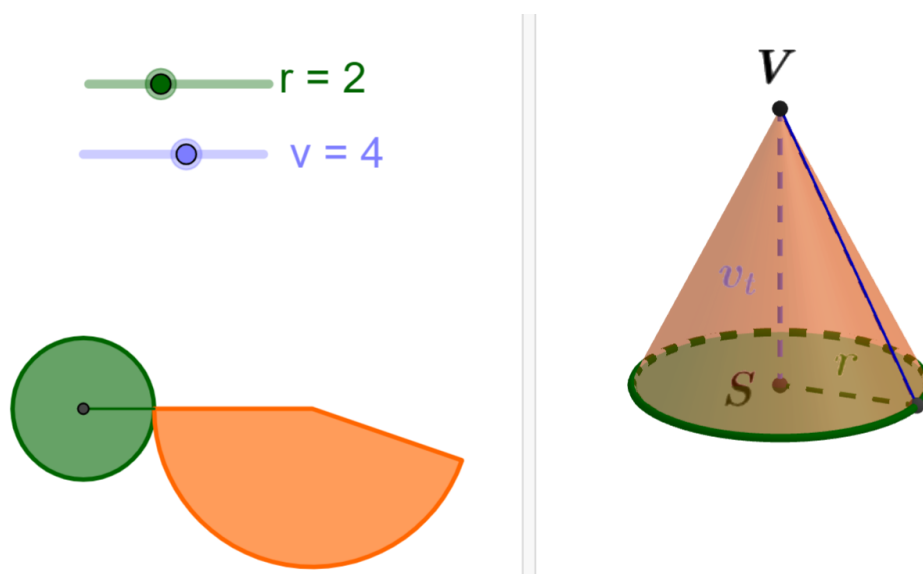
### Poznámka

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato kapitola věnovat pouze kuželům s kruhovou podstavou.



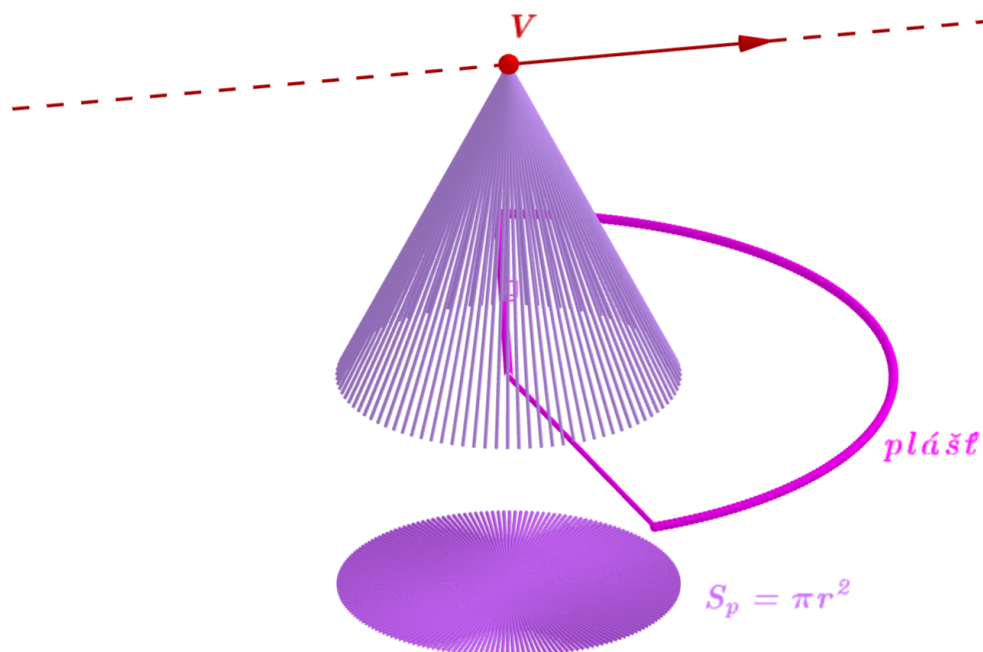
Umístěním podstavy a rozvinutím pláště kužele do vhodného uskupení v jedné rovině tak, aby vznikl jeden rovinný obrazec, získáme **sít kužele**. Sít kužele je tvořena jednou podstavou (kruhem) a jeho pláštěm; v případě rotačního kužele jde o kruhovou výseč (obr. 7.52).

Na následujícím obrázku lze zkoumat vliv změny poloměru  $r$  a jeho tělesové výšky  $v$  na vzhled sítě kužele.



Obrázek 7.52: Sít rotačního kužele

Sít nerotačního kužele je složitější obrazec než sít rotačního kužele, viz obr. 7.53, kde lze změnou polohy bodu  $V$  vytvořit z rotačního kužele kužel nerotační. Můžeme pozorovat, jak vypadá plášť kužele. Měníte podobu pláště kužele z výchozího rotačního kužele na nerotační.



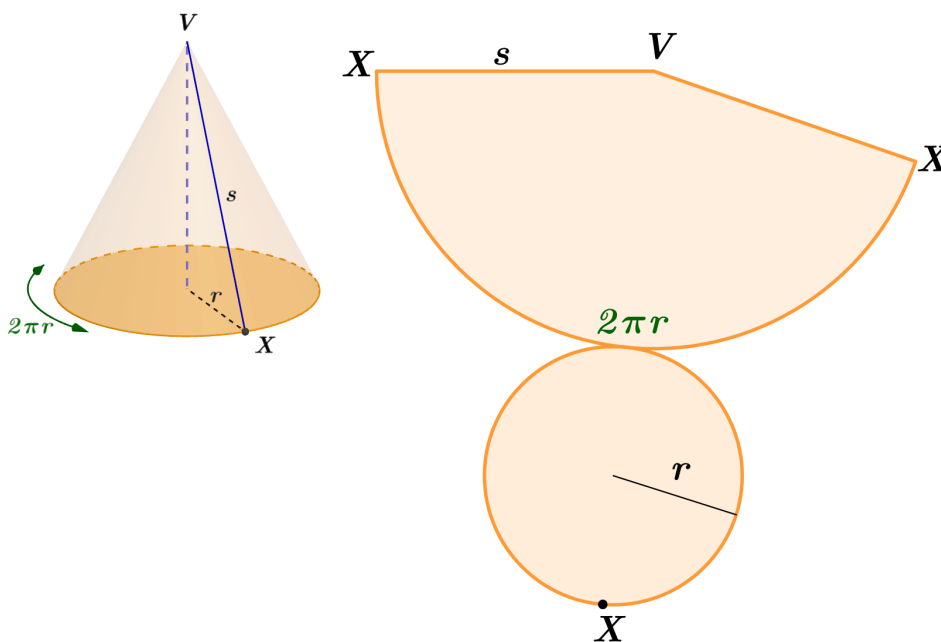
Obrázek 7.53: Podstava a plášť nerotačního kužele

Tak jako u povrchu tělesa je i povrch kužele roven obsahu jeho sítě.

**Věta**

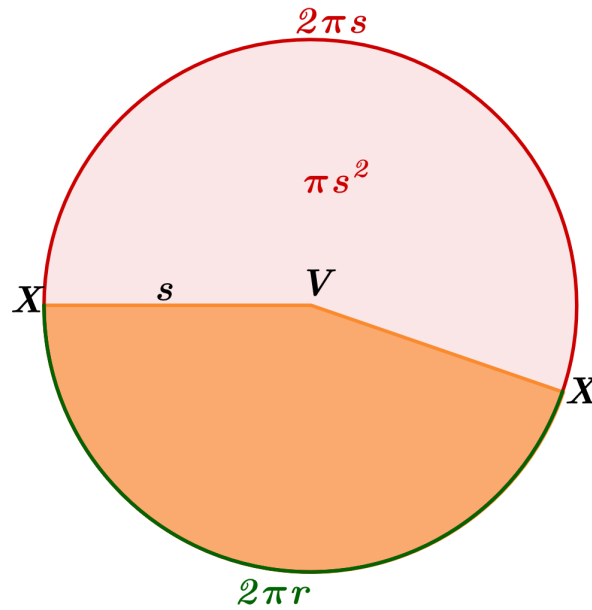
**Povrch  $S$  libovolného kužele s kruhovou podstavou** je roven součtu obsahu  $S_p$  jeho podstavy a obsahu jeho pláště  $S_{pl}$ , platí:  $S = S_p + S_{pl}$ .

Při odvození vztahu pro výpočet povrchu rotačního kužele budeme vycházet z předcházejícího vztahu  $S = S_p + S_{pl}$  a jeho sítě (obr. 7.54). Tento rovinný obrazec se skládá ze dvou částí – z podstavy a pláště; a potřebujeme vypočítat jejich obsahy. Obsah podstavy, tj. obsah kruhu, známe:  $S_p = \pi r^2$ . Dále určíme obsah pláště, tj. kruhové výseče s poloměrem rovným délce strany kužele  $r = s$  a s délkou kruhového oblouku, která je rovna obvodu podstavy kužele, tedy  $2\pi r$ . U rotačního kužele platí pro jeho poloměr podstavy  $r$ , tělesovou výšku  $v$  a stranu  $s$  Pýthagorova věta:  $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ .



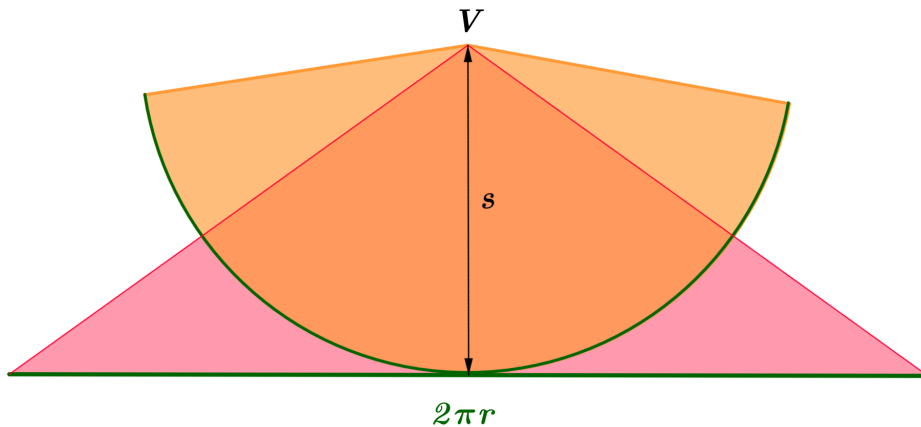
Obrázek 7.54: Sít rotačního kužele

Obsah pláště si odvodíme s využitím obr. 7.55. Na tomto obrázku je znázorněn kruh se středem  $V$  a poloměrem  $s$ ,  $X = Y$ ; obvod celého kruhu je  $2\pi s$ . Obsah kruhové výseče, který odpovídá oblouku o délce 1, je  $\frac{\pi s^2}{2\pi s}$ . Tedy obsah výseče, který odpovídá oblouku o délce  $2\pi r$ , je roven  $S_{pl} = \frac{\pi s^2}{2\pi s} \cdot 2\pi r = \pi r s$ .



Obrázek 7.55: Odvození pláště rotačního kužele

Vztah pro obsah pláště  $S_{pl} = \pi r s$  lze upravit na tvar  $S_{pl} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r) \cdot s$ . Tento vztah by odpovídal také vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku se základnou o délce  $2\pi r$  a s výškou  $s$ , viz obr. 7.56.



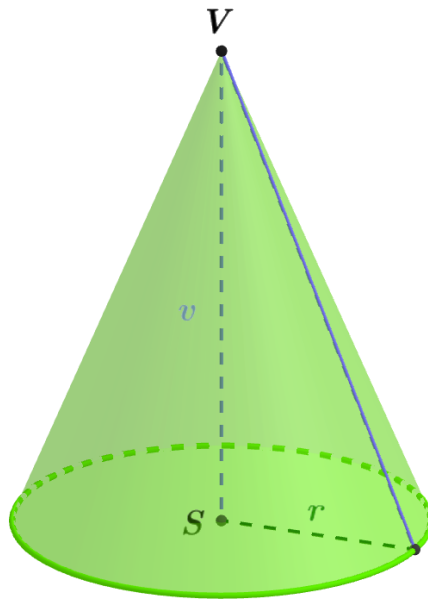
Obrázek 7.56: Vztah mezi obsahem pláště rotačního kužele a obsahem trojúhelníku

#### Věta

Pro **povrch  $S$  rotačního kužele** a délkou strany  $s$  a poloměrem jeho podstavy  $r$  platí:  $S = S_{pl} + S_p = \pi r s + \pi r^2 = \pi r(s + r)$ .

Nyní vypočítáme povrch kužele z Příkladu 7.6.1.

**Příklad 7.7.1** Vypočítejte povrch  $S$  rotačního kužele s kruhovou podstavou. Poloměr jeho podstavy  $r = 5$  cm a jeho výška  $v = 12$  cm (obr. 7.57). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



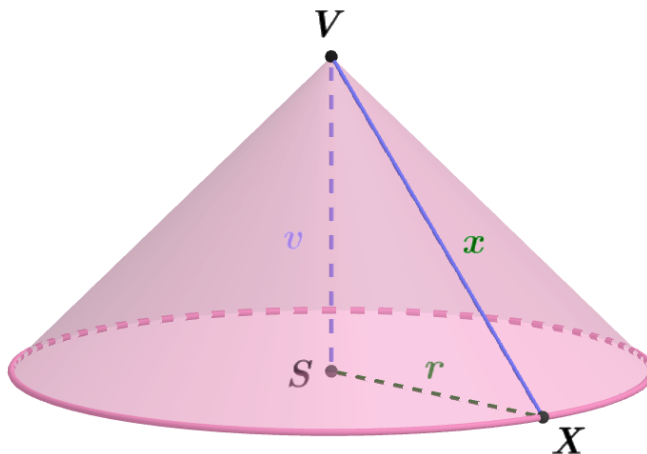
Obrázek 7.57: Ilustrace Příkladu 7.7.1

### Řešení

- Pro povrch  $S$  kužele platí  $S = S_p + S_{pl}$ , tedy potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$  a obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Podstavou kužele je kruh o poloměru  $r = 5$  cm.
- Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2 \doteq 78,540 \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah pláště kužele platí:  $S_{pl} = \pi r s$ . Potřebujeme znát délku strany  $s$  kužele.
- Pro stranu  $s$  platí Pýthagorova věta:  $s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ cm} = \sqrt{25 + 144} \text{ cm} = \sqrt{169} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$ .
- Tedy  $S_{pl} = \pi r s = \pi \cdot 5 \cdot 13 \text{ cm}^2 \doteq 204,204 \text{ cm}^2$ .
- Povrch kužele:  $S = S_p + S_{pl} = 78,540 + 204,204 \text{ cm}^2 = 282,744 \text{ cm}^2$ .
- Povrch kužele je po zaokrouhlení  $282,74 \text{ cm}^2$ .

Nyní vypočítáme povrch kužele z Příkladu 7.6.2.

**Příklad 7.7.2** Vypočítejte povrch  $S$  rotačního kužele, který vznikl rotací rovnoramenného trojúhelníku  $SXV$  okolo odvěsny  $SV$ , kde  $SV = v$ . Délka přepony daného trojúhelníku je  $x = |XV| = 9\sqrt{2}$  m (obr. 7.58). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 7.58: Ilustrace Příkladu 7.7.2

### Řešení

- Tento kužel vznikl rotací rovnoramenného trojúhelníku  $SXV$  s délkou přepony, tj. stranou kužele  $x = |XV| = 9\sqrt{2}$  m. Tedy potřebujeme vypočítat délku jeho odvěsen  $v = |SV| = r = |SX|$ , abychom zjistili poloměr jeho podstavy  $r$ .
- Z délky přepony rovnoramenného trojúhelníku  $SXV$  dostáváme Pýthagorovou větou délku odvěsen:  $x^2 = 2r^2$ , tj.  $162 = 2r^2$ , tedy  $r = 9$  m.
- Pro povrch  $S$  rotačního kužele platí  $S = \pi r x + \pi r^2 = \pi r(x + r)$ , potřebujeme znát délku strany  $x$  kužele a poloměr jeho podstavy  $r$ .
- Tedy  $S = \pi r x + \pi r^2 = \pi r(x + r) = \pi \cdot 9(9\sqrt{2} + 9)$  m<sup>2</sup>  $\doteq 614,343$  m<sup>2</sup>.
- Povrch kužele je po zaokrouhlení 614,34 m<sup>2</sup>.

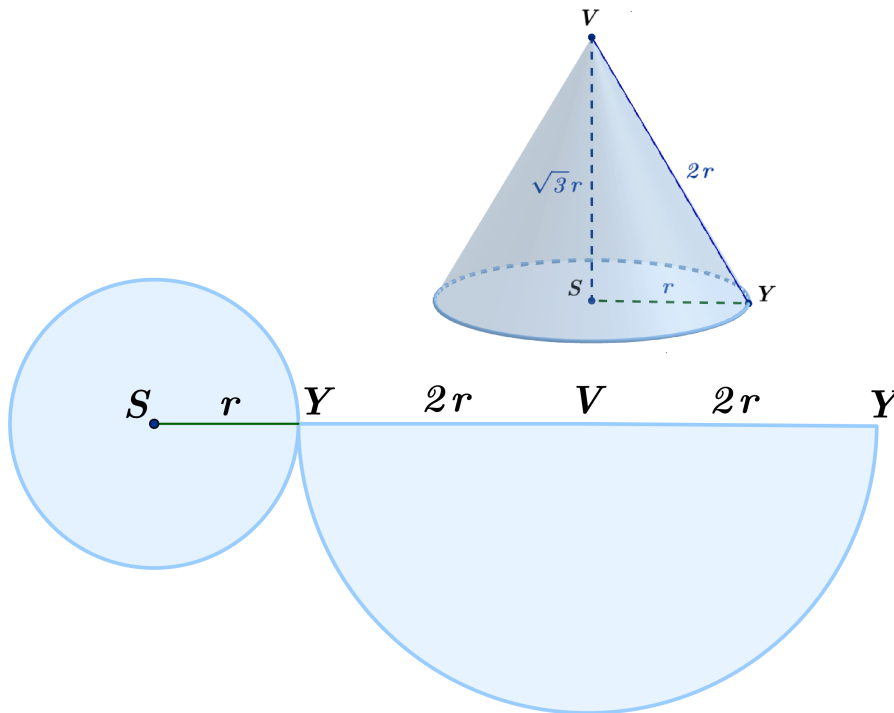
## 7.8 Objemy a povrchy dalších typů kuželů

### Poznámka

V souladu s obsahem výuky matematiky na druhém stupni základních škol a na školách středních se bude tato kapitola věnovat pouze kuželům s kruhovou podstavou.

### ROVNOSTRANNÝ KUŽEL

**Příklad 7.8.1** Vypočítejte objem  $V$  a povrch  $S$  rovnostranného kužele o poloměru podstavy  $r = 5$  mm. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



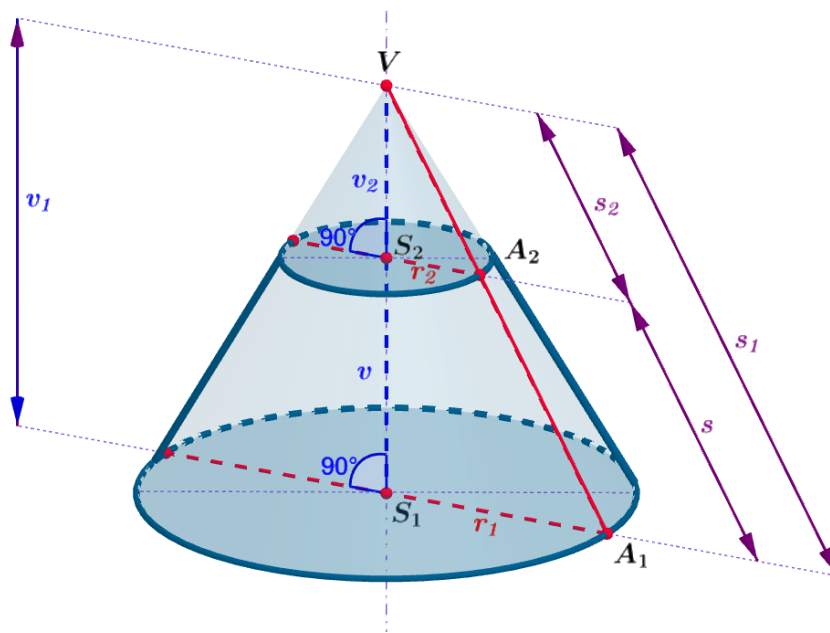
Obrázek 7.59: Ilustrace Příkladu 7.8.1

## Řešení

- Pro objem  $V$  kužele platí  $V = \frac{1}{3}S_p v$ . Potřebujeme znát obsah podstavy  $S_p$ , tělesovou výšku  $v$ ; známe  $r = |SY| = 5$  mm (obr. 7.59)). Víme, že je kužel rovnostranný, pro délku jeho strany platí:  $|VY| = 2r = 10$  mm.
- Vypočítáme tělesovou výšku kužele  $v$ . Z délky odvěsny  $r = |SY| = 5$  mm a přepony  $|VY| = 2r = 10$  mm pravoúhlého trojúhelníku  $SYV$  s využitím Pýthagorovy věty dostáváme délku zbývající odvěsny  $x = |VS|$ :  $x^2 = 4r^2 - r^2$ , tj.  $x = \sqrt{3r^2}$  mm =  $\sqrt{3}r$  mm =  $\sqrt{3} \cdot 5$  mm  $\doteq 8,660$  mm.
- Podstavou kužele je kruh o poloměru  $r = 5$  mm. Pro obsah podstavy  $S_p$  platí:  $S_p = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2$  mm<sup>2</sup>  $\doteq 78,540$  mm<sup>2</sup>.
- Pro objem kužele platí:  $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}78,540 \cdot 8,660$  mm<sup>3</sup>  $\doteq 226,719$  mm<sup>3</sup>.
- Pro povrch  $S$  kužele platí  $S = S_p + S_{pl}$ , tedy potřebujeme znát obsah jeho pláště  $S_{pl}$ .
- Pro obsah pláště kužele platí:  $S_{pl} = \pi r s$ . Známe  $|VY| = 2r = 10$  mm,  $r = |SY| = 5$  mm. Tedy  $S_{pl} = \pi r s = \pi \cdot 5 \cdot 10$  mm<sup>2</sup>  $\doteq 157,080$  mm<sup>2</sup>.
- Povrch kužele:  $S = S_p + S_{pl} = 78,540 + 157,080$  mm<sup>2</sup> =  $235,620$  mm<sup>2</sup>.
- Objem kužele je po zaokrouhlení  $226,72$  mm<sup>3</sup>.
- Povrch kužele je po zaokrouhlení  $235,62$  mm<sup>2</sup>.

## 7.8.1 KOMOLÝ KUŽEL

Pro odvození vzorce pro objem rotačního komolého kužele uvažujme rotační kužel o výšce  $v_1$  a poloměru podstavy  $r_1$ , který seřízneme rovinou rovnoběžnou s podstavou ve výšce  $v$ . Tím vzniknou dvě tělesa – rotační kužel o výšce  $v_2$  a poloměru podstavy  $r_2$  a komolý rotační kužel o výšce  $v$  a poloměrech podstav  $r_1, r_2$  (obr. 7.60).



Obrázek 7.60: Rotační komolý kužel

Pro objemy  $V_1, V_2$  kuželů s tělesovými výškami  $v_1, v_2$  a pro objem  $V$  komolého kužele platí

$$V_1 = V + V_2, \text{ tj. } V = V_1 - V_2.$$

Pro objem  $V$  komolého kužele platí:

$$V = \frac{1}{3}S_1v_1 - \frac{1}{3}S_2v_2, \text{ kde } S_1 \text{ a } S_2 \text{ jsou obsahy jeho podstav.}$$

Jelikož  $v_1 = v + v_2$ , dostáváme

$$V = \frac{1}{3}S_1(v + v_2) - \frac{1}{3}S_2v_2$$

čili

$$V = \frac{1}{3}S_1v + \frac{1}{3}(S_1 - S_2)v_2.$$

Oba rotační kužele jsou podobné ve stejnoolehlosti se středem ve společném vrcholu  $V$  obou kuželů, tedy koeficient podobnosti  $k$  je

**Poznámka** – Stejnolehlost viz Portálu středoškolské matematiky. Následující definice je převzata z [10, s. 59].

### Definice

**Stejnolehlost**  $H(S, \kappa)$  (neboli homotetie) určená bodem  $S$  a nenulovým reálným číslem  $\kappa$  je podobným zobrazením v prostoru, ve kterém se zobrazí bod  $S$  na bod  $S$  a každý bod  $X \neq S$  na bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ . Pro  $\kappa > 0$  leží bod  $X'$  na polopřímce  $SX$ ; pro  $\kappa < 0$  leží bod  $X'$  na polopřímce opačné k  $SX$ . Bod  $S$  nazýváme **středem stejnoolehlosti**, číslo  $\kappa$  nazýváme **koeficientem stejnoolehlosti**. Bod  $X'$  je obrazem bodu  $X$  ve stejnoolehlosti se středem  $S$  a koeficientem  $\kappa$ ; zapisujeme takto:  $H(S, \kappa) : X \rightarrow X'$ .

$$k = \frac{v_2}{v_1}.$$

Podstavy obou kuželů (a tedy podstavy komolého kužele) jsou podobné kruhy a pro jejich obsahy platí:

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2; \text{ tedy } k = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Tudíž

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

Postupnými úpravami dostáváme a s využitím vztahu  $v_1 = v + v_2$ , vyjádříme  $v_2$ :

$$v_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} v.$$

Dosadíme za  $v_2$  do vztahu pro objem  $V$  komolého kužele:

$$V = \frac{1}{3} S_1 v + \frac{1}{3} (S_1 - S_2) \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} v.$$

Rozdíl  $S_1 - S_2$  rozložíme na součin  $(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})$ , tedy: a upravíme na výsledný tvar:

$$V = \frac{1}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) v.$$

Pro obsahy podstav komolého kužele platí  $S_1 = \pi r_1^2$  a  $S_2 = \pi r_2^2$ :



$$V = \frac{1}{3}(\pi r_1^2 + \sqrt{\pi r_1^2 \cdot \pi r_2^2} + \pi r_2^2)v, \text{ tj.}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

#### Věta

**Objem  $V$**  rotačního komolého kužele s tělesovou výškou  $v$  a poloměry podstav  $r_1, r_2$  je  $V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ .

#### Poznámka

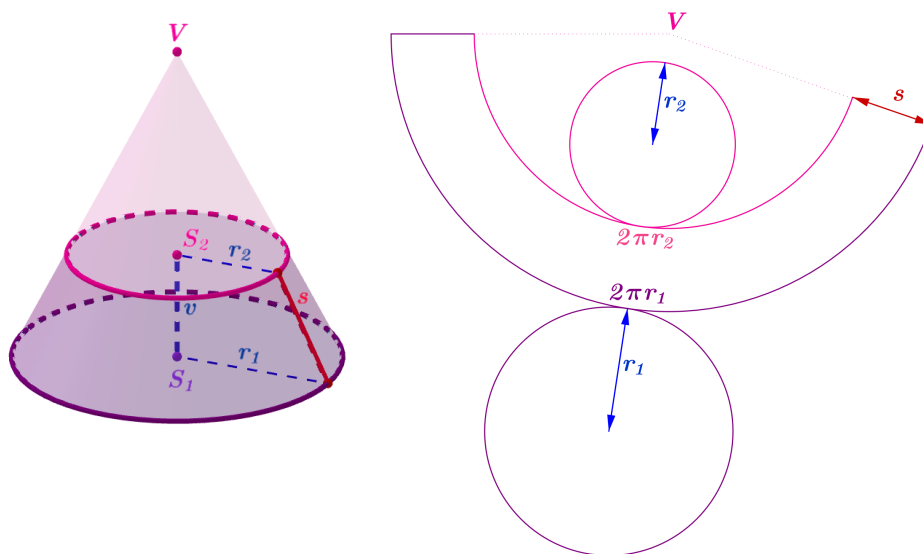
Objem nerotačního komolého kužele s kruhovou podstavou bychom pomocí Cavalieriho principu "převodli" na objem rotačního komolého kužele se stejnou výškou a stejnými poloměry podstav.

Dále si uvedeme vztah pro povrch rotačního komolého kužele:

#### Věta

Pro **povrch  $S$**  rotačního komolého kužele platí  $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$ , kde  $S_1, S_2$  jsou obsahy podstav a  $S_{pl}$  je obsah pláště.

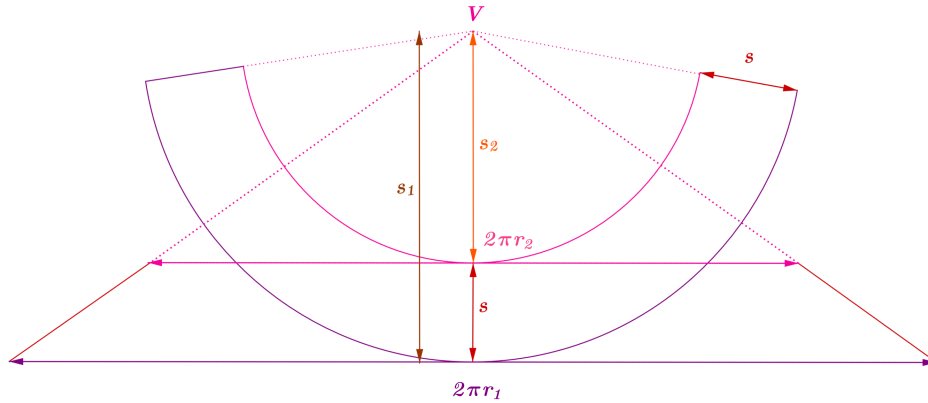
Při odvození vztahu pro výpočet povrchu rotačního komolého kužele budeme vycházet z předcházejícího vztahu  $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$  a jeho sítě (obr. 7.8.3). Sít se skládá ze dvou podstav a pláště; obsahy podstav s poloměry  $r_1, r_2$  jsou  $S_1 = \pi r_1^2, S_2 = \pi r_2^2$ . Obsah pláště je roven obsahu výseče mezikružní. Rozměry sítě jsou uvedeny na obr. 7.61.



Obrázek 7.61: Sít rotačního komolého kužele

Známe z obr. 7.56 obsah pláště rotačního kužele s poloměrem podstavy  $r$  a stranou rotačního kužele  $x$ ,  $S_{pl} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r) \cdot x$ . Obsah pláště komolého kužele určíme jako rozdíl obsahů pláští

dvou rotačních kuželů (o stranách  $s_1$ ,  $s_2$  a poloměrech podstav  $r_1$ ,  $r_2$ ), ze kterých vznikl, viz obr. 7.60, 7.61 a 7.62.



Obrázek 7.62: Souvislost obsahu pláště rotačního komolého kužele s obsahy daných rotačních kuželů

Pro obsah pláště rotačního komolého kužele platí:

$$S_{pl} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r_1) \cdot s_1 - \frac{1}{2} \cdot (2\pi r_2) \cdot s_2 = \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi(r_1 s_1 - r_2 s_2).$$

Z podobnosti trojúhelníků  $A_1 S_1 V$  a  $A_2 S_2 V$  na obr. 7.8.2 vyplývá, že:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Pro délky  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  platí  $s_1 = s + s_2$ , tudíž  $s_2 = s_1 - s$ , a proto:

$$\frac{s+s_2}{s_2} = \frac{s_1}{s_1-s} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Odtud dostáváme:

$$s_2 = \frac{sr_2}{r_1-r_2} \text{ a } s_1 = \frac{sr_1}{r_1-r_2}.$$

Dosadíme-li za  $s_2$  a  $s_1$  do vzorce pro obsah pláště, dostáváme:

$$S_{pl} = \pi(r_1 s_1 - r_2 s_2) = \pi\left(\frac{sr_1^2}{r_1-r_2} - \frac{sr_2^2}{r_1-r_2}\right) = \pi s \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} = \pi s(r_1 + r_2).$$

Předchozí úvahy můžeme nyní shrnout.

#### Věta

**Pro povrch  $S$  rotačního komolého kužele** se stranou  $s$  a poloměry jeho podstav  $r_1, r_2$  platí:  $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2)$ .

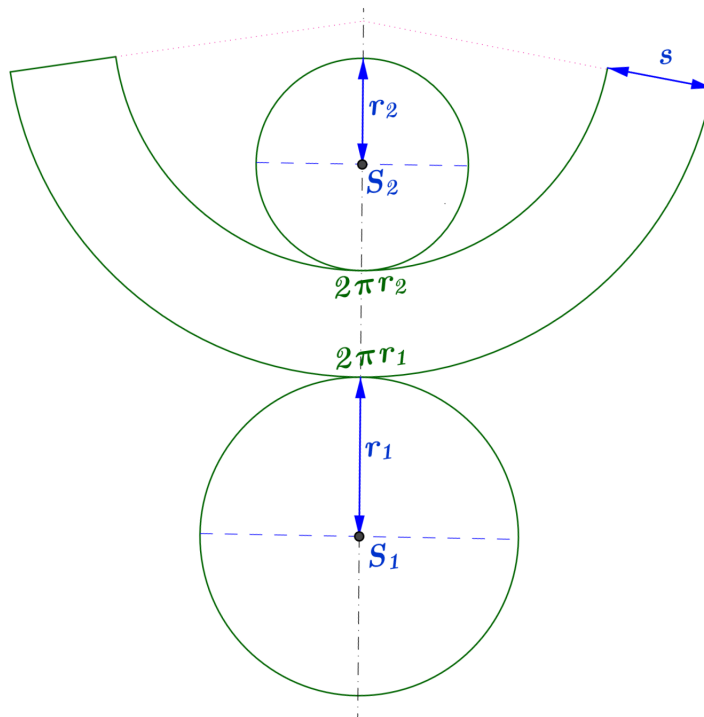
Ze vztahu pro obsah pláště rotačního komolého kužele vyplývá, že  $S_{pl} = \pi s(r_1 + r_2) = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r_1 + 2\pi r_2) \cdot s$ . Tento vztah by odpovídal také vztahu pro výpočet obsahu lichoběžníku se základnami o délkách  $2\pi r_1, 2\pi r_2$  a s výškou  $s$ , viz předcházející obr. 7.62.

Ve tvaru pláště rotačního komolého kužele je vyrobeno stínítko na lampu, viz obr. 7.63.



Obrázek 7.63: Stínítko lampy ve tvaru pláště rotačního komolého kužele.

**Příklad 7.8.2** Rozmyslete si, jak ze vztahu pro objem rotačního komolého kužele by bylo možné odvodit vztahy pro výpočet objemu rotačního válce a kužele.

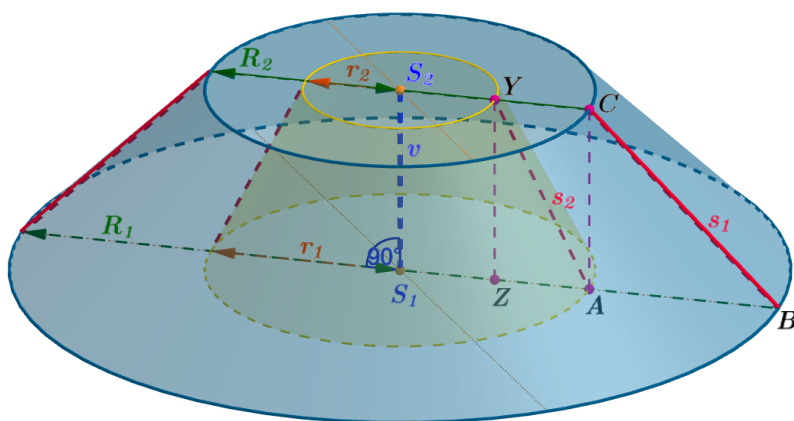


Obrázek 7.64: Ilustrace Příkladu 7.8.2

## Řešení

- Využijeme obr. 7.29.
- Již známe vzorec pro objem rotačního komolého kužele s tělesovou výškou  $v$  a poloměry podstav  $r_1, r_2$ , použijeme vztah  $V_{kužele} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$ .
- V případě rovnosti poloměrů podstav komolého rotačního kužele, tj.  $r_1 = r_2 = r$ , získáme válec. Pokud do vzorce pro objem komolého kužele dosadíme za poloměry stejnou délku  $r$ , pak by pro objem rotačního komolého kužele platilo:  $V_{komoléhoKužele} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_1 + r_1^2) = \frac{1}{3}\pi v(3r_1^2) = \pi r_1^2 v$ , což odpovídá vztahu pro výpočet objemu rotačního válce s tělesovou výškou  $v$  a poloměrem podstavy  $r_1$ , dostáváme  $V_{komoléhoKužele} = V_{válece} = \pi r^2 v$ .
- Rotační kužel získáme z komolého kužele, jestliže poloměr horní podstavy  $r_2 = 0$ , tj. půjde jen o bod. Pak by pro objem rotačního komolého kužele platilo:  $V_{kužele} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 \cdot 0 + 0^2) = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2) = \frac{1}{3}\pi r_1^2 v$ , což odpovídá vztahu pro výpočet objemu rotačního kužele s tělesovou výškou  $v$  a poloměrem podstavy  $r_1$ , pro  $r_1 = r$  dostáváme  $V_{komoléhoKužele} = V_{kužele} = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ .

**Příklad 7.8.3** Vypočítejte objem  $V$  tělesa vzniklého rozdílem rotačního komolého kužele s poloměry podstav  $R_1 = 8$  cm,  $R_2 = 4$  cm a rotačního komolého kužele s poloměry podstav  $r_1 = 4$  cm,  $r_2 = 2$  cm; oba kužele mají stejné středy podstav. Oba kužele mají stejnou výšku  $v = 4$  cm. Určete kolik  $\text{cm}^2$  látky by bylo potřeba na pokrytí tohoto tělesa. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 7.65: Ilustrace Příkladu 7.8.3

### Řešení

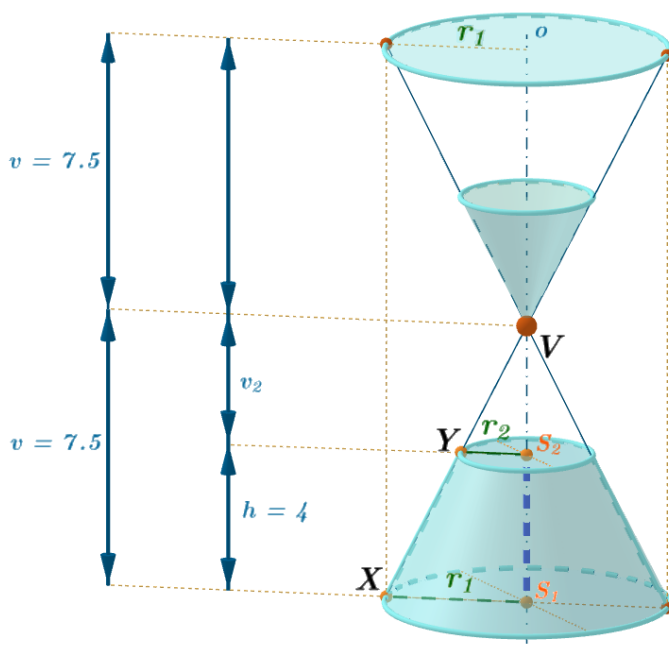
- Pro výpočet objemu prvního rotačního komolého kužele  $K_1$  s tělesovou výškou  $v$  a poloměry podstav  $R_1, R_2$  platí  $V_{K_1} = \frac{1}{3}\pi v(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$ .
- Tedy  $V_{K_1} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot (8^2 + 8 \cdot 4 + 4^2) \text{ cm}^2 = 469,145 \text{ cm}^2$ .
- Pro výpočet objemu druhého rotačního komolého kužele  $K_2$  s tělesovou výškou  $v$  a poloměry podstav  $r_1, r_2$  platí  $V_{K_2} = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$ .
- Tedy  $V_{K_2} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) \text{ cm}^2 = 117,286 \text{ cm}^2$ .
- Pro výpočet objemu  $V$  daného tělesa vzniklého  $K_2 - K_1$ , platí  $V = V_{K_1} - V_{K_2}$ , tedy  $V = 469,145 \text{ cm}^2 - 117,286 \text{ cm}^2 = 351,859 \text{ cm}^2$ .
- Pro povrch  $S$  daného tělesa platí  $S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl_1} + S_{pl_2}$ . Dolní podstava je tvořena mezikružím vzniklého rozdílem kruhů o poloměrech  $R_1, r_1$ , tedy  $S_{p_1} = \pi R_1^2 - \pi r_1^2 = \pi(R_1^2 - r_1^2) = \pi(8^2 - 4^2) \text{ cm}^2 = 150,796 \text{ cm}^2$ .
- Horní podstava je tvořena mezikružím vzniklého rozdílem kruhů o poloměrech  $R_2, r_2$ , tedy  $S_{p_2} = \pi R_2^2 - \pi r_2^2 = \pi(R_2^2 - r_2^2) = \pi(4^2 - 2^2) \text{ cm}^2 = 37,699 \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah pláště většího rotačního komolého kužele se stranou  $s_1$  a poloměry podstav  $R_1, R_2$  platí:  $S_{pl_1} = \pi s_1(R_1 + R_2)$ . Nejdříve potřebujeme vypočítat délku strany  $s_1$ .
- Vypočítáme délku strany  $s_1$ . Uvažujeme-li trojúhelník  $ABC$  (obr. 7.65). Známe délky jeho stran:  $|AB| = R_1 - r_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $|AC| = v = 4 \text{ cm}$ . Z délky odvěsen  $AB, AC$  pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  s využitím Pýthagorovy věty dostáváme délku přepony:  $s_1 = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{32} \text{ cm} = \sqrt{8} \cdot 2 \text{ cm} \doteq 5,657 \text{ cm}$ .
- Tedy  $S_{pl_1} = \pi s_1(R_1 + R_2) = \pi \cdot 5,657(8 + 4) \text{ cm}^2 \doteq 213,264 \text{ cm}^2$ .
- Pro obsah pláště menšího rotačního komolého kužele se stranou  $s_2$  a poloměry podstav  $r_1, r_2$  platí:  $S_{pl_2} = \pi s_2(r_1 + r_2)$ . Nejdříve potřebujeme vypočítat délku strany  $s_2$ .

- Vypočítáme délku strany  $s_2$ . Uvažujeme-li trojúhelník  $ZAY$  na obr. 7.65, známe délky jeho stran:  $|ZA| = R_2 - r_2 = 2$  cm,  $|ZY| = v = 4$  cm. Z délky odvěsen  $ZA, ZY$  pravoúhlého trojúhelníku  $ZAY$  s využitím Pýthagorovy věty dostáváme délku přepony  $s_2 = \sqrt{|ZA|^2 + |ZY|^2} = \sqrt{2^2 + 4^2}$  cm  $= \sqrt{20}$  cm  $= \sqrt{5} \cdot 2$  cm  $\doteq 4,472$  cm.
- Tedy  $S_{pl_2} = \pi s_2(r_1 + r_2) = \pi \cdot 4,472(4 + 2)$  cm<sup>2</sup>  $\doteq 84,295$  cm<sup>2</sup>.
- Tedy pro povrch daného tělesa platí:  $S = S_{p_1} + S_{p_2} + S_{pl_1} + S_{pl_2} = (150,796 + 37,699 + 213,264 + 84,295)$  cm<sup>2</sup>  $= 486,054$  cm<sup>2</sup>.
- Objem daného tělesa je po zaokrouhlení 351,86 mm<sup>3</sup>.
- Povrch daného tělesa je po zaokrouhlení 486,05 mm<sup>2</sup>.

## 7.9 Úlohy IV

### 7.9.1 Úloha 7.9.1

Přesýpací hodiny se skládají z dvou shodných rotačních kuželů spojených jejich vrcholy. Výsledný "dvojkůžel" je osově souměrný dle osy  $o$  a jeho celková výška je 15 cm. Přesypaný písek má tvar komolého kuželu o výšce 4 cm a poloměru dolní podstavy 3,75 cm, viz obr. 7.66. Písek v dolní části hodin se přesypal do tvaru komolého kuželu za 269,64 s. Kolik minut bude trvat, než se zbývající písek v přesýpacích hodinách dosype? Předpokládejte, že se písek se sype rovnoměrně. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



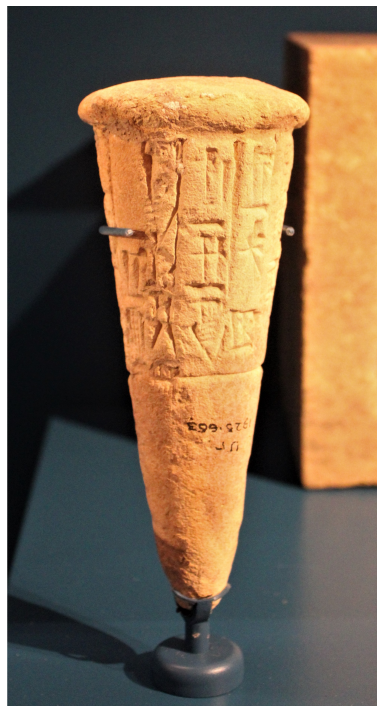
Obrázek 7.66: Ilustrace k úloze 7.9.1

- Potřebujeme tedy vypočítat objem  $V_2$  zbývajícího písku ve tvaru rotačního kuželu o neznámém poloměru  $r_2$  a s výškou  $v_2 = v - h = 3,5$  cm. Dále určíme objem komolého kuželu  $V_{kom}$ , abychom mohli zjistit, jakou „rychlostí“  $a$  se písek přesypává  $a = \frac{V_{kom}}{t_1}$  cm<sup>3</sup>/s. Pro objem  $V_2$  kužele platí:  $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 v_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot 3,5$  cm<sup>3</sup>. Pro objem  $V_{kom}$  kužele platí:  $V_{kom} = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{4}{3}\pi \cdot (3,75^2 + 3,75 \cdot r_2 + r_2^2)$  cm<sup>3</sup>. K určení objemů potřebujeme znát poloměr horní podstavy  $r_2$ .

- Pro výpočet poloměru horní podstavy  $r_2$  využijeme podobnost trojúhelníků trojúhelníků  $XS_1V$ ,  $YS_2V$  (dle věty uu). Platí:  $\frac{|YS_2|}{S_2V} = \frac{|XS_1|}{S_1V}$ , tj.  $\frac{r_2}{3,5} = \frac{|3,75|}{7,5}$  cm, tedy  $r_2 = \frac{|3,75 \cdot 3,5|}{7,5}$  cm = 1,75 cm.
- Vypočítáme objem  $V_2$  kužele:  $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot r_2^2 \cdot 3,5 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1,75^2 \cdot 3,5 \text{ cm}^3 \doteq 11,225 \text{ cm}^3$ .
- Vypočítáme objem  $V_{kom}$  komolého kužele, platí:  $V_{kom} = \frac{4}{3}\pi \cdot (3,75^2 + 3,75 \cdot r_2 + r_2^2) \text{ cm}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (3,75^2 + 3,75 \cdot 1,75 + 1,75^2) \text{ cm}^3 \doteq 99,222 \text{ cm}^3$ .
- Nyní vypočítáme „rychlost“ rovnoměrného přesypávání písku:  $a = \frac{V_{kom}}{t_1} = \text{cm}^3/\text{s} = \frac{99,222}{269,64} \text{ cm}^3/\text{s} \doteq 0,368 \text{ cm}^3/\text{s}$ .
- Zbývá určit, za jak dlouho ( $t_2$ ) se dosype zbývající písek o objemu  $V_2$  v horní části hodin.  $t_2 = \frac{V_2}{a} = \text{s} = \frac{11,225}{0,368} \text{ s} \doteq 30,503 \text{ s} \cdot \frac{1}{60} \doteq 0,508 \text{ min}$ .
- Zbývající písek se přibližně dosype za 0,51 min.

## 7.9.2 Úloha 7.9.2

Jedno "písmeno/znak" na plášti starověké mezopotámské tabulky ve tvaru rotačního kužele zabírá v průměru  $1,5 \text{ cm}^2$ . Tento rotační kužel má poloměr podstavy  $r = 2 \text{ cm}$  a výšku  $v = 12 \text{ cm}$  (obr. 7.67). Kolik celých písmen se vejde na plášť tabulky, resp. kužele? Mezivýsledky zaokrouhlujte na tři desetinná místa a výsledek na celé číslo.



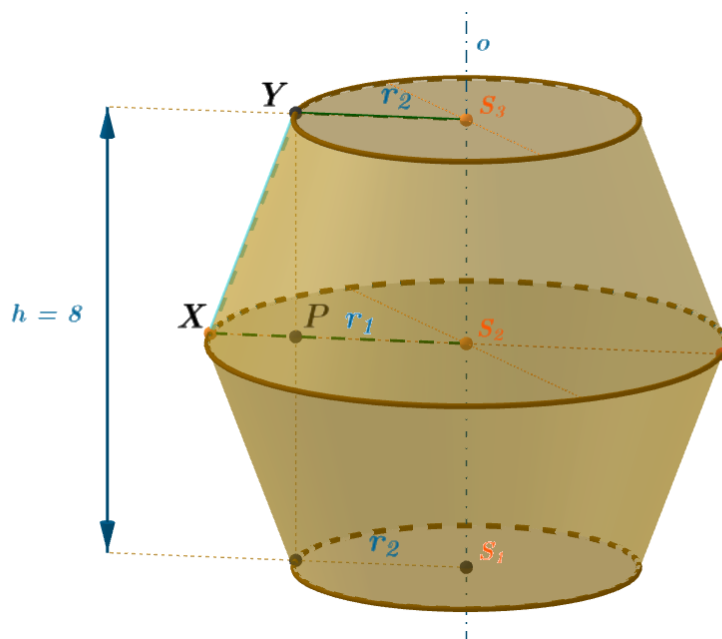
Obrázek 7.67: Ilustrace k Úloze 7.9.2 [82]

- Pro povrch pláště  $S$  rotačního kužele platí:  $S_{pl} = \pi r s$ . Tedy potřebuje nejdříve vypočítat délku strany kužele  $s$ .

- Řezem, který vede rovinou obsahující osu kužele, získáme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek  $r = 2$  cm a s výškou  $v = 12$  cm. S využitím Pýthagorovy věty dostáváme délku přepony  $s$ :  $s^2 = r^2 + v^2$ , tj.  $s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{2^2 + 12^2}$  cm  $= \sqrt{148}$  cm  $\doteq 12,166$  cm.
- Tedy  $S_{pl} = \pi r s = \pi \cdot 2 \cdot 12,166$  cm<sup>2</sup>  $\doteq 76,441$  cm<sup>2</sup>.
- Jedno písmeno zabírá 1,5 cm<sup>2</sup>, tudíž:  $\frac{76,441}{1,5} \doteq 50,961$  písmen.
- Na starověkou mezopotámskou tabulku se maximálně vejde 50 písmen.

### 7.9.3 Úloha 7.9.3

Určete objem  $V$  a povrch  $S$  sudu skládajícího se ze dvou shodných rotačních komolých kuželů souměrně sdružených podle roviny větší podstavy o poloměru  $r_1 = 4,5$  dm, poloměr menší podstavy je  $r_2 = 3$  dm a výška sudu je  $h = 8$  dm (obr. 7.68). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 7.68: Ilustrace k úloze 7.9.3

- Celkový objem sudu je roven  $V = 2V_{komolý}$ . Pro výpočet objemu rotačního komolého kužele s tělesovou výškou  $\frac{h}{2}$  a poloměry podstav  $r_1, r_2$  použijeme tento vztah  $V_{komolý} = \frac{1}{3}\pi\frac{h}{2}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{3}\pi\frac{8}{2}(4,5^2 + 4,5 \cdot 3 + 3^2)$  dm<sup>3</sup>  $= \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot (20,25 + 13,5 + 9)$  dm<sup>3</sup>  $= \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 42,750$  dm<sup>3</sup>  $\doteq 179,071$  dm<sup>3</sup>.
- Tedy pro objem sudu platí:  $V = 2V_{komolý} = 2 \cdot 179,071$  dm<sup>3</sup>  $= 358,142$  dm<sup>3</sup>.
- Celkový povrch sudu je roven  $S = 2S_{pl} + 2S_{pr2}$ . Pro obsah pláště  $S_{pl}$  komolého kužele o straně  $s = |XY|$  a poloměrech podstav  $r_1, r_2$  platí:  $S_{pl} = \pi s(r_1 + r_2)$ . Nejdříve potřebujeme vypočítat délku strany  $s$ .
- Určíme délku strany  $s$ , která je zároveň přeponou pravoúhlého trojúhelníku  $XPY$  o odvěsnách délky  $|PY| = \frac{h}{2}$ ,  $|XP|$ . Víme, že  $|XP| = r_1 - r_2 = 1,5$  dm. Dále vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku  $XPY$  a vypočítáme délku strany  $s$  pomocí Pýthagorovy věty:  $s^2 = |PY|^2 + |XP|^2$ , tj.  $s = \sqrt{|PY|^2 + |XP|^2} = \sqrt{4^2 + (1,5)^2}$  dm  $\doteq 4,272$  dm.



- Tedy platí:  $S_{pl} = \pi s(r_1 + r_2) = \pi \cdot 4,272(4,5 + 3) \text{ dm}^2 = 100,657 \text{ dm}^2$ .
- $S_{pr_2} = \pi r_2^2 = 28,274 \text{ dm}^2$ .
- Tedy platí:  $S = 2S_{pl} + 2S_{pr_2} = (2 \cdot 100,657 + 2 \cdot 28,274) \text{ dm}^2 = 257,862 \text{ dm}^2$ .
- Objem sudu je po zaokrouhlení  $358,14 \text{ dm}^3$ . Povrch sudu je po zaokrouhlení  $257,86 \text{ dm}^2$ .



# 8. Koule

## 8.1 Koule

V této kapitole se budeme zabývat následujícím tělesem, a to koulí. Pokud bychom se zamysleli, kde se nacházejí objekty ve tvaru koule, tak by nás mohly prvně napadnout glóbusy, které se používají pro znázornění vesmírných těles. Existují například glóbusy planety Země (obr. 8.1) nebo glóbusy nebeské sféry tzv. hvězdné glóbusy (obr. 8.2). Tyto glóbusy aproximují reálnou podobu vesmírných těles a bývají vyrobeny v kulovitém tvaru.



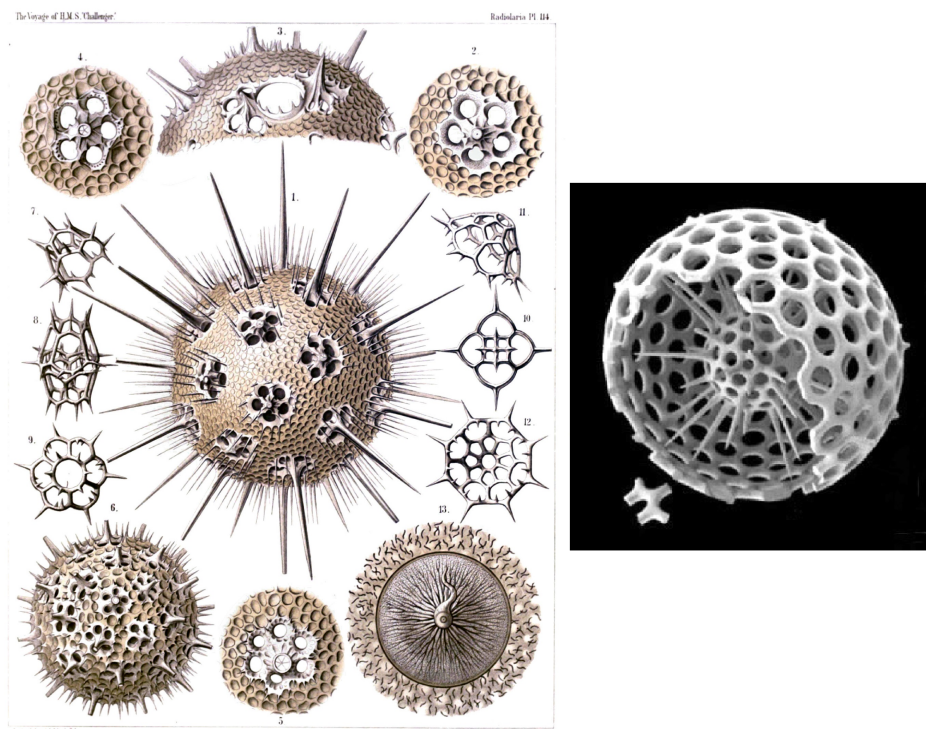
Obrázek 8.1: Glóbus planety Země ve tvaru koule [96]



Obrázek 8.2: Glóbus nebeské sféry ve tvaru koule (Berlín, Německo) [97]

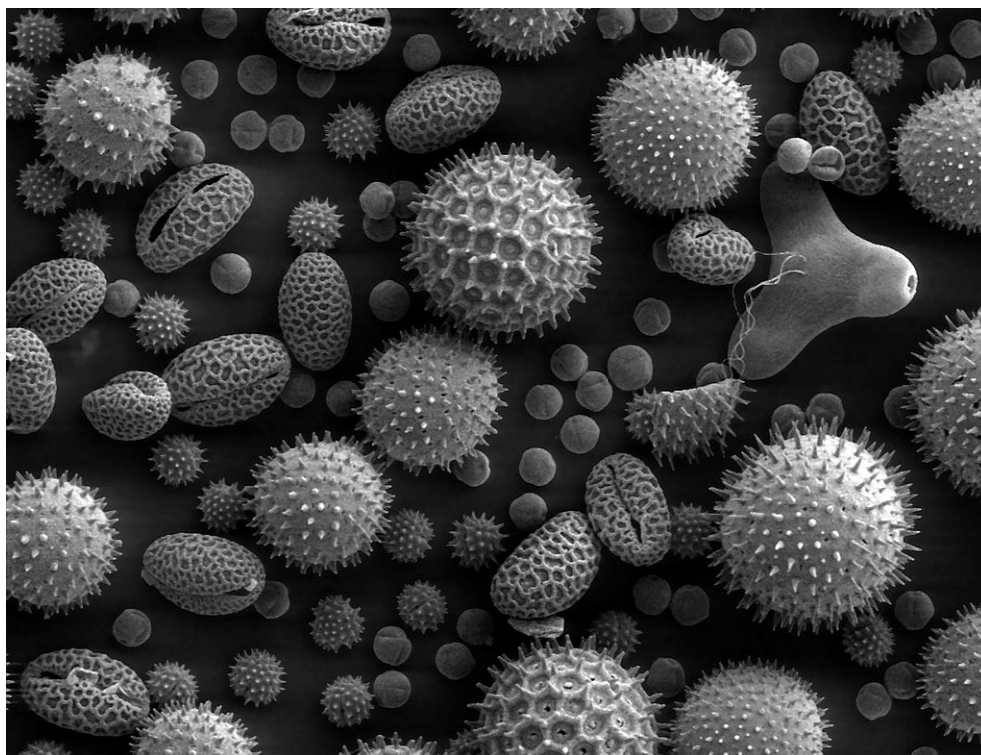
Další příklad objektů ve tvaru koule nacházíme v říši živočichů; jsou to schránky mořských jednobuněčných organismů zvaných Mřížovci, kteří vytvářejí mřížovité podpůrné soustavy

svému tělu z oxidu křemičitého (obr. 8.3).



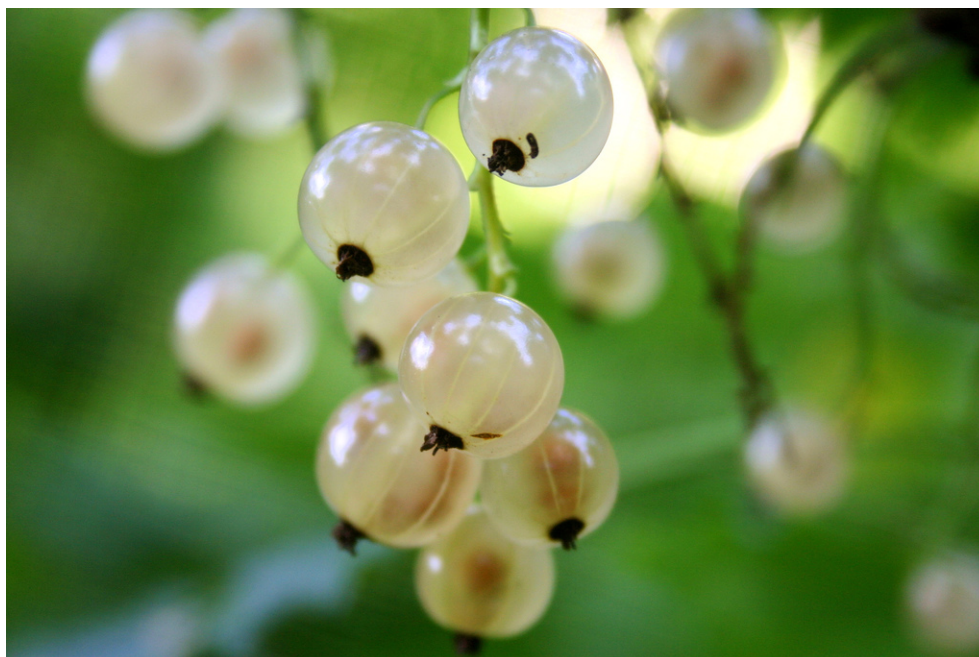
Obrázek 8.3: Obrázek 8.1:3: Schánky Mřížovců ve tvaru koule [98,99]

V říši rostlin je možné najít některá pylová zrna ve tvaru koule, viz obr. obr. 8.4.



Obrázek 8.4: Pylová zrna ve tvaru koule zobrazená elektronovou mikrofotografií [100]

A plody rybízu jsou kulovitěho tvaru, viz obr. 8.5.



Obrázek 8.5: Plody rybízu [101]

Jako další příklad si uvedeme některé předměty ze světa her, které svým tvarem připomínají koule – tenisový míč (8.6), cvrnkací kulička (8.7) a bowlingová koule (8.8).



Obrázek 8.6: Tenisový míč ve tvaru koule [102]



Obrázek 8.7: Cvrnkací kuličky ve tvaru koulí [103]



Obrázek 8.8: Bowlingové koule kulovitého tvaru [104]

Jistě bychom si mohli klást otázku, proč jsou bubliny vytvořené bublifukem kulaté? Důvodem je povrchové napětí, kdy je pro bublinu z kapaliny nejvýhodnější při daném objemu zaujímat

tvár s minimálním povrchem, a to je ze všech těles právě tvar koule (8.9).



Obrázek 8.9: Bublina vytvořená bublifukem ve tvaru koule [105]

## 8.2 Zavedení koule – jak vzniká koule

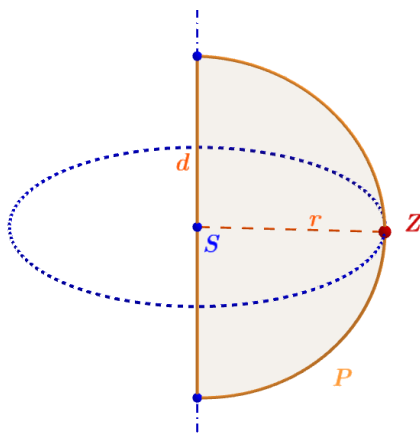
Obdobně jako rotační válec a rotační kužel zavádíme také kouli.

### Definice

**Koule** vznikne rotací půlkruhu okolo přímky, která obsahuje jeho průměr. Jednotlivé body půlkružnice, která vymezuje půlkruh, vytvoří rotací **kulovou plochu**.

Kulová plocha tvoří povrch koule.

Je dán půlkruh  $P$  a osa rotace  $o$ , která obsahuje jeho průměr; rotací půlkruhu  $P$  okolo této osy  $o$  dostáváme kouli se středem  $S$  s poloměrem podstavy  $r = \frac{d}{2}$ . Kulová plocha vzniká rotací půlkružnice vymežující půlkruh  $P$ , viz obr. 8.10. **Střed koule** je současně **středem kulové plochy**. **Průměr koule** je také roven **průměru kulové plochy**. Všechny délky úseček, jejichž krajní body leží na kulové ploše a které obsahují střed kulové plochy, jsou její průměry.



Obrázek 8.10: Vznik koule rotací půlkruhu  $P$  okolo osy  $o$

### Poznámka

Koule  $K$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  je množina všech bodů v prostoru, které mají od bodu  $S$  vzdálenost menší nebo rovnu poloměru  $r$ . Používáme symbolický zápis:  $K(S; r) = \{X; |XS| \leq r\}$ . Kulová plocha  $\kappa$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  je množina všech bodů v prostoru, které mají od bodu  $S$  vzdálenost rovnu poloměru  $r$ .  $\kappa(S; r) = \{X; |XS| = r\}$ .

Kulová plocha je hranicí koule a není možné ji rozvinout do roviny (obr. 2.11). Ve tvaru částí kulových ploch jsou například vystavěny skleníky Eden Project.



Obrázek 8.11: Skleníky Eden Project (Cornwall, Velká Británie) [107]

Při daném objemu zaujímá kulová plocha dané koule nejmenší povrch. Naopak při daném povrchu kulová plocha ohraničuje prostor o největším objemu. I kapka rosy díky povrchovému napětí vody zaujímá tvar koule, viz obr. 8.12.

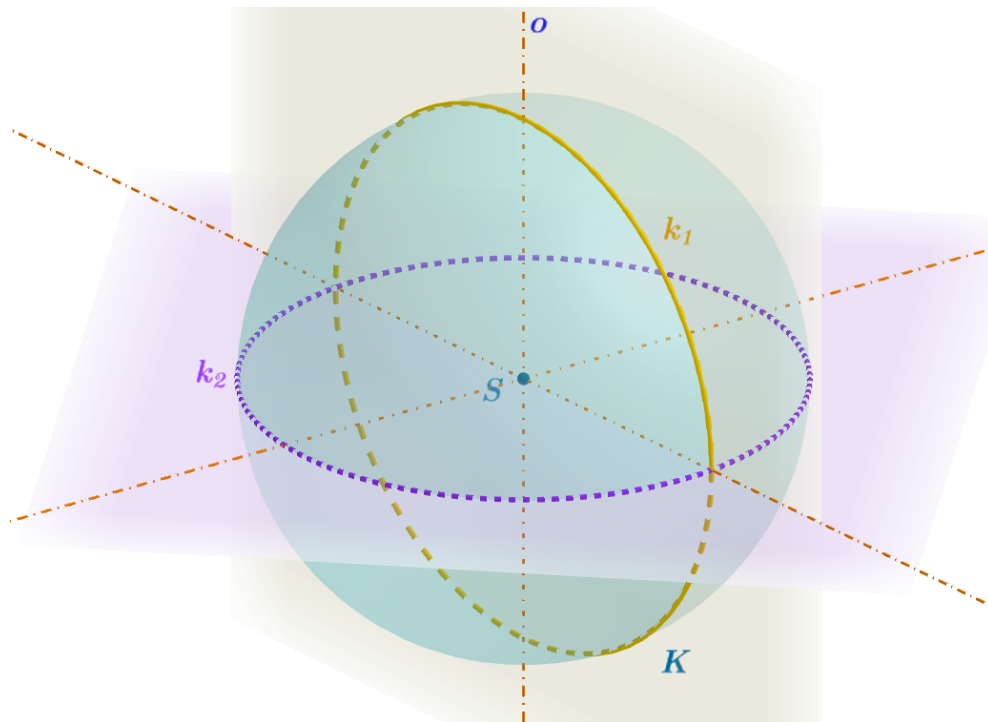


Obrázek 8.12: Kapky rosy ve tvaru koule [106]

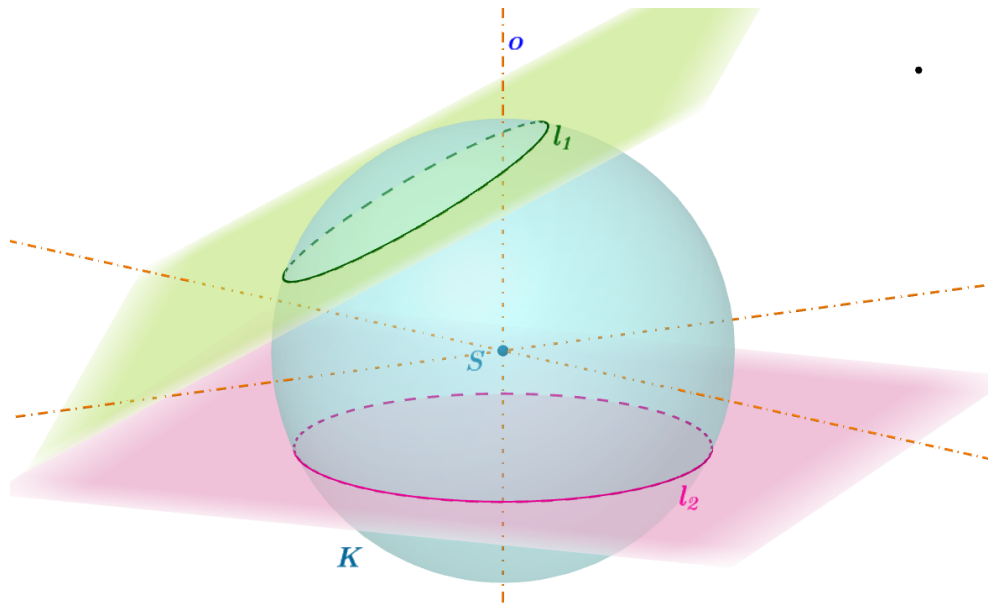
Kulová plocha je středově souměrná dle svého středu, osově souměrná podle všech přímek, které procházejí jejím středem a rovinově souměrná podle všech rovin, které prochází jejím středem. Každá rovina souměrnosti protíná kulovou plochu v kružnici, která se nazývá



**hlavní kružnice** ( $k_1, k_2$  na obr. 8.13). Kružnice nacházející se na kulové ploše, jejichž roviny neprotínají střed kulové plochy, označujeme jako **vedlejší kružnice** ( $l_1, l_2$  na obr. 8.14).

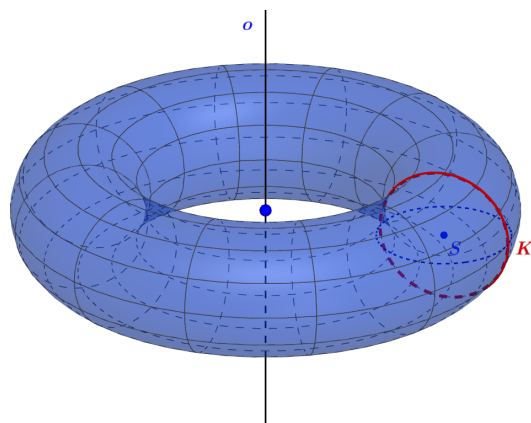


Obrázek 8.13: Hlavní kružnice kulové plochy



Obrázek 8.14: Vedlejší kružnice kulové plochy

Pokud necháme rotovat kruh  $K$  kolem přímky  $o$ , která leží v jeho rovině a tento kruh neprotíná, vznikne **anuloid** neboli torus/toroid, viz obr. 8.15.

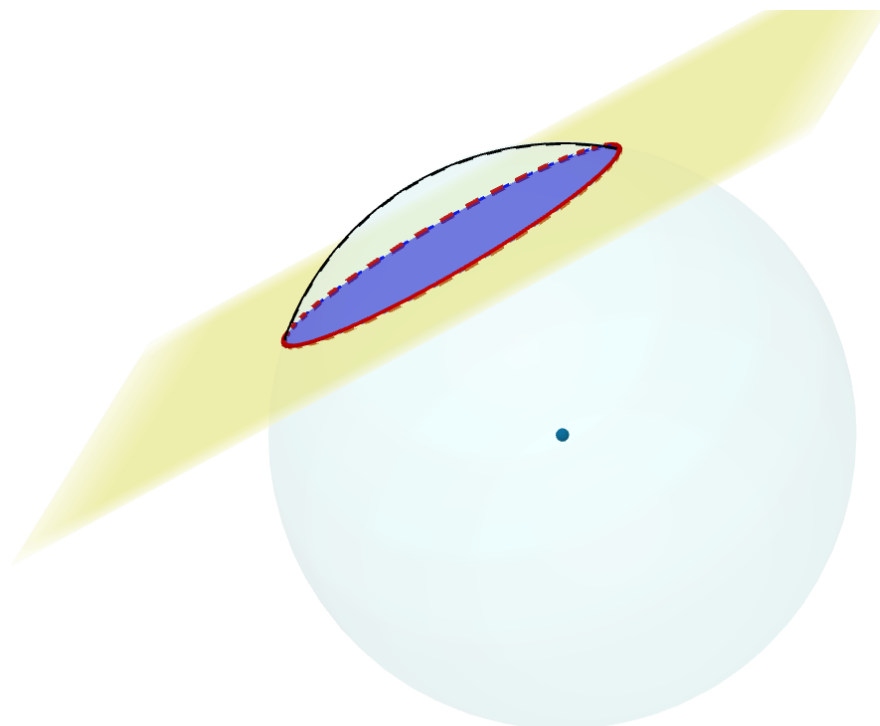


Obrázek 8.15: Anuloid vzniklý rotací kruhu  $K$  okolo osy  $o$

### 8.3 Koule a její části

V technických oborech se používají tělesa, která jsou částmi koule – kulová úseč, kulová výseč a kulová vrstva; a ta, která jsou částmi kulové plochy – kulový vrchlík a kulový pás. K jejich zavedení použijeme sečnou rovinu.

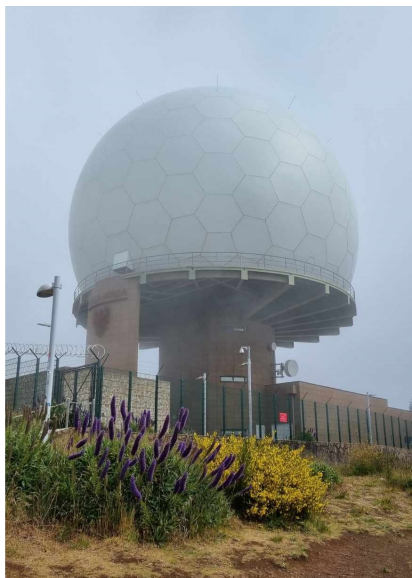
Rovina, která má s koulí více než jeden společný bod, je označována za **sečnou rovinu** koule. Rovina, která má s koulí právě jeden společný bod, jse nazývá **tečná rovina** koule. Průnikem sečné roviny s koulí je kruh, ale průnikem sečné roviny s kulovou plochou, která kouli ohraničuje, je kružnice, viz obr. 8.16.



Obrázek 8.16: Kulová úseč a kulový vrchlík

### 8.3.1 Kulová úseč

Každá sečná rovina rozděljuje danou kouli na dvě **kulové úseče**. Kruh, který je jejich průnikem, nazýváme **podstava úseče**. Pokud sečná rovina prochází středem koule, dostáváme dvě **polokoule**. Na obr. 8.17 se nacházejí architektonická stavba ve tvaru kulové úseče na portugalské Madeiře.



Obrázek 8.17: Stavba ve tvaru kulové úseče (Pico do Arieiro, Portugalsko)

Tvar kulové úseče můžeme objevit například u chrámových kopulí na obr. 8.18.



Obrázek 8.18: Kopule baziliky svatého Marka ve tvaru kulové úseče (Benátky, Itálie) [108]

### 8.3.2 Kulový vrchlík

Každá sečná rovina koule rozděluje danou kulovou plochu na dva **kulové vrchlíky**. Kružnice je jejich průnikem a označujeme ji jako **hranu kulového vrchlíku**. Pokud sečná rovina prochází středem koule, pak hranou kulového vrchlíku je hlavní kružnice, a dostáváme dvě polokulové plochy neboli **polosféry**.

Hranice kulové úseče se skládá z kulového vrchlíku a podstavy úseče.

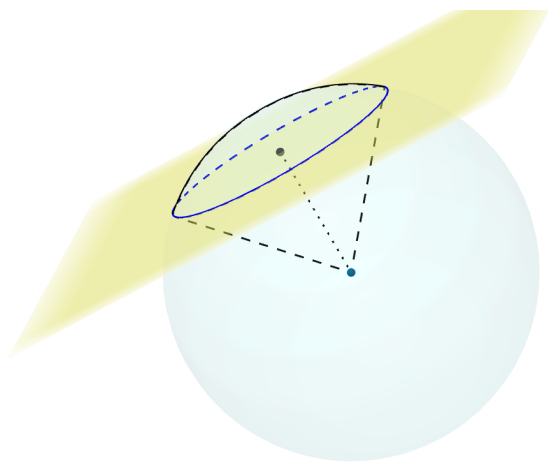
Ve tvaru kulového vrchlíku, konkrétně polosféry, je vyrobeno stínítko lampy, viz obr. 8.19.



Obrázek 8.19: Stínítko lampy ve tvaru kulového vrchlíku

### 8.3.3 Kulová výseč

Na obr. 8.20 se nachází kulová úseč a rotační kužel; obě tělesa mají společnou podstavu, vrchol kužele je ve středu koule. Těleso vzniklé jejich sjednocením se nazývá **kulová výseč**.



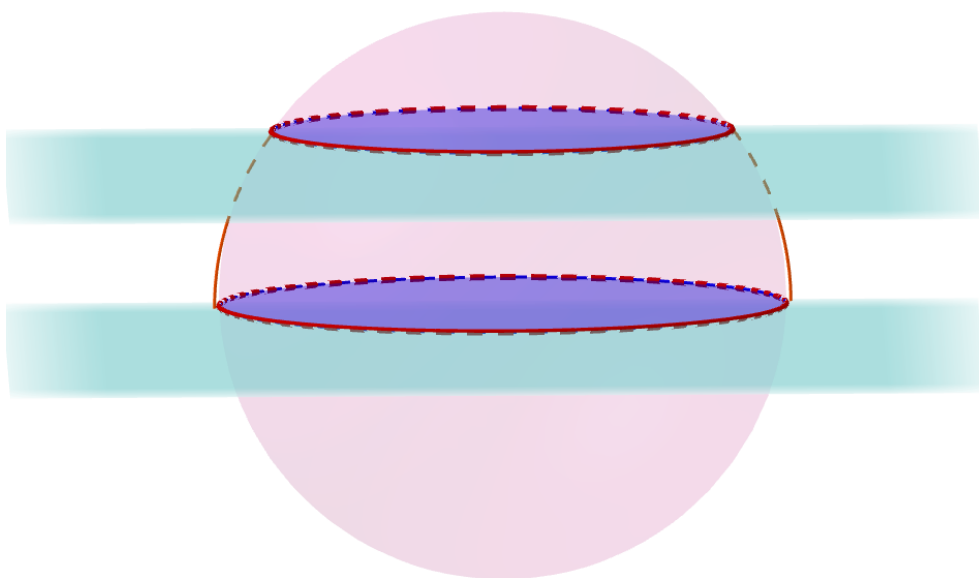
Obrázek 8.20: Kulová výseč

Tvaru kulové výseče mají padáky americké armády, viz obr. 8.21.



Obrázek 8.21: Padáky vojenských parašutistů ve tvaru kulové výšeče [108]

Průnikem dvou rovnoběžných rovin s koulí jsou dva kruhy, ale průnikem dvou rovnoběžných rovin s kulovou plochou, která kouli ohraničuje, jsou dvě kružnice (obr. 8.22).



Obrázek 8.22: Kulová vrstva a kulový pás

### 8.3.4 Kulová vrstva

Pokud kouli protínají dvě rovnoběžné roviny (jedná se o průnik prostorové vrstvy, jejíž hraniční roviny protínají kouli), tak část koule ležící mezi dvěma roviny se nazývá **kulová vrstva**. Vzniklé dva kruhové řezy se nazývají **podstavy kruhové vrstvy**. Vzdálenost rovnoběžných rovin je **výška kulové vrstvy**.

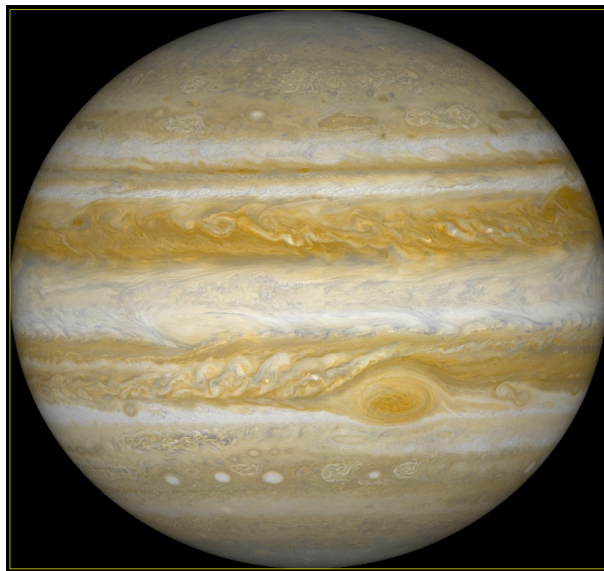
### 8.3.5 Kulový pás

Část kulové plochy, která leží mezi dvěma rovnoběžnými rovinami se nazývá **kulový pás**. Vzdálenost rovnoběžných rovin je také **výška kulového pásu**.

## 8.4 Antimodel koule

Předtím, než přejdeme k samotnému zavedení vzorců pro výpočet objemu a povrchu koule, si ověříme pochopení předchozích pojmů z této kapitoly. Uvedeme si tzv. antimodel koule.

Antimodelem koule zde budeme rozumět takové těleso, které na první pohled sice kouli připomíná, ale při podrobnějším zkoumání zjistíme, že se o kouli nejedná. Takovým příkladem je těleso s názvem **rotační elipsoid**, který vzniká rotací plochy vymezené elipsou okolo jedné z jejích os. Na rozdíl od koule není středově souměrný. Ve tvaru rotačního elipsoidu nacházíme ve světě kolem nás několik příkladů. Například vesmírné modely Jupiteru obvykle představují tuto planetu jako kouli, ale ve skutečnosti se jedná o **rotační elipsoid** (obr. 8.23).



Obrázek 8.23: Planeta Jupiter ve tvaru rotačního elipsoidu [90]

Další příklad rotačního elipsoidu nacházíme v říši živočichů, jsou jimi schránky ježovek (obr. 8.24).



Obrázek 8.24: Schránky ježovek ve tvaru rotačního elipsoidu [91]

Při archeologických vykopávkách byla nalezena zdobená pštroší vejce. Tato vejce byla zakoupená na africkém území a sloužila jako neobvyklý dar v době železné a bronzové. Pštroší vejce jsou také ve tvaru **rotačního elipsoidu** (obr. 8.25).



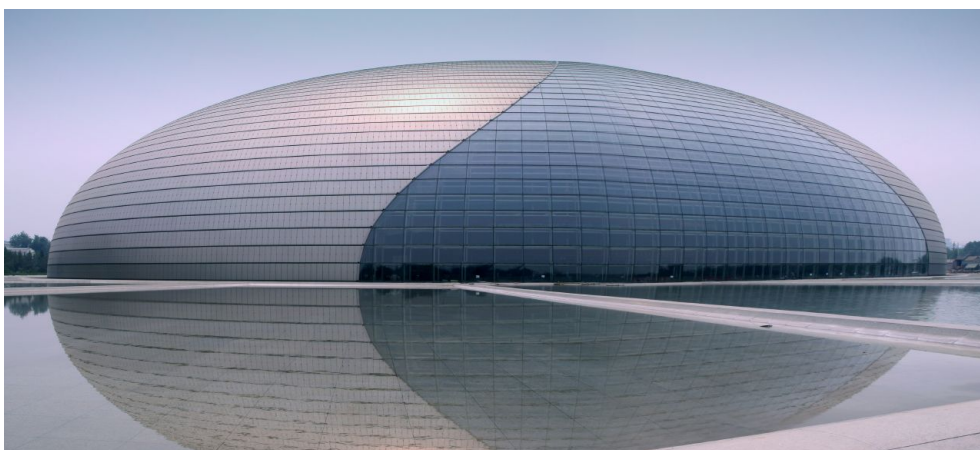
Obrázek 8.25: Malovaná pštroší vejce na výstavě věnované Kartágu (Řím, Itálie) [92]

I v říši rostlin můžeme nalézt plody zeleniny, konkrétně některých odrůd melounů, které připomínají tvar rotačního elipsoidu (obr. 8.26).



Obrázek 8.26: Plod melounu cukrového ve tvaru rotačního elipsoidu [93]

Části rotačních elipsoidů lze nalézt i v architektuře, jak ukazuje obr. 8.27, kde je budova National Grand Theatre v Pekingu.



Obrázek 8.27: Budova National Grand Theatre ve tvaru části rotačního elipsoidu (Peking, Čína) [94]

Také se můžeme ve sportu setkat s míčem na rugby, který svým tvarem připomíná rotační elipsoid (obr. 28).



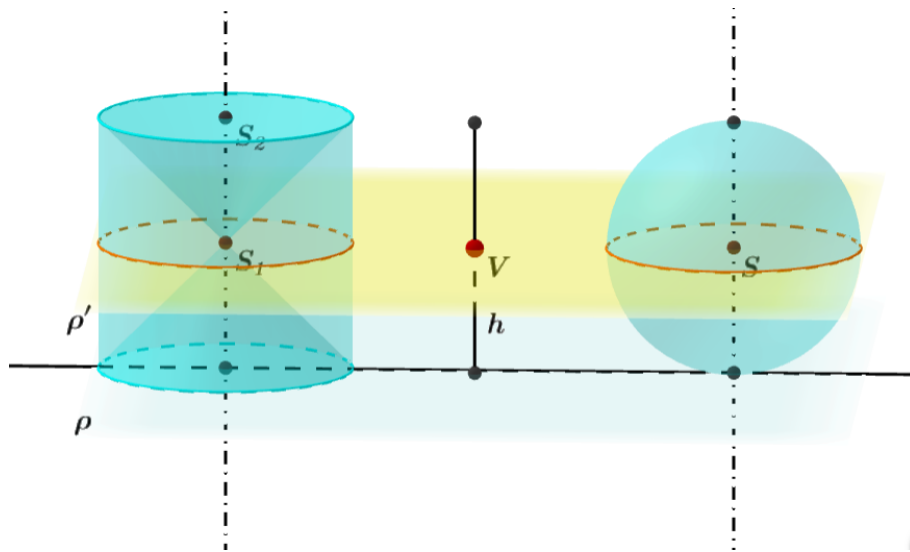
Obrázek 8.28: Rugbyový míč ve tvaru rotačního elipsoidu [95]



## 8.5 Objem koule

V této kapitole si představíme, jak se počítá objem koule o poloměru  $r$ . Objem koule odvodíme pomocí Cavalieriho principu.

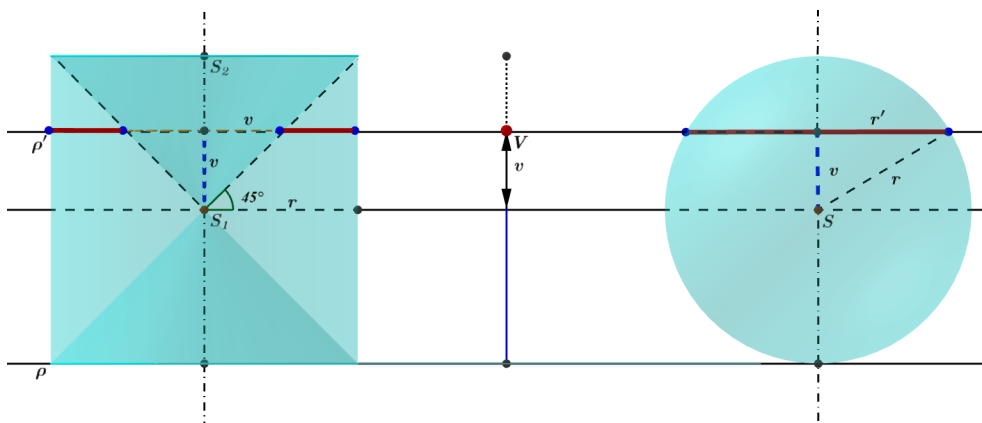
Je dána koule se středem  $S$  a s poloměrem  $r$ . Dále uvažujme těleso  $T$ , které vznikne z rotačního rovnostranného válce s poloměrem  $r$  a výškou  $2r$  vyjmutím rotačního dvojkužele, který má s válcem společné podstavy a jehož vrchol leží ve středu válce. Obě tělesa umístíme na rovinu  $\rho$ , viz obr. 8.29. Označíme  $h = |\rho\rho'|$ .



Obrázek 8.29: Využití Cavalieriho principu při odvození objemu koule

Pro  $h = r$  je průnikem roviny  $\rho'$  s tělesem  $T$  kruh o poloměru  $r$  a s koulí je průnikem také kruh o poloměru  $r$ , tj. obsahy průniků jsou stejné. Pro  $h = 2r$  a  $h = 0$  je průnikem roviny  $\rho'$  s tělesem  $T$  v obou případech kružnice o poloměru  $r$  (má nulový obsah); průnik  $\rho'$  s koulí je v obou případech bod, tj. ve všech případech jsou obsahy průniků nulové.

Nyní se podíváme na společný osový řez tělesem  $T$  a danou koulí, viz obr. 8.5.2, kde vzhledem k souměrnosti obou těles podle roviny procházející bodem  $S$  a rovnoběžné s  $\rho$  můžeme uvažovat situace pro  $h$  z intervalu  $(r, 2r) = 0$ .



Obrázek 8.30: Osový řez tělesem  $T$  a danou koulí

Nyní povedeme řez rovinou  $\rho'$  ve vzdálenosti  $v$  od středu  $S$ , kde  $0 < v < r$ , a budeme zkoumat obsahy obou řezů.

Pro obsah kruhu, ve kterém rovina  $\rho'$  protíná kouli, platí  $S_k = \pi r'^2$ , kde  $v$  je vzdálenost roviny  $\rho'$  od roviny  $\rho$ , poloměr  $r'$  kruhu určíme ze vztahu:

$$r'^2 = r^2 - v^2,$$

tedy

$$S_k = \pi(r^2 - v^2).$$

Pro obsah  $S_m$  mezikruží, ve kterém rovina  $\rho'$  protíná těleso  $T$ , platí:

$$S_m = \pi r^2 - \pi v^2 = \pi(r^2 - v^2),$$

kde  $r$  a  $v$  jsou poloměry hraničních kružnic.

Je zřejmé, že i v tomto případě mají průniky roviny  $\rho'$  s oběma tělesy stejné obsahy.

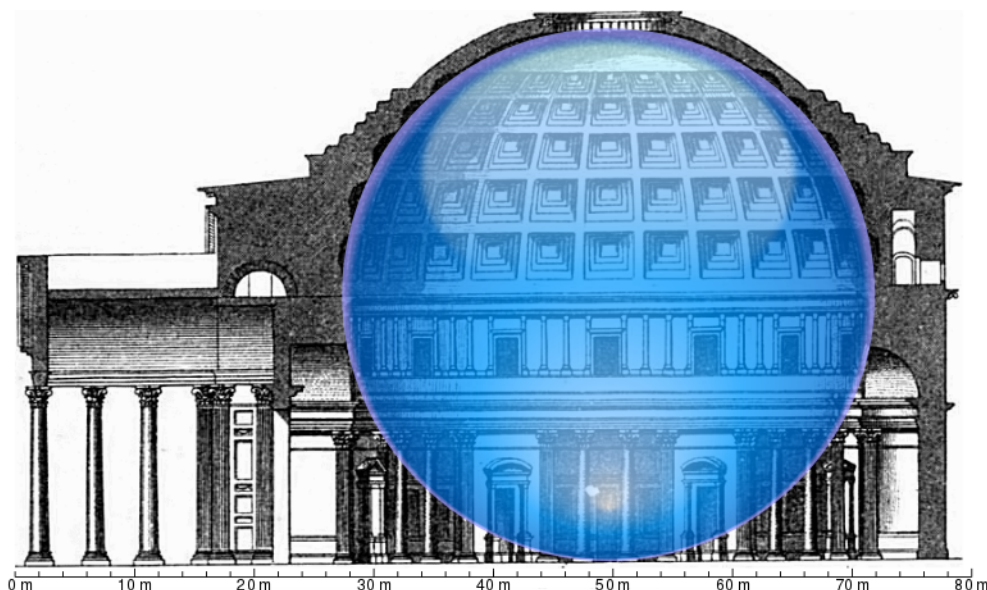
Je splněna podmínka pro použití Cavalieriho principu a a těleso  $T$  i koule mají stejné objemy. Objem koule je proto roven rozdílu objemu rotačního válce o poloměru  $r$  a výšce  $2r$  a objemu rotačního dvojkužele o poloměru podstav  $r$  a celkové výšce  $2r$ , platí:

$$V_T = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

#### Věta

**Objem  $V$  koule** o poloměru  $r$  je dán vztahem  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Příklad 8.5.1** Vypočítejte poloměr  $r$  koule, která by se vešla do římského Pantheonu pod kopuli. Objem koule je  $V = 346\,220,056 \text{ m}^3$  (obr. 8.31). Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

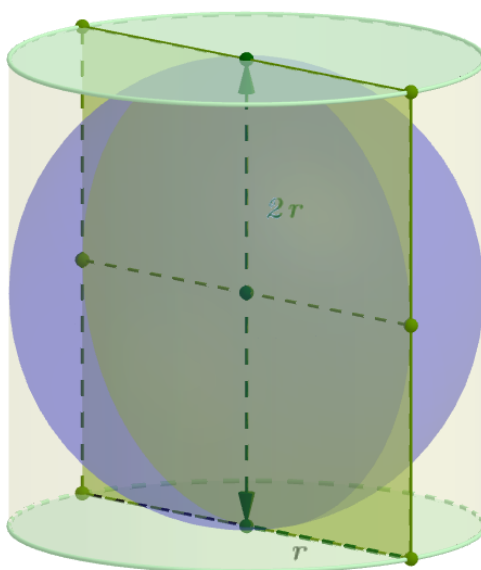


Obrázek 8.31: Ilustrace Příkladu 8.5.1 [110]

## Řešení

- Pro objem  $V$  koule platí  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Vyjádříme si poloměr  $r$ .
- $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 43,560$  m.
- Poloměr koule je po zaokrouhlení 43,56 m.

**Příklad 8.5.2** Do rovnostranného válce o poloměru  $r$  je vepsána koule o stejném poloměru. Jaký je poměr objemu válce k objemu vepsané koule? Poměr vyjádřete zlomkem.



Obrázek 8.32: Ilustrace Příkladu 8.5.2

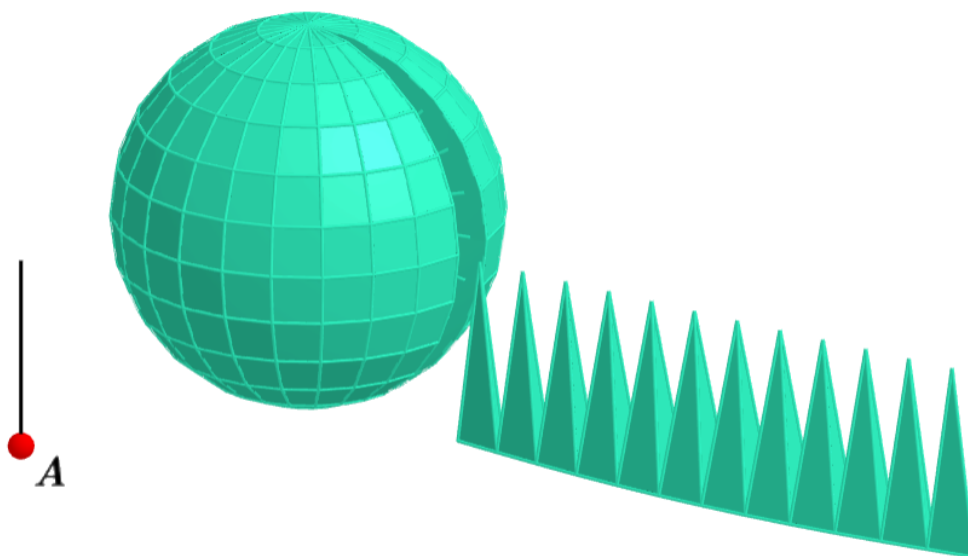
## Řešení

- Pro objem  $V_k$  koule platí  $V_k = \frac{4}{3}\pi r^3$ .
- Pro objem  $V_v$  rovnostranného válce platí  $V_v = \pi r^2 \cdot 2r$ .
- Vyjádříme poměr objemů:  $\frac{V_v}{V_k} = \frac{\pi r^2 \cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$ .
- Poměr objemů rovnostranného válce a koule je  $\frac{3}{2}$ .

## 8.6 Povrch koule

V této kapitole si představíme, jak se počítá povrch koule o poloměru  $r$ . Povrch koule odvodíme pomocí objemu koule. Povrch koule je roven obsahu kulové plochy, jež kouli ohraničuje.

Johannes Kepler odvodil povrch koule využitím následující úvahy. Představme si, že bychom kulovou plochu aproximovali pomocí podstav  $n$  čtyřbokých jehlanů s hlavními vrcholy ve středu koule,  $n \in \mathbb{N}$ . Čím větší bude počet  $n$  jehlanů, tím více se výška jehlanů bude blížit poloměru koule  $r$  a součet obsahů jejich podstav bude lépe aproximovat povrch kulové plochy, viz obr. 8.33.



Obrázek 8.33: Využití Keplerovy metody odvození povrchu koule

Objem koule  $V_k$  je pak roven součtu  $V_j$  ( $j \in (1, \dots, n)$ ) objemů všech uvažovaných jehlanů s výškou  $r$ , platí:

$$\sum_{j=1}^n V_j = V_k,$$

tedy

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

kde  $S$  je součet obsahů podstav všech jehlanů s výškou  $r$ . Vyjádříme ze vztahu  $S$ , které odpovídá povrchu koule.

A pro povrch  $S$  koule platí:

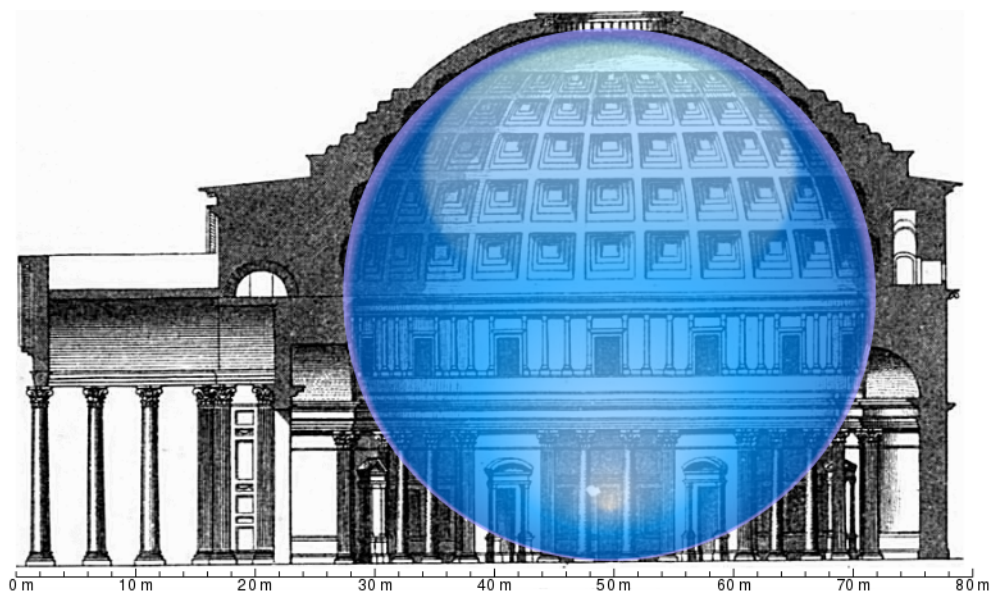
$$S = 4\pi r^2.$$

Předchozí úvahy můžeme shrnout:

#### Věta

**Povrch  $S$  koule** o poloměru  $r$  je dán vztahem  $S = 4\pi r^2$ .

**Příklad 8.6.1** Vypočítejte povrch  $S$  koule z příkladu příkladu 8.5.1. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

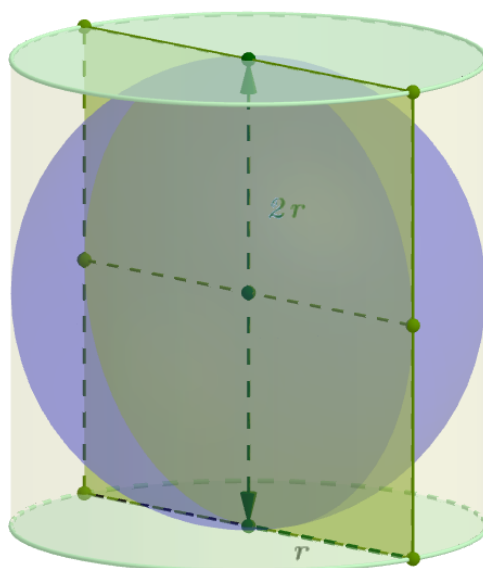


Obrázek 8.34: Ilustrace Příkladu 8.6.1 [110]

### Řešení

- Pro povrch  $S$  koule platí  $S = 4\pi r^2$ , kde poloměr  $r = 43,56$  m.
- $S = 4\pi r^2 = 23\,844,357$  m<sup>2</sup>.
- Povrch koule je po zaokrouhlení  $23\,844,36$  m<sup>2</sup>.

**Příklad 8.6.2** Do rovnostranného válce o poloměru  $r$  je vepsána koule o stejném poloměru (obr. 8.35). Jaký je poměr objemu válce k objemu vepsané koule? Poměr vyjádřete zlomkem.



Obrázek 8.35: Ilustrace Příkladu 8.5.2

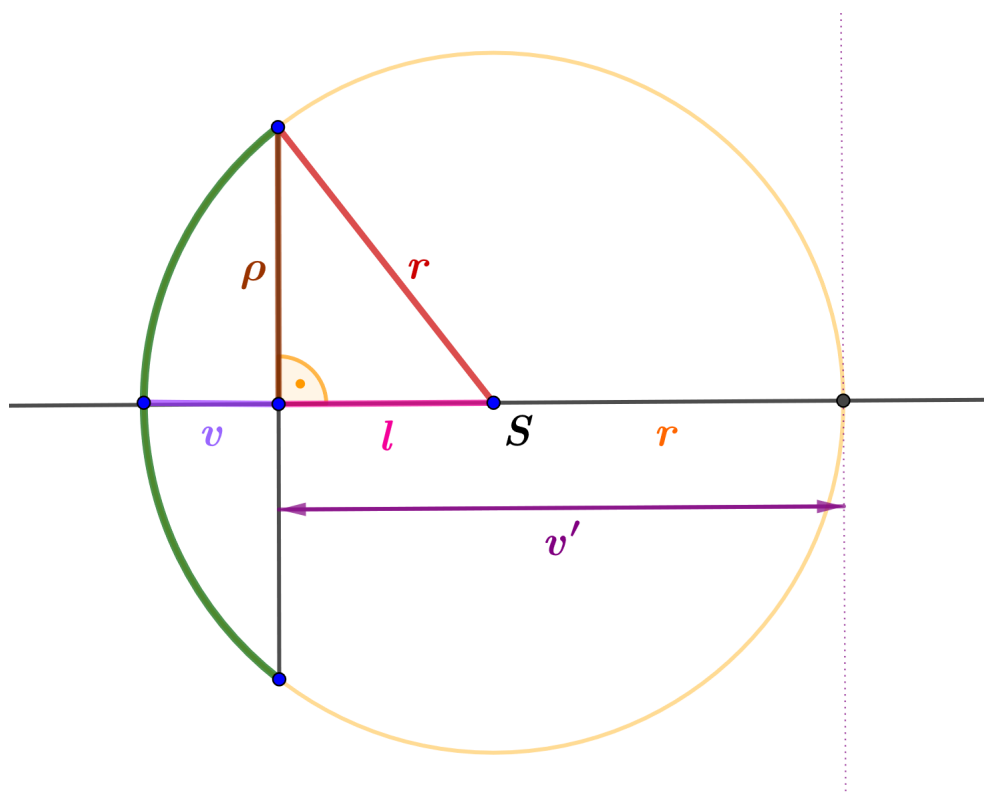
### 8.6.1 Řešení

- Pro povrch  $S_k$  koule platí  $S_k = 4\pi r^2$ .
- Pro povrch  $S_v$  rovnostranného válce platí  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$ .
- Vyjádříme poměr povrch:  $\frac{S_v}{S_k} = \frac{6\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{3}{2}$ .
- Poměr povrchů rovnostranného válce a koule je  $\frac{3}{2}$ .

## 8.7 Objemy a povrchy částí koule

### 8.7.1 KULOVÝ VRCHLÍK, KULOVÁ ÚSEČ A KULOVÁ VÝSEČ

Je dána koule se středem  $S$  a poloměrem  $r$ . Rovina řezu vedená ve vzdálenosti  $l$  od středu  $S$  rozdělí kouli na dvě kulové úseče a její kulovou sféru na dva kulové vrchlíky. Pro výšky kulových úsečí i kulových vrchlíku platí:  $v = r - l$  a  $v' = r + l$  (obr. 8.36).



Obrázek 8.36: Výšky kulových úsečí

Platí následující vztahy (obr. 8.37).

Pro obsah kulového vrchlíku platí:

$$S = 2\pi r v,$$

kde  $r$  je poloměr kulové plochy a  $v$  je výška vrchlíku.

Pro objem kulové úseče platí:

$$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2),$$

kde  $\rho$  je poloměr kulové úseče a  $v$  je výška úseče;

nebo

$$V = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v),$$

kde  $r$  je poloměr koule, jíž je úseč součástí, a  $v$  je výška úseče.

Povrch kulové úseče je roven součtu obsahu kulového vrchlíku a obsahu jeho podstavy, platí:

$$S = 2\pi r v + \pi \rho^2,$$

kde  $\rho$  je poloměr kulové úseče,  $r$  je poloměr kulové plochy, jíž je vrchlík součástí, a  $v$  je výška úseče.

Objem kulové výseče určíme jako součet objemů příslušné kulové úseče a rotačního kužele s vrcholem  $S$ , které mají společnou podstavu. Platí:

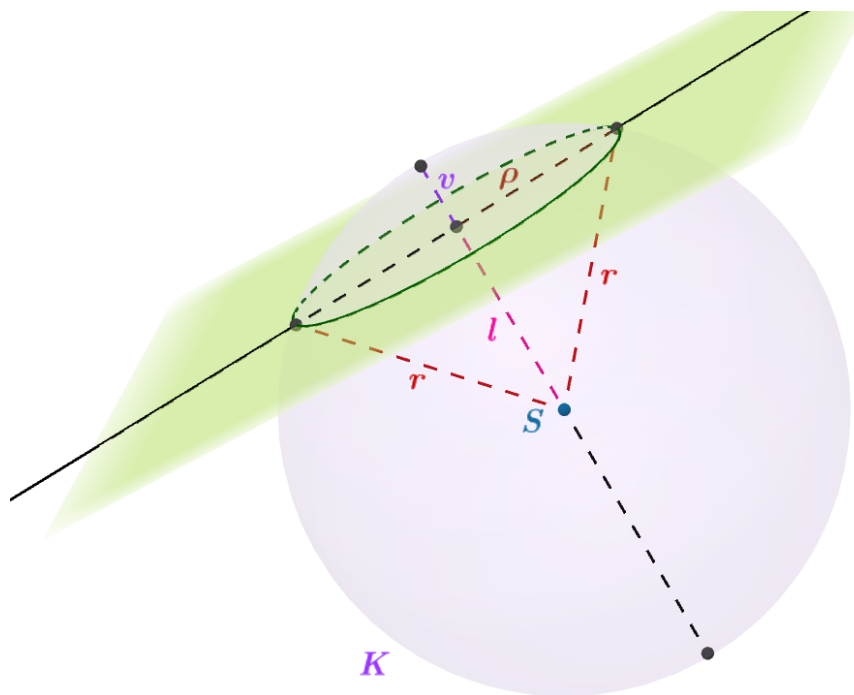
$$V = \frac{2}{3}(\pi r^2 v),$$

kde  $r$  je poloměr koule a  $v$  je výška příslušné kulové úseče.

Povrch kulové výseče je roven součtu obsahu příslušného kulového vrchlíku a obsahu pláště rotačního kužele, platí:

$$S = 2\pi r v + \pi \rho r,$$

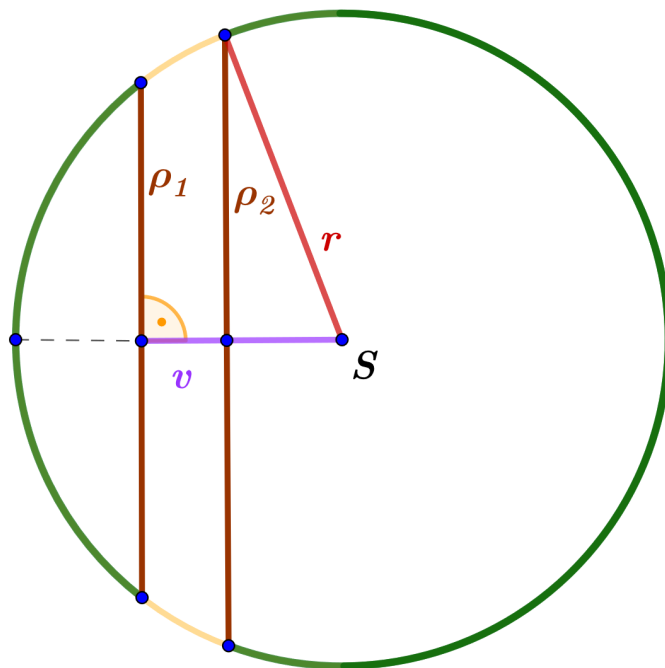
kde  $\rho$  je poloměr rotačního kužele a  $r$  jeho délka strany.



Obrázek 8.37: Kulový vrchlík, kulová úseč a kulová výseč

## 8.7.2 KULOVÁ VRSTVA A KULOVÝ PÁS.

Je dána koule se středem  $S$  a poloměrem  $r$ . Dvě rovnoběžné sečné roviny rozdělí kouli na dvě kulové úseče s poloměry podstav  $\rho_1$  a  $\rho_2$  a kulovou vrstvu s výškou  $v$ , která je rovna vzdálenosti sečných rovin. Tyto sečné roviny vymezí na kulové ploše dva kulové vrchlíky a kulový pás (obr. 8.38).



Obrázek 8.38: Výšky kulových úsečí

Na kulové ploše dvě rovnoběžné sečné roviny vymezí kulový pás (obr. 8.39).

Pro obsah kulového pásu platí:

$$S = 2\pi r v,$$

kde  $r$  je poloměr kulové plochy a  $v$  je výška pásu.

Pro objem kulové vrstvy platí:

$$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2),$$

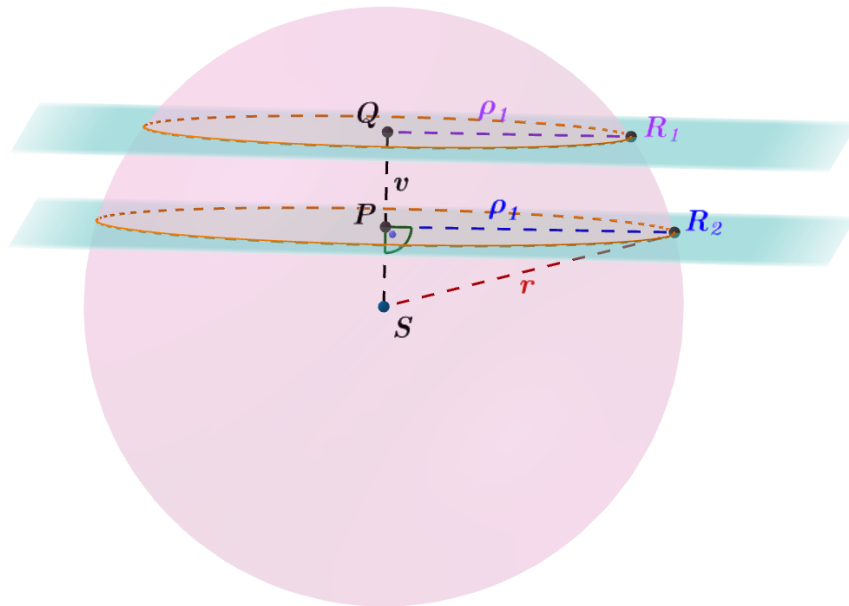
kde  $v$  je výška vrstvy a  $\rho_1$  a  $\rho_2$  jsou poloměry jejich podstav.

Povrch kulové vrstvy je součtem obsahu kulového pásu a obsahu dvou kruhových podstav kulové vrstvy. Platí:

$$S = 2\pi r v + \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2,$$

kde  $r$  je poloměr kulové plochy,  $v$  je výška pásu a  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  jsou poloměry podstav kulové vrstvy.

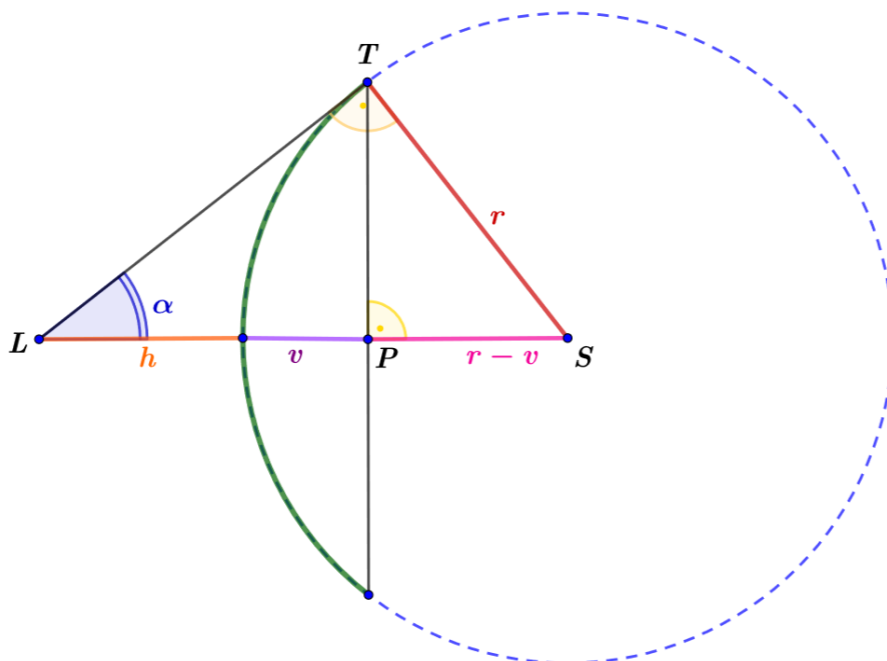




Obrázek 8.39: Kulový pás a kulová vrstva

## 8.8 Úlohy V

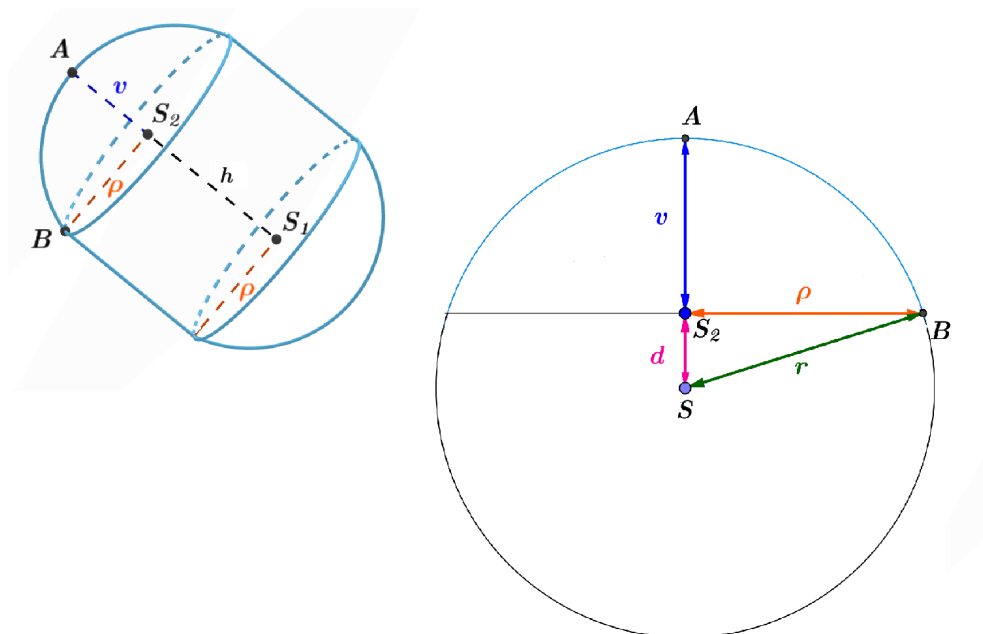
**Úloha 8.9.1** Kolik procent zemského povrchu vidí pasažér letadla z výšky  $h = 10$  km nad povrchem Země? Zemi považujte za dokonalou kouli o poloměru  $r = 6\,378$  km. Výsledky zaokrouhlete na tři desetinná místa.



Obrázek 8.40: Ilustrace k úloze 8.9.1

- Situaci ilustrujeme obrázkem 8.40. Z letadla v bodu  $L$  vidí pasažér část povrchu Země; obsah této části  $S$  je roven obsahu kulového vrchlíku s výškou vrchlíku  $v$  na kulové ploše o poloměru  $r$ ;  $S = 2\pi r v$ .
- S využitím Eukleidovy věty o odvěsně platí pro pravoúhlý trojúhelník  $LST$ :  $|ST|^2 = |SL| \cdot |SP|$ , tj.  $r^2 = (r+h)(r-v)$ .
- Vyjádříme výšku  $v$  kulového vrchlíku:  $v = \frac{hr}{r+h} = r(1 - \frac{r}{r+h})$ .
- Pro povrch  $S$  kulového vrchlíku platí  $S = 2\pi r^2 \cdot (1 - \frac{r}{r+h}) = 408\,948,746\,0 \text{ km}^2$ .
- Pro povrch  $S_Z$  Země ve tvaru koule platí  $S_Z = 4\pi r^2 = 511\,185\,932,522\,5 \text{ km}^2$ .
- Pro výpočet procent:  $\frac{S}{S_Z} = 0,000\,8$ , tj.  $0,08 \%$ .
- Z letadla ve výšce  $10 \text{ km}$  nad Zemí vidí pasažér přibližně  $0,08 \%$  zemského povrchu.

**Úloha 8.9.2** Je dána želatinová kapsle. Skládá se z rotačního válce s výškou  $h = 6 \text{ mm}$  a z dvou shodných kulových úsečí. Úseč vznikla průnikem sečné roviny s koulí se středem  $S$  a poloměrem  $r = 5 \text{ mm}$  ve vzdálenosti  $d = 1,5 \text{ mm}$  od středu dané koule (obr. 8.41). Kolik centimetrů krychlových léčiva se vejde do jedné kapsle? Výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 8.41: Ilustrace k Úloze 8.9.2

- Celkový objem kapsle je  $V = V_{\text{válc}} + 2V_{\text{úseč}}$ . Vypočítáme jednotlivé objemy:  $V_{\text{válc}} = \pi \rho^2 h$ ;  $V_{\text{úseč}} = V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$ , kde  $v$  je výška kulové úseče a  $\rho$  poloměr rotačního válce, který je zároveň roven poloměru kulové úseče.
- Vypočítáme poloměr kulové úseče  $\rho$ . Z délky odvěsny  $d = |SS_2| = 1,5 \text{ mm}$  a přepony  $r = |SB| = 5 \text{ mm}$  pravoúhlého trojúhelníku  $SS_2B$  s využitím Pýthagorovy věty dostáváme délku zbývající odvěsny  $\rho = |S_2B|$ :  $\rho^2 = r^2 - d^2$ , tj.  $\rho = \sqrt{25 - 2,25} \text{ mm} = \sqrt{22,75} \text{ mm} \doteq 4,770 \text{ mm}$ .

- Pro výšku úseče  $v$  platí:  $v = r - d = 3,5$  mm.
- $V_{v\acute{a}lce} = \pi \rho^2 h = \pi \cdot 4,770^2 \cdot 6 \text{ mm}^3 \doteq 428,882 \text{ mm}^3$
- $V_{\acute{u}se\acute{c}} = \frac{\pi v}{6} (3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi \cdot 3,5}{6} (3 \cdot 4,770^2 + 3,5^2) \text{ mm}^3 \doteq 147,540 \text{ mm}^3$
- $V = V_{v\acute{a}lce} + 2V_{\acute{u}se\acute{c}} = (428,882 + 2 \cdot 147,540) \text{ mm}^3 = 723,962 \text{ mm}^3$
- Do kapsle se vejde p\~{r}ibližn\~{e}  $723,96 \text{ mm}^3$  l\~{e}civa.

**Úloha 8.9.3** Ve švédském Stockholmu se nachází jedna z největších staveb ve tvaru polokoule na světě s poloměrem 110 metrů (obr. 8.42). Vypočítejte obsah jejího kulového vrchlíku, v tomto případě tzv. polosféry. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 8.42: Ilustrace k úloze 8.9.3

- Pro obsah  $S$  kulového vrchlíku o poloměru  $r$  a výšce  $v = r$  platí:  $S = 2\pi r v = 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 12\,100 \text{ m}^2 \doteq 76\,026,542 \text{ m}^2$ .
- Obsah kulového vrchlíku je roven po zaokrouhlení  $76\,026,54 \text{ m}^2$ .



## 9. Souhrnný test

Vyzkoušejte si test z kapitoly stereometrie týkající se objemů a povrchů těles. Na webu test obsahuje devět náhodně generovaných úloh. U každé úlohy je pouze jedna odpověď správná.

**Otázka č.1** Vyberte, jaký tvar mají schránky mořských živočichů znázorněné na obrázku 9.1.

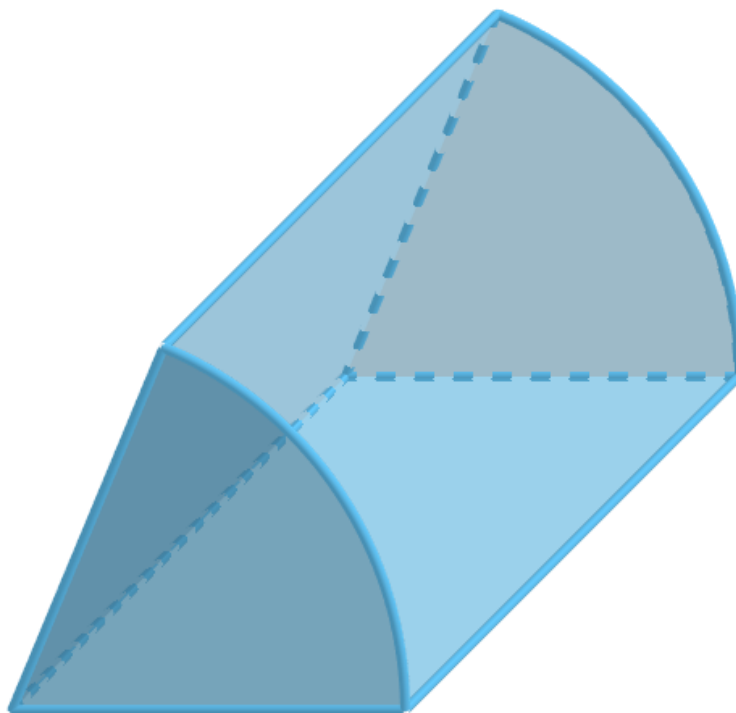


Obrázek 9.1: Ilustrace k první testové otázce [29]

### Možnosti

- kulová úseč
- nerotační kužel
- rotační válec
- rotační komolý kužel

**Otázka č.2** Do jaké skupiny geometrických útvarů patří těleso znázorněné na obr. 9.2?



Obrázek 9.2: Ilustrace ke druhé testové otázce

**Možnosti**

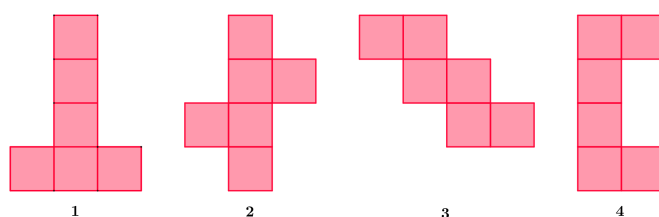
- jehlany
- nekonvexní tělesa
- konvexní mnohostěny
- konvexní tělesa

**Otázka č.3** Boční stěnou hranolu není:

**Možnosti**

- obdélník
- kosočtverec
- rovnoběžník
- rovnoramenný lichoběžník

**Otázka č.4** Vyberte číslo rovinného útvaru (obr. 9.3), který nepředstavuje síť krychle.

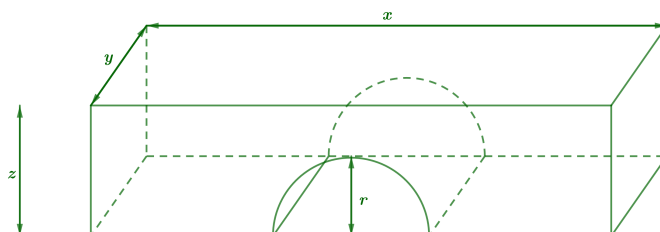


Obrázek 9.3: Ilustrace ke čtvrté testové otázce

**Možnosti**

- 1
- 2
- 3
- 4

**Otázka č.5** Vypočtěte objem  $V$  betonového mostku na následujícím obrázku. Mostek se skládá z kvádrů o rozměrech  $x = 4$  m,  $y = 0,8$  m,  $z = 1$  m, od kterého je „odečtena“ válcová úseč s půlkruhovou podstavou o poloměru  $r = 0,6$  m (obr. 9.4). Vypočtěte, kolik metrů krychlových betonu je potřeba na stavbu daného mostku a kolik metrů čtverečních je potřeba natřít povrchovou barvou. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.?

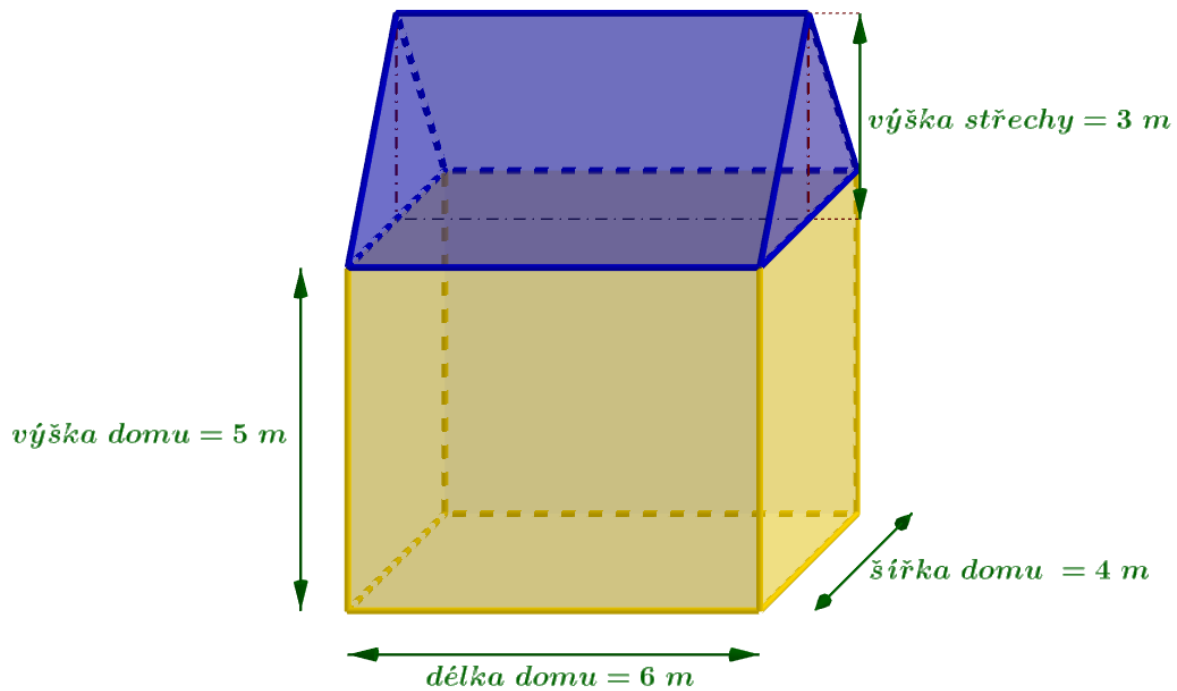


Obrázek 9.4: Ilustrace k páté testové otázce

**Možnosti**

- $3762,62 \text{ m}^3$ ,  $1742,70 \text{ m}^2$
- $2747,62 \text{ m}^3$ ,  $741,70 \text{ m}^2$
- $847,62 \text{ m}^3$ ,  $991,70 \text{ m}^2$
- $2879,62 \text{ cm}^3$ ,  $770,66 \text{ cm}^2$

**Otázka č.6** Je dán dům se sedlovou střechou a rozměry vyznačenými na obr. 9.5. Vyberte v metrech krychlových objem  $V$  tohoto domu včetně střechy.



Obrázek 9.5: Ilustrace k šesté testové otázce

#### Možnosti

- $165 \text{ m}^3$
- $160 \text{ m}^3$
- $156 \text{ m}^3$
- $166 \text{ m}^3$

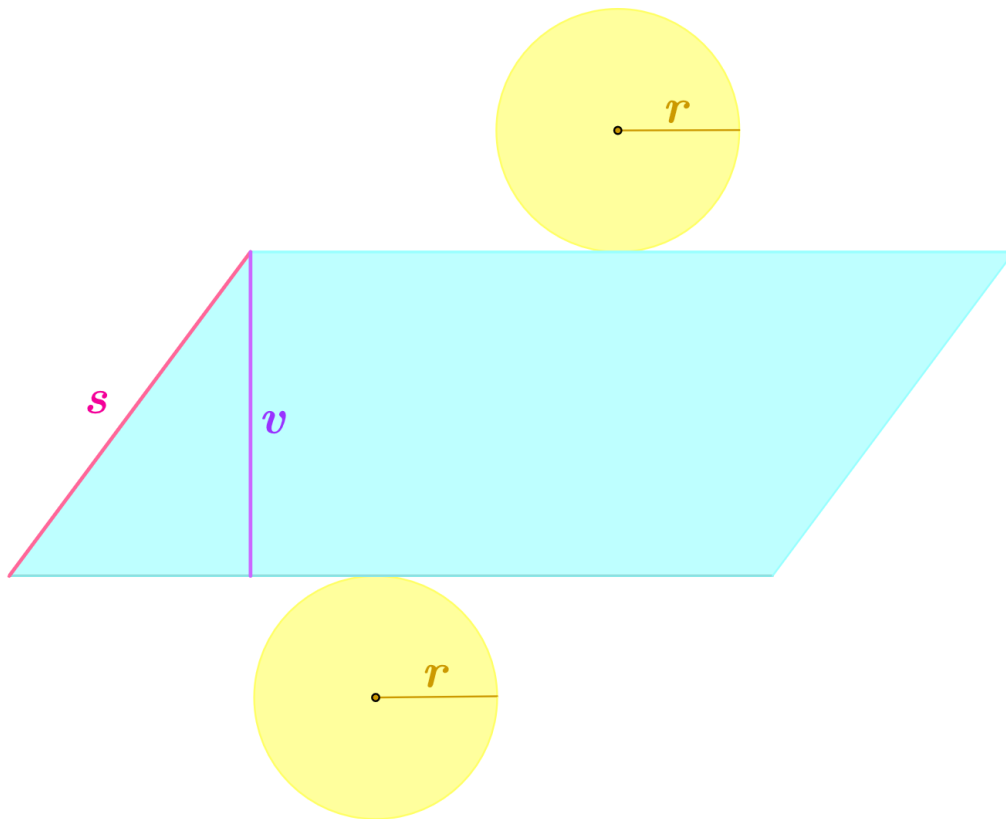
**Otázka č.7** Určete kolik tělesových úhlopříček má nepravidelný čtyřstěn.

#### Možnosti

- 1
- 2
- 3
- žádnou



Otázka č.8 O síť, kterého oblého tělesa, se jedná?



Obrázek 9.6: Ilustrace k osmé testové otázce

### Možnosti

- komolý kužel
- rotační válec
- kosý válec
- nerotační válec

**Otázka č.9** Vypočtěte objem  $V$  hrací káči na následujícím obrázku. Těleso se skládá ze dvou rotačních kuželů o stejném poloměru podstavy a s různou výškou:  $r = 3$  cm,  $v_1 = 2$  cm,  $v_2 = 1$  cm (obr. 9.7). Mezi podstavami kuželů je umístěn rotační válec stejného poloměru a s výškou  $v_3 = 0,5$  cm. Vypočtěte, kolik centimetrů krychlových dřeva je potřeba na výrobu této hračky. Držátko pro roztočení káči neuvažujeme. Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.



Obrázek 9.7: Ilustrace k deváté testové otázce [30]

#### Možnosti

- $412,1 \text{ cm}^3$
- $412,1 \text{ m}^3$
- $4241 \text{ mmm}^3$
- $42,41 \text{ cm}^3$

# Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvořit webové stránky jako podpůrný materiál pro výuku na středních a základních školách. Tyto stránky zaměřené na stereometrii budou po obhajobě veřejně dostupné na Portálu středoškolské matematiky, který vytváří Katedra didaktiky matematiky MFF UK.

Práce se zabývá tématem objemů a povrchů těles. Jelikož je toto téma velice rozsáhlé, je zaměřena především na objemy a povrchy mnohostěnů a oblých těles. Zahrnuje úvodní motivaci, historický výtah a zavedení základních pojmů potřebných k následnému výkladu. Dále obsahuje pět stěžejních kapitol – Hranoly, Jehlany, Válce, Kužele a Koule, ve kterých jsou tyto skupiny těles postupně zavedeny, klasifikovány a následně jsou odvozeny vztahy pro výpočty jejich objemů a povrchů. Kapitoly Nekonvexní mnohostěny, Platónská tělesa a Archimédovská tělesa jsou věnovány objektům, se kterými se ve výuce jen zřídka setkáváme. V závěrečném souhrnném testu je možné procvičit prostorovou představivost a ověřit nabyté vědomosti z předchozích kapitol.

Během psaní této diplomové práce jsem rozšiřovala práci bakalářkou. A ještě více jsem si rozšířila obzory s prací v programu dynamické geometrie jménem GeoGebra.



# Literatura

- ASHRAFI, A. R. a DIUDEA, M. V., editors (2016). *Distance, Symmetry, and Topology in Carbon Nanomaterials*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-31584-3.
- BEČVÁŘ, J. (2003). *Matematika ve starověku : Egypt a Mezopotámie*. Prometheus, Praha. ISBN 8071962554.
- KADLEČEK, J. (1996). *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. Prometheus, Praha. ISBN 8071960179.
- ODVÁRKO, O. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Prometheus, Praha. ISBN 8071962767.
- POLÁK, J. (2014). *Didaktika matematiky : jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Fraus, Plzeň. ISBN 9788072384495.
- POLÁK, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky*. Prometheus, Praha. ISBN 9788071964582.
- POMYKALOVÁ, E. (2009). *Matematika pro gymnázia*. Prometheus, Praha. ISBN 9788071963899.
- ROONEY, A. (2017). *Příběh matematiky : od projektování pyramid po objevení nekonečna*. Dobrovský s.r.o, Praha. ISBN 9788073905798.
- VYŠÍN, J. (1964). *Konvexní útvary*. Praha: Mladá fronta, 1964. *Škola mladých matematiků*. URL <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403502>.



# Literatura

- [1] ASHRAFI, Ali; Diudea, Mircea (eds.). Distance, Symmetry, and Topology in Carbon Nanomaterials, Carbon materials: Chemistry and physics 9 [e-book]. Switzerland, Cham: Springer, 2016 [cit. 2020-05-30]. ISBN 10.1007/978-3-319-31584-3.
- [2a] BEČVÁŘ, J. (editor); FUCHS, E. (editor): Historie matematiky [online]. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993, 108-125. [cit. 2020-03-05]
- [2b] BEČVÁŘ, Jindřich; Bečvářová, Martina; Vymazalová, Hana: Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie. (Czech) [online]. Praha: Prometheus, 2003. [cit. 2020-05-30]. ISBN 80-7196-255-4, p. 32-148.
- [3] CALDA, Emil. Cavalieriho princip a objem anuloidu. Časopis Matematika–fyzika–informatika. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1998/9, 8, 263-267 [cit. 2020-03-05]. ISSN 1210-1761.
- [4] DOHNALOVÁ, Eva. Platónská a archimédovská tělesa a jejich vlastnosti ve výuce matematiky na středních školách [online]. Praha, 2016 [cit. 2020-05-05]. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc.
- [5] KADLEČEK, Jiří. Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-017-9.
- [6] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia. Praha: Prometheus, 2004. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-276-7.
- [7] POLÁK, Josef. Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5.
- [8] POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.
- [9a] POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: stereometrie 4. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
- [9b] POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: planimetrie 4. uprav. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-174-4.
- [10] PTÁČKOVÁ, Tereza. Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice s podporou internetu [online]. Praha, 2014 [cit. 2020-05-05]. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc.
- [11] ROONEY, Anne. Příběh matematiky: od projektování pyramid po objevení nekonečna. 2017. Přeložila Renata ŠTULCOVÁ. Praha: Dobrovský, 2017. Knihy Omega. ISBN 978-80-7390-579-8.
- [12] ŠAROUNOVÁ, Alena. Matematika 6: [učebnice pro základní školy]. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-059-4.
- [13] TVRDÁ, Monika. Webová aplikace pro výuku integrálního počtu na SŠ [online]. Praha, 2013 [cit. 2020-05-05]. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jarmila ROBOVÁ, CSc.
- [14] VYŠÍN, Jan. Konvexní útvary [online]. Praha: Mladá fronta, 1964. Škola mladých matematiků. [cit. 2020-03-05]
- [15] VACHTL, Pavel. Jak vznikají šestiúhelníkové včelí plástve. Magazín Leonardo [online]. Praha: Český rozhlas, 23. červenec 2013. [cit. 2023-05-11]

- UNESCO. Chocolate Hills Natural Monument [online]. [cit. 2023-05-31]
- [17] MORAVCOVÁ, Vlasta. Polopravidelná tělesa. In Z. Halas (ed.) Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. (Czech) [online] Praha: MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty v Praze, 2012. [cit. 2023-07-08] ISBN 978-80-7378-228-3. pp. 69–[88].
- [19] WIKISKRIPTA. Nanotechnologie v medicíně//Fullereny [online]. [cit. 2023-07-08]
- [20] KISELEV, A. P.: Kiselev's geometry. Book II - Stereometry (adapted from Russian by Alexander Givental). Hardcover: Sumizdat 2008. ISBN 978-0-9779852-1-0.
- [21] OSTERMANN, Alexander a Gerhard WANNER. Geometry by its history. Heidelberg: Springer, 2012. ISBN 978-3-642-29162-3.
- [22] Edwin E. MOISE, Floyd L. DOWNS. Geometry: Addison-Wesley Publishing Company, Hardcover, 1991. ISBN 978-0-201-25335-1.
- [23] POMYKALOVÁ, Eva. Matematika s nadhledem : od prváku k maturitě. 11. díl, Stereometrie II. Plzeň : Fraus, 2020. ISBN 978-80-7489-528-9.



# Seznam obrázků

1.1	Cheopsova pyramida – model pravidelného čtyřbokého jehlanu [1] . . . . .	7
1.2	Stanice metra Lužiny, Praha – modely osekaneho dvacetistěnu a hranolů [2] .	7
1.3	Řemeslná výroba – model sítě pravidelného čtyřbokého jehlanu a model válce	8
1.4	Kapsida viru – model dvacetistěnu [3] . . . . .	8
1.5	Krystaly pyritu – modely krychle [4] . . . . .	9
1.6	Schránka mořského plže – modely desetibokých jehlanů [5] . . . . .	9
1.7	Písaři ve starověku [0] . . . . .	10
2.1	Konvexní čtyřúhelník $U_1$ a nekonvexní pětiúhelník $U_2$ v rovině . . . . .	14
2.2	Konvexní čtyřboký hranol $U_1$ a nekonvexní pětiboký hranol $U_2$ v prostoru . .	14
2.3	Skupina těles v prostoru (mnohostěny a oblá tělesa) . . . . .	15
2.4	Hierarchické schéma těles . . . . .	15
2.5	Nekonvexní hvězdicovité mnohoúhelníky (pěticípý, šesticípý a sedmicípý) . .	16
2.6	Skupina mnohostěnu v prostoru . . . . .	17
2.7	Obecný jedenáctiboký mnohostěn . . . . .	17
2.8	Sít mnohostěnu (pravidelného dvacetistěnu) . . . . .	18
2.9	Keplerova tělesa [7] . . . . .	19
2.10	Poisontova tělesa [7] . . . . .	19
2.11	Desetiboký deltaedr - pětiboký dvojjebran . . . . .	20
2.12	Romboedr - kosočtverečný dvanáctistěn . . . . .	21
2.13	Krystal andraditu ve tvaru kosočtverečného dvanáctistěnu [71] . . . . .	21
2.14	Pravidelný čtyřstěn . . . . .	22
2.15	Pravidelný šestistěn . . . . .	23
2.16	Pravidelný osmistěn . . . . .	23
2.17	Pravidelný dvanáctistěn . . . . .	24
2.18	Pravidelný dvacetistěn . . . . .	24
2.19	Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu pravidelného čtyřstěnu, osmistěnu a dvacetistěnu . . . . .	25
2.20	Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu krychle . . . . .	26
2.21	Součet velikostí úhlů u jednoho vrcholu dvanáctistěnu . . . . .	26
2.22	Šestiúhelníky incidující s daným vrcholem ležící v jedné rovině . . . . .	27
2.23	Dualní mnohostěn k čtyřstěnu – čtyřstěn . . . . .	28
2.24	Dualní mnohostěn ke krychli – osmistěn . . . . .	28
2.25	Dualní mnohostěn k osmistěnu – krychle . . . . .	29
2.26	Dualní mnohostěn k dvanáctistěnu – dvacetistěn . . . . .	29
2.27	Dualní mnohostěn k dvacetistěnu – dvanáctistěn . . . . .	30
2.28	Hrací kostka ve tvaru krychle [9] . . . . .	30
2.29	Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pravidelných mnohostěnu [10] . . . . .	31
2.30	Applet – osekáný čtyřstěn (3,6,6) . . . . .	32
2.31	Pětiboký rovnostranný hranol a pětiúhelníkový antihranol . . . . .	32
2.32	Osekáný dvacetistěn (vlevo) připomínající fotbalový míč (vpravo) [73] . . .	33
2.33	Meteorologická stanice ve tvaru osekaneho dvacetistěnu (Patscherkofel, Rakousko) [72] . . . . .	33
2.34	Molekula atomů uhlíku ve tvaru osekaneho dvacetistěnu – fulleren $C_{60}$ . . . .	34
2.35	Synagoga podle návrhu architektů A. Neumann a Z. Hecker (Negev, Izrael) [[[17], s. 86, obr. 23] . . . . .	35

2.36	Komplex budov ve čtvrti Ramot Polin podle návrhu architektů A. Neumann a Z. Hecker (Jeruzalém, Izrael) [75]	35
2.37	Rotační plocha vzniklá rotací jednoduché křivky okolo osy	36
2.38	Keramická váza ve tvaru rotační plochy [76]	37
2.39	Rozhledna Doubravka skládající se z rotačních těles (Praha 14, ČR)	37
2.40	Solární „superstromy“ ve tvaru rotačních těles (Singapur, Singapurská republika) [78]	38
2.41	Střecha budovy Sydney Opera House tvořená částmi kulových ploch (Sydney, Austrálie) [79]	38
2.42	Chladicí věže jaderné elektrárny Temelín ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Temelín, ČR) [80]	39
2.43	Přímořský maják Stanislav Range Front Light ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Chersonská oblast, Ukrajina) [81]	39
2.44	Čtyřicetikilová malířská barva	40
2.45	Tabulka převodních vztahů jednotek objemu	41
2.46	Tabulka převodních vztahů vedlejších jednotek objemu	42
2.47	Těleso složené ze tří různých těles	42
2.48	Těleso složené z dvanácti krychlí	43
2.49	Kvádr rozložený na 120 jednotkových krychlí	43
2.50	Ilustrace Cavalieriho principu	44
2.51	Svislý sloupec žetonů	45
2.52	Šikmý sloupec žetonů	45
2.53	Sít kužele	46
2.54	Pomerančová kůra nerozložitelná do rovinné sítě	47
2.55	Tabulka převodních vztahů jednotek obsahu	48
3.1	Dubové trámy ve tvaru hranolů	49
3.2	Optický trojboký hranol – rozklad světla pomocí hranolu [9]	49
3.3	Motiv optického hranolu – obal vinylové desky The Dark side of the moon	50
3.4	Flatiron Building ve tvaru trojbokého hranolu (USA, New York City) [10]	50
3.5	Hranolový prostor $n$ -boký	51
3.6	Hranolová plocha $n$ -boká	52
3.7	Hranol $n$ -boký	52
3.8	Vrcholy, hrany a stěny hranolů	53
3.9	Výšky a úhlopříčky hranolu	54
3.10	Čedičové varhany Panská skála tvořeny šestibokými hranoly (Českolipsko) [11]	54
3.11	Obrův chodník tvořeny pětibokými hranoly (Severní Irsko) [12]	55
3.12	Vodopády Svartifoss (Island) [13]	55
3.13	Konvexní pětiboký hranol a trojboký hranol, nekonvexní sedmiboký hranol	56
3.14	Konvexní kolmý pětiboký hranol a konvexní kosý trojboký hranol	56
3.15	Nekonvexní kolmý pětiboký hranol a nekonvexní kosý čtyřboký hranol	57
3.16	Zleva (horní řada): pravidelný trojboký hranol, pravidelný čtyřboký hranol, pravidelný pětiboký hranol; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký hranol a pravidelný sedmiboký hranol	57
3.17	O jaký hranol se jedná?	58
3.18	O jaký hranol se jedná?	58
3.19	O jaký hranol se jedná?	59
3.20	O jaký hranol se jedná?	59
3.21	Obecný rovnoběžnostěn	60

3.22	Zleva: kvádr, krychle a klenec . . . . .	60
3.23	Kostky cukru ve tvaru krychle . . . . .	61
3.24	One World Trade Center (USA, New York City) [14] . . . . .	62
3.25	Čtvercový antihranol . . . . .	62
3.26	Obal na květináč ve tvaru čtvercového antihranolu . . . . .	63
3.27	Forma pro odlitek čtvercového antihranolu rozložená v jeho síť . . . . .	63
3.28	Řeznická věž s valbovou střechou ve tvaru klínu (Ulm, Německo) [15] . . . . .	64
3.29	Objem kvádrů je roven celkovému počtu jednotkových krychlí . . . . .	65
3.30	Kvádr rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly . . . . .	65
3.31	Kolmý trojboký hranol rozdělený na dva kolmé trojboké hranoly . . . . .	66
3.32	Kolmý hranol rozdělený na $n$ kolmých trojbokých hranolů . . . . .	67
3.33	Využití Cavalieriho principu pro kolmý a kosý hranol se stejnými $S_p$ a $v$ . . . . .	67
3.34	Využití Cavalieriho principu pro konvexní a nekonv. hranol se stejnými $S_p$ a $v$ . . . . .	68
3.35	Ilustrace Příkladu 3.6.1 . . . . .	69
3.36	Ilustrace Příkladu 3.6.2 . . . . .	70
3.37	Ilustrace Příkladu 3.6.3 . . . . .	71
3.38	Ilustrace Příkladu 3.6.4 . . . . .	72
3.39	Síť šestibokého kosého hranolu . . . . .	73
3.40	Povrch šestibokého kosého hranolu - plášť a podstavy . . . . .	73
3.41	Ilustrace Příkladu 3.7.1 . . . . .	74
3.42	Ilustrace Příkladu 3.7.2 . . . . .	75
3.43	Ilustrace Příkladu 3.7.3 . . . . .	76
3.44	Ilustrace Příkladu 3.7.4 . . . . .	77
3.45	Kvádr s vyznačenými rozměry $a, b, c$ zobrazen v levém nadhledu . . . . .	78
3.46	Síť kvádrů skládající se ze šesti stěn . . . . .	78
3.47	Ilustrace Příkladu 3.8.1 . . . . .	79
3.48	Krychle zobrazena v levém podhledu . . . . .	80
3.49	Síť krychle skládající se ze šesti shodných stěn . . . . .	80
3.50	Ilustrace Příkladu 3.8.2 . . . . .	81
3.51	Ilustrace Příkladu 3.8.3 . . . . .	82
3.52	Ilustrace Úlohy 3.9.1 . . . . .	83
3.53	Ilustrace Úlohy 3.9.2 . . . . .	84
3.54	Ilustrace Úlohy 3.9.4 . . . . .	86
4.1	Skleněná pyramida na nádvoří Paláce Louvre ve tvaru čtyřbokého jehlanu [16] . . . . .	87
4.2	Obelisk se zakončením ve tvaru čtyřbokého jehlanu na Pražském hradě . . . . .	87
4.3	Patnáctimetrová rozhledna ve tvaru osmibokého jehlanu (Ocmanice) [17] . . . . .	88
4.4	Jehlanový prostor $n$ -boký . . . . .	89
4.5	Jehlanová plocha $n$ -boká . . . . .	89
4.6	Jehlan $n$ -boký . . . . .	90
4.7	Vrcholy, hrany a stěny jehlanů . . . . .	91
4.8	Tělesová a stěnová výška jehlanu . . . . .	91
4.9	Konvexní pětiboký jehlan a trojboký jehlan, nekonvexní sedmiboký jehlan . . . . .	92
4.10	Zleva (horní řada): pravidelný trojboký jehlan, pravidelný čtyřboký jehlan, pravidelný pětiboký jehlan; zleva (dolní řada): pravidelný šestiboký jehlan a pravidelný sedmiboký jehlan . . . . .	93
4.11	Nepřavidelný jehlan s podstavou ve tvaru pravidelného šestiúhelníku . . . . .	93
4.12	Nepřavidelný jehlan s podstavou ve tvaru nepřavidelného šestiúhelníku . . . . .	94
4.13	Střecha mauzolea ve tvaru pravidelného šestibokého jehlanu (Divriği) [18] . . . . .	94

4.14	O jaký jehlan se jedná? . . . . .	95
4.15	O jaký jehlan se jedná? . . . . .	95
4.16	O jaký jehlan se jedná? . . . . .	96
4.17	O jaký jehlan se jedná? . . . . .	96
4.18	Čtyřstěn a jeho těžiště . . . . .	97
4.19	Pravidelný čtyřstěn a jeho těžiště . . . . .	97
4.20	Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřstěnu (SLO, Pivka) [19] .	98
4.21	Železobetonové protitankové zátarasy ve tvaru čtyřstěnu (CZ, Nové Údolí) .	98
4.22	Vznik komolého jehlanu . . . . .	99
4.23	Pravidelný komolý šestiboký jehlan . . . . .	99
4.24	Stěny a výšky komolého šestibokého jehlanu . . . . .	100
4.25	Lesní megaphony ve tvaru devítibokého komolého jehlanu (EST, Võru) [20] .	100
4.26	Stojan na květinu ve tvaru čtyřbokého dvojjeblanu (osmistěnu) . . . . .	101
4.27	Hrací kostky ze hry D&D ve tvaru pětibokého trapezoedru [21] . . . . .	101
4.28	Hranolec . . . . .	102
4.29	Krychle rozdělená na šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů . . . . .	102
4.30	Krychle rozdělená na tři čtyřboké jehlany $CDABH$ , $GCBFH$ a $BAEFH$ .	103
4.31	Trojboký hranol $\mathcal{H}$ rozdělený na tři trojboké jehlany . . . . .	105
4.32	Využití Cavalieriho principu a stejnolehlosti pro tři jehlany se stejnými obsahy podstav $S_p$ a se stejnými výškami $v$ . . . . .	106
4.33	Ilustrace Příkladu 4.6.1 . . . . .	107
4.34	Ilustrace Příkladu 4.6.2 . . . . .	108
4.35	Ilustrace Příkladu 4.6.3 . . . . .	109
4.36	Ilustrace Příkladu 4.6.4 . . . . .	110
4.37	Ilustrace Příkladu 4.6.5 . . . . .	111
4.38	Sít čtyřbokého jehlanu . . . . .	113
4.39	Plášť a podstava čtyřbokého jehlanu zobrazeného v levém pohledu . . . . .	113
4.40	Ilustrace Příkladu 4.7.1 . . . . .	114
4.41	Ilustrace Příkladu 4.7.2 . . . . .	115
4.42	Ilustrace Příkladu 4.7.3 . . . . .	116
4.43	Ilustrace Příkladu 4.7.4 . . . . .	117
4.44	Ilustrace Příkladu 4.7.5 . . . . .	118
4.45	Atypická Rubikova kostka (Pyraminx) ve tvaru pravidelného čtyřstěnu [22] .	119
4.46	Ilustrace Příkladu 4.8.1 . . . . .	120
4.47	Ilustrace Příkladu 4.8.2 . . . . .	121
4.48	Komolý jehlan . . . . .	122
4.49	Ilustrace k odvození vzorce pro objem komolého jehlanu . . . . .	124
4.50	Ilustrace k Příkladu 4.8.3 . . . . .	125
4.51	Ilustrace k Úloze 4.9.1 . . . . .	126
4.52	Ilustrace k Úloze 4.9.2 . . . . .	127
4.53	Ilustrace k Úloze 4.9.3 . . . . .	128
4.54	Ilustrace k Úloze 4.9.4 . . . . .	129
5.1	Budova Civil Justice Centre (Manchester, Velká Británie) [23] . . . . .	131
5.2	Wotrubův kostel (Vídeň, Rakousko) [24] . . . . .	131
5.3	Komplex budov Habitat 67 (Montreal, Quebec) [25] . . . . .	132
5.4	Mrakodrap MahaNakhon (Bangkok, Thajsko) [26] . . . . .	132
5.5	Budova Čínské ústřední televize (Peking, Čína) [27] . . . . .	133
5.6	Ilustrace k Příkladu 5.1.1 . . . . .	134

5.7	Ilustrace k Příkladu 5.1.2 . . . . .	135
5.8	Ilustrace k Příkladu 5.1.3 . . . . .	137
5.9	Ilustrace k Příkladu 5.1.4 . . . . .	138
5.10	Ilustrace k Úloze 5.1.1 . . . . .	139
5.11	Ilustrace k Úloze 5.1.2 . . . . .	140
5.12	Ilustrace k Úloze 5.1.3 . . . . .	141
6.1	Křížová klenba skládající se z částí dvou válců [42] . . . . .	143
6.2	Rotunda sv. Jiří a sv. Vojtěcha na hoře Říp (CZ)[43] . . . . .	143
6.3	Vodárenská věž (Mittweida, Německo) [44] . . . . .	144
6.4	Studna v prostorách Ministerstva zahraničních věcí (Praha, CZ) . . . . .	144
6.5	Betonový tunel (Ponta Delgada, Portugalsko) . . . . .	145
6.6	Vodovodní trubky ve tvaru válce [47] . . . . .	145
6.7	Odměrný válec s červenou tekutinou v chemické laboratoři (vpravo) . . . . .	146
6.8	$n$ -boký pravidelný hranol . . . . .	146
6.9	Válcový prostor . . . . .	147
6.10	Válcová plocha . . . . .	147
6.11	Válec . . . . .	148
6.12	Podstavy, podstavná hrana, plášť válce a strana válce . . . . .	148
6.13	Tělesová výška, strana válce a poloměr podstavy . . . . .	149
6.14	Sloup vědění připomínající nekonečnou válcovou plochu ve foyer Ústřední knihovny v Praze . . . . .	149
6.15	Vznik rotačního válce rotací obdélníku okolo osy $o$ . . . . .	150
6.16	Vznik válcové plochy rotací přímky $BC$ okolo osy $o$ . . . . .	151
6.17	Zleva: Kosý válec a kolmý válec neboli rotační . . . . .	151
6.18	Parní válec u firmy Magyar Kozut (Kisbéri, Maďarsko) [111] . . . . .	152
6.19	Schéma kaladrovacího stroje obsahující kolmé válce [46] . . . . .	152
6.20	Jednotlivé buňky včelí plástve původně vytvářené ve tvaru pláště kolmého válce [89] . . . . .	153
6.21	Těstoviny typu penne ve tvaru pláště kosého válce . . . . .	154
6.22	Rovnostranný válec . . . . .	154
6.23	Český státní etalon hmotnosti ve tvaru rovnostranného válce [62] . . . . .	155
6.24	Eliptický válec . . . . .	155
6.25	Zámek Humprecht ve tvaru eliptického válce v CHKO Český ráj (Sobotka, CZ) [47] . . . . .	156
6.26	Zobecněný válec . . . . .	156
6.27	Parabolická válcová plocha [63] . . . . .	157
6.28	Hyperbolická válcová plocha [64] . . . . .	157
6.29	O jaký válec se jedná? . . . . .	158
6.30	O jaký válec se jedná? . . . . .	158
6.31	O jaký válec se jedná? . . . . .	158
6.32	O jaký válec se jedná? . . . . .	159
6.33	O jaký válec se jedná? . . . . .	159
6.34	Antimodel válce – budova planetária Tycho de Brahe ve tvaru seříznutého válce (Kodaň, Dánsko) [86] . . . . .	160
6.35	Sud . . . . .	161
6.36	Animace přechodu od kolmé válcové plochy přes hyperboloid až ke kuželové ploše [45] . . . . .	161

6.37	Vodárenská věž ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Les Essarts-le-Roi, Francie) [83]	162
6.38	Řídící věž letecké dopravy ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Newcastle, UK) [84]	162
6.39	Nadzemní spojovací koridor mezi budovami ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Manchester, UK) [85]	163
6.40	Katedrální náměstí (Pisa, Itálie) [87]	163
6.41	3D scanning šikmé věže (Pisa, Itálie) [88]	164
6.42	Využití Cavalieriho principu využití při odvození objemu rotačního válce	164
6.43	Shodnost obsahů řezů hranolu a válce v libovolné výšce	165
6.44	Výseč rotačního válce	166
6.45	Úseč rotačního válce	166
6.46	Ilustrace Příkladu 6.6.1	167
6.47	Ilustrace Příkladu 6.6.2	167
6.48	Sít válce	168
6.49	Sít kosého válce	168
6.50	Ilustrace Příkladu 6.7.1	169
6.51	Ilustrace Příkladu 6.7.2	169
6.52	Ilustrace Příkladu 6.8.1	170
6.53	Ilustrace k úloze 6.9.1	171
6.54	Ilustrace k Úloze 6.9.2	172
6.55	Ilustrace k úloze 6.9.3	172
7.1	Dopravní kužele [61]	173
7.2	Bílé domky ze suchého zdiva nazývané Trulli (Alberobello, Itálie) [60]	173
7.3	Čokoládové vrchy kuželovitého tvaru (Bohol, Filipíny) [59]	174
7.4	Umělecké tvarování stromů do kuželovité podoby (Pennsylvánie, USA) [58]	174
7.5	Nákres rakety Saturn 5 s řídicím modulem ve tvaru kužele, mise Apollo 15 [56]	175
7.6	Řídící modul ve tvaru kužele a servisní modul ve tvaru válce mise Apollo 15 [57]	175
7.7	Žena nosící hennin na obraze Presentation of Christ Child in the temple [55]	176
7.8	Tradiční pokrývka hlavy nón lá mající tvar pláště kužele [54]	176
7.9	Schématický řez vzniku sypaného kužele [53]	177
7.10	Vrchol Trosky se stejnojmenným hradem jako pozůstatek sopečného kužele (Liberecko, ČR) [52]	177
7.11	$n$ -boký pravidelný jehlan	178
7.12	Kuželový prostor	178
7.13	Kuželová plocha	179
7.14	Kužel	179
7.15	Vrchol, podstava, podstavná hrana, plášť a strana kužele	180
7.16	Tělesová výška, strana kužele a poloměr podstavy	180
7.17	Komín ve tvaru válce jevící se jako kužel[48]	181
7.18	Vznik rotačního kužele rotací pravoúhlého trojúhelníku okolo osy $o$	182
7.19	Vznik rotační kuželové plochy rotací přímky $BC$ okolo osy $o$	182
7.20	Zleva: rotační a nerotační	183
7.21	Muzeum Bundeskunsthalle s objekty na střeše ve tvaru rotačních kuželů (Bonn, Německo)	183
7.22	Sklenice ve tvaru pláště rotačního kužele	184
7.23	Kornout na zmrzlinu ve tvaru pláště rotačního kužele	184

7.24	Schránka mořského plže ve tvaru nerotačního kužele . . . . .	185
7.25	Rovnostranný kužel . . . . .	185
7.26	Vznik rotačního komolého kužele . . . . .	186
7.27	Vznik nerotačního komolého kužele . . . . .	186
7.28	Vznik rotačního komolého kužele rotací pravoúh. lichoběžníku okolo přímky KN . . . . .	187
7.29	Sít rotačního komolého kužele . . . . .	187
7.30	Tělesová výška a strana komolého kužele . . . . .	188
7.31	Tělo větrného mlýna ve tvaru komolého kužele a jeho střecha ve tvaru rotač- ního kužele (Azory, Portugalsko) . . . . .	188
7.32	Vodárenská věž ve tvaru komolého kužele (Midrand, JAR) . . . . .	189
7.33	Eliptický kužel . . . . .	189
7.34	Zobecněný kužel . . . . .	190
7.35	Parabolická kuželová plocha > . . . . .	190
7.36	Hyperbolická kuželová plocha . . . . .	191
7.37	O jaký kužel se jedná? . . . . .	191
7.38	O jaký kužel se jedná? . . . . .	192
7.39	O jaký kužel se jedná? . . . . .	192
7.40	O jaký kužel se jedná? . . . . .	193
7.41	O jaký kužel se jedná? . . . . .	193
7.42	Antimodel kuželu – střecha kostela Saint-Laurent ve tvaru zkrouceného osmi- bokého jehlanu (Ceyzíriat, Francie) [66] . . . . .	194
7.43	Včelí slaměné úly . . . . .	195
7.44	Uhelné pece ve tvaru připomínající úl (Ward, Nevada) . . . . .	195
7.45	Domky Majara Residence ve tvaru připomínající úl (ostrov Hormuz, Irán) . .	196
7.46	Televizní vysílač Ještěd ve tvaru jednodílného rotačního hyperboloidu (Libe- rec, CZ) . . . . .	196
7.47	Reunification Monument připomínající tvar kužele (Yaoundé, Kamerun) [77]	197
7.48	Využití Cavalieriho principu a stejnolehlosti při odvození objemu rotačního válce . . . . .	198
7.49	Shodnost obsahů řezů jehlanu a kužele v libovolné výšce . . . . .	198
7.50	Ilustrace Příkladu 7.6.1 . . . . .	199
7.51	Ilustrace Příkladu 7.51 . . . . .	200
7.52	Sít rotačního kužele . . . . .	201
7.53	Podstava a plášť nerotačního kužele . . . . .	201
7.54	Sít rotačního kužele . . . . .	202
7.55	Odvození pláště rotačního kužele . . . . .	203
7.56	Vztah mezi obsahem pláště rotačního kužele a obsahem trojúhelníku . . . . .	203
7.57	Ilustrace Příkladu 7.7.1 . . . . .	204
7.58	Ilustrace Příkladu 7.7.2 . . . . .	205
7.59	Ilustrace Příkladu 7.8.1 . . . . .	206
7.60	Rotační komolý kužel . . . . .	207
7.61	Sít rotačního komolého kužele . . . . .	209
7.62	Souvislost obsahu pláště rotačního komolého kužele s obsahy daných rotačních kuželů . . . . .	210
7.63	Stínitko lampy ve tvaru pláště rotačního komolého kužele. . . . .	211
7.64	Ilustrace Příkladu 7.8.2 . . . . .	212
7.65	Ilustrace Příkladu 7.8.3 . . . . .	213
7.66	Ilustrace k úloze 7.9.1 . . . . .	214

7.67	Ilustrace k Úloze 7.9.2 [82]	215
7.68	Ilustrace k úloze 7.9.3	216
8.1	Glóbus planety Země ve tvaru koule [96]	219
8.2	Glóbus nebeské sféry ve tvaru koule (Berlín, Německo) [97]	219
8.3	Obrázek 8.1:3: Schánky Mřížovců ve tvaru koule [98,99]	220
8.4	Pylová zrna ve tvaru koule zobrazená elektronovou mikrofotografií [100]	220
8.5	Plody rybízu [101]	221
8.6	Tenisový míč ve tvaru koule [102]	221
8.7	Cvrnkací kuličky ve tvaru koulí [103]	222
8.8	Bowlingové koule kulovitého tvaru [104]	222
8.9	Bublina vytvořená bublifukem ve tvaru koule [105]	223
8.10	Vznik koule rotací půlkruhu $P$ okolo osy $o$	223
8.11	Skleníky Eden Project (Cornwall, Velká Británie) [107]	224
8.12	Kapky rosy ve tvaru koule [106]	224
8.13	Hlavní kružnice kulové plochy	225
8.14	Vedlejší kružnice kulové plochy	225
8.15	Anuloid vzniklý rotací kruhu $K$ okolo osy $o$	226
8.16	Kulová úseč a kulový vrchlík	226
8.17	Stavba ve tvaru kulové úseče (Pico do Arieiro, Portugalsko)	227
8.18	Kopule baziliky svatého Marka ve tvaru kulové úseče (Benátky, Itálie) [108]	227
8.19	Stínítko lampy ve tvaru kulového vrchlíku	228
8.20	Kulová výseč	228
8.21	Padáky vojenských parašutistů ve tvaru kulové výseče [108]	229
8.22	Kulová vrstva a kulový pás	229
8.23	Planeta Jupiter ve tvaru rotačního elipsoidu [90]	230
8.24	Schránky ježovek ve tvaru rotačního elipsoidu [91]	231
8.25	Malovaná pštrosí vejce na výstavě věnované Kartágu (Řím, Itálie) [92]	231
8.26	Plod melounu cukrového ve tvaru rotačního elipsoidu [93]	232
8.27	Budova National Grand Theatre ve tvaru části rotačního elipsoidu (Peking, Čína) [94]	232
8.28	Rugbyový míč ve tvaru rotačního elipsoidu [95]	232
8.29	Využití Cavalieriho principu při odvození objemu koule	233
8.30	Osový řez tělesem $T$ a danou koulí	233
8.31	Ilustrace Příkladu 8.5.1 [110]	234
8.32	Ilustrace Příkladu 8.5.2	235
8.33	Využití Keplerovy metody odvození povrchu koule	236
8.34	Ilustrace Příkladu 8.6.1 [110]	237
8.35	Ilustrace Příkladu 8.5.2	237
8.36	Výšky kulových úsečí	238
8.37	Kulový vrchlík, kulová úseč a kulová výseč	239
8.38	Výšky kulových úsečí	240
8.39	Kulový pás a kulová vrstva	241
8.40	Ilustrace k úloze 8.9.1	241
8.41	Ilustrace k Úloze 8.9.2	242
8.42	Ilustrace k úloze 8.9.3	243
9.1	Ilustrace k první testové otázce [29]	245
9.2	Ilustrace ke druhé testové otázce	246
9.3	Ilustrace ke čtvrté testové otázce	247



9.4	Ilustrace k páté testové otázce . . . . .	247
9.5	Ilustrace k šesté testové otázce . . . . .	248
9.6	Ilustrace k osmé testové otázce . . . . .	249
9.7	Ilustrace k deváté testové otázce [30] . . . . .	250



# Seznam zdrojů nevlastních obrázků

- [0] KOLMAN, Arnošt. Dějiny matematiky ve starověku. Praha: Academia, 1969, s. 44, o. 9.
- [1] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Chufuova\\_pyramida#/media/Soubor:Kheops-Pyramid.jpg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Chufuova_pyramida#/media/Soubor:Kheops-Pyramid.jpg)
- [2] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lu%C5%BEiny\\_metro\\_n%C3%A1st\\_1.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lu%C5%BEiny_metro_n%C3%A1st_1.jpg)
- [3] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Kapsida#/media/Soubor:Adenovirus\\_3D\\_schematic.png](https://cs.wikipedia.org/wiki/Kapsida#/media/Soubor:Adenovirus_3D_schematic.png)
- [4] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c6/Pyrite\\_Cubes.JPG](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c6/Pyrite_Cubes.JPG)
- [5] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turritella\\_communis\\_Turmschnecke.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turritella_communis_Turmschnecke.jpg)
- [6] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/81/Kepler-Poinsot\\_solids.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/81/Kepler-Poinsot_solids.svg)
- [7] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a5/6sided\\_dice.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a5/6sided_dice.jpg)
- [8] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/DnD\\_Dice\\_Set.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/DnD_Dice_Set.jpg)
- [9] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dispersive\\_Prism\\_Illustration\\_by\\_Spigget.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dispersive_Prism_Illustration_by_Spigget.jpg)
- [10] <https://pxhere.com/cs/photo/1171836>
- [11] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Pansk%C3%A1\\_sk%C3%A1la\\_-\\_varhany.jpg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Pansk%C3%A1_sk%C3%A1la_-_varhany.jpg)
- [12] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Giant%27s\\_causeway.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Giant%27s_causeway.jpg)
- [13] <https://pexels.com/cs-cz/foto/cestovani-cestovni-ruch-dlouha-expozice-drevo-831062/>
- [14] <https://pexels.com/cs-cz/foto/dolni-manchattan-mrakodrap-mrakodrap-one-world-trade-center-zem-nula-2120151/>
- [15] <https://pxhere.com/cs/photo/1132851>
- [16] <https://pixabay.com/fr/photos/paris-mus%C3%A9-du-louvre-pyramide-199147/>
- [17] NESRSTOVÁ, Aneta. profil @nesrstovaaneta na Instagramu [online]. Použití v BP schváleno autorem [cit. 2019-11-30]. Obrázek ve formátu JPEG. Dostupné z: <https://www.instagram.com/nesrstovaaneta/>
- [18] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Divrigi,SitteMelikT%C3%BCrbesi1.jpg>
- [19] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f8/Tankovske\\_ovire.JPG](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f8/Tankovske_ovire.JPG)
- [20] [https://et.m.wikipedia.org/wiki/Fail:Metsa\\_k%C3%B5lakojad.jpg](https://et.m.wikipedia.org/wiki/Fail:Metsa_k%C3%B5lakojad.jpg)
- [21] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/DnD\\_Dice\\_Set.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/DnD_Dice_Set.jpg)
- [22] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pyraminx\\_turn\\_cubemeister\\_com.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pyraminx_turn_cubemeister_com.jpg)
- [23] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manchester\\_Civil\\_Justice\\_Centre\\_from\\_Bridge\\_Street.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Manchester_Civil_Justice_Centre_from_Bridge_Street.jpg)
- [24] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Wien\\_-\\_Wotrubakirche\\_\(6\).JPG](https://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Wien_-_Wotrubakirche_(6).JPG)
- [25] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Habitat\\_67,\\_southwest\\_view.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Habitat_67,_southwest_view.jpg)
- [26] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MahaNakhon\\_by\\_kylehase.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MahaNakhon_by_kylehase.jpg)
- [27] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CCTV\\_Tower\\_\(11523985946\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CCTV_Tower_(11523985946).jpg)
- [28] CARIOGGIA, Michele. profil @aerevides na Instagramu [online]. Použití v BP schváleno autorem [cit. 2020-05-24]. Dva obrázky ve formátu JPEG. Dostupné z: <https://www.instagram.com/p/BhwPgS0FsAV/> a <https://www.instagram.com/p/Bhoy4zflvG4/>
- [29] Hrací káča . <https://pixabay.com/cs/photos/k%C3%A1%C4%8Da-d%C5%99ev%C4%9Bn%C3%BI-top-d%C5%99ev%C4%9>
- [30] Fotka schránky mořského živočicha [online]. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tectus\\_fene](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tectus_fene)
- [42] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Groined\\_vault\\_001.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Groined_vault_001.png)
- [43] HULSCH, Johannes. Fotka Just found the perfect hobbit church. Profil @bokehm0n na Instagramu [online]. Použití v DP schváleno autorem [cit. 2022-03-21]. Obrázek ve formátu JPG. Dostupné z: [https://www.instagram.com/p/CCXxO4nK-8\\_/](https://www.instagram.com/p/CCXxO4nK-8_/)
- [44] HULSCH, Johannes. Fotka he most impressive water tower I've seen so far. Profil @bokehm0n na Instagramu [online]. Použití v DP schváleno autorem [cit. 2022-03-21]. Obrázek ve formátu JPG. Dostupné z: [https://www.instagram.com/p/B\\_zAqJuKkIb/](https://www.instagram.com/p/B_zAqJuKkIb/)

- [45] [https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid/media/File:Cylinder\\_-\\_hyperboloid\\_-\\_cone.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid/media/File:Cylinder_-_hyperboloid_-_cone.gif)
- [46] AUSPERGER, Aleš. Technologie zpracování plastů [online]. 2015, kapitola 03, obr. 55. [cit. 2023-05-12]. ISBN 978-80-88058-77-9. Dostupné z: <https://publi.cz/books/183/Cover.html>
- [47] KALABIS, Dan. Fotka Lovecký zámek Humprecht. Profil @dankalabis na Instagramu [online]. Použití v DP schváleno autorem [cit. 2023-04-24]. Obrázek ve formátu JPG. Dostupné z: <https://www.instagram.com/p/CGfDrxknndN/>
- [48] [https://www.wikiwand.com/en/CylinderMedia/File:\(Texas\\_Gulf\\_Sulphur\\_Company\)\\_\(1042862927\)](https://www.wikiwand.com/en/CylinderMedia/File:(Texas_Gulf_Sulphur_Company)_(1042862927))
- [49] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kunst-\\_und\\_Ausstellungshalle\\_der\\_Bundesrepublik\\_De\\_Bundeskunsthalle-9278.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kunst-_und_Ausstellungshalle_der_Bundesrepublik_De_Bundeskunsthalle-9278.jpg)
- [50] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Martini\\_%28koktejl%29/media/Soubor:15-09-26-RalfR-WLC-0084.jpg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Martini_%28koktejl%29/media/Soubor:15-09-26-RalfR-WLC-0084.jpg)
- [51] <https://www.publicdomainpictures.net/cs/free-download.php?image=zmrzlina-bilym-ojedinelychid=1>
- [52] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hrad\\_Trosky,\\_leteck%C3%BD\\_sn%C3%ADmek.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hrad_Trosky,_leteck%C3%BD_sn%C3%ADmek.jpg)
- [53] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Sypan%C3%BD\\_ku%C5%BEel/media/Soubor:Strombolian\\_Eruption-numbers.svg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Sypan%C3%BD_ku%C5%BEel/media/Soubor:Strombolian_Eruption-numbers.svg)
- [54] <https://en.wikipedia.org/wiki/File:ThreeNonLa.jpg>
- [55] [https://www.wikidata.org/wiki/Q114036433/media/File:Hans\\_Holbein\\_d.\\_%C3%84.\\_Darstellung\\_Christi\\_im\\_Tempel\\_-\\_Hamburger\\_Kunsthalle.jpg](https://www.wikidata.org/wiki/Q114036433/media/File:Hans_Holbein_d._%C3%84._Darstellung_Christi_im_Tempel_-_Hamburger_Kunsthalle.jpg) (oříznuto)
- [56] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Apollo\\_Spacecraft\\_diagram.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Apollo_Spacecraft_diagram.jpg)
- [57] [https://www.wikiwand.com/fr/Module\\_de\\_commande\\_et\\_de\\_service\\_ApolloMedia/Fichier:Apollo](https://www.wikiwand.com/fr/Module_de_commande_et_de_service_ApolloMedia/Fichier:Apollo)
- [58] <https://www.flickr.com/photos/thartz00/4893675213>
- [59] [https://www.flickr.com/photos/juha\\_riissanen/8600427034](https://www.flickr.com/photos/juha_riissanen/8600427034)
- [60] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Trullo/media/Soubor:Trulli\\_e\\_Olivi\\_-\\_panoramio.jpg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Trullo/media/Soubor:Trulli_e_Olivi_-_panoramio.jpg)
- [61] <https://pixabay.com/cs/photos/sto%C5%BE%C3%A1r%C5%AF-dopravn%C3%AD-ku%C5%BEel-oran%C5%BEov%C3%BD-6698429/>
- [62] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Kilogram/media/Soubor:Standard\\_kilogram,\\_2.jpg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Kilogram/media/Soubor:Standard_kilogram,_2.jpg)
- [63] [https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Soubor:Parabolic\\_Cylinder\\_Quadric.png](https://cs.m.wikipedia.org/wiki/Soubor:Parabolic_Cylinder_Quadric.png)
- [64] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadrka/media/Soubor:Hyperbolic\\_Cylinder\\_Quadric.png](https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadrka/media/Soubor:Hyperbolic_Cylinder_Quadric.png)
- [65] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Johhanesburg\\_Water-Midrand\\_Tower-001.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Johhanesburg_Water-Midrand_Tower-001.jpg) (oříznuto)
- [66] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste\\_de\\_clochers\\_tors/media/Fichier:Ceyzeriat\\_clocher1.jpg](https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_clochers_tors/media/Fichier:Ceyzeriat_clocher1.jpg)
- [67] <https://www.publicdomainpictures.net/en/free-download.php?image=old-straw-bee-hive-cutoutid=193396>
- [68] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2014-08-11\\_16\\_11\\_24\\_Ovens\\_in\\_Ward\\_Charcoal\\_Oven](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2014-08-11_16_11_24_Ovens_in_Ward_Charcoal_Oven)
- [69] PŮLPÁN, Martin. Fotka Majara Residence, Hormuz Island. Profil @lost\_czech\_man na Instagramu [online]. Použití v DP schváleno autorem [cit. 2023-04-09]. Obrázek ve formátu JPG posláno e-mailem. Dostupné z: [https://www.instagram.com/lost\\_czech\\_man/](https://www.instagram.com/lost_czech_man/)
- [70] [https://vi.wikipedia.org/wiki/Tectus/media/T%E1%BA%ADp\\_tin:Trochus\\_niloticus\\_\(5925221250\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Tectus/media/T%E1%BA%ADp_tin:Trochus_niloticus_(5925221250))
- [71] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Andradit/media/Soubor:Andradite-198000.jpg>
- [72] <https://www.imago-images.de/st/0092598321> (oříznuto)
- [73] [https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical\\_polyhedron/media/File:Comparison\\_of\\_truncated\\_icosahedron](https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_polyhedron/media/File:Comparison_of_truncated_icosahedron)
- [74] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fullerene/media/File:C60\\_Molecule.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Fullerene/media/File:C60_Molecule.svg)
- [75] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ramot\\_polin.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ramot_polin.jpg)
- [76] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pottery,\\_pot\\_on\\_wheel.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pottery,_pot_on_wheel.jpg)
- [77] [https://en.wikipedia.org/wiki/Reunification\\_Monument/media/File:Monument\\_Reunification\\_2.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Reunification_Monument/media/File:Monument_Reunification_2.jpg)
- [78] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Singapore\\_Flower-Dome-in-The-Gardens-01.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Singapore_Flower-Dome-in-The-Gardens-01.jpg)
- [79] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Sydney\\_Opera\\_House\\_Sails\\_edit02.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Sydney_Opera_House_Sails_edit02.jpg)
- [80] <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7f/Dukovany.JPG>

- [81] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%D0%A1%D1%82%D0%B0%D0%BD%D1%96%D1%81%D0%90%D0%B4%D0%B6%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%8C%D0%E>
- [82] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ur\\_Namma\\_cone\\_AN1925.633.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ur_Namma_cone_AN1925.633.jpg)
- [83] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Les\\_Essarts-le-Roi\\_Ch%C3%A2teau\\_d%27eau.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Les_Essarts-le-Roi_Ch%C3%A2teau_d%27eau.JPG)
- [84] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Newcastle\\_International\\_Airport\\_Contra](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Newcastle_International_Airport_Contra)
- [85] [https://en.wikipedia.org/wiki/Corporation\\_Street\\_Bridge/media/File:Bridge\\_over\\_Corporation\\_geograph.org.uk\\_-\\_809089.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Corporation_Street_Bridge/media/File:Bridge_over_Corporation_geograph.org.uk_-_809089.jpg)
- [86] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tycho\\_Brahe\\_Planetarium\\_2007\\_a.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tycho_Brahe_Planetarium_2007_a.jpg)
- [87] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Italy\\_-\\_Pisa\\_-\\_Leaning\\_Tower\\_of\\_Pisa.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Italy_-_Pisa_-_Leaning_Tower_of_Pisa.jpg)
- [88] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Leaning\\_Tower\\_of\\_Pisa\\_Cyark.png](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Leaning_Tower_of_Pisa_Cyark.png)
- [89] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3d/Honeycomb\\_15\\_03\\_2012.jpg/1200px-Honeycomb\\_15\\_03\\_2012.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3d/Honeycomb_15_03_2012.jpg/1200px-Honeycomb_15_03_2012.jpg)
- [90] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Jupiter\\_oblate\\_spheroid.png](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Jupiter_oblate_spheroid.png)
- [91] <https://www.publicdomainpictures.net/cs/view-image.php?image=96406picture=urchin-shells>
- [92] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/Carthago\\_exhibition\\_-\\_Painted\\_Ostrich](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/Carthago_exhibition_-_Painted_Ostrich)
- [93] [https://en.wikipedia.org/wiki/Cantaloupe/media/File:Canteloupe\\_and\\_cross\\_section.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Cantaloupe/media/File:Canteloupe_and_cross_section.jpg)
- [94] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:National\\_Grand\\_Theatre.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:National_Grand_Theatre.jpg)
- [95] <https://www.flickr.com/photos/photosofsrilanka/4416198623/in/photostream/>
- [96] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/17/3quarter\\_globe.jpg/800px-3quarter\\_globe.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/17/3quarter_globe.jpg/800px-3quarter_globe.jpg)
- [97] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7c/MEK\\_II-14.jpg/800px-MEK\\_II-14.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7c/MEK_II-14.jpg/800px-MEK_II-14.jpg)
- [98] [https://en.wikipedia.org/wiki/Radiolaria/media/File:Spherical\\_radiolarian\\_2.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Radiolaria/media/File:Spherical_radiolarian_2.jpg)
- [99] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b6/Radiolaria\\_%28Challenger%29\\_Plate\\_1](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b6/Radiolaria_%28Challenger%29_Plate_1)
- [100] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Pyl/media/Soubor:Misc\\_pollen.jpg](https://cs.wikipedia.org/wiki/Pyl/media/Soubor:Misc_pollen.jpg)
- [101] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:White\\_currant\\_%28Ribes\\_sativum%29.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:White_currant_%28Ribes_sativum%29.jpg)
- [102] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Closeup\\_of\\_a\\_tennis\\_ball\\_%282%29.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Closeup_of_a_tennis_ball_%282%29.jpg)
- [103] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Photo\\_I\\_took\\_of\\_my\\_own\\_antique\\_German\\_handmade\\_n](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Photo_I_took_of_my_own_antique_German_handmade_n)
- [104] [https://en.wiktionary.org/wiki/bowling\\_ball/media/File:Bowlingball.JPG](https://en.wiktionary.org/wiki/bowling_ball/media/File:Bowlingball.JPG)
- [105] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Reflection\\_in\\_a\\_soap\\_bubble\\_edit.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Reflection_in_a_soap_bubble_edit.jpg)
- [106] <https://www.pxfuel.com/en/free-photo-elztw>
- [107] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Eden\\_Project\\_geodesic\\_domes\\_panorama.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Eden_Project_geodesic_domes_panorama.jpg)
- [108] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Markusdom\\_Kuppeln.jpg?uselang=fr](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Markusdom_Kuppeln.jpg?uselang=fr)
- [108] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Coupole/media/Fichier:Penditifkuppel-mit.svg>
- [109] [https://en.wikipedia.org/wiki/T-10\\_parachute/media/File:SCIE\\_T10\\_image1.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/T-10_parachute/media/File:SCIE_T10_image1.jpg)
- [110] [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pantheon\\_section\\_sphere.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pantheon_section_sphere.svg)
- [111] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Parn%C3%AD\\_v%C3%A1lec](https://cs.wikipedia.org/wiki/Parn%C3%AD_v%C3%A1lec)
- [112] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Globen\\_2013\\_-\\_06\\_-\\_24.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Globen_2013_-_06_-_24.jpg)

