

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Richard Škultéty

**Kvantové jizvení v mnohočásticových
kolektivních systémech**

Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Pavel Stránský, Ph.D.

Studijní program: Teoretická fyzika

Studijní obor: FTFP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Mgr. Pavlu Stránskému, Ph.D za vedení práce a mnohé konzultace. Dále bych rad poděkoval Mgr. Jakubu Novotnému za častou pomoc s vypracováním a poskytnutí klidného místa na psaní v pracovišti doktorandů UČJF.

Název práce: Kvantové jizvení v mnohočásticových kolektivních systémech

Autor: Bc. Richard Škultéty

Ústav: Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Pavel Stránský, Ph.D., Ústav částicové a jaderné fyziky

Abstrakt: V této práci seznámíme čtenáře s konceptem kvantového jizvení. Kvantové jizvy jsou stavy uprostřed chaotické části spektra, které se zásadně odlišují od předpovědí pro chaotické stavy. V této práci se zaměříme na mnohočásticové jizvy (QMBS), které se vymykají předpovědím hypotéze o termalizace vlastních stavů (ETH). Nejprve představíme ETH a možnosti jejího narušení stavy QMBS, zejména periodické revivaly nevlastních stavů QMBS, anomálně nízké entropie provázání a lokalizaci Husimihovo funkce v klasické limitě. Tyto metody aplikujeme pro nalezení a studium stavů QMBS na vícenásobných Lipkinových modelech.

Klíčová slova: Kvantový chaos, Hypotéza termalizace vlastních stavů, Mnohočásticové kvantové jizvy, Lokalizace, kvantové jizvení

Title: Quantum scarring in many-body collective systems

Author: Bc. Richard Škultéty

Institute: Institute of particle and nuclear physics

Supervisor: Mgr. Pavel Stránský, Ph.D., Institute of particle and nuclear physics

Abstract: In this work, we will introduce the concept of quantum scarring. Quantum scarring refers to the states inside the chaotic parts of spectra, which significantly differ from predictions for chaotic states. In this work, we will focus on Quantum Many-Body Scars (QMBS), which deviate from the Eigenvector Thermalization Hypothesis (ETH) predictions. First, we will introduce the ETH and several ways in which the QMBS deviate from it; periodic revivals of non-eigenstate QMBS, anomalously low values of entanglement entropy, and localization of Husimi function in the classical limit. We will apply these methods to detect and study QMBS on coupled Lipkin models.

Keywords: Quantum chaos, Eigenvector thermalization hypothesis, Quantum Many-Body Scars, Localisation, quantum scar

Obsah

Úvod	2
1 Chaos	4
1.1 Klasický chaos	4
1.1.1 Definice chaosu	5
1.1.2 (Ne)Integrabilita systémů	6
1.1.3 Dynamické billiardy	7
1.2 Kvantový chaos	8
1.2.1 Náhodné matice	9
1.2.2 Měření chaotičnosti kvantových systémů	10
1.2.3 Peresovy mříže	12
2 Kvantové jizvení	14
2.1 Jednočásticové kvantové jizvy	14
2.2 Mnohočásticové kvantové jizvy	16
2.2.1 Hypotéza termalizace vlastních stavů (ETH)	17
2.2.2 Periodické revivaly	19
2.2.3 Entropie provázání	21
2.3 Modely zjizvených systémů	22
2.3.1 QMBS na PxP	23
2.3.2 QMBS na Dickeho modelu	26
3 Mnohočásticové kvantové jizvení na Lipkinových modelech	29
3.1 Lipkinův model	29
3.2 Dva a vícenásobné Lipkinovy modely	30
3.2.1 2-Lipkinův model	30
3.2.2 n-Lipkin model	32
3.2.3 Maticová reprezentace Lipkinových modelů	32
3.3 QMBS na vícenásobných Lipkinových modelech	33
3.3.1 Metody použité identifikace QMBS na vícenásobných Lipkinových modelech	33
3.3.2 Výsledky studia QMBS na Lipkinových modelech	36
3.4 Lokalizace 2-Lipkinova modelu v klasické limitě	44
3.4.1 Klasická limita a Husimiho funkce	44
3.4.2 Lokalizace Husimiho funkce	45
Závěr	47
Seznam použité literatury	48
Seznam obrázků	51

Úvod

Chaos v klasickém i kvantovém případě se projevuje ztrátou informace o počátečních stavech po časovém vývoji systémů. Chaotické systémy v časovém vývoji zapomínají na své původní rozpoložení a rozplývají se přes celý dostupný prostor. V klasickém chaosu toto zajišťuje mísení fázového prostoru vlivem kterého máme citlivost na počátečních podmínkách, kdy i minimální nepřesnost v určení počátečního stavu vede na exponenciálně velkou nejistotu konečném čase vývoje. V kvantově chaotických systémech počáteční stavy po čase termalizují, zapomínají své počáteční podmínky, a jedinou přežívající charakteristikou se stává energie.

Byla však objevena nečekaná výjimka v podobě kvantového jizvení. V jednočásticových kvantově chaotických systémech byly nalezeny stavy, které jsou nečekaně odolné vůči tomuto časovému vývoji a termalizaci. V systému nám zůstávají zbytky struktur a v klasické limitě pozorujeme tyto jizvy jako nečekanou lokalizaci podél nestabilních periodických orbit. Toto jizvení prostoru bylo nejprve pozorované na dynamickém billiardu Bunimovičova stadiónu v práci (Heller, 1984).

V této práci nás budou zajímat především jizvy na mnohočásticových systémech, kde nám ztrátu struktur udává hypotéza termalizace vlastních stavů (anglická zkratka ETH). A i zde máme anomální stavy, zvané kvantové mnohočásticové jizvy, které si i uprostřed chaosu zachovávají své struktury. V kvantových simulacích na řetízku 51-Rydbergových atomů (Bernien a kol., 2017) byly nalezeny stavy, u kterých byly naměřeny periodické revivaly¹.

Na základě těchto pozorování započalo budování teorie mnohočásticových kvantový jizev (QMBS). Jsou to individuální stavy, které přímo narušují ETH. ETH nám dává předpověď chování kvantově chaotických systému na základě statistické mechaniky. Vlastní stavy kvantově chaotických systémů termalizují. Fyzikální pozorovatelné na vlastních stavech jsou funkcemi energie a pseudonáhodného šumu a stavy jsou v klasické limitě delokalizované na dostupných oblastech fázového prostoru. Na základě tohoto článku (Bernien a kol., 2017) byly sestavovány modely, které obsahovaly stejný jev. Zejména modely PxP (Serbyn a kol., 2021) a AKLT (Moudgalya a kol., 2018b), na kterých se QMBS řešily analyticky. Jako QMBS byly identifikovány Neélové Z_2 stavy, které mají pravidelnou strukturu střídajících excitovaných částic a částic v základním stavu v řetízku.

Dalším nálezem bylo, že vlastní stavy QMBS mají abnormálně nízké hodnoty entropie provázání. Entropie provázání nám slouží jako dobrý indikátor QMBS.²

V odborných pracích jsme se setkáváme se zcela odlišným přístupem k QMBS. V práci (Pilatowsky-Cameo a kol., 2022) jsou QMBS studovány, v analogii s jednočásticovým případem, na lokalizaci stavu na fázovém prostoru v klasické limitě. Na fázový prostor byly vynášeny hodnoty Husímiho funkce, na kterých byly pozorovány lokalizace kolem nestabilních periodických orbit jako u jednočásticových

¹Nevlastní stavy, které po časovém vývoji mají v periodických časech nezanedbatelné překryvy s počátečním stavem.

²Pokud jsou QMBS nevlastním stavem, tak vlastní stavy, které mají vysoké projekce na QMBS, mají nízké hodnoty entropie provázání. Pro QMBS, které jsou vlastní stavy (izolované QMBS) nám tyto entropie přímo identifikují stav QMBS

jizev.

V této práci jsme výše zmíněné metody aplikujeme na 2-Lipkinovy a 3-Lipkinovy modely. Základem těchto modelů je Lipkinův model, který je plně propojenou verzí Isingova modelu. 2-Lipkinovy a 3-Lipkinovy se od běžného Lipkinova modelu liší tím, že obsahují více typů interagujících částic s různými silami interakce. Na rozdíl od běžného Lipkinova modelu mají pro vhodně zvolené parametry i chaotické části spektra, na kterých můžeme hledat QMBS. Tyto modely přímo nabízí rozdělení na podprostory, což nám dává přímočarou cestu pro výpočet entropie provázání a jsou kolektivní, což vede na jednoduchou realizaci klasické limity. Proto jsme je zvolili pro hledání a studium QMBS.

V první kapitole představujeme chaos v klasickém i kvantovém případě a dáváme zde extra důraz na části, které jsou relevantní pro kontext jizvení. V druhé kapitole práce uvádíme zmínky o kvantovému jizvení v odborných pracích. Nejprve stručně představujeme jednočásticové jizvy. Dále zavádíme ETH a představíme QMBS jako jeho přímé narušení. Věnujeme samostatné podkapitoly konkrétním QMBS na výše zmiňovaných P \times P a Dickeho modelech. V poslední kapitole sestavujeme dva a vícenásobné Lipkinovy modely, na které aplikujeme výše popsané metody pro nalezení a studium QMBS. Kromě těchto metod také na Peresových mřížích ukážeme, že stavy, které jsme identifikovali jako QMBS nám přímo narušují předpovědi ETH.

1. Chaos

Chaos v klasické fyzice označuje jev v nelineárních systémech, kdy malá odchylka od počátečního stavu vede na exponenciálně velkou odchylku po časovém vývoji. O chaotických systémech tedy říkáme, že jsou citlivé na počáteční podmínky. V důsledku této citlivosti není možné předpovídat vývoj systému bez přesné znalosti počátečních podmínek. Zájem o studium chaotických systému nastartoval Edward Lorenz, když při jeho simulacích počasí začal dostávat extrémně odlišné výsledky, na základě toho jestli zaokrouhlil vstupní data na tři nebo pět desetinných míst. V populárních textech se citlivost na počáteční podmínky označuje pojmem „efekt mávnutí motýlích křídel“, neboť stabilita počasí byla populárně redukována na otázku, zda mávnutí motýlích křídel může způsobit hurikán na opačné straně zeměkoule.

V kvantovém případě máme čistě lineární systém. V kvantovém systému není možné dosáhnout exponenciálního růstu odchylky dvou různých počátečních stavů. Proto nemůžeme zavádět kvantový chaos stejným způsobem jako v případě klasickém. Kvantově chaotickými nazveme systémy, které mají korelované fluktuační hladiny spektra. Tyto korelace se projevují jako „odpuzování hladin“. V regulárních (ne-chaotických) systémech jsou hladiny rozděleny náhodně zatímco v chaotických systémech je rozdělení podobné rozdělení vlastních čísel náhodných matic.

I když se zdá, že klasický a kvantový chaos jsou dva naprosto odlišné jevy, tak jde najít několik souvislostí. V klasickém i kvantovém případě lze dokázat, že pokud je systém integrabilní, tak nemůže být chaotický. A pokud provedeme klasickou limitu kvantově chaotického systému, tak dostaneme systém, který je klasicky chaotický¹. Kvůli rozdílům v definici chaosu v klasickém a kvantovém případě Michael Berry navrhl označovat kvantový chaos pojmem kvantová chaologie (Berry, 2006).

1.1 Klasický chaos

Kolem studia klasického chaosu vznikl matematický a fyzikální obor zvaný teorie chaosu. Teorie chaosu studuje časový vývoj dynamických systémů, tedy i to jak se projevují změny počátečních podmínek po vývoji systému v dlouhém čase. Začátek tohoto oboru se připisuje J. H. Poincarému, který studoval dynamiku nebeských těles. Poincaré ukázal na to, že při studii tří hmotných těles není možné používat poruchové teorie pro vývoj podobných systémů. I přes to, že Poincaré nepoužíval termín chaos, tak se jeho práce na problému tří těles považuje za počátek teorie chaosu. (Poincaré a Popp, 2017)

Hlavním příznakem chaotičnosti systému je citlivost na změnu počátečních podmínek. Po chaotických systémech požadujeme, aby maximální odchylka mezi dvěma trajektoriemi rostla exponenciálně. Exponentu v takto nalezené exponenciále se říká Lyapunův exponent. Tyto exponenty slouží jako jednoduchý způsob jak kvantitativně odlišit chaotické systémy od regulárních.

¹Existují i výjimky, kdy po klasické limitě chaotického systému dostaneme regulární systém. Například Šebův billiard, který vznikne když pro Sinajův billiard pošleme poloměr kruhové hranice uprostřed do nuly (Šeba, 1990).

1.1.1 Definice chaosu

Obecně za chaotický systém označíme každý dynamický systém, který je citlivý na počáteční podmínky s určitými dodatečnými podmínkami.

Definice 1 (Dynamický systém). *Dynamický systém je tvořený fázovým prostorem bodů x a funkcí $F_x(t)$, která popisuje vývoj bodu x v čase t .*

Body x jsou zde vektory, které nesou celou informaci o stavu námi popisovaného systému. V této práci budeme používat operátorový zápis $\hat{F}(t)x = F_x(t)$, který přiřadí každému bodu jeho hodnotu po časovém vývoji.

Pro rigorózní definici použijeme definici, kterou zavedl Robert Luke Devaney (Devaney, 2021). Tato definice vyžaduje aby systém splňoval následující vlastnosti:

1. Citlivost na počátečních podmínkách
2. Topologická tranzitivita
3. Husté periodické orbity

Devaneyho definice popisuje chaos na uzavřených dynamických systémech a klade zde silnější požadavky než jen citlivost na počátečních podmínkách. Devaneyho definice je nejčastěji uváděná v literatuře, a proto ji představíme i v této práci.

Citlivost na počátečních podmínkách

Definice 2 (Trajektorie). *Nechť máme dynamický systém popsáný operátorem časového vývoje $\hat{F}(t)$ a bod x na fázovém prostoru. Trajektorii bodu x pak nazveme křivku, kterou dostaneme působením $\hat{F}(t)$ na x . Značíme $\gamma_x(t) = \hat{F}(t)x$*

Body x chápeme jako vektory na fázovém prostoru. Například u dynamických billiardů budou složky x , souřadnice polohy a směr hybnosti. Ve 2D billiaru můžeme popsat fázový prostor pomocí dvou souřadnic polohy a úhlu, který popisuje směr hybnosti. Díky jednoznačnosti časového vývoje, nám každý bod fázového prostoru leží na právě jedné trajektorii. Jinými slovy nám každý bod x na fázovém prostoru definuje trajektorie jednoznačně.

Trajektorii bodu, který je o malé Δ vzdálený od x pak značíme $\gamma_{x+\Delta}(t)$.

Definice 3 (Citlivost na počátečních podmínkách). *Systém nazveme citlivým na počáteční podmínky, pokud pro skoro všechna x a skoro všechna Δ platí, že $\sup(|\gamma_x(t) - \gamma_{x+\Delta}(t)|) \sim e^{\lambda t}$ pro t větší než nějaké t_0 .*

Zde λ je výše zmiňovaný Lyapunův exponent. Supremum $\sup(|\gamma_x(t) - \gamma_{x+\Delta}(t)|)$ chápeme jako maximální vzdálenost trajektorií, přes body z blízkého okolí bodu x . Tahle definice nám dává možnost citlivost na počátečních podmínkách dobře definovat i pro systémy, které jsou omezené. Za omezené nazveme systémy, které mají konečné fázové prostory. V případě omezených systémů, hledáme exponenciální růst odchylky zmenšováním Δ za fixního maxima t .

Skoro všude v definici znamená, že to platí pro všechna x a $x + \Delta$ až na množinu míry nula. Například dva periodické trajektorie se často nemusí od sebe vzdalovat exponenciálně (například na Bunimovichově stadionu, rovnoběžné trajektorie kolmé na část bez křivosti nikdy nenarazí na zakřivenou hranici, a tak v

tomto velmi specifickém případě nemůžeme pozorovat exponenciální vzdalování).

Topologická tranzitivita

Topologická tranzitivita nám v systému zaručuje perfektní promíchání. Konkrétně abychom o systému řekli, že je topologicky tranzitivní, tak musí časový vývoj každé podmnožiny v systému projít skoro celým systémem.

Definice 4 (Topologická tranzitivita). *Systém nazveme topologicky tranzitivní, pokud pro každé dvě otevřené podmnožiny fázového prostoru A a B existuje nějaké t takové aby: $\hat{F}(t)A \cap B \neq \emptyset$*

Husté periodické orbity

Definice 5 (Periodická orbita). *Pokud pro trajektorii γ_x existují t_1, T takové, že $T \neq 0$ a $\gamma_x(t_1) = \gamma_x(t_1 + T)$, pak o jí nazveme periodickou orbitou.*

O systému řekneme, že má husté periodické orbity pokud na libovolně malém okolí libovolného bodu fázového prostoru můžeme najít periodickou orbitu.

Vlastnosti z definice chaosu nejsou na sobě nezávislé. V různých systémech se dají ukazovat ekvivalence nebo implikace mezi těmito vlastnostmi. Lze demonstrovat například jak z hustě zastoupených periodických orbit a topologické tranzitivity můžeme vyvodit citlivost na počátečních podmínkách (Vellekoop a Berglund, 1994). Na libovolně malé podmnožině systému jsme schopni najít dvojici bodů takovou, že po uplynutí určitého času t , jeden bod se vrátí do počátku a druhý skončí v libovolné části systému. Analogické tvrzení platí i pro časovou inverzi systému, na libovolné podmnožině systému v čase t máme body, které pochází s libovolné části systému.

V praxi se většinou setkáváme s systémy, které nejsou chaotické na celém fázovém prostoru, ale pouze na nějaké jeho podmnožině. Jde zejména o systémy s malým počtem stupňů volnosti. Příkladem mixovaného systému je třeba tzv. „Mushroom“ billiard, který obsahuje jak chaotické tak regulární části fázového prostoru. O chaosu pak mluvíme v kontextu chaotičnosti jednotlivých trajektorií a ne celého systému. Trajektorii pak nazveme chaotickou, pokud na jejím arbitrárně blízkém okolí splňují výše zmíněné podmínky chaotičnosti. Chaotické trajektorie nazveme jako nestabilní. Regulární trajektorie pak nazýváme jako stabilní.

1.1.2 (Ne)Integrabilita systémů

Při diskuzi chaotičnosti systémů je nutné zmínit pojem integrability. Jak v klasickém tak v kvantovém případě se integrabilita a chaotičnost systému navzájem vylučují. V integrabilních systémech jsou skoro všechny trajektorie stabilní. Systém je integrabilní, pokud máme právě tolik integrálů pohybu, kolik je stupňů volnosti v systému. Integrabilitu systému popsáno hamiltoniánem $H(x)$, studujeme pomocí Poissonových závorek.

Definice 6 (Poissonova závorka). *Poissonova závorka je operátor působící na 2 funkce $A(x), B(x)$ následujícím způsobem:*

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}. \quad (1.1)$$

x je zde bod fázového prostoru jako výše. Komponenty x rozdělíme na zobecněné polohy a k nim sdružené hybnosti q_i a p_i , $i = 1, \dots, N$. N je zde počet zobecněných poloh nebo hybností. Dimenze fázového prostoru bude $2N$

Definice 7 (Integrál pohybu). *Mějme dynamický systém popsaný hamiltoniánem $H(x)$, pak o funkci $A(x)$ řekneme že je integrálem pohybu, právě pokud je Poissonova závorka H a A rovna nule*

$$\{A, H\} = 0. \quad (1.2)$$

Definice 8 (Integrabilní systém). *Systém s hamiltoniánem $H(x)$ nazveme integrabilní pokud má N nezávislých integrálů pohybu $I(x)_i$, které splňují:*

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad (1.3)$$

kde N je počet stupňů volnosti.

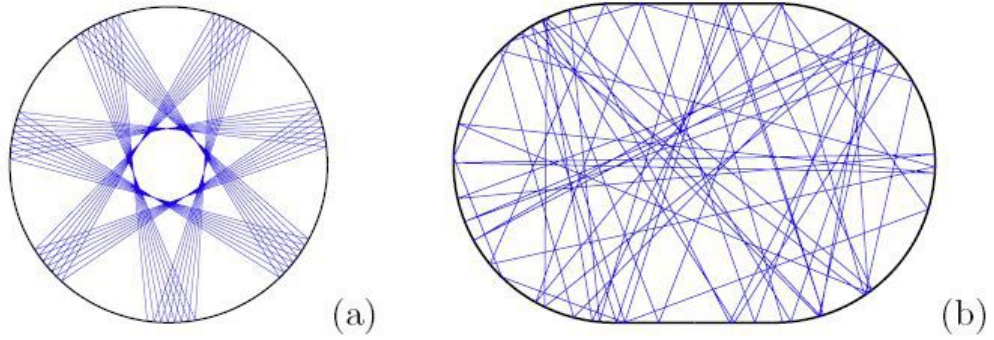
Samotný hamiltonián časově nezávislých systémů je vždy jedním integrálem pohybu, a proto dostáváme chaotické chování až na systémech s $N \geq 2$.

1.1.3 Dynamické billiardy

Jako častá ukázka klasicky chaotického systému se uvádí pohyb bodu na tzv. dynamických billiardech. Jde o idealizovanou situaci, kde máme volně pohybující se částici na ohraničeném prostoru. Při kontaktu s hranicí dojde k dokonalému odrazu bez ztráty energie a pod stejným úhlem jako by se odrazilo světlo od zrcadla. V hamiltonovkém formalismu máme potenciální energii rovnou nule pro celý billiard kromě hranic, kde je potenciální energie nekonečná. Pro popis trajektorie částic na dynamických billiardech nám stačí znát pouze polohu částice a rychlost normovanou na jednotkový vektor. Veličiny jako energie a velikost rychlosti nám udávají pouze časovou škálu, ale nemění trajektorie. Fázové prostory dynamických billiardů jsou pak prostory pouze pozic a těchto normovaných rychlostí. Tyto fázové prostory jsou jednoznačně určeny tvarem hranice.

Dynamické billiardy jsou jednoduché modely jak integrabilních (regulárních) tak chaotických dynamických systémů. Kruhové a eliptické billiardy jsou častým příkladem integrabilního dynamického systému. Dále pak billiardy bez zakřivených hranic jsou také integrabilní. Chaotické billiardy jsou často komplikovanější. Klasicky uváděným příkladem chaotického je Bunimovičův stadion, který vzniká rozpulením kruhu a přidáním rovných hranic mezi kruhy (Bunimovich, 2007). Dalším klasickým příkladem chaotického billiardu, se kterým se často setkáváme při studiu chaosu je Sinajův billiard, který vznikne přidáním kruhové hranice do středu čtvercové hranice.

Na dynamických billiardech lze sestavit i systém, který má jak chaotickou tak regulární část fázového prostoru. Takovým příkladem je tzv "mushroom billiard" (houbový billiard), který se skládá z půlkruhové hranice která je spojená



Obrázek 1.1: Dynamické billiardy. (Stöckmann, 2010)
 (a) Příklad integrabilního billiáru. Hranici tvoří kružnice
 (b) Bunimovičův stadion: příklad chaotického billiáru

s čtvercovou hranicí. V takovémto billiaru jsou trajektorie, které neuniknou z půlkruhové části regulární a ty ostatní chaotické (Bunimovich, 2001).

Pohyb částice na billiardech můžeme řešit i kvantově, kde potom nacházíme kvantovou analogii k klasickému chaosu. Pohyb kvantové částice na Sinajově billiaru vykazuje spektrální statistiky, které nazýváme kvantovým chaosem (Bohigas a kol., 1984), který popíšeme v nadcházející kapitole. Modely billiáru nám propojují chaos v klasické a kvantové dynamice. A termín kvantových jizev se zavedl na studii lokalizace vlastních stavů na Bunimovičově stadionu (Heller, 1984).

1.2 Kvantový chaos

Kvantová evoluce se řídí Schrodingerovou rovnicí, která je čistě lineární. Linearita časové evoluce Schrodingerovy rovnice neumožňuje exponenciální růst odchylky dvou stavů. Mějme systém s operátorem časového vývoje $\hat{U}(t)$ a dva různé stavy $|\psi(1)\rangle$ a $|\psi(2)\rangle$. Vývoj v odchylky těchto dvou stavů je pak dán následující rovnicí:

$$|\hat{U}(t)|\psi(1)\rangle - \hat{U}(t)|\psi(2)\rangle| = ||\psi(1)\rangle - |\psi(2)\rangle| \quad (1.4)$$

Díky unitaritě operátoru $\hat{U}(t)$ nemůžeme zavést chaos v kvantové mechanice stejným způsobem jako v klasickém případě.

Chaos v kvantové mechanice se dá zavádět několika způsoby, pro tuto práci představíme zavedení chaosu na základě spektrální statistiky. Takovéto zavedení chaosu má tu výhodu, že lze provádět i pro systémy bez klasické limity. Nevýhodou tohoto přístupu je to, že nemůžeme připisovat chaotičnost každé energetické hladině zvlášť jako u trajektorií v klasickém případě. Stejně jako v klasickém případě budeme dostávat smíšené systémy, které mají jak chaotické tak regulární části. V některých případech mohou být smíšená spektra i přeložená přes sebe (Percival, 1973).

Systémy nazveme chaotické, pokud budou jejich spektrální statistiky podobné statistice náhodných matic. V této části práce představíme základní metody pro

klasifikaci kvantového chaosu na základě krátkodosahových fluktuací ve spektru. Budeme studovat korelace fluktuací v unfoldovaném spektru na statistice rozdílů nejbližších sousedů (NNS – Nearest Neighbour Spacing).

Definice 9 (rozdíly nejbližších sousedů NNS a NNSD). *Mějme energetické hladiny spektra seřazené podle velikosti E_i . Pak rozdíly nejbližších sousedů NNS jsou:*

$$s_i = E_{i+1} - E_i \quad (1.5)$$

Rozdělení NNSD je potom hustota pravděpodobnosti nálezu hodnoty NNS $P(s_i)$ unfoldovaného spektra.

Definice 10 (Unfolding). *Hustotu hladin značíme $\rho(E_i)$. Lze si tuto hustotu napsat jako součet hladké $\bar{\rho}(E)$ a oscilující $\tilde{\rho}(E)$ části.*

$$\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \tilde{\rho}(E) \quad (1.6)$$

Nejčastějším způsobem provedení unfoldingu je fit kumulativní distribuční funkce hustoty $\rho(E)$ polynomem $p(E)$. Unfoldované spektrum E' pak dostáváme jako:

$$E'_i = p(E_i) \quad (1.7)$$

Pro unfoldované spektrum E' platí $\bar{\rho}(E')' = 1$, takže nám v spektrální statistice zbývají pouze lokální fluktuace. Unfolding provádíme především, pokud chceme pracovat s velkou částí spektra. Pokud se díváme pouze na nějakou lokální část spektra, tak budou příspěvky fluktuací dominantní a pokud každou část spektra nanormujeme, aby byla splněna podmínka $\bar{\rho}(E) = 1$, tak se můžeme obejít bez unfoldingu. Přeskočení unfoldingu může vést na nepřesnosti, především pro okrajové hodnoty spektra, kde se hladká část nejvýrazněji liší od lineární funkce.

1.2.1 Náhodné matice

Teorie náhodných matic (Random Matrix Theory RMT) dobře modeluje řadu jevů v matematice a fyzice. Ve fyzice se začátek využívání náhodných matic připisuje E. Wignerovi, který s nimi modeloval neutronové rezonance u těžkých atomových jader. Později Wigner předpověděl, že se spektra chaotických kvantových systémů budou podobat těm u náhodných matic. (Wigner, 1955). Budeme se věnovat maticím z Gaussovských souborů (Gaussian ensemble).

Gaussovský soubor označuje náhodné matice, kde každý element matice je vygenerován z Gaussova rozdělení. Dále jsou gaussovské soubory rozdělené podle transformace vůči kterým jsou tyto soubory invariantní. Máme tři soubory *GOE* (Gaussian Orthogonal Ensemble), *GUE* (Gaussian Unitary Ensemble) a *GSE* (Gaussian Symplectic Ensemble), tyto soubory se pak projevují jako symetrie v těchto maticích a odpovídají symetriím v simulovaných kvantových systémech. Ke každému souboru máme NNSD spektra danou příslušným Wigner-Dysonovým rozdělením.

Definice 11 (Invariance souborů vůči transformaci). *Invarianci souborů X vůči transformaci maticí H chápeme tak, že pokud se transformuje matice G :*

$$G \in X \quad HGH^{-1} = G' \in X, \quad (1.8)$$

pak je pravděpodobnost na vygenerování matice G a $G' \in X$ stejná.

Definice 12 (Gausovský ortogonální soubor (*GOE*)). Soubor *GOE* tvoří matice, kde je každý element matice vygenerován pomocí normálního rozdělení a výsledný soubor je invariantní vůči transformaci:

$$G \in GOE \quad OGO^{-1} = G' \in GOE, \quad (1.9)$$

kde O je libovolná ortogonální matice. Rozdělení NNS spektra matic souboru je pak dáno Wigner-Dysonovým rozdělením pro $\beta = 1$:

$$P_W^{\beta=1}(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2}. \quad (1.10)$$

Tato forma ($\beta = 1$) rozdělení se nazývá jednoduše Wignerovo rozdělení.²

Invariance vůči ortogonálním transformacím omezuje soubor *GOE* na reálné symetrické matice. Matice ze souboru *GOE* se používají k modelování kvantových systémů s časovou inverzí. Analogicky k *GOE* nám invariance vůči unitárním transformacím soubor omezuje možné matice na komplexní hermitovské matice. Souborem *GUE* pak modelujeme systémy bez časové inverze. Nakonec soubor *GSE* je tvořen samosdruženými maticemi s kvaternionovými elementy. V praxi se s nimi moc často nesetkáváme.³ Modelují se podle nich systémy s poločíselným spinem, které mají časovou invarianci, ale nejsou rotačně invariantní.

Regulární spektra mají nekorelované fluktuace ve spektru. Takováto spektra můžeme generovat jednoduše generováním náhodných čísel pomocí uniformního rozdělení. Distribuce hodnot NNS regulárního spektra je pak dána exponenciálním rozdělením $P(s) = e^{-s}$. V kontextu kvantového chaosu se toto rozdělení Poissonovo rozdělení a pro účely této práce ho budu také nazývat Poissonovo rozdělení.

1.2.2 Měření chaotičnosti kvantových systémů

Pro stanovení zda je část spektra kvantového systému chaotická, nebo regulární porovnáváme spektrální statistiku NNS se statistikou NNS náhodných matic. Nejčastější metoda kvantifikace této podobnosti je fit NNSD unfoldovaného spektra Brodyho rozdělením. Brodyho rozdělení je rozdělení, které spojitě přechází mezi Poissonovým rozdělením (pro čistě regulární spektra) a Wignerovým rozdělením (pro čistě chaotické spektra).

Definice 13 (Brodyho rozdělení).

$$P_B(s, \omega) = (\omega + 1) N_\omega s^\omega e^{-N_\omega s^{(\omega+1)}}, \quad (1.11)$$

kde N_ω je

$$N_\omega = \left[\Gamma\left(\frac{\omega + 2}{\omega + 1}\right) \right]^{(\omega+1)} \quad (1.12)$$

²Rozdělení bylo odvozeno pro 2x2 matice, ale s velkou přesností platí i pro *GOE* s libovolnou velikostí. Aby však správně popisovalo NNS na větších maticích musíme provést více popsany unfoldingu, která nám redukuje statistiku ve spektru pouze na lokální oscilace

³Experimentálně byla spektra, které dobře modeluje soubor *GSE* naměřena až nedávno. (Rehemanjiang a kol., 2016)

a ω se nazývá Brodyho parametr. Pro hodnoty $\omega = 1$ dostáváme přesně Wignerovo rozdělení jak bylo zavedeno výše. Pro $\omega = 0$ dostaneme Poissonovo rozdělení pro regulární spektra. Naměření Brodyho parametru mezi nulou a jednou v spektru můžeme interpretovat jako to, že je spektrum smíšené.

Pro měření chaotičnosti systému existují i jiné metody. Například existují metody, které se dívají nejen na korelace v rozdílech nejbližších sousedů ve spektru, ale dívají se i na vzdálenější energie ve spektru. Další možností je se dívat na podíl následujících hodnot v NNS spektra, což lokálně normalizuje každou hodnotu a odstraní nutnost provádění unfoldingu. V této práci budu používat zjednodušenou metodu, která přeskočí fit Brodyho rozdělením a porovná rozptyl rozdělení části NNS spektra s rozptylem Poissonova a Wignerova rozdělení následujícím způsobem (García-Ramos a kol., 2017):

$$\eta = \frac{\sigma_{NNS}^2 - \sigma_W^2}{\sigma_P^2 - \sigma_W^2}, \quad (1.13)$$

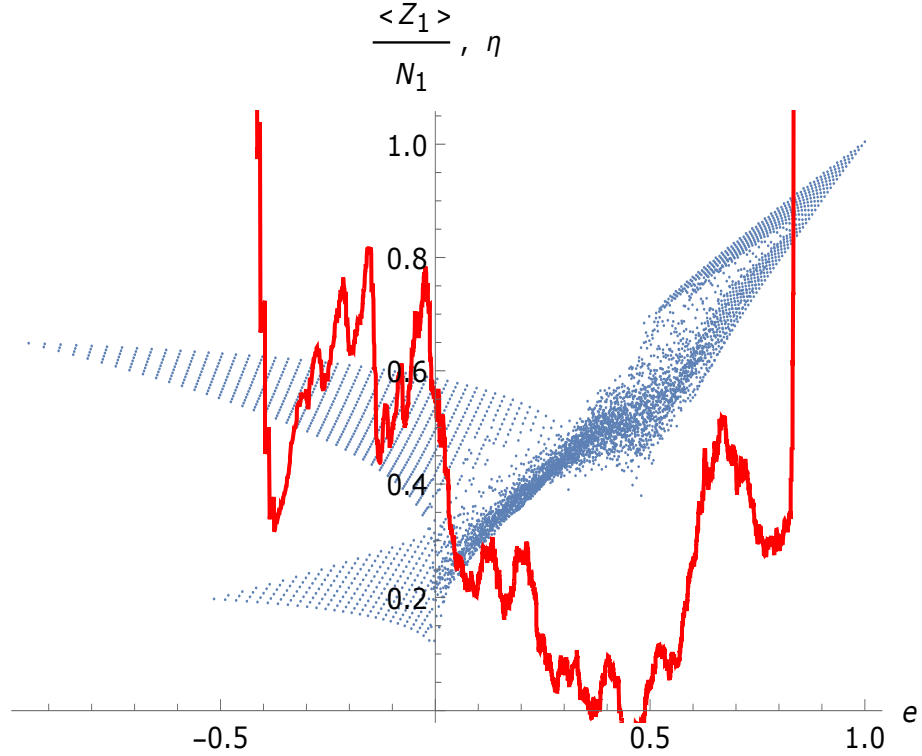
kde σ_{NNS}^2 je rozptyl normalizovaného NNS studované části spektra, $\sigma_P^2 = 1$ je rozptyl Poissonova rozdělení a $\sigma_W^2 = (\frac{4}{\pi} - 1)$ je rozptyl Wignerova rozdělení. Po dosazení pak dostaneme:

$$\eta = \frac{\sigma_{NNS}^2 - (\frac{4}{\pi} - 1)}{1 - (\frac{4}{\pi} - 1)} \quad (1.14)$$

Přeškálování NNS je provedeno lokálně aritmetickým průměrem pro každý studovaný interval. Takto zavedené η funguje jako rychlá statistika, která je schopná detekovat, ve které části spektra je chaos. Pro $\eta = 1$ je $\sigma_{NNS}^2 = \sigma_P^2 = 1$, což znamená, že se spektrální statistika podobá poissonovské, a tudíž je část spektra regulární. Pro $\eta = 0$ dostáváme $\sigma_{NNS}^2 = \sigma_W^2 = (\frac{4}{\pi} - 1)$, což značí podobnost wignerovské statistice, a tedy chaotičnost této části spektra.

1.2.3 Peresovy mříže

Peresovy mříže (Peres, 1984) jsou užitečná metoda jak vizuálně identifikovat chaotické části spekter. Do grafů vykreslujeme závislost střední hodnoty arbitrarní pozorovatelné v závislosti na energii daného vlastního stavu. Pro integrabilní části spektra budou mít takovéto grafy podobu uspořádané mříže, zatímco v chaotických částech spektra se body hromadí a nelze rozpoznat strukturu daná nějakými kvantovými čísly jiných integrálů pohybu než energie.



Obrázek 1.2: Příklad Peresovy mříže (modré body) proložené mírou chaotičnosti η (červená čára), viz rovnice (1.13)).

Metoda je založená na Einstein-Brillouin-Kellerově (EBK) kvantování integrabilních systémů. Máme systém s k stupni volnosti a k integrály pohybu I_k . Můžeme zde pro tyto integrály pohybu zavést kvantová čísla jako střední hodnoty těchto integrálů pohybu ve vlastních stavech. Střední hodnoty $\langle \psi(t) | I_k | \psi(t) \rangle = \hbar n_k$, kde n_k budou kvantová čísla. Pokud si vykreslíme graf, kde na osách budou středních hodnoty jednotlivých integrálů pohybu a body jsou stavy dané kvantovými čísly n_k . Tak nám tento graf dá perfektní mříž.

V těchto integrabilních systémech je pak arbitrarní operátor pozorovatelné dostatečně hladkou funkcí integrálů pohybu. Pokud vykreslím závislost středních hodnot pozorovatelné na energii, tak dostaneme spojitě deformovanou verzi výše zmiňované mříže. Jsou zde stále vidět pravidelné struktury dané hladkou závislostí na rovnoměrně rozdělených kvantových číslech.

V chaotických částech systému pak tyto struktury nejsou. Neexistuje dostatečný počet nezávislých integrálů pohybu pro zachování struktur. Odhad pro chování středních hodnot operátorů v chaotických systémech popíšeme pak v kapitole o termalizaci vlastních stavů (ETH), která nám předpovídá tyto střední

hodnoty jako funkce energie a pseudonáhodné odchylky. Na Peresových mřížích je to pak vidět jako hromadění kolem nějaké hladké funkce dané energií.

U smíšených spekter jsou tyto Peresovy mříže částečně nabourány a můžeme pozorovat nějaké pozůstatky regulární struktury. Tyto pozůstatky mříží nám ukazují, že by se v této části systému mohly nacházet pozůstatky integrálů pohybu.

2. Kvantové jizvení

V této kapitole představíme pojem kvantového jizvení v jak jednočásticovém případě, tak v tom mnohočásticovém. Nejprve zavedeme pojem termalizace vlastních stavů (ETH), který vylepšuje odhady z RMT. Mnohočásticově zjizvené stavy potom budou stavy takové, které se výrazně odlišují od předpovědi ETH.

Kvantové jizvení je jev, který nastává v chaotických kvantových systémech. Tento termín pochází ze studie semiklasických jednočásticových systémů, kde po vykreslení vlnové funkce v některých stavech byla výrazně vyšší hustota pravděpodobností podél nestabilních periodických trajektorií v klasickém analogu.

I přes absenci klasické analogie v mnohočásticových systémech se dá pojem kvantových jizev zavést. Jak v jedno tak více částicových systémech je pojem kvantových jizev spojený se stavy uprostřed chaotického spektra, které mají necharakteristické chování, připomínající regulární stavy a jsou dobře lokalizované¹ na fázovém prostoru.

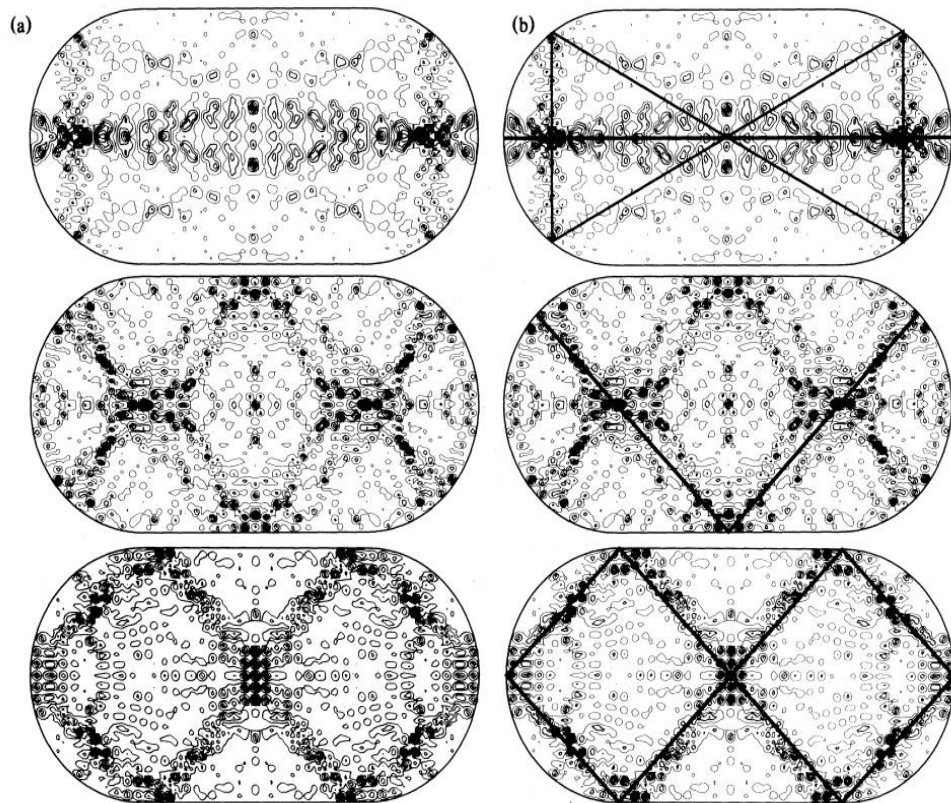
2.1 Jednočásticové kvantové jizvy

Pojem kvantového jizvení byl zaveden na základě nečekané lokalizace vlastních stavů při studiu semi-klasické limity $\hbar \rightarrow 0$ na dynamickém billiárdu, konkrétně Bunimovičově stadionu (Heller, 1984). Vzhledem k chaotičnosti systému v klasickém případě bychom podle předpovědi RMT (D'Alessio a kol., 2016) čekali, že stavy budou náhodně rozdělené bez žádné viditelné lokalizace. Pro některé vlastní stavy byla pozorována výrazná lokalizace kolem klasických nestabilních periodických orbit. Tyto stavy byly nazvány jizvami.

Definice 14 (Kvantová jizva (jedno-částicová)). *Vlastní stav nazveme jizvou periodické orbity pokud: Hustota pravděpodobnosti tohoto vlastního stavu je výrazně vyšší než udává statistická předpověď RMT. (Kaplan a Heller, 1998)*

Nebo analogicky nestabilní periodickou orbitu nazveme za zjizvenou pokud lze kolem ní najít nečekaně lokalizovaný vlastní stav. Označení jednočásticová kvantová jizva se používá jak pro stavy, které se lokalizují kolem nestabilních periodických orbit tak pro tyto orbity kolem, kterých se lokalizuje jeden nebo více vlastních stavů.

¹Lokalizace veličiny je zvýšená hodnota měřené veličiny na malé části prostoru, kde veličinu měříme oproti zbytku prostoru. Zde konkrétně jde o vyšší hustotu pravděpodobnosti kolem nestabilních periodických orbit. Viz obrázek 2.1



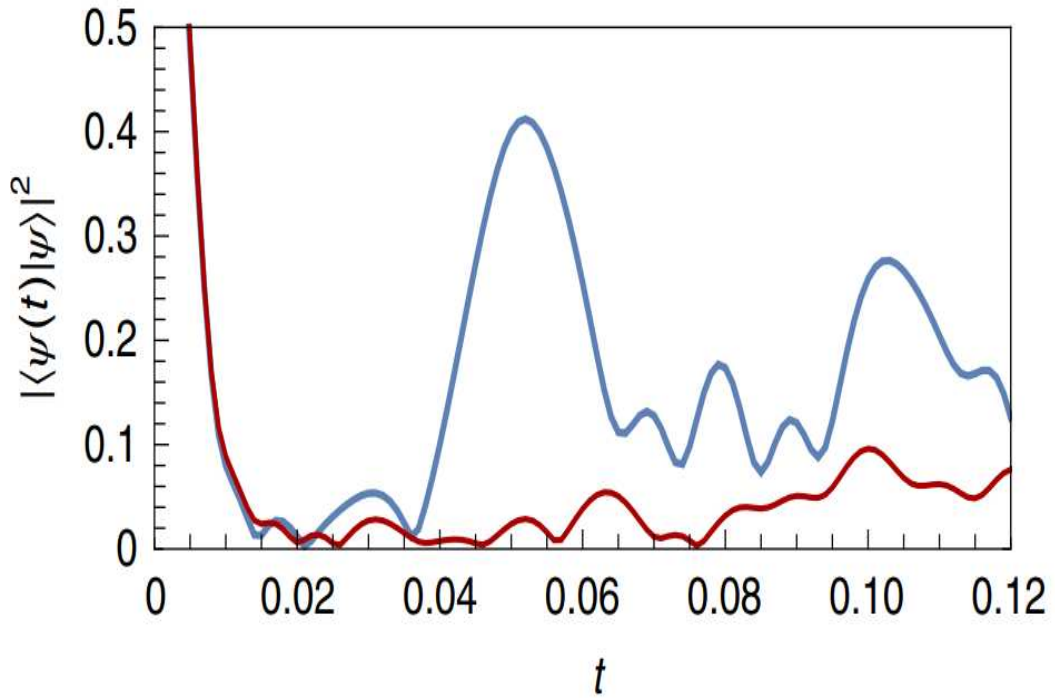
Obrázek 2.1: Jednočásticové jizvy na Bunimovičově stadionu (Heller, 1984)

(a) Hustota stavů na stadionu

(b) Zvýrazněné periodické orbity proložené čarou pro ilustraci. (Stejný obrázek jako v (a) s zvýšeným kontrastem pro lepší čitelnost)

Jednou z vlastností jednočásticových jizev je odolnost vůči časovému vývoji. Pokud sestavíme gaussovský vlnový balík $|g\rangle$ kolem zjizveného stavu, tak při studiu překryvu časově vyvinutého balíku s balíkem v čase nula $\langle g(0)|g(t)\rangle$ vidíme, periodické návraty s upadající amplitudou (Heller, 1984), jako na obrázku 2.2. Zatímco pro balíky u nezjizvených stavů vidíme rychlý pád k nule bez jakýchkoliv návratů.

Další metody jak popisovat jednočásticové jizvy jsou popsány v (Kaplan a Heller, 1998). Zejména "Linear Scar Theory", která popisuje semiklasický přístup k časovému vývoji v linearizované aproximaci a Husimiho projekci, která kvantifikuje zjizvené stavy integrací přes podprostor tvořený trubici kolem zjizvené periodické orbity. Tyto metody se aplikují i na vlnové balíky sestavené ze stavů s vysokou projekcí na tyto nestabilní periodické orbity.



Obrázek 2.2: Fidelita $|\langle g(0)|g(t)\rangle|^2$ na Bunimovičově stadionu. Modře gaussovský balík kolem zjizveného stavu, červeně náhodný stav po krátkém čase. U zjizveného stavu vidíme výrazný návrat. (Serbyn a kol., 2021)

2.2 Mnohočásticové kvantové jizvy

Na rozdíl od jednočásticových systémů v mnohočásticových systémech nejde jednoduše zavést analogii ke klasickým trajektoriím. Poprvé se termín mnohočásticových kvantových jizev (Quantum Many Body Scars), dále jen QMBS, použil pro popis dlouho přežívajících revivalu na simulaci 51-Rydbergových atomů (Bernien a kol., 2017). Revivaly jsou periodické návraty k původní vlnové funkci po časovém vývoji. Tyto revivaly jsou v rozporu s hypotézou termalizace vlastních stavů (ETH), která nám dává velmi dobrý odhad pro popis kvantově chaotických systémů. ETH shrneme v následující kapitole. Tento systém by popsán pomocí PxP modelu. PxP model se tak stal učebnicovým příkladem pro studium QMBS. Na těchto modelech byly objeveny další vlastnosti kvantově zjizvených stavů. Nejlepší metodou pro identifikování stavu jako QMBS je studium entropie provázání jednotlivých stavů. Zjizvené stavy mají entropie provázání podobné regulárním stavům i přes to, že leží v chaotické části spektra. Jedinečnost zjizvených stavů nám dobře demonstruje tabulka 2.1:

Článek (Moudgalya a kol., 2022) kromě jizev studuje i další narušení ETH. Pro nás jsou v tabulce důležité jen ergodické, integrabilní a QMBS stavy. Rozdělení ETH na silné/slabé značí jestli ETH platí pro všechny, nebo skoro všechny stavy v termodynamické limitě ². Pro QMBS zde máme množinu míry nula ³,

²Termodynamická limita je limita, která popisuje mnohočásticové systémy, kdy držíme konstantní hustotu počtu částic N/V a pošleme obsah prostoru do nekonečna $V \rightarrow \infty$.

³Množina míry nula zde znamená, že zatímco celkový počet stavů roste s obsahem V , tak počet stavů QMBS roste pomaleji a pro limitu $V \rightarrow \infty$ je zanedbatelný.

System	Silné/Slabé ETH	Provázání	Statistika hladin
Ergodické	Ano/Ano	Obsah	Wigner-Dyson
Integrabilní	Ne/Ne	Obsah/Pod-Obsah	Poisson
MBL	Ne/Ne	Plocha	Poisson
QMBS	Ne/Ano	Obsah/Pod-Obsah	Wigner-Dyson
Silně fragmentovaný	Ne/Ne	Obsah/Pod-Obsah	Poisson

Tabulka 2.1: Taxonomie stavu z článku (Moudgalya a kol., 2022)

kteřá narušuje ETH, a proto platí pouze slabě. Kolonka provázání značí s jakou veličinou je přímoúměrná entropie provázání. Nakonec je uvedena statistika hladin rozlišuje zda jsou tyto stavy v chaotické nebo regulární části spektra, tak jak jsme to představili v předchozí kapitole.

Z tabulky 2.1 je vidět, že se dají QMBS uprostřed chaotického spektra jednoduše identifikovat pomocí entropie provázání. Regulární stavy se chovají jako integrabilní a chaotické se chovají jako ergodické. QMBS pak vyčnívají jako stavy uprostřed chaotického spektra, které mají entangelemnt entropii srovnatelnou s regulárními stavy.

Kromě těchto metod identifikace QMBS ještě v této práci představíme metodu použitou v článku (Pilatosky-Cameo a kol., 2022), která k systému přiřadí semiklasický fázový prostor a ukazuje, že QMBS jsou na tomto prostoru lokalizované kolem nestabilních periodických orbit. Tato lokalizace také jde proti předpovědím ETH.

Většina článku identifikuje jizvy jako nějaký speciální nevlastní stav který narušuje předpovědi ETH. Například v PxP modelu, který popíšeme dále v této kapitole se za kvantovou jizvu označuje Néelův Z_2 stav, který má strukturu, kde se na řetízku stále opakuje excitovaná (+) a neexcitovaná (−) částice v této formě: (+ − + − + − + −). Metody, které hledají vlastnosti jizev na vlastních stavech, nám pak vybírají ty stavy, které mají výraznou projekci na zjizvené stavy.

Stavy QMBS definuju jako malý počet chaotických stavů, které se signifikantně odlišují od předpovědi ETH. Pro jejich identifikaci použijeme zejména entropii provázání.

V této práci představíme aplikaci metod pro identifikaci jizev bez nutnosti znalosti stavů, které vykazují speciální symetrie v systému. Budeme se zaměřovat na studium vlastních stavů, což nám neumožní klasifikaci jizev na základě periodických revivalů. Takovéto QMBS se v člancích nazývají izolované QMBS.

2.2.1 Hypotéza termalizace vlastních stavů (ETH)

Hypotéza termalizace vlastních stavů (Eigenvector Thermalization Hypothesis) dále jen ETH je teorie inspirovaná statistickou mechanikou, která vylepšuje předpovědi RMT časových středních hodnot lokálních operátorů o hladkou funkci závislou na energii. ETH je snaha o vytvoření kvantové analogie k termalizaci v klasických případech. Systémy, kde platí ETH, se v analogii s klasickým případem nazývají Ergodické, viz tabulka 2.1. Zpravidla jde o kvantové chaotické systémy.

Definice 15 (Hypotéza termalizace vlastních stavů (ETH)). *ETH je předpověď chování časové střední hodnoty libovolné pozorovatelné \hat{O} s libovolným počátečním stavem $|\psi(0)\rangle$. Uvažujme časový vývoj v Schrodingerově obraze $|\psi(t)\rangle =$*

$\text{Exp}(\frac{-iHt}{\hbar})|\psi(0)\rangle$. Střední hodnota je dána rovnicí $\langle \hat{O} \rangle_{|\psi(t)\rangle} = \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle$. Časová střední hodnota $\langle \hat{O} \rangle$ je pak daná následujícím vzorcem:

$$\langle \hat{O} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle dt \quad (2.1)$$

Mějme rozklad $|\psi(0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |E_{\alpha}\rangle$. Kde c_{α} jsou koeficienty. $O_{\alpha\beta} = \langle E_{\alpha} | \hat{O} | E_{\beta} \rangle$. Střední hodnota $\langle \hat{O} \rangle_{|\psi(t)\rangle}$ je pak:

$$\langle \hat{O} \rangle_{|\psi(t)\rangle} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 O_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} O_{\alpha\beta} e^{i(E_{\alpha} - E_{\beta})t} \quad (2.2)$$

V časové střední hodnotě nám potom vymizí nediagonální členy

$$\langle \hat{O} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle dt = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 O_{\alpha\alpha} \quad (2.3)$$

ETH dále na základě tohoto předpokladu dává způsob, jak velmi dobře odhadovat tvar matice $O_{\alpha\beta}$ pomocí metod klasické statistické mechaniky. Časová střední hodnota operátoru pro termalizující systémy odpovídá mikrokanonickým odhadům pro energie \bar{E} .

$$\sum_{E_{\alpha} \in [\bar{E} + \Delta, \bar{E} - \Delta]} O_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 O_{\alpha\alpha}, \quad (2.4)$$

kde c_{α} jsou koeficienty maticových elementu na daném energetickém okně. Z tohoto potom dostáváme předpis pro odhad obecných maticových elementů operátoru \hat{O} v energetickém okně $E_{\alpha} \in [\bar{E} + \Delta, \bar{E} - \Delta]$ (D'Alessio a kol., 2016) (Srednicki, 1999).

$$\langle E_n | \hat{O} | E_m \rangle = \bar{O}(E) \delta_{n,m} + R_{n,m} f_O(E, \omega) e^{-S(E)/2}, \quad (2.5)$$

kde $E = (E_n + E_m)/2$ a $\omega = E_m - E_n$ nám dávají závislost na energii. $R_{n,m}$ je pseudonáhodná matice s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. $S(E)$ je zde termodynamická entropie s energií E . Funkce $\bar{O}(E)$ je zde hladká funkce, která je závislá pouze na energii, a odpovídá výsledkům získaným mikrokanonickým přístupem (Srednicki, 1999). Funkce $f_O(E, \omega)$ je hladká funkce energií, která se neškáluje s velikostí systému. Společně s maticí R nám popisuje odchylky od mikrokanonické předpovědi. Člen $e^{-S(E)/2}$ zajišťuje škálování těchto odchylek. Očekáváme škálování těchto odchylek přibližně rovné odmocnině z dimenze Hylbertova prostoru (Moudgalya a kol., 2022).

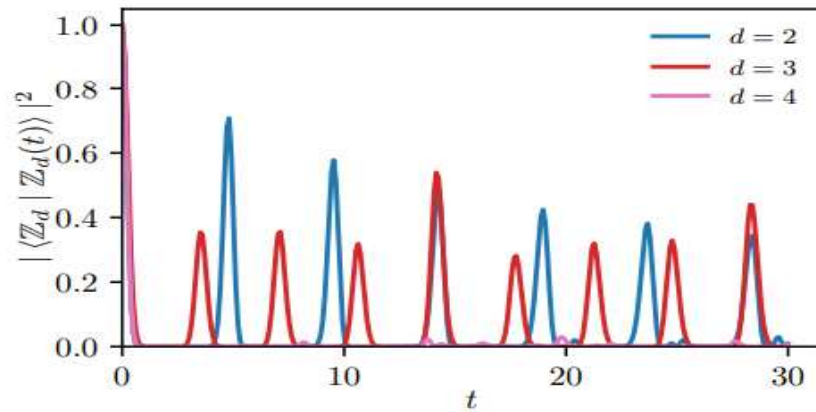
ETH bylo analyticky (Rigol a kol., 2008) a experimentálně (Wang a kol., 2022) ověřováno pro mnoho systémů. I přes ověřování, tak jde pouze o hypotézu jelikož existují výjimky (klasifikované v tabulce 2.1). Tato práce se zaměřuje konkrétně na QMBS, které narušují ETH na množině stavů míry nula. Díváme se konkrétně na vlastní stavy systému, které mají triviální časový vývoj. Proto pro přímé narušení ETH se v této práci budeme dívat na Peresovi mříže, kde by stavy v chaotickém regionu měli být pohromadě až na naše stavy QMBS, které můžeme u některých operátorů najít kompletně mimo většinu bodů a můžeme předpokládat v tomto bodě závislost na jiné veličině než je jen energie.

2.2.2 Periodické revivaly

Prvním příkladem QMBS v vědeckých pracích bylo pozorování periodických revivalů v kvantové simulaci 51-Rydberg atomů v článku (Bernien a kol., 2017), kde se ještě nemluvílo o QMBS, ale byly pozorovány v simulaci nevlastní stavy s netradiční odolností proti časovému vývoji. Standardní metodou je měření fidelity v závislosti na čase. Pro klasické nevlastní stavy, které nejsou blízko vlastním stavům (nebo lineární kombinaci malého počtu vlastních stavů), počítáme s rychlým úpadkem fidelity k nule bez žádných dalších výskytů ve větších časech. U stavu QMBS vidíme periodicky vyskakující nenulové hodnoty fidelity, viz obrázek 2.3.

Definice 16 (Fidelita). *Fidelita je hodnota závislá na čase která měří překryv mezi počátečním stavem a jeho časovým vývojem.*

$$F(t)_\psi = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \quad (2.6)$$

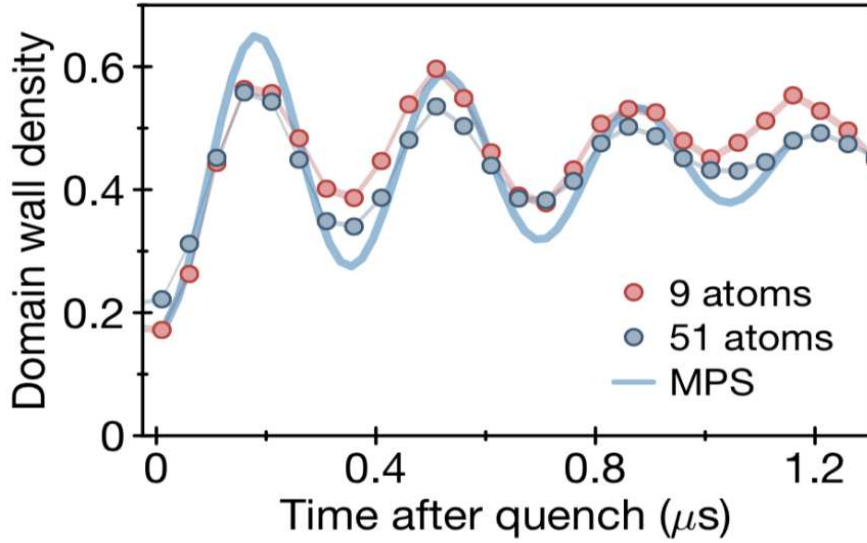


Obrázek 2.3: Fidelita Z_k stavu v Pxp modelech. Jsou zde vidět skoro dokonalé revivaly. Stav Z_k pro malé hodnoty k byly označeny jako QMBS. (Turner a kol., 2018a)

ETH předpovídá ztrátu informace o nevlastních stavech po časovém vývoji. Pozorování periodických revivalů je v přímém rozporu s předpovědí ETH pro chaotické stavy.

V experimentu (Bernien a kol., 2017) viz obrázek 2.4 se využívá metoda quenche která generuje nevlastní stavy, které jsou lehce perturbovanou verzí původního stavu. Quench probíhá v simulaci fyzikálně, vychylováním některých částic z připraveného stavu.

Toto vybízí k hledání analogie k periodickým orbitám z 1-částicového případu, kde jsme také pozorovali zpomalený úpadek fidelity.



Obrázek 2.4: Přítomnost periodických revivalů v kvantové simulaci Rydberg-atomů (Bernien a kol., 2017).

Na ose x je čas od provedení quenche v simulaci. Na ose y je hustota doménové zdi, což je hodnota, která kvantifikuje šanci na přechod do uspořádaného stavu. Zde jde konkrétně o šanci na přechod do stavu Z_2 , který poté podrobněji popíšeme v kapitole o PxP modelech.

QMBS jako věže stavů

Věže stavů jsou jednoduchými příklady konstrukce QMBS. Jde o sérii stavů, které jsou ekvidistantně rozmístěny napříč energiemi spektra. Lze ukázat, že takto rozdělené stavy ve spektru vedou na dokonalé periodické revivaly. QMBS jako nevlastní stavy mají výrazně vyšší projekci na stavy v těchto věžích vlastních stavů.

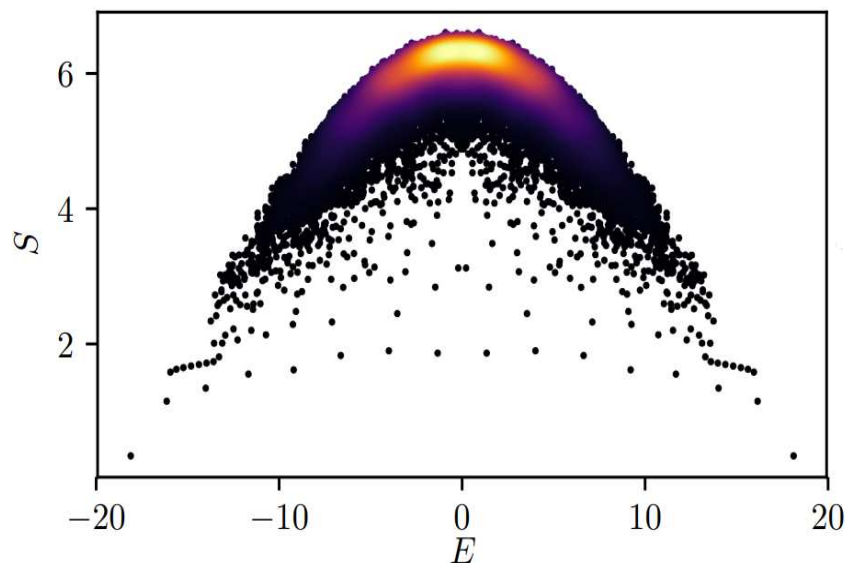
Definice 17 (Věž stavů). *Za věž stavů označíme sadu stavů, které se liší o nějaké ϵ ve spektru, $\{E_0, E_0 + \epsilon, E_0 + 2\epsilon, E_0 + 3\epsilon, \dots, E_0 + (N - 1)\epsilon\}$.*

Pokud vyjádříme fidelitu stavu, který leží kompletně ve podprostoru věže stavů ve stejném rozkladu, který byl představen v definici ETH, tak dostaneme :

$$F(t)_\psi = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 = \left| \sum_n |c_n|^2 e^{-iE_n t} \right|^2 = \sum_{n,m} |c_n c_m|^2 e^{-i(E_n - E_m)t} \quad (2.7)$$

Pak pro stavy z podprostoru věží stavů jsou rozdíly v energiích $E_m - E_n$ celočíselné násobky ϵ , z čehož vidíme, že pro časovou periodu $T = \frac{2\pi}{\epsilon}$ dostáváme dokonalé periodické revivaly.

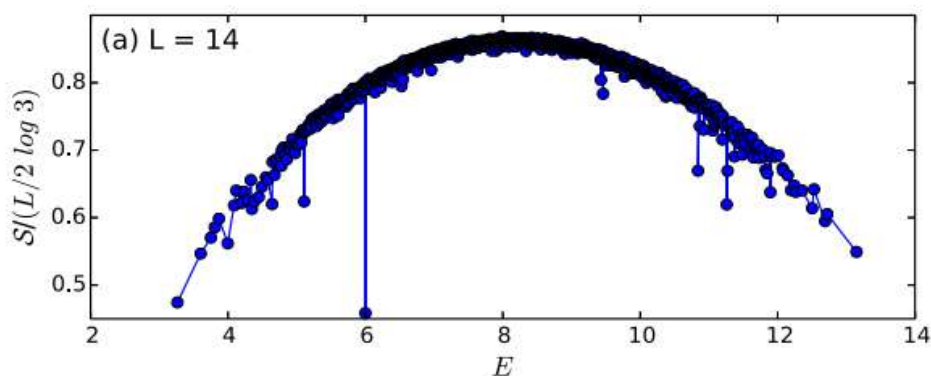
QMBS jako věže byly popsány nejprve na AKLT modelech s celočíselným spinem (Moudgalya a kol., 2018a) (Moudgalya a kol., 2018b), později na to navazovaly práce, které je QMBS jako věže stavů hledaly na jednodušších modelech jako PxP model (Obrázek 2.5), který shrneme později v této kapitole.



Obrázek 2.5: Entropie provázání stavů v závislosti na energii v PXP modelu (Choi a kol., 2019). Stavů QMBS mají výrazně nižší entropii provázání. Je zde velmi dobře vidět struktura věže stavů.

2.2.3 Entropie provázání

Častým způsobem jak identifikovat stavů QMBS je se podívat na entropii provázání, která u stavů QMBS dává výrazně odlišné hodnoty než okolní ergodické stavů. Na rozdíl od hledání periodických revivalů nám entropie provázání umožňuje najít i izolované QMBS (vlastní stavů). Dále v případě že je v systému QMBS jako věž stavů tak by tyto věže měly viditelně odděleny od ergodických stavů. Na grafech entropie provázání stavů QMBS okamžitě vyčnívají svými nižšími hodnotami jako anomální uprostřed chaotické části spektra, viz obrázek 2.6:



Obrázek 2.6: Normalizovaná entropie provázání v závislosti na energii stavů v AKLT modelu (Moudgalya a kol., 2018b). QMBS stavů jsou zde viditelně odlišeny od ostatních chaotických stavů. Obzvláště stav na $E = 6$, který náleží do věže stavů.

Pro zdefinování entropie provázání potřebujeme nejdřív zavést parciální stopu. ■

Definice 18 (Parciální stopa). *Parciální stopa Tr_A je lineární zobrazení, která provede stopu přes podsystém A :*

$$\text{Tr}_A : L(A \otimes B) \rightarrow L(B)$$

Takové že :

$$\text{Tr}_A(R \otimes S) = \text{Tr}(R)S \quad \forall R \in A, \quad \forall S \in B$$

Kde A, B jsou vektorové prostory a $L(A)$, $L(B)$ jsou prostory všech lineárních operací na A a B (Pro účely této práce to budou vždy matice). Tato definice parciální stopu definuje jednoznačně.

Definice 19 (entropie provázání). *Von-Neumannovu entropii provázání zavádíme pro stav s maticí hustoty $\rho_{AB} = |AB\rangle\langle AB|$. Redukovanou matici hustoty stavu AB značíme $\rho_A = \text{Tr}_B|AB\rangle\langle AB|$. entropie provázání $S(\rho_{AB})$ je pak dána:*

$$S(\rho_{AB}) = -\text{Tr}(\rho_A \log(\rho_A)) = -\text{Tr}(\rho_B \log(\rho_B)) \quad (2.8)$$

Vidíme, že pro výpočet entropie provázání nezáleží na pořadí stopování. Kvantově provázané stavy jsou z definice stavy takové, kdy stav nelze zapsat jako tensorový součin stavů podsystémů, aneb nejsou separabilní. Pro separabilní systémy jsou redukované matice hustoty čisté stavy a proto pro ně entropie provázání vyjde vždy nula. Tato vlastnost nám dělá z takto zdefinované entropie provázání dobrou míru provázání.

ETH nám předpovídá, že pro ergodické systémy bude časový vývoj redukovaná matice hustoty malého podsystému $\rho^{(A)}$ přibližně rovná Gibbsově matici hustoty ρ_G :

$$\rho_G = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \quad (2.9)$$

Mikrokanonická předpověď pro parciální stopu v termodynamické limitě:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho^{(A)}(t) = \text{Tr}_B(\rho_G) \equiv \rho_G^{(A)} \quad (2.10)$$

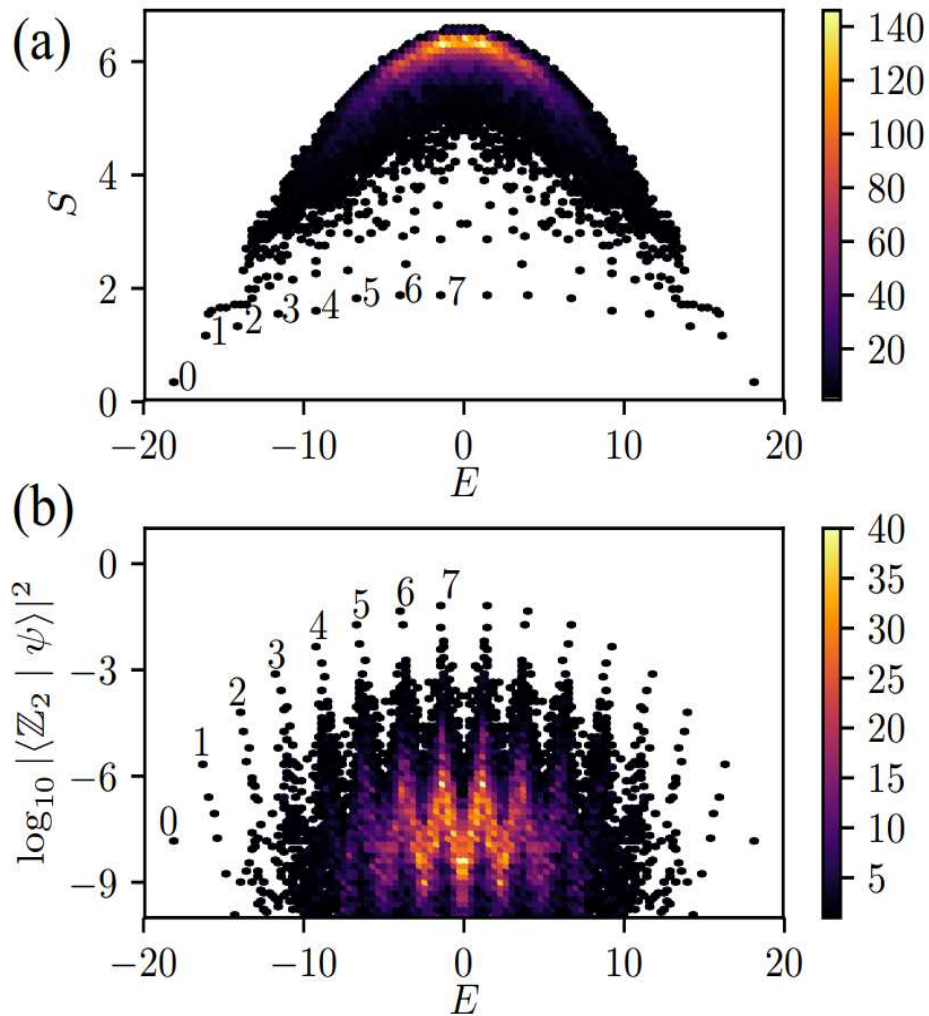
Kde Z je partiční suma, β inverzní teplota asociovaná s původním stavem a Tr_B je výše popsaná parciální stopa přes zbytek systému. Díky tomuto můžeme dělat předpověď pro velikost entropie provázání z tabulky 2.1. Pro ergodické (termální) stavy se nám entropie provázání škálují podle velikosti „obsahu“ podsystému, zatímco základní a silně excitované stavy se škálují podle „plochu (podobsahu)“ podsystému. Stavy QMBS se nám takto oddělují jako stavy, které s velikostí podsystému škálují velikost entropie provázání viditelně méně než okolní chaotické stavy.

2.3 Modely zjizvených systémů

V této podkapitole ve stručnosti představíme oba přístupy k studiu QMBS, se kterými se setkáváme v článcích.

2.3.1 QMBS na PxP

V odborných člancích o QMBS se nejčastěji setkáváme s jizvami na PxP modelech, který je výrazně jednodušší než AKLT modely a dobře nám popisuje simulace z práce (Bernien a kol., 2017). Jde o model řetízku, na kterém je každá částice buď v základním $|-\rangle$, nebo exitovaném $|+\rangle$ stavu. PxP model se vyznačuje podmínkou, že v řetízku nemohou být vedle sebe dva exitované stavy. Jak jsme psali více tak model PxP je učebnicovým příkladem systému s QMBS v podobě Néelova Z_2 stavu viz obrázek 2.7. Na grafu projekce na Néelův Z_2 stav vidíme věž stavů a pak na grafu entropie provázání vidíme, že stavy, které mají největší projekci na Z_2 , mají anomálně nízké hodnoty entropie provázání.



Obrázek 2.7: (a) Entropie provázání S a (b) projekce na Néelovy Z_2 stavy v závislosti na energii vlastních stavů. (Turner a kol., 2018c). Barva značí hustotu stavů. Na grafu (b) vidíme strukturu věží stavů, kde vyšší hodnoty projekce na Z_2 jsou přesně ekvidistantně rozdělené a i stavy s nižší projekci se hromadí kolem struktury těchto věží. Na grafu (a) zase vidíme, že entropie provázání identifikuje stavy, které pak na druhém grafu mají největší hodnoty projekce na Z_2 .

Hamiltonián PxP modelu pro řetízek velikosti L je dán vztahem:

$$H = \sum_{i=1}^L \hat{P}_i \hat{X}_{i+1} \hat{P}_{i+2} \quad (2.11)$$

Kde operátory $\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$, jsou Pauliho operátory a operátor P je dán předpisem: $\hat{P}_i = (1 - \hat{Z}_i)$. Operátory vyjádříme v bázi excitovaných $|+\rangle_i$ a základních stavů $|-\rangle_i$. V této bázi jsou operátory:

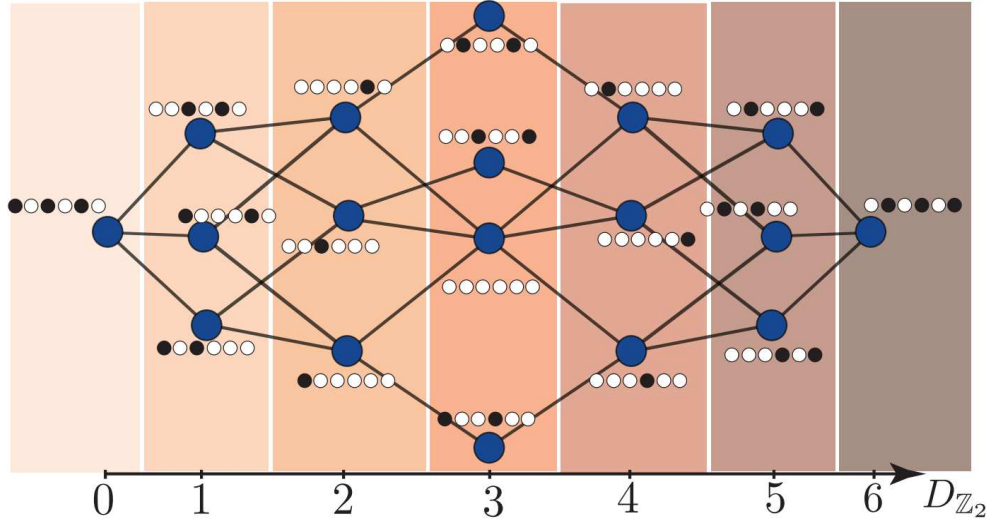
$$\hat{X}_i = |+\rangle_i \langle -|_i + |-\rangle_i \langle +|_i \quad (2.12)$$

$$\hat{Z}_i = |+\rangle_i \langle +|_i - |-\rangle_i \langle -|_i \quad (2.13)$$

a potom

$$\hat{P}_i = |-\rangle_i \langle -|_i. \quad (2.14)$$

Působení operátoru \hat{X}_i nám na i -té částici přehodí excitovanou částici do základního stavu a naopak. Operátory \hat{P}_i potom zajišťují podmínku neexistence dvou excitovaných stavů vedle sebe.

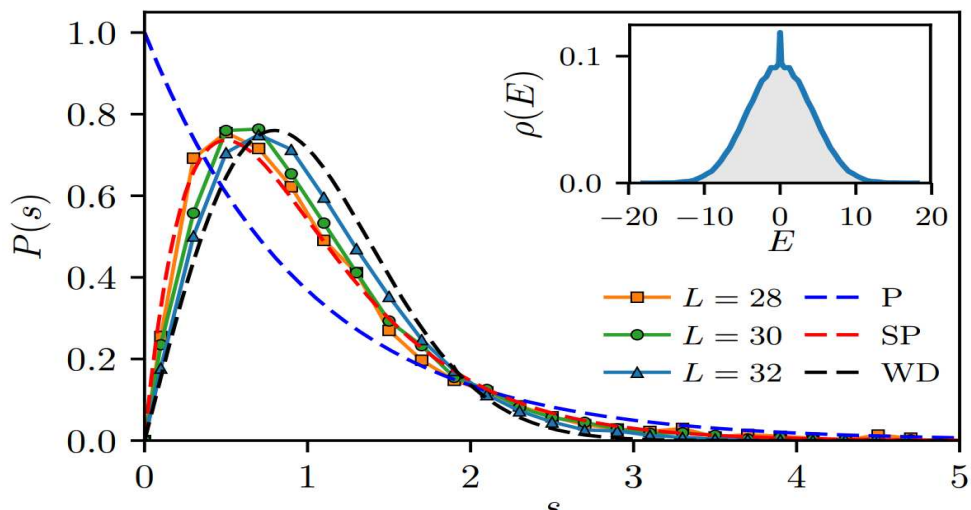


Obrázek 2.8: Struktura stavů na řetízku $L = 6$. Obrázek ukazuje všechny dostupné stavy v tomto modelu a všechny možné přechody mezi nimi. Na levém konci máme stav Z_2 a na pravém Z'_2 . D_{Z_2} je počet přechodu pro změnu Z_2 na D_{Z_2} . (Turner a kol., 2018b)

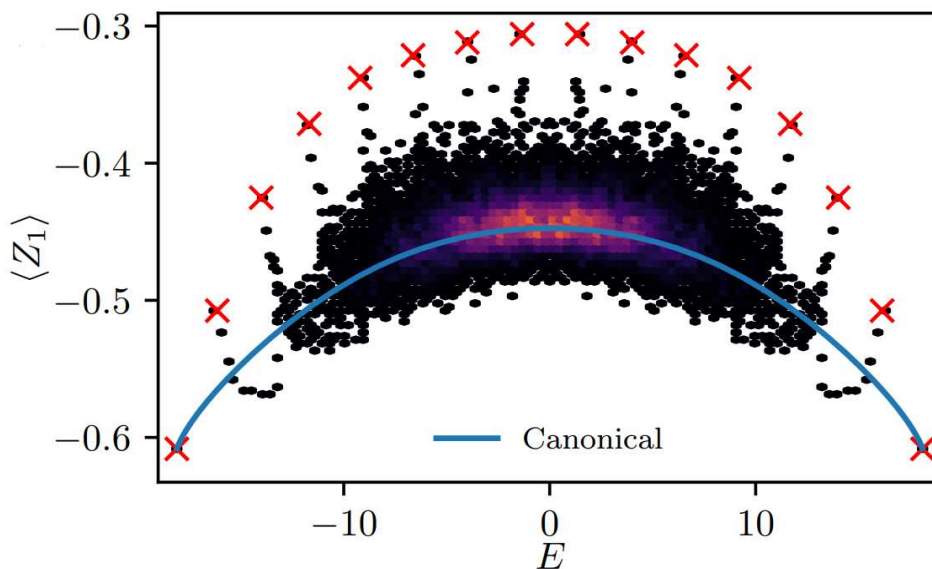
QMBS hledáme po vzoru (Bernien a kol., 2017) jako Néelův Z_2 stav, který má strukturu střídajících se excitovaných částic a částic v základním stavu. $Z_2 = |+-+ - + - \dots\rangle$ a $Z'_2 = |-+-+ - + \dots\rangle$ jsou tyto Néelovy stavy, kde pozorujeme periodické revivaly viz obrázek 2.3. Podobné efekty pozorujeme i u obecnějších stavů Z_k , které mají excitovanou každou k -tou částici. ($Z_3 = |+- - + - - \dots\rangle$). Z grafu 2.9 vidíme, že PxP model dobře odpovídá semipoissonovské⁴ rozložení NNDS a pro rostoucí L se blíží wigner-dysonovskému. NNDS se silně odlišuje

⁴Rozdělení popsané Brodyho rozdělením parametrem $0 < \omega < 1$, popisuje spektrální statistiku smíšených systémů

od poissonovského a proto v PxP modelu nehledáme integrabilitu a má smysl se dívat na předpovědi ETH. Graf z obrázku 2.10 nám ukazuje Perésovu mříž, kde vidíme, že se stavy, které mají vysoké projekce na QMBS, vymykají předpovědi ETH.



Obrázek 2.9: Spektrální statistika PxP modelu (Turner a kol., 2018b). Na větším grafu máme NNDS pro PxP modely s délkou řetízku L . Přerušované čáry jsou NNDS pro regulární (P - Poisson), mixované (SP - SemiPoisson) a chaotické (WD - Wigner Dison) spektra. V menším grafu vidíme hustotu stavů v závislosti na energii.



Obrázek 2.10: Peresova mříž pro PxP model s $L = 30$. Výrazné narušení ETH na střední hodnotě operátoru \hat{Z}_1 . Modrou čarou je vyznačená termodynamická předpověď pro hodnotu \hat{Z}_1 v závislosti na energii.

2.3.2 QMBS na Dickeho modelu

Nakonec této kapitoly představíme úplně jiný přístup k QMBS. V práci (Pilatowsky-Cameo a kol., 2022) aplikují metody inspirované jednočásticovými jízvami. Stavby QMBS se studují na základě jejich lokalizace na fázového prostoru v semiklasické limitě.

Pro aplikaci těchto metod si autoři článku zvolili Dickeho model, který popisuje plně provázaný systém interagujících částic popsanými dvouhladinovými systémy, které kromě vzájemných interakcí interagují i s vnějším polem. Dickeho hamiltonián má tvar:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-), \quad (2.15)$$

kde N je počet částic v systému, \hat{a}^\dagger , \hat{a} jsou bosonové kreační a anihilační operátory, operátory momentu hybnosti $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm \hat{J}_y$ a \hat{J}_z jsou operátory kolektivního pseudospinu, které nám popisují částice. N je počet částic v systému, ω je parametr radiační frekvence pole a ω_0 je frekvence přechodu dvou stavové částice v systému. Parametr γ popisuje interakce částic s polem. Dickeho model by zvolen kvůli dobře proveditelné klasické limitě. Klasickou limitu provedeme v Glauberově bosonových a Blochově atomových koherentních stavech

$$|x\rangle = |q,p\rangle \otimes |Q,P\rangle \quad (2.16)$$

$$h_{cl} = \frac{\langle x | \hat{H} | x \rangle}{j} = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\omega_0}{2}(P^2 + Q^2) + 2\gamma Q \sqrt{1 - \frac{P^2 + Q^2}{4}} - \omega_0. \quad (2.17)$$

Kde Glauberovy a Blochovy stavy jsou:

$$|q,p\rangle = e^{-(j/4)(q^2+p^2)} \exp\left(\sqrt{\frac{j}{2}}(q+ip)\hat{a}^\dagger\right) |0\rangle \quad (2.18)$$

$$|Q,P\rangle = \left(1 - \frac{(P^2 + Q^2)}{4}\right)^2 \exp\left(\frac{(Q+iP)\hat{J}_+}{\sqrt{4-P^2-Q^2}}\right) |j, -j\rangle \quad (2.19)$$

Fázový prostor je zde omezený podmínkou $P^2 - Q^2 \leq 4$. Podmínkou na energii $\delta(h_{cl} - \epsilon)$, kde ϵ je hodnota energie, se nám definují klasické nadplochy konstantní energie.

Lokalizaci studujeme na Husimihovo funkci spočítané na vlastních stavech Dickeho modelu. Husimihovo funkce je definovaná jako:

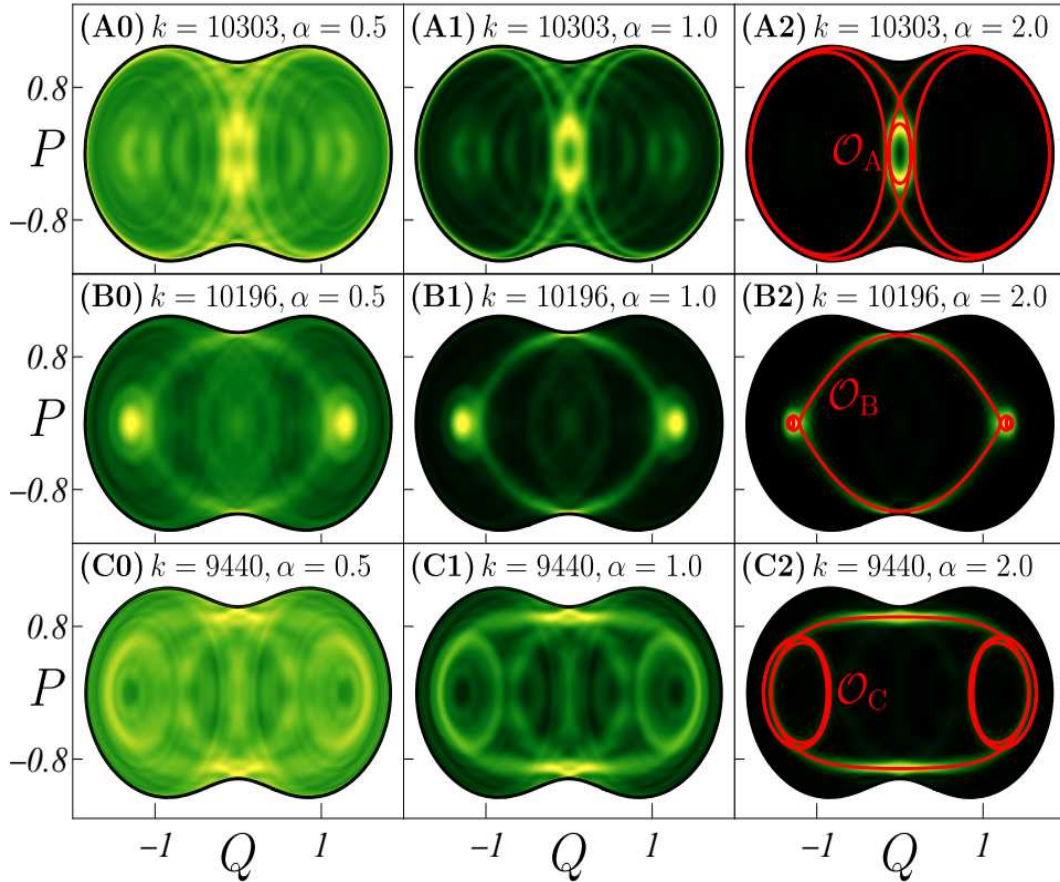
$$Q_{\hat{\rho}}(x) = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle \quad (2.20)$$

Husimihovo funkce vlastního stavu dostaneme dosazením matice hustoty vlastního stavu do vzorce $\hat{\rho} = |E_k\rangle\langle E_k|$. Husimihovo funkci na vlastním stavu značíme $Q_k(x)$. Pro vizualizaci lokalizací pak do grafů vykreslujeme projekci mocniny Husimihovo funkce vlastního stavu na podprostor (P,Q) , kterou vypočteme následujícím způsobem:

$$\tilde{Q}_k^\alpha(P, Q) = \int \int dqdp \delta(h_{cl}(x) - \epsilon_k) Q_k(x)^\alpha, \quad (2.21)$$

kde α je exponent, který umožňuje na obrázcích zvýraznit buď oblasti, kde jsou hodnoty Husimioho funkce nejvyšší, nebo naopak snížit kontrast. A hodnota ϵ_k je normalizovaná energie vlastního stavu k . Pokud využijeme podmínky zachovávající se energie, tak můžeme vyjádřit q jako funkci (p, Q, P) a tím se zbavit jedné integrace, což podstatně zrychlí a zpřesní výpočty.

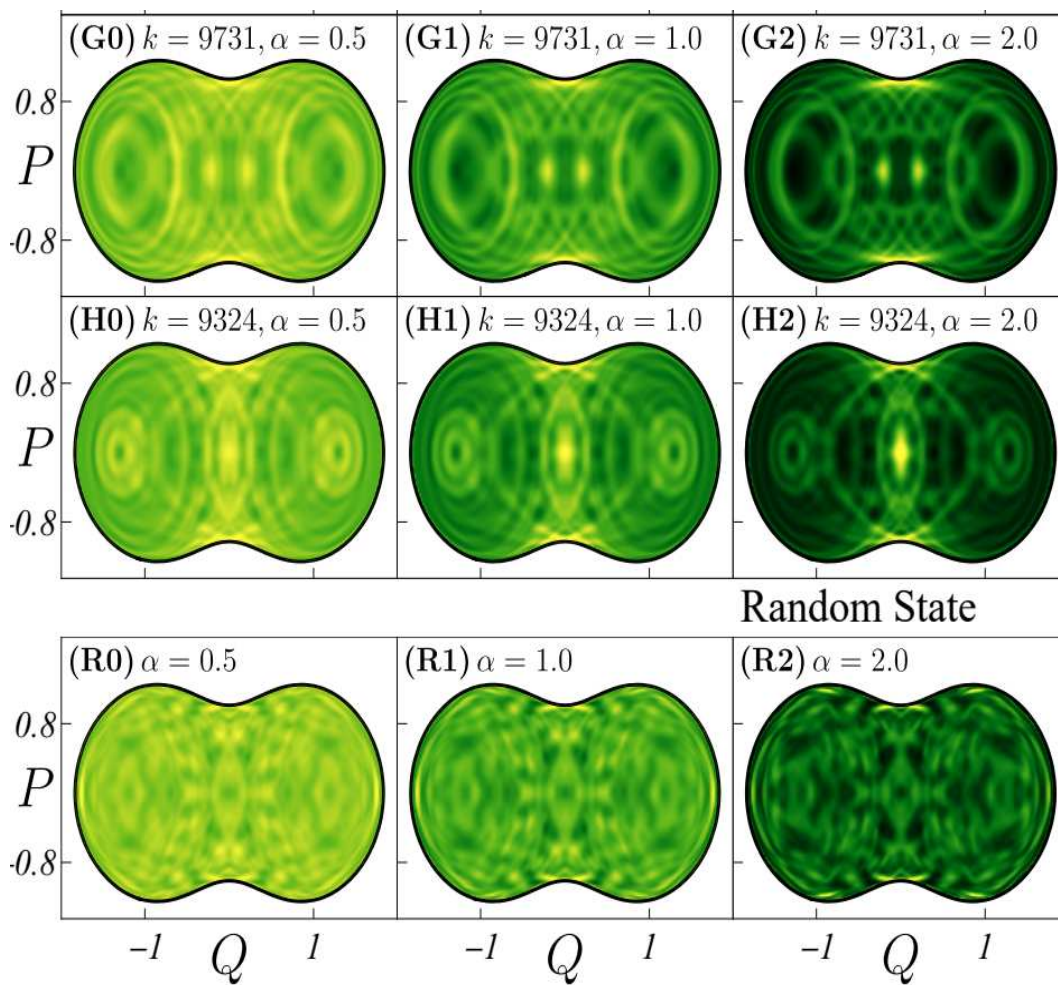
V práci (Pilatosky-Cameo a kol., 2022) se vlastní stavy pro bližší hledání QMBS volily na základě míry lokalizace nazývané Rényiho okupace, která vychází z Rényiho entropie a je v článku detailně popsána. Na obrázku 2.11 jsou vykresleny tři stavy, které byly na základě Rényiho okupací nejlépe lokalizované.



Obrázek 2.11: Projekce Husimioho funkce $\tilde{Q}_k(P, Q)$ viz vzorec (2.21). Jsou zde vykresleny stavy $A(k = 10303)$, $B(k = 10196)$ a $C(k = 9440)$, které jsou tři nejlépe lokalizované stavy v systému, na různých hodnotách α . Pro $\alpha = 2$ byly na obrázku červeně vyznačeny periodické trajektorie, které článek přiřazuje jednotlivým stavům.

Pro kontrast na obrázku 2.12 vidíme stejné vykreslení Husimioho funkce pro dva stavy, které mají nízkou míru lokalizace a pro náhodný nevlastní stav tvořený gaussovským balíkem.

Práce (Pilatosky-Cameo a kol., 2022) dále studuje vyznačené periodické trajektorie, které identifikuje jako nestabilní trajektorie (izolované periodické trajektorie v chaotických oblastech). Ukazuje se, že takto nalezené stavy QMBS jsou přímou analogií jednočásticových jizev, které jsou definované svou lokalizací kolem nestabilních periodických trajektorií.



Obrázek 2.12: Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(P, Q)$ viz vzorec (2.21). Jsou zde vykresleny stavy $G(k = 9731)$, $H(k = 9324)$, které ilustrují málo lokalizované stavy v systému a dále náhodný nevlastní stav R .

3. Mnohočasticové kvantové jizvení na Lipkinových modelech

V této kapitole představíme postup pro identifikaci stavů izolovaných QMBS Lipkinova modelu. Postup by měl být aplikovatelný na libovolný model, kde lze rozumně zavést entropie provázání. Nejprve zavedeme model a jeho parametrizaci, které mají chaotické části spektra a poté zde podrobně popíšeme realizaci metod pro identifikaci stavů QMBS. Nakonec se podíváme na klasickou limitu, kde na Husimihovu funkci budeme studovat lokalizaci stavů, které jsme identifikovali jako QMBS.

3.1 Lipkinův model

V této práci budeme aplikovat výše zmíněné metody na specifické verze Lipkinova modelu, který ve stručnosti popíšeme v této kapitole. Lipkinův model je variantou Isingova spinového modelu, kde interakce mezi částicemi má nekonečný dosah. Interagují spolu všechny částice a to stejnou silou. Těmto modelům se říká "plně propojené" ("fully connected") (Cejnar a kol., 2021). Plně propojená verze Isingova modelu se popisuje obecným hamiltoniánem:

$$H = BJ_z - \frac{A}{N} \sum_{i < i'} \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(i')} = BJ_z - \frac{A}{N} J_x^2 + \frac{A}{4}, \quad (3.1)$$

kde B je koeficient jednočasticové interakce individuálních spinů například s vnějším polem a A je koeficient pro interakce mezi částicemi. $\sigma_x^{(i)}$ jsou Pauliho matice a J_x, J_z kolektivní operátory momentu hybnosti. Počet částic $N = \frac{j}{2}$, kde $j(j+1)$ je kvantové číslo odpovídající operátoru J^2 . Operátory splňují komutační relace:

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= i\epsilon_{abc} J_c \\ [H, J^2] &= [J_a, J^2] = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Síla interakce roste s počtem částic N a proto je zde normovaná, aby interakční člen nebyl kompletně dominantní v limitě $N \rightarrow \infty$. V literatuře se Lipkinův model objevuje v rozšířeném tvaru:

$$H = J_z - \frac{\lambda}{N} \left[J_x + y \left(J_z + \frac{N}{2} \right)^2 \right]. \quad (3.3)$$

Parametr λ nám zde udává sílu interakce a parametr y je dalším parametrem systému.

Lipkinův model byl pro tuto práci zvolen protože jde o model, kde lze dobře provést klasickou limitu a je velmi blízko výše zmiňovanému Dickeho modelu. Lipkinův model má jeden stupeň volnosti a tedy čistě regulární spektrum. ETH a jeho narušení v podobě QMBS vyžadují abychom měli chaotické spektrum, a proto použijeme 2-Lipkinův model (2-fluid Lipkin model) se dvěma stupni volnosti, který má pro některé parametry i chaotické části spektra.

3.2 Dva a vícenásobné Lipkinovy modely

V této práci budeme aplikovat výše zmíněné metody identifikace QMBS na rozšíření Lipkinova. Standardní Lipkinův model neobsahuje ve svém spektru chaotickou část. Proto využijeme rozšíření prezentované v článku (García-Ramos a kol., 2016). Tam je popsán 2-Lipkin model, který je vystavěn nad algebrou $u(2) \otimes u(2)$ na rozdíl od standardního Lipkinova modelu, který je popsán algebrou $u(2)$.

Toto analytické rozšíření budeme v této práci dále extrapolovat na tři a více násobné verze $(u(2) \otimes u(2) \otimes u(2) \dots)$ u kterých je výraznější rozdíl mezi chaotickou a regulární částí spektra. I pro menší velikosti systému můžeme najít velké části spektra, kde jsme schopni s jistotou říci, že jde o chaotické spektrum. Toto nám umožní identifikovat zjižené stavy i na systémech s menším počtem částic než by bylo možné pro 2-Lipkinův model.

Nevýhodou těchto vícenásobných Lipkinových modelů je vyšší počet stupňů volnosti. Při provedení klasické limity dostáváme pro x -Lipkinův model $2x$ dimenzí fázového prostoru. Pokud bychom chtěli počítat Husimího funkce popsané v kapitole 2.3.2 tak bychom dostali vícenásobnou integraci, která není dobře optimalizovaná a její výpočet by byl výrazně delší než na 2-Lipkinově modelu, kde si vystačíme s jedním integrálem.

3.2.1 2-Lipkinův model

Většina této práce se bude věnovat 2-Lipkinovu modelu, který popisuje chování dvou interagujících Lipkinových modelů nebo úpravu, kdy v Lipkinově modelu máme dva různé vibrační módy. 2-Lipkinův model byl zvolen kvůli přítomnosti chaotické a regulární části ve svém spektru. Také proto, že jde o systém, který lze jednoduše rozdělit na dva interagující podsystemy, což nám dává jednoduchou a přímočarou cestu jak zavést parciální stopy při výpočtu entropie provázání.

Jeho konstrukci uděláme po vzoru prací (García-Ramos a kol., 2016) a (García-Ramos a kol., 2017). V této práci zrychleně představíme konstrukci 2-Lipkinova modelu z těchto článků. Představím konstrukci v reprezentaci skalárních bosonů. Všechny části hamiltoniánu budou takto popsány kombinací kreačních a anihilačních operátorů $s^{(1)}, t^{(1)}, s^{(1)\dagger}, t^{(1)\dagger}, s^{(2)}, t^{(2)}, s^{(2)\dagger}, t^{(2)\dagger}$, které splňují komutační relace:

$$\begin{aligned} [s^{(i)}, s^{(j)\dagger}] &= \delta^{(ij)} \\ [t^{(i)}, t^{(j)\dagger}] &= \delta^{(ij)} \\ [s^{(i)}, t^{(j)\dagger}] &= [s^{(i)\dagger}, t^{(j)}] = 0 \\ [s^{(i)}, s^{(j)}] &= [s^{(i)\dagger}, s^{(j)\dagger}] = 0 \\ [t^{(i)}, t^{(j)}] &= [t^{(i)\dagger}, t^{(j)\dagger}] = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde horní indexy v kulatých závorkách (i) jsou indexy podsystemů.

Sestavujeme hamiltonián ve tvaru ¹:

$$H = x(n^{(1)} + n^{(2)}) - \frac{1-x}{N^{(1)} + N^{(2)}} Q_{(y_1, y_2)} Q_{(y_1, y_2)} \tag{3.5}$$

¹V literatuře se tento tvar nazývá Q-formalismus, který vychází z jaderného modelu interagujících bosonů (Arima a Iachello, 1981)

$$n^{(i)} = t^{(i)\dagger}t^{(i)} \quad (3.6)$$

$$Q_{(y_1, y_2)} = (Q_{(y_1)}^{(1)} + Q_{(y_2)}^{(2)}) \quad (3.7)$$

$$Q_{(y_i)}^{(i)} = s^{(i)\dagger}t^{(i)} + s^{(i)}t^{(i)\dagger} + y_i t^{(i)\dagger}t^{(i)}. \quad (3.8)$$

Kde x, y_1, y_2 jsou volné parametry systému, $N^{(1)}$ a $N^{(2)}$ jsou počty částic v jednotlivých podsystémech. Hamiltonián v této podobě není nejobecnější verzí 2-Lipkinova hamiltoniánu. Konstrukce z Q formalismu nám fixuje některé parametry. Úplně obecná verze a volba parametrů je popsána v článku (García-Ramos a kol., 2016). Hamiltonián vyjádříme pomocí operátorů momentu hybnosti splňující komutační relace:

$$[J_a^{(i)}, J_b^{(j)}] = i\epsilon_{abc}J_c^{(i)}\delta^{(ij)} \quad (3.9)$$

Mapování mezi operátory momentu hybnosti $J_a^{(i)}$ a operátory (3.4) se provede Schwingerovou transformací

$$J_0^{(i)} = J_z^{(i)} = \frac{1}{2}(t^{(i)\dagger}t^{(i)} - s^{(i)\dagger}s^{(i)}) \quad (3.10)$$

$$J_-^{(i)} = s^{(i)\dagger}t^{(i)} \quad (3.11)$$

$$J_+^{(i)} = s^{(i)}t^{(i)\dagger} \quad (3.12)$$

$$J_x^{(i)} = J_-^{(i)} + J_+^{(i)} \quad (3.13)$$

$$Q_{(y_i)}^{(i)} = J_x^{(i)} + y_i(J_z^{(i)} + \frac{N_1}{2}). \quad (3.14)$$

Operátory $J_k^{(i)}$ vždy působí na vybraný podsystém. Mají tvar tensorového součinu operátorů momentu hybnosti s operátorem identity I :

$$\begin{aligned} J_k^{(1)} &= J_k \otimes I \\ J_k^{(2)} &= I \otimes J_k. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Celý hamiltonián má pak tvar:

$$\begin{aligned} H &= x \left(J_z^{(1)} + \frac{N_1}{2} + J_z^{(2)} + \frac{N_2}{2} \right) - \\ &- \frac{1-x}{N^{(1)} + N^{(2)}} \left(J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + y_1(J_z^{(1)} + \frac{N_1}{2}) + y_2(J_z^{(2)} + \frac{N_1}{2}) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2.2 n-Lipkin model

Vícenásobné modely sestavíme přidáváním podsystémů. Stále budeme pro jednoduchost využívat Q formalismu a budeme postupovat analogicky k výše ukázané konstrukci pro 2-Lipkinův model. O další podsystémy model rozšíříme následujícím způsobem:

$$H = x(n^{(1)} + n^{(2)} + n^{(3)} \dots) - \frac{1-x}{N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)} \dots} Q_{(y_1, y_2, y_3 \dots)} Q_{(y_1, y_2, y_3 \dots)} \quad (3.17)$$

kde:

$$Q_{(y_1, y_2)} = (Q_{(y_1)}^{(1)} + Q_{(y_2)}^{(2)} + Q_{(y_3)}^{(3)} \dots) \quad (3.18)$$

$$Q_{(y_i)}^{(i)} = Q_{(y_i)}^{(i)} = J_x^{(i)} + y_i(J_z^{(i)} + \frac{N_1}{2}) \quad (3.19)$$

$$J_k^{(1)} = J_k \otimes I \otimes I \dots$$

$$J_k^{(2)} = I \otimes J_k \otimes I \dots$$

$$(3.20)$$

$$J_k^{(i)} = I \otimes \underbrace{I \otimes \dots \otimes}_{k-1 \text{ krát}} J_k \otimes \dots \otimes I$$

Na n -Lipkinových modelech je lépe rozlišitelná chaotická a regulární část spektra. Také slouží jako možnost demonstrovat výše zmíněné metody pro systémy, které mají více podsystémů.

3.2.3 Maticová reprezentace Lipkinových modelů

V této práci pracujeme s Hamiltoniánem v maticové reprezentaci. Pro jeho konstrukci popíšeme všechny stavební výše popsané prvky v této reprezentaci Operátory momentů hybnosti v maticové reprezentaci:

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= J_z + \frac{N^{(1)}}{2} = \text{Diag}\{(N^{(i)} - i)\}_{i=0}^{N^{(1)}} \\ J_+ &= \text{Diag}^{(+1)}\{a_i\}_{i=-\frac{N^{(1)}}{2}}^{\frac{N^{(1)}}{2}-1} \\ J_- &= \text{Diag}^{(-1)}\{b_i\}_{i=-\frac{N^{(1)}}{2}+1}^{\frac{N^{(1)}}{2}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

kde:

$$\begin{aligned} a_i &= \left[\frac{N^{(1)}}{2} \left(\frac{N^{(1)}}{2} + 1 \right) - i(i+1) \right]^{\frac{1}{2}} \\ b_i &= \left[\frac{N^{(1)}}{2} \left(\frac{N^{(1)}}{2} + 1 \right) - i(i-1) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Zde $\text{Diag}\{x_i\}_{i=\alpha}^{\beta}$ značí diagonální matici která ma na diagonále prvky x_i s indexy i jdoucí od α do β . $\text{Diag}^{(+1)}\{x_i\}_{i=\alpha}^{\beta}$ a $(\text{Diag}^{(-1)}\{x_i\}_{i=\alpha}^{\beta})$ jsou pak matice, které mají nuly všude kromě prvku nad (pod) diagonálou, kde jsou prvky x_i .

S těmito stavebními prvky můžeme poskládat celý hamiltonián dva a vícenásobných Lipkinových modelů.

3.3 QMBS na vícenásobných Lipkinových modelech

V této části práce představíme naše výsledky studování QMBS na Lipkinových modelech a použité metody.

3.3.1 Metody použité identifikace QMBS na vícenásobných Lipkinových modelech

Pro identifikaci stavů QMBS budeme studovat entropii provázání, která pro stavy QMBS má dávat odlišné výsledky než pro stavy, které platí předpověď ETH, jak jsme psali výše. Dále potvrdíme, že stavy, které jsme na základě entropie provázání identifikovali jako QMBS výrazně narušují ETH na středních hodnotách pozorovatelných, které vykreslíme do Peresových mříží.

Vícenásobné Lipkinovy modely mají jak chaotickou tak regulární část spektra, proto před samotným studiem QMBS jako narušení ETH musíme identifikovat, která část spektra je chaotická. Budeme zde i diskutovat vliv parametrů y_i na chaotičnost spektra.

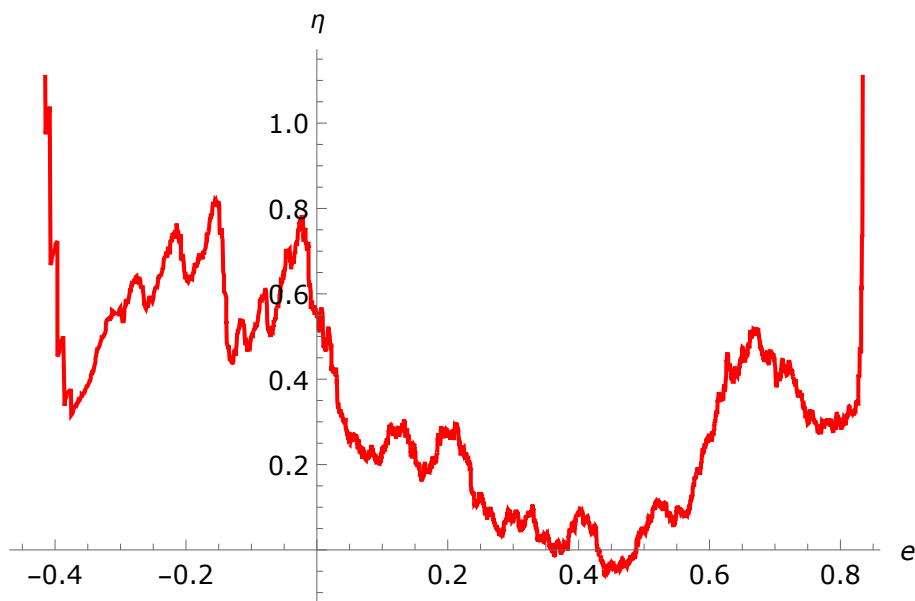
Identifikace chaotické části spektra

Pro nalezení chaotické části spektra použijeme metodu z rovnic (1.13), (1.14), která porovná spektrální statistiky našeho systému s plně regulárním a chaotickým. Části spektra, pro které je $\eta < 0.05$ označíme za plně chaotické. V této práci budeme vykreslovat η v závislosti na přeškálované energii

$$e_i = \frac{E_i}{\frac{N_1 + N_2}{2}}. \quad (3.23)$$

Tato škála nám dá energie na stejný interval pro libovolné velikosti systému, což nám umožní porovnávat grafy systému s různými počty částic. Maximální hodnoty energie pro tyto modely škálují lineárně s počtem částic v každém pod-systému.

Tato metoda má problémy pro energie na krajích spektra, kde je výrazně nižší hustota stavů a η utíká daleko nad hodnotu 1. Pro účely této práce lze dobře aplikovat jelikož nám jde převážně o nalezení chaotické části spektra, které se nachází ve středu spektra. Na okrajích kolem extrémů pak máme velmi dobře regulární oblasti co bude zřejmé na grafech entropie provázání a Peresových mříží, kde budou očividné regulární struktury. Důležitou otázkou při používání této metody je počet stavů v intervalu, na kterém dělám statistiku NNS. Pro moc malé intervaly dostáváme nepřesné výsledky při výpočtu variance. Pro příliš velké velikosti intervalu rozšiřujeme vliv okolí na hodnotu v dané energii. Dochází ke zhlazení grafu v obrázku 3.1 a je hůře poznat, kde začíná a končí chaotická oblast ve spektru.



Obrázek 3.1: Míra chaosu η v závislosti na přeškálované energii e pro 2-Lipkinův model s parametry $\{x = 0,5, y_1 = 1, y_2 = -0,5\}$ a s velikostmi podsystémů $N_1 = N_2 = 70$. Části spektra, kde je η velmi blízko nule jsou chaotické a části, kde se blíží nebo přesahují 1 jsou regulární.

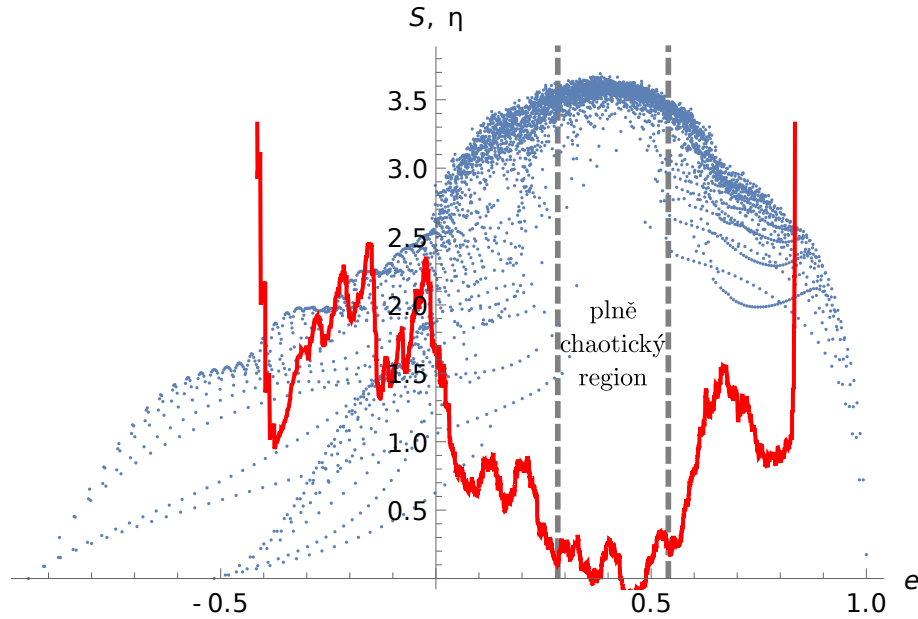
Hledání parametrů y_i s nejlépe viditelnými stavy QMBS

Tuto metodu také použijeme pro nalezení parametrů y_i takových, aby byla chaotická část spektra co největší a nejlépe oddělená od části regulární. Takové parametry nacházíme simulací modelu pro řadu parametrů, kde potom spočítáme hodnoty η ve spektru. Potom vybereme sady parametrů, které mají nejvyšší počet hodnot η pod nějakou hranicí blízkou nule. Pro jednoduchost budeme v této práci hledat pouze parametry y_i a x nechávám pevně na hodnotě 0,5. Nakonec z těchto sad parametrů vybereme ty, na kterých jsou nejlépe poznat stavy QMBS. Pro účely hledání vhodných parametrů stačí spustit výpočty pro nižší velikosti podsystémů pro zvýšení výpočetní rychlosti. Hledání jsme v této práci prováděli nejprve iteracemi po velkých krocích (změny parametrů o 0,2) a potom postupně s menšími kroky hledali na okolí optimálních parametrů z předchozích iterací. Takto se podařilo najít hodnoty parametrů, pro které byla chaotická oblast dostatečně velká, a kde byly dobře vidět stavy QMBS.

Parametry v obrázku 3.1 nebyly nalezeny touto cestou, ale byly převzaty z prací (García-Ramos a kol., 2016) a (García-Ramos a kol., 2017), kde autoři také hledali chaotické části spektra. Tato konkrétní verze 2-Lipkinova modelu nám bude sloužit jako startovací bod pro demonstrování těchto metod hledání jizev.

Entropie provázání

Dále vypočítám entropii provázání jak byla představená v kapitole 2.2.2 z parciálních stop matic hustoty vlastních stavů.



Obrázek 3.2: Entropie provázání S a trojnásobek míry chaosu 3η v závislosti na přeškálované energii e pro 2-Lipkinův model s parametry $\{x = 0,5, y_1 = 1, y_2 = -0,5\}$ a s velikostmi podsystémů $N_1 = N_2 = 70$. Je vyznačena plně chaotická oblast určená na základě S a η .

Na obrázku je velmi dobře vidět, které části spektra jsou plně chaotické a které jsou smíšené a regulární, podle struktur v hodnotách entropie provázání S . V Regulárních oblastech jsou rozeznatelné nějaké struktury zatímco, v těch chaotických se body hromadí na sobě. Navíc podle předpokladů mají regulární spektra nižší hodnoty entropie provázání než ty chaotické. Dále pokud porovnáme entropie provázání s mírou chaotičnosti η , tak můžeme přímo vymezit chaotické a regulární oblasti od těch smíšených. Tyto struktury nám připomínají Peresovy mříže, kde střední hodnoty pozorovatelné jsou uspořádané na regulární oblasti a neuspořádané na té chaotické.

Pro lepší čitelnost budeme v těchto obrázcích, kde prokládám hodnoty entropie provázání mírou chaotičnosti η , násobit míru chaotičnosti η nějakou konstantou tak, aby $\eta = 1$ bylo na ose y grafu v maximu.

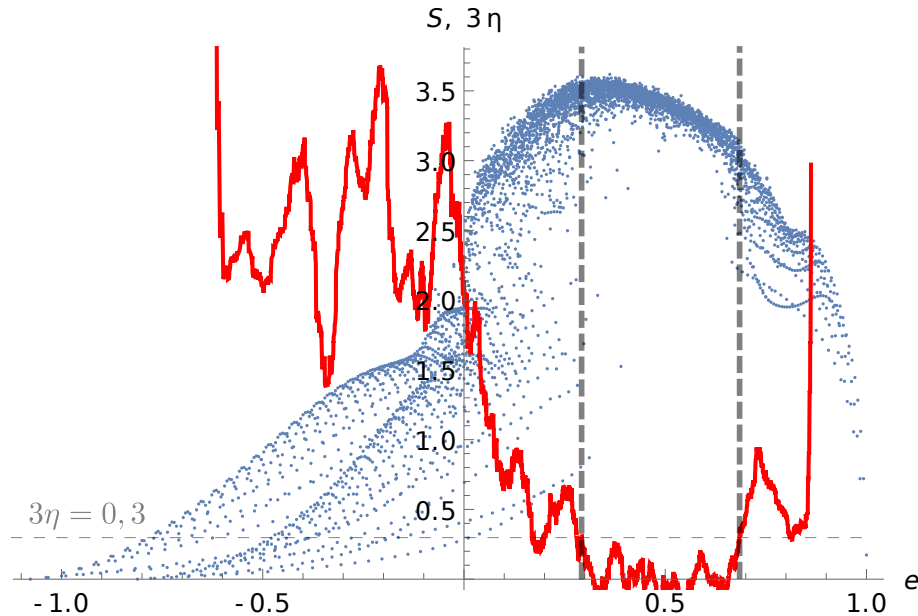
Stavy QMBS pak hledáme jako stavy, které leží v téměř plně chaotické oblasti $\eta \leq 0.1$ a mají entropii provázání, která je blíže regulárním stavům než okolním stavům uprostřed chaotického spektra. I na obrázku 3.2 vidíme několik bodů uprostřed chaotické části spektra, které mají výrazně nižší hodnoty entropie provázání než okolní. Tyto body budeme brát jako potenciální stavy QMBS, na které se zaměříme při další analýze.

Po identifikaci stavů, které mohou být QMBS na systému, uděláme Peresovy mříže pro různé operátory a studujeme, zda dochází pro tyto stavy k narušení předpovědi ETH.

3.3.2 Výsledky studia QMBS na Lipkinových modelech

2-Lipkinův model

Obrázky výše byli tvořeny pro parametry z článku (García-Ramos a kol., 2016) a (García-Ramos a kol., 2017). V této podkapitole představíme výsledky pro parametry, které jsme optimalizovali, aby byla chaotická část spektra co největší.

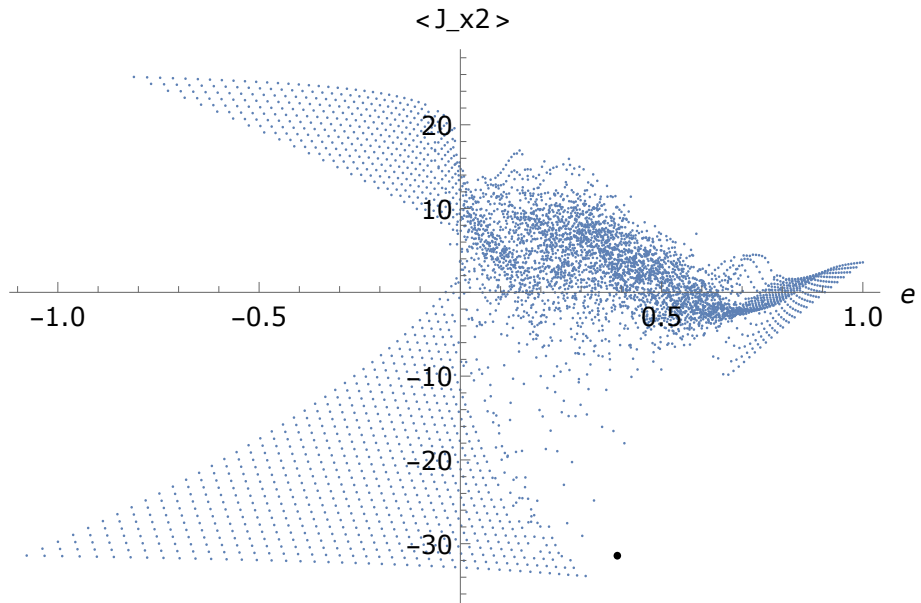


Obrázek 3.3: Entropie provázání S a trojnásobek míry chaosu 3η v závislosti na přeškálované energii e pro 2-Lipkinův model s parametry $\{x = 0,5, y_1 = 1,13, y_2 = -1,39\}$ a s velikostmi podsystémů $N_1 = N_2 = 70$. Je vyznačena oblast $\eta < 0.1$, ve které jsou dále hledány QMBS stavy.

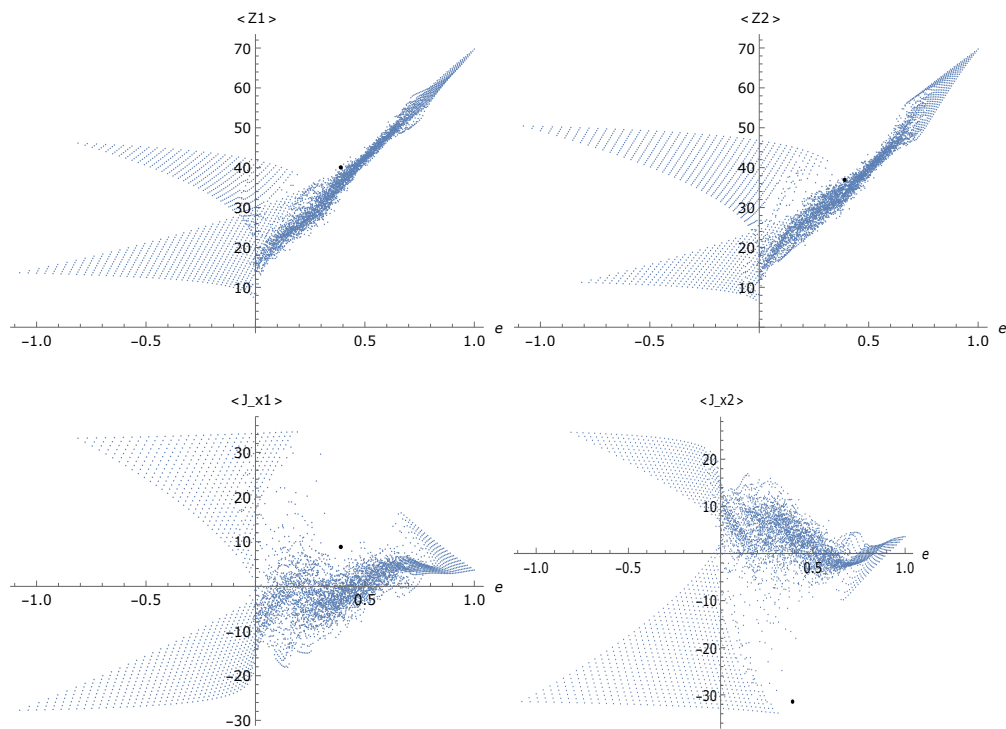
Na obrázku 3.3, kde popisujeme Perésovu mříž postavenou z operátoru momentu hybnosti $J_x^{(2)}$ na druhém podprostoru, můžeme vidět, že pro tyto parametry je chaotická oblast spektra větší než v předchozím případě a je lépe oddělená od regulárních částí spektra. Také na škálované energii $e = 0,39$ a entropii $S = 1,5$ vidíme stav, který jednoznačně leží uprostřed chaotické části spektra a jeho entropie provázání S je výrazně nižší než ta u okolních bodů.

Pokud sestavíme Perésovy mříže pro tento 2-Lipkinův model, viz obrázek 3.4, tak můžeme potvrdit, že tento stav narušuje ETH. Z rovnice (2.5) máme předpověď, že střední hodnoty operátoru budou funkcí energie a pseudonáhodné odchylky, která by měla být generovaná Gaussovou distribucí. Pokud se podíváme na obrázek 3.5, kde jsou Perésovy mříže z ostatních operátorů, tak se nám stav QMBS neodlišuje tak dobře od ostatních. I přesto pro narušení ETH stačí najít jeden operátor, kde se střední hodnota nechová jako funkce energie stejně jako u okolních stavů.

Na obrázku 3.4 je zřejmě vidět, že stav který jsme identifikovali jako QMBS leží uvnitř chaotické části spektra a výrazně vyčnívá svojí střední hodnotou operátoru.



Obrázek 3.4: Peresova mříž vystavěná z operátoru $J_x^{(2)}$. Stav QMBS je vyznačen černě.



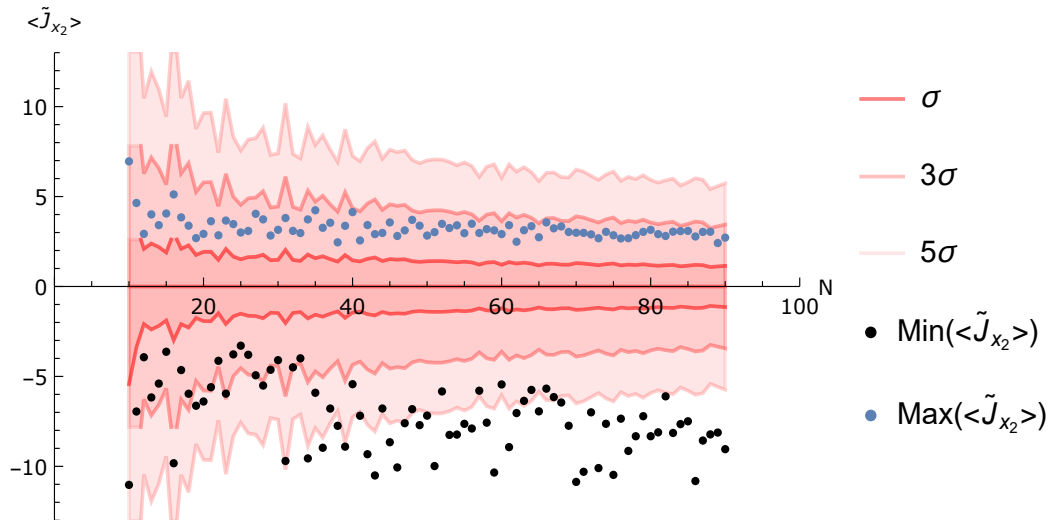
Obrázek 3.5: Peresovy mříže vystavěné z operátorů $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $J_x^{(1)}$, $J_x^{(2)}$. Stav QMBS je vyznačen černě, kde $Z^{(i)} = J_z^{(i)} + \frac{N_i}{2}$

Dále se díváme na to, jestli budeme schopni tento QMBS stav s anomální entanglement entropií a středními hodnotami v Peresových mřížích najít pro všechny velikosti systému. Stále držíme stejné velikosti podsystémů $N^{(1)} = N^{(2)} = N$ a zvětšujeme N . Pokud se podíváme do energetické oblasti škálované energie kolem bodu QMBS, $0,35 < e < 0,43$ pro různá N , tak zde často pozorujeme výskyt stavů, které silně vybočují od předpovědi ETH, které se viditelně odlišují od ostatních stavů.

Pro každou hodnotu velikosti systému N vybereme všechny stavy, které leží v intervalu přeškálované energie $0,35 < e < 0,43$. Pro tyto stavy spočteme střední hodnotu operátoru $\langle J_x^{(2)} \rangle$. Z hodnot $\langle J_x^{(2)} \rangle$ na tomto intervalu spočteme průměr $M = \overline{\langle J_x^{(2)} \rangle}$. Operátor normujeme, aby průměr byl roven nule následujícím způsobem:

$$\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle = \frac{\langle J_x^{(2)} \rangle - M}{M}. \quad (3.24)$$

Hodnota průměrné hodnoty M je zde lineárně rostoucí s velikostí systému N , z čehož vyplývá, že střední hodnoty $\langle J_x^{(2)} \rangle$ se škálují s velikostí podsystému N . Na obrázku 3.6 vykreslíme maximální a minimální hodnoty $\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle$ z intervalu $0,35 < e < 0,43$ a spočítáme variance σ^2 , ze kterých vykreslíme intervaly $(\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle - k\sigma, \langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle + k\sigma)$ kde $k = 1, 3, 5$.



Obrázek 3.6: Studium výchylek $\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle$ na velikosti podsystému N . Maximální hodnoty $\text{Max}\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle$ pro každé N jsou vykresleny jako modré body a minima černě.

Na obrázku 3.6 vidíme, že pro dostatečně vysoká N máme alespoň jeden stav, který má výrazně nižší hodnotu než ostatní stavy na tomto energetickém intervalu. Tyto hodnoty vybočují o více než 5σ . Tyto stavy prohlásíme za narušení ETH a tedy i za QMBS. Pro nízká N máme málo bodů v energetické intervalu, a proto i výrazně větší intervaly σ . I pro nízké hodnoty N můžeme usoudit, že jsou tyto vyčnívající body spíše příznakem QMBS než statistickou odchylkou. Maximální hodnoty $\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle$ z grafu zde slouží jako dobrý odhad, kam až padají odchylky podle předpovědi ETH. Na Peresových mřížích nám maximální hodnoty

viditelně nevybočovaly a stavy, které tyto hodnoty nabývaly mají očekávané hodnoty entropie provázání. Při srovnání výchylky shora i zdola vidíme, že minima jsou skutečně anomální.

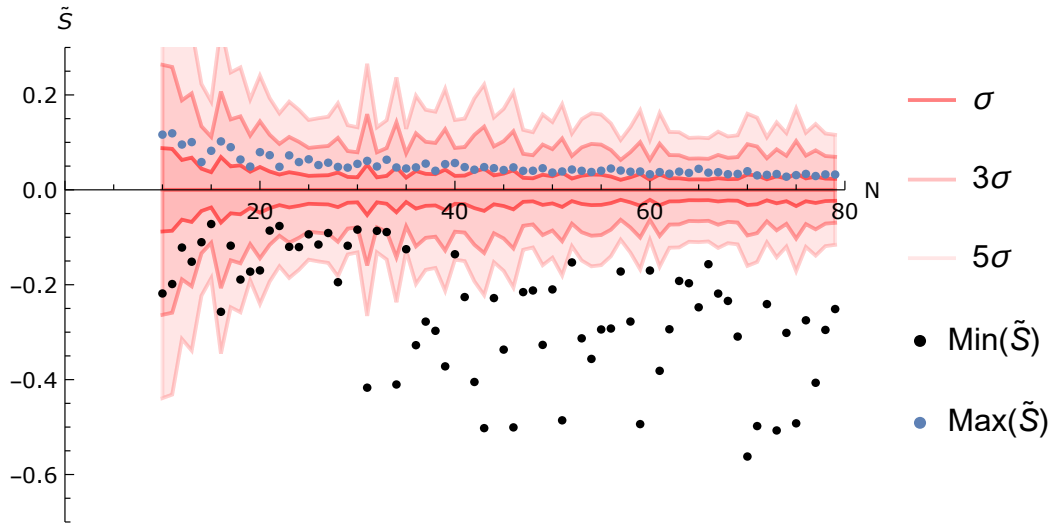
Na grafu 3.6 vidíme, že pokud pro nějaké N najdeme stav QMBS, tak jsme schopni i pro jiná N najít stavy, které jsou na stejných energiích stejně odchýlené od předpovědi ETH. Později na grafu 3.7 vidíme i podobnost na entropiích provázání. Tyto stavy, které pro různá N nacházíme na stejných místech v grafech Peresových mřížích a entropiích provázání, můžeme říct že patří ke stejné QMBS. Pro jednu hodnotu N můžeme mít na intervalu více stavů QMBS, ale na obrázku 3.6 vykreslujeme pouze tu nejvýraznější. Nejvýraznější QMBS nacházíme na hodnotě $\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle = -10$ a pak vidíme řadu QMBS na kolem $\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle = -8$. Pro stejné QMBS je v grafu odchylka od přeškálované střední hodnoty konstantní. Z tohoto můžeme usoudit, že QMBS s rostoucím N nezmizí.

Stejnou analýzu provedeme i pro entropie provázání, se stejným normováním:

$$\tilde{S} = \frac{S - M}{M}. \quad kde \ M = \bar{S}, \quad (3.25)$$

Na stejném intervalu, tak pozorujeme, že pro stejné hodnoty N se oddělují body stejným způsobem. Aneb pro N , kde jsou silně oddělené entropie, tak se stejný stav výrazně odděluje i na Peresově mříži. V entropii provázání stavy QMBS více vybočují od ostatních stavů, ale pro ověření narušení ETH potřebujeme provést analýzu i na Peresově mříži.

V posledních kapitolách této práce budeme studovat lokalizaci Husimiho funkce na semiklasické limitě stavů, které jsme zde identifikovali jako QMBS.



Obrázek 3.7: Studium výchylek entropie provázání S na velikosti systému N . Maximální hodnoty pro dané N jsou vykresleny jako modré body a minima černě.

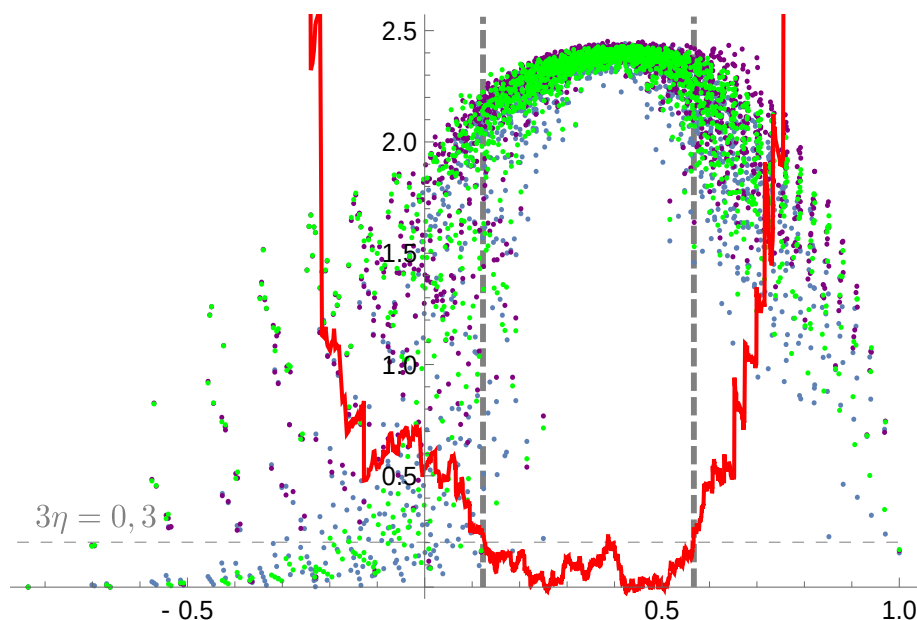
3-Lipkinův model

Na vícenásobných Lipkinových modelech dostáváme lépe rozlišené chaotické a regulární části spektra a jsme schopni najít stavy QMBS i při simulacích menších velikostech než v případě 2-Lipkinových modelů. Nevýhodou těchto vícenásobných modelů je pak přidání extra dimenzí do některých výpočtů a jak jsme psali výše, tak to podstatně znemožňuje vykreslení lokalizace těchto stavů v semiklasické limitě. V této podkapitole představíme výsledky pro 3-Lipkinovy modely.

3-Lipkinův model jsme zvolili s parametry: $\{x = 0,5, y_1 = 1, y_2 = -0,2, y_3 = -1.1\}$. A velikost podsystémů $N_1 = N_2 = N_3 = 11$. S takto zvoleným 3-Lipkinových modelech jsme v krátkém výpočetním čase byli schopni najít dobře definovanou chaotickou oblast a v ní dva izolované stavy QMBS.

Pro 3-Lipkinův model máme volnost při výpočtu entropii provázání, kdy v systému se třemi dobře definovanými podsystémy, není jednoznačná cesta k provedení parciální stopy. V této práci jsme stopovali přes každý z podsystémů zvlášť a potom porovnali výsledky v následujícím grafu 3.8.

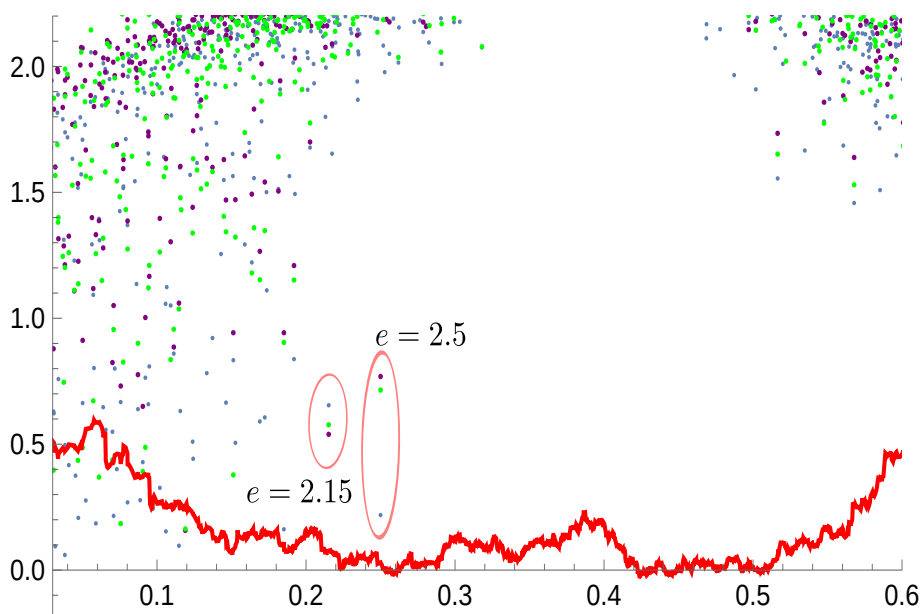
Modře jsou znázorněny hodnoty entropie provázání získané stopováním přes první podsystém, fialově přes druhý a zeleně přes třetí podsystém. Takto vypočítané entropie provázání mají různé hodnoty, protože počítají míru provázání mezi zvoleným podsystémem a zbylou dvojicí. Na druhou stranu je chaotičnost nezávislá na stopování, a proto pro všechny tři výpočty entropie provázání vidíme pravidelné struktury a neuspořádané data ve stejných částech spektra.



Obrázek 3.8: Entropie provázání S stopované přes všechny podsystémy. Modře jsou znázorněny hodnoty entropie provázání získané stopováním přes první podsystém, fialově přes druhý a zeleně přes třetí podsystém. Vykreslen je také průběh indikátoru chaosu 3η (červená čára). Svislé šedé čáry ohraničují chaotickou oblast.

Na obrázku 3.8 jsou vidět rozdíly v jednotlivých entropiích a ja jejich tvaru můžeme rozlišit regulární a chaotické části spektra. Vidíme zde i několik stavů v chaotické oblasti, které hodnotami entropie provázání vyčnívají. Dále míra chaotičnosti η zde jde v regulárních částech spektra vysoko na 1 kvůli nízké hustotě dat.

Pokud se zaměřím na chaotickou/smíšenou oblast obrázku 3.8 (hodnoty $0 \leq e \leq 0,6$) tak jsme schopni najít dva izolované zjizvené stavy na hodnotách $e = 0,250$ a $e = 0,215$, viz obrázek 3.9. A vidíme, že tyto stavy byly vybrány nezávisle na volbě podsystému pro provedení parciální stopy pro výpočet entropie provázání.



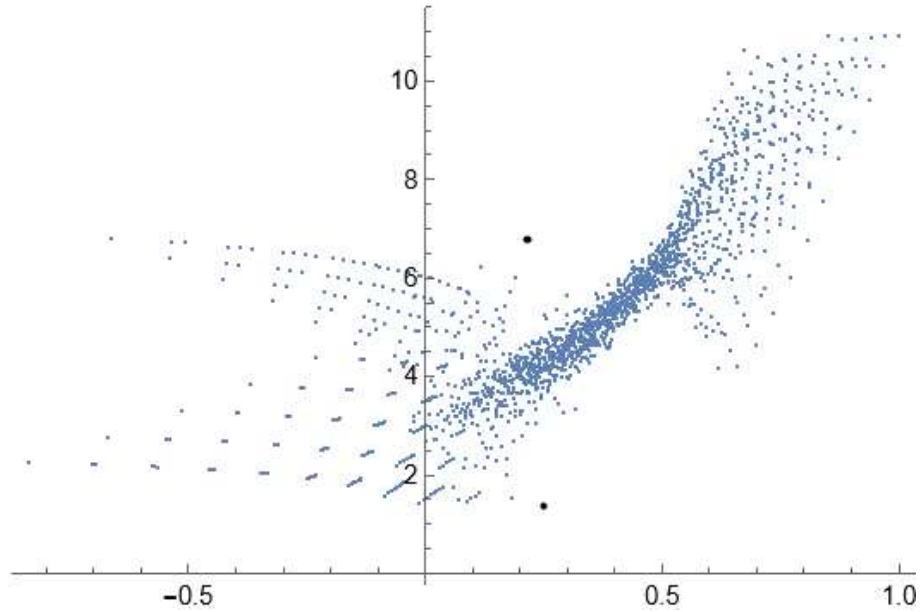
Obrázek 3.9: Entropie provázání S získané stopováním přes první podsystém, fialově přes druhý a zeleně přes třetí podsystém. Vykreslen je také průběh indikátoru chaosu 3η (červená čára). Svislé šedé čáry ohraničují chaotickou oblast. Zaměření na oblast $0 \leq e \leq 0,6$. Pozorujeme vybočující stavy (adepty na jizvy) s energiemi $e = 0,250$ a $e = 0,215$.

Dále můžeme sestavit Peresovy mříže pro různé operátory a zkontrolovat, zda nám tyto dva stavy vybočují od ostatních.

Na obrázku 3.10 vidíme že na tomto systému se stavy QMBS dobře projevují i na Peresových mřížích, kde stejně jako u entropie provázání, stavy QMBS viditelně vyčnívají oproti okolním stavům.

Operátor $Z^{(1)}$ je jedním z operátorů, které se vyskytují v konstrukci hamiltoniánu a proto byl zvolen pro konstrukci Peresovy mříže.

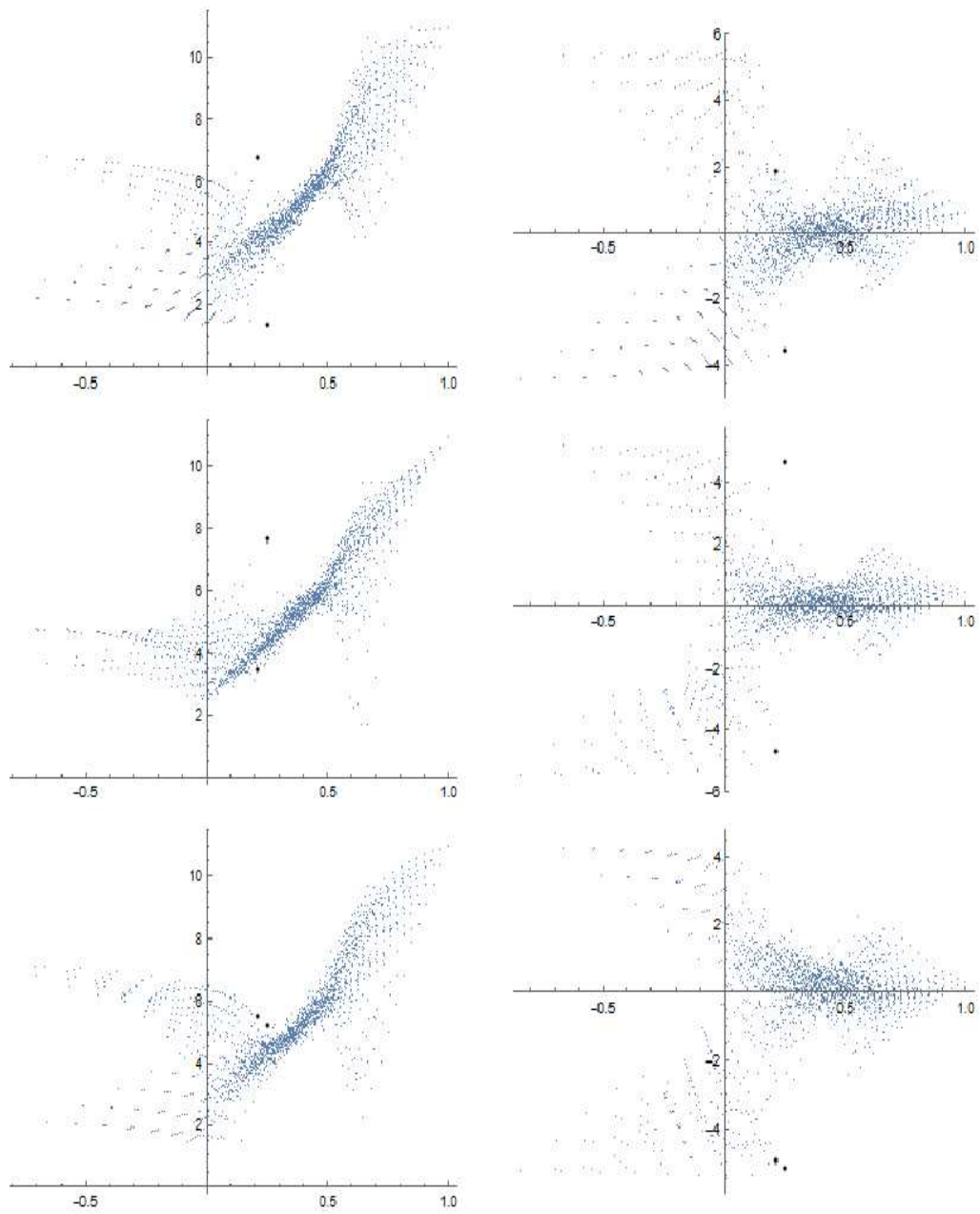
Na grafu Peresovy mříže 3.10 jdou opět dobře rozeznat chaotické části spektra od těch regulárních. Zase pozorujeme uspořádané struktury v regulární části a hromadění bodů v části chaotické. Stavy QMBS jsou necharakteristicky mimo ostatních bodů v chaotické části spektra. Jejich anomální hodnoty můžeme považovat za přímé narušení ETH. Z toho obrázku to dokonce vypadá jako by body QMBS byly pokračováním regulárních struktur do chaotické části spektra.



Obrázek 3.10: Peresova mříž operátoru $Z^{(1)} = J_z^{(1)} + \frac{N_1}{2}$. Střední hodnota operátoru $Z^{(1)}$ ve vlastním stavu $|E_n\rangle$ na ose y a energie E_n na ose x. Zjizvené stavy jsou zvýrazněny větší černou tečkou.

Pokud se podíváme na Peresovy mříže dalších operátorů, viz obrázek 3.11, tak můžeme dojít ke stejným závěrům. Nezávisle na volbě operátoru, stavy QMBS navazují na nějakou strukturu z regulární části spektra a to i v případech, kdy padnou přímo doprostřed chaotických bodů v Peresově mříži. Na těchto obrázcích Peresových mříží jsou vidět jasné rozdíly ve volbě podsystemu, na který působíme operátorem, i přes to, že se liší pouze o volbu parametrů y_i . V Peresových mřížích generovaných operátory působící na třetí podprostor nám body QMBS leží na stejné struktuře, zatímco v ostatních případech je každý z nich na jiné.

Zde se nabízí diskuze, zda je zde narušení ETH jevem QMBS, nebo jestli jde pouze o regulární část spektra, která leží uprostřed chaosu. Tyto možnosti se navzájem nevyklučují. V systému můžeme mít jak QMBS tak regularitu uprostřed chaotické části spektra. Pro rozlišení by bylo potřeba se podívat do klasické limity a diskutovat jestli se stavy lokalizují na regulárních torech nebo na nestabilních periodických orbitách.



Obrázek 3.11: Perésovy mříže pro operátory $:Z^{(1)}, J_x^{(1)}, Z^{(2)}, J_x^{(2)}, Z^{(3)}, J_x^{(3)}$. Vlevo operátory $Z^{(i)}$ a vpravo operátory $J_x^{(i)}$. Stavů QMBS jsou vyznačeny černou tečkou.

3.4 Lokalizace 2-Lipkinova modelu v klasické limitě

V předchozí kapitole jsme hledali stavy QMBS na základě přímého narušení předpovědí ETH. V této kapitole budeme studovat tyto stavy v klasické limitě. Pro vizualizaci použijeme Husimiho funkci po vzoru práce (Pilatosky-Cameo a kol., 2022). V této práci nezavádíme žádnou míru lokalizace. I bez nějaké objektivní míry lokalizace jsme schopni odlišit stavy, které jsme identifikovali jako QMBS, jako anomální.

3.4.1 Klasická limita a Husimiho funkce

Pro sestavení klasické limity 2-Lipkinova modelu použijeme Holstein-Primakoffovo mapování (Macek a kol., 2019) na každém podprostoru (pro přehlednost bez indexu podsystémů 1,2, které v této kapitole budeme psát dole)

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{N}{2}(q^2 + p^2 + 1) \\ J_+ &= \frac{N}{2}(q + ip)\sqrt{2 - (q^2 + p^2)} \\ J_- &= \frac{N}{2}(q - ip)\sqrt{2 - (q^2 + p^2)} \\ J_x &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{N}{2}q\sqrt{2 - (q^2 + p^2)}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

což vede na klasický hamiltonián 2-Lipkinova modelu

$$\begin{aligned} h_{cl} &= \frac{x}{4}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) - \frac{(1-x)}{16} * \\ &\left(2q_1\sqrt{2 - p_1^2 - q_1^2} + 2q_2\sqrt{2 - p_2^2 - q_2^2} + y_1(q_1^2 + p_1^2) + y_2(q_2^2 + p_2^2)\right)^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Stavy pro Husimiho funkci potřebujeme stav $|x\rangle$ sestavený z Blochových atomových stavů pro každý podprostor

$$|x\rangle = |q_1p_1\rangle \otimes |q_2p_2\rangle, \quad (3.28)$$

kde Blochovy atomové stavy mají tvar:

$$|q_i p_i\rangle = \left(1 - \frac{(p_i^2 + q_i^2)}{2}\right)^2 \exp\left(\frac{(q_i + ip_i)\hat{J}_{i+}}{\sqrt{2 - p_i^2 - q_i^2}}\right) |j, -j\rangle. \quad (3.29)$$

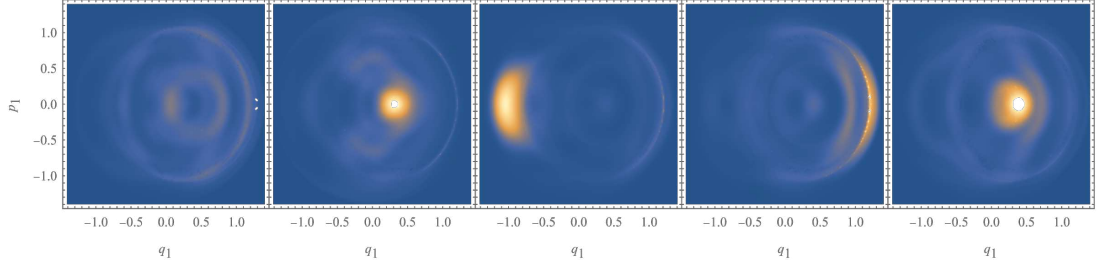
Výrazy q_i, p_i se liší od Blochových atomových stavů v kapitole 2.3.2 o faktor $\sqrt{2}$, aby to byly škálovány stejně jako v předpisu klasické limity hamiltoniánu. Husimiho funkci $\tilde{Q}_k(p_1, q_1)$ počítáme vzorcem:

$$\tilde{Q}_k(p_1, q_1) = \int \int dq_2 dp_2 \delta(h_{cl}(x) - \epsilon_k) Q_k(x), \quad (3.30)$$

kde $Q_k(x) = \langle x|E_k\rangle\langle E_k|x\rangle$, ϵ_k je energie vlastních stavů $|E_k\rangle$ a vektor $x = (q_1, p_1, q_2, p_2)$. Pro vykreslování mocnin Husimiho funkce budeme jednoduše umocňovat $\tilde{Q}_k(P, Q)$, namísto mocnin v integraci.

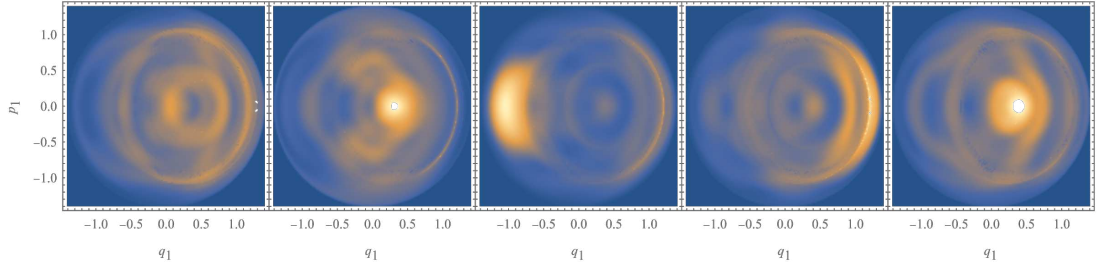
3.4.2 Lokalizace Husimiho funkce

Klasickou limitu a výpočet Husimiho funkce provedeme pro 2-Lipkinův model s parametry $(x = 0.5, y_1 = 1.13, y_2 = -1.39)$ jako v kapitole 3.3.2. pro velikosti podsystémů $N_1 = N_2 = 31$ a $N_1 = N_2 = 16$. Velikosti podsystémů byly zvoleny na základě analýzy v grafech 3.6, 3.7 tak, aby měly co nejmenší velikost podsystému a nejvíce vyčnívající stav QMBS. Budeme vykreslovat stavy, které jsme identifikovali jako QMBS a pro srovnání také okolní stavy. Dále vykreslíme regulární stavy z obou konců spektra, abychom měli porovnání stavů QMBS, ergodických² a regulárních.



Obrázek 3.12: Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(p_1, q_1)$, stavů QMBS ($k = 613$) a okolních stavů. Na obrázku jsou stavy, ($k=611, k=612, k=613, k=614, k=615$)

Na obrázku 3.12 jsou vidět projekce Husimiho funkce podle vzorce (3.30). Z tohoto obrázku není jasné, jestli je stav QMBS lépe lokalizovaný než ty ostatní. Pro lepší vizualizaci vykreslíme odmocninu z Husimiho funkce, která zvýší kontrast a umožní nám lépe porovnávat, na jak velké části fázového prostoru se stav nachází.

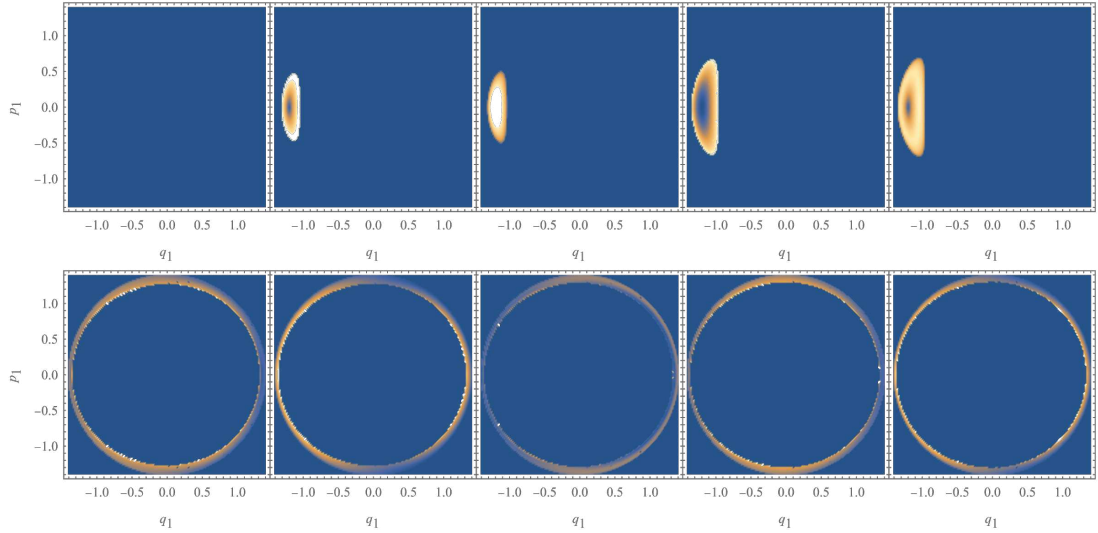


Obrázek 3.13: Odmocnina z projekce Husimiho funkce $\sqrt{\tilde{Q}_k(p_1, q_1)}$, stavů QMBS ($k = 613$) a okolních stavů. Na obrázku jsou stavy, ($k=611, k=612, k=613, k=614, k=615$)

Na obrázku 3.13 vidíme, že se nám tento stav QMBS lépe lokalizuje. Pro další porovnání vykreslíme $\sqrt{\tilde{Q}_k(p_1, q_1)}$ i pro stavy z regulární části spektra. Do obrázku 3.14 vykreslíme stavy s minimálními a maximálními energiemi.

Vidíme, že pro maximální energie se stav lokalizuje na hranicích fázového prostoru. Pro minimální energie jsou stavy lokalizované na záporných hodnotách q_1 . Dále na obrázku 3.15 srovnáme Husimiho funkce stavů QMBS pro různé velikosti podsystému N .

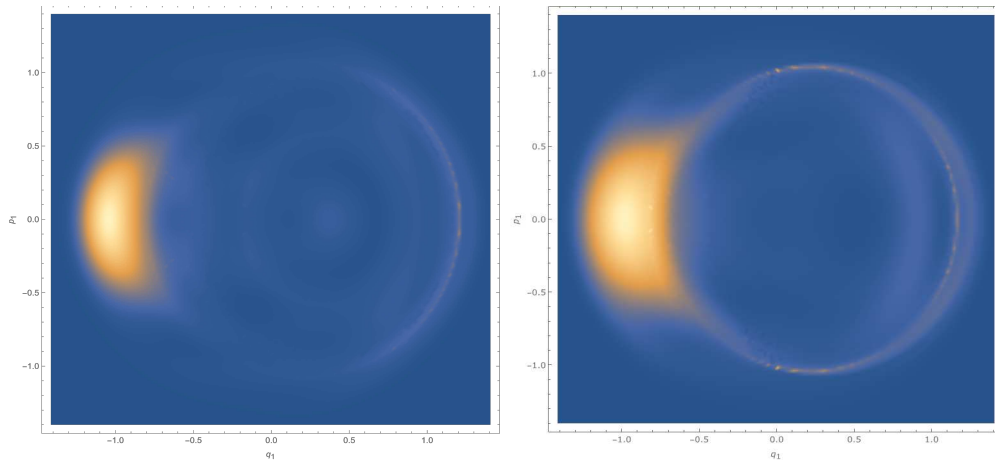
²Stavů v chaotické části spektra, které se chovají podle předpovědi ETH



Obrázek 3.14: Odmocnina z projekce Husimiho funkce $\sqrt{\tilde{Q}_k(p_1, q_1)}$, stavů stává z regulárních částí spektra.

Nahoře pro minimální energie ($k=1, k=2, k=3, k=4, k=5$)

Dole pro maximální energie ($k=1014, k=1015, k=1016, k=1017, k=1018$)



Obrázek 3.15: Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(p_1, q_1)$ Stav QMBS pro různé velikosti podsystémů N . v levo pro $N = 31$ stav $k = 613$ a v pravo pro $N = 16$ stav $k = 166$

Tyto stavy jsme na základě podobnosti z analýzy na Peresových mřížích označily jako stejnou QMBS, viz 3.6. Na obrázku vidíme, že tyto stavy vypadají v klasické limitě stejně. Tímto si potvrzujeme, že tyto stavy můžeme nazývat za realizaci stejné QMBS. Jsou na stejné normalizované energie, jsou na stejném místě na normalizované Peresově mříži a jejich semiklasická limita vypadá stejně.

Stav QMBS se na rozdíl od okolních chaotických stavu lokalizuje také kolem záporných hodnot q_1 , podobně jako stavy minimální energie. Pokud se vrátíme k grafu Peresovy mříže 3.4, tak vidíme, že se tyto stavy QMBS nachází na stejných hodnotách jako body s minimální energií. Toto je další signál indikátor toho, že by tyto stavy QMBS mohli být důsledkem přežívající regulární struktury v klasické části spektra.

Závěr

V první kapitole této práce jsme představili pojem chaos v jak klasickém tak kvantovém případě. V klasickém případě jsme dali důraz na chaotickou dynamiku na billiardech. V kapitolách o kvantovém chaosu jsme kromě standardních definic, představili i metody pro identifikaci chaotické části spektra v systému, který má jak chaotickou tak regulární část spektra. Především vizualizace na základě Peresových mříží.

V druhé kapitole této práce jsme se věnovali zavedení fyzikálního jevu kvantového jizvení. Nejprve ve stručnosti pro jednočásticové jizvy, které se vyznačují nestandardní lokalizací kolem trajektorií nestabilních periodických orbit. Pokud sestavíme vlnový balík kolem těchto periodických orbit tak pro jednočásticové jizvy pozorujeme i anomální odolnost proti časovému vývoji.

Většinu této kapitoly jsme se věnovali mnohočásticovým kvantovým jizvám QMBS, které se projevují jako stavy, které se výrazně odlišují od předpovědí ETH. V druhé kapitole jsme se věnovali představení ETH a příkladům jeho narušení z článků. Pro QMBS jako nevlastní stavy je to zejména odolnost vůči časovému vývoji v podobě periodický revivalů, které jsou dobře vidět pro PxP modely. Pro identifikaci stavů QMBS se používá entropie provázání, na které se výrazně odliší stavy, které mají vysokou projekci na nevlastní stavy QMBS a izolované QMBS, které jsou vlastními stavy. Na konci druhé kapitoly jsme shrnuly metody studia QMBS na základě lokalizace v Husimiho semiklasické limitě na Dickeho modelu.

V poslední kapitole této práce jsme aplikovaly výše zmíněné metody na jiné modely než jsou uváděné v literatuře. Představili vícenásobné Lipkinovy modely, které rozšiřují Lipkinuv model o další typy interagující částice. Tyto modely mají ve spektru dobře oddělenou chaotickou část spektra, na které můžeme hledat stavy QMBS. Pro 2-Lipkinův a 3-Lipkinův model jsme na základě entropie provázání stavy, které jsou potenciálními izolovanými QMBS. Pro tyto stavy jsme potvrdili, že přímo narušují ETH, vystavením Peresových mříží a porovnáním s okolními ergodickými stavy.

Pro 2-Lipkinovy stavy jsme provedly detailnější analýzu. Studovali jsme anomality hodnot entropií provázání a středních hodnot operátorů, v závislosti na velikosti systému. Zde jsme pozorovaly podobnosti mezi stavy QMBS napříč různými velikostmi systému. Nakonec jsme provedly klasickou limitu a vykreslily Husimiho funkci na klasickém fázovém prostoru. Na Husimiho funkci jsme ukázaly, že stavy, které jsme identifikovali jako QMBS vyčnívají oproti okolním ergodickým stavům. Stavy QMBS byli lokalizované na menší části fázového prostoru než okolní a i na Husimiho funkcích jsme pozorovali, že jsou si tyto stavy velmi podobné. Jak na Peresových mřížích, tak na Husimiho funkcích jsme pro tyto stavy pozorovali podobnost stavům s nízkými energiemi z regulární části spektra. Toto naznačuje, že by QMBS na 2-Lipkinově modelu mohly být symptomem existence regularity uprostřed chaotické části spektra.

Seznam použité literatury

- ARIMA, A. a IACHELLO, F. (1981). The interacting boson model. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **31**(1), 75–105.
- BERNIEN, H., SCHWARTZ, S., KEESLING, A., LEVINE, H., OMRAN, A., PICHLER, H., CHOI, S., ZIBROV, A. S., ENDRES, M., GREINER, M., VULETIĆ, V. a LUKIN, M. D. (2017). Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator. *Nature*, **551**(7682), 579—584. ISSN 0028-0836. doi: 10.1038/nature24622.
- BERRY, M. (2006). Quantum chaology, not quantum chaos. *Physica Scripta*, **40**, 335. doi: 10.1088/0031-8949/40/3/013.
- BOHIGAS, O., GIANNONI, M.-J. a SCHMIT, C. (1984). Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical review letters*, **52**(1), 1.
- BUNIMOVICH, L. (2007). Dynamical billiards. *Scholarpedia*, **2**(8), 1813.
- BUNIMOVICH, L. A. (2001). Mushrooms and other billiards with divided phase space. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **11**(4), 802–808.
- CEJNAR, P., STRÁNSKÝ, P., MACEK, M. a KLOC, M. (2021). Excited-state quantum phase transitions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **54**(13), 133001.
- CHOI, S., TURNER, C. J., PICHLER, H., HO, W. W., MICHAELIDIS, A. A., PAPIĆ, Z., SERBYN, M., LUKIN, M. D. a ABANIN, D. A. (2019). Emergent $su(2)$ dynamics and perfect quantum many-body scars. *Phys. Rev. Lett.*, **122**, 220603. doi: 10.1103/PhysRevLett.122.220603. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.220603>.
- D’ALESSIO, L., KAFRI, Y., POLKOVNIKOV, A. a RIGOL, M. (2016). From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Advances in Physics*, **65**(3), 239–362.
- DEVANEY, R. (2021). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. ISBN 9780429280801. doi: 10.1201/9780429280801.
- GARCÍA-RAMOS, J. E., PÉREZ-FERNÁNDEZ, P. a ARIAS, J. M. (2017). Excited-state quantum phase transitions in a two-fluid lipkin model. *Phys. Rev. C*, **95**, 054326. doi: 10.1103/PhysRevC.95.054326. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.95.054326>.
- GARCÍA-RAMOS, J.-E., PEREZ-FERNANDEZ, P., ARIAS, J. a FREIRE, E. (2016). Phase diagram of the two-fluid lipkin model: A “butterfly” catastrophe. *Physical Review C*, **93**. doi: 10.1103/PhysRevC.93.034336.

- HELLER, E. J. (1984). Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems: Scars of periodic orbits. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1515–1518. doi: 10.1103/PhysRevLett.53.1515. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.1515>.
- KAPLAN, L. a HELLER, E. (1998). Linear and nonlinear theory of eigenfunction scars. *Annals of Physics*, **264**(2), 171–206.
- MACEK, M., STRÁNSKÝ, P., LEVIATAN, A. a CEJNAR, P. (2019). Excited-state quantum phase transitions in systems with two degrees of freedom. iii. interacting boson systems. *Physical Review C*, **99**(6), 064323.
- MOUDGALYA, S., RACHEL, S., BERNEVIG, B. A. a REGNAULT, N. (2018a). Exact excited states of nonintegrable models. *Phys. Rev. B*, **98**, 235155. doi: 10.1103/PhysRevB.98.235155. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.235155>.
- MOUDGALYA, S., REGNAULT, N. a BERNEVIG, B. A. (2018b). Entanglement of exact excited states of affleck-kennedy-lieb-tasaki models: Exact results, many-body scars, and violation of the strong eigenstate thermalization hypothesis. *Phys. Rev. B*, **98**, 235156. doi: 10.1103/PhysRevB.98.235156. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.235156>.
- MOUDGALYA, S., BERNEVIG, B. A. a REGNAULT, N. (2022). Quantum many-body scars and hilbert space fragmentation: a review of exact results. *Reports on Progress in Physics*, **85**(8), 086501. doi: 10.1088/1361-6633/ac73a0. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ac73a0>.
- PERCIVAL, I. (1973). Regular and irregular spectra. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, **6**(9), L229.
- PERES, A. (1984). New conserved quantities and test for regular spectra. *Phys. Rev. Lett.*, **53**, 1711–1713. doi: 10.1103/PhysRevLett.53.1711. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.1711>.
- PILATOWSKY-CAMEO, S., VILLASEÑOR, D., BASTARRACHEA-MAGNANI, M. A., LERMA-HERNÁNDEZ, S., F. SANTOS, L. a HIRSCH, J. G. (2022). Identification of quantum scars via phase-space localization measures. *Quantum*, **6**, 644. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2022-02-08-644. URL <https://doi.org/10.22331/q-2022-02-08-644>.
- POINCARÉ, H. a POPP, B. (2017). *The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics: Poincaré’s Foundational Work on Dynamical Systems Theory*. Astrophysics and Space Science Library. Springer International Publishing. ISBN 9783319528991. URL <https://books.google.cz/books?id=TjPbDgAAQBAJ>.
- REHEMANJIANG, A., ALLGAIER, M., JOYNER, C., MÜLLER, S., SIEBER, M., KUHL, U. a STÖCKMANN, H.-J. (2016). Microwave realization of the gaussian symplectic ensemble. *Physical review letters*, **117**(6), 064101.
- RIGOL, M., DUNJKO, V. a OLSHANII, M. (2008). Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems. *Nature*, **452**(7189), 854–858.

- SERBYN, M., ABANIN, D. A. a PAPIĆ, Z. (2021). Quantum many-body scars and weak breaking of ergodicity. *Nature Physics*, **17**(6), 675–685.
- SREDNICKI, M. (1999). The approach to thermal equilibrium in quantized chaotic systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **32**(7), 1163.
- STÖCKMANN, H.-J. (2010). Microwave billiards and quantum chaos. *Scholarpedia*, **5**(10), 10243.
- TURNER, C. J., MICHAILIDIS, A. A., ABANIN, D. A., SERBYN, M. a PAPIĆ, Z. (2018a). Quantum scarred eigenstates in a rydberg atom chain: Entanglement, breakdown of thermalization, and stability to perturbations. *Phys. Rev. B*, **98**, 155134. doi: 10.1103/PhysRevB.98.155134. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.98.155134>.
- TURNER, C. J., MICHAILIDIS, A. A., ABANIN, D. A., SERBYN, M. a PAPIĆ, Z. (2018b). Weak ergodicity breaking from quantum many-body scars. *Nature Physics*, **14**(7), 745–749. ISSN 1745-2481. doi: 10.1038/s41567-018-0137-5. URL <http://dx.doi.org/10.1038/s41567-018-0137-5>.
- TURNER, C., MICHAILIDIS, A., ABANIN, D., SERBYN, M. a PAPIĆ, Z. (2018c). Quantum scarred eigenstates in a rydberg atom chain: Entanglement, breakdown of thermalization, and stability to perturbations. *Physical Review B*, **98**(15), 155134.
- VELLEKOOP, M. a BERGLUND, R. (1994). On intervals, transitivity = chaos. *The American Mathematical Monthly*, **101**(4), 353–355. ISSN 00029890, 19300972. URL <http://www.jstor.org/stable/2975629>.
- WANG, Q.-Q., TAO, S.-J., PAN, W.-W., CHEN, Z., CHEN, G., SUN, K., XU, J.-S., XU, X.-Y., HAN, Y.-J., LI, C.-F. a KOL. (2022). Experimental verification of generalized eigenstate thermalization hypothesis in an integrable system. *Light: Science & Applications*, **11**(1), 194.
- WIGNER, E. P. (1955). Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Annals of Mathematics*, **62**(3), 548–564. ISSN 0003486X. URL <http://www.jstor.org/stable/1970079>.
- ŠEBA, P. (1990). Wave chaos in singular quantum billiard. *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1855–1858. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.1855. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1855>.

Seznam obrázků

1.1	Dynamické billiardy. (Stöckmann, 2010) (a) Příklad integrabilního billiáru. Hranici tvoří kružnice (b) Bunimovičův stadion: příklad chaotického billiáru	8
1.2	Příklad Peresovy mříže (modré body) proložené mírou chaotičnosti η (červená čára), viz rovnice (1.13)).	12
2.1	Jednočásticové jizvy na Bunimovičově stadionu (Heller, 1984) (a) Hustota stavů na stadionu (b) Zvýrazněné periodické orbity proložené čarou pro ilustraci. (Stejný obrázek jako v (a) s zvýšeným kontrastem pro lepší čitelnost)	15
2.2	Fidelita $ \langle g(0) g(t)\rangle ^2$ na Bunimovičově stadionu. Modře gaussianský balík kolem zjizveného stavu, červeně náhodný stav po krátkém čase. U zjizveného stavu vidíme výrazný návrat. (Serbyn a kol., 2021)	16
2.3	Fidelita Z_k stavu v PxP modelech. Jsou zde vidět skoro dokonalé revivaly. Stav Z_k pro malé hodnoty k byly označeny jako QMBS. (Turner a kol., 2018a)	19
2.4	Přítomnost periodických revivalů v kvantové simulaci Rydberg-atomů (Bernien a kol., 2017). Na ose x je čas od provedení quenche v simulaci. Na ose y je hustota doménové zdi, což je hodnota, která kvantifikuje šanci na přechod do uspořádaného stavu. Zde jde konkrétně o šanci na přechod do stavu Z_2 , který poté podrobněji popíšeme v kapitole o PxP modelech.	20
2.5	Entropie provázání stavů v závislosti na energii v PxP modelu (Choi a kol., 2019). Stav QMBS mají výrazně nižší entropii provázání. Je zde velmi dobře vidět struktura věže stavů.	21
2.6	Normalizovaná entropie provázání v závislosti na energii stavu v AKLT modelu (Moudgalya a kol., 2018b). QMBS stavy jsou zde viditelně odlišené od ostatních chaotických stavů. Obzvláště stav na $E = 6$, který náleží do věže stavů.	21
2.7	(a) Entropie provázání S a (b) projekce na Néelovy Z_2 stavy v závislosti na energii vlastních stavů. (Turner a kol., 2018c). Barva značí hustotu stavů. Na grafu (b) vidíme strukturu věží stavů, kde vyšší hodnoty projekce na Z_2 jsou přesně ekvidistantně rozdělené a i stavy s nižší projekcí se hromadí kolem struktury těchto věží. Na grafu (a) zase vidíme, že entropie provázání identifikuje stavy, které pak na druhém grafu mají největší hodnoty projekce na Z_2	23
2.8	Struktura stavů na řetízku $L = 6$. Obrázek ukazuje všechny dostupné stavy v tomto modelu a všechny možné přechody mezi nimi. Na levém konci máme stav Z_2 a na pravém Z'_2 . D_{Z_2} je počet přechodu pro změnu Z_2 na D_{Z_2} . (Turner a kol., 2018b)	24

2.9	Spektrální statistika Pxp modelu (Turner a kol., 2018b). Na větším grafu máme NNDS pro Pxp modely s délkou řetízku L . Přerušované čáry jsou NNDS pro regulární (P - Poisson), mixované (SP - SemiPoisson) a chaotické (WD - Wigner Dison) spektra. V menším grafu vidíme hustotu stavů v závislosti na energii.	25
2.10	Peresova mříž pro Pxp model s $L = 30$. Výrazné narušení ETH na střední hodnotě operátoru \hat{Z}_1 . Modrou čarou je vyznačená termodynamická předpověď pro hodnotu \hat{Z}_1 v závislosti na energii.	25
2.11	Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(P, Q)$ viz vzorec (2.21). Jsou zde vykresleny stavy $A(k = 10303)$, $B(k = 10196)$ a $C(k = 9440)$, které jsou tři nejlépe lokalizované stavy v systému, na různých hodnotách α . Pro $\alpha = 2$ byly na obrázku červeně vyznačeny periodické trajektorie, které článek přiřazuje jednotlivým stavům.	27
2.12	Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(P, Q)$ viz vzorec (2.21). Jsou zde vykresleny stavy $G(k = 9731)$, $H(k = 9324)$, které ilustrují málo lokalizované stavy v systému a dále náhodný nevlastní stav R	28
3.1	Míra chaosu η v závislosti na přeškálované energii e pro 2-Lipkinův model s parametry $\{x = 0,5, y_1 = 1, y_2 = -0,5\}$ a s velikostmi podsystemů $N_1 = N_2 = 70$. Části spektra, kde je η velmi blízko nule jsou chaotické a části, kde se blíží nebo přesahují 1 jsou regulární.	34
3.2	Entropie provázání S a trojnásobek míry chaosu 3η v závislosti na přeškálované energii e pro 2-Lipkinův model s parametry $\{x = 0,5, y_1 = 1, y_2 = -0,5\}$ a s velikostmi podsystemů $N_1 = N_2 = 70$. Je vyznačena plně chaotická oblast určená na základě S a η	35
3.3	Entropie provázání S a trojnásobek míry chaosu 3η v závislosti na přeškálované energii e pro 2-Lipkinův model s parametry $\{x = 0,5, y_1 = 1,13, y_2 = -1,39\}$ a s velikostmi podsystemů $N_1 = N_2 = 70$. Je vyznačena oblast $\eta < 0,1$, ve které jsou dále hledány QMBS stavy.	36
3.4	Peresova mříž vystavěná z operátoru $J_x^{(2)}$. Stav QMBS je vyznačen černě.	37
3.5	Peresovy mříže vystavěné z operátorů $Z^{(1)}, Z^{(2)}, J_x^{(1)}, J_x^{(2)}$. Stav QMBS je vyznačen černě, kde $Z^{(i)} = J_z^{(i)} + \frac{N_i}{2}$	37
3.6	Studium výchylek $\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle$ na velikosti podsystemu N . Maximální hodnoty $\text{Max}\langle \tilde{J}_x^{(2)} \rangle$ pro každé N jsou vykresleny jako modré body a minima černě.	38
3.7	Studium výchylek entropie provázání S na velikosti systému N . Maximální hodnoty pro dané N jsou vykresleny jako modré body a minima černě.	39
3.8	Entropie provázání S stopované přes všechny podsystemy. Modře jsou znázorněny hodnoty entropie provázání získané stopováním přes první podsystem, fialově přes druhý a zeleně přes třetí podsystem. Vykreslen je také průběh indikátoru chaosu 3η (červená čára). Svislé šedé čáry ohraničují chaotickou oblast.	40

3.9	Entropie provázání S získané stopováním přes první podsystém, fialově přes druhý a zeleně přes třetí podsystém. Vykreslen je také průběh indikátoru chaosu 3η (červená čára). Svislé šedé čáry ohraničují chaotickou oblast. Zaměření na oblast $0 \leq e \leq 0,6$. Pozorujeme vybočující stavy (adepty na jizvy) s energiemi $e = 0,250$ a $e = 0,215$	41
3.10	Peresova mříž operátoru $Z^{(1)} = J_z^{(1)} + \frac{N_1}{2}$. Střední hodnota operátoru $Z^{(1)}$ ve vlastním stavu $ E_n\rangle$ na ose y a energie E_n na ose x . Zjizvené stavy jsou zvýrazněny větší černou tečkou.	42
3.11	Peresovy mříže pro operátory $:Z^{(1)}, J_x^{(1)}, Z^{(2)}, J_x^{(2)}, Z^{(3)}, J_x^{(3)}$. Vlevo operátory $Z^{(i)}$ a vpravo operátory $J_x^{(i)}$. Stavy QMBS jsou vyznačené černou tečkou.	43
3.12	Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(p_1, q_1)$, stavů QMBS ($k = 613$) a okolních stavů. Na obrázku jsou stavy, ($k=611, k=612, k=613, k=614, k=615$)	45
3.13	Odmocnina z projekce Husimiho funkce $\sqrt{\tilde{Q}_k(p_1, q_1)}$, stavů QMBS ($k = 613$) a okolních stavů. Na obrázku jsou stavy, ($k=611, k=612, k=613, k=614, k=615$)	45
3.14	Odmocnina z projekce Husimiho funkce $\sqrt{\tilde{Q}_k(p_1, q_1)}$, stavů stává z regulárních částí spektra. Nahoře pro minimální energie ($k=1, k=2, k=3, k=4, k=5$) Dole pro maximální energie ($k=1014, k=1015, k=1016, k=1017, k=1018$)	46
3.15	Projekce Husimiho funkce $\tilde{Q}_k(p_1, q_1)$ Stav QMBS pro různé velikosti podsystémů N . v levo pro $N = 31$ stav $k = 613$ a v pravo pro $N = 16$ stav $k = 166$	46