

Posudek vedoucího na doktorskou disertační práci RNDr. Dalimila Peši

“Fine properties of certain specific function spaces”

Doktorská disertační práce RNDr. Dalimila Peši obsahuje ucelený soubor výsledků o jemných vlastnostech prostorů funkcí nazíraných z několika různých úhlů. Výsledky jsou rozděleny do celkem šesti článků, z nichž dva již vyšly v uznávaných mezinárodních matematických časopisech *Journal of Functional Analysis* a *Mathematische Nachrichten*, jeden byl přijat k publikaci do *Journal of Geometric Analysis* a tři se nacházejí v recensním řízení. Dalimil Peša je jediným autorem čtyř z těchto článků, jeden napsal ve spolupráci s doc. Nekvindou (ČVUT) a jeden v mezinárodní spolupráci s prof. A. Kalamajskou (University of Warsaw) a Tomášem Roskovcem (Jihočeská universita).

Autor svou poměrně rozsáhlou práci pro přehlednost rozdělil do tří tematických celků, z nichž každý je složen ze dvou článků. První oddíl obsahuje práce zabývající se abstraktními vlastnostmi prostorů funkcí. Zde nalézáme článek o základních vlastnostech kvazibanachových prostorů a článek o Wienerových—Luxemburgových amalgámech. Prvně jmenovaný článek podstatným způsobem rozšiřuje známé poznatky o takzvaných Banachových prostorech funkcí na obdobné struktury, které jsou však opatřeny pouze kvazinormou. Moderní vývoj určitých oblastí funkcionální analýzy ukazuje, že výsledky tohoto typu jsou a budou z několika důvodů nepostradatelné, a je s podivem, jak málo je toho o této problematice známo. Důležité prostory, jejichž řídicí funkcionál není normou, se objevují čím dále častěji, stačí vzpomenout například na slabé Lebesgueovy prostory a jejich nejrůznější modifikace. Dá se proto čekat, že tento článek nasbírá velké množství citací, protože po něm mnozí autoři s povděkem sáhnou. Výsledky zde obsažené jsou velice zajímavé, a navíc vyvolávají mnoho nových otázek. Předpokládám a doufám, že autor se bude výzkumu této problematiky věnovat i ve své následné vědecké kariéře. Druhý článek z prvního oddílu obsahuje výsledky Dalimila Peši o takzvaných Wienerových—Luxemburgových amalgámech. Autor zde sice vyšel z klasických prostorů Wienerových amalgámů, ale základní myšlenku této struktury, tedy kombinaci kontroly lokálních a globálních vlastností funkcí, přetavil do velice novátorského hávu. Klasické prostory Wienerových amalgámů zavedl H.G. Feichtinger počátkem osmdesátých let minulého století. Dalimil do problematiky Wienerových amalgámů dovedně zamíchal jemu dobře známé Banachovy prostory funkcí s normou invariantní vůči nerostoucímu přerovnání a rovnou i jejich zobecnění na prostory osazené kvazinormami a našel jisté překvapivé souvislosti s problematikou optimálních Sobolevových vnoření na neomezených množinách.

Druhý oddíl obsahuje dva autorovy články zabývající se prostory funkcí založenými na takzvaných pomalu se měnících funkcích. Tyto funkce studoval ve třicátých letech dvacátého století Karamata v souvislosti se specifickými problémy z matematické fyziky a kolem roku 2000 zažily určitou renesanci v souvislosti s jejich využitím pro významné rozšíření poznatků o optimálním chování operátorů a vnoření, které nakonec vyústilo v definici a následný rozvoj teorie takzvaných Lorentzových-Karamatových prostorů. Právě tyto prostory autor studuje v prvním článku, kde uvádí úplnou charakterisaci některých jejich důležitých vlastností. Mimo jiné zde nacházíme úplný popis asociovaných prostorů k Lorentzovým-Karamatovým prostorům včetně dosud nepojednaných limitních a sublimitních případů. Podstatné je zejména to, že autor studuje tyto prostory bez nejrůznějších omezení, která stíhala předchozí poněkud nesmělé pokusy jiných autorů. Druhý článek tohoto oddílu víceméně navazuje na první, v němž se ukázalo, že určité limitní situace by dovolovaly elegantnější řešení, kdyby bylo možno funkce bez ztráty informace považovat za hladké. Odtud pramení otázka, zda tento krok lze beztréstně učinit, a právě na ni nalézá mimo jiné autor odpověď v druhém článku. Kromě dalších výsledků je zde charakterizována situace, za které funguje klasická zhlazovací technika. Jde o pěkný a užitečný článkuček s jasně definovanou motivací a zajímavými závěry.

Poslední oddíl obsahuje dva články, které spolu sice zcela nesouvisí, ale které spojuje myšlenka aplikace problematiky prostorů funkcí v jiných oblastech matematické analýzy. První článek je věnován redukci omezenosti integrálního operátoru s jádrem na množinu nerostoucích funkcí. Tento výsledek byl sice

znám, ale pouze pro případy s oblastí integrace konečné míry, což nepostačovalo pro uplatnění v moderních aplikacích (zejména na optimální vnoření Sobolevových prostorů na množinách s předepsaným isoperimetrickým profilem). Rozšíření je sice víceméně nasnadě, ale jde o technicky velice náročný krok a Dalimil se jej zhostil s pozoruhodnou bravurou. Poslední článek je příspěvkem k rozvoji teorie Gagliardových-Nirenbergových nerovností, což je jedna z ústředních poddisciplín teorie Sobolevových prostorů rozvíjející se nepřetržitě od roku 1958. Hlavním výsledkem je velice pozoruhodná nerovnost skýtající apriorní odhad pro řešení nelineární úlohy na vlastní funkce jisté parciální diferenciální rovnice.

Výsledky Dalimila Peši jsou obdivuhodné po kvantitativní i kvalitativní stránce. Práce obsahuje celou řadu zajímavých nových poznatků, které dále otevírají nové směry výzkumu a které již nyní nalézají zajímavé aplikace. Soubor témat v práci obsažených je relativně široce rozkročený, v kontextu je však tento fakt pro mladého vědce na začátku kariéry netriviální výhodou, neboť skýtá nadstandardní výběr možných směrů, kudy se ubírat dále. V každém případě předložená práce dokazuje, že autor je mimořádně nadaný mladý matematik, je dokonale technicky vybaven, je schopen pracovat samostatně nebo v domácím či mezinárodním vědeckém týmu, umí si sám klást smysluplné otázky a jejich řešení dotáhnout k úspěšnému závěru. Doufám, že se ve své následující kariéře bude věnovat matematickému výzkumu.

Mohu potvrdit, že Dalimil je nejen nadaný matematik, to je koneckonců zřejmé, ale také je velice pracovitý a samostatný. Osobně jsem po celou dobu naší spolupráce obdivoval několik jeho vlastností, zejména odvalu pouštět se do těžkých problémů i na neznámém teritoriu, schopnost velmi rychle se zorientovat v záplavě dostupné literatury a nezdolnou vůli dotáhnout věci do konce. Dalimil patří ke studentům, kteří jsou schopni přetavit klíčové slovo, které je před nimi náhodou vysloveno (zde například „amalgám“) v hluboký samostatný článek, který pak vyjde v luxusním časopise typu *Journal of Functional Analysis*. Vedoucímu práce je za takových okolností jeho úloha velice usnadněna. Rád bych na závěr vyzdvihnul Dalimilovy kromobyčejné organizační schopnosti, které se naplno projevily během dvou let trvání grantového projektu START (Igráček), v jehož rámci Dalimil působil jako hlavní řešitel a úspěšně vedl tým pěti mladých matematiků a matematiček. Posledním, avšak nikoli nejméně důležitým faktem hodným zmínky je, že Dalimil je nesmírně příjemný společník i kolega, s nímž je radost spolupracovat.

Jsem pevně přesvědčen, že předložené dílo vysoce překračuje nároky kladené na doktorskou disertační práci a **vřele doporučuji, aby Dalimilu Pešovi byl udělen titul Ph.D. na MFF UK.**

V Brně 13.3.2024

Luboš Pick