

## OPONENTSKÝ POSUDEK BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Autor bakalářské práce: Michal Ketner

Název práce: Dělitelnost v okruzích

Katedra: Katedra logiky FF UK

Oponent: doc. Radek Honzík, Ph.D.

Praha, 27.1.2024

### SHRNUTÍ

Práce se zabývá dělitelností v okruzích. Podle zadání práce měl student vytvořit text, který by sloužil k úvodu do problematiky dělitelnosti v oborech integrity, případně obecněji v okruzích. Nebylo podmínkou, aby student dokázal nové výsledky, ale na základě aktivní četby literatury a vlastního přemýšlení měl vytvořit text, který odpovídá v přehledné podobě na otázky ohledně dělitelnosti v okruzích a zkoumá hranice, kdy lze dělitelnost rozumně definovat (např. pro okruhy, v nichž neplatí Bezoutova věta). Dále měl student promyslet možnosti prvořádkové axiomatizace vlastností okruhů vzhledem k dělitelnosti.

Předložená práce tyto cíle vůbec nenaplnuje: text je z velké části nesrozumitelný z důvodu chybných a chybějících definic a nepřehledných či chybných důkazů, nesrozumitelného vyjadřování, ohromného množství překlepů, téměř nulových citací na zdroje, a nepřehledného formátování a značení. Není vůbec zřejmé, co student opsal z učebnic a co sám promyslel, lze tedy předpokládat, že jeho přínos k tématu je minimální. Část těchto problémů popisují podrobněji níže. Práce obecně působí, jako by ji student po sobě vůbec nečetl.

*Nedoporučuji práci k obhajobě a hodnotím ji stupněm 4 (neprospěl).*

Hodnocení stupněm 4 volím také proto, že student vůbec nerefletoval oponentský posudek z roku 2022, kdy byl také hodnocen stupněm 4. Práce má stále stejné nedostatky (některé chyby zůstaly doslova stejné), což ukazuje, že student možná odstranil překlepy a chyby explicitně zmíněné v posudku, ale zbytek práce nechal prakticky stejný.

Pokud by student chtěl práci přepracovat, doporučuji se soustředit na všechny chyby a nedostatky, které jsem specifikoval. Hlavně je potřeba řádně identifikovat vlastní přínos, nejen ve formě citací, ale také delším a správně napsaným úvodem apod. Dále je třeba správně citovat a opravit všechny jazykové, notační a konceptuální nedostatky práce (např. použít kontrolu pravopisu a celou práci si vytisknout a pečlivě přečíst). Seznam chyb níže není kompletní, je třeba další chyby samostatně vyhledat.

### PŘÍKLADY CHYB

#### **Podrobnější seznam chyb do strany 20.**

- (1) Oba abstrakty na straně iii obsahují překlepy a nesrozumitelné věty, např. “Pomocí konceptu ideálu zobecňujeme Čínskou zbytkovou větu a demonstrovat, že oslabení obecnosti teorie může být vhodné, neboť disponujeme efektivnějšími nástroji pro hledání řešení.” Řešení čeho? Proč je oslabení vhodné a jaké nástroje má student na mysli? V anglickém abstraktu: “A hierarchy of divisibility domains with properties to those of division on the integers is outlined.” Poznámka: Úplně stejná chyba (nehledě na chybnou angličtinu) je v neobhájené verzi z roku 2022.

- (2) Úvod na straně 2 je zcela nesrozumitelný, není z něj možné pochopit, co student v práci udělal, a jak je práce koncipována, např.
- “... z knihy Sun Tzu Suan Ching”. Student měl uvést, že se jedná o knihu čínského matematika Sun Tzua s názvem “Suan Ching” (přibližně “knihy výpočtů”), a také uvést, co přesně se tam říká (pokud ji již cituje).
- “V této práci ukážeme, že tato věta lze zevšeobecnit pro libovolný obor integrity.”
- “...Euklida, který jej uvedl ve svém díle Základy ..., přestože pravděpodobně není jejím autorem.” Proč “přestože”, čím to snižuje platnost výsledku? Proč je název tohoto díla přeložený do češtiny a čínská kniha výše nikoli?
- “...můžeme používat jen ve speciálních oborech...” Co je to speciální obor?
- “... i na těchto číslech funguje naše zevšeobecněná čínská zbytková věta.” Nejedná se o čísla, ale prvky nějakého oboru integrity. Proč “naše”? Je to definice autora, či jen nešikovné vyjadřování? Někdy je “čínská zbytková věta” s malým a někdy velkým “č”. Dále se říká “zobecněná” nikoli “zevšeobecněná”.
- (3) Strana 3. “...a to vede k otázce, zda je tato teorie axiomatizovatelná a dá se popsat pro obecné struktury...”. Student zřejmě nerozumí pojmu axiomatizovatelnosti: je-li něco “teorie”, tak je z definice axiomatizovatelné (axiomy jsou formule v dané teorii). Otázka má být, zda je axiomatizovatelná jistá třída okruhů. Takové nepochopení základních pojmů se prolíná celou prací.
- (4) Strana 3. “...které jsou vzájemně distributivní...” Distributivní je pouze násobení vzhledem ke sčítání.
- (5) Strana 3, Definice 1.1.1. Vzhledem ke komutativnosti násobení v 3. je zbytečné psát oboustrannou distributivitu v 2.
- (6) Strana 4, Definice 1.1.3. Definice je chybně, nulový prvek inverz nemá.
- (7) Strana 5. “.....jako invertibilní třídu pro  $a$  a pro nosič  $R$  jí značit jako  $R^*$ .”
- (8) Strana 5. Definice 1.1.7 “Mějme unitárním komutativním s nosičem  $R$ , pak...”
- (9)  $\mathbb{R}[x]$  není definováno. Vzhledem k tomu, že Lemma 1.1.8 dokazuje naprosto triviální fakt, dalo by se očekávat, že komplikovanější pojmy budou o to pečlivěji definovány, tak to ale není: čím komplikovanější koncept, tím méně detailů: buď student vzal jinou knihu a z ní čerpal, anebo komplikovanějším věcem nerozumí, tak raději nic neříká (dále v textu je takových příkladů mnoho).
- (10) Strana 6. Definice 1.2.11 Chybně zapsáno, má být  $\exists c : b = ac$ .
- (11) Strana 8. “Jelikož, jak jsme dokázali, relace je symetrická...” Symetričnost je evidentní z definice, není co dokazovat.
- (12) Strana 9. Definice  $NSD(M)$  vytváří dojem, že je možné, že má více než jeden prvek: proč autor píše  $a \in NSD(A)$  a nikoli  $NSD(A) = a$ ? Je to tak? Dále v textu se pořád zaměňuje  $NSD(\{a, b\})$  a  $NSD(a, b)$ .
- (13) Strana 9. Má být “ztotožňují” nikoli “stotožňují”.
- (14) Strana 10. “Ideál je neprázdná podmnožina obsahující nulový prvek a je uzavřená vůči sčítání a násobení prvky nadmnožiny.” Podmnožina čeho? Jaké nadmnožiny?
- (15) Strana 10. “Druhým příkladem nevlastního ideálu...” Pokud  $I = \{0\}$ , tak je ideál pořád vlastní, jen se někdy nazývá “triviální”.
- (16) Strana 11. Důkaz Lemma 1.3.25. “Ideál  $J$  je podstrukturou komutativního unitárního okruhu...” Podstrukturou v jakém jazyce?  $J$  typicky neobsahuje 1.
- (17) Strana 13. Lemma 1.3.28 a mnoho dalších. “Mějme komutativní okruh  $a, I, J...$ ” Vypadlo  $R$ .

- (18) Strana 14. Lemma 1.3.30. Lemma vytváří dojem, že průnik ideálů musí být indexován prvky nosiče, přitom v důkazu to vůbec není použito a není to pravda. Nehledě na to, že počet proniknutých ideálů není třeba omezovat velikostí nosiče (ideálů může být  $2^{|R|}$ ). Samotný důkaz je napsán nesrozumitelně, např. "...To by znamenalo, že  $I_s$  není rovné celému  $R$ ..." Proč by mělo být rovné celému  $R$ ?
- (19) Strana 15. Lemma 1.3.35. "Mějme komutativní okruh a nějaké dva prvky  $a, b \in R$  takové, že  $(a)$  a  $(b)$  jsou hlavní ideály..."  $(a)$  a  $(b)$  jsou hlavními ideály z definice.
- (20) Strana 16. Definice 1.3.37 a 1.3.38. V obou případech je chybně psána konjunkce místo disjunkce.
- (21) Strana 17 a další. Klíčový pojem faktor okruhu je psán nešikovně s vertikální tildou, proč? Standardní notace je  $R/I$ .
- (22) Strana 18. Lemma 2.1.5. Má být  $(1+I)_{R/I}$ . Místo symbolu  $\cdot$  pro násobení (případně se symbol vynechává) student najednou začal používat  $*$ . Opakuje se dále v textu.
- (23) Strana 18. Lemma 2.1.6.  $a + I \in R$  a  $R/I \subseteq R$  není správně. Student zřejmě nechápe rozdíl mezi prvkem okruhu a ekvivalenční třídou na okruhu.
- (24) Strana 19. Lemma 2.1.8. "Pro libovolné prvky  $a, b \in R$  platí  $(a + I)(b + I) = 0 + I$ ." To samozřejmě není pravda. Student chtěl zřejmě říct něco jiného, ale podobná nepřesnost ve vyjadřování se objevuje tak často, že to činí důkazy prakticky nečitelnými.
- (25) Strana 20. Věta 2.1.10. Nesrozumitelný důkaz:  $K$  je jednou ideál v  $R$  a o pár řádků níže je to najednou ideál v  $R/J$ ...

**Selektivní seznam chyb od strany 20 dále.** I na dalších stranách lze na každé straně najít podobné chyby jako výše, ale omezíme se jen na některé. Pokud by chtěl student práci opravit, měl by celý text podrobně projít a všechny chyby (i ty zde neuvedené) opravit.

- (1) Strana 22, Věta 2.2.15. Proč je v 1. psáno "Hodnota"? Důkaz je špatně čitelný také kvůli tomu, že každá věta začíná na samostatném řádku. Chyby ve větách, např. "Nejdříve ověřme, zda je funkce". Co má být funkce?
- (2) Strana 23. Odstavec před Větou 2.2.18 je zcela nesrozumitelný. Samotný důkaz Věty 2.2.18 je také nesrozumitelný, např. "Nejdříve dokážeme, že tato funkce je na. Každý prvek  $a + I$  v obrazu má ve vzoru prvek, který se na něj zobrazí." To není žádný důkaz, to je jen reformulace toho být na.
- (3) Strana 25. Definice 2.3.20. Student nejprve fixuje  $i, j \in J$  a o řádek níže přes ně kvantifikuje.
- (4) Strana 26. Důkaz Lemma 2.3.23 je opět napsán s každou větou na novém řádku.
- (5) Strana 27. Věta 2.3.24. Okruh  $R/I_1 \times \dots$  nebyl definován. Důkaz je nesrozumitelný, např. "Bez újmy na obecnosti nyní  $x \notin I_1$ , pak  $x \notin \text{Ker}(f)$ ".
- (6) Strana 28. Věta 2.3.25. Relace mod  $I$  nebyla definována. Vzhledem k tomu, že o této "Čínské zbytkové větě" student často mluvil jako o jádru práce, očekával bych, že ji formuluje přesně a také specifikuje, čím a vzhledem k čemu je "zobecněná". Rovněž pojem kongruence se předtím nevyskytoval.
- (7) Strana 29. Název kapitoly "Konstrukce oboru..." jakého oboru? Existuje jen "obor integrity". Přímo ve znění názvu kapitoly 3.1 je chybně "nroma". První věta textu: 3. věta o isomorfismu o žádné odmocnině nemluví. O trochu dál, proč je citována kniha Kunena? Jen proto, že být oborem integrity je prvořádová vlastnost? To je snad evidentní z definice oboru integrity. Nehledě na to, že izomorfismus (zmíněný v kontextu citace na Kunena) přenáší i druhořádové vlastnosti, takže celá věta týkající se Kunena ukazuje na nepochopení základních pojmů. Pojem prvořádové

vlastnosti se objevuje už jen jednou na straně 44, kde se – ovšem bez důkazu a bez zdroje – tvrdí, že platnost Bezoutovy věty je prvořádová podmínka (formulace zde už není evidentně prvořádová, takže zrovna zde by bylo dobré říct víc).

- (8) Strana 29. Definice normy je nepřehledná a s překlepy: jednou se používá  $f$  jednou  $N$ .
- (9) Strana 30. Definice relace  $\preceq$ : jedná se o uspořádání na ekvivalenčních třídách, a tedy se má psát  $[a] \preceq [b]$  pro  $a, b \in R$ ; student prakticky všude píše  $a \preceq b$ , např. ve Větě 3.1.5 (proč Věta? je to spíš jednoduché pozorování), v odstavci před Lemma 3.1.8 a další...
- (10) Strana 47. Definice 3.4.43. V bodě 2. má být  $|$  nikoli  $||$ . Důkaz Lemma 3.4.44 je zmatený: jednou se délka rozkladu značí  $f(a)$  potom  $l(a)$ . Chybí odkaz na “větu o jednoznačnosti rozkladu”.
- (11) Strana 48. Důkaz Věty 3.4.48 je opět psán nepřehledně s tím, že každá věta začíná na novém řádku.
- (12) A mnoho dalších chyb, které už nebudu vypisovat...

**Použitá literatura.** Práce má pouze 5 zdrojů, což je neúměrně málo. Navíc prakticky nejsou citovány v textu: student vůbec nerozlišuje, co z jaké učebnice vzal či přetvořil, čím se liší jednotlivé zdroje. Neuvádí svůj vlastní přínos. Kunenova kniha o teorii množin je citována pouze jednou, a to jako zdroj pro triviální fakt, že obor integrity je prvořádová vlastnost (aniž je uvedena stránka, takže to stejně není možné ověřit). Citace na Wilsonův článek nesplňuje citační standardy: místo názvu časopisu, čísla apod. je uvedeno jen “Internet” (sic). Poznámka: V neobhájené verzi práce z roku 2022 je místo “Internet” napsáno “a paper” (a je to zmíněno v posudku), nerozumím, že student nebyl schopen za 2 roky citaci opravit (pokud student neumí článek identifikovat, tak ho není vhodné citovat, protože není zaručena jeho kvalita; případně je třeba vysvětlit, proč i tak zdroj citujeme, a uvést alespoň webovou stránku).