Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra Matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Rozvoj porozumění zápisu čísla v poziční soustavě žáků 1. stupně ZŠ

Development of understanding of numebr positional notation in primary school pupils

Bc. Anna Suchá

Vedoucí práce: doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma Rozvoj porozumění zápisu čísla v poziční soustavě žáků 1. stupně ZŠ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 15. dubna 2024

Poděkování

Na prvním místě bych chtěla poděkovat své školitelce, doc. RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D. za její vedení a všechny konzultace, které mě pozvedly na duchu. Děkuji také za to, že to se mnou až do konce nevzdala. Veliké poděkování patří všem dětem z naší školy, protože ony jsou v hlavních rolích této práce. Dále děkuji Terce Hromádkové a Tomáši Suchému za jazykovou korekturu. Děkuji těm, kteří měli odvahu dílčí části této práce číst a usoudili, že ještě má cenu být kritickými: Karlu Tučkovi a Radce Havlíčkové. Svému manželovi Tomáši Suchému děkuji, že o mě v nejintenzivnějších dvou týdnech vzniku práce pečoval lépe než o tamagotchi, které nikdy neměl.

ABSTRAKT

Zápis čísla v poziční soustavě, zejména v soustavě desítkové, je nejrozšířenější lidmi používanou reprezentací čísla. Jsou známy různé způsoby, jak ve výuce rozvíjet porozumění žáků tomuto zápisu. Dle odborné literatury jsou klíčovými prvky pro rozvoj porozumění zápisu čísla v poziční soustavě zejména problémové úlohy a jejich diskuze. Na českých školách přetrvává způsob, který se podle odborné literatury i podle možné interpretace kvalitativního výzkumu nezdá být efektivní. Pozorovaná úroveň porozumění žáků hodnotě pozice je různá a zdá se, že se s ročníkem spíše nezvyšuje. Projevovaná neporozumění žáků mají různé podoby a jsou podrobně pospány.

KLÍČOVÁ SLOVA

zápis čísla, hodnota pozice, typ úlohy, didaktický test, rozbor žákovských řešení

ABSTRACT

The notation of a number in the position system, especially in the decimal system, is the most widely used representation of a number by humans. There are various ways of developing pupils' understanding of this notation in the classroom. According to the literature, the key elements for developing understanding of number notation in the positional system are, in particular, problem solving tasks and their discussion. In Czech schools, a method persists which, according to the literature and the possible interpretation of qualitative research, does not seem to be effective. The observed level of pupils' understanding of the place value varies and does not seem to increase with the grade level. Pupils' demonstrated misunderstandings take different forms and are described in detail.

KEYWORDS

number notation, place value, type of assignment, didactic test, analysis of pupils' solutions

Obsah

Úvod ... 1

1. Číselné soustavy ... 2

2. Výuka číselných soustav ... 6

3. Rešerše učebnic ... 12

  3.1. České učebnice ... 12

    3.1.1. První ročník ... 13

    3.1.2. Druhý ročník ... 16

    3.1.3. Třetí ročník ... 19

    3.1.4. Čtvrtý ročník ... 25

    3.1.5. Pátý ročník ... 30

    3.1.6. Nestandardní úlohy ... 33

    3.1.7. Shrnutí ... 38

  3.2. Úlohy z šetření TIMSS ... 40

4. Plán výzkumu ... 47

5. Didaktický test ... 49

  5.1. Pilotáž ... 49

    5.1.1. Pozemská čísla ... 50

    5.1.2. Mimozemská čísla ... 54

  5.2. Rozbor testu ... 62

    5.2.1. Pozemská čísla ... 62

    5.2.2. Mimozemská čísla ... 71

  5.3 Realizace ... 78

    5.3.1. Druhý ročník ... 79

    5.3.2. Třetí ročník ... 82

5.3.3. Čtvrtý ročník ... 86
5.4 Rozbory řešení ... 92
5.4.1. Pozemská čísla ... 92
5.4.2. Mimozemská čísla ... 169
5.4.3. Závěry ... 262
6. Intervence ... 265
7. Výstupní didaktický test ... 275
7.1. Pozemská čísla ... 275
7.1.1. Zadání ... 276
7.1.2. Výstupy ... 277
7.2. Mimozemská čísla ... 282
7.1.1. Zadání ... 282
7.1.2.Výstupy ... 283
8. Rozhovory s učiteli ... 289
8.1. paní učitelka z 1.A ... 290
8.1.1. Rozhovor ... 290
8.1.2. Interpretace ... 291
8.2. paní učitelka z 1.B ... 292
8.2.1. Rozhovor ... 292
8.2.2. Interpretace ... 293
8.3. paní učitelka z 2. ročníku ... 294
8.3.1. Rozhovor ... 294
8.3.2. Interpretace ... 295
8.3.3. Aplikace ... 295
8.4. pan učitel ze 4. ročníku ... 296

8.4.1. Rozhovor 296

8.4.2. Interpretace 297

8.4.3. Aplikace 298

8.5. Shrnutí 298

Závěr 300

Literatura 303

Úvod

Představte si číslo. Libovolné. Ačkoliv existuje mnoho reprezentací čísla – číslo jako počet hracích figurek, číslo jako objem hrníčku, číslo jako každodenní přírůstek květů jahodníku, číslo jako rozdíl pater, ve kterých bydlí Elmar a Ariana, číslo jako četnost kolem projíždějících aut, a mnoho dalších čísel – přes to všechno se domnívám, že číslo, které jste si představili, mělo podobu čísla zapsaného číslicemi.

Zápis čísla nás obklopuje, setkáváme se s ním běžně v mnoha každodenních situacích – od vyzvánějícího budíku, přes jízdu tramvají a účtenku z pekárny, až po číslo bytu při návratu domů. Poziční zápis čísla je v moderním světě jistě nejrozšířenější reprezentací čísla. Zápis čísla, ačkoliv jej v dospělosti vnímáme již automaticky, je však věcí konvence. Způsob, kterým zapisujeme číslo, není ‟správný”, je to pouze způsob všeobecně přijímaný, a proto funkční.

Cílem této práce je nahlédnout způsob, jakým je tato konvence, tedy zápis čísla arabskými číslicemi v desítkové soustavě, předávána žákům. V první kapitole této diplomové práce čtenáře v krátkosti seznámím s číselnými soustavami a jejich třízením. Kromě stručné teoretické rešerše v oblasti didaktiky matematiky jsou nahlédnuty také učebnicové úlohy, které se na toto téma zaměřují.

V praktické části práce je popsán kvalitativní výzkum na jedné ze soukromých pražských škol. Žákům 2. až 5. ročníku byly zadány didaktické testy zaměřené na porozumění principu poziční soustavy, zejména desítkové. Záměrem zkoumání bylo nejen identifikovat a popsat častá neporozumění žáků v této oblasti a jejich strategie řešení nestandardních úloh, ale také navrhnout několik aktivit, které by mohly být nápomocny při poznávání vlastností desítkové soustavy, a následně zhodnotit jejich přínos.

1. Číselné soustavy

V této kapitole je mým cílem krátce čtenáře uvést do problematiky číselných soustav a jejich třízení. Představuji a vysvětluji zde pojmy, které budou dále v textu práce běžně používány.

Základní aritmetické operace jako posuzování velikosti množin a jejich uspořádání na základě kvantity jsou vlastní nejen člověku, ale i mnohým jiným živočichům z řad obratlovců i bezobratlých. Tyto mechanismy člověku pomáhaly a pomáhají při získávání potravy, orientaci v krajině, boji a dalších oblastech klíčových pro život (Veselovský, 2005). Tento živočišným i lidským mláďatům vrozený systém hrubého matematického odhadu a hrubého výpočtu je v anglosaské odborné literatuře označován jako *Approximate number system* (ANS), což se do českého jazyka překládá jako aproximální numerický systém, neboli příznačně přibližná číselná soustava (Piazza, 2010; Plassová a kol., 2017). Je zřejmé, že tento intuitivní matematický orgán je významově poněkud vzdálen pojmu *číselná soustava,* jak je běžně chápán. V kontextu vývoje porozumění a zápisu čísla v lidských dějinách a analogicky i vývoje porozumění dětí (Furinghetii and Radford, 2020), však ANS a jeho rozvoj hraje klíčovou roli.

Ve fylogenetickém vývoji porozumění *čísla*, tedy vyjádření množství nebo pořadí, lidé začali rozlišovat jednotlivé kvantity množin objektů a přiřazovat jim slovní znaky. V každém jazyce světa existují slova vyjadřující alespoň nižší kvantity, s dalším vývojem civilizace a zejména obchodu pak bylo nutné počítat i s vyššími čísly (Kvasz, 2008). Joseph (2011) ve své knize předkládá, že ještě před vznikem zápisu čísla však musela vzniknout myšlenka *základu*, který umožňoval uspořádat kvantitu do vhodných skupin. Myšlenka základu byla praktická nejen v pozdějším zápisu čísla, ale především už v jeho slovním označení. V různých jazycích jsou tak slova pro čísla vystavěna na základech, které tyto skupiny, ať už kmeny nebo civilizace, využívají.

> Příklad: *V australském kmeni Gumulgal lidé označují čísla takto: 1 – urapon, 2 – ukasar, 3 – ukasar-urapon, 4 – ukasar-ukasar, 5 – ukasar-ukasar-urapon…*

Výše zmiňovaný kmen nemusí používat zápis, abychom dokázali odvodit, že je jejich pojmenování čísel postaveno na základu dva. Jiné skupiny využívaly základ pět, tedy nejspíše podle počtu prstů jedné ruky. Soustava se základem deset je v dnešním světě nejvíce rozšířená a zřejmě kvůli počtu prstů na obou rukou ji využívaly mnohé skupiny lidí, např. čísla egyptská, čínská, řecká a mnohá další. Joseph (2011) jako příklad propojenosti počtu prstů a základu deset uvádí pojmenování čísel v jazyce Zulu, kde např. číslo 9 je označováno slovem *Shiya'ngalolunye* ve významu „Vynech jeden prst," a číslo 10 slovem *Shumi* s významem „Zvedni všechny." Dodnes se v běžném životě setkáváme s pozůstatky soustavy se základem dvanáct, kterou využívalo mnoho civilizací, např. 12 měsíců, 12 zvířetníkových souhvězdí, 12 hodin nebo i slova *tucet* (dvanáct) či *unce* (dvanáctina). Dále byly využívány základy dvacet, např. Mayská civilizace, šedesát, např. Babylonská civilizace, a mnohé další základy.

Propojení jazyka se základem soustavy silně vnímáme i ve všech evropských jazycích, včetně češtiny, kdy máme kromě slov pro počty nula až deset slova označující i mocniny základu, např. sto, tisíc, desetina. Všechny ostatní počty jsou v našem jazyce vyjadřovány spojováním těchto slov, případně využitím přípon ve významu deset, jako např. *-náct, -cet, -sát*.

Od seskupování kvantit do slovně označovaných množin, tedy od počátků využívání základu, pak bylo přiřazení symbolů těmto slovům jen otázkou času (Joseph, 2011). K zápisu čísla, tedy ke vzniku prvního symbolického jazyka vůbec, lidstvo přiměla nejspíš potřeba počtů s vyššími čísly (Kvasz, 2008). Zápis v číselné soustavě, jak (Kvasz, 2008) uvádí, je výrazným zjednodušením pro provádění aritmetických operací, neboť umožňuje ustoupení od operace s kvantitou k operacemi pouze se symboly. To je také jmenovatelem a výsadou všech číselných soustav.

Číselná soustava je způsob reprezentace čísla. Jak bylo výše popsáno, nemusí se jednat pouze o reprezentaci symbolem, tedy grafickou, ale i slovní. Pro účely této práce však budu používat pojem *číselná soustava* v kontextu zápisu čísla. Číselné soustavy využívají seskupování kvantit a těmto seskupením přiřazují znaky – slova a grafémy nebo pozice, případně jen slova. Pro nejmenší kvantitu takovéhoto seskupení je používán pojem *základ soustavy*. Další skupiny jsou v číselných soustavách zpravidla odvozeny od tohoto základu, nejčastěji umocňováním. Pojem *číslice* zde budu používat ve významu libovolného jednoho grafému reprezentujícího libovolnou kvantitu.

Pro klasifikaci číselných soustav se nejvíce nabízí třízení dle základu, tedy na soustavy dvojkovou, pětkovou, desítkovou apod. Je však záhodno se zmínit, že toto třízení není dostatečné, neboť nezahrnuje číselné soustavy smíšené, které mohou mít například prvky základu dva, základu pět a základu deset zároveň.

Z hlediska zápisu čísla, jež je předmětem této práce, lze číselné soustavy dělit na poziční a nepoziční. Jakmile je stanoven základ, mentálně nejúspornějším způsobem zápisu čísla je přiřazení grafémů pro jednotlivé kvantity: jednotku, základ a případné mocniny základu. Číslo je pak vyjádřeno součtem hodnot těchto znaků. Takovéto soustavy jsou označovány v obecném porozumění i pro účely této práce jako číselné soustavy nepoziční. Celková hodnota čísla tak může být zaznamenána libovolným pořadím číslic. Číslice bývají uspořádány pouze pro snazší čtení zapsaného čísla. Společné pro nepoziční soustavy je, že nepotřebují číslici nula. Mezi známé nepoziční číselné soustavy patří například čísla egyptská (nepoziční desítková soustava) nebo čísla aztécká (nepoziční dvacítková soustava). Oproti tomu poziční číselné soustavy nepřiřazuji hodnoty mocnin základu číslicím, ale umístěním číslic v rámci zápisu čísla, tedy jejich *pozicím*. Řád reprezentován pozicí v zápise čísla je označován jako *hodnota pozice* nebo v odborné literatuře častěji používaný pojem *place value.* Poziční zápis čísla je hodnocen jako mentálně náročnější, vyspělejší. Oproti nepozičním soustavám však zůstává poměrně úsporný i ve vysokých číslech. Mocniny základu, kladné, nulové i záporné, jsou v kontextu pozičního zápisu označovány jako *řády*.

Ani toto členění není zcela vyčerpávající, neboť existují číselné soustavy, jež kromě číslic pro mocniny základu pracují i s pozicí číslice v zápise čísla. Příkladem těchto soustav mohou být římská nebo čínská čísla (desítkové soustavy).

V této práci se zaměřuji především na soustavy poziční, a to s důrazem na soustavu desítkovou se zápisem pomocí evropské podoby arabských číslic (dále jen *arabské číslice*). Hodnota čísla zapsaného v desítkové poziční soustavě je dána součtem součinů všech číslic a hodnot jejich pozic, tedy mocnin základu, zde mocnin desítky. Pro toto vyjádření lze použít většinově využívaný *zkrácený zápis*, např. 326, nebo *rozvinutý zápis*, ve kterém je toto vyjádření rozepsané formou výrazu, např. $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 1$. Na základních školách méně využívaným je pak *rozvinutý zápis s využitím mocnin základu*, např. $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$.

Jiné než desítkové poziční soustavy pro účely této práce nazývám jako soustavy s *alternativním základem,* podle termínu *alternative-base system* převzatého z odborné literatury. V kontextu pozičních soustav dále píšu o pořadí pozice, přičemž 1. pozice je v moderních pozičních soustavách pozice nejvíce vpravo a vyjadřuje řád nulté mocniny základu, 2. pozice pak vyjadřuje řád první mocniny základu a tak dále. Pro vyjádření základu poziční soustavy se při zápisu nejčastěji využívá forma: $(108)_{10}$, kde číslo v závorce označuje zkrácený zápis a dolní index hodnotu základu. V zájmu lepší plynulosti textu však v této práci používám méně standardní způsob zápisu ve formě: $108_{(10)}$, ve kterém je základ poziční soustavy označen indexem v závorce. V této práci uvádím hodnotu základu v případě, kdy v kontextu pojednávám i o jiných soustavách než o poziční soustavě desítkové.

V této kapitole jsem krátce shrnula číselné soustavy a jejich nejběžnější třízení podle hodnoty základu a podle toho, co je reprezentantem mocnin základu – řádů, tedy číslice v případě nepozičních soustav a pozice v případě soustav pozičních. Pohled do historie je pro mě vzhledem k paralele fylogenetického a ontogenetického vývoje uchopení matematiky důležitý, neboť je inspirací pro tvorbu autorských úloh a jeho perspektivou nahlížím úroveň matematického myšlení žáka zprostředkovaného žákovskými řešeními úloh. V této kapitole jsem vymezila pojmy, které se vyskytují dále v textu práce.

2. Výuka číselných soustav

V této kapitole pojednám o způsobech implementace tématu desítkové soustavy a *place value* do školní výuky matematiky. Uvedeno je několik přístupů, které v diskurzu didaktiky matematiky zaznívají.

Zdaleka nejvyšší důraz, co se číselných soustav týče, je ve školách kladen ze zcela zjevných důvodů na soustavu desítkovou. V tradičním pojetí výuky u nás je porozumění zápisu čísla v desítkové soustavě budováno již od prvního ročníku vymezováním desítky, což dokládám rešerší učebnic (kapitola 3) a projevuje se to i v rozhovorech s učiteli (kapitola 8).

Na didaktické postupy, jak vybudovat porozumění zápisu čísla v poziční soustavě panují různé názory. Rozšířeným přístupem k výuce tohoto tématu je předkládání *modelu* čísla s rozlišením řádů. Modelem zde i dále v textu práce rozumím kvantitativní znázornění čísla na pomůcce nebo obrázku. V kontextu desítkové soustavy je nejčastěji využívaná *vázaná kvantita* znázorňující jednotlivé řády jednotek, desítek, stovek apod. Vázaná kvantita je takový model čísla, který zahrnuje viditelný počet jednotek, ale zároveň tyto jednotky nelze oddělit, např. kola tříkolky, lentilky na sušenkách, korálky na drátcích nebo hranoly se zářezy vymezující daný počet zobrazených jednotek. Oproti tomu *volná kvantita* zobrazuje pouze daný počet jednotek bez jakékoliv vazby mezi nimi. V kontextu modelu čísla v desítkové soustavě je např. číslo 14 nejčastěji zobrazováno jako vázaná kvantita 10 a volná kvantita 4. Pro výuku desítkové soustavy, ať už zápisu čísel nebo operací s nimi, jsou typickou *pomůckou*, tedy fyzickým manipulativem využívaným pro modelování čísla, tzv. *Dienesovy kostky* (*Dienes blocks*). Jedná se o malé krychle, které jsou buď ponechány volně (řád jednotek), vázány do kvádrů s rozměry 10 × 1 × 1 (řád desítek), vázány do kvádrů s rozměry 10 × 10 × 1 (řád stovek), nebo do krychlí s rozměry 10 × 10 × 10 (řád tisíců). Důležitý je v rámci této pomůcky nejen objem jednotlivých kostek, ale také jejich tvar. Pro účely této práce používám pro jednotlivé tvary pojmenování *krychličky*, *tyčinky*, *placky* a *velké krychle*. Toto pojmenování je užitečné pro analogii názvů řádů i ve vyšších třídách řádů než je třída jednotek základních (jednotek, desítek, stovek). Všechny desítky, tedy desítky tisíc, milionů, miliard apod. mají ve zobrazení Dienesovými kostkami tvar tyčinky a stejně je tomu i u ostatních tvarů. Pojmenování tvarů však v této práci využívám zejména kvůli kontextu pozičních soustav s alternativním základem, tedy např. v šestkové soustavě tvar tyčinka znázorňuje kvádr s rozměry 6 × 1 × 1 apod.

V diskurzu didaktiků matematiky však zaznívají i hlasy vymezující se proti používání těchto konkrétních modelů, ve smyslu modelu čísla znázorněného vázanou kvantitou řádů, ale volnou kvantitou hodnot jednotlivých řádů, např. číslo 326 jako 3 volné stovky, 2 volné desítky a 6 volných jednotek. Clements a McMillen (1996) ve svých výzkumech uvádějí příklady tříd, které nevyužívaly pomůcky a projevovaly lepší porozumění hodnotě pozice (*place value*) než třídy, které byly tématu vyučovány prostřednictvím pomůcek. Autoři toto připisují způsobu, jakým jsou pomůcky využívány. Zdůrazňují, že aby byla pomůcka pro žákovské porozumění přínosem, měla by podněcovat, nikoliv zastupovat myšlení. Při uvědomělém využití pomůcek ve výuce však autoři zmiňované studie shledávají pomůcku jako užitečnou: *„Žáci mohou zpočátku potřebovat konkrétní pomůcku, aby si vybudovali smysl* (porozumění)*, ale aby tak učinili, musí se nad svými činnostmi zamyslet.“* (vlastní překlad) Ross (1989) na druhou stranu upozorňuje, že práce s pomůckami může být pro řešení některých problémů příliš zesnadňující, až mechanická, a žák tedy není nucen se nad problémem zamyslet, tedy nemůže docházet ani k učení. Kamii a Joseph (1988) upozorňují na nedostatečnost nejčastěji využívaných modelů popisovaných v úvodu tohoto odstavce. Dle jejich pozorování takovýto model nezahrnuje předchozí porozumění číslu vybudované dítětem. Pro porozumění desítkové soustavě je podle autorů potřeba umožnit žákům vybudovat si paralelní koncepty: systém jednotek a systém desítek, přičemž systém desítek musí ze systému jednotek vycházet, nikoliv jej nahrazovat. *„Systém jednotek je syntézou dvou druhů vztahů vytvořených dítětem: uspořádáním a hierarchickým začleněním,“* (vlastní překlad) uvádějí autoři studie. Model s použitím izolovaných jednotek, desítek apod. bez jejich propojení ve zjevném pořadí tak evokuje spíše myšlenku: *deset, deset, deset* a nikoliv *deset – dvacet – třicet*. Clements a McMillen (1996) uvádějí, že jsou zmiňované modely, zejména Dienesovy kostky, u učitelů velmi oblíbené. Přikládá názory učitelů, kteří si pochvalují, že tato pomůcka funguje přesně tím způsobem, jako fungují čísla v desítkové soustavě. Úskalím, které autoři popisují, je však náhled učitelů skrze již vytvořený koncept čísla v desítkové soustavě – jinými slovy, dospělí již mají zkušenost s chováním čísel v desítkové soustavě, pročež toto chování vidí i v modelu. Nelze však s jistotou předpokládat, že tento náhled chování modelu mají i žáci, kteří si zkušenosti s desítkovou soustavou teprve budují. Na mylný předpoklad porozumění dítěte čistě na základě porozumění dospělého upozorňuje i Hejný (2017): *„Dospělý člověk má vztahy mezi čísly, jejich reprezentanty a jejich záznamem v oblasti desítkové soustavy plně automatizovány. To mu znesnadňuje porozumět potížím, s nimiž se při budování protoschématu Číslo dítě potýká."*

Ross (1989) popisuje často nízké porozumění žáků *place value*. Uvádí, že často i žáci pátého ročníku své porozumění tomuto konceptu teprve budují. Domnívám se, že je situace na českých školách mnohdy podobná. Dle Ross (1989) mohou učitelé často předpokládat porozumění žáků na základě správného řešení úloh, které však toto porozumění nezkoumají, např. úlohy typu: „34 = __ desítek a __ jednotek" nebo „V čísle 27 zakroužkuj číslici na místě desítek."

Coles a kol. (2017) popisují úskalí přílišného a výlučného důrazu na model čísla, který ve své práci označuje jako metaforu čísla – konkrétní kvantitativní reprezentaci, volná i vázaná kvantita. Ve studii autoři upozorňují na přehlížený ale zásadní význam metonymie, tedy induktivních vlastnosti čísel, kdy jeden aspekt může posloužit jako náhrada celku – srov. teorie generického modelu podle prof. Hejného (2017). Coles a kol. (2017) upozorňují na silnou vazbu čísel a jazyka, která je ve výuce desítkové soustavy podle něj přehlížená. Přitom i nejmladší žáci jsou na jazykové podobnosti citliví a dokážou na základě něj odvodit vztah čísel v desítkové soustavě, např. *dva* + *dva* = *čtyři* a *dva-cet* + *dva-cet* = *čtyři-cet*. Ross (2002) v kontextu výuky *place value* vymezuje 4 základní vlastnosti čísla zapsaného v desítkové soustavě:

1. *„Aditivní vlastnost. Veličina, kterou představuje celý zápis čísla, je součtem hodnot, které reprezentují jednotlivé číslice.*
2. *Poziční vlastnost. Kvantity reprezentované jednotlivými číslicemi jsou určeny pozicemi, které zaujímají v rámci zápisu čísla.*
3. *Základová desítková vlastnost. Hodnoty pozic rostou v mocninách deseti zprava doleva.*
4. *Multiplikativní vlastnost. Hodnota prezentována jednotlivou číslicí v zápisu čísla se zjistí vynásobením hodnoty této číslice hodnotou přiřazenou její pozici."* (vlastní překlad)

Na práci Rosse (2002) navazuje Coles a kol. (2017) úpravou těchto vlastností zápisu čísla v desítkové soustavě a jejich vymezením v rámci jazykové metonymie. Vlastnosti překládám do kontextu českého jazyka:

1. Aditivní vlastnost. Název celého čísla se tvoří vyslovením názvů jednotlivých číslic v pořadí zleva doprava (s výjimkou čísel 1-19). Např. 532 se čte jako pět (set) tři(cet) dva.
2. Poziční vlastnost. Pozicím jednotlivých číslic v zápisu čísla jsou přiřazeny konzistentní názvy nebo v případě desítek koncovky. V českém jazyce konzistence zahrnuje dvojí podobu koncovek nebo názvů pro čísla počínající číslicemi 2 až 4 (-*cet*, *stě*/*sta*, *tisíce*, *miliony*, …) a čísla počínající číslicemi 5 až 9 (-*sát*, *set*, *tisíc*, *milionů*, …).
3. Základová desítková vlastnost. Názvy přiřazené pozicím se zvyšují v mocninách deseti zprava doleva (-*cet*/-*sát*, -*sta*/*set*, *tisíce*/*tisíc* atd.).
4. Multiplikativní vlastnost. Název jednotlivé hodnoty číslice v (kontextu čísla) vznikne vyslovením čísla s hodnotou číslice, za níž následuje název přiřazený její pozici (např. šest set).

Srovnání metaforického a metonymického pohledu obou autorů může být dle mého názoru přínosné ve výuce desítkové soustavy. Pro učitele je podle mého názoru důležité si uvědomit, že v zapsané podobě čísla v desítkové soustavě určuje hodnotu číslice její pozice, ale v případě čísla vyřčeného tuto roli zastupuje její *štítek*. To umožňuje v českém jazyce i jiné seřazení číslic čísla vyřčeného (např. čtyři a dvacet), ale nikoliv čísla zapsaného. Při výuce desítkové soustavy a jejich vlastností by tak měl být na obě podoby čísel, metaforickou i metonymickou, brán zřetel, stejně tak jako by měly být předkládány čísla v roli počtu i čísla v roli adresy u obou těchto podob (Coles *et al.*, 2017).

Mnozí autoři se shodují, že efektivním způsobem výuky je předkládání takových problémů, aby si žáci porozumění desítkové soustavě vybudovali sami (Kamii a Joseph, 1988; Ross, 1989; Jones a Thornton, 1993; Coles a kol., 2017). Vzhledem k obecnému naklonění diskurzu didaktiky matematiky směrem ke konstruktivistickým metodám výuky jejich závěry nejsou překvapivé. Konstruktivismus je prospěšný nejen při výuce *place value*, ale při výuce matematiky obecně (Pólya, 1963; Lowry, 1967; Higgins, 1971; Hughes, 1974; Hejný, 2017). Oporu ve výzkumech má i takové pojetí výuky, kde *place value* není nasvíceno jako samostatné téma (Kamii and Joseph, 1988; Ross, 1989). Žáci podle těchto a dalších výzkumů potřebují přemýšlet o *place value* v kontextu aritmetických operací a skrze ně si budovat porozumění desítkové soustavě. Zdá se, že převažující přístup doby vzniku citovaných studií zahrnoval zprvu nácvik zobrazení hodnoty jednotlivých řádů v čísle (rozklady, modelování, pojmenovávání, a další) a teprve poté se přistoupilo k nácviku algoritmů pro aritmetické operace. Tento přístup ostatně v našich školách přetrvává dodnes (srov. rešerše učebnic – kapitola 3). Kamii a Joseph (1988) ve svém přístupu k rozvoji porozumění *place value* skrze aditivní operace, v rámci problémově orientované výuky, argumentují, že žák nemá přirozenou potřebu se zabývat významem jednotlivých číslic v zápisu čísla ani nemá potřebu rozkládat číslo zrovna podle řádů desítkové soustavy, dokud jedno či druhé nepotřebuje k vyřešení nějakého matematického, nejčastěji aritmetického, problému. Pro žáka podle těchto autorů a mého vlastního pozorování není výzvou určit počet stovek, jednotek nebo desítek v čísle. Výzvou je vyřešit problém. Přístup, jaký volí Kamii a Joseph (1988), Ross (1989, 2002) a další zahrnuje rozvoj porozumění pozičnímu zápisu skrze matematické problémy, které toto porozumění vyžadují. Hejný (2017) pro tento účel navrhuje didaktické prostředí Algebrogramy, ve kterých řešitelé často potřebují využít porozumění desítkové soustavě.

Význam zařazování úloh, které jsou zaměřené na více než jeden koncept, např. sčítání a poziční zápis v případě Algebrogramů, zdůrazňují i Jirotková a Kloboučková (2013): *„… je výzkumně prokázáno, že k vývoji deklarativních znalostí (např. násobilkových spojů), procedurálních znalostí (např. početních algoritmů) a konceptuálních znalostí (např. porozumění desítkové soustavě) dochází společně a jednotlivé typy znalostí jsou na sobě vzájemně závislé. Je tedy žádoucí předkládat žákům takové úlohy, které budou tyto tři aspekty rozvíjet.“*

Výzkumy dále zpochybňují užitečnost nácviku rozdělování čísla do jeho řádů již od prvního ročníku základní školy (Bednarz a Janvier, 1982; Kamii a Joseph, 1988; Jones a kol., 1996). Z jejich a jimi citovaných výzkumů vyplývá, že takto malé děti většinou nemají dostatečně vybudované zkušenosti s jednotkovým systémem, tudíž ani nemají potřebu si budovat systém desítkový. Žáci prvních ročníků podle Kamii a Joseph (1988) nejčastěji vnímají i dvojciferné číslo jako počet jednotek, např. 16 jako 16 jednotek, nikoliv 1 desítka a 6 jednotek. V aktivitách zaměřených na rozdělování řádů tak nemusí děti spatřovat užitečnost a domnívám se, že je tyto úlohou mohou dokonce mást, pokud je to něco, co je jim zvenčí předkládáno.

Review a na něm založený rámec vzdělávání autorů Jonese a kol. (1993, 1996) shrnuje čtyři klíčové prvky výuky matematiky podporující budování představy čísla v desítkové soustavě:

1. Počítání – počítání slovy po jednotkách, ale i po desítkách, stovkách a více
2. Rozdělování – rozdělování kvantity na dvě a více skupin (ne nutně se zohledněním řádů)
3. Seskupování – seskupování jednotek do skupin, v kontextu jiného matematického problému
4. Číselné vztahy – porovnávání, seřazování, posloupnosti

Výše jsem uvedla několik poznatků k výuce desítkové soustavy. Běžně se ve školách s oblibou využívají modely, výzkumy však kladou důraz na to, aby bylo s modely zacházeno účelně a nezastupovaly myšlení žáka. Panují názory, že by neměly být předkládány pouze klasické kvantitativní modely čísla, ale na číslo by mělo být pohlíženo z mnoha úhlů – nejen v různých sémantických rolích, ale i z hlediska jazykového, se kterým je číslo bezprostředně spjato. Učitelé v tradiční výuce začínají s budováním porozumění poziční soustavě již v 1. ročníku, některé výzkumy však tyto postupy zpochybňují a apelují na problémově orientovanou výuku, skrze kterou si žák sám vybuduje porozumění na té úrovni, která je pro něj uchopitelná. Výuka prostřednictvím předkládání matematických problémů vyžadujících porozumění pozičnímu zápisu se ukazuje jako účinná a toto porozumění dále rozvíjí.

Domnívám se, že kvalitní porozumění pozičnímu zápisu je důležité i pro další práci s číslem, zejména pak pro konstrukci a porozumění písemných algoritmů aditivních a multiplikativních operací.

3. Rešerše učebnic

Za účelem získání ucelenějšího náhledu na způsob výuky tématu pozičního zápisu na 1. stupni základních škol byly nahlédnuty učebnicové řady. Rešerše učebnic poskytla základní přehled o standardních a nestandardních úlohách, jejich četnosti a typu. Za standardní úlohy jsou zde považovány úlohy, které se vyskytují ve vyšší četnosti v rámci učebnicové řady, ale zároveň i napříč různými řadami učebnic. Jako nestandardní jsou v této práci označovány takové úlohy, které se vyskytují v učebnicích ojediněle a většinou od řešitele vyžadují práci ve vyšších hladinách Bloomovy taxonomie kognitivních cílů[1], jako např. aplikace a analýza. Jako ucelené učebnicové řady byly nahlédnuty publikace nakladatelství: Didaktis, Fortuna, Fraus, Fraus – Hejného metoda, H-mat, Nová škola Brno, Prometheus, Scientia a Taktik. Jako doplňující byly nahlédnuty jednotlivé učebnice nakladatelství: Matematický ústav AV, Nová Škola, Prodos, SPN.

V této kapitole uvedu příklady nejčastěji se vyskytujících typů úloh v učebnicích matematiky pro jednotlivé ročníky. Uvedu příklady i nalezených úloh nestandardních. Učebnicové úlohy dále doplním o úlohy vyskytující se v testech z matematiky mezinárodního šetření výsledků vzdělávání TIMSS.

3.1. České učebnice

Typické učebnicové úlohy jsou rozřazeny do jednotlivých ročníků, pro které jsou učebnice určeny. Ze všech výše uvedených učebnic, kromě výjimky popsané níže, byly vybrány a pojmenovány úlohy zaměřené na poziční zápis. Zahrnuty jsou pouze úlohy, nikoliv příklady, modely, vysvětlivky, poučky a jiné didaktické prvky neobsahující zadání. Nejsou zahrnuty úlohy z navazujícího učiva jako např. porovnávání čísel, zaokrouhlování nebo písemné algoritmy aritmetických operací. Z těchto úloh byly dále vybrány typově ty úlohy, které se v celkovém součtu vyskytly nejčastěji. V zájmu zamezení přílišnému zkreslení modu jednou nebo několika málo učebnicemi, byla úloha každého typu v rámci jedné učebnice započtena nanejvýš třikrát. Jako typ *jiné* jsou vždy označeny ty úlohy, které se vyskytly méně než ve 3 učebnicích – a i v nich se jednalo o většinou jeden, nanejvýš dva výskyty.

[1] Struktura cílů vzdělávání ve vztahu k úrovním myšlení představená Benjaminem Bloomem, 1956.

V rámci níže uvedených výsledků nejsou zahrnuty učebnice k Hejného metodě – nakladatelství Fraus a H-mat. Tyto učebnice jsou od ostatních typem úloh velmi rozdílné a domnívám se, že by mohly kvantitativní výsledky zkreslit. Zároveň předpokládám, že učitelé, kteří je využívají, pojímají výuku zcela odlišným způsobem. Níže uvedený pohled se tedy týká pouze *tradičních*[2] učebnic. Úlohy zaměřené na poziční zápis čísla, které se v těchto učebnicových řadách vyskytují, jsou zejména v prostředích: Biland (Fraus), Algebrogramy[3], Stovková tabulka (H-mat a Fraus) a Kameny[4] (H-mat).

3.1.1. První ročník

Mezi níže vybrané a popsané typy nejsou zahrnuty úlohy s rozkladem čísla při početních operacích s přechodem přes desítku. Dále jsou vynechány početní úlohy, které mají upevňovat dopočítávání do desítky a odpočítávání od desítky, jako např. úloha typu 10 + __ = 13, nebo doplňování podle modelu čísla do rovnosti s předepsanou desítkou, např. číslo 13 na počítadle a rovnost 10 + __ = 13. Tyto úlohy se vyskytovaly hojně a svým způsobem s pozičním zápisem souvisí, ale dle mého názoru se jedná o nácvik početní metody, nikoliv nutně rozvoj porozumění pozičnímu zápisu čísla.

Diagram níže znázorňuje početnost jednotlivých typů úloh, které budou dále popsány. Nahlíženo bylo 18 učebnic matematiky určených pro 1. ročník ZŠ.

[2] Učebnice mimo alternativní proud výuky matematiky, jakým je v českém kontextu např. Hejného metoda.
[3] Úlohy s rovnostmi, ve kterých jsou některé nebo všechny číslice nahrazeny písmeny.
[4] Úlohy s tabulkou řádů, ve které jsou hodnoty znázorněny položenými kameny.

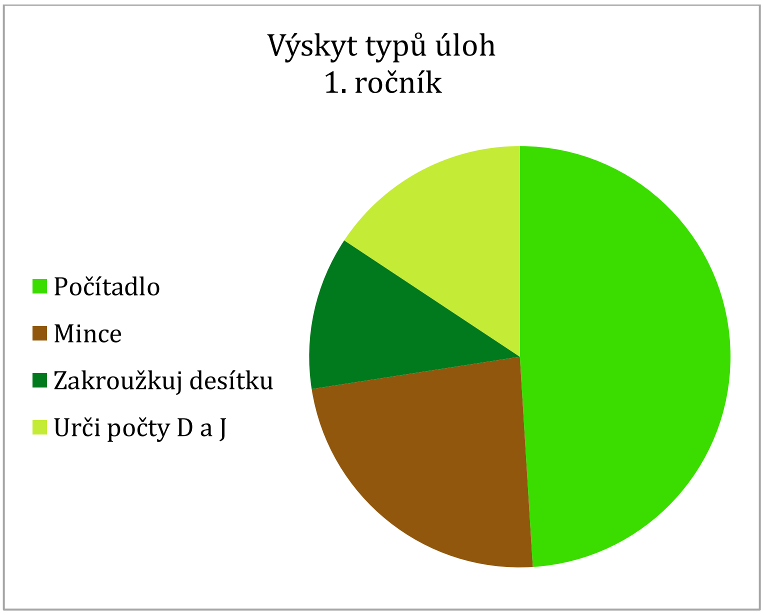
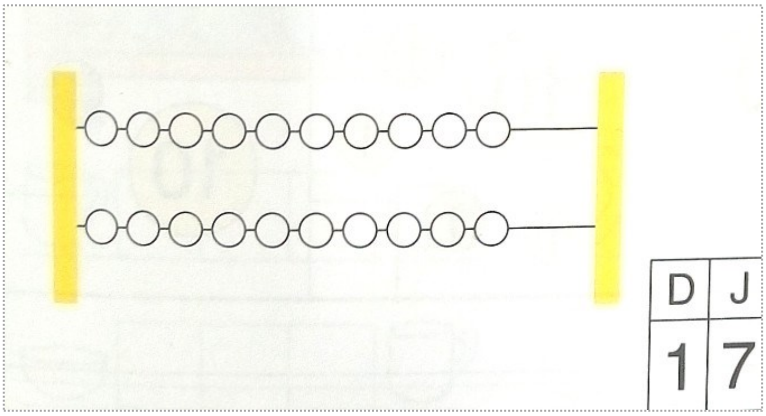


Diagram 1

Počítadlo

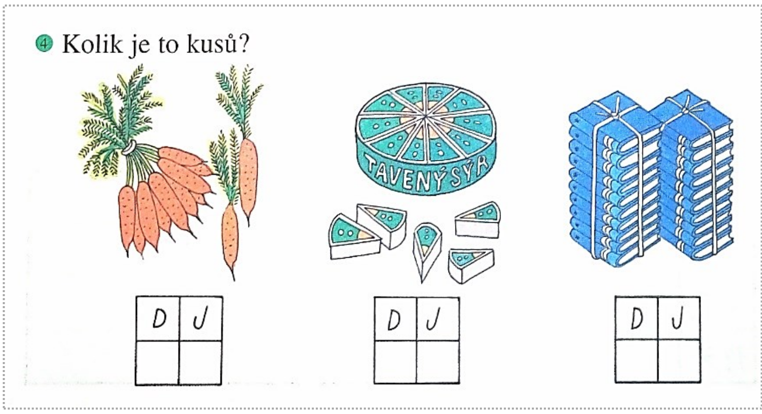
V úloze typu Počítadlo řešitelé znázorňují kvantitu čísla mezi 10 a 20, kde je desítka zřetelně oddělena. Kromě obrázků dvouřadého počítadla se může jednat o komíny z krychlí nebo za sebou seřazená okénka s jasným předělem pro desítku. Ze 25 výskytů se v 18 případech jednalo o pokyn ke znázornění čísla na modelu, v 7 případech o čtení takto znázorněného čísla a jeho zápis číslicemi.



Obrázek 1: SPN, 2008, PU, 2. díl, str. 43

Mince

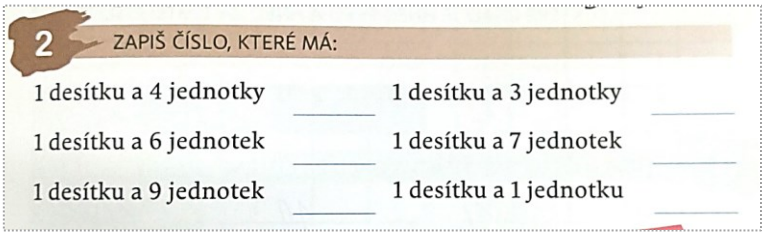
V úlohách typu Mince je použit model čísla s odděleným znakem pro desítku a jednotku. V nahlížených učebnicích se jednalo nejčastěji o model desetikorun a jednokorun, ale využity mohou být i pytlíky, svazky, koše nebo jakákoliv jiná znázornění celé desítky. Jako podtypy vyčleňuji znázornění s viditelnou desítkou (např. svazky, koše hrušek) nebo s desítkou znakovou (např. mince, pytlíky). Ze 12 úloh se jednalo o 10 modelů se znakovou desítkou a 2 s desítkou viditelnou. Ve většině případů bylo zadáním úlohy číslo na modelu přečíst a zapsat číslicemi, v jednom případě měli žáci mince v dané souhrnné hodnotě zakreslit.



Obrázek 2: FORTUNA, 1997, PU 2. díl, str. 9

Urči počty desítek a jednotek

V těchto úlohách žáci vyznačovali počty jednotek a desítek v čísle bez opory o reálný model jako např. mince, nebo naopak číslo rozložené na počet jednotek a desítek zapisovali zkráceným zápisem čísla. Jednalo se většinou o tabulku, nebo barevné označení číslic na pozicích těchto řádů. Pozorováno bylo 8 takovýchto úloh.

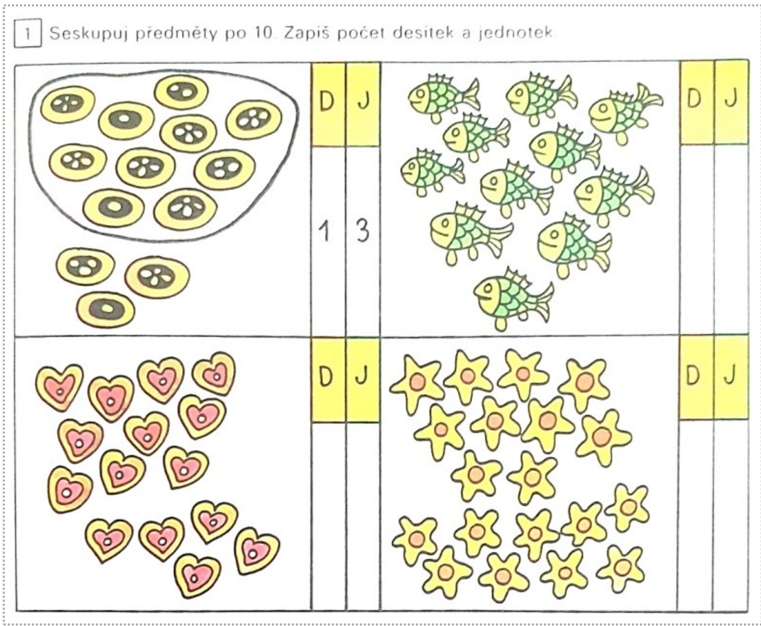

2 ZAPIŠ ČÍSLO, KTERÉ MÁ:

1 desítku a 4 jednotky ______ 1 desítku a 3 jednotky ______
1 desítku a 6 jednotek ______ 1 desítku a 7 jednotek ______
1 desítku a 9 jednotek ______ 1 desítku a 1 jednotku ______

Obrázek 3:FRAUS, 2011, PU, 2. díl, str. 27

Zakroužkuj desítku

V úlohách tohoto typu je znázorněna volná kvantita libovolných objektů jako autíčka, bonbony, motýle apod. Zadáním je zakroužkovat desítku, případně i zapsat celkový počet objektů číslicemi. Pozorováno bylo 6 výskytů.



Obrázek 4: FORTUNA, 1998, PU, 2. díl, str. 3

3.1.2. Druhý ročník

Diagram níže znázorňuje početnost jednotlivých typů úloh, které budou dále popsány. Nahlíženo bylo 15 učebnic matematiky určených pro 2. ročník ZŠ.

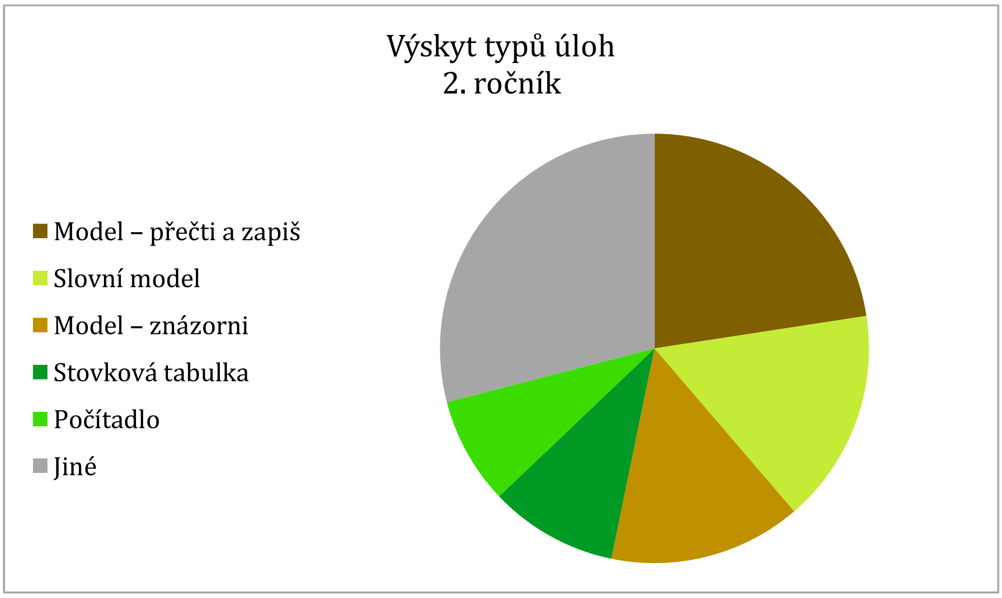
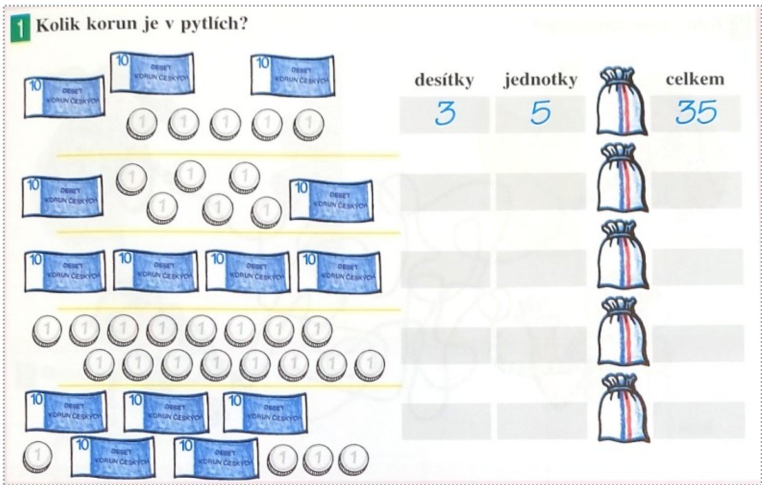


Diagram 2

Model – přečti a zapiš

Jedná se o typ úlohy, kde řešitelé čtou a zapisují číslicemi čísla vyobrazená na modelech. V učebnicích 2. ročníku se úlohy s vizuálními modely desítek a jednotek vyskytovaly často, proto je zde typ Mince z 1. ročníku rozdělen do dvou typů podle toho, jestli řešitel čísla čte nebo znázorňuje. Ze 14 výskytů se v 8 případech jednalo o desítku viditelnou, nejčastěji v podobě Dienesových tyčinek a krychliček nebo strukturně podobného modelu jako jsou komíny, řádky počítadla, řádky tabulky 10 × n. Ve zbývajících 6 případech se jednalo o použití desítky znakové, nejčastěji na modelu peněz (desetikoruny, jednokoruny).



Obrázek 5: PRODOS, 1997, PU, 2. díl, str. 9

Slovní model

V úlohách tohoto typu řešitelé pracují s počtem jednotek, desítek, případně i stovek, pouze na základě tohoto slovního označení. Z 10 výskytů se v 6 případech jednalo o pokyn k zápisu čísla definovaného zastoupením jednotlivých jeho řádů. Ve zbylých 4 případech se jednalo o pokyn k opačnému postupu, tedy určení hodnot jednotlivých řádů v pozičně zapsaném čísle.

4. Zapiš čísla, která mají:

9 desítek 4 jednotky ______	1 stovku 0 desítek 0 jednotek ______
5 desítek 2 jednotky ______	6 desítek 1 jednotku ______
8 desítek 4 jednotky ______	3 desítky 3 jednotky ______
7 desítek 0 jednotek ______	5 desítek 9 jednotek ______

Obrázek 6: SPN, 2010, PS, 1. díl, str. 55

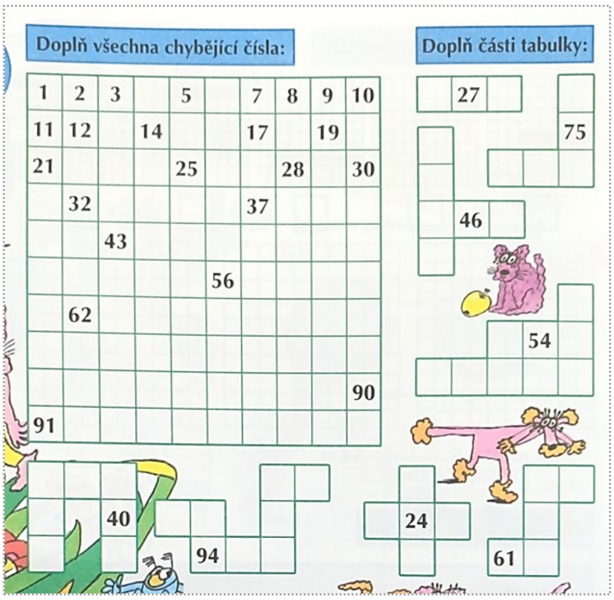
Model – znázorni

Tento typ úlohy pracuje s týmiž modely popsanými v typu Model – přečti a zapiš. Zadáním je zde číslicemi zapsané číslo znázornit na tomto modelu. Ve všech 9 výskytech se jednalo o znázornění na modelu peněz.

Obrázek 7: TAKTIK, 2016, PS, str. 9

Stovková tabulka

Mezi úlohy zaměřené na poziční zápis jsem zařadila i úlohy se stovkovou tabulkou, které podle mého názoru význam řádů a pozice také rozvíjejí. Pozorováno bylo 6 takovýchto úloh. Nejčastěji se jednalo o úlohy s doplňováním čísel do neúplné stovkové tabulky, ale i doplňování čísel do vyňatých dílů nebo o pozorování chování tabulky, např. čtení čísel po sloupcích.



Obrázek 8: FORTUNA, 1994, PS, 2. díl, str. 28

Počítadlo

Jedná se opět o úlohy se znázorněním čísla na počítadle nebo podobném modelu, ve kterém je však vidět celá kvantita čísla a jednotlivé desítky jsou odděleny řádky. Ve 2. ročníku se jednalo o 5 výskytů, přičemž všechny úlohy vyžadovaly znázornění čísla na počitadle či podobném modelu, nikoliv jeho čtení.

Obrázek 9: TAKTIK, 2016, PS, str. 7

Jiné

V ostatních 18 výskytech se jednalo o úlohy, jež pracovaly s tabulkou řádů, rozkladem dvojciferných čísel na celé desítky a jednotky, rozkladem na součet desítek a jednotek, třízení čísel na základě počtu desítek a jednotek, porovnávání hodnot řádů, kroužkování desítek z volné kvantity nebo zápisu čísel jako v prostředí Kameny.

3.1.3. Třetí ročník

Diagram níže znázorňuje početnost jednotlivých typů úloh, které budou dále popsány. Nahlíženo bylo 16 učebnic matematiky určených pro 3. ročník ZŠ. Během rešerše byly evidovány také úlohy na slovní zápis čísla nebo zápis číslicemi na základě předepsaného slovního zápisu. Tyto úlohy jsem se rozhodla nezahrnovat, neboť dle mého názoru souvisí s pozičním zápisem zásadně, ale druhotně, a to vývojem našeho jazyka na základě desítkové soustavy. Jednalo se ve 3. ročníku o 9 úloh, z čehož v 6 řešitelé zapisují číslo číslicemi, ve 3 slovně.

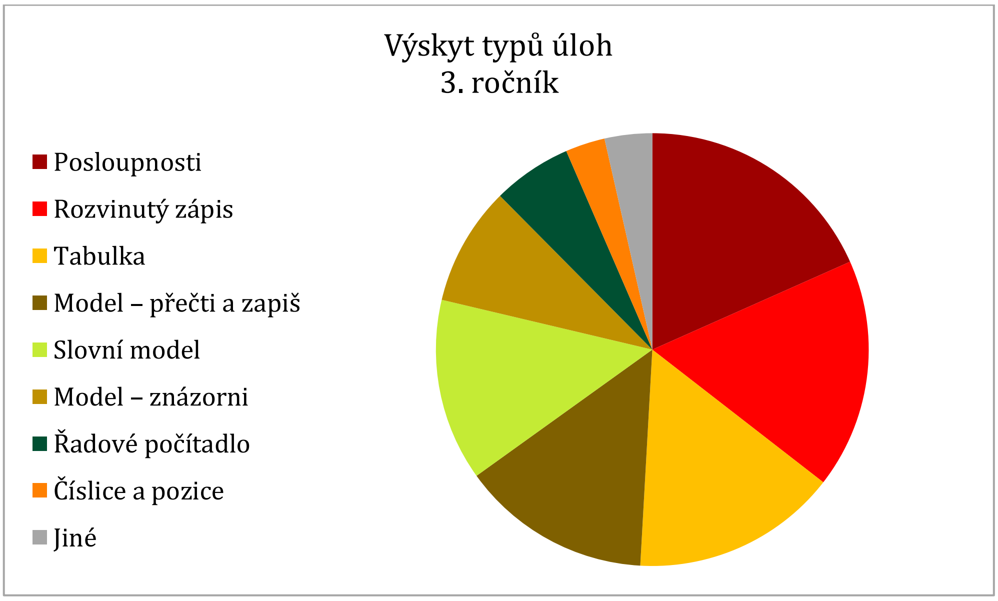
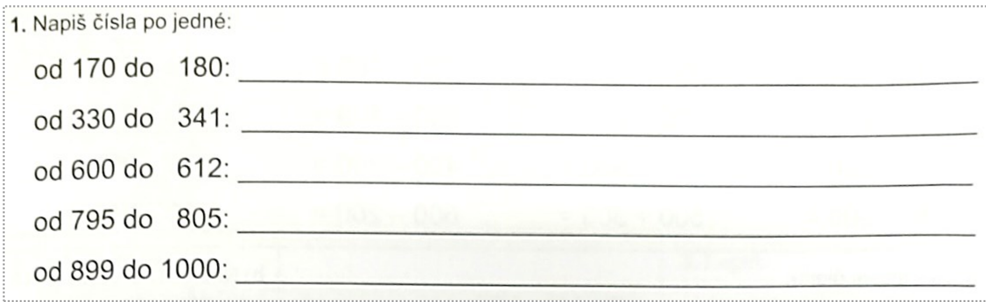


Diagram 3

Posloupnosti

Tento typ shrnuje úlohy na posloupnost čísel, které mohly mít podobu neúplných řad s různou distribucí předvyplněných čísel, nebo častěji podobu pouze několika předepsaných počátečních čísel a čísel koncových. V tomto typu jsou zahrnuty i pokyny jako: *Počítej po stovkách od 0 do 1 000 a zpět.* Zvlášť jsou vyčleněny podtypy s doplňováním čísel *po jednotkách* nebo *po vyšších řádech*. První zmiňovaný podtyp měl 18 výskytů, v něž započítávám i pokyny jako: *Urči číslo hned před a hned za.* Druhý zmiňovaný podtyp, tedy v případě 3. ročníku změna čísel po desítkách nebo po stovkách, měl 13 výskytů. V naprosté většině případů se jednalo o čísla řazena vzestupně.


1. Napiš čísla po jedné:

od 170 do 180: __________

od 330 do 341: __________

od 600 do 612: __________

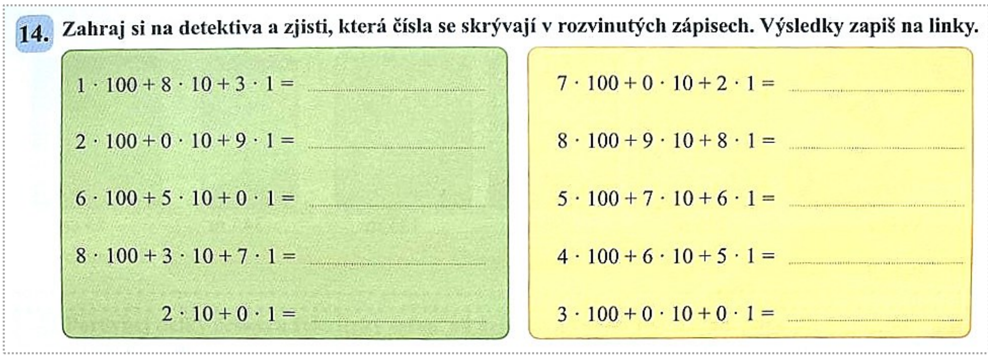
od 795 do 805: __________

od 899 do 1000: __________

Obrázek 10: SPN, 2008, PS, 2. díl, str 9

Rozvinutý zápis

Druhým nejčastějším typem byly úlohy s rozvinutým zápisem. Vyčleněnými podtypy jsou zápis čísla jako součet stovek, desítek a jednotek, např. 200 + 40 + 6, a úplný rozvinutý zápis s využitím součinů, např. $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1$. Ve 3. ročníku se z 23 výskytů jednalo v 11 případech o první zmiňovaný typ, ve 13 o druhý zmiňovaný. Zároveň většina úloh se týkala rozvinování čísel, pouze v 6 případech bylo zadáním rozvinutý zápis zkrátit, z toho 3 a 3 v každém z podtypů.



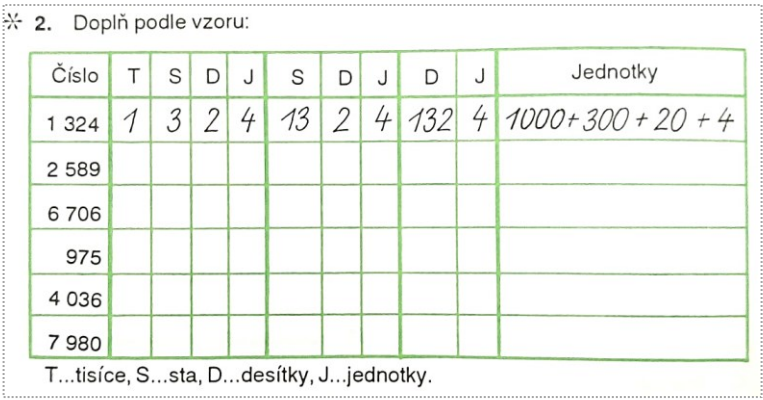
14. **Zahraj si na detektiva a zjisti, která čísla se skrývají v rozvinutých zápisech. Výsledky zapiš na linky.**

$1 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1 =$	$7 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1 =$ ....
$2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 9 \cdot 1 =$	$8 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 8 \cdot 1 =$ ....
$6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 1 =$	$5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1 =$ ....
$8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 =$	$4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5 \cdot 1 =$ ....
$2 \cdot 10 + 0 \cdot 1 =$	$3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1 =$ ....

Obrázek 11: TAKTIK, 2016, PS, 1. díl, str. 21

Tabulka

V těchto úlohách je využita tabulka s řády nadepsanými v záhlaví. Řády bývají nadepsány slovně, zkratkou slov (S, D, J), nebo jsou vyjádřeny zápisem hodnot řádu (100, 10, 1), případně jsou v záhlaví obrázky mincí a bankovek. V naprosté většině jsou čísla psána v řádcích, tedy číslice rozmístěné do sloupců výsledně mají podobu běžného zápisu, jen má každá číslice vlastní pole tabulky. Pozorováno bylo 26 takovýchto úloh. Jen ve 2 výskytech se jednalo o čísla ve sloupcích a řády v řádcích. V 17 výskytech bylo zadáním číslo rozepsat do řádů, v 9 výskytech bylo zadáním takto rozepsané číslo zapsat zkráceným zápisem. V 6 výskytech byly v záhlaví tabulky bankovky a mince. Specifickým případem byly tabulky v učebnicích vydaných Matematickým ústavem AV, kde bylo zadáním čísla zapsat do tabulky i s výskytem víceciferných čísel v jednom poli tabulky (obr. 12). Výhodou této úlohy je, že se řešitel musí nad číslem zamyslet a dělit jej celé, tedy uvažuje kolikrát se do čísla daný řád vejde, nikoliv jaká číslice je na dané pozici. Úskalím této úlohy mohou být větší nároky na slovní obraty učitele, např. *Kolik se do čísla vejde stovek?* × *Jaká je hodnota v řádu stovek?*



✲ **2.** Doplň podle vzoru:

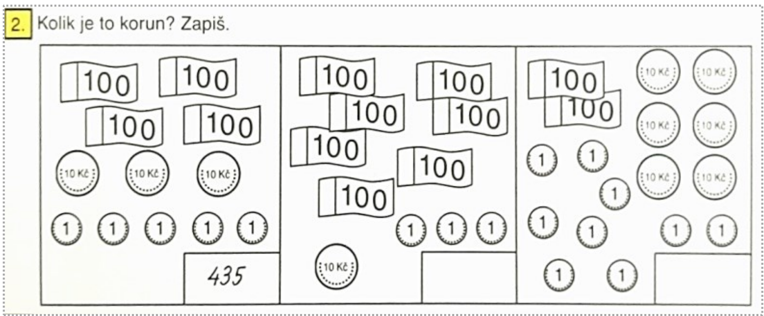
Číslo	T	S	D	J	S	D	J	D	J	Jednotky
1 324	1	3	2	4	13	2	4	132	4	1000 + 300 + 20 + 4
2 589										
6 706										
975										
4 036										
7 980										

T...tisíce, S...sta, D...desítky, J...jednotky.

Obrázek 12: MÚ AV, 1993, PS, 2. díl, str. 24

Model – přečti a zapiš

Tak jako bylo popisováno u 2. ročníku, jedná se v tomto typu úloh o znázorňování čísla pomocí modelu pro jednotlivé řády. Ze 24 výskytů se jednalo o 11 výskytů s viditelným modelem, kterým byly nejčastěji Dienesovy kostky nebo modely jim strukturně podobné, např. milimetrový papír a jiné mřížky. Znakový model byl využit v 12 výskytech, z čehož v 9 případech se jednalo o model peněz.



Obrázek 13: SCIENTIA, 2002, PS, 1. díl, str. 15

Slovní model

Jak bylo popsáno u úloh pro 2. ročník, typem slovní model je míněn rozklad čísla na jednotlivé řády pouze na základě jejich pojmenování. Jedná se tedy o typ myšlenkově velmi podobný typu Tabulka. V 17 výskytech bylo zadáním číslo na řády rozložit, v 6 výskytech jej složit a zapsat zkráceným zápisem.

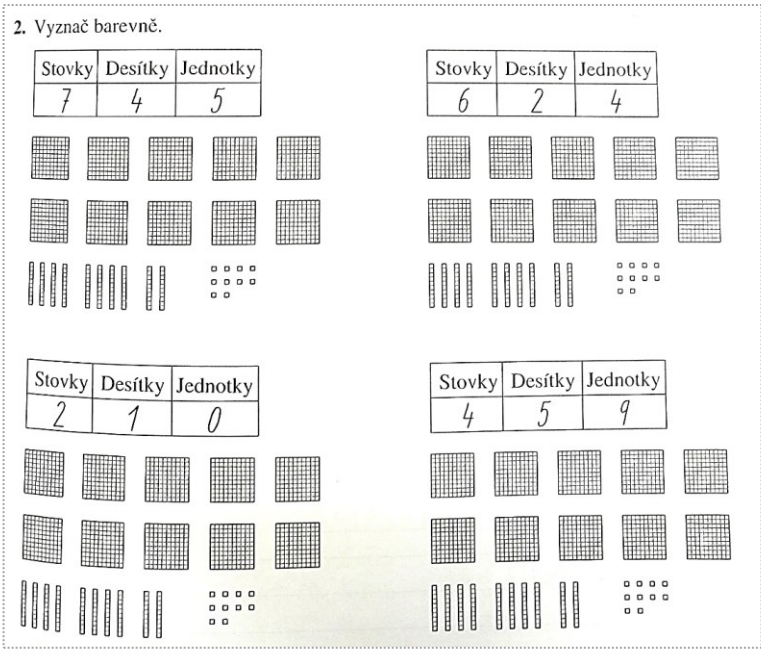
5. Řekni a napiš číslo, které má:

- 6 stovek, 5 desítek, 7 jednotek
- 1 stovku, 9 desítek, 3 jednotky
- 9 stovek, 4 jednotky
- 2 stovky
- 8 stovek, 4 desítky

Obrázek 14: PROMETHEUS, 1998, U, str. 60

Model – znázorni

Tento typ zahrnuje úlohy se stejnými modely ale opačným postupem jako v typu Model – přečti a zapiš. V 8 výskytech byl využit model peněz, ve 4 výskytech viditelný model Dienesových kostek nebo jim podobný, pouze v 1 případě byl využit model znakový ale reálný, tedy krabice se 100 tužek, balení 10 tužek a 1 tužka.

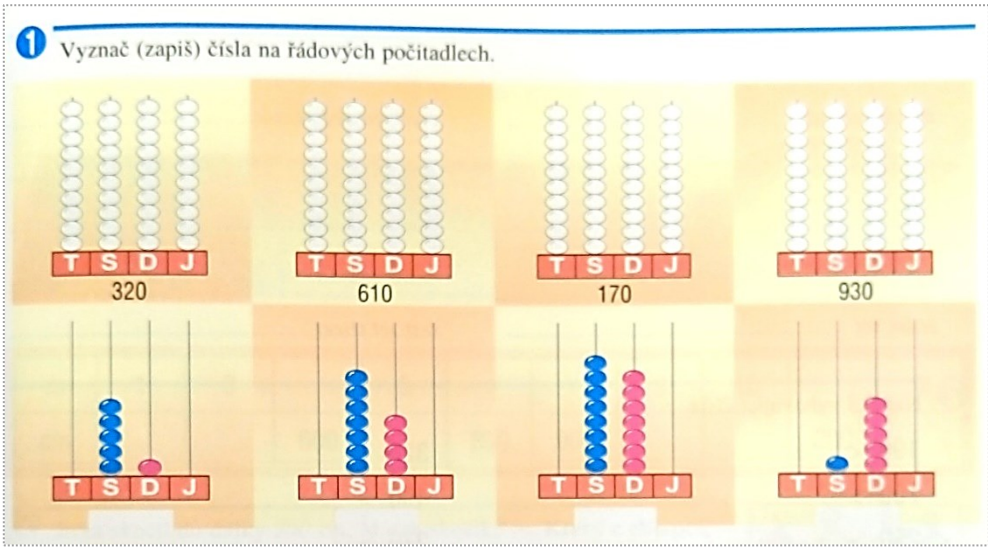


Obrázek 15: PROMETHEUS, 1998, PS, str. 61

Řádové počítadlo

V úlohách s řádovým počítadlem řešitelé znázorňují čísla pomocí kamenů počítadla v jednotlivých řádech, nebo takto znázorněná čísla čtou a zapisují číslicemi. Všechny kameny zde mají stejnou kvalitu, tudíž nelze řád rozlišit jinak než na základě pozice. Oproti úlohám z prostředí Kameny zde však jsou úlohy z hlediska zadání jednotvárné –

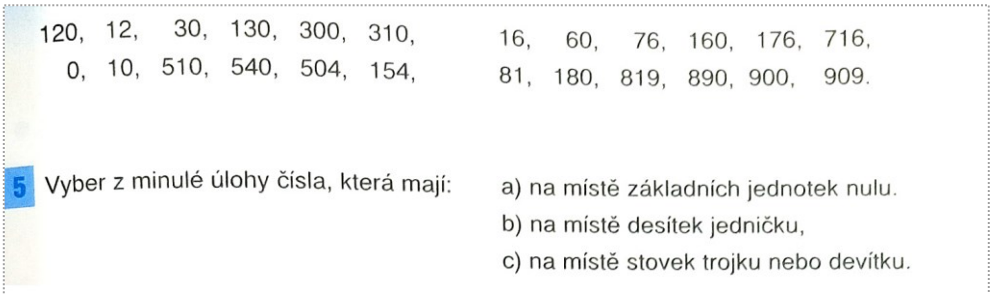
vždy se jedná o znázornění nebo čtení čísla. V 7 výskytech se jednalo o znázornění čísla na řádovém počítadle, ve 3 výskytech o jeho čtení a zápis.



Obrázek 16: PRODOS, 2000, PU, 2. díl, str. 49

Číslice a pozice

Úlohy tohoto typu pracovaly s otázkami jako: *Jaká číslice je na pozici stovek? Který řád v čísle zastupuje číslice 5?* Jednalo se i o úlohy, kde řešitelé vybírají nebo třídí čísla právě na základě číslic na daných pozicích. Tohoto typu se vyskytlo pouze 5 úloh.


120, 12, 30, 130, 300, 310, 16, 60, 76, 160, 176, 716,
0, 10, 510, 540, 504, 154, 81, 180, 819, 890, 900, 909.

5 Vyber z minulé úlohy čísla, která mají:
a) na místě základních jednotek nulu.
b) na místě desítek jedničku,
c) na místě stovek trojku nebo devítku.

Obrázek 17: SPN, 1998, U, str. 71

Jiné

Ostatních 6 úloh se týkalo práce s číslicemi či přímo s číslicovými kartami (např.: *Z číslic 1, 2 a 3 slož největší možné číslo.)*, práce se stovkovou tabulkou a hledání možných zápisů jako v prostředí Kameny.

3.1.4. Čtvrtý ročník

Diagram níže znázorňuje početnost jednotlivých typů úloh, které budou dále popsány. Nahlíženo bylo 13 učebnic matematiky určených pro 4. ročník ZŠ. Během rešerše byly opět evidovány také úlohy se slovním zápisem čísla. Ve 4. ročníku se jednalo o 10 úloh, z čehož v 6 řešitelé zapisují číslo číslicemi, ve 4 slovně.

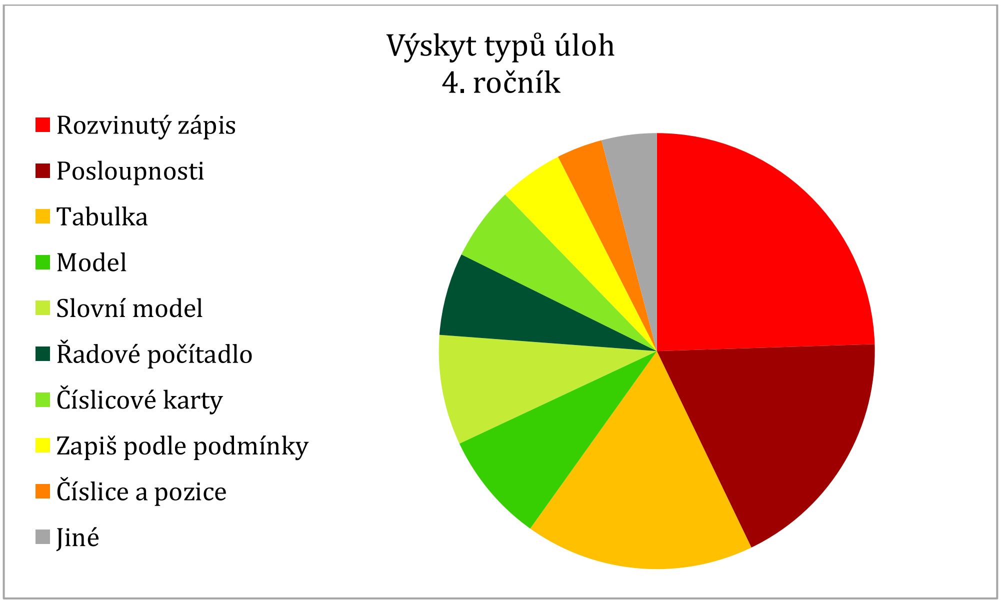
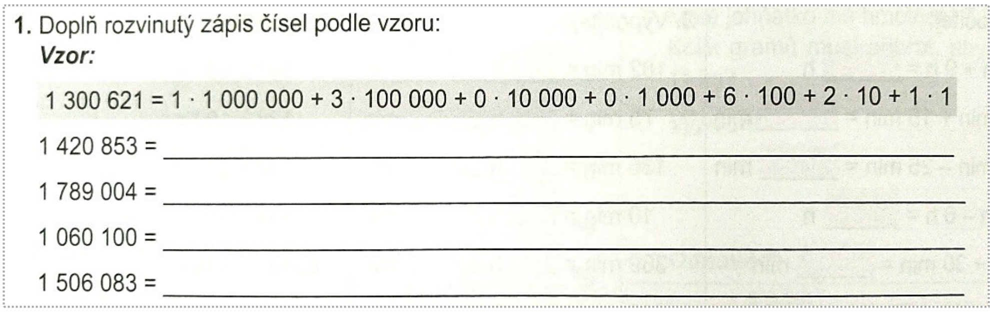


Diagram 4

Rozvinutý zápis

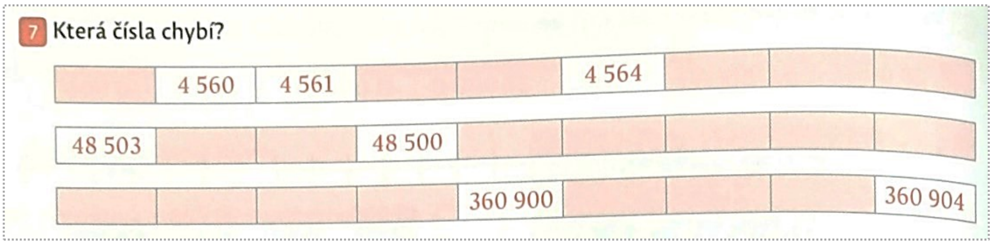
Nejrozšířenější typ úlohy pracoval s rozvinutým zápisem. Zadáním úloh bylo ve většině případů, tedy v 25 výskytech číslo rozvinutým zápisem zapsat. V 7 výskytech bylo zadáním rozvinutý zápis zkrátit a vyskytla se i jedna úloha zaměřena na opravu chyb v rovnosti se zkráceným a rozvinutým zápisem. Ve 4. ročníku oproti ročníku předchozímu úlohy pracovaly zejména se zápisem úplným, tedy se součtem součinů hodnot řádů a odpovídajících mocnin základu. Pouze v 6 případech se jednalo o součet jednotek, desítek, stovek atd. bez součinů, z toho 3 úlohy byly na rozvinování čísla a 3 na jeho zkracování.



Obrázek 18: SPN, 2009, PS, 2. díl, str. 16

Posloupnosti

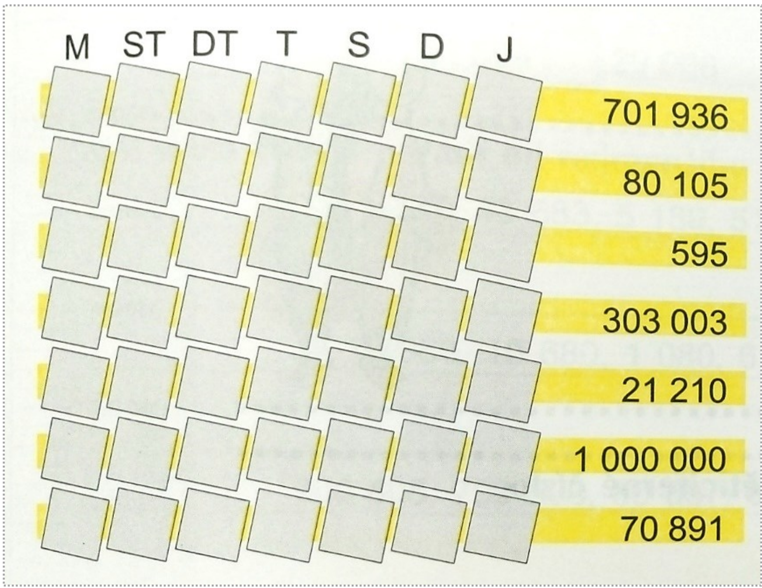
Jedná se o úlohy téhož typu, jako jsou popsány výše. Ve 4. ročníku se z 27 úloh vyskytlo 11 úloh s posloupností *po jednotkách* a 16 *po vyšších řádech*. U obou podtypů a zejména u druhého zmiňovaného se jednalo také o úlohy s pokynem pro ústní vyjmenovávání čísel po desítkách, stovkách, tisících i výše.



Obrázek 19: FRAUS, 2014, PS, 1. díl, str. 26

Tabulka

Tento typ se vyskytoval i ve 3. ročníku a je opět definován výše. Oproti předchozímu ročníku zde dochází zejména k rozšíření číselného oboru. V nahlížených učebnicích bylo 21 výskytů podtypu s rozepisováním hodnot do sloupců s řády, z toho 2 úlohy využily model peněz v záhlaví tabulky. Pouze ve 4 úlohách bylo zadáním zapsat číslo s řády rozepsanými ve sloupcích. Téměř ve všech případech byla čísla v řádcích a řády ve sloupcích.



Obrázek 20: PRODOS, 2000, PU, 2. díl, str. 37

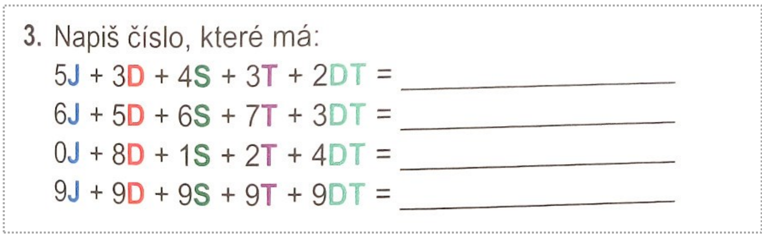
Model

Ve 4. ročníku se již práce s modely vyskytovala o něco méně než v ročnících předchozích, proto byly tyto úlohy sloučeny do jednoho typu. Celkově se jedná o 14 výskytů. V 9 výskytech bylo zadáním úlohy modelované číslo přečíst, z toho v 8 úlohách ze znakového modelu peněz a 1 z viditelného modelu Dienesových kostek. V 5 výskytech bylo zadáním číslo znázornit, a to na modelu peněz.

Obrázek 21: NOVÁ ŠKOLA, 2015, PU, str. 5

Slovní model

Tento typ je rovněž definován výše. Ze 12 výskytů bylo v 9 případech úkolem řešitele číslo rozložené na počet jednotek, desítek, stovek atd. zapsat, ve zbývajících 3 případech číslo takto rozložit.


3. Napiš číslo, které má:

5J + 3D + 4S + 3T + 2DT = ____

6J + 5D + 6S + 7T + 3DT = ____

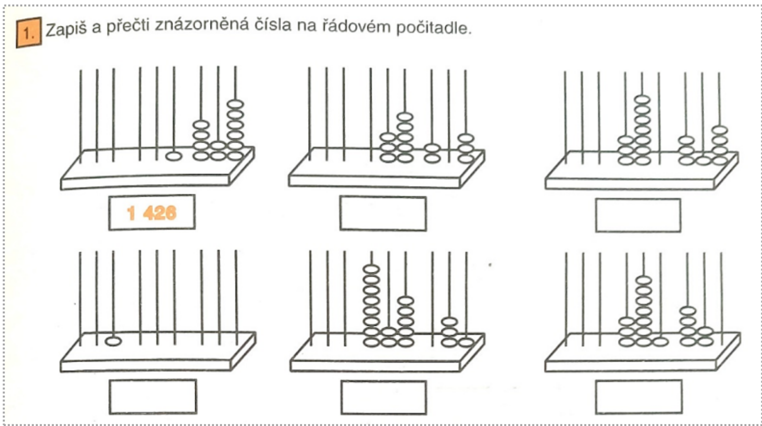
0J + 8D + 1S + 2T + 4DT = ____

9J + 9D + 9S + 9T + 9DT = ____

Obrázek 22: SPN, 2009, U, str. 83

Řadové počítadlo

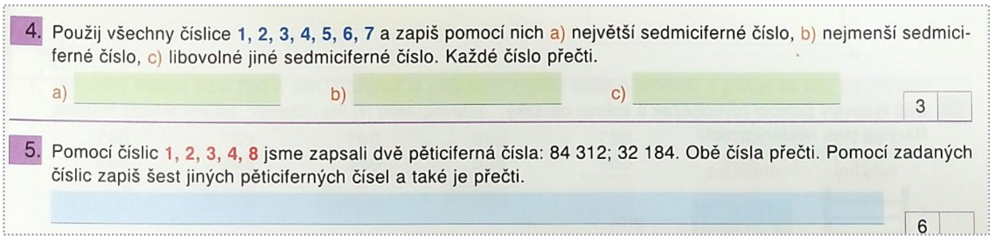
Z 9 výskytů bylo 5 úloh zaměřených na čtení a zápis čísla znázorněného a 4 úlohy zaměřené na znázorňování čísel na řádovém počítadle.



Obrázek 23: SCIENTIA, 2002, PS, 1. díl, str. 17

Číslicové karty

Tento typ úloh se vyskytoval i ve 3. ročníku, avšak v menší míře. Jedná se o úlohy, ve kterých jsou nejčastěji nabídnuty konkrétní číslice, z nichž má řešitel složit nejmenší číslo, největší číslo nebo najít všechna možná čísla, případně co nejvíce čísel splňujících zadané kritérium. Takovýchto úloh se v nahlížených učebnicích pro 4. ročník vyskytlo 8.


4. Použij všechny číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a zapiš pomocí nich a) největší sedmiciferné číslo, b) nejmenší sedmiciferné číslo, c) libovolné jiné sedmiciferné číslo. Každé číslo přečti.

a) b) c) 3

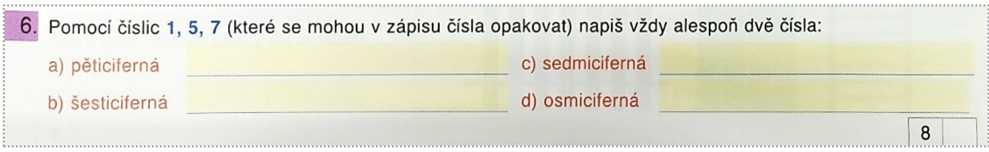
5. Pomocí číslic 1, 2, 3, 4, 8 jsme zapsali dvě pěticiferná čísla: 84 312; 32 184. Obě čísla přečti. Pomocí zadaných číslic zapiš šest jiných pěticiferných čísel a také je přečti.

6

Obrázek 24: ALTER, 2010, PS, 1. díl, str. 23

Zapiš podle podmínky

Tento typ zahrnuje poměrně vysokou myšlenkovou disparitu úloh. Zadáním v těchto úlohách je většinou zapsat číslo, k němuž se vážou podmínky. Jedná se o zadání jako: *Zapiš největší možné pěticiferné číslo. Zapiš alespoň 3 čísla, která mají číslici 7 na místě stovek. Vyber z čísel ta, která mají číslici na místě desetitisícu s hodnotou větší než 5. Zapiš alespoň 3 pěticiferná čísla s ciferným součtem 20.* Ve 4. ročníku se jednalo o 7 výskytů takovýchto úloh.


6. Pomocí číslic 1, 5, 7 (které se mohou v zápisu čísla opakovat) napiš vždy alespoň dvě čísla:

a) pěticiferná c) sedmiciferná

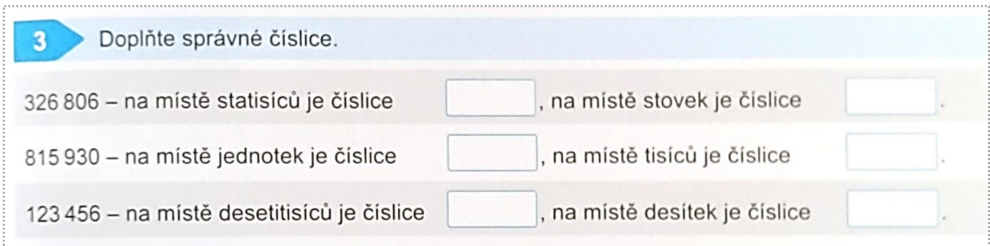
b) šesticiferná d) osmiciferná

8

Obrázek 25: ALTER, 2010, PS, 1.díl, str. 23

Číslice a pozice

Jako i v dřívějším ročníku, i zde se jedná o úlohy zaměřené na určování řádu dané pozice, nebo určování pozice daného řádu. Bylo zaznamenáno 5 výskytů takovýchto úloh ve 4. ročníku.


3 Doplňte správné číslice.

326 806 – na místě statisíců je číslice , na místě stovek je číslice .

815 930 – na místě jednotek je číslice , na místě tisíců je číslice .

123 456 – na místě desetitisíců je číslice , na místě desítek je číslice .

Obrázek 26: NOVÁ ŠKOLA, 2015, PS, 2. díl, str. 5

Jiné

Ostatních 6 úloh pracovalo s rozhodováním o pravdivosti tvrzení, doplňováním slov do tvrzení, se stovkovou tabulkou a ve třech případech jedné učebnice s úlohami jako z prostředí Kameny.

3.1.5. Pátý ročník

Diagram níže znázorňuje početnost jednotlivých typů úloh. V 5. ročníku se nevyskytly žádné nové typy úloh, pouze se oproti podobným úlohám z nižších ročníků rozšiřuje číselný obor, a to i k desetinným číslům. Nahlíženo bylo 11 učebnic matematiky určených pro 5. ročník ZŠ. Během rešerše byly opět evidovány také úlohy se slovním zápisem čísla. V 5. ročníku se jednalo o dosud nejvyšší počet 29 úloh, z čehož v 18 řešitelé zapisují číslo číslicemi, v 11 slovně.

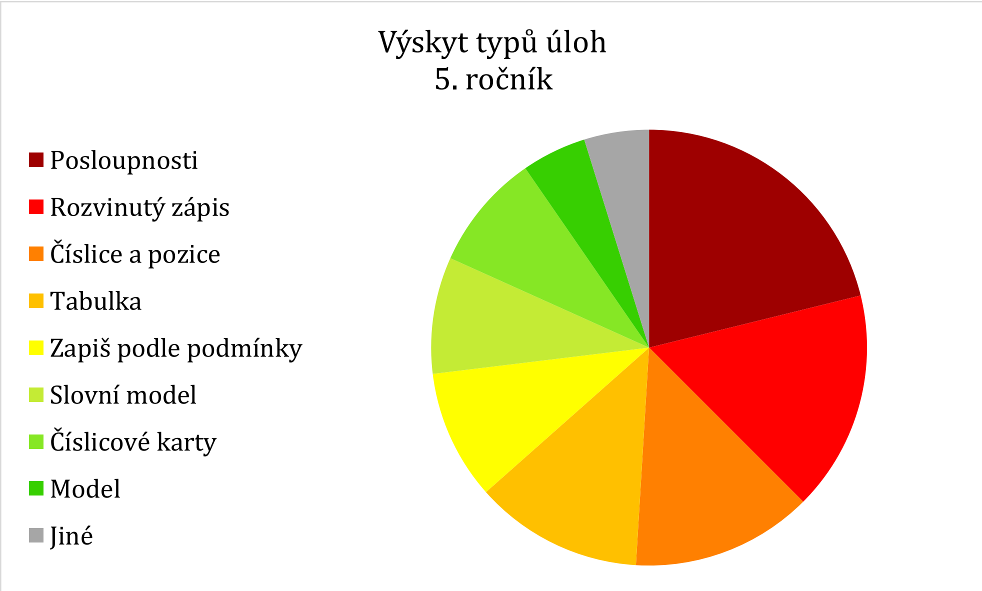
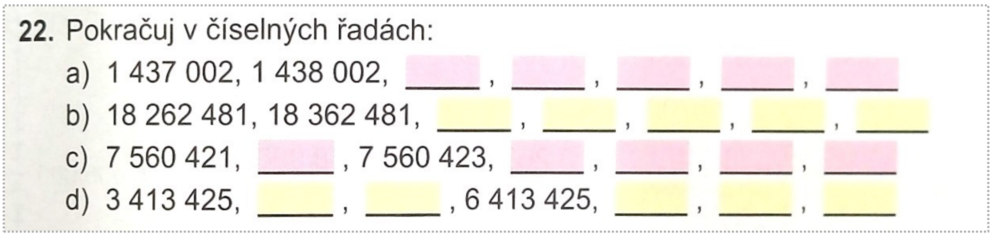


Diagram 5

Posloupnosti

V 5. ročníku se ze 22 výskytu úlohy typu Posloupnosti jedná ve 12 případech o posloupnosti čísel se změnami *po vyšších řádech* a v 10 případech o posloupnosti čísel se změnami *po nejnižším řádu*. U změn *po nejnižším řádu* se v 5. ročníku nejednalo vždy o jednotky, ale v případě desetinných čísel o změnu čísla na pozici nejvíce vpravo, např. posloupnost čísel: 5,7; 5,8; 5,9; 6,0; … V mnohých případech se jednalo o úlohy ústní, tedy se zadáním typu: *Počítej po tisících od 50 000 do 70 000.*

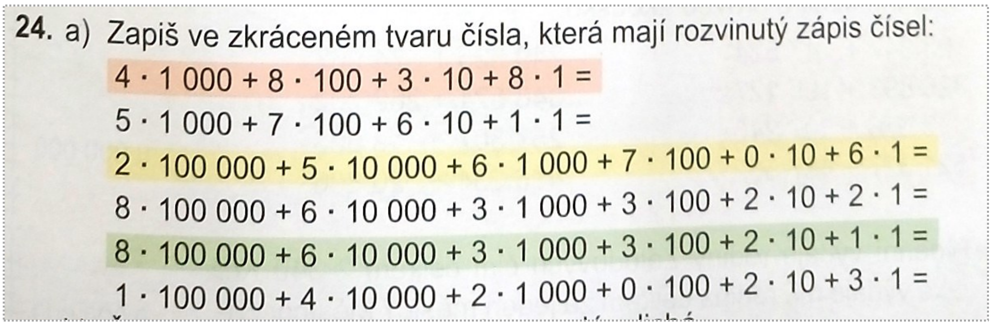


22. Pokračuj v číselných řadách:
a) 1 437 002, 1 438 002, ____, ____, ____, ____, ____
b) 18 262 481, 18 362 481, ____, ____, ____, ____, ____
c) 7 560 421, ____, 7 560 423, ____, ____, ____, ____
d) 3 413 425, ____, ____, 6 413 425, ____, ____, ____

Obrázek 27: SPN, 2010, PS, str. 28

Rozvinutý zápis

Ze 17 výskytů úloh s rozvinutým zápisem se v 10 případech jednalo o pokyn k rozvinutí čísla, v 7 případech o jeho zkrácení.

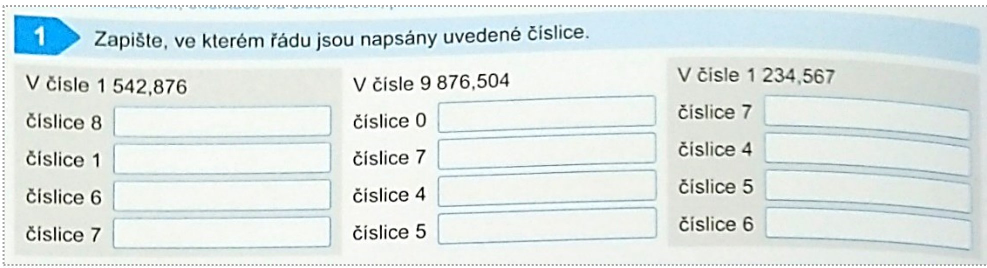


24. a) Zapiš ve zkráceném tvaru čísla, která mají rozvinutý zápis čísel:
$4 \cdot 1\,000 + 8 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 =$
$5 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 1 =$
$2 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 6 \cdot 1 =$
$8 \cdot 100\,000 + 6 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 1 =$
$8 \cdot 100\,000 + 6 \cdot 10\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 =$
$1 \cdot 100\,000 + 4 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 =$

Obrázek 28: SPN, 2010, U, str. 29

Číslice a pozice

Četnost úloh tohoto typu v 5. ročníku značně stoupla, tedy na 14 výskytů. Jednalo se o úlohy často smíšeného typu jako např. úlohy spojovací nebo rozřazovací. Rozdělení úloh podle určení pozice řádu nebo určení řádu pozice proto neuvádím.



1 Zapište, ve kterém řádu jsou napsány uvedené číslice.

V čísle 1 542,876	V čísle 9 876,504	V čísle 1 234,567
číslice 8	číslice 0	číslice 7
číslice 1	číslice 7	číslice 4
číslice 6	číslice 4	číslice 5
číslice 7	číslice 5	číslice 6

Obrázek 29: NOVÁ ŠKOLA, 2017, PS, 1. díl, str. 40

Tabulka

Úloh typu Tabulka se v nahlížených učebnicích vyskytlo celkem 13, z toho v 9 bylo zadáním rozepsat hodnoty řádů a ve 4 bylo zadáním číslo z tabulky přečíst a zapsat zkráceným zápisem.

1. Přečti čísla zapsaná na desítkovém hřišti a zapiš je do sešitu.

Miliony	Statisíce	Desetitisíce	Tisíce	Stovky	Desítky	Jednotky
	2	3	5	6	5	3
	9	3	3	4	3	1
	4	4	0	3	5	0
	8	8	5	6	0	8
	4	7	4	3	0	0
	7	0	0	5	0	

Obrázek 30: PROMETHEUS, 2000, U, str. 5

Zapiš podle podmínky

Těchto úloh se v nahlížených učebnicích pro 5. ročník vyskytlo celkem 10.

3 **Z úlohy 2 zabarvi modře čísla, která mají v řádu milionů číslici menší než 5, a zeleně podtrhni čísla, která mají v řádu miliard číslici větší než 5.**

Obrázek 31: TAKTIK, 2017, PS, 1. díl, str. 4

Slovní model

V nahlížených učebnicích se vyskytlo 9 úloh typu Slovní model. V 5 případech se jednalo o zápis čísla znázorněného tímto modelem, ve 4 případech o rozepsání hodnot čísla v jednotlivých řádech.

18. **HRA NA DETEKTIVA**

Kamilovi se některá čísla schovala. Naštěstí po sobě zanechala důležité stopy. Dokážeš je najít?

a) Jsem číslo, které má 6 jednotek, 2 desítky, 5 stovek a 4 tisíce.
b) Jsem číslo, které má 0 jednotek, 5 desítek, 3 stovky, 0 tisíců a 9 desetitisíců.
c) Jsem číslo, které má 5 desítek, 3 stovky a 9 desetitisíců.
d) Jsem číslo, které má 3 jednotky, 2 desítky, 4 stovky, 3 tisíce, 0 desetitisíců, 2 statisíce a 4 miliony

Obrázek 32: SPN, 2010, U, str. 28

Číslicové karty

Těchto úloh se v učebnicích pro 5. ročník vyskytlo 9. Ve dvou případech jedné učebnice se jednalo o zadání jako: *Ze zadaného čísla vyškrtněte čtyři číslice tak, aby vzniklo největší možné číslo.* Tato úloha byla také zařazena mezi úlohy nestandardní.

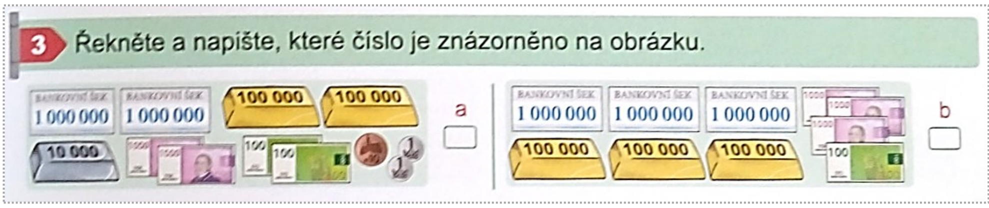
5. Z cifer 7, 8, 9 utvoř všechna možná trojciferná čísla. Číslice se nesmí opakovat.

6. Z číslic 1, 6, 7 utvoř všechna možná trojciferná čísla. Číslice se mohou opakovat.

Obrázek 33: SCIENTIA, 2000, U, str. 22

Model

V učebnicích pro 5. ročník se úlohy s využitím modelů objevovaly již velmi zřídka. Z 5 pozorovaných výskytů se ve 4, z toho 3 započítaných, případech jedné učebnice vyskytlo zapisování čísla znázorněného modelem peněz. Úloha se znázorňováním na modelu se vyskytla dvakrát.



Obrázek 34: NOVÁ ŠKOLA, 2017, PS, 2. díl, str. 3

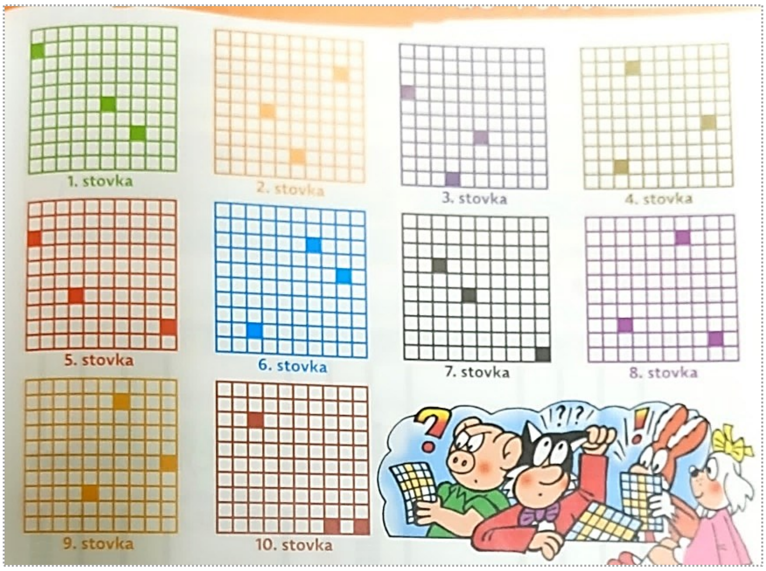
Jiné

Z 5 zbylých úloh pracovaly 3 s řádovým počítadlem, dále zde byla úloha na rozhodování o pravdivosti tvrzení a úloha na doplňování slov do tvrzení.

3.1.6. Nestandardní úlohy

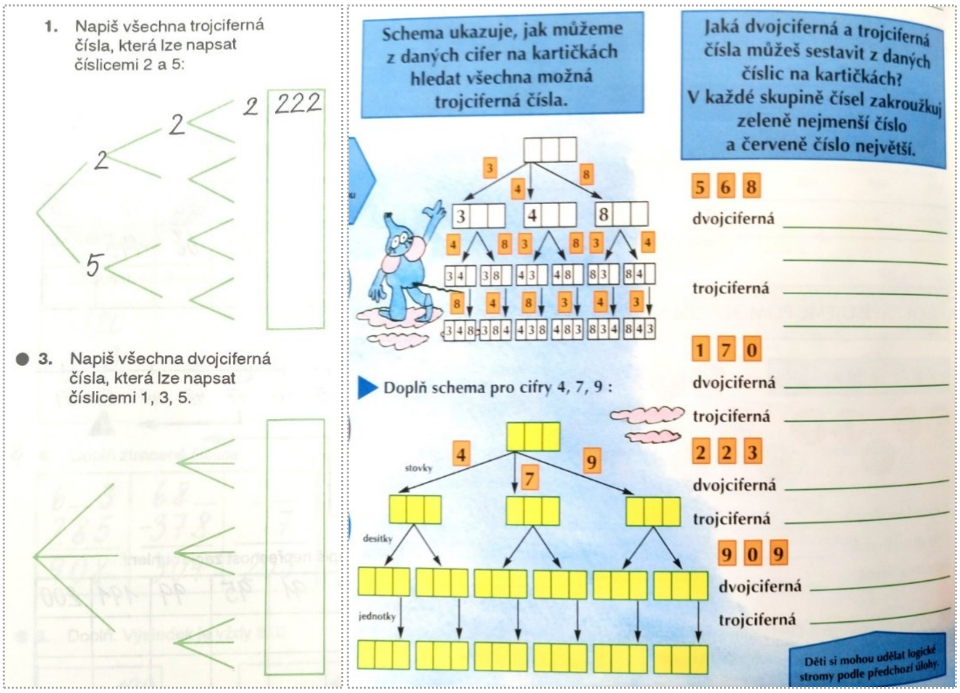
Z rešerše učebnic níže předkládám ukázky nestandardních úloh. Podmínkou pro zařazení úlohy mezi nestandardní byl nejen její ojedinělý výskyt, ale také subjektivně pozorovaná vyšší kognitivní náročnost úlohy, často se zapojením logického úsudku nebo vědomě hledané strategie. Zařazeny byly také úlohy, které poskytovaly ojedinělý model čísla, případně vazby mezi čísly.

Níže uvedený výstřižek je ilustrací úvodu ke kapitole Přirozená čísla v oboru do 1 000. Ilustrace sice neobsahuje zadání, domnívám se však, že vybarvená políčka tabulky znázorňují čísla, která mají být čtena. Řešitelé nemají více nápověd než pořadové označení stovky, musí tedy využít zkušenosti se stovkovou tabulkou a odpočítávat si řádky a sloupce v tabulkách. Úlohu zde uvádím jako příklad nestandardního modelu čísla.



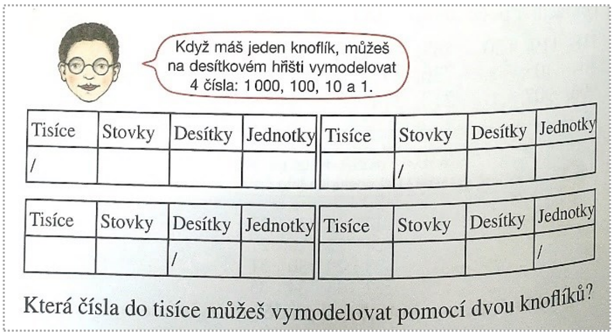
Obrázek 35: FRAUS, 2013, U, str. 5

Úlohy v ukázce níže pracují s možnostmi zápisu čísla z daných číslic. Jelikož se jedná o úlohy kombinatorické, považuji je v kontextu tradičních učebnic pro 1. stupeň za nestandardní. Obě však řešiteli nabízejí organizační princip, jakým mají řešení najít, což může být záměrem a výhodou, ale také ochuzuje žáky o vlastní objevování a třídu o potenciálně podnětnou diskusi. Domnívám se, že nabízené schéma může být pro některé žáky 3. ročníku obtížně uchopitelné.



Obrázek 36: MÚ AV, 1993, PS, 2. díl, str. 14 a FORTUNA, 1994, PU, 2. díl, str. 8

Další kombinatorická úloha je podobná prostředí Kameny. Řešitel zde hledá různá čísla se zadaným ciferným součtem. Strategie nebo organizační princip je ponechána v rukou řešitele. Úlohu je navíc možné jednoduše gradovat navyšováním počtu knoflíků nebo rozšiřováním číselného oboru.



Když máš jeden knoflík, můžeš na desítkovém hřišti vymodelovat 4 čísla: 1 000, 100, 10 a 1.

Tisíce	Stovky	Desítky	Jednotky
/			

Tisíce	Stovky	Desítky	Jednotky
	/		

Tisíce	Stovky	Desítky	Jednotky
		/	

Tisíce	Stovky	Desítky	Jednotky
			/

Která čísla do tisíce můžeš vymodelovat pomocí dvou knoflíků?

Obrázek 37: PROMETHEUS, 1998, U, str. 60

Úloha níže pracuje s procvičením a upevňováním látky. Na první pohled připomíná úlohy typu *zebra*[5], ale s nabídkou čísel z předchozí úlohy má každé tvrzení pouze jedno řešení. Přesto zde úlohu přikládám jako zajímavé pojetí procvičování, které by bylo možno úpravami posunout právě k úloze typu *zebra*.

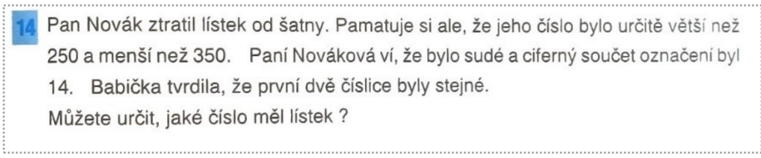
15. Odhalením čísel práce detektiva nekončí. Podle indicií zjisti, které číslo ze cvičení 14 je zloděj, které komplic, které svědek a mnoho jiných důležitých věcí.

Komplicem je dvojmístné číslo.
Soudce má na místě stovek číslici 3.
Zlodějem je nejvyšší číslo.
Čísla větší než 500 a menší než 800 posaď na lavici okradených.
Všechna lichá čísla posaď na lavici svědků.
Číslo, které má stejný počet jednotek a desítek, sedí na červeném místě. Místo vybarvi.
Číslo, které má stejný počet stovek a jednotek, sedí na černém místě. Místo vybarvi.

Obrázek 38: TAKTIK, 2016, PS, 1. díl, str. 21

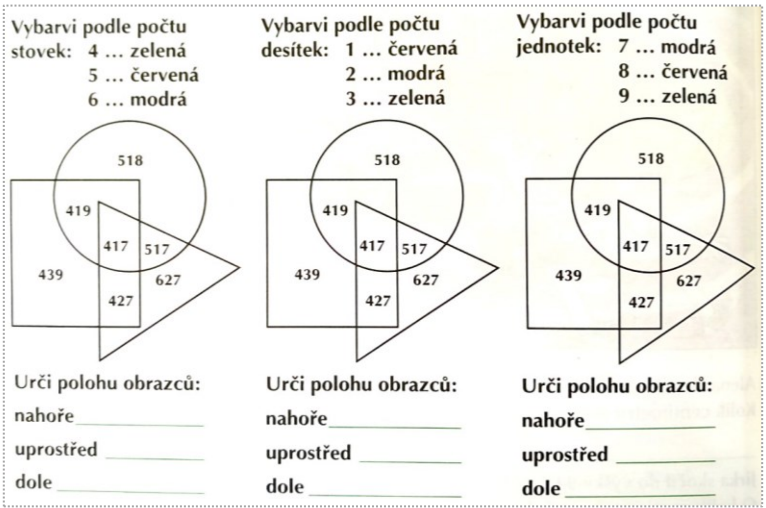
Další výstřižek je skutečně úlohou typu *zebra*. Strategie řešení je zde ponechána na žácích.

[5] Kombinační hlavolam, ve kterém jsou řešiteli známy pouze některé informace. Informace jsou řazeny do skupin, úlohou řešitele je vyvodit zbylé informace v těchto skupinách.


14 Pan Novák ztratil lístek od šatny. Pamatuje si ale, že jeho číslo bylo určitě větší než 250 a menší než 350. Paní Nováková ví, že bylo sudé a ciferný součet označení byl 14. Babička tvrdila, že první dvě číslice byly stejné.
Můžete určit, jaké číslo měl lístek ?

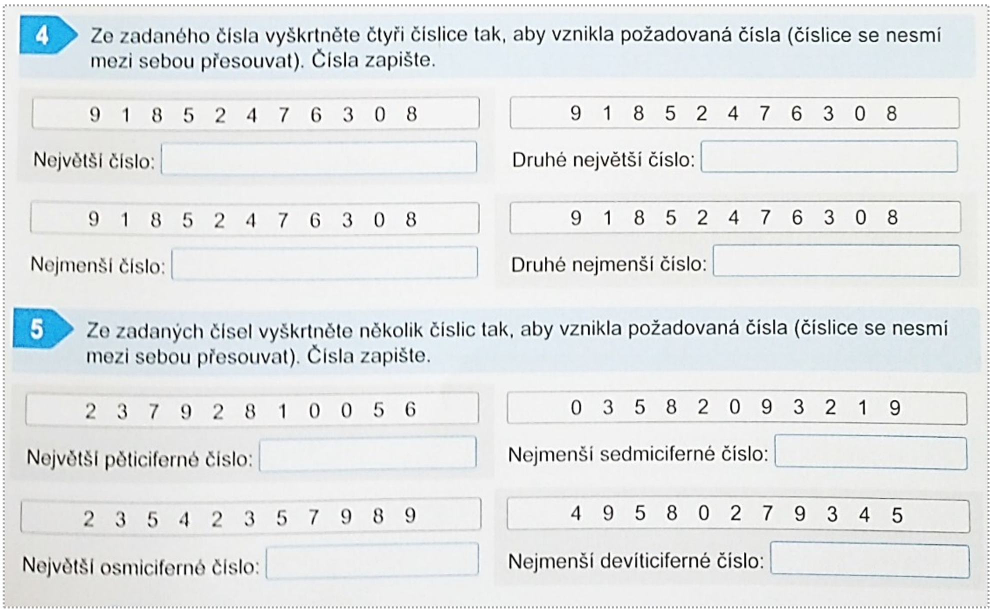
Obrázek 39: SPN, 1998, U, str. 73

Následující úloha spojuje procvičení řádů s určováním polohy obrazců. Samotný tento kontext ji činí úlohou nestandardní. Osobně mě zaujalo využití Vennových diagramů, které zde znázorňují množiny čísel s danou číslicí na konkrétní pozici. Domnívám se, že může být přínosné zadávat i úlohy, kde by žáci čísla do podobných Vennových diagramů vkládali.



Obrázek 40: FORTUNA, 1994, PU, 2. díl, str. 60

Následující úloha pracuje s řadou číslic, ze které řešitelé vyškrtávají číslice tak, aby dosáhli čísla se zadanou podmínkou. U takto vysokého množství číslic už není strategie vyčerpání všech možností efektivní, a tak musí řešitel hlouběji přemýšlet o tom, jak se číslice a jejich hodnoty při odebírání číslic chovají. Úloha dle mého názoru už vyžaduje hlubší porozumění pozičnímu zápisu.



4 Ze zadaného čísla vyškrtněte čtyři číslice tak, aby vznikla požadovaná čísla (číslice se nesmí mezi sebou přesouvat). Čísla zapište.

9 1 8 5 2 4 7 6 3 0 8

Největší číslo:

9 1 8 5 2 4 7 6 3 0 8

Druhé největší číslo:

9 1 8 5 2 4 7 6 3 0 8

Nejmenší číslo:

9 1 8 5 2 4 7 6 3 0 8

Druhé nejmenší číslo:

5 Ze zadaných čísel vyškrtněte několik číslic tak, aby vznikla požadovaná čísla (číslice se nesmí mezi sebou přesouvat). Čísla zapište.

2 3 7 9 2 8 1 0 0 5 6

Největší pěticiferné číslo:

0 3 5 8 2 0 9 3 2 1 9

Nejmenší sedmiciferné číslo:

2 3 5 4 2 3 5 7 9 8 9

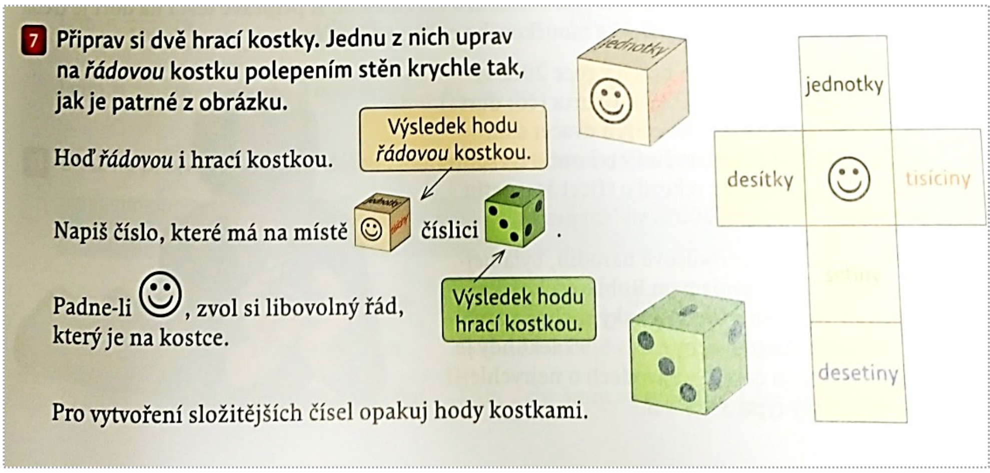
Největší osmiciferné číslo:

4 9 5 8 0 2 7 9 3 4 5

Nejmenší devíticiferné číslo:

Obrázek 41: NOVÁ ŠKOLA, 2017, PS, 2. díl, str. 1

Následující úloha nevyžaduje vyšší úrovně myšlení, ale mezi nestandardní je zařazena díky svému hravému kontextu pro běžné procvičování. Úlohu je možné navíc navrhnout do z mého pohledu zábavnější formy, tedy, že si žáci nejdříve napíšou číslo, a pak se losem určuje číslice i pozice. S touto formou hry mám v matematice v 5. ročníku dobré osobní zkušenosti.



Obrázek 42: FRAUS, 2015, U, str. 55

3.1.7. Shrnutí

Výše byly popsány typy úloh, které se ve vybraném vzorku tradičních učebnic vyskytovaly nejčastěji. Na řády a na poziční zápis obecně je soudě na základě mé rešerše učebnic kladen větší důraz od 3. ročníku. Často pozorovanou byla v učebnicích otázková formulace: *Kolik má číslo desítek/stovek/tisíců?* Tato otázka je velmi rozšířená, zároveň mi z mého subjektivního pohledu přijde poněkud nepřesná. Sloveso *mít* nevyjadřuje přesně, zda je tím míněno, kolik desítek/stovek/tisíců se do čísla vejde, tedy např. 15 stovek do čísla 1 500, nebo jakou hodnotu má v čísle číslice daného řádu. Bylo by zajímavé zjistit, jak tuto otázku vnímají učitelé a zda se někdy setkali s odlišnou interpretací této otázky od jejich žáků. Diagram níže znázorňuje výskyt jednotlivých typů úloh. Nad sloupci celkového počtu výskytů úloh k pozičnímu zápisu v učebnicích pro každý ročník jsou uvedeny počty učebnic, které byly pro daný ročník nahlíženy. Jak je patrno z diagramu, modely čísla s vyššími ročníky v učebnicích ustupují. Od 3. ročníku výše jsou úlohy v učebnicích typově podobné, rozšiřuje se však číselný obor. V obecném shrnutí jsou v dané oblasti učiva nejběžnějšími úlohy pracující s modely čísla, posloupnostmi, rozvinutým zápisem a s tabulkou řádů.

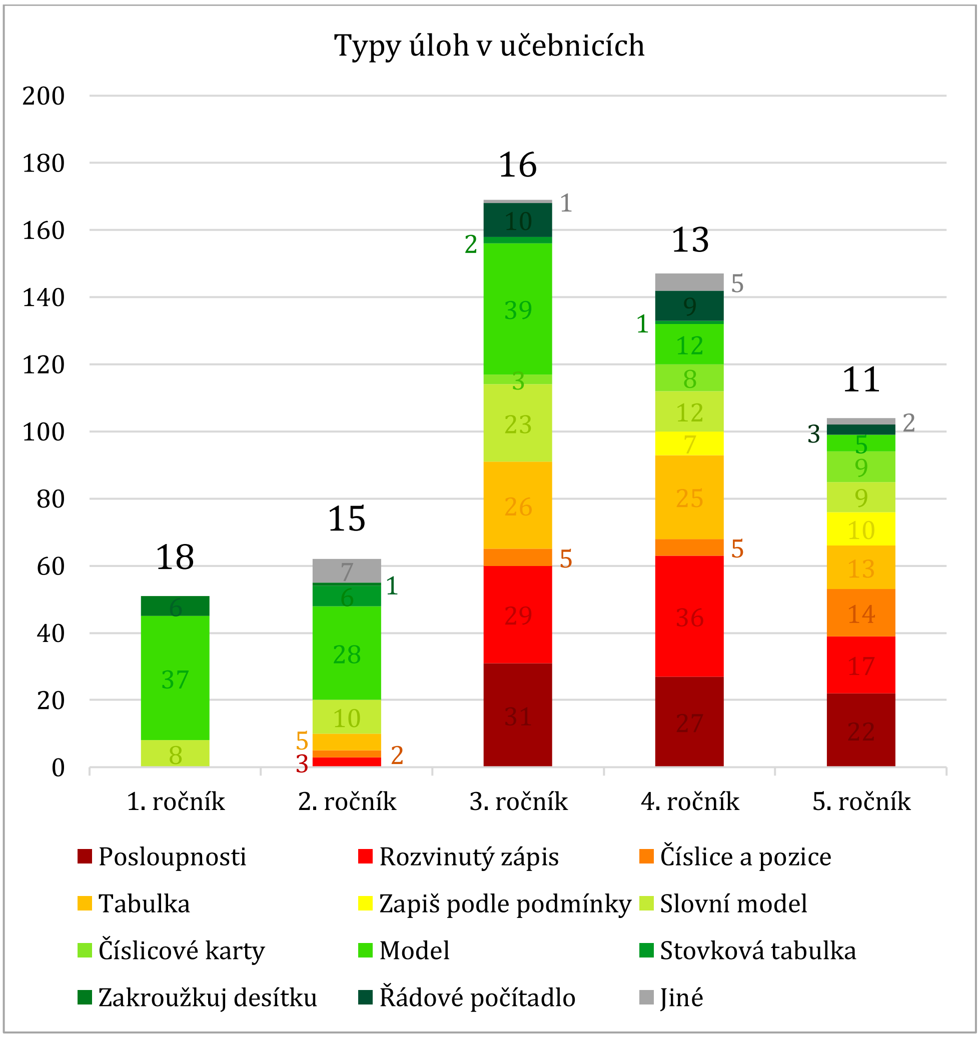

Typy úloh v učebnicích
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
18
15
16
13
11
8
37
6
3
2
5
10
28
6
1
7
31
29
5
26
23
3
39
2
10
1
27
36
5
25
7
12
8
12
1
9
5
22
17
14
13
10
9
9
5
3
2
1. ročník
2. ročník
3. ročník
4. ročník
5. ročník
Posloupnosti
Rozvinutý zápis
Číslice a pozice
Tabulka
Zapiš podle podmínky
Slovní model
Číslicové karty
Model
Stovková tabulka
Zakroužkuj desítku
Řádové počítadlo
Jiné

Diagram 6

3.2. Úlohy z šetření TIMSS

Mezinárodní šetření Trends in International Mathematics and Science Study je rozsáhlá srovnávací studie zjišťující úroveň vědomostí a dovedností žáků v matematice a v přírodních vědách. Tuto studii organizuje Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání a v České republice je její realizace zajišťována Českou školní inspekcí. Šetření se skládá z testové i dotazníkové části a je prováděno ve 4. a v 8. ročníku základních škol jednou za čtyři roky.

V této podkapitole uvádím vybrané úlohy týkající se pozičního zápisu a *place vale*. Nahlédnuty byly testy z matematiky určené pro 4. ročník, které jsou již dostupné na stránkách TIMSS. Jedná se o ročníky: 1995, 2003, 2007 a 2011. Úlohy z šetření mohou posloužit jako reprezentativní vzorek důležitosti tématu i nabídnout náhled na typy úloh zaměřených na téma *place value* v mezinárodním kontextu.

Zahrnuty byly pouze úlohy přímo zaměřené na *place value*, tedy bez navazujících konceptů jako např. písemné algoritmy. Níže v tabulce předkládám přehled nalezených úloh a jejich zařazení do oblastí kognice. Autory vydělené oblasti kognice se však mezi ročníky vyvíjely. V prvních dvou dostupných ročnících byly vyčleněny čtyři oblasti, v ročnících 2007 a 2011 již jen tři oblasti: *Knowing, Aplying* a *Reasoning*, které zahrnuji v přehledové tabulce. Úlohy z oblastí *Knowing* a *Performing routine procedures* (ročník 1995) a z oblasti *Knowing facts and procedures* (ročník 2003) jsou zařazeny do oblasti *Knowing*, tedy znalost. Dále úlohy z oblasti *Using complex procedures* (ročník 1995) a *Using concepts* (ročník 2003) jsou zařazeny do oblasti *Aplying*, tedy aplikace. Úlohy z oblasti *Solving problems* (ročník 1995) a oblastí *Solving routine problems* a *Reasoning* (ročník 2003) jsou zařazeny do oblasti *Reasoning*, tedy uvažování. V pravém sloupci tabulky je uveden poměr úloh zaměřených na hodnotu pozice a všech úloh zaměřených na celá čísla – *Content Domain: Whole Numbers*, pouze ročník 2003 nevyděloval celá a necelá čísla, zahrnula jsem však pouze úlohy týkající se celých čísel*.

ročník	znalost	aplikace	uvažování	celkem
1995	S2, V2	L7, M8	T2, V4	6/17
2003	M011021, M011024	M011004, M011007, M011018, M011026	M031345	7/21*
2007	M041014, M041052		M031106	3/26
2011	M041003, M041010, M041011			3/29

Tabulka 1

Pozoruhodné je, že ačkoliv úloh zaměřených na celá čísla v rámci těchto čtyřech ročníků přibývá, úloh na *place value* spíše ubývá. Domnívám se, že to může souviset s poznatky didaktiky matematiky, na základě kterých se upouští od úloh zaměřených přímo na *place value* ve prospěch úloh na porozumění *place value* navazujících (Kapitola 2). Také vybraný vzorek napovídá, že se úlohy přesunuly spíše do oblasti znalostí, ale pro pozorování či vyvrácení tohoto trendu by bylo potřeba nahlédnout i do novějších testových zadání.

Porovnávání

Úlohy na porovnávání se vyskytly ve třech ze čtyřech ročníků: 1995, 2003 a 2007 (úlohy M8, M011026, M041014). Ačkoliv jsem při rešerši českých učebnic vnímala úlohy na porovnání jako navazující učivo a do výčtu jsem je nezařadila, zde je uvádím proto, že se ve 2 případech jednalo o úlohy s čísly vytvořenými ze stejných číslic, pouze v jiném pořadí. V případě ročníku 2007 se jednalo o úlohu s rozhodováním o řazení dle velikosti. Přikládám příklad jedné z těchto úloh.

Which of these is the largest number?

A. 2,735

B. 2,537

C. 2,573

D. 2,753

Obrázek 43: úloha M8, 1995

Číslo o řád větší

Úloha tohoto typu se vyskytla v nahlížených testech celkem třikrát, z toho dvakrát v ročníku 1995 (úlohy L7 a V2) a jednou v ročníku 2011 (úloha M041011) V těchto úlohách řešitel rozhodoval, které z nabídky čísel je o některý z řádů desítkové soustavy větší nebo menší než číslo v zadání, případně takovéto číslo dopisoval jako na ukázce přiložené níže.

Write the number that is 1,000 more than 56,821.

Answer: ______________________________

Obrázek 44: úloha V2, 1995

Rozvinutý zápis

Úlohy na rozvinutý zápis se objevily dvakrát, v ročnících 1995 (úloha S2) a 2003 (úloha M011007). V obou případech se jednalo pouze o částečný rozvinutý zápis, tedy pouze součty hodnot číslic již vynásobených hodnotou pozice. Přikládám ukázku.

Here is a number sentence.

2,000 +   + 30 + 9 = 2,739

What number goes where the   is to make this sentence true?

Answer: ______________________________

Obrázek 45: úloha S2, 1995

Slovní model

Úlohy na slovní model se vyskytly dvakrát, v ročnících 2003 (úloha M011021) a 2007 (úloha M041052). V obou případech se jednalo o pokyn k určení odpovídajícího zkráceného zápisu čísla. Přikládám ukázku.

Which number equals 3 ones + 2 tens + 4 hundreds?

(A) 432
(B) 423
(C) 324
(D) 234

Obrázek 46: úloha M041052, 2007

Číslice a pozice

Úlohy tohoto typu se vyskytly dvakrát, v ročnících 2003 (úloha M011018) a 2011 (úloha M041010). V první zmiňované úloze se jednalo o klasickou otázku typu: „Která číslice je na místě stovek v čísle 2 345?“. Ve druhé zmiňované, jejíž ukázku přikládám, ale byla otázka formulovaná tak, jak se s ní v českých učebnicích spíše nesetkáváme, tedy: „Ve kterém z čísel číslice 8 představuje hodnotu 800?“ Tato formulace otázky podle mého názoru o něco lépe vystihuje podstatu věci a vede k zamyšlení, ale je možné, že se tak jeví pouze pokud se řešitel s touto formou otázky běžně nesetkává.

In which number does the 8 have the value of 800?

A. 1,468

B. 2,587

C. 3,809

D. 8,634

Obrázek 47: úloha M041010, 2011

Číslicové karty

Tyto úlohy s řazením číslic se vyskytly dvě: v ročnících 1995 (úloha T2) a 2011 (úloha M041003). V obou případech se úlohy dotazovaly na nejmenší možné číslo, které lze z číslic vytvořit. Přikládám ukázku.

Anna has these cards with numbers on them.

1	8	6	5	2

What is the smallest three-digit number she can show with the cards?

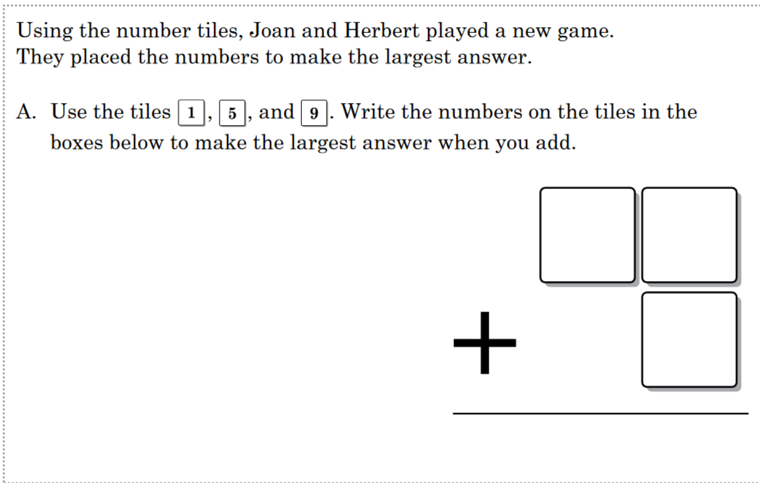
She may use each card only once.

Answer: _______________

Obrázek 48: úloha M041003, 2011

Číslice v operacích

Úlohy tohoto typu se vyskytly dvakrát, v ročnících 1995 (úloha V4) a 2003 (úloha M031345). Tyto úlohy kombinovaly číslicové karty a aritmetické operace jako sčítání, odčítání a násobení. Zadáním zde bylo uspořádat karty tak, aby bylo číslo po provedení operace co nejvyšší. Úloha od řešitele nepochybně vyžaduje aritmetickou dovednost, ale především apeluje na porozumění hodnotě pozice, zejména v úloze V4, ve které měli řešitelé v operaci sčítání takto tvořit dvě dvojciferná čísla. Níže přikládám ukázku části úlohy. Zbylé dvě části této úlohy předkládaly operaci odečítání a násobení.

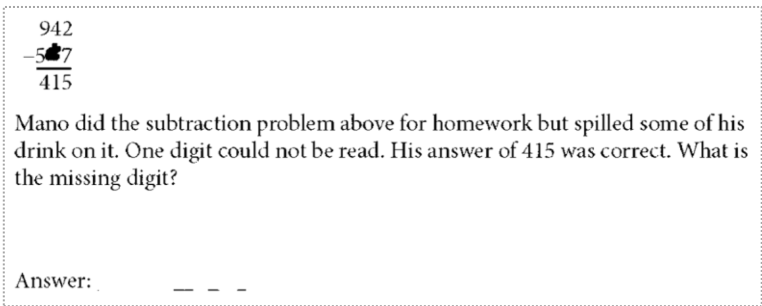

Using the number tiles, Joan and Herbert played a new game.
They placed the numbers to make the largest answer.

A. Use the tiles 1, 5, and 9. Write the numbers on the tiles in the boxes below to make the largest answer when you add.

Obrázek 49: úloha M031345-A, 2003

Doplň číslici

Tato úloha se vyskytla pouze jednou, a to v ročníku 2007 (úloha M031106). Opět se jedná o úlohu zaměřenou na hodnotu pozice v kontextu aritmetické operace. Úloha, kterou zároveň přikládám, pracuje s odčítáním pod sebou, přičemž jedna číslice chybí a je potřeba ji doplnit. Jednou z možných strategií je vypočíst si 942 – 415, a podle výsledného čísla 527 doplnit chybějící číslici. Domnívám se však, že tento postup většinu žáků u spíše nestandardní úlohy nenapadne a začnou doplňováním neznámé na pozici desítek (4 – x = 1). Pro úspěšné řešení úlohy je však potřeba si povšimnout přechodu přes základ a doplňovat tedy nižší počet desítek (3 – x = 1). Podobné úlohy byly využity v rámci pedagogických intervencí v praktické části.


Mano did the subtraction problem above for homework but spilled some of his drink on it. One digit could not be read. His answer of 415 was correct. What is the missing digit?

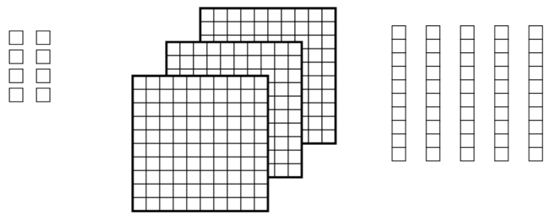
Answer:

Obrázek 50: úloha M031106, 2007

Model

Úloha s použitím modelu čísla se vyskytla pouze jednou, a to v ročníku 2003 (úloha M011004). Jedná se o úlohu, ve které řešitelé zapisuji číslo zobrazené modelem podobným Dienesovým kostkám, jak je vidět na obrázku níže.

Each small square (□) is equal to 1. There are 10 small squares in each strip. There are 100 small squares in each large square.



What number is shown?

Ⓐ 16
Ⓑ 358
Ⓒ 538
Ⓓ 835

Obrázek 51: úloha M011004, 2003

Čtení čísla

Úlohy na čtení čísla, případně zápis čísla slovy, jsou v kontextu *place value* specifické, ale jelikož je náš jazyk vystavěn na desítkové soustavě, také s tématem souvisí. Tato úloha se vyskytla jednou, a to v ročníku 2003 (úloha M011024). Přikládám ukázku níže.

Which of these is a name for 9,740?

Ⓐ Nine thousand seventy-four
Ⓑ Nine thousand seven hundred forty
Ⓒ Nine thousand seventy-four hundred
Ⓓ Nine hundred seventy-four thousand

Obrázek 52: úloha M011024, 2003

Výše popsané úlohy z testových zadání TIMSS jsou v mnohých případech podobné úlohám, jaké se podle mého pozorování objevují i v našich učebnicích. Nestandardní ve srovnání s běžnými úlohami ve výuce u nás jsou však úlohy s propojením *place value* a aritmetických operací. Domnívám se, že takovéto úlohy nejen vyžadují a budují hlubší vhled, ale i pro žáky propojují téma *place value* s matematickým problémem, a tudíž mohou být pro žáky i lákavější, smysluplnější.

Novější testová zadání zatím nejsou dostupná, tudíž nelze určit, jakým způsobem a v jakých kontextech se téma *place value* v testech mezinárodního šetření dále vyskytuje. Považuji však pozorování vývoje těchto testových úloh za přinejmenším zajímavé.

4. Plán výzkumu

V této části práce popisuji přípravu a realizaci kvalitativního výzkumu zaměřeného na zjištění úrovně porozumění pozičnímu zápisu žáků 1. stupně ZŠ. Výzkum probíhal na soukromé ZŠ Hvozdík[6]. Cílem výzkumu bylo prostřednictvím řešení didaktických testů a pozorování matematického chování žáků během pedagogických intervencí nahlédnout způsob myšlení žáků v rámci poziční číselné soustavy, identifikovat a popsat jevy vázané na jejich porozumění zápisu čísla v poziční soustavě a popsat jednotlivé strategie, které žáci s různou mírou porozumění tématu využívají při řešení na toto téma zaměřených úloh.

Hlavní částí výzkumu byla tvorba a zadání dvou didaktických testů žákům 2. – 4. ročníku a následný rozbor řešení. V kapitole Didaktický test je dále popsán prvotní návrh testu, průběh jeho pilotáže a následná úprava didaktických testů do finální podoby. Dále je zahrnut rozbor testu a testových úloh, jejich záměr a na základě mých zkušeností a poznatků z odborné literatury očekávaná žákovská řešení. Následuje popis realizace testování včetně charakteristiky školy a jednotlivých tříd. V závěru příslušné kapitoly jsou sepsány rozbory řešení obou testů v jednotlivých testovaných ročnících. Ačkoliv se jedná o kvalitativní výzkum, a především jsou nahlížena řešení jednotlivých žáků, jsou uvedeny i kvantitativní údaje, které však vzhledem k malé výzkumné skupině nemají vypovídající ale pouze přehledovou, doplňující hodnotu.

Po proběhlém testování byly provedeny pedagogické intervence ve vybrané třídě. Pro účely této práce byla vybrána třída 3. ročníku, neboť dle mého pozorování, osobních zkušeností i rešerše učebnic bývá téma pozičního zápisu exponováno právě od 3. ročníku, kde je číselný obor zpravidla rozšířen na čtyřciferná čísla. Žáci 3. ročníku ZŠ Hvozdík byli testováni před uvedením tématu pozičního zápisu jako samostatného učiva. Během pedagogických intervencí se s látkou seznámili a poté byli opětovně testováni upravenými verzemi obou testů. V příslušné kapitole je shrnut průběh jednotlivých intervenčních vstupů a vyhodnocení naplnění či nenaplnění jejich cíle. Jsou uvedeny také příklady důkazů o učení. Podrobný průběh intervencí je zahrnut v příloze.

[6] Název školy i jména žáků byla pozměněna v zájmu zachování anonymity zúčastněných.

V návaznosti na proběhlé pedagogické intervence byly žákům 3. ročníku opětovně zadány didaktické testy, jejichž úlohy byly upraveny, ale typově zachovány. V příslušné části práce je popsán průběh zadávání a porovnání výsledků výstupního testu s výsledky testu původního.

V poslední kapitole věnované praktické části této práce jsou popsány rozhovory provedené s učiteli jednotlivých tříd na ZŠ Hvozdík a mou osobní interpretaci těchto rozhovorů. Rozhovory se týkaly pojetí výuky pozičního zápisu v jejich třídách. Poznatky získané z rozhovorů byly v případě učitelů testovaných tříd porovnávány s vyskytlými jevy v řešeních didaktických testů žáků té dané třídy.

5. Didaktický test

Sada didaktických testů Poziční soustavy je nástroj pro zkoumání žákovského porozumění principu pozičních soustav, zejména hodnotě pozice (*place value*) a práce s ní. Testy jsou primárně koncipován pro 2. pololetí 3. ročníku ZV a ve stejné podobě byly pro srovnání zadávány i 2., 4. a 5. ročníku ZV. V sadě jsou obsaženy dva na sobě nezávislé testy. První test, Pozemská čísla, se věnuje čistě soustavě desítkové. Druhý test, Mimozemská čísla, si klade za cíl zkoumat porozumění poziční soustavě obecněji, především na příkladu šestkové soustavy, pro výstupní test byla použita soustava osmičková. Tyto testy na sebe přímo nenavazují. Úlohy v testu Mimozemská čísla lze řešit i bez předchozí zkušenosti s úlohami v testu Pozemská čísla. Jednotlivé testy byly zadány v jiných vyučovacích hodinách tak, aby doba mezi nimi pokud možno nepřesahovala jeden týden. Řešení testu Mimozemská čísla vyžaduje od řešitele hlubší porozumění pozičnímu zápisu čísla, proto byla tato část zadávána úspěšným řešitelům části Pozemská čísla a případným dobrovolným zájemcům. Úspěšný řešitel bude blíže definován v podkapitole s rozbory žákovských řešení.

5.1. Pilotáž

Pilotní verze obou didaktických testů byla zadávána ve třídě 3. ročníku na pražské fakultní ZŠ. Uvedená škola je velkou sídlištní školou s 2 až 3 paralelními třídami v ročníku. Zmiňovaná třída byla vybrána, neboť mě její žáci již znali ze souvislých praxí a také díky vstřícnosti jejich třídní paní učitelky.

S cílem zjistit, zda jsou jednotlivé úlohy srozumitelně koncipovány jak textem zadání, tak po jiných stránkách, nebyly žákům úlohy před testem ani během testu vysvětlovány ani jinak komentovány. Na základě žákovských řešení testu byl test dále upravován, aby byla zadání pokud možno jednoznačná a dobře srozumitelná.

Pilotážní podobu obou didaktických testů a přikládám v rámci přílohy.

5.1.1. Pozemská čísla

5.1.1.1. Průběh pilotáže

Pozemská část didaktického testu byla žákům zadávána 19. května 2023 během 1. vyučovací hodiny. Zadaný čas na vypracování byl půl hodiny. Přítomno bylo 27 žáků, jeden test byl vyloučen ze zpracování.

Zadávání trvalo 5 minut. Žákům bylo vysvětleno, že se jedná o pilotážní didaktický test v rámci pedagogického výzkumu. Byli ujištěni, že test není součástí pololetního hodnocení a že chyby jsou v pořádku, neboť test je záměrně těžký, aby zkoumal příslušné jevy. Podány byly také další pokyny jako např., že mohou jednotlivé úlohy řešit v libovolném pořadí, nebo některé přímo vynechat.

Během vypracovávání testů měli jednotliví žáci různé dotazy, většinou ohledně zadání konkrétních úloh, z toho nejčastěji na úlohu č. 4, pak na úlohu č. 2 a na ostatní. Snažila jsem se spíše zadávat otázky a vracet je k textu zadání, abych porozumění žáků neovlivnila informacemi, které by získaly ode mne, ne z testu.

Přibližně polovina žáků test odevzdala před stanoveným časem konce v 8:35. Většina zbylých žáků odevzdala ve stanoveném čase a 3 žáci ještě chvíli dopisovali, ale brzy také odevzdali.

Po vypracování testu jsme utvořili kruh na koberci a o testu si povídali. Zhruba třetina žáků přiznala, že didaktický test byl těžký. Čekala jsem, že celkově pro ně bude pocitově náročnější. Později se žáci dokonce bránili, když jsem je pochválila za snahu, přestože to bylo těžké, sborovým: *„Nebylooo!“* Více než polovina žáků ale přiznala, že bylo těžké především porozumět zadání, zejména zmiňovali poslední úlohu, kde některé zmátlo, jestli mají používat 9 bankovek na všechny nákupy nebo na každý jeden. Navrhla jsem, zda by pomohlo, kdyby byla ke každému nákupu nakreslená peněženka s bankovkami a žáci souhlasili, že by to bylo lepší. Jeden žák se iniciativně zeptal, proč se test jmenuje Pozemská čísla, díky čemuž jsem mohla plynule navázat a oznámit další část testu pro některé z nich.

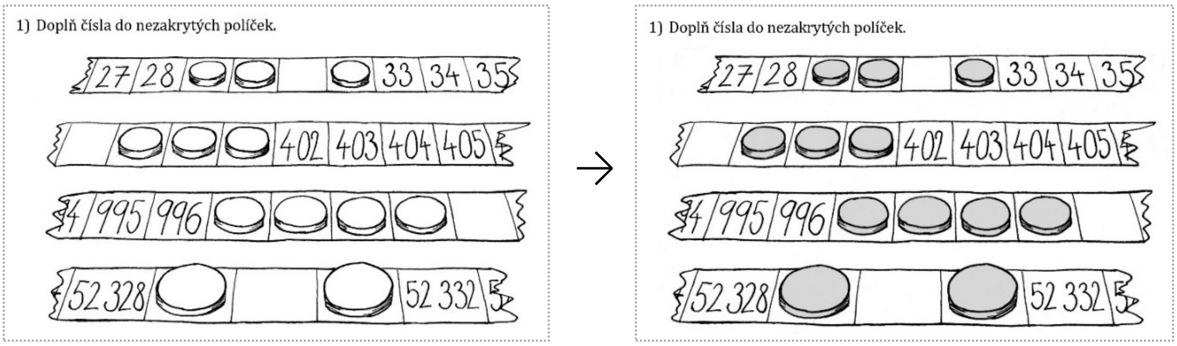
Po vyhodnocení testů jsem se žáků jednotlivě doptávala na konkrétní chyby nebo způsoby řešení, když jsem něčemu nerozuměla.

5.1.1.2. Změny v testu

V části didaktického testu věnované desítkové soustavě zůstala zachována podstata úloh a jejich typ. Změnila se pouze formulace zadání a jejich grafická úprava.

K úloze č. 1

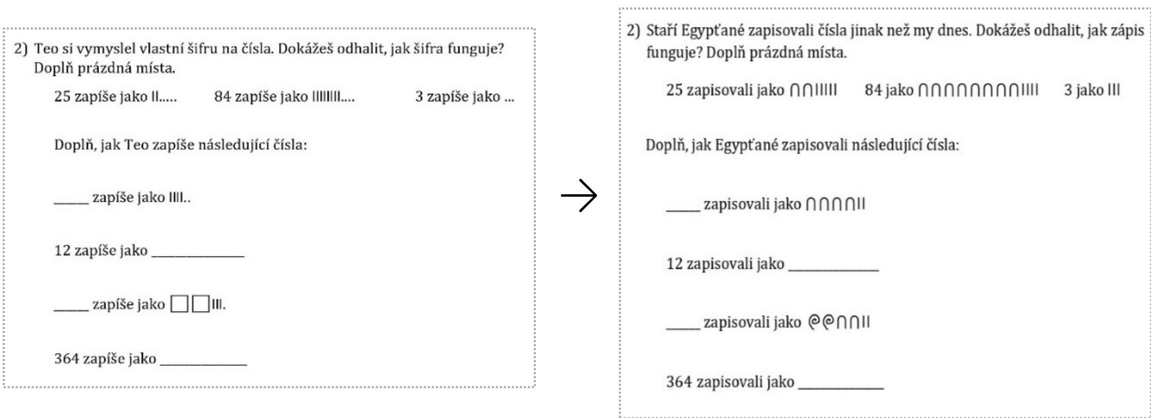
V první úloze se změnila pouze barva žetonů zakrývajících políčka. V pilotáži nebylo všem zřejmé, co mají být zakrytá políčka a bílý žeton nevnímali jako žeton. Zvolila jsem šedou barvu, aby řešitelé mohli pohodlně dopisovat i zakrytá čísla, pokud budou potřebovat.



Obrázek 53: změna v 1. úloze

K úloze č. 2

Původně se Teova šifra měla odkazovat ke geometrickému znázornění řádů obdobně jako v Dienesových kostkách. Tečky a bílé čtverce však žáky z pilotáže mátly. Bílé čtverce někteří řešitelé vnímali jako políčka, kam mají něco doplnit, tečky zase jako implikaci pokračování. Prvním nápadem bylo zvolit černé čtverce a zvednou tečky na střed řádku. Nakonec jsem však díky radě školitelky využila existující historický zápis, jaký využívali ve starověkém Egyptě. Reálný historický kontext úlohy navíc indikuje řešitelům, že úloha bude mít řešení, navíc spíše intuitivní, což u smyšlené dětské šifry není zárukou.

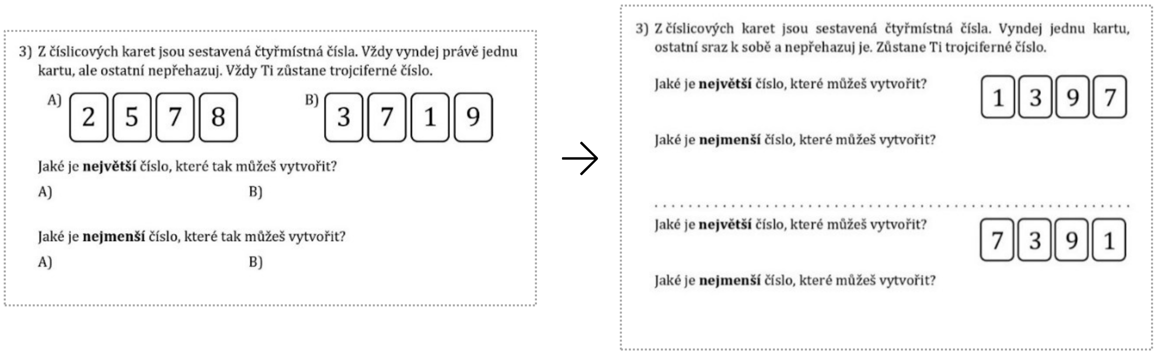


Obrázek 54: změna ve 2. úloze

K úloze č. 3

Zde se mírně pozměnil i text zadání. Řešitele mátlo příslovce *vždy*, ale především matematický kvantifikátor *právě jednu*, kterému nerozuměli. Tato nadbytečná slova jsem vyhodila a souvětí přeformulovala do odporovacího poměru vět.

Zásadněji se změnilo také rozložení úlohy tak, aby bylo zřejmější, která podúloha patří ke kterým kartám. Zatímco v pilotáži byla úloha postavena v konceptu tabulky, ve finální verzi jsou podúlohy seřazeny lineárně a obě čtyřmístná čísla z karet oddělená proužkem.



3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vždy vyndej právě jednu kartu, ale ostatní nepřehazuj. Vždy Ti zůstane trojciferné číslo.

A) 2 5 7 8 B) 3 7 1 9

Jaké je **největší** číslo, které tak můžeš vytvořit?

A) B)

Jaké je **nejmenší** číslo, které tak můžeš vytvořit?

A) B)

→

3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit? 1 3 9 7

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

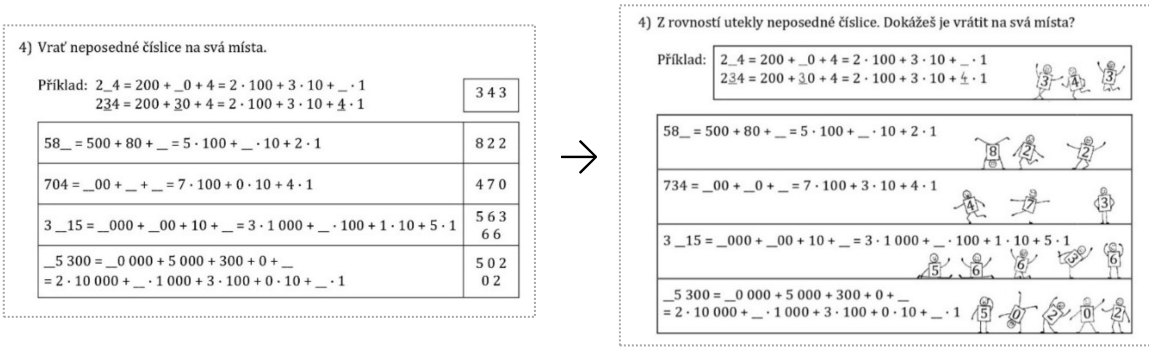
Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit? 7 3 9 1

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

Obrázek 55: změna ve 3. úloze

K úloze č. 4

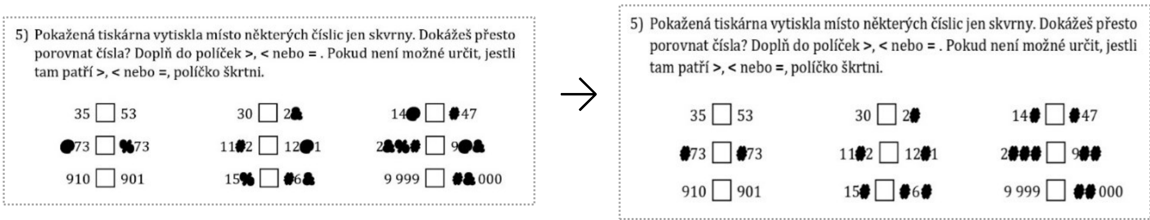
Řešitelé z pilotáže často neporozuměli, že číslice, které mají doplňovat, se nacházejí ve vedlejším sloupci tabulky. Někteří ani nevnímali boční sloupec jako jednotlivé číslice, ale jako většinou trojciferná čísla, což je ještě více mátlo. Takto zadaná úloha je náročná na porozumění zejména, pokud se žáci s neposednými číslicemi dříve nesetkali a nemají tudíž k tomuto pojmu přiřazený typ úlohy. Číslice proto dostaly tělíčka, aby napověděly řešitelům, že to ony jsou těmi neposednými utečenci. Zároveň jsou číslice uvězněny v rámečku se spolu s rovností, do které patří, aby nemohly utéct nikam dál. Z tohoto důvodu dostal svůj rámeček i příklad, čímž se na druhou stranu snížilo jeho grafické oddělení od úloh.



Obrázek 56: změna ve 4. úloze

K úloze č. 5

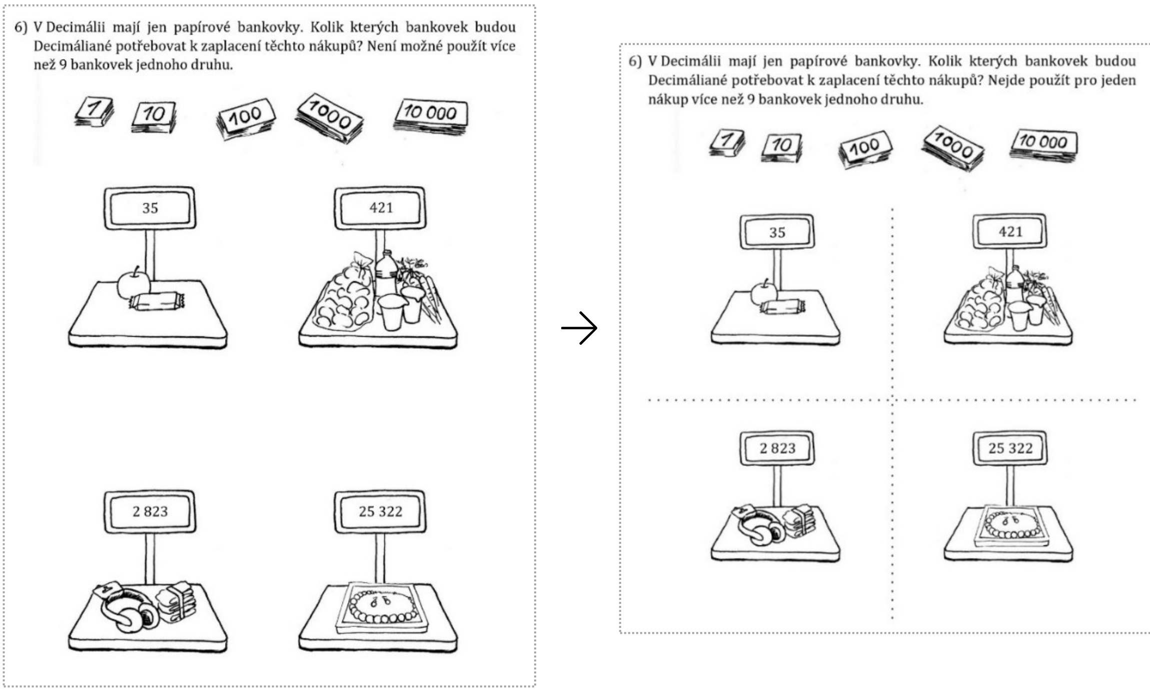
Původně měly skvrny pro větší realističnost různé tvary. Někteří řešitelé v pilotáži však brali tuto různost jako záměrnou a snažili se najít paralelu mezi skvrnami stejného tvaru, nebo jim přímo přiřadit číslici jako např. v algebrogramech. Abych řešitele neodváděla od skutečné podstaty úlohy, mají všechny skvrny ve finální verzi stejný tvar.



Obrázek 57: změna v 5. úloze

K úloze č. 6

Do původního textu zadání je přidáno, že nelze zaplatit jeden nákup více než 9 bankovkami jednoho druhu. Nápad s peněženkami jsem kvůli přehlednosti a prostoru nakonec nevyužila. Jednotlivé nákupy jsou také oddělené proužky.



Obrázek 58: změna v 6. úloze

5.1.1.4. Vliv změn

Nová verze byla zadávána 4 třídám druhého až pátého ročníku v únoru 2024. Ve finální verzi testu se oproti pilotážní verzi významně snížil podíl úloh řešených s chybným porozuměním ať už úspěšně či neúspěšně (z 7,05 % zaokr. dolů na 0,95 %), neautorsky úspěšných řešení úloh (z 3,2 % na 0 %) i úloh neřešených vůbec (z 13,5 % na 5 % zaokr. nahoru). Uváděná procenta jsou průměrem všech testových úloh. Kromě změny zadání a grafické úpravy má nepochybně velký vliv i fakt, že během vypracovávání výzkumné verze testu jsem řešitelům odpovídala na případné dotazy k zadání a pomáhala s jeho porozuměním.

5.1.2. Mimozemská čísla

5.1.2.1. Průběh pilotáže

Pro vypracování testu Mimozemská čísla, druhý didaktický test, bylo navrženo 14 žáků, z toho 9 silně doporučených a 5 doporučených. Kdokoliv jiný také mohl druhý test vyzkoušet, pokud vyloženě chtěl, a někteří toho využili. Druhý didaktický test byl zadáván

19 řešitelům 26. května 2023 během 2. vyučovací hodiny. Zadaný čas na vypracování byl opět půl hodiny.

Řešitelé psali v jiné třídě, odděleně od spolužáků, kteří Mimozemská čísla nepsali. Dotazů během bylo podstatně méně. Nejvíce, a to 4 řešitelé, se ptali ke třetí úloze, jak mají zapsat čísla (sic), která neexistují (v testu 7 a 6).

V kruhové reflexi se žáci shodli, že test byl jednodušší než předchozí. Na dotazy, proč tomu tak bylo, argumentovali:

- Protože byl test kratší.
- Protože byl test zajímavější. Lákalo je to zkoušet, bylo to nové, jiným jazykem (sic).
- Protože je to bavilo. Na upřesňující dotaz odpovídali jako dříve, že to bylo cizí, nové a lákavé.

Jedna ve škole excelující žačka vypadala během psaní dost smutně a zklamaně. Zřejmě jsem měla ještě víc zdůraznit, že je to těžké, je to výzva a neočekávám, že budou mít všechna řešení správná. Měla jsem především zajistit psychickou pohodu všech. Po testu jsem s touto žačkou mluvila a zdá se, že to zpracovala – možná i tím, že postupně něčemu porozuměla a test přes obtíže vypracovala.

Někteří řešitelé měli během vypracovávání silnou tendenci spolupracovat, i když jsem je žádala, ať to nedělají. Zároveň ale věřím tomu, že by ve spolupráci leccos objevili. Je to jejich běžný mechanismus překonávání náročných úloh. Chtít po nich, aby samostatně pracovali na nové látce, tak pro ně bylo možná dost nepřirozené.

Půl hodiny bylo více než dostatečné. Do 20 minut měla většina žáků odevzdáno.

V kruhu jsem se ještě ptala, zda odhalili, jak tedy mimozemská čísla fungují. Řešitelům přišlo především divné, že Hexané některá čísla nemají. Všichni pracovali v desítkové soustavě. Propojit si, že šestý domeček je zápis čísla 6 je nenapadlo.

V testu byli řešitelé velmi úspěšní v prvních dvou úlohách (84 % a 74 %) a neúspěšní ve třetí úloze (0 %).

Zajímavé je, že řešitelé *silně doporučení pro Mimozemská* čísla a spíše i žáci *doporučení pro Mimozemská čísla* zpravidla porozuměli zadání. Oproti tomu ostatní žáci psané instrukci občas neporozuměli. Zajímalo by mě, jestli jsou příčinou obecné kognitivními schopnostmi, tedy korelace matematických a jazykových dovedností, nebo byli někteří řešitelé v testu Pozemská čísla méně úspěšní právě kvůli slabšímu porozumění psaných instrukcí.

5.1.2.2. Změny v testu

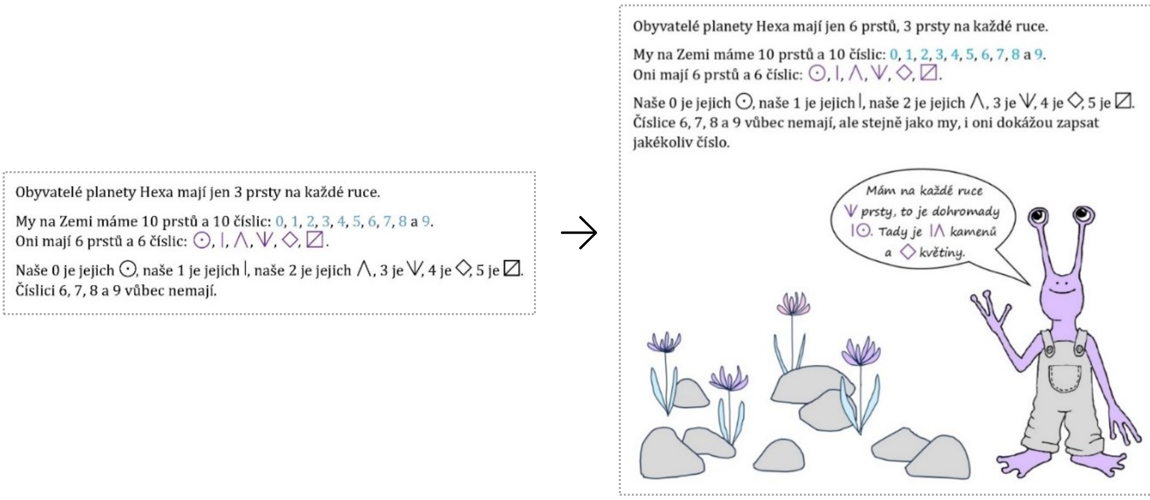
Oproti testu Pozemská čísla, tento test vyžadoval zásadnější změny, a to i v obsahu úloh. Test Mimozemská čísla byl několikrát upraven a v jedné z přechodných verzí i zadán dvěma mým synovcům (4. a 2. ročník ZŠ). Zkoušku testu Mimozemská čísla na synovcích dále označuji jako *mikropilotáž*.

Hlavním úskalím testu bylo, že první dvě úlohy umožňují řešitelům najít správné řešení bez opuštění desítkové soustavy. Poslední úloha oproti tomu vyžaduje vhled do šestkové soustavy, desítkové soustavy a do jejich propojení, čímž vytváří širokou gradační propast mezi první a druhou stranou testu.

Didaktický test v jeho pilotážní podobě obsahoval čísla v takových sémantických rolích, že řešitelům umožňoval pracovat pouze v desítkové soustavě a čísla, pro něž Hexané nemají číslici, jednoduše přeskočit. Klíčové tedy pro mě bylo přidat do testu kvantitativní modely hexanských čísel.

K úvodu

V pilotáži se k úvodu jedna řešitelka ptala, kolik rukou Hexané mají. Ilustrace Hexana byla v pilotážní verzi až na konci testu, který si řešitelé většinou nejdřív neprohlédli celý, ale ihned začali řešit. Ilustraci jsem proto přesunula do úvodu a do textu doplnila informaci o celkovém počtu prstů. V závěru textu je přidána specifikace, že i když Hexané nemají některé naše číslice, dokážou zapsat jakékoliv číslo. Dále je finální verze rozšířená o objekty na povrchu planety a textovou bublinu mimozemšťana, který své prsty i objekty komentuje, nabízeje tak použití dvou jednociferných a dvou dvouciferných hexanských čísel v reálném kontextu.



Obrázek 59: změna v úvodu

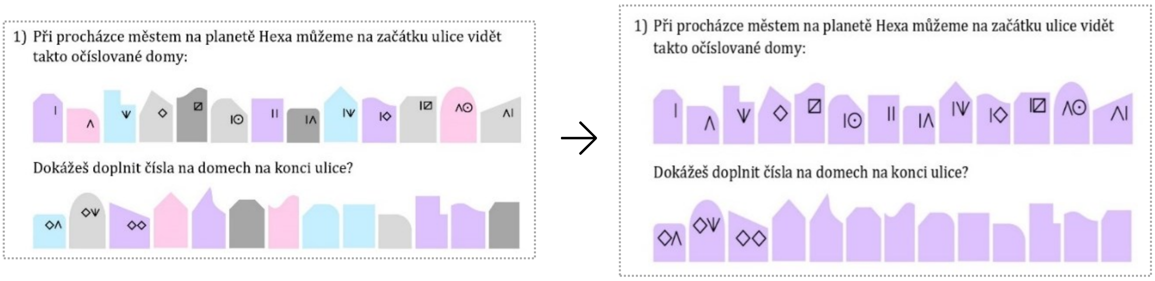
K úloze č. 1

Typickým řešením zde bylo přeložit si číslice z hexanských do arabských a domečky vyplnit v desítkové soustavě přeskakujíce čísla, která obsahují neexistující číslice. Někteří žáci si domky takto nadepisovali:

Obrázek 60: ukázka řešení s nadepisováním

Hlavním záměrem této úlohy bylo poskytnutí řešitelům souvislé řady hexanských přirozených čísel, aby na ní mohli odpozorovat, jak se čísla zapisují, resp. jak se v nich střídají číslice (analogie s desítkovou poziční soustavou) a mohli si z pořadí domků odpočítat některá menší čísla, např. 6 a 7. Řešení skrze desítkovou soustavu je tedy legitimní strategie pro dokončení souvislé řady čísel. Problémem bylo, že koncept desítkové soustavy posléze řešitelé nedokázali opustit. Řešitelé neměli dřívější zkušenosti s jinými pozičními soustavami a didaktický test sám o sobě jim použití desítkové soustavy nenarušoval.

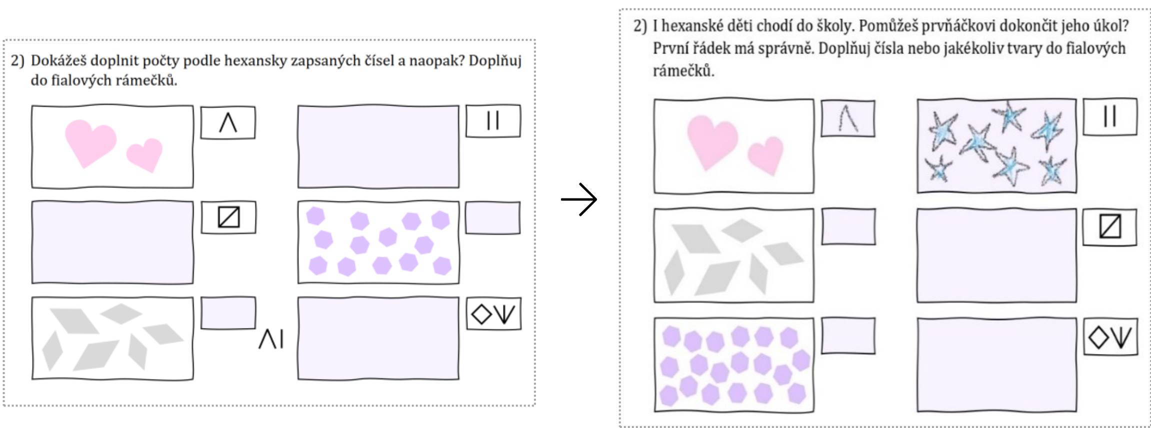
Tuto úlohu jsem kvůli jejímu původnímu a přetrvávajícímu záměru nechala v téměř nezměněné podobě. V mikropilotáži se synovec Honzík snažil najít vazbu mezi čísly a barvou domku. Pro finální verzi byl zachován tvar, ale barva byla pro menší rušivost sjednocena. Čísla na domcích jsou mírně zvětšena.



Obrázek 61: změna v 1. úloze

K úloze č. 2

Mezi původní první a druhou byla vložena úloha s čísly v roli kvantity. Předpokládám, že pro řešitele z pilotáže bylo přípustné některá čísla vypustit právě proto, že zastávala roli adresy. I v reálném světě občas potkáváme nespojitost řady čísel v roli adresy (obzvláště v ulici), ať už je to kvůli chybě v číslování, nebo např. na místě kdysi stál dům, který už tam nestojí. Záměrem nové druhé úlohy je přimět řešitelé k připuštění, že čísla mezi 5 a 10, 15 a 20 apod. na planetě Hexa existují a Hexané je nějak zapisují. V mikropilotáži si řešitelé nebyli jistí, jaké tvary mají doplnit. Oproti mikropilotážní verzi je ve finální text zadání rozšířen a zabalen do kontextu školní práce hexanských prvňáčků. Část pro doplnění zápisů čísel a část pro doplnění obrázků kvantity je oddělena do dvou sloupců. Přidán je i model zápisu dvojciferného čísla.

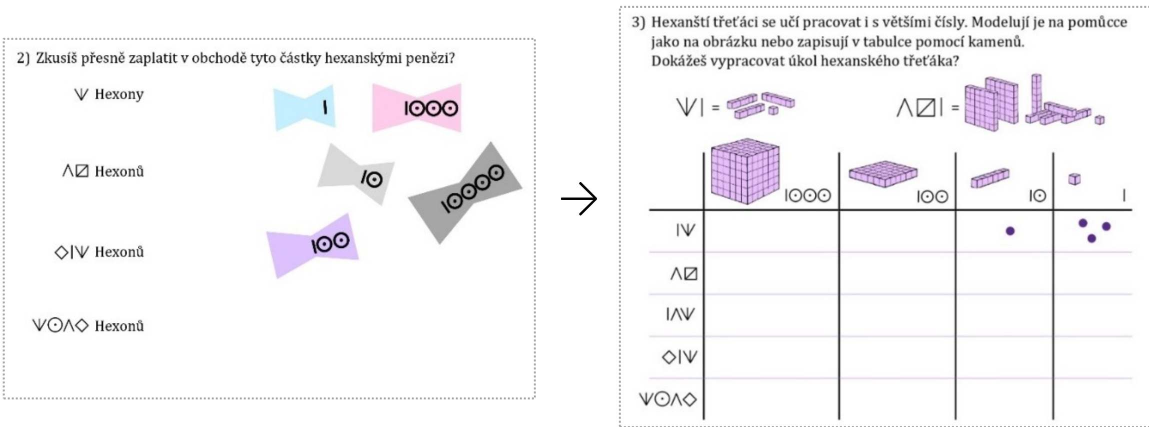


Obrázek 62: vložení a změna 2. úlohy

K úloze č. 3

Úloha se zaměřuje na řády v šestkové soustavě. Cílí na to, co mají poziční soustavy společné – daná pozice čísla vyjadřuje kvantitu v daném řádu. V pilotážní verzi testu se tato úloha odkazovala na poslední úlohu části Pozemská čísla. Řešitelé měli zaplatit částky penězi – v Pozemských číslech využívali řády desítkové soustavy, v Mimozemských číslech řády soustavy šestkové. Původním záměrem tedy bylo řešitelům pomoct najít analogii mezi oběma pozičními soustavami. Nepředvídala jsem však, že řešitelé při práci vůbec neopustí desítkovou soustavu. Původní úlohu bylo nejen možné správně vyřešit čistě v desítkové soustavě, ale také nikterak nenapomáhala představě o soustavě šestkové.

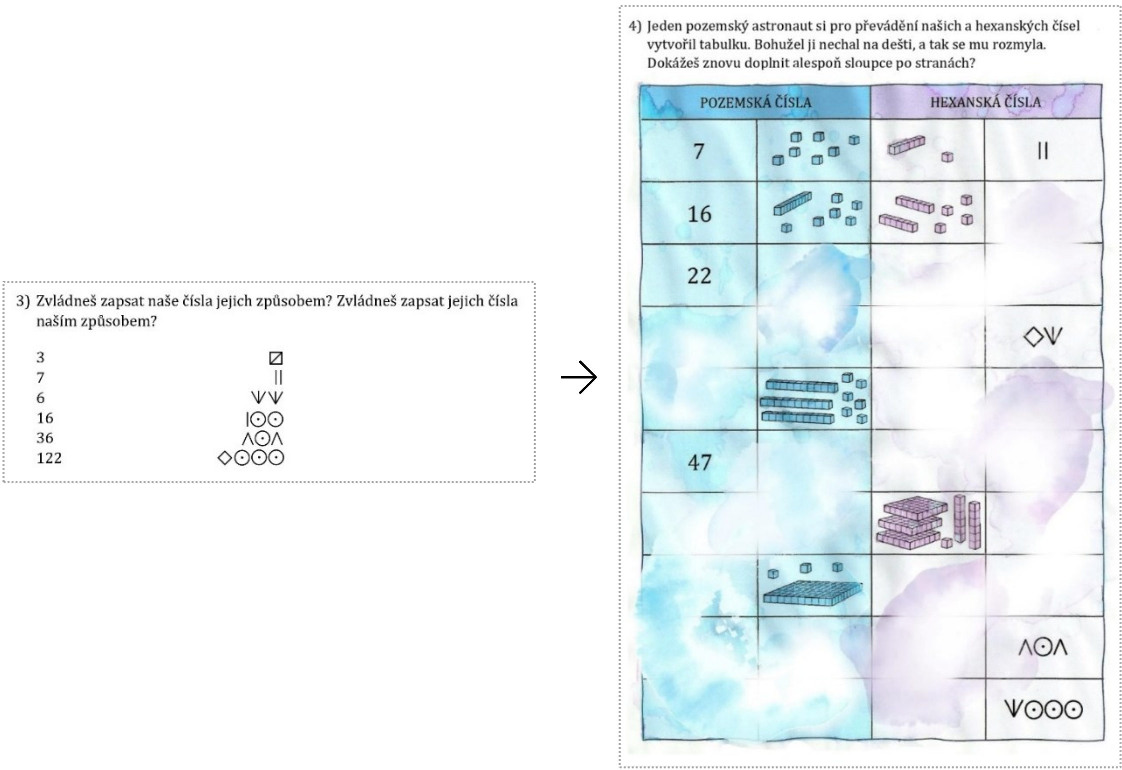
Do finální verze byla pro znázornění šestkové soustavy využitá pomůcka Dienesových kostek. Hodnoty bankovek tak zůstaly zachovány, ale Dienesovy kostky zároveň poskytují vizualizaci kvantity daného řádu. Úlohu je stále možné správně vyřešit v desítkové soustavě, ale řešitelé zároveň vidí, že analogické hranoly nemají hodnotu 10, 100 a 1 000, jak jsou u této pomůcky v desítkové soustavě zvyklí, ale 6, 36 a 216. Hlavním cílem nové úlohy je poskytnutí řešitelům oporu pro převod zápisů čísel mezi šestkovou a desítkovou soustavou.



Obrázek 63: změna ve 3. úloze

Úloha č. 4

Poslední úloha je kulminací celého testu, tedy zjišťuje, zda a nakolik řešitelé uchopili šestkovou soustavu a vyjádření kvantity v ní. Poslední úloha testu Mimozemská čísla prošla značnou grafickou proměnou, ale její smysl je zachován. Ve finální verzi má každé číslo svůj řádek, neboť v pilotáži někteří žáci pochopili úlohu jako úlohu přiřazovací a snažili se pozemským zápisům přiřadit zápisy hexanské. Především ale byl přidán kvantitativní model tohoto čísla v podobě Dienesových kostek. Pozorný řešitel si tak může všimnout, že počet jednotek v jednom řádku skutečně odpovídá, jen je jinak uspořádaný.



Obrázek 64: změna ve 4. úloze

5.1.2.3. Vliv změn

Jak jsem již zmiňovala výše, v pilotážní verzi testu bylo rozložení úspěšnosti v úlohách velmi nerovné. Řešitelé snadno a správně řešili první dvě úlohy, ale byli bez výjimky neúspěšní v úloze poslední. Řešitelé z pilotáže překládali pouze číslice, nikoliv celé hodnoty čísel. Šestkovou soustavu neodhalili ani částečně, což vzhledem k tomu, že ve škole pracují pouze s desítkovou soustavou, není překvapivé. Přesto jsem takto zřejmé úskalí části Mimozemská čísla předem neočekávala.

Po pilotáži této části bylo zřejmé, že je potřeba přidat úlohy, které by svým obsahem narušovaly představu hexanských čísel jako pouhého přepisu tvaru číslic v rámci desítkové soustavy. První hlavní změnou bylo přidání čísla v roli kvantity, tedy vytvoření úlohy č. 2. V takovéto podobě s několika dalšími drobnými úpravami v jiných úlohách byla Mimozemská čísla předložená v mikropilotáži. Přidání úlohy č. 2 ale pro dva řešitele v mikropilotáži nebylo dostatečnou pomocí pro uchopení šestkové soustavy. Pro finální verzi byla dále přepracovaná úloha č. 3 znázorňující řády.

Úspěšnost úloh ve finální verzi testu je oproti pilotážní verzi rovnoměrněji rozložená a více tak odpovídá záměru didaktického testu. Někteří řešitelé finální verze byli částečně nebo z většiny úspěšní i v poslední úloze.

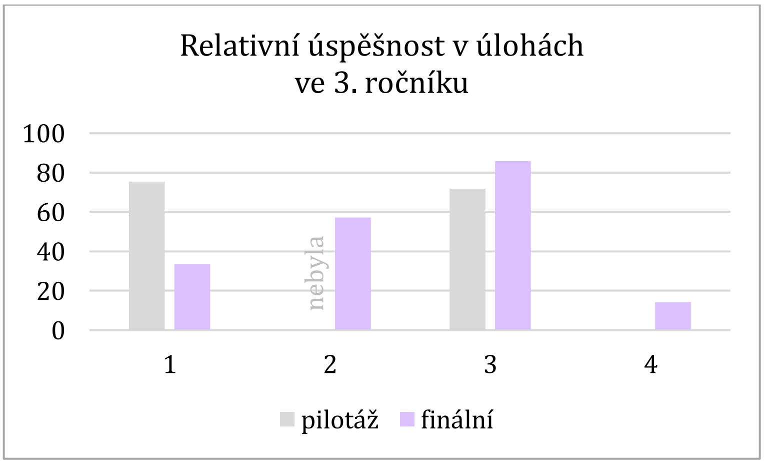


Diagram 7

Podstatnou a velmi příznivou změnou je, že i v méně úspěšných řešeních finální verze testu jsou pozorovatelné více či méně úspěšné opuštění desítkové soustavy a přechody k práci v soustavě šestkové. Finální verze je tak validnější a nabízí širší škálu úrovně porozumění pozičnímu zápisu čísla v jiné než desítkové soustavě.

5.2. Rozbor testu

5.2.1. Pozemská čísla

Část didaktického testu věnovaná desítkové soustavě se seskládá z šesti úloh. První a poslední úloha mají plnit motivační roli. Tyto motivační, nebo také rozehřívací, úlohy jsou podobné úlohám, se kterými se žáci při výuce podle mé zkušenosti a rozboru učebnic běžně setkávají. Tyto úlohy jsou zařazeny s cílem ujistit řešitele o jeho schopnostech, zbavit ho přebytečného stresu a navnadit k dalšímu přemýšlení. U těchto úloh jsem předpokládala vysokou úspěšnost. Úlohy 2. až 5. jsou spíše nestandardní, tzn. v učebnicích se běžně nevyskytují, a jsou zařazeny s za cílem zjišťovat žákovské porozumění hodnotě pozice (*place value*) a pozorovat vyskytující se jevy s tímto porozuměním spojené.

Finální podoba první části didaktického testu a její autorské řešení je součástí přílohy.

K úloze č. 1

Úloha se věnuje posloupnostem po sobě jdoucích přirozených čísel. Řadí se mezi standardní a její role je motivační. Řešitelé v ní hledají číslo na daném místě posloupnosti, přičemž kolem políčka pro doplnění jsou jiná čísla zakrytá žetony. Úloha tak nevyžaduje dopsání všech čísel, ale zároveň je kognitivně náročnější, než kdyby číslo v posloupnosti chybělo pouze jedno. U této úlohy předpokládám spíše vyšší úspěšnost, obzvláště u 3. ročníku a výše. Všechny podúlohy obsahují přechod přes základ.

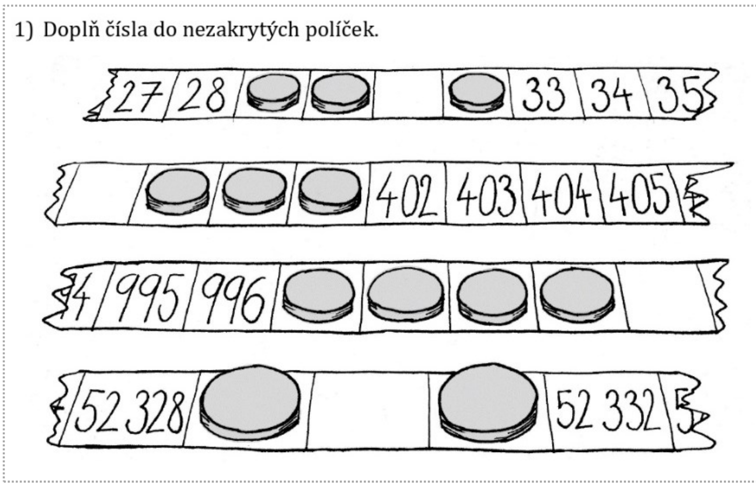
1) V první podúloze (v prvním řádku) řešitelé pracují pouze s dvojcifernými čísly. Navíc viditelná čísla jsou po obou stranách, tudíž si řešitelé mohou snadno ověřit, jestli jejich řešení z obou stran navazuje.

2) V druhém podúloze řešitelé odčítají odzadu, nemohou dočítat jako v ostatních řádcích. Proto očekávám o něco vyšší chybovost. Zde řešitelé pracují s přechodem přes stovku, ale stále v rámci trojciferných čísel.

3) Ve třetí podúloze je klíčový přechod do dalšího řádu, tedy přechod mezi trojcifernými a čtyřcifernými čísly. Navíc zakrytých políček je více a řešitelé si musejí vše dvě dopočítat nebo dopsat.

4) Ve čtvrté podúloze je významnou gradací obtížnosti rozšíření oboru čísel. Řešitelé zde pracují s pěticifernými čísly, se kterými se žáci 3. ročníku ve výuce běžně nesetkávají. Přechod přes základ je zde jen v řádech desítek, proto očekávám, že žáci, kteří rozumí způsobu zvyšování čísel v poziční soustavě, budou v této podúloze úspěšní, i když s takto velkými čísly nepracují.

Jako řešitelské strategie zde předpokládám dopočítávání a odpočítávání čísel po jedné buďto pouze v hlavě, nebo si řešitelé čísla dopíší i do zakrytých políček.



Obrázek 65: Úloha 1, PČ

K úloze č. 2

Úloha se je zaměřená na převod čísel mezi známou poziční a nově představenou nepoziční desítkovou soustavou. Je tematizovaná zápisem čísel starých Egypťanů, kteří stejně jako my používali jako řády mocniny desítky a pro ty měli číslice. Oproti poziční desítkové soustavě tedy celkovou hodnotu v rámci řádu nezaznamenávala číslice na dané pozici, ale počet číslic znázorňující příslušný řád (Joseph, 2011).

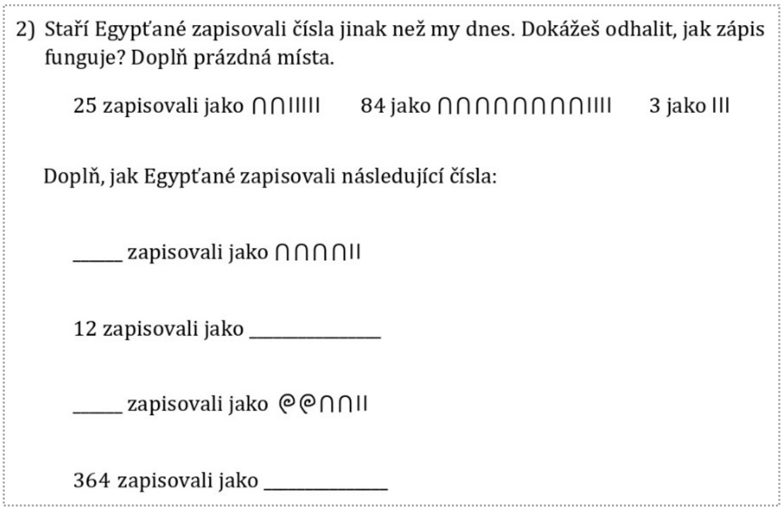
Řešitelům jsou v zadání úlohy předloženy 3 příklady čísel zapsaných v poziční desítkové soustavě a v staroegyptském způsobu zápisu. Úkolem řešitelů je odhalit princip a použít ho pro překlad těchto dvou soustav.

1 a 2) V prvních dvou podúlohách řešitelé pracují s desítkami a jednotkami, které bylo možné odpozorovat z příkladů.

3 a 4) Ve třetí a čtvrté podúloze se objevuje nový řád stovek, který nebyl v použit příkladu. Stěžejní je tady myšlenka řádů. Očekávám, že žák, který má s řády

hlubší zkušenost, bude v kontextu předchozích řádů uvažovat o dalším řádu desítkové soustavy a významově přiřadí znak 𓍢 stovce, ačkoliv by bylo správné uvažovat i o jakémkoliv jiném řádu.

Předpokládám, že úspěšnost úlohy bude v prvních dvou podúlohách dichotomická. Řešitel buďto princip odhalí, nebo neodhalí a úlohu ponechá neřešenou, případně vytvoří svoje pravidlo zápisu, které povede k neočekávanému, ale správnému řešení. Dalším kritickým místem může být rozšíření řádů, tedy odhalení stovky. Úspěšní řešitelé prvních dvou podúloh nemusí být úspěšní v dalších dvou. V takovém případě třetí podúlohu nejspíše nevyřeší a čtvrtou buď také ponechají prázdnou, nebo zakreslí 36 desítek. Nepředpokládám, že by některý z řešitelů neodhalil staroegyptský znak pro stovku a v poslední podúloze měl potřebu vymyslet pro tento řád vlastní znak.


2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapisovali jako ∩∩||||| 84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩|||| 3 jako |||

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

_____ zapisovali jako ∩∩∩∩||

12 zapisovali jako _____________

_____ zapisovali jako 𓍢𓍢∩∩||

364 zapisovali jako _____________

Obrázek 66: Úloha 2, PČ

K úloze č. 3

Třetí úloha společně s pátou úlohou dle mého názoru nejryzeji pracuje s hodnotou pozice (*place value*) jako takovou. Řešitelé si musí nejen uvědomit kvantitu znázorněnou číslicí, ale i kvantitu znázorněnou pozicí číslice v zápisu čísla. V úloze jsou použity čtyři číslice, uvažujme pro ně symboly A, B, C a D, kde A < B < C < D. Číslicové karty v podúlohách jsou seřazeny tak, aby jak pro dosažení nejvyššího čísla, tak pro dosažení nejnižšího čísla v první polovině bylo možné použít strategii vyndání karty s nejvyšší/nejnižší hodnotou u obou a v druhé polovině toto možné u obou podúloh nebylo.

1 a 2) Číslicové karty jsou seřazeny ve formátu ABDC. Pokud by se jednalo pouze o součet hodnot číslic, stačilo by pro dosažení nejvyššího čísla vyndat nejmenší číslici a obráceně. Tento postup zároveň vede k úspěšnému řešení prvních dvou podúloh.

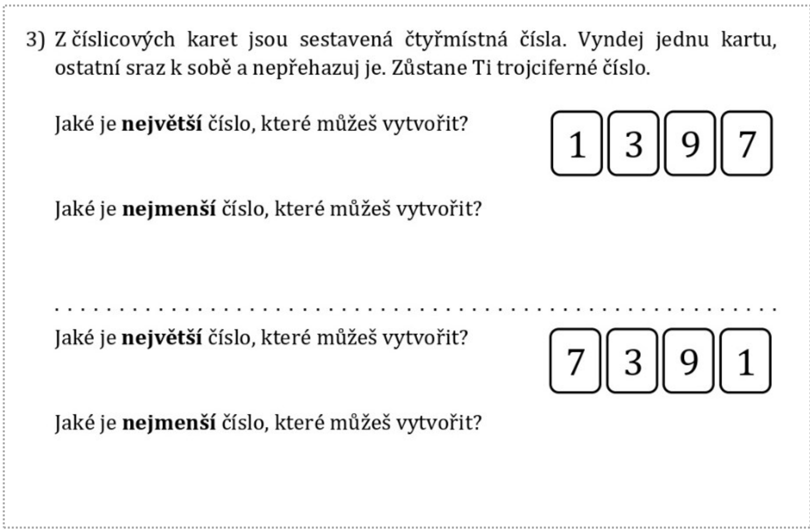
3 a 4) Číslicové karty jsou seřazeny ve formátu CBDA. Zde si musí řešitel uvědomit, že vytažením čísla mění také pozici ostatních číslic. Pokud by vytáhl číslici s nejnižší hodnotou, získal by číslo ve formátu CBD, které ale není vyšší než číslo CDA. Analogicky pro nejnižší číslo, CBD není nižší než BDA. Permutace CBDA je jedna ze dvou, pro které platí, že pro dosažení nejvyššího čísla nevytáhnu číslici s nejnižší hodnotou a zároveň pro dosažení nejnižšího čísla nevytáhnu číslici s nejvyšší hodnotou. Druhá z těchto permutací, BCAD, je využitá ve výstupním didaktickém testu.

Pro úlohu jsou použita pouze čtyřciferná čísla, což umožňuje úspěšně použít metodu vyčerpání všech možností. Navíc jsou číslicové karty natištěny v takové velikosti, aby se řešitelům jednotlivé číslice pohodlně zakrývaly prstem. Pokud by bylo číslo víceciferné, pro úspěšné řešení by bylo potřeba použít toto procesuální pravidlo nebo jeho obdobu:

Pro největší číslo: *Jdu zleva doprava. Pokud má následující číslice vyšší hodnotu, stávající škrtám. Pokud taková číslice není, škrtám poslední číslici.*

Pro nejmenší číslo: *Jdu zleva doprava. Pokud má následující číslice nižší hodnotu, stávající škrtám. Pokud taková číslice není, škrtám poslední číslici.*

Řešitelé mohou buďto vědomě či nevědomě do různé míry využívat pravidlo výše, nebo vyzkoušet všechny možnosti a porovnat je. Předpokládám, že častější strategií bude ta druhá zmiňovaná a chyby budou spíše z nepozornosti nebo z nevyzkoušení všech možností. Očekávaným typem chyby je odebrání číslice s nejvyšší či nejnižší hodnotou bez uvážení hodnoty pozice. Také očekávám chybu v podobě odebrání číslice z dané pozice bez uvážení toho, že ostatní číslice mohou získat novou pozici a tudíž i roli, tedy např. číslice 3 v čísle 1 397 reprezentuje počet stovek, ale po odebrání karty s číslicí 7 bude trojka reprezentovat počet desítek. Tato ve stávajícím kontextu chybná úvaha by pravděpodobně vycházela z kvantitativní představy čísla, tedy např. číselného modelu z Dienesových kostek, kde by bylo zadáním odebrat všechny kostky jednoho typu (ekvivalent jedné karty). V pozičním zápisu čísla v této hypotetické úloze by však nedošlo k odstranění karty na dané pozici, ale k jejímu nahrazení nulou. Další chyby mohou nastat v porozumění zadání, byť jsem se snažila tyto vlivy v nové verzi testu odfiltrovat. Je možné, že žáci budou karty přehazovat, nebo si neporozumí struktuře úlohy, tedy, že mají v obou případech uspořádání hledat i nejvyšší i nejnižší číslo. Porozumění zadání je možné dále ošetřit přímo v průběhu zadávání testu.


3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit? 1 3 9 7

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit? 7 3 9 1

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

Obrázek 67: Úloha 3, PČ

K úloze č. 4

Úloha pracuje s rozvinutým zápisem čísla, s jakým se žáci často setkávají od 3. ročníku výše zejména při používání klasických učebnic. Oproti běžnému rozepisování čísel tady ale využívá konceptu neposedných čísel, v tomto případě číslic, které je potřeba vrátit na místa, odkud vypadly. Každá podúloha obsahuje rovnost zřetězenou do tří částí, tedy tři výrazy oddělené rovnítkem. Klíčovým předpokladem pro úspěšné řešení je chápání rovnosti jako ekvivalence, tedy relační chápání, nikoliv operační, ve smyslu instrukce k provádění vyznačených operací zleva doprava.

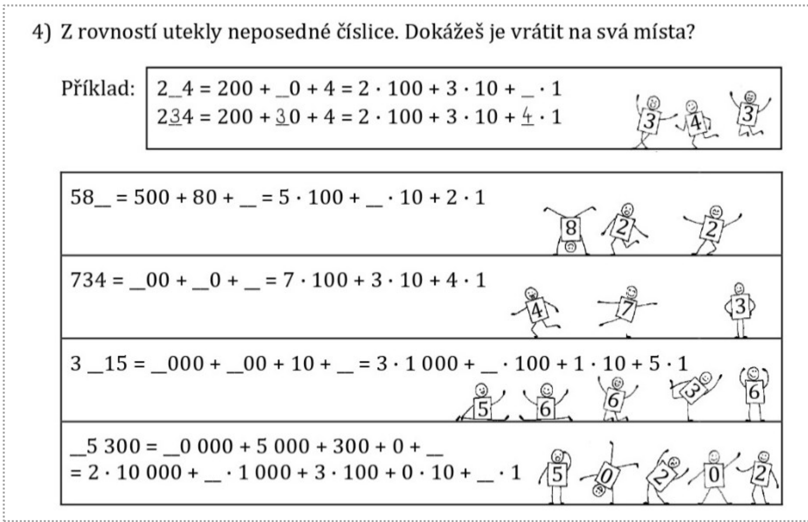
1) V první podúloze je předloženo trojciferné číslo. Tato úloha je poměrně komplexní, neboť řešitel musí získat informace ze všech částí rovnosti. Informaci o doplnění dvojky získá až z třetí části a doplňuje ji zpětně do první a druhé části. Doplnění osmičky je zde, předpokládám, jednodušší, neboť řešitel informaci o počtu desítek má už z předchozích dvou částí rovnosti.

2) Druhá podúloha je ze všech, předpokládám, nejjednodušší. Neposedné číslice utekly pouze z jedné části rovnosti. Řešitel je může doplnit jen podle první části a třetí si správnost ověřit. Tím, že je třetí část kompletní a zároveň představuje nejplnější formu rozvinutého zápisu čísla, může posloužit jako dobrý model pro ostatní podúlohy.

3) Zatímco zbylé podúlohy je možné jednoznačně vyřešit i bez přehledu neposedných číslic, zde by bez neposedných číslic bylo řešení deset. Řešitel nejdříve vrátí trojku a pětku, poté zbylé tři šestky, které jsou všechny na stejné pozici a jiná informace o hodnotě číslice v řádu stovek v této podúloze není.

4) V této podúloze se dále zvyšuje obor čísel, na druhou stranu kromě dvojky, kterou jako v první podúloze vyčteme až ze třetí části rovnosti, jsou všechny hodnoty číslic na jednotlivých pozicích prezentovány už v první části rovnosti, tedy ve zkráceném zápisu čísla. Dále zde může být obtížnější grafická podoba, neboť se všechny části rovnosti nevešly na jeden řádek.

Myslím, že tato úloha může být velmi náročná pro žáky, kteří se nikdy nesetkali s rozvinutým zápisem čísla. Předpokládám, že řešitelé budou více chybovat v případech, kde je nutno informaci o číslici přenést zprava doleva a samozřejmě v poslední podúloze, která je svou délkou méně přehledná.



Obrázek 68: Úloha 4, PČ

K úloze č. 5

Úloha je zaměřená na porovnávání čísel a na práci s hodnotou pozice (*place value*). Řešitelé zde mají za úkol porovnávat čísla přesto, že jsou některé číslice zakryté, nebo rozhodnout, že se tato čísla porovnat nedají. Jednotlivým podúlohám se budu věnovat, jak jdou za sebou ve sloupcích.

1) Čistě rozehřívací. Žák porovnává dvě plně viditelná dvojciferná čísla. Nepředpokládám chybovost.

2) Tady může řešitele zmást, že jsou poslední dvě číslice v obou číslech stejné a první v obou případech není známá. Předpokládám, že zde řešitelé často chybně doplní rovnítko, neboť si neuvědomí, že schované číslice na místě stovek mohou být rozdílné.

3) Všechny číslice jsou viditelné a v obou číslech stejné, jen v jiném pořadí. Hraje zde roli hodnota pozice, ale ve vyšších ročnících 1. stupně ZŠ nepředpokládám vyšší chybovost z tohoto důvodu.

4) Zde je klíčové si uvědomit, že ať bude na místě jednotek v pravém čísle jakákoliv číslice, toto číslo bude menší, neboť číslice na místě desítek má menší hodnotu než tamtéž v levém čísle.

5) Číslice v obou číslech jsou stejné, ale jsou na jiných pozicích. Navíc zakrytá číslice je na stejné pozici. Zde je důležité porovnat číslice na místě stovek.

6) Tato úloha vyžaduje složenou podmínku, tudíž ji považuji za složitější a předpokládám, že v ní budou řešitelé chybovat více označením za neporovnatelnou. Třetí číslice v obou číslech je zakrytá, ale není podstatná. Pokud dosadím kteroukoliv číslici na místo stovek v pravém čísle, vytvořím buď vyšší počet stovek než v levém čísle, nebo stejný počet stovek (dosazením jedničky). I pokud dosadím jedničku, stále mám v pravém čísle vyšší počet desítek, tudíž pravé číslo musí být větší.

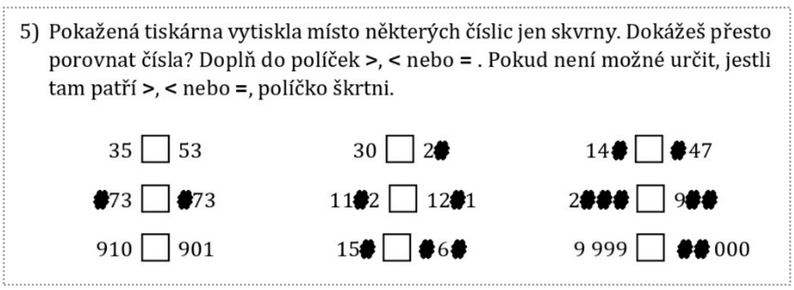
7) Tato úloha také vyžaduje složenou podmínku a také v ní předpokládám větší chybovost. Pokud na místo stovek v pravém čísle dosadím číslici s hodnotou vyšší než 1, bude pravé číslo větší. Pakliže v pravém čísle dosadím 1, může být pravé

číslo stále větší, menší nebo rovno levému podle toho, jaké číslo by se skrývalo na pozici jednotek v levém čísle.

8) Poslední dvě podúlohy jsou zaměřené na počet řádů v čísle. Zde je porovnávána dvojka na místě tisíců s vyšší devítkou, ale na místě stovek. Ostatní číslice čísla nejsou známé. Řešitel si musí uvědomit, že každé víceciferné číslo je vždy větší než číslo méněciferné (v rámci kladných čísel). Předpokládám, že řešitel chybující v této podúloze bude chybovat i v podúloze následující.

9) V levém čísle máme pouze nejvyšší možné číslice, v pravém vidíme nuly a v řádech desetitisíců a tisíců jsou číslice zakryté. Opět je klíčové si uvědomit, že víceciferné číslo je větší. Je také možné, že někteří žáci uváží 00 000 jako legitimní podobu pravého čísla a podúlohu škrtnou jako neporovnatelnou. V rámci testu budu tuto úvahu považovat za správné řešení, ale je pak zajímavé zjistit, jaký postoj má k tomuto učitel a jak žáky k zápisu čísla a určování počtu cifer vede – zda např. považuje zápis 00 za dvojciferné číslo a zda k tomu vede i žáky.

Zde se obávám problémů s porozuměním. Složená podmínka v zadání může mnohé žáky zmást a obávám se, že pak neporovnatelné podúlohy ponechají prázdné, místo aby je škrtli. Také je možné, že žáci budou používat rovnítko namísto přeškrtnutí, a to i v sedmé podúloze. Další možnou chybou, byť méně předpokládanou, je, že žáci doplní číslice a podle nich čísla porovnají, bez zvážení toho, že jimi doplněná číslice nepředstavuje všechna možná řešení. Předpokládám, že jednodušší budou pro řešitele ty nerovnosti, kde je možné čísla porovnat na základě počátečních číslic nebo počtu číslic v čísle. Celkově očekávám nejvyšší chybovost v podúloze 6 a 7, a poté 5 a 2.

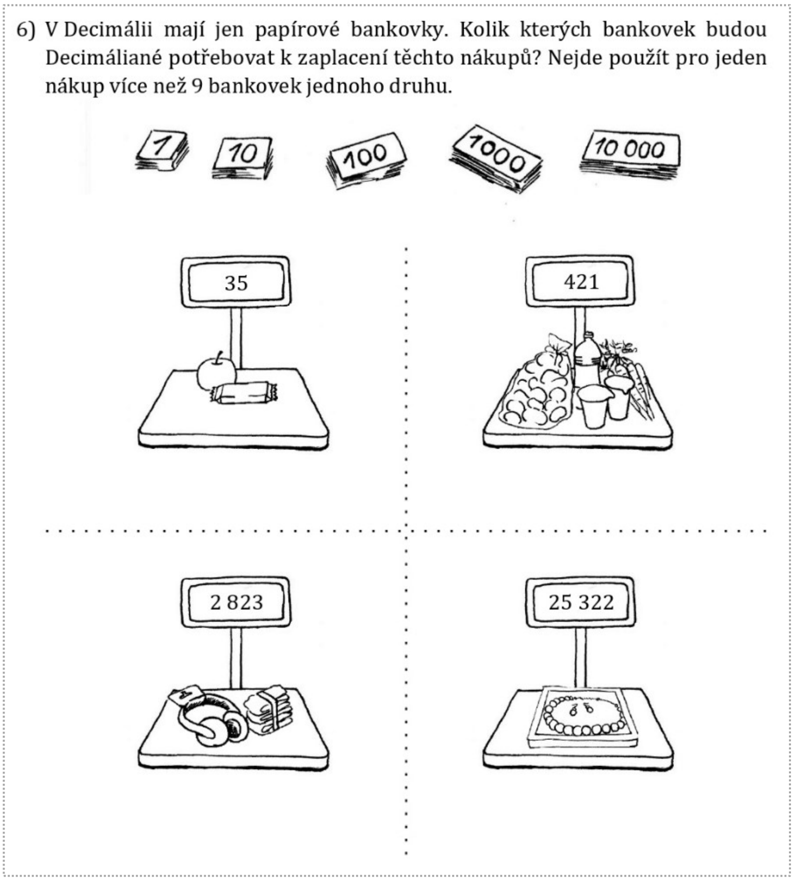


Obrázek 69: Úloha 5, PČ

K úloze č. 6

Tato závěrečná úloha je opět spíše jednodušší a motivační. Řešitelé v ní platí nákupy bankovkami s hodnotami řádů v desítkové soustavě. Jedná se o sémantickou obdobu rozvinutého zápisu čísla. Ve čtvrté podúloze se řešitelé opět setkávají s pěticifernými čísly, se kterými se žáci 3. a 2. ročníku ve výuce běžně nesetkávají. I zde předpokládám, že pro řešitele, kteří porozuměli principu desítkové soustavy, nebude problém přenést svoji zkušenosti i na pěticiferná čísla.

Problémem může být neporozumění zadání, které je v zájmu přesného vyjádření poměrně zdlouhavé a syntakticky složité. Případné nesrovnalosti bude proto potřeba ošetřit během zadávání. Pokud ale řešitel zadání porozumí, nepředpokládám vyšší chybovost v této úloze, zejména ne u prvních dvou až tří nákupů.



Obrázek 70: Úloha 6, PČ

5.2.2. Mimozemská čísla

Jako zástupce jiné než desítkové soustavy byla pro účely tohoto testu vybrána soustava šestková. Šestková soustava má dostatečně malý základ, aby šlo pracovat s vyššími řády i u relativně malých čísel a přecházení mezi řády bylo snadněji pozorovatelné. Zároveň je základ dostatečně vysoký, aby bylo možné v rámci jednoho řádu setrvat dostatečně dlouho, aby bylo možné odpozorovat sled jednotlivých číslic a celkově více imitovala soustavu desítkovou.

Druhá část didaktického testu se seskládá z úvodní části a čtyř úloh. V úvodní části jsou řešitelé seznámeni se šestkovou soustavou, což je sémanticky motivováno návštěvou cizí planety. Úlohy 1, 2 a 4 mají gradovanou náročnost. Úloha 3 je vložena především jako ukázka principu řádů a jeho napojení na konkrétní počty, o který se mohou řešitelé opřít při řešení ostatních úloh, zejména té poslední. Všechny úlohy jsou vzhledem k práci s jinou než desítkovou soustavou nestandardní. Všechny vyjma poslední jsou však odvozené od typických úloh, se kterými se žáci ve výuce běžně setkávají v desítkové soustavě.

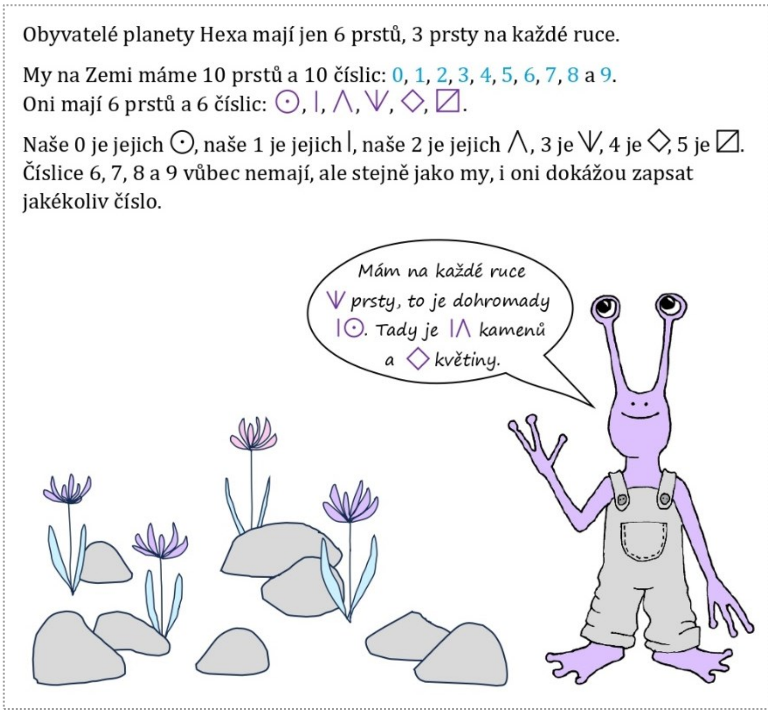
Tato část didaktického testu je vytištěna jednostranně a strany jsou spojeny kancelářskou sponkou. Řešitelé si tak mohou test snadno rozložit na jednotlivé stránky a dívat se na více stran zároveň, což jim může v mnohých případech pomoci.

Finální podobu druhé části didaktického testu a její autorské řešení předkládám na konci podkapitoly.

K úvodu

V úvodní části se řešitelé seznamují s planetou Hexa a číslicemi šestkové soustavy, které se na této fiktivní planetě používají. Číslice jsou navrženy tak, aby odrážely počet, jaký zastupují. Nula připomíná arabskou číslici 0, je tvořena kružnicí a tečkou, tudíž neobsahuje žádnou úsečku. Hexanská číslice 1 obsahuje jednu úsečku, 2 dvě úsečky atd. Řešitelé se také seznamují s faktem, že v šestkové soustavě se nevyskytují číslice s hodnotou vyšší než 5. Celý princip šestkové soustavy zde není vysvětlen, jeho odhalení a nalezení analogie s desítkovou soustavou už je ponecháno na řešitelích.

Úvodní část obsahuje kromě vysvětlení číslic také jejich aplikaci v podobě kresby mimozemšťana a několika objektů na povrchu planety. Hexan používá číslice v kontextu vět odkazujících na vizuální spočetné prvky jako prsty, kameny a květiny. V jeho výrocích jsou obsažena jednociferná i dvouciferná čísla, která si řešitelé mohou přiřadit ke konkrétním kvantitám.



Obrázek 71: Úvod, MČ

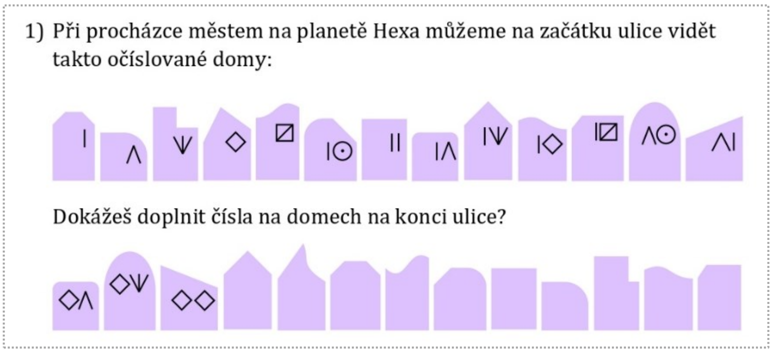
K úloze č. 1

V první úloze je řešiteli nabídnuta posloupnost hexanských čísel od $(1)_6$ po $(21)_6$, tedy od $(1)_{10}$ po $(13)_{10}$. Čísla jsou zde v roli adresy v sémantickém kontextu číslovaných domů. První řada domků znázorňuje dva přechody přes základ, aby řešitelé mohli odpozorovat princip tvorby dalších čísel. Úkolem řešitele je pokračovat v posloupnosti druhého řádku, tedy dopsat hexanská čísla, která následují po čísle $(44)_6$.

Řešitel může být v této úloze úspěšný i pokud nerozklíčuje kvantitativní hodnoty čísel v druhém řádku. Cílem úlohy je zjistit, zda žáci dokážou vypozorovat mechanismus tvorby dalších čísel, případně, zda najdou analogii mezi pokračováním čísel s 10 číslicemi a s 6 číslicemi.

Obtíží je zde přechod do páté šestky. Kritickým a především zkoumaným místem je však přechod do dalšího řádu, tedy k trojciferným číslům. Zde už je nutná analogie s desítkovou soustavou, tedy využití principu pozičních soustav obecně.

Nejvíce předpokládanou chybou je právě onen přechod k trojciferným číslům v posledních třech domcích, kde jinak úspěšní řešitelé pravděpodobně místa ponechají prázdná, nebo zvolí alternativní, nesprávnou strategii. U neúspěšných řešení předpokládám nevypozorování posloupnosti, nebo překlad číslic do desítkové soustavy a posléze dokončení posloupnosti v desítkové soustavě s vynecháním číslic 6 až 9 nebo jejich nahrazením jiným znakem (např. přímo z desítkové soustavy).



Obrázek 72: Úloha 1, MČ

K úloze č. 2

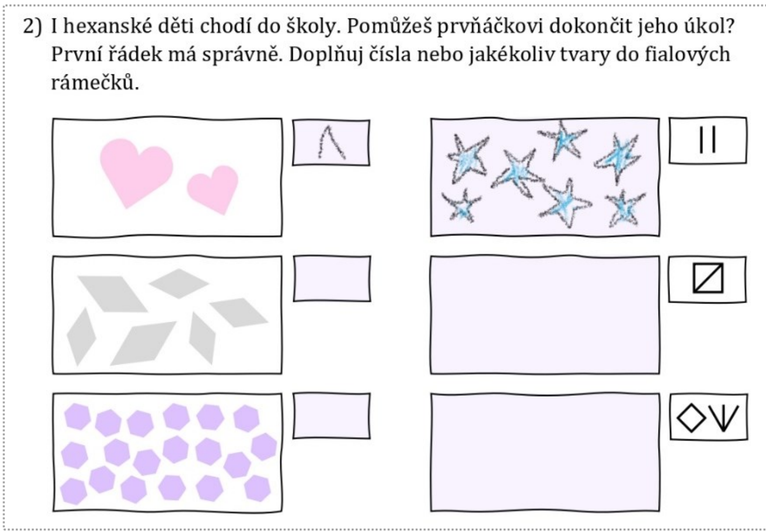
V druhé úloze je číslo v roli kvantity. Je zde předložená úloha, jakou by mohli dostat žáci prvního ročníku v hexanské škole. V prvním řádku je nabídnuto další propojení zápisu čísla a $(2)_{10}$ a $(7)_{10}$ s počtem, který vyjadřuje. Úkolem řešitele je doplnit zápis čísla nebo doplnit počet libovolných objektů ekvivalentní hexansky zapsanému číslu. Úloha tedy obsahuje dva příklady a čtyři podúlohy.

1) V první podúloze žáci doplňují zápis počtu $(6)_{10}$. Jedná se o první dvojciferné číslo v šestkové soustavě a zároveň základ soustavy. Zápis čísla $(10)_6$ je možné vypozorovat z posloupnosti domečků v první úloze nebo z výroku Hexana o počtu jeho prstů. Už toto propojení počtu šest a zápisu $(10)_6$ budu považovat za částečný úspěch v úloze.

2) Tato podúloha je spíše motivační. Kvantita jednociferného čísla je rovna hodnotě jeho číslice. Předpokládám zde velmi nízkou až nulovou chybovost.

3) Kvantita v této podúloze obsahuje 3 šestky a 1 zbylou jednotku. To už je poměrně složitý problém, kterého řešení navíc nelze vypozorovat s posloupnosti domečků. Je to zároveň dostatečně nízké číslo, aby žák mohl zvolit strategii doplnění čísel v prvním řádku domečků až k čísli $(19)_{10}$. Případně je možné si pomoci principem znázorněným ve třetí úloze. Číslo v desítkové soustavě obsahuje pro Hexany neexistující číslici 9, proto řešitel nemůže číslo $(19)_{10}$ přímo přepsat hexanskými číslicemi. Zde očekávám vyšší chybovost a jako očekávané chyby zmiňuji zejména zápis čísla v desítkové soustavě s alternativními způsoby zápisu číslice 9.

4) Obě číslice čísla $(43)_6$ v desítkové soustavě existují. Pro úspěšné vyřešení této podúlohy už musí řešitel skutečně porozumět tvorbě čísel v šestkové soustavě a rozklíčovat, že daná kvantita je rovna $4 \cdot 6 + 3 \cdot 1$. Jako častou chybu zde očekávám znázornění kvantity $(43)_{10}$.



Obrázek 73: Úloha 2, MČ

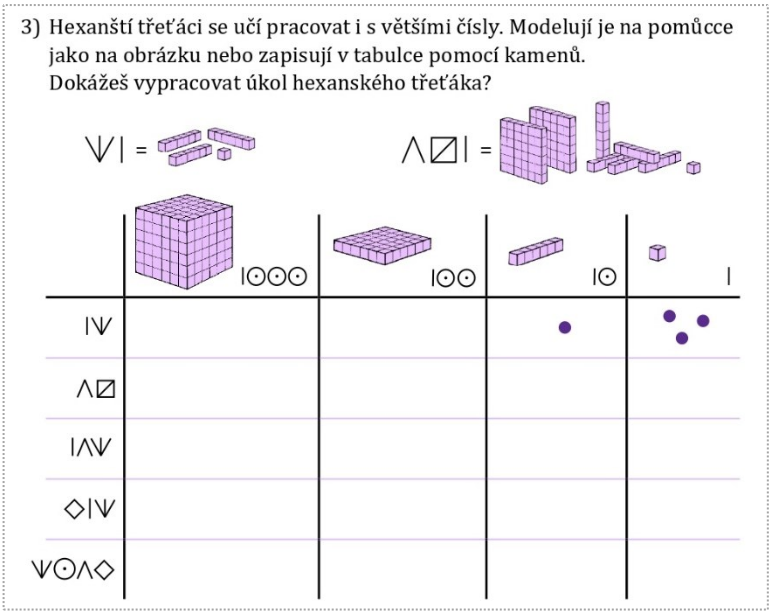
K úloze č. 3

V této úloze je pro znázornění principu desítkové soustavy využita pomůcka Dienesovy kostky (*Dienes Blocks*), kterou jsem upravila pro šestkovou soustavu. Dienesovy kostky se využívají pro výuku desítkové soustavy na mnoha školách, poměrně často se v podobě ilustrace vyskytují v učebnicích, jsou jednou ze základních pomůcek v Montessori proudu vzdělávání a v neposlední řadě s nimi také ve výuce pracují testovaní žáci. Úloha představuje řády šestkové soustavy v propojení dvou prostředí: Dienesových kostek a Kamenů (na způsob prostředí v Hejného metodě).

Jelikož, jak předpokládám, žáci tuto pomůcku znají, mohou si na základě ilustrace vytvořit analogii mezi řády $(1)_{10}$ a $(1)_{6}$, $(10)_{10}$ a $(10)_{6}$, $(100)_{10}$ a $(100)_{6}$, a $(1\ 000)_{10}$ a $(1\ 000)_{6}$. Zároveň je v ilustracích jednotlivých kostek stále viditelná kvantita, tedy z kolika jednotek se daný řád skládá.

Řešitelé mohou odpozorovat spojitost mezi číslicemi v hexansky zapsaném čísle a počtem kostek daného tvaru. Na základě tohoto pozorování je možné úlohu úspěšně vyřešit bez převedení těchto čísel na kvantitu. Primárním cílem této úlohy není zkoumat porozumění jevů při práci v pozičních soustavách, ale nabídnout řešitelům nástroj porozumění převodu čísel v šestkové soustavě na kvantitu. Úloha může tudíž velmi významně napomoci při řešení čtvrté úlohy této části didaktického testu.

Při zamýšleném porozumění zadání očekávám spíše vysokou úspěšnost řešitelů v této úloze. Příčinu případného neúspěchu bych spatřovala v nevytvořeném propojení pozice číslice s řády, tedy když řešitel nebude vnímat hexanský zápis čísla jako poziční zápis čísla.



Obrázek 74: Úloha 3, MČ

K úloze č. 4

Tato úloha je velmi náročná, neboť vyžaduje komplexní porozumění zápisu čísla v šestkové soustavě a jeho převodu do soustavy desítkové. Dienesovy kostky mohou řešitelům pomoci převádět čísla, neboť zachovávají vyjádření kvantity. Řešitel však musí porozumět principu řádů v desítkové a šestkové soustavě, a to především uvědomit si, že analogické řády obou soustav nepředstavují tutéž kvantitu. Zároveň úloha nevyžaduje vyplnění sloupců s pomůckami, neboť předpokládám, že pokud problematice řešitel rozumí už čistě aritmeticky, nemusí vždy potřebovat si hodnoty jednotlivých řádů znázorňovat vizuálně a takovéto znázornění by ho zdržovalo.

Úloha je dlouhá a obsahuje mnoho podúloh, které postupně gradují. Předpokládám, že řešitelé spíše uspějí v podúlohách s dvojcifernými čísly a přechod do každého dalšího řádu bude kritický. I toto však předpokládám u malé části řešitelů.

Neúspěch v řešení nebo vynechání podúloh s trojcifernými čísly a většími může mít dle mého předpokladu různé příčiny:

1) Neporozumění vyšším řádům – řešitelé nemusí odhalit, že kromě šestek (řád 10) hexanská čísla pracují i s řády o hodnotách 36 a 216.

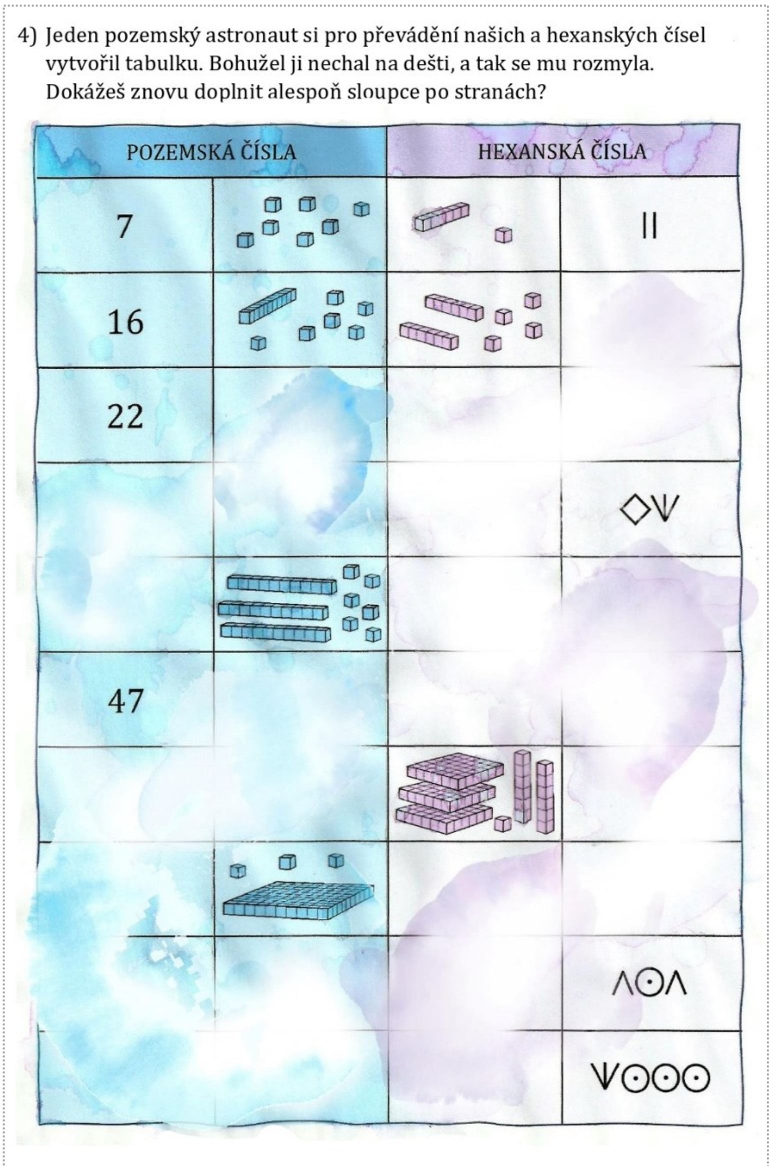
2) Náročnost aritmetických operací – i řešitelé s porozuměním principu výše se mohou nechat odradit od řešení náročnějších podúloh, neboť vyžadují opakované aritmetické operace s vícecifernými čísly a to především řetězené dělení se zbytkem, násobení a sčítání, případně i odčítání. Pro úplný úspěch v těchto podúlohách je nutné tyto operace správně rozpoznat, navázat a v neposlední řadě provést.

3) Časová náročnost – i řešitelé, kteří by nenarazili na dva výše popsané obtíže, mohou úlohu jednoduše v daném čase nestihnout dořešit. Pokud to bude možné, pokusím se poskytnout takovýmto žákům více času, ale ne každý zřejmě bude mít takto silnou vnitřní motivaci, což je z mého pohledu dostatečný a legitimní důvod pro nedořešení testových úloh.

Předpokládám, že řešitelé, kteří by dokázali tuto úlohu celou úspěšně vyřešit, by posléze dovedli princip pozičních soustav uplatnit i v pozičních soustavách s jiným základem, tudíž by dokázali zapsat čísla i např. v soustavě pětkové, sedmičkové apod. Výskyt takových řešitelů v průzkumu však očekávám velmi málo, pokud vůbec nějaké. Nepředpokládám, že se najde řešitel, který čtvrtou úlohu části didaktického testu Mimozemská čísla vyřeší celou a zároveň celou úspěšně.

Jako častou chybu očekávám přepis do hexanských číslic při zachování desítkové soustavy (za použitím alternativních znázornění číslic 6 až 9, např. jako součet číslic existujících).

Dále v rámci nižších řádů převedení znázornění v Dienesových kostkách, ale absence zápisu v šestkové soustavě nebo chybný zápis. Zároveň očekávám, že se velká část řešitelů do této úlohy nepustí vůbec.



Obrázek 75: Úloha 4, MČ

5.3 Realizace

V této části představím třídy zapojené do testování a jejich stručnou charakteristiku. Dále je zde popsán průběh zadávání didaktických testů v jednotlivých třídách, aby bylo patrné nastavení žáků při psaní testů a případné další faktory, které mohly mít vliv na jejich celkový výsledek.

Sada didaktických testů Poziční soustavy byla zadávána v době mezi 30. lednem a 22. únorem 4 třídám na ZŠ Hvozdík. Testování se účastnil 2. až 5. ročník. Všichni žáci ze třídy přítomní v den testování psali test Pozemská čísla. K testu Mimozemská čísla byli nominovaní úspěšní řešitelé testu Pozemská čísla, ale účastnit se ho vždy mohli všichni další zájemci. V případě 3. a 4. ročníku byla úspěšnost třídy v Pozemských číslech tak vysoká, že následný test psala opět celá třída.

Základní škola a gymnázium Hvozdík je malá soukromá škola v Praze. Škola je specifická nízkým počtem žáků ve třídě, který je omezen kapacitou 13, max. 15 dětí. Kromě dvou tříd 1. ročníku je každý ročník zastoupen jednou třídou. Je zvyklostí školy, že třídní učitel od 3. ročníku neučí ve své třídě všechny předměty, ale často se specializuje na konkrétní vyučovací obory a tyto učí i v jiných třídách. Ve škole učí také několik studentů na částečný úvazek včetně mě. Ve třídách se denně střídají vyučující. Pouze 1. a 2. ročník má své stabilní paní učitelky.

Je snahou školy, aby výuka byla inovativní. Pedagogům je však ponechávána velká míra svobody, co se volby metod týče. Škola je také vybavená širokou paletou didaktických pomůcek. Pro matematiku jsou zde kromě jiných i pomůcky k Hejného metodě a pomůcky Montessori. Vzhledem k této svobodě je každá třída jinak ovlivněna svým učitelem matematiky. S jednotlivými učiteli byly proto provedeny rozhovory za účelem zjištění stěžejních prvků v jeho či jejím didaktickém přístupu. Rozhovory byly provedeny i s třídními učitelkami 1. ročníku, ve kterých didaktické testy nebyly zadány.

5.3.1. Druhý ročník

5.3.1.1. Specifika třídy

Třídní paní učitelka 2. ročníku zde učí většinu předmětů včetně matematiky. Ve třídě je 15 žáků, z toho 8 dívek a 7 chlapců. Mezi žáky je jeden nový žák s odlišným mateřským jazykem a dalšími speciálními vzdělávacími potřebami (komplikované chování, zejména výbuchy agresivity), díky němuž je ve třídě i asistent pedagoga. Jeden žák s poruchou pozornosti s hyperaktivitou, který však díky dlouhodobému působení třídní paní učitelky velmi dobře spolupracuje ve výuce, tři žáci nadaní (z toho jedna žačka diagnostikovaná a dva bez diagnostiky), jedna žačka s komplexní poruchou pozornosti bez hyperaktivity a jedna slabší žačka ze složitého sociálního pozadí doporučená k diagnostice v pedagogicko-psychologické poradně. Lavice jsou uspořádány do hnízd, dominantou je kruhový koberec v blízkosti tabule. Obecně jsou žáci třídy motivovaní, dobře spolupracující s učiteli i mezi sebou.

5.3.1.2. Zadání testu Pozemská čísla

Test byl zadáván ve středu 7. února 2024 na 1. VH. Přítomno bylo 12 žáků. Tento týden byl pro druháčky specifický tím, že celý týden chyběla jejich třídní paní učitelka a střídali se u nich suplující učitelé. Ten fakt určitě mohl mít vliv na jejich výkon i soustředění.

Před samotným sdělením pokynů a zadáním testů jsem se žáků ptala, zda tuší, co je to výzkum. Žáci měli zajímavé nápady týkající se zejména paleontologie, někteří zmínili i další přírodní vědy. Ptala jsem se dále, zda tuší, co by tedy mohl být pedagogický výzkum. Jelikož mi žáci nerozuměli, nechala jsem je hádat, kdo může být takový pedagog. Jako první žáky napadlo, že by to mohl být doktor – zřejmě si to spojili s koncovkou *-log*. I po nápovědách pana asistenta, jsem žákům nakonec prozradila, že pedagog je synonymem pro učitele. Vypadali velmi překvapeně. Znovu jsem nadhodila otázku, co může zkoumat takový pedagogický neboli učitelský výzkum. Žáky hned napadlo, že by mohl zkoumat děti, ale chtěla jsem po nich konkrétnější oblast výzkumu. Druháci navrhovali, že by šlo zkoumat, zda se děti učí a kolik toho umí. Upřesnila jsem, že jde zejména o to, jak se děti učí, jakým způsobem věcem rozumí a jak jim může učitel pomoct něčemu porozumět.

Vysvětlila jsem žákům, že test pro ně může být těžký, ale že je v pořádku, když si s něčím nebudou vědět rady. Aby mohl test zkoumat jejich přemýšlení, musí to být pro ně výzva. Vysvětlila jsem, proč je důležité, aby negumovali. Samotný test byl zadán v 9:05.

Příběh 1: *Krátce po zadání testu Hubert s OMJ začal projevovat neklid, stres. Než jsem k němu došla, ujal se ho vedle sedící Fido. Fido mu začal uklidňujícím hlasem vytrvale vysvětlovat, že je v pořádku, pokud test nenapíše nejlépe. Jde přeci hlavně o to, to zkusit a dát ze sebe to nejlepší. Vysvětloval, že se jedná o výzkum, a tak ten test bude asi těžký, ale vůbec nevadí, když v něm Hubert bude dělat chyby. Fido v podstatě zopakoval moje slova, ale rozvitější formulací a svým jazykem. Velmi uvědoměle Huberta nakonec uklidnil.*

Situace popsána v příběhu výše podle mého názoru přiléhavě ilustruje klima třídy. Fido i Hubert jsou žáci s SVP. Hubert je ve třídě teprve krátce, přesto jej spolužáci přijali do kolektivu a naučili se i předvídat pro Huberta náročné situace. Fido se v příběhu snaží Huberta uklidnit a ujistit, projevuje zde růstové nastavení mysli a na rozdíl od Huberta se nebojí chyby. Zároveň je to pro mě zpětná vazba, že informace o testování, které jsem sdělovala, byly nejméně jedním žákem přijaty.

Brzy po zadání se žačka Klárka ptala, proč se test jmenuje Pozemská čísla. Vysvětlila jsem, že se jedná o čísla, jaká běžně tady používáme a že je to pro odlišení tohoto testu od testu následujícího. Během testu se žáci často hlásili, když nerozuměli zadání. Snažila jsem se dovysvětlit zadání, ale nenapovídat a pokud možno ani nenabízet strategie řešení. U třetí úlohy jsem však pro vizualizaci zakrývala číslice prstem, čímž jsem řešitelům strategii nabídla. Nejčastěji se žáci doptávali na zadání právě této 3. úlohy, občas ale i na 6. a 4. V šesté úloze žáky nejčastěji zajímalo, jak mají bankovky zapsat. Říkala jsem, že je to na nich, jaký způsob zvolí, hlavně, aby tomu rozuměli oni sami a posléze tedy i já. Ku podivu se moc nedoptávali na 5. úlohu, u které bylo z mého pohledu porozumění zadání obtížnější vzhledem ke složené podmínce.

První test byl odevzdán už po 21 minutách. Jednalo se o nadaného žáka Mikyho. Většina testů pak mezi 30 a 40 minutami po zadání, tedy do konce VH. Pouze dvě žačky psaly i o přestávce, ale ne déle než 2 minuty. Po odevzdání testů jsem se jen krátce zeptala žáků na jejich pocity. Někteří tvrdili, že test byl jednoduchý, pro většinu byl v jejich vnímání mírně až středně obtížný.

5.3.1.3. Zadání testu Mimozemská čísla

Test Mimozemská čísla byl zadáván hned druhý den, ve čtvrtek 8. února 2024, opět na 1. VH.

Žáci projevovali radost, že mě znovu vidí. Ptala jsem se žáků, zda si někdo vzpomene, jak se test jmenoval. Ben navrhl: „*Pentegogický výzkum?*“ Souhlasila jsem a poopravila, že se skutečně jednalo o pedagogický výzkum, tedy učitelský výzkum, ale napověděla jsem, že ten test měl i svoje jméno. Ukázala jsem původní test a zakryla nadpis. Spousta žáků se ozvalo, že netušili, že tam nějaký název měl. Nikdo si nevzpomněl, ani Klárka, která se na název ptala. Tina si vzpomněla, že se jednalo o nějaká čísla. Prozradila jsem, že se jmenoval *Pozemská čísla* a vyzvala jsem žáky, aby na základě toho odvodili, jak by se mohl jmenovat dnešní test. Jeden žák navrhl: „*Nepozemská čísla*.“

Sdělila jsem, že druhá část je dobrovolná, ale že bych opravdu velmi chtěla, aby si ji napsali konkrétní jmenovaní žáci (*silně doporučení*), pak že budu ráda, když se pro to rozhodnou také další jmenovaní žáci (*doporučení*), ale kdokoliv další se může také zúčastnit, pokud bude chtít. Pro didaktický test Mimozemská čísla se rozhodlo 7 žáků, zbylých 6 přítomných šlo do přilehlé družiny procvičovat s panem asistentem v pracovních sešitech. Mezi 7 zúčastněnými žáky byli všichni 3 silně doporučení, 2 ze 4 doporučených a 2 z 5 ostatních řešitelů testu Pozemská čísla.

Před samotným zadáním jsem připomněla pokyny. Upozornila jsem žáky, že test je záměrně vytištěný jednostranně, aby si mohli stránky pohodlně rozložit a nahlížet na více stran zároveň, pokud budou potřebovat. Předestřela jsem, že test pro ně může být náročnější než včerejší a že opět jde hlavně o to, aby na něco zkusili přijít, ale nic se neděje, pokud se svým výsledkem nebudou spokojení. Test byl zadán v 9:09.

Během testu jsem dovysvětlovala hlavně účel úvodu. Žáci často hledali, kam mají něco doplnit a bylo potřeba je upozornit, že úvodní text je pouze pro uvedení do děje a první úloha začíná až pod čarou. Dále byla hodně dotazovaná 3. úloha. Žáky zmátly Kameny, které v této formě neznaly, a bylo jim potřeba dovysvětlit, jak zápis v tabulce funguje. Ukazovala jsem jim, jak hexanští žáci v příkladu vymodelovali dané číslo, poté ukazovala na zápis v tabulce: *„Toto číslo vymodelovali jako jeden* (prstem na puntík) *hranol* (prstem na hranol v záhlaví) *a tři* (prstem na puntíky) *takové krychličky* (prstem na krychličku v záhlaví). *Dokážeš sem do dalších řádků zapsat, kolik čeho by použili pro tato čísla?“*

Někteří žáci bez dotazu intuitivně začali kreslit do tabulky Dienesovy kostky, jiní se přihlásili o pomoc. Celkově jsem pozorovala, že byla pro žáky 2. ročníku práce s tabulkou zatím obtížná. Ke 4. úloze bylo také potřeba několika žákům dovysvětlit zadání. Později jsem však měla pocit, že si zvykli na pomoc a přestali číst zadání. Při každé prosbě o pomoc s porozuměním jsem se proto nejdřív zeptala, zda si přečetli zadání, a pokud nepřečetli, nejdřív jsem je odkázala na text zadání. Některým žákům pak pro porozumění zadání jeho přečtení stačilo.

První test byl odevzdán po 25 minutách vypracovávání opět Mikym. Další test byl odevzdán po 31 minutách a zbylí žáci využili možnost v psaní pokračovat přes přestávku a v další VH, což díky flexibilnímu suplovanému rozvrhu bylo možné. Většina žáků pak test odevzdala mezi 41. a 51. minutou po započetí vypracovávání testu.

Po testu jsem se opět žáků ptala na jejich pocity. Většina říkala, že to bylo zajímavé, ale celkově bylo vidět, že jsou z dlouhého přemýšlení unavení. Ptala jsem se jich, zda je zajímá, jak hexanská čísla tedy fungují. Většina se přihlásila, že ano, ale k povídání u tabule již nepřišli. Někteří žáci ze začátku chtěli svoje objevy sdílet, ale i u těch zájem rychle vypršel, když viděli kamarády při volné hře. Podle mého pozorování se mi zdá pravděpodobné, že by žáci měli zájem sdílet své nápady, kdyby skončili práci ještě v čase vyučovací hodiny.

5.3.2. Třetí ročník

5.3.2.1. Specifika třídy

Ve 3. ročníku bylo v době zadávání testu zapsáno 12 žáků, z toho 9 chlapců a 3 dívky. Jeden žák má poruchu pozornosti s hyperaktivitou a další SVP, díky tomuto žákovi byl ke třídě přiřazen asistent pedagoga. Jeden žák má poruchu pozornosti s hyperaktivitou a další jeden poruchu pozornosti bez hyperaktivity. Čtyři žáci jsou pravděpodobně nadaní (bez diagnostiky). Třída od začátku roku změnila svého třídního učitele. Vzhledem k nedostatku pedagogů jim původně byl pan učitel, který je zároveň třídním třídy 4. ročníku. Od nového kalendářního roku se stal třídním učitelem zdejší původní asistent pedagoga a učitel prvouky a přírodovědy. Třída je specifická tím, že se v ní velmi často střídají učitelé. Třídní pan učitel učí pouze prvouky, ale ve většině předmětů je ve třídě přítomen v roli asistenta pedagoga. Matematiku zde vyučuji já. Třída je v hodinách matematiky velmi motivovaná, rádi objevují a přemýšlejí, neradi se věnují rutinním činnostem. Lavice jsou uspořádány do U, uprostřed před tabulí je velký koberec se stovkovou tabulkou. Třídní klima je přátelské a vztahy mezi žáky dobré, ale zasloužily by si více pozornosti. Většinou spolu žáci s adekvátními podněty dovedou velmi dobře spolupracovat.

5.3.2.2. Zadání testu Pozemská čísla

Test byl zadáván v pondělí 5. února 2024 na 2. VH, které předcházela hodina anglického jazyka. Přítomno bylo 9 žáků, jeden dopisoval tento test ještě dodatečně.

Nejdřív jsem si žáky vzala do kruhu a ptala se, zda tuší, co dělají vědci. Odpověďmi bylo, že vědci zkoumají mozek, vesmír, provádějí pokusy. Pavel poznamenal: *„Pijou kolu a čučí na seriály."* Přiznala jsem, že to určitě mnozí vědci také dělají, ale není to zrovna to, proč jim říkáme vědci. Dále jsem se žáků zeptala, kdo jsou to pedagogové. Pavel odpověděl: *„Pomáhají lidem. Mně taky jednou pomohli, když jsem tam potřeboval jít."* Po doplňující otázce Pavel přiznal, že měl na mysli psychology a pojmy si spletl. Když jsem žákům prozradila, že pedagog je jen cizí slovo pro učitele, byli dost překvapení. Tázala jsem se dále, čím by se asi mohla zabývat pedagogika jako věda, tedy co dělají pedagogičtí vědci. *„Zkoumají děti,"* odpověděli žáci bezprostředně. Vyžadovala jsem však hlubší myšlenky. Třeťáky napadlo, že by mohli tito vědci zkoumat, jestli se děti učí. Někteří dodali, že bude předmětem výzkumu mozek. Žáci se opakovali kolem toho, že se děti učí. Doplnila jsem, že jde hlavně o to, jakým způsobem se děti učí a jak nejlépe děti učit, tedy co dělat ve třídě, aby se látku naučili. Poté jsem navázala s didaktickým testem.

Po vysvětlení pokynů byl test zadán v 10:00.

Tři žáci měli velký problém u testu sedět. Byli rozjívení, vykládali si vtipy a ke konci jim pak chyběl čas. Většina žáků se opravdu snažila. Venda s komplexními SVP při psaní fungoval výborně, a to i za nepřítomnosti asistenta pedagoga, byl zjevně velmi motivován. Kajka, která byla v tomto období často úzkostná ohledně správnosti svých řešení, často i při didaktickém testu vyžadovala ujištění, že jsou její odpovědi správné. Snažila jsem se jí vždy co nejvíce nasměrovat k tomu, že záleží především na tom, zda ona sama ve své odpovědi vidí smysl. Tomáš, nadaný žák, se také často ptal, ale většinou se spokojil s pokynem, ať zkusí přijít na takové řešení, které jemu osobně nejvíc dává smysl. Kajka prosila o radu, jak zapsat číslo 1 001. Dopočítala si, které číslo patří do políčka v 1. úloze, ale nebyla si jistá, jak ho zapsat. Omluvila jsem se, že jí to nemohu prozradit, ale ať zkusí sama navrhnout, jak by to asi mohlo být. Kajka pak na první pokus doplnila zápis 1001 a s tím byla spokojená. U dvou žaček se projevilo neporozumění ve 4. úloze, neboť tyto žačky vnímaly rovnost procesuálně. Konkrétně se Amálka ptala, jak se pět set osmdesát něco může rovnat pět set (sic). Když jsem procházela kolem Břéti, ukázal mi na 2. podúlohu ve 4. úloze se slovy: *„Tenhle odstavec byl jednoduchý! Protože se doplňovalo jenom v jednom příkladu.“*

První test byl odevzdán už po 14 minutách Tomášem. Většina žáků dopsalo mezi 30. a 35. minutou po zadání. Poslední test byl odevzdán dvě minuty po konci VH, tedy 37 minut po zadání.

Žáci měli ohledně testu smíšené pocity. Několik žáků pokládalo test za jednoduchý, většina přiznala, že je potrápil. Obecně je ale test bavil a z příslibu testu Mimozemská čísla měli radost.

5.3.2.3. Zadání testu Mimozemská čísla

Kvůli nemocnosti žáků nebyl test zadáván v původně plánovaném termínu. Žáci byli zklamaní, že Mimozemská čísla budou psát až později a někteří se mě velmi vytrvale snažili přemluvit. Test byl zadáván až 18. února 2024, tedy v pondělí po jarních prázdninách, na 3. VH. Přítomno bylo 9 žáků, Pavel musel nečekaně odejít v průběhu hodiny. Test jsem mu na jeho žádost dovolila si vzít domů, nebyl tudíž zahrnutý do výsledného rozboru. Marek projevil zájem si místo testu Mimozemská čísla doplnit test Pozemská čísla, na který chyběl.

Všichni žáci, kteří psali Pozemská čísla, byli silně doporučení nebo doporučení pro test Mimozemská čísla. Test byl tedy zadán všem přítomným, kromě Marka, který psal didaktický test Pozemská čísla. Po sdělení pokynů byl samotný test zadán v 11:07.

Kajka už dopředu vyjadřovala obavy, že to nezvládne, že to bude těžké. Kajka je v matematice poměrně zdatná, ale má velmi nízkou sebedůvěru. Během psaní měli žáci dotazy týkající se většinou porozumění zadání úlohy. Snažila jsem se s jednotlivci projít zadání, ale nenapovídat, co se obsahu týče. Je přesto možné, že jsem ale dost napověděla svými reakcemi na jejich úvahy, i když jsem se velmi snažila jejich myšlenky nehodnotit.

Celkově byli žáci během psaní poměrně frustrovaní. I matematicky zdatnější žáci se do úloh pouštěli s menším odhodláním, než je pro ně typické. Venda s přiřazeným (a nepřítomným) asistentem se zasekl a bez podpory nepokračoval. Dva nadaní žáci zkoušeli různé strategie, ale také ode mne vyžadovali podporu, protože svým strategiím sami tak úplně nevěřili. Kajka, zdá se, odhalila základní principy, ale vyžadovala ode mne potvrzení, že to má správně. Jednalo se konkrétně o zápis čísla 6 ve 2. úloze. Když jsem se snažila jí vysvětlit, že jí nemohu říct, zda to má správně, vyčetla z toho, že je její řešení nesprávné a hrozilo, že propadne beznaději a nebude pokračovat vůbec. Potvrdila jsem jí tedy, že její řešení je správné. Honzíkovi jsem možná trochu napověděla u 3. úlohy tím, že se má zaměřit, jestli pozoruje nějakou pravidelnost v příkladu.

Opět se ve třídě projevila jejich velmi silná potřeba sociálního učení. Měli neustálé tendence si hned sdělovat své aktuální objevy. Cestovali mezi lavicemi, chtěli si vzájemně pomáhat, dost možná jsem i něco neuhlídala a komunikace proběhla. Snažila jsem se žáky pořád vracet a vysvětlovat, proč právě teď chci, aby myslel každý sám za sebe.

První test byl odevzdán s koncem vyučovací hodiny, tedy 38 minut po zadání. Většina žáků chtěla ještě chvíli pokračovat a test odevzdali do 40 minut, poslední dva žáci pak do 50 minut po zadání.

Maty hned po odevzdání šel za spolužákem a chtěl Vítkovi vysvětlit své porozumění hexanskému zápisu, ten jej však odmítl, že to vědět nechce. Vítek byl z testu velmi frustrovaný. Obecně je to velmi přemýšlivý chlapec, ale je pro něj výzvou zpracovávat, když mu něco nejde, jak by si představoval.

Zamýšlela jsem se, co se v té třídě stalo, že byli z testu takto nešťastní. Je možné, že na rozdíl od čtvrťáků ještě nemají potřebné zkušenosti a strategie k řešení těchto úloh, ale zároveň na rozdíl od druháků si tento nedostatek uvědomují a uvědomují si, že jejich strategie nevedly ke správnému výsledku. Dalším vlivem jistě byla i nutnost řešit nové a náročné úlohy samostatně a nemoci své strategie průběžně diskutovat a ověřovat zpětnou vazbou spolužáků. Bezprostředně po testu jsem se snažila žáky znovu ujistit, že nejdůležitější byla jejich snaha a že je naprosto v pořádku, pokud nevyřešili všechny úlohy. Pochválila jsem je, že se do tohoto testu pustili.

5.3.3. Čtvrtý ročník

5.3.3.1. Specifika třídy

Dlouhodobý třídní pan učitel 4. ročníku učí ve své třídě pouze matematiky a jednou týdně vědu. Třída je na něj velmi navázaná a třídní kolektiv je jím opečovaný. Ve třídě je 14 žáků, 8 chlapců a 6 dívek. Pro žačku s lehkou mentální retardací je ke třídě přiřazena asistentka pedagoga. Dále je ve třídě žák s vývojovou dysfázií, žák a žačka s nediagnostikovaným nadáním. Lavice jsou uspořádány do U, koberec ve třídě není. Žáci výborně spolupracují s učiteli i mezi sebou. Ve výuce mají dobrou sebekázeň, jako celek se třída nebojí výzev.

5.3.3.2. Zadání testu Pozemská čísla

Test byl zadáván v úterý 30. ledna 2024 na 1. VH. Přítomno bylo 12 žáků.

Vysvětlila jsem žákům, že se jedná o didaktický test v rámci pedagogického výzkumu a že na něj bude navazovat test další. Na základě asociace s označením *test* žáky zajímalo, zda se jejich práce bude hodnotit. Po vysvětlení, oč se jedná, se někteří žáci dále ptali, zda tedy mohou test schválně pokazit. Naštěstí zůstali pouze u spekulací, co by se stalo, kdyby. Celkově jsem měla pocit, že to třídu zaujalo.

Samotný test byl zadán v 9:05.

Během testu někteří žáci měli potřebu sdělovat, že je to pro ně jednoduché. Čas od času, se tak ozývaly komentáře jako: *„To je jednoduchý; To je mega easy. Tak dvojka je mega jednoduchá.“* Žáci se doptávali podstatně méně než v jiných třídách. Vláďa měl dotaz ohledně 2. úlohy, jak má zjistit, co je ten huragánek (sic). Prozradila jsem mu jen, že k němu schválně není nápověda a aby zkusil odhadnout, jaký význam toho znaku by dával smysl. Odpověděl jen: *„Ahaaa…“* a záhy do testu dopsal patřičný počet stovek. Zadání k 3. úloze jsem dovysvětlovala dvěma žačkám, Kamče s LMR a Madle, která je v matematice vnímána jako slabší. Madle jsem názorněji přečetla zadání. *„Takže třeba 975?“* ptala se. Vedle sedící Bětka hned reagovala: *„No ale to už bys to zpřeházela.“* Nechala jsem tedy Bětku vysvětlit zadání a obě dívky jsem pozorovala. Madla kamarádčinu vysvětlení porozuměla. Ke čtvrté úloze jsem zaslechla komentář jednoho z žáků, kteří ze začátku opakovali, jak je to jednoduché: *„Tady ta čtyřka už je těžší.“* Několik upřesňujících dotazů padlo k 6. úloze. Jeden dotaz se týkal toho, zda mají 9 bankovek každého druhu na všechny nákupy nebo na každý zvlášť. Většinou se dotazy týkaly zápisu, na což jsem reagovala jako v jiných třídách, ať zvolí jakýkoliv zápis, který považují za srozumitelný. Během psaní všichni vykazovali soustředění, snahu a celkově bylo vidět, že jim na výsledku záleží.

Jako první test odevzdala Kamča už 12 minut po začátku vypracovávání. Další testy byly odevzdávány v časech mezi 14. a 33. minutou po zadání.

V posledních minutách VH jsem se žáků ptala na jejich pocity ohledně testu. Skupinka chlapců vzadu ukazovala palec na horu jako signál, že to bylo jednoduché. Ostatní sdělovali, že to bylo spíše středně těžké, ale nikdo neoznačil test jako vyloženě náročný. Velmi žáky zajímalo, zda jim sdělím procenta, nebo alespoň chyby. Velmi jim na znalosti výsledku záleželo.

Ptala jsem se také, zda tuší, čeho se test asi týkal a co zkoumal:

- Bětka: *„Něco jako slovní úlohy."*
- Štěpán: *„Číslice, jak jdou po sobě."* (spíše měl na mysli čísla)
- Mirek: *„Logika."*
- Valda: *„Násobilka?"* (posléze se sám opravil, že tam násobilka vlastně nebyla)
- Oleg: *„Příklady obecně."*

5.3.3.3. Zadání testu Mimozemská čísla

Test byl zadáván v pátek 9. února 2024 na 1. VH. Přítomno bylo 8 žáků. Pouze Kamči a Madly se netýkala nominace pro psaní testu Mimozemská čísla. Jelikož jsem tyto žačky nechtěla vyčlenit, zadala jsem navazující test opět všem přítomným.

Ptala jsem se žáků, zda by si vzpomněli, jak se jmenoval první test. Už to však bylo poměrně dávno, proto odpověď netušili. Skupinka chlapců vzadu třídy působila velmi natěšeně – ptali se, jestli to bude těžší než předchozí test a opakovali, že ten první byl jednoduchý. Sdělila jsem svůj předpoklad, že tento test bude pro ně velmi pravděpodobně těžší.

Po sdělení pokynů byl test zadán v 9:05.

Během psaní měli žáci vzadu poměrně dost hlasitých poznámek. Bylo vidět, že jsou mírně frustrovaní z něčeho, co jim nejde samo od sebe. Neporozumění zadání vzniklo kvůli pojmům *číslo* a *číslice*. Tito žáci tvrdili, že si text protiřečí. Valda se ptal: *„Ale jak můžou zapsat další čísla, když mají jen šest čísel*?“ Štěpán zas namítal: *„Ale oni lžou! My máme nekonečno číslic, ne jen 10.“* Tyto žáky jsem se snažila nasměrovat otázkou, zda je rozdíl mezi číslem a číslicí. Rozdíl nevnímali a nerozuměli, proč se jich takto ptám. V krátkosti jsem vysvětlila, že číslice je pouze znak, tak jako písmeno. Ostatní žáci psali tiše a měla jsem pocit, že jim to docela jde.

V několika málo případech jsem dovyjasňovala, že v úvodní části nic dělat nemusí a zadání začíná až první úlohou. V první polovině VH se často ozývalo tiché: *„Ahaa; No jooo; Já už to chápu!“* nebo dokonce *„Já na to přišel! Já to mám správně! Teď se mi to potvrdilo.“* Trochu bylo potřeba dovysvětlovat zadání s tabulkou ve 3. úloze, aby žáci porozuměli zápisu s puntíky v příslušných sloupcích.

První test byl odevzdán po 25 minutách opět Kamčou. Většina žáků využila možnosti psát i přes přestávku, případně do další hodiny. Kdo odevzdal, šel do vedlejší třídy na přestávku. Většina žáků odevzdala do tří minut po konci hodiny, tedy do 43 minut po zadání. Klaudi objevila princip převádění čísel mezi soustavami a vytrvale v testu pokračovala až do 50 minut po započetí vypracovávání.

Po odevzdání všech jsem se opět žáků ptala, jestli chtějí prozradit, jak čísla fungují. Tři žáci projevili zájem, udělali jsme hlouček u tabule a žáci nabízeli svoje nápady, jak hexanský zápis funguje. Štěpán, nadaný žák, zůstal déle. Měl velkou potřebu tomu skutečně porozumět. Doptával se opakovaně na konkrétní čísla a řády, navrhoval svoje čísla, která ho zajímala, a ptal se i na větší čísla.

5. ročník

Specifika třídy

Ve třídě je 13 žáků, 8 dívek a 5 chlapců. Součástí třídy jsou 3 žačky s odlišným mateřským jazykem a 2 žačky bilingvní. Jedna žačka nerozumí česky téměř vůbec a k testům dostala přeložená zadání. Asistentka pedagoga je přiřazena k žačce s Aspergerovým syndromem. Dále je zde žačka s úzkostmi a žačka s vysokou emotivitou. Třídním učitelem je pan ředitel, který je ve třídě nejvýše 1 VH týdně. Učitelé se střídají po jednotlivých předmětech, na gramatiku a literaturu mají dokonce dvě různé paní učitelky. Třídní kolektiv je velmi problematický, sociální učení funguje jen velmi omezeně. Matematiku zde učím já, ve výuce v této třídě mi velmi napomáhají dobré vztahy s žáky.

Zadání testu Pozemská čísla

Test byl zadáván ve středu 21. února 2024 na 5. VH. Této hodině předcházela etická výchova, FIO a dvojhodinový blok ČJ. Přítomno bylo 12 žáků.

Hned na začátku bylo patrné, že jsou žáci unavení. Proti psaní testu protestovali, aniž by si nechali vysvětlit, oč se jedná. Bylo mi líto, že jsem neměla připravenou alternativu. Zároveň jsem potřebovala tento i následující test stihnout ještě v tomto týdnu. Jelikož jsem na poslední chvíli překládala zadání pro Laru s OMJ, byla jsem už předem ve stresu. Způsob, jakým někteří žáci reagovali, mě podráždil ještě více. Ač nerada, uplatnila jsem na žáky učitelskou autoritu. Ukázněnější třídě jsem objasnila, o co se jedná a vysvětlila, že tentýž test už psaly i ostatní třídy počínaje 2. ročníkem. Ptala jsem se jako každé třídy, co je to výzkum, kdo je pedagog a co může být předmětem zájmu pedagogického výzkumu. Někteří žáci začali spolupracovat a aktivněji se zapojili do diskuse.

Před samotným zadáním testu jsem zdůraznila žákům, že je v pořádku se dopouštět chyb. Ujistila jsem je, že test nebude hodnocen, ale jelikož je to součástí výzkumu, budu ráda, když se budou snažit. I přes opětovné ujištění jsem vnímala, že mají žáci obavy, proto jsem jim nabídla, že se mohou podepsat smyšlenou přezdívkou. Ukázalo se to jako účinný nástroj k uvolnění atmosféry a podpoře jejich zapojení.

Test byl zadán ve 12:47.

Během vypracovávání testu bylo ze začátku náročné udržet klid. Žáci měli mnoho dotazů. Postupně se ale třída zklidnila a žáci se soustředili na didaktický test. V jednu chvíli si Martina s Natkou dovysvětlovaly zadání, neradily si však co se obsahu úlohy týče. Z mé strany bylo nejvíce dovysvětlováno zadání 3. úlohy. Občas se žáci dotazovali na 5. úlohu a několikrát na 6. úlohu, avšak pouze na to, jak mají výsledek zapsat.

První test byl odevzdán 17 minut po zadání. Další čtyři žáci test odevzdali dvě minuty poté. Všechny ostatní testy byly odevzdány do 33 minut po jeho zadání.

Opět jsem se ptala žáků na jejich pocity ohledně testu. Pro lepší přehled jsem znovu použila signály palcem. Většina žáků ukazovala, že byl test středně obtížný, někteří zvednutým palcem komunikovali, že to bylo jednoduché. Celkově třída reagovala různorodě, ale rozložení pocitové úspěšnosti mě nepřekvapovalo.

Rebeka byla ten týden nemocná a sama mě aktivně žádala o informace, co se děje ve škole. O test projevila zájem, tudíž jsem jí ho po bratrovi poslala domů i s instrukcemi. V žačku mám důvěru, že instrukce dodržela, a test byl zařazen do výzkumného vzorku. Po jejím návratu do školy mi svá řešení komentovala.

Zadání testu Mimozemská čísla

Test byl zadáván ve čtvrtek 22. února na 3. VH. Předcházel dvojhodinový blok ČJ.

Reakce žáků už byli podstatně příznivější než v předcházejícím dni. Žáky zajímaly jejich výsledky v testu Pozemská čísla.

K testu se přihlásili téměř všichni přítomni žáci. Pouze Anděla dala přednost alternativní samostatné práci.

Test byl zadán v 11:10.

Maxim testové zadání vrátil záhy po obdržení. Odůvodnil to slovy, že se chtěl jen kouknout, jak test vypadá. Mia test vzdala o něco později. Nakonec tedy test Mimozemská čísla vypracovávalo všech 6 řešitelů silně doporučených, 1 ze 3 doporučených a 2 z ostatních řešitelů. Dále byl mezi ostatní zařazen test Rebi, která jej vypracovávala doma.

Nejvíce dotazů směřovalo ke 3. úloze, kde jsem jako v předchozích ročnících objasňovala zápis v tabulce. Několikrát se žáci dotazovali na 4. úlohu, u které jsem jen poukázala na to, že v rámci jednoho řádku je pozemsky i mimozemsky znázorněno totéž číslo. Dvě dvojice žáků si občas sdělily drobné rady. Bylo obtížné tomu během testu zabránit. Snad by bylo pomohlo, kdybych před zadáním testu znovu a lépe vysvětlila, oč se jedná a proč je důležité, aby pracovali opravdu samostatně.

První test byl odevzdán 25 minut po zadání. Většina řešitelů test odevzdala do konce vyučovací hodiny, tedy do 35 minut po začátku vypracovávání. Někteří využili možnosti psát i přes přestávku a odevzdali do test do 45 minut po zadání. Joel byl velmi vytrvalý a chtěl pokračovat dále. Bylo mu to umožněno a přesunuli jsme se do blízké jazykové třídy. Joel byl odhodlaný dokončit i poslední úlohu, jak také učinil. Joelovi jsem posléze zapůjčila kalkulačku, neboť jsem pozorovala, že principu rozumí a výpočty ve vysokých číslech ho zdržují. Test odevzdal až 80 minut po začátku vypracovávání.

Na pocity ohledně testu jsem se doptávala pouze individuálně nebo skupinek, např. během oběda. Většinová reakce byla, že jim test přišel zajímavý, ale byl náročný. Někteří pochválili i vizuální zpracování testu.

5.4 Rozbory řešení

5.4.1. Pozemská čísla

Jak bylo popsáno výše, úlohy byly zadávány ve čtyřech ročnících prvního stupně ZŠ Heřmánek. Úspěšnost řešitelů z jednotlivých tříd se lišila. Než byl proveden podrobnější rozbor jednotlivých úloh, byla žákovská řešení každé z úloh rozdělena do několika kategorií: *úspěšná řešení*, *z většiny úspěšná řešení*, *řešení správná s chybným porozuměním zadání*, *řešení nesprávná i s chybným porozuměním zadání*, *neúspěšná řešení*, *neřešeno* a *jiné*. Málo početná kategorie *jiné* seskupuje taková řešení, která nebylo možné jednoznačně zařadit do některé z předchozích kategorií. Původně existovala i kategorie pro neautorsky úspěšná řešení, ale ta našla využití pouze v pilotáži a v přepracované verzi testu již nebyla potřeba. Tyto kategorie jsem také využila při nominaci řešitelů k testu Mimozemská čísla, o kterém blíže pojednávám v závěru této sekce.

Pro názornost přikládám diagram relativní úspěšnosti tříd v jednotlivých úlohách. Relativní úspěšnost řešení úloh je vypočítána jako vážený součet řešitelů z kategorií *úspěšná řešení* (přiřazeny 3 body) a *z většiny úspěšná řešení* (přiřazeny 2 body) převedený na procento řešitelů v rámci třídy.

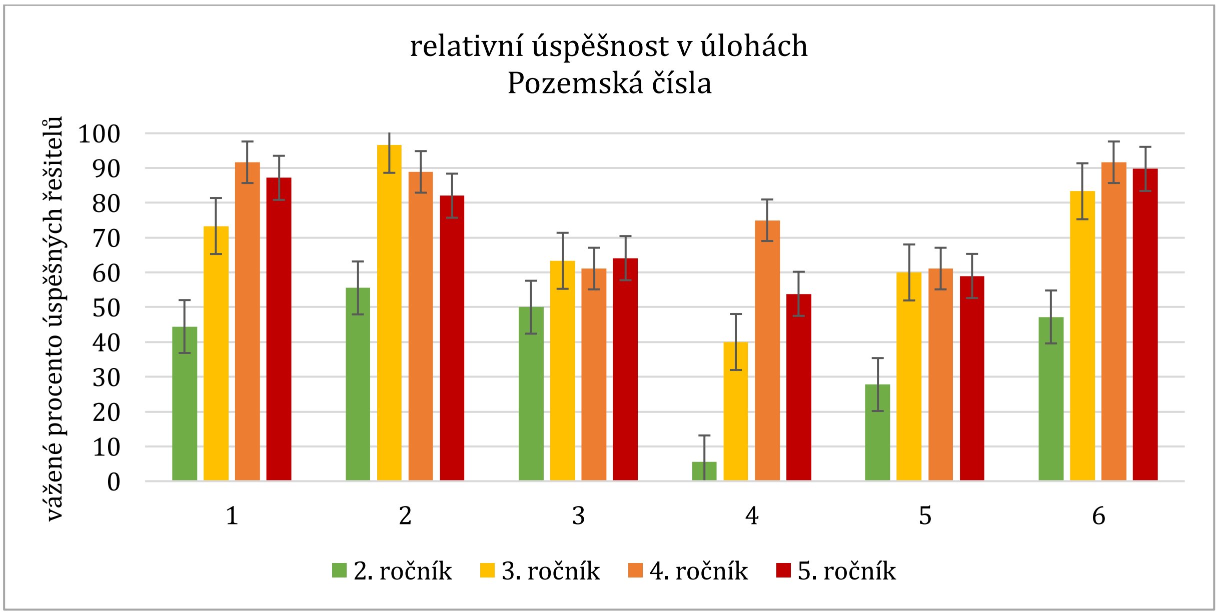
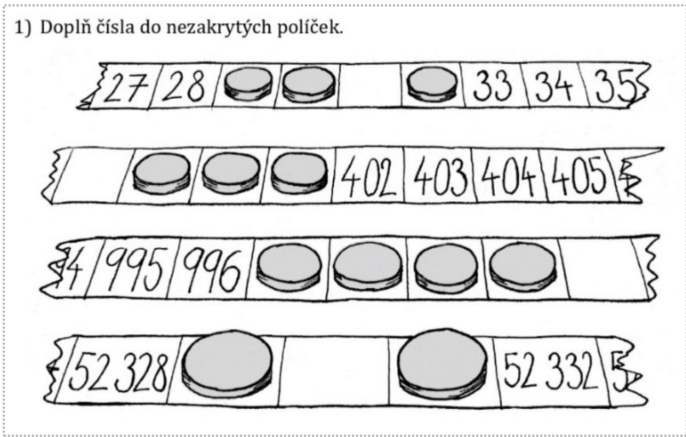


Diagram 8

Ze sloupcového diagramu výše je patrné, že úspěšnost se s ročníky zvyšuje u standardních úloh, jakými jsou testové úlohy 1. a 6. Průměrně nejméně úspěšní jsou ve všech úlohách žáci 2. ročníku, což odpovídá očekávání. Žáci 2. ročníku se v té době ve výuce aritmetiky zabývali především dvoucifernými čísly a na vyšší řády, tedy potenciální prostor pro rozvoj porozumění pozičního zápisu, se hromadně nezaměřovali. Pozoruhodné je srovnání ročníků v případě 2. až 4. úlohy. V případě 2. a 3. testové úlohy je možným vysvětlením výsledků přístup učitele ve výuce matematiky. Při výuce ve 3. ročníku poměrně často volím úlohy objevitelské a úlohy, při kterých není nabízeno, jakým způsobem mají dojít k výsledku. Od žáků očekávám, že si způsob řešení najdou, metoda pokus-omyl je vítána, a poté různé strategie diskutujeme. Ve 4. ročníku je výuka o něco podobnější klasickému přístupu, tzn. žákům se častěji nabízí vzorové řešení. V 5. ročníku se také snažím vnášet nestandardní úlohy, ale rozhodně ne s takovou četností (a popularitou u žáků) jako ve 3. ročníku. Žáci 5. ročníku jsou navíc v matematice značně oslabení omezenou výukou v předchozích dvou letech. Je důležité zmínit, že diskutovaný test žáci 3. ročníku psali před zavedením učiva čísel nad 100. V případě 4. testové úlohy se jednalo o pozměněnou formu klasického rozvinutého zápisu. Není překvapivé, že v této úloze byli úspěšní zejména žáci 4. ročníku s dobrým matematickým zázemím v podobě stálého učitele matematiky a zároveň se zkušenostmi s klasickými učebnicovými úlohami.

5.4.1.1. Řešení 1. úlohy



Obrázek 76: ukázka, 1. úloha

2. ročník

Tato úloha je v původním konceptu míněná jako rozehřívací, motivační. Pro 2. ročník je však už tato úloha náročnější, jelikož překračuje číselný obor, ve kterém jsou zvyklí pracovat. Úloha je však stále standardního typu. S pokračováním řad se i takto mladí žáci setkávají. Úspěšnost v této úloze byla ve 2. ročníku oproti vyšším ročníkům výrazně nižší, což bylo očekáváno.

Jak je vidět v diagramu níže, z celkového počtu 12 řešitelů byli 2 v úloze zcela úspěšní, a to i ve vyšších číslech. Dalších 5 řešitelů spadalo do kategorie *z většiny úspěšná řešení*. Tito měli typicky chybu pouze v jednom řádku. Jednotlivé chyby budu rozebírat v rámci podúloh.

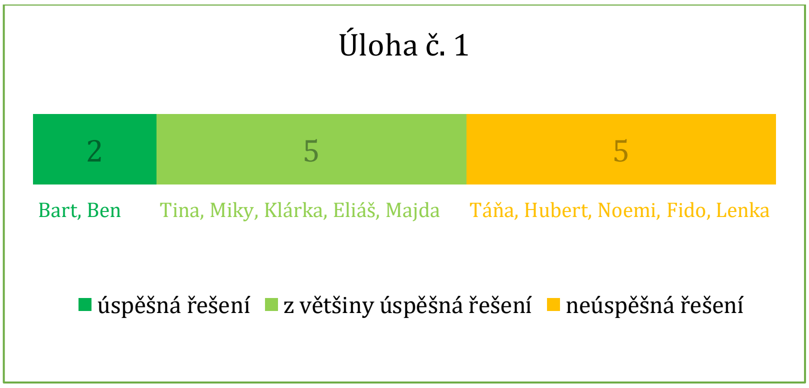
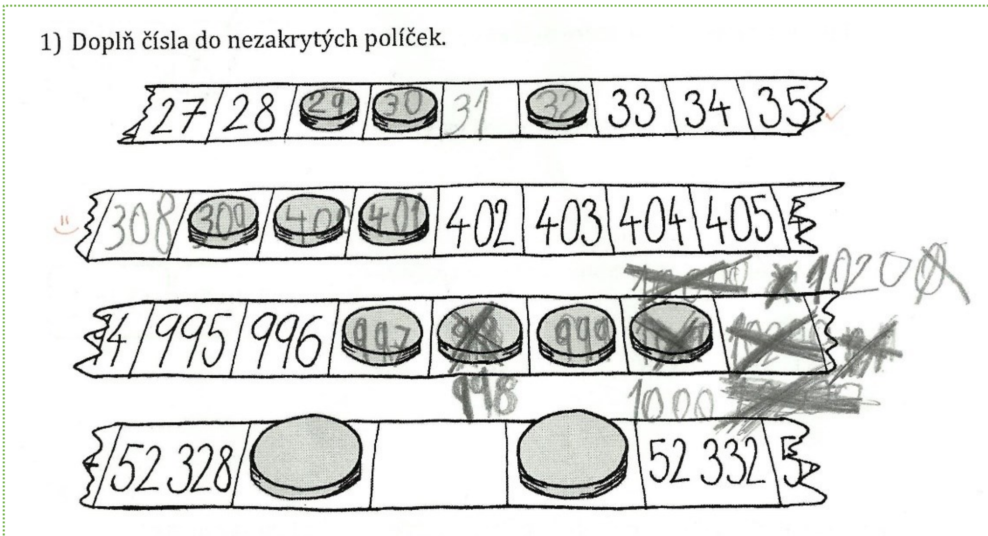


Diagram 9

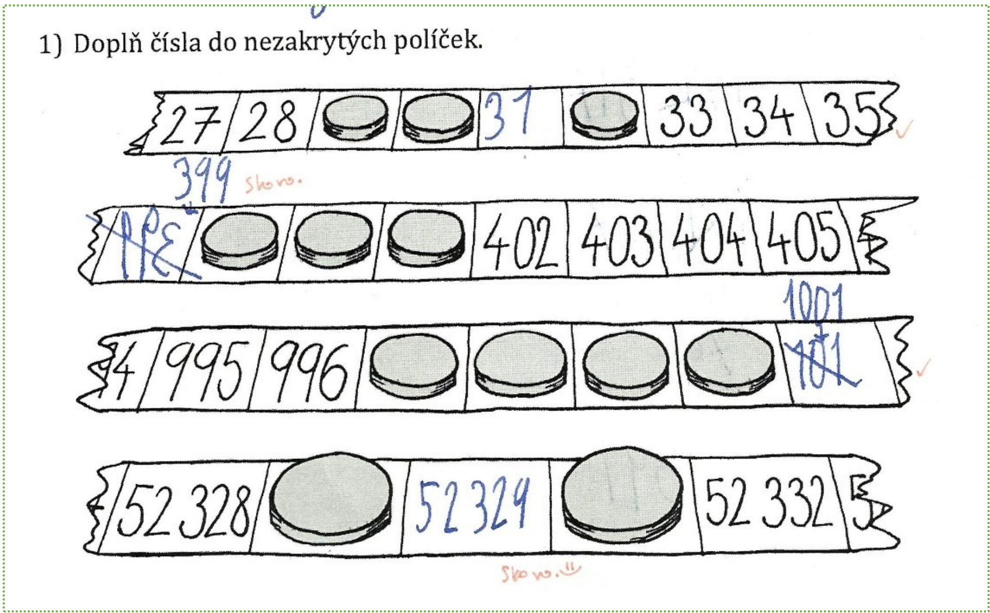
V první podúloze byli úspěšní všichni řešitelé. Dvojcifernými čísly se žáci 2. ročníku ve výuce zabývají a zřejmě jejich řady už dobře ovládají. Pouze 6 žáků zvolilo strategii dopisování zakrytých čísel na žetony, z toho 3 žáci pouze v této 1. podúloze a Tinka pouze ve 3. podúloze. Nutno však dodat, že po opuštění strategie dopisování čísel tito 3 žáci v ostatních podúlohách chybovali. Může to poukazovat na nedostatek kapacity pracovní paměti. Z těchto tří žáků si Fido nadepsal pouze číslo 29, Noemi dopsala pouze čísla předcházející prázdnému políčku (29, 30) a Táňa pouze číslo navazující (32). Předpokládám, že Noemi spoléhala na to, že stačí, když číslo bude navazovat v řadě. Táňa dopočítala číslo 31 a zapsáním čísla 32 si ověřila, že řada navazuje i z druhé strany.

Ve druhé podúloze bylo úspěšných 5 řešitelů. Majda doplnila 399, tedy se zřejmě přepočítala o jedno číslo, což považuji za drobnou chybu při správném porozumění, ale také se může jednat o chybnou volbu strategie, tedy odčítání od čísla počtu žetonů. Tři řešitelé dopsali číslo 36, čímž navázali na řadu z předchozí podúlohy. Zřejmě se tak stalo proto, že je prázdné pro doplnění hned první políčko. V pilotáži jsem se s tímto řešením nesetkala. Dva z těchto tří řešitelů své původní řešení škrtli a opravili – zřejmě jej napsali dříve, než věnovali pozornost dalším číslům tohoto řádku. Čtyři řešitelé doplnili číslo 401, tedy bezprostředně navázali na řadu odkrytých čísel přeskakujíce čísla zakrytá žetony. Zajímavé je, že pouze dva z nich chybu zopakovali v následující podúloze dopsáním čísla 997. Dá se z toho usuzovat, že řada sestupná byla pro ně obtížnější než řada vzestupná, a tudíž se dopustili tohoto zjednodušení pouze v druhé podúloze se sestupnou řadou. Konečně Lenka doplnila číslo 308. Díky tomu, že doplnila čísla i na žetony, můžeme pozorovat její myšlenkové zjednodušení trojmístných čísel na čísla dvojmístná vypuštěním nuly. Její řada: „308, 309, 400, 401, 402, …“ tak pravděpodobně byla jí samotnou vnímána jako řada „38, 39, 40, 41, 42, …“ Domnívám se, že toto zjednodušení způsobil význam nuly interpretované jako *nic*, tedy, že by žačka neřešila úlohu obdobně, kdyby byla v úloze čísla? „412, 413, 414 a 415.“ Tato žačka je vnímána jako v matematice slabší. V testu se pustila do řešení pouze 3 z 6 úloh, ale ty řešené nabízejí zajímavý náhled do jejího vnímání čísel.



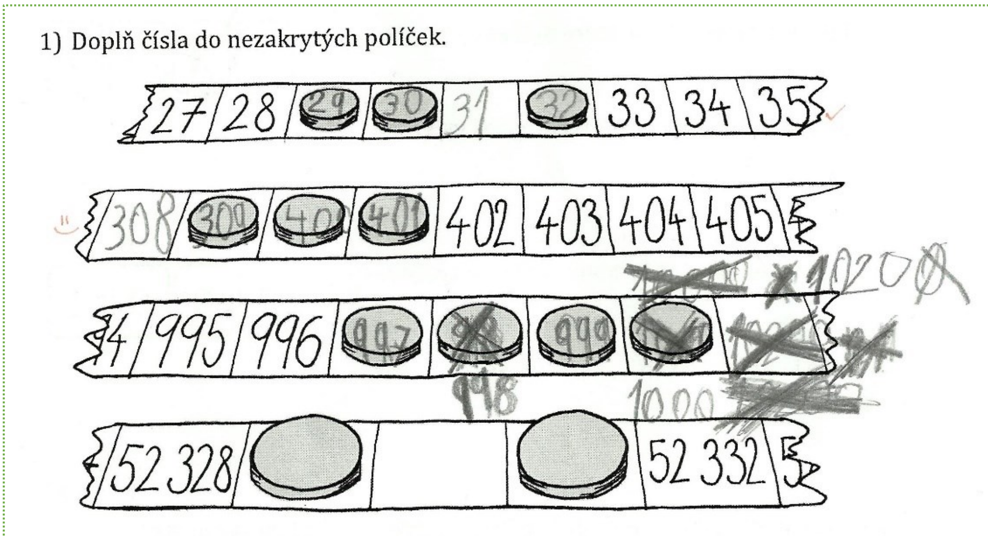
Obrázek 77: řešení Lenky, 1. úloha

Ve třetí podúloze bylo úspěšných 7 řešitelů. Srovnání úspěšnosti ve druhé a třetí podúloze by mohlo napovídat, že přechod do dalšího řádu není pro žáky tak podstatným gradačním parametrem jako je směr růstu čísel v řadě. Klárka doplnila číslo 1 000, což lze brát jako drobnou chybu vzniklou přepočítáním se, ale také to může svědčit o volbě sofistikovanější, bohužel chybné, strategie přičítání počtu žetonů k poslednímu odkrytému číslo. Tinka si jemně nadepsala čísla 997, 998 a 999, aniž by tuto strategii použila dříve. Stejným způsobem měla nadepsané i číslo 1 000 nad prázdným políčkem, které posléze přepsala na 1 001 a to už s jistějším tahem tužky vepsala do volného políčka. Je tedy vidět, že přechod do dalšího řádu už byl pro žačku obtížnější a měla potřebu využít jinou strategii než v podúlohách předchozích. Majda nejdřív napsala číslo 101, které poté škrtla a nadepsala 1001. Usuzuji z toho, že Majda ještě nemá hlubší zkušenost s čtyřmístnými čísly, ale po napsání čísla rozpoznala číslo 101, které zná. Předpokládám, že na základě této své reflexe odhalila, že další číslo *tisíc jedna* musí být čtyřmístné. Její řešení přikládám (obr. 78). Dva řešitelé přeskočili zakrytá čísla a doplnili číslo 997, přičemž oba toto zjednodušení použili i v předchozí podúloze. Miky, jinak v úloze úspěšný žák, vynechal řešení třetí podúlohy, možná proto, že obsahuje přechod do dalšího řádu. Miky si dopisoval čísla i do zakrytých políček, ale ve třetí podúloze se nepokusil ani o to, i když vzhledem k jeho řešením i vyšších čísel předpokládám, že by řadu 997-999 bez obtíží zvládl.



Obrázek 78: řešení Majdy, 1. úloha

Zvláště zajímavé je opět řešení Lenky. Lenka měla evidentně problém zapsat číslo 1 000 a se svými variantami nebyla spokojená. Mezitím do žetonu doplnila i číslo 98, které posléze změnila na správné 998. Číslo 1 000 zapsala správně na třetí pokus a s tímto řešením byla i sama spokojená a ponechala ho. Do prázdného políčka poté zkoušela doplňovat různé varianty pětimístných čísel s jedničkou na začátku, dvojkou někde uvnitř a nulami. Zřejmě také v tomto delším procesu došlo k přeskočení čísla 1 001 a Lenka chtěla zapsat číslo 1 002. Zajímavé však je, že po objevu čtyřmístného čísla 1 000 následujícího po trojmístném čísle 999, Lenka uvažovala, že další číslo bude pětimístné, tedy, že se bude řád opět zvyšovat. Je zde patrné, že Lenka už má jistá předporozumění, např. že více číslic znamená vyšší číslo (což potvrdila svým řešením 5. úlohy), ale není si jistá, jakou roli sehrávají dané pozice v čísle, a tedy ani jak čísla po sobě narůstají. Po různých škrtech se nakonec spokojila se zápisem „1 020~~0~~“. Čtyřmístná čísla jsou pro Lenku pravděpodobně zatím příliš dlouhá, pozičnímu zápisu zatím nerozumí (což odpovídá i jejímu řešení předchozí podúlohy). S jistotou ale Lenka věděla, že číslice 1 musí být v čísle tisíc něco někde na začátku. Číslice 2 se však v Lenčiných pokusech zápisu pohybuje někde mezi nulami a Lenka si není jistá, kam ji má umístit. Její řešení předchozí podúlohy napovídá, že nevnímá nulu v čísle jako důležitou, nula je *nic*. Je zde vidět Lenčina snaha zapsat dvojku na správnou pozici, zároveň si zřejmě neuvědomuje, že jsou pozice pro ni známých řádů zachovány i ve vyšších číslech, tedy na konci čísla. Velmi důležitým momentem je škrtnutí poslední nuly v čísle 10200. Lenka si totiž po předchozích pětimístných pokusech zřejmě uvědomila, že číslo hned po 1 000 přeci jen nebude pětimístné a zkrátila jej na čtyřmístné. Toto byl důležitý objev, se kterým se už spokojila a svoje řešení ponechala v tomto tvaru. Po tomto výkonu ve 3. podúloze už Lenka poslední podúlohu, s ještě vyššími čísly, vynechala.



Obrázek 79: řešení Lenky, 1. úloha

V poslední podúloze 1. úlohy bylo úspěšných 5 řešitelů. Další 4 řešitelé doplnili číslo 52 329, tedy přímo navazující na předchozí nezakryté číslo. Majda se tohoto zjednodušení dopustila poprvé, další dva žáci toto zjednodušení použili i ve druhé podúloze a Noemi ve druhé i třetí podúloze. Usuzuji z toho, že pětimístné číslo obtížnost samotné řady řešitele kognitivně zahltila natolik, že uvážení zakrytých políček už vypustili – ať už byl gradačním parametrem směr postupu čísel nebo počet číslic v čísle. Tinka, v ostatních podúlohách úspěšná, zde doplnila číslo 52 400. Mohu se pouze domnívat, že si nevědomky zjednodušila čísla na trojmístná podle prvních tří číslic, tedy vnímala jen začátek čísla po tolik, jak velkému číselnému oboru ještě bezpečně rozuměla. Fido v předchozích úlohách doplňoval řadu zanedbávaje zakrytá políčka a zde doplnil číslo 52 318. Tato podúloha byla vypuštěna pouze jednou, a to již zmiňovanou Lenkou.

Grafické znázornění úspěšnosti v jednotlivých podúlohách přikládám formou následujícího diagramu.

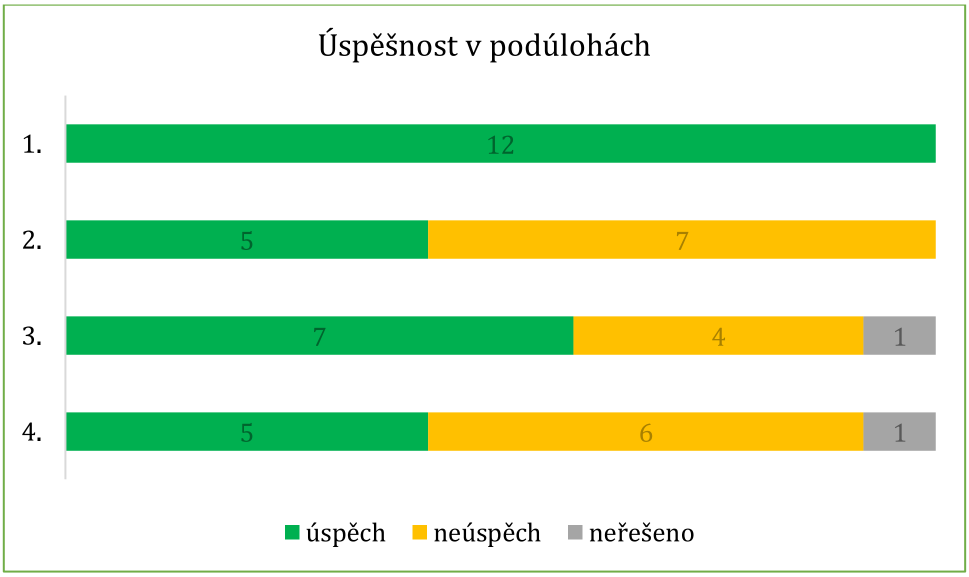


Diagram 10

Jako zajímavost dodávám, že někteří řešitelé odpozorovali i mezeru v zápisu pěticiferného čísla, tedy mezi číslicemi 2. a 3. řádu. Tuto mezeru ve svém zápise s jistotou pozorování dodrželi 4 řešitelé. Dále Bart využil americký způsob zápisu s oddělením čárkou, na základě čehož předpokládám, že už nějakou zkušenost s vysokými čísly má – pravděpodobně z kalkulačky v telefonu, neboť ty typicky čísla zapisují tímto způsobem.

Bart byl celkově v testu velmi úspěšný a kladu si za úkol dále pozorovat, zda se o velká čísla zajímá i sám ve svém volném čase.

3. ročník

Ve třetím ročníku měla úloha vysokou úspěšnost, a byla tak vskutku motivační, rozehřívací. Jak ilustruje diagram níže, 4 z 10 řešitelů bylo zcela úspěšných, dalších 5 mělo chybu v jedné podúloze nebo ve dvou, ale menší. Břéťa, klasifikovaný v úloze jako neúspěšný, byl úspěšný v pouze v prvních dvou podúlohách.

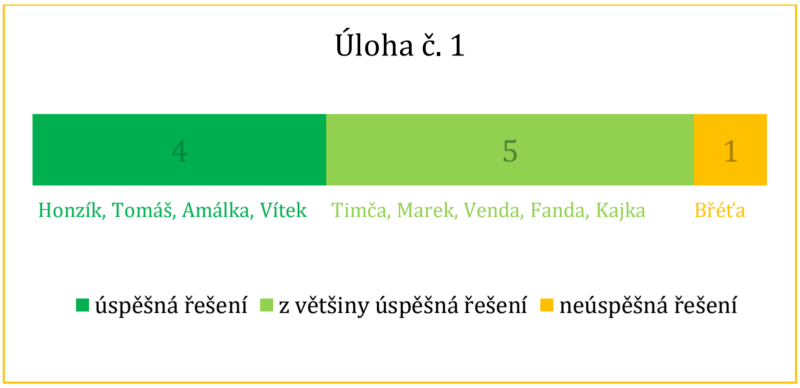


Diagram 11

V první podúloze byli opět úspěšní všichni řešitelé.

Ve druhé podúloze Fanda a Venda dopsali číslo 399. Je možné, že se jen přepočítali o jedno. Další možností je, že využili chybnou strategii a od čísla 402 odečetli číslo 3, tedy počet žetonů před číslem 402. Stejnou chybnou strategii však nepoužili v následující podúloze, proto se spíše přikláním k první možnosti. Mohli také začít odpočítávat po žetonech počínaje chybně číslem 402. Timča a Marek tuto úlohu neřešili. Druhá podúloha byla nejméně úspěšně řešenou podúlohou, a i ve srovnání s poslední podúlohou s pětimístnými čísly. Na takto malé výzkumné skupině se nedá vyvozovat závěr, přesto by mohl trend stejně jako u řešitelů z 2. ročníku napovídat, že je pro řešitele významnějším gradačním parametrem směr navyšování číselné řady než velikost oboru čísel.

Ve třetí podúloze byl neúspěšný pouze Marek, který doplnil číslo 1 000. Opět může být vysvětlení nejméně dvojí. Marek se mohl jednoduše přepočítat o jedno, ať už počínaje odpočítávat žetony od 996, nebo konče na posledním žetonu číslem 1 000, které pak dopsal do okénka. Mohl také využít chybnou strategii a přičíst tak k poslednímu číslu počet žetonů za ním, tedy 996 + 4 = 1 000. Jelikož Marek vynechal předchozí podúlohu, nelze pozorovat, zda by tuto strategii využil i tam. Zmínila bych zde i Kajku, která si mě během řešení úlohy zavolala s prosbou o pomoc. Kajka říkala, že ví, že tam bude číslo *tisíc jedna*, ale neví, jak ho zapsat. Odkázala jsem ji na její vlastní úsudek a Kajka bez delšího přemýšlení správně odvodila zápis tohoto čísla.

V poslední podúloze Kajka a Venda dopsali číslo 52 329. Domnívám se, že to poukazuje na obtížnost práce ve vyšším oboru, kdy už tito řešitelé byli natolik zahlcení velikostí čísla, že vypustili další vjemy jako čísla pod žetony. Přesně tato chyba byla poměrně častá i ve 2. ročníku. Břéťa zde doplnil číslo 340. To, že Břéťa předchozí podúlohu vypustil, by mohlo napovídat, že si nevěří u více než trojmístných čísel. Břéťa také vypustil poslední sloupec podúloh v 5. úloze, ve kterém se vyskytují více než trojciferná čísla. Proti této domněnce jde ale fakt, že Břéťa úspěšně vyřešil celou 4. a 6. podúlohu, kde pracoval i s čísly pěticifernými. Je tedy možné, že ho 1. úloha zkrátka nezaujala a bez zamyšlení napsal první aspoň trochu pravděpodobné číslo.

Níže přiložený diagram shrnuje úspěšnost žáků 3. ročníku v 1. úloze.

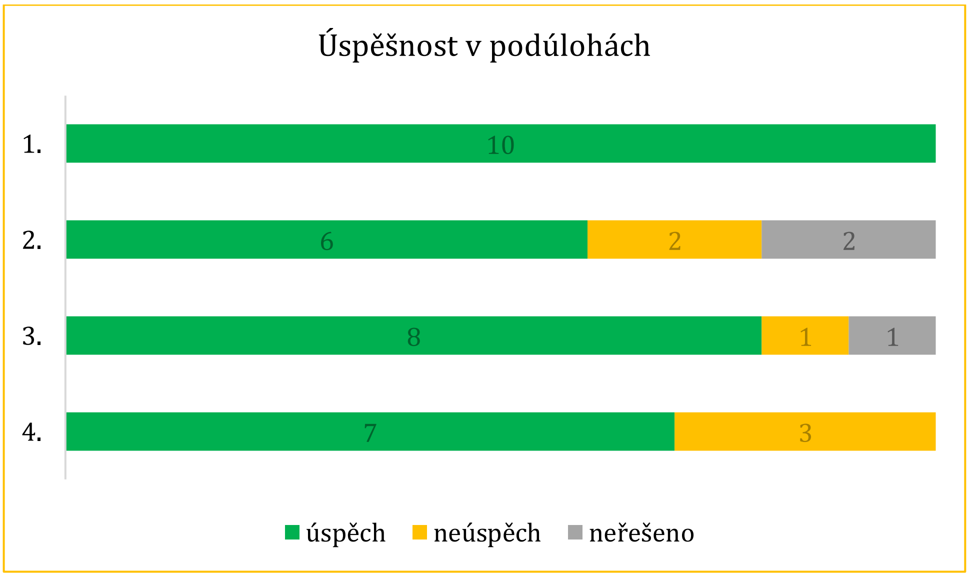


Diagram 12

U posledního čísla 4 řešitelé dodrželi mezeru mezi třídou tisíců a třídou jednotek. Nabízí se k dalšímu zkoumání, zda tuto mezeru žáci používají jen na základě pozorování čísel v úloze, nebo zda je nutná předchozí zkušenost s tímto zápisem čísel. Nezdá se mi pravděpodobné, že by mezera důsledně v tomto místě vznikla u žáků náhodně. Amálka ji navíc dodržela i v čísle 1 001, kde je to buďto vskutku náhodné, nebo měla žačka se čtyřcifernými čísly už dřívější zkušenost.

Ve 3. ročníku si žádný z řešitelů nedopisoval čísla zakrytá žetony.

4. ročník

Žáci 4. ročníku byli v této úloze velmi úspěšní, což odpovídalo očekáváním. Úloha je spíše rozehřívací. Přesto se zde zaměřím na těch několik málo chyb, které žáci udělali. Z celkového počtu 12 řešitelů bylo 9 zcela úspěšných, zbylí 3 chybovali v jedné, nejvýše ve dvou podúlohách.

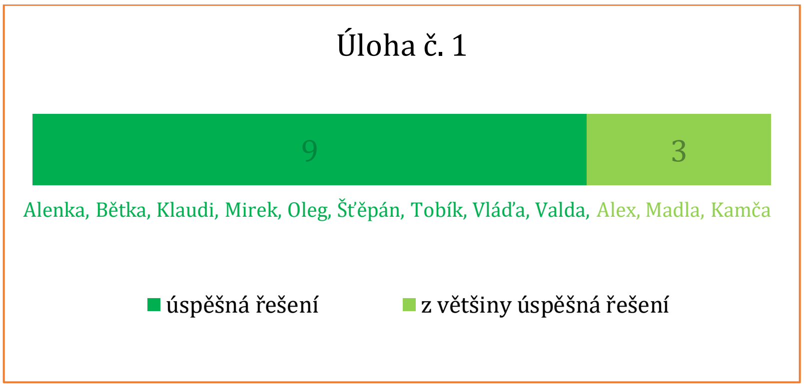


Diagram 13

Alex a Madla ve třetí podúloze dopsali číslo 1 000 namísto 1 001. Opět je možné, že se tito řešitelé přepočítali, např. pokud začali na žetonu číslem 996, nebo mohli využít chybnou strategii sečtením posledního nezakrytého čísla 996 a 4 jakožto počtu žetonů. Oba však vyřešili ostatní podúlohy správně.

Kamča, žačka s LMR, ve druhé podúloze doplnila číslo 308, tedy stejně jako Lenka ze 2. ročníku. Nabízí se, že mohla nulu vnímat jako *nic*, tudíž jako nepodstatnou a řešila tak pouze dvojciferná čísla 38, 39, 40, 41, 42 atd. Napadá mě, že tomu mohlo přispět i to, že první řádek končí číslem 35, tedy velmi blízkým číslu 38. Dále Kamča ve 3. podúloze doplnila číslo 100. Poukazuje to nejen na možnou chybnou strategii se sčítáním nebo dopočítáváním, ale i na problém s přechodem do dalšího řádu. Váhala jsem, zda řešení Kamči zařadit mezi *z většiny úspěšná* nebo *neúspěšná*. Vzhledem k tomu, že poslední podúlohu má řešenou zcela správně, bylo Kamčino řešení zařazeno jako z většiny úspěšné. V poslední podúloze je viditelná pouze oprava číslice z 2 na 3 v řídu desítek. Je pozoruhodné, že tato žačka měla problém z předchozími dvěma podúlohami, ale tu s pěticiferným číslem vyřešila správně. Zdá se mi pravděpodobné, že Kamča vnímá posloupnost jednotlivých číslic spíše než celých čísel. Napovídal by tomu i rytmus trojčíslí 308 až 405 v druhé podúloze, který při odhlédnutí od kvantity čísla má vnitřní logiku. V poslední podúloze se mění pouze poslední dvojčíslí a s dvoumístnými čísly, usuzuji i podle první podúlohy, Kamča problém nemá.

Opět přikládám přehledový diagram.

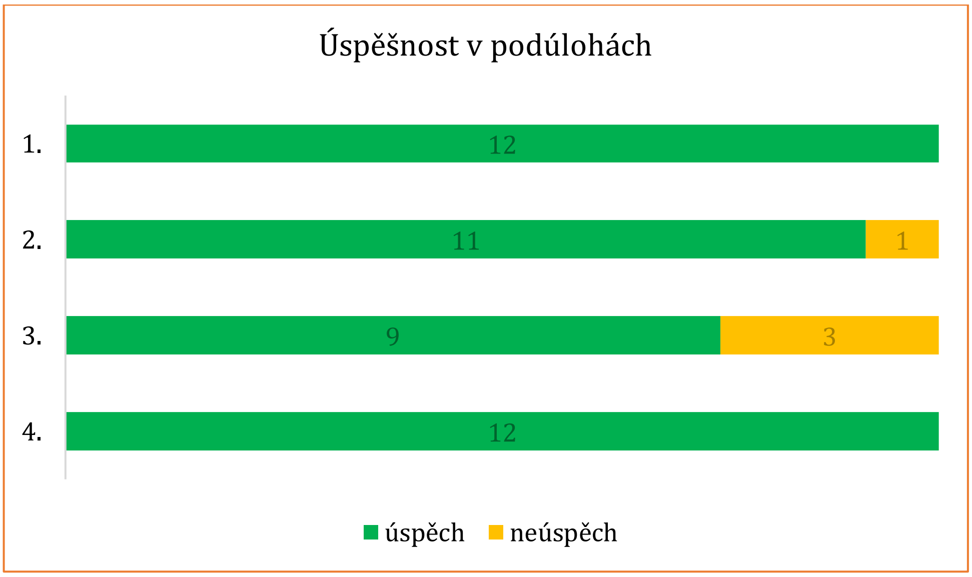


Diagram 14

Pouze 3 řešitelé dodrželi mezeru mezi třídou tisíců a třídou jednotek, ale pouze v čísle 52 330. Jednou z nich byla i Kamča. V tomto ročníku se žáci se zápisem takto velkých čísel už setkávají, ale zřejmě této mezeře nepřikládají důležitost, a to i přes to, že na to pan učitel matematiky dbá, dle jeho slov.

Ve 4. ročníku žádný z řešitelů nedoplňoval čísla zakrytá žetony.

5. ročník

V pátém ročníku byla v této motivační úloze dle předpokladu úspěšnost vysoká. Z celkového počtu 13 řešitelů bylo 8 zcela úspěšných a 5 z většiny úspěšných, u nichž se vyskytla chyba vždy jen v jedné podúloze, pouze u Oty ve dvou.

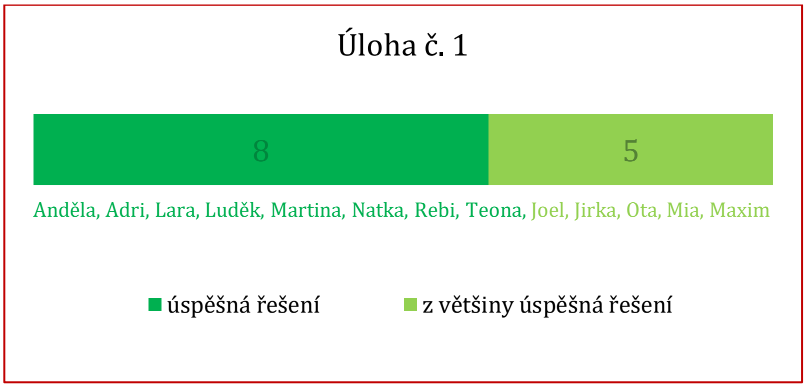
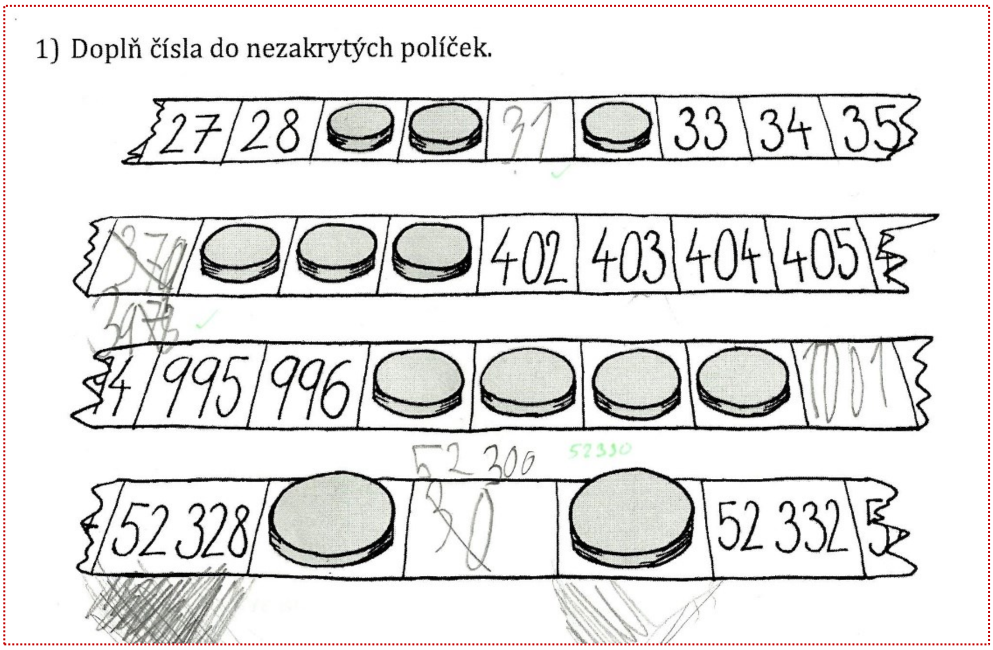


Diagram 15

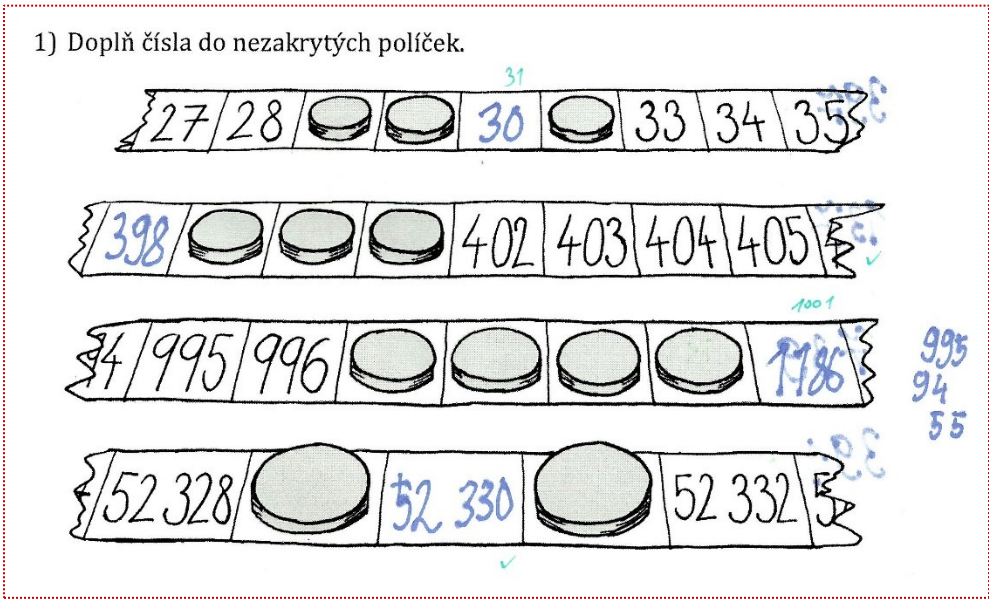
Ota udělal chybu hned v první úloze, kam dopsal číslo 30. Je možné, že začal odpočítávat číslem 28 už na žetonu. Ať už chyba vznikla jakkoliv, je pravděpodobně, že si Ota své řešení nikterak neověřoval. Předpokládám, že by při druhém pohledu na své řešení rychle chybu odhalil i opravil.

Joel v druhé podúloze dopsal číslo 397. S touto chybou se setkávám poprvé. Typickou chybou zde bylo číslo 399, tedy také *o jedno*, ale opačným směrem. Zatímco při chybě 399 lze předpokládat chybnou strategii, zde si Joelovo řešení neumím vysvětlit jinak než opomenutím čísla v posloupnosti čísel. Mia v téže podúloze nejdřív napsala číslo 379, které posléze přepsala na 397, pak na 398 (obr. 80). Mia má poruchu pozornosti a další specifika, zejména v oblasti pracovní paměti. Mia i v hodinách často řekne nahlas číslo a zapíše jiné, což se pravděpodobně stalo i tady. Je pro mě překvapivé a povzbudivé, že si Mia své chyby v zápisu všimla a opravila ji. Na základě toho předpokládám, že byla velmi motivovaná didaktický test napsat co nejlépe.



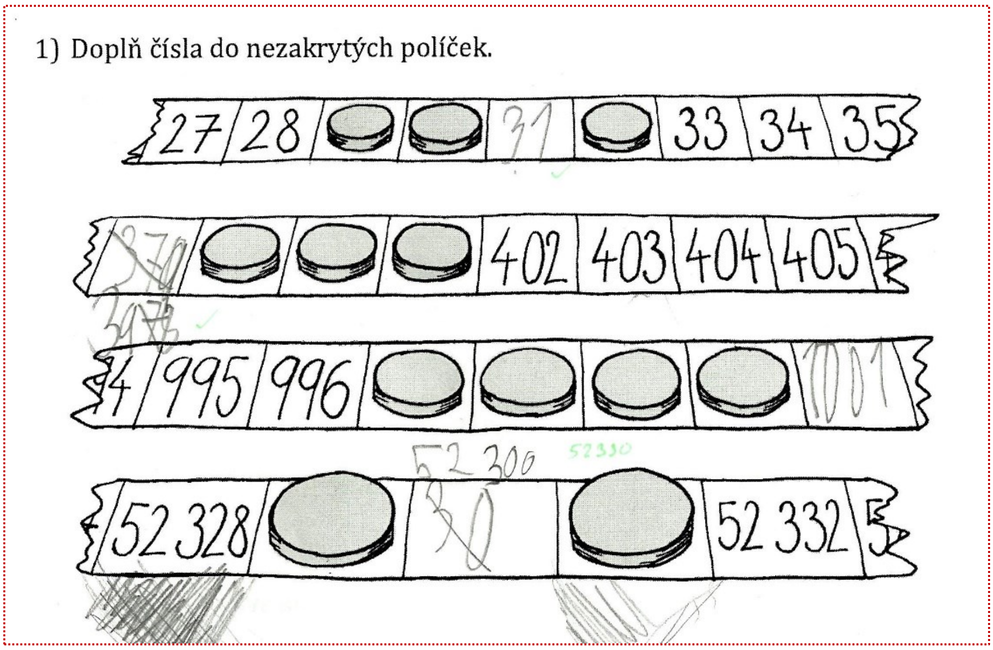
Obrázek 80: řešení Mii, 1. úloha

Ve třetí podúloze Jirka doplnil číslo 991. Jako možné vysvětlení se mi jeví, že Jirka od čísla 996 v hlavě dopočítával pouze konec čísla, tedy: „sedm, osm, devět, deset jedenáct," tudíž věděl, že na místě jednotek bude 1, ale neuvědomil si, že číslo již přesáhlo do řádů tisíců. Ota doplnil číslo 1 186, vedle kterého je navíc patrný výpočet 995 – 94 = 55 (obr. 81). Ota si zde zjevně jinak interpretoval zadání a je zvláštní, že pouze v této podúloze, a ne i v ostatních. Zcela nepochybně jej zde zmátl útržek čísla 994, ze kterého je vidět pouze dvojčíslí 94. Z toho měl pravděpodobně záměr vypočítat rozdíl mezi čísly 94 a následujícím 995, aby zjistil, o kolik se budou další čísla zvyšovat. Mimo to je ale vidět i chybný výpočet, jelikož při hledání rozdílu neseřadil jednotky pod jednotky a desítky pod desítky. Dalo by se z toho usuzovat, že Ota dostatečně nerozumí hodnotám jednotlivých řádů a při matematických operacích používá naučené algoritmy bez jejich porozumění, z čehož pak vznikají tyto chyby. Na základě jednoho testu se však nedá vyvozovat takovéto závěry. V hodinách se Ota podobných chyb nedopouští. Nicméně je možné, že faktory jako stres z testování či náročnost úlohy v jeho interpretaci a s tím spojené zahlcení pracovní paměti poodhalily, že Ota princip řádů v čísle nemá dostatečně ukotvený.



Obrázek 81: řešení Oty, 1. úloha

V poslední podúloze napsala číslo chybně pouze Mia, ačkoliv předpokládám, že její úvahy byly správné. Mia nejdřív doplnila číslo 30. Pravděpodobně si odpočítávala pouze poslední dvojčíslí, což považuji za kognitivně úspornou a efektivní strategii. Mia si posléze uvědomila, že nenapsala číslo celé, proto své řešení škrtla a dopsala chybějící 52 300. Předpokládám, že to svědčí o správné úvaze, jen nedošlo k propojení posledního dvojčíslí a zbylých zastoupených řádů. Miino řešení z mého pohledu odpovídá jejímu hendikepu v pracovní paměti, ale zároveň poukazuje na správnou úvahu a porozumění i velkým číslům.



Obrázek 82: řešení Mii, 1. úloha

Níže přikládám diagram úspěšností v jednotlivých podúlohách.

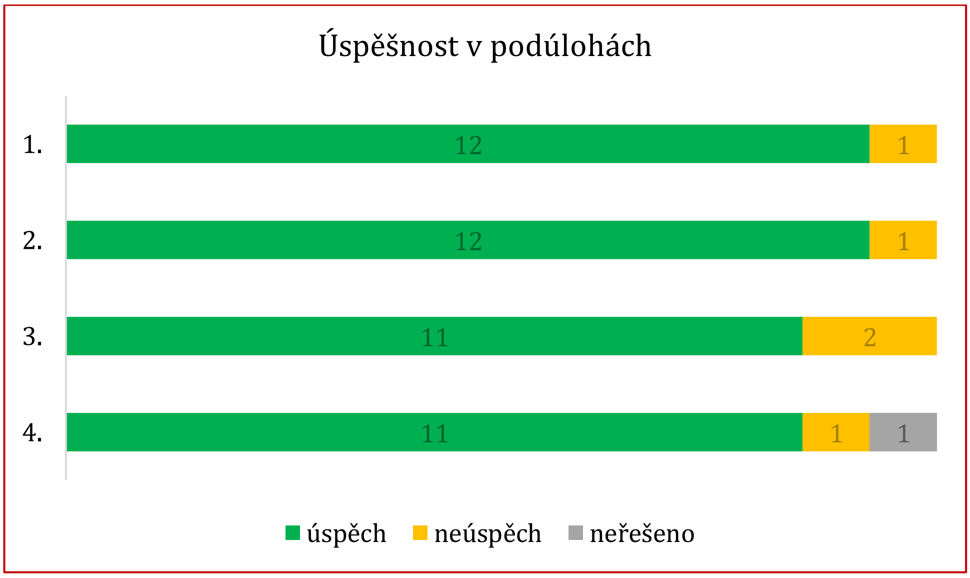


Diagram 16

Shrnutí

Úloha dle mého názoru splnila svůj zejména motivační účel. Většina řešitelů v ní byla úspěšnější než v úlohách nestandardních a nestalo se, že by někdo úlohu neřešil vůbec.

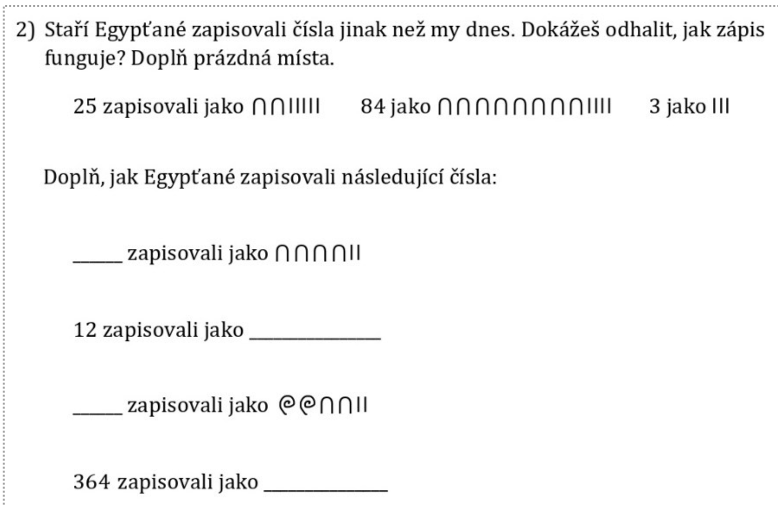
Úspěšnost v úloze se s ročníky zvyšovala, což bylo očekáváno. Výjimkou v tomto trendu je rozdíl úspěšnosti ve 4. a 5. ročníku, kde už jsou výsledky srovnatelné. To ovšem není překvapivé, uvážíme-li, že s pěticifernými čísly se často pracuje už ve 4. ročníku a v 5. ročníku se učivo v tomto směru spíše nerozšiřuje.

Mimo očekávání byla nízká úspěšnost 2. podúlohy. Ačkoliv jsem vnímala směr dopočítávání jako gradační parametr, nepředpokládala jsem, že bude obtížností srovnatelný nebo dokonce náročnější než zvyšující se číselný obor. Ten byl ovšem také významným. Napříč ročníky jsem pozorovala, že vyšší obor je pro žáky náročnější a může se to projevit např. zahlcením operační paměti, v důsledku čehož mohou řešitelé opomenout další podmínky, jako třeba přítomnost čísel pod žetony.

Jednou z poměrně častých chyb napříč ročníky bylo doplnění čísla lišícího se od úspěšného řešení *o jedno*. Jako pravděpodobná se mi jeví příčina ve volbě chybné strategie součtu čísel, jako kdyby se jednalo o čísla v roli stavu, nikoliv adresy. Chyba se vyskytla zejména v těch podúlohách, kde vyplněná čísla a políčko pro doplnění odděluje více žetonů, což by odpovídalo potřebě využít rychlejší strategii než dopočítávání po jednom – bohužel v tomto případě chybnou strategii.

Celkově úloha, ačkoliv byla míněná jako motivační, nabídla přínosný vhled do uvažování řešitelů. Zejména pak mezi řešiteli z 2. ročníku, pro které byl číselný obor nestandardní.

5.4.1.2. Řešení 2. úlohy


2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapisovali jako ∩∩IIIII 84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩IIII 3 jako III

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

_____ zapisovali jako ∩∩∩∩II

12 zapisovali jako _____________

_____ zapisovali jako 𓍢𓍢∩∩II

364 zapisovali jako _____________

Obrázek 83: ukázka, 2. úloha

2. ročník

V této úloze, dle očekávání, byla úspěšnost dichotomická. K mému překvapení však 6 řešitelů úlohu vyřešilo zcela úspěšně a Noemi odhalila princip dvojciferných čísel, ale neodhalila zápis stovek. Všechny řešitele, kteří odhalili znak pro stovku, jsem nakonec vybrala pro řešení testu Mimozemská čísla – v tom 3 ze 3 silně doporučených a 3 ze 4 doporučených pro psaní navazujícího didaktického testu. Z celkového počtu 7 úspěšných řešitelů testu, tedy až 6 odhalilo znak pro stovku v této úloze. Dá se tedy tvrdit, že odhalení znaku pro stovku jakožto dalšího řádu silně korelovalo s celkovou úspěšností v testu. Úspěšnost v této úloze samozřejmě měla vliv na úspěšnost celkovou, ale rozhodně nebyla jediným kritériem, proto se mi tento vztah jeví jako zajímavý.

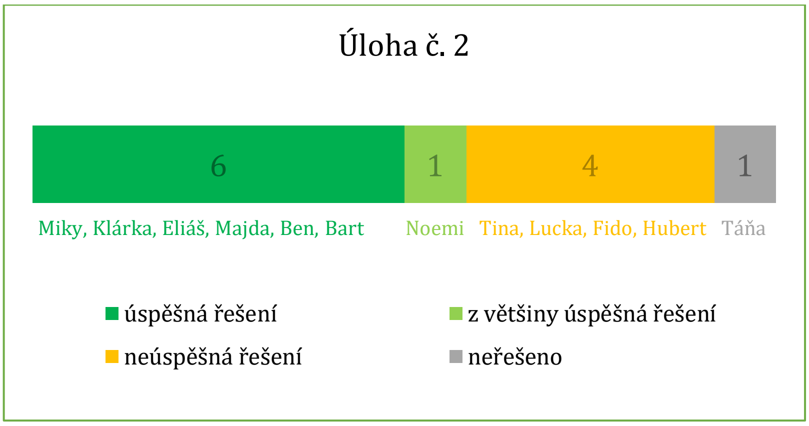
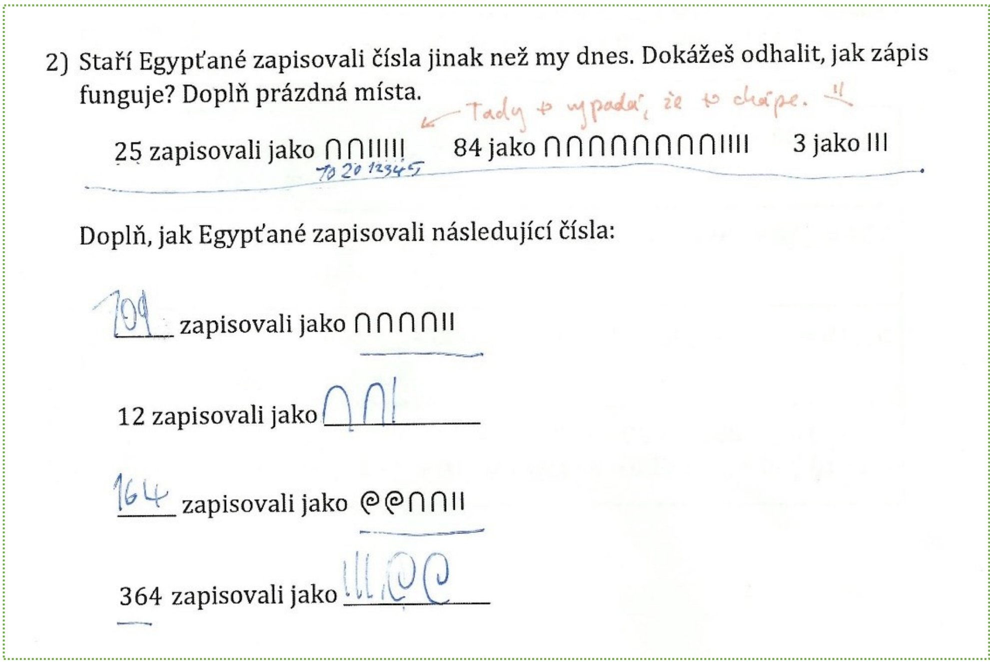


Diagram 17

Výše zmíněná Noemi zapsala číslo ve třetí podúloze jako 1122, tedy desítky i jednotky zapsala správně jako v předchozích podúlohách. Znak pro stovky pravděpodobně vnímala jako obsazení dané pozice (tzv. *place holder*) bez přiřazení konkrétní kvantity. Tímto sloučila poziční a nepoziční zápis čísla.

Hubert si k prvnímu příkladu egyptského zápisu dopsal čísla „10, 20, 1, 2, 3, 4, 5“. Zdá se tedy, že znaky pro desítky a pro jednotky odhalil, přesto tento princip při řešení nevyužil.


2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

Tady to vypadá, že to chápe.

25 zapisovali jako ∩∩IIIII 84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩IIII 3 jako III

10 20 12345

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

109 zapisovali jako ∩∩∩∩II

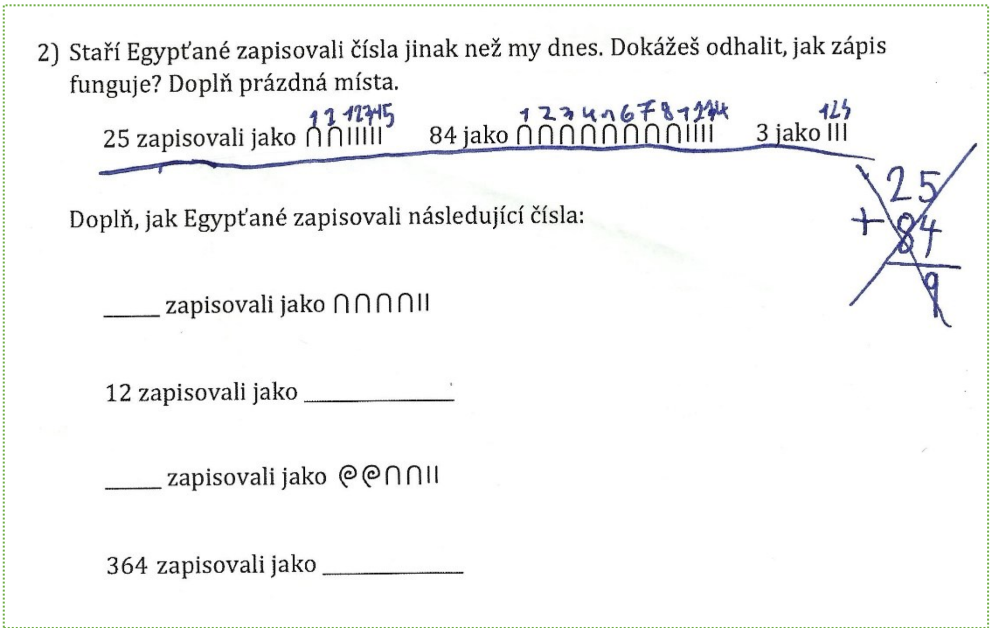
12 zapisovali jako ∩∩I

164 zapisovali jako @@∩∩II

364 zapisovali jako III@@

Obrázek 84: řešení Huberta, 2. úloha

Dva další řešitelé si zcela nezávisle na sobě připsali ke znakům číselné řady pro každý znak. Jeden z nich ještě zkoušel čísla z příkladu sčítat. Oba však jednotlivé podúlohy nechali neřešené. Vzhledem k jejich snaze úlohu nějakým způsobem uchopit jsem však jejich řešení nezařadila do kategorie *neřešeno*. Zajímavé také je, že všichni čtyři posledně zmiňovaní řešitelé měli potřebu si příklad podtrhnout a tímto jej oddělit od samotných podúloh.


2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapisovali jako ∩∩IIIII 84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩IIII 3 jako III

~~25 + 84 = 9~~

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

_____ zapisovali jako ∩∩∩∩II

12 zapisovali jako _____

_____ zapisovali jako @@∩∩II

364 zapisovali jako _____

Obrázek 85: řešení Fida, 2. úloha

Tinka úspěšně vyřešila první podúlohu. Ve druhé znázornila číslo pouze jako počet, a to dvanácti obloučky. Tato žačka si v příkladu dopsala čísla stejným způsobem jako Hubert (obr. 84). Obdobně si čísla dopsal i Eliáš s úspěšným řešením celé úlohy. Zbylí úspěšní řešitelé úlohy nedopisovali k příkladu nic, což podle mého pozorování indikuje jejich schopnost abstrakce během rozboru příkladu.

Úlohu vypustil pouze jeden řešitel testu, ale pro do kategorie *neřešeno vůbec* v diagramu níže jsou zahrnuty i odpovědi těch řešitelů, kteří si dopisovali poznámky k příkladům, ale už neřešili jednotlivé podúlohy.

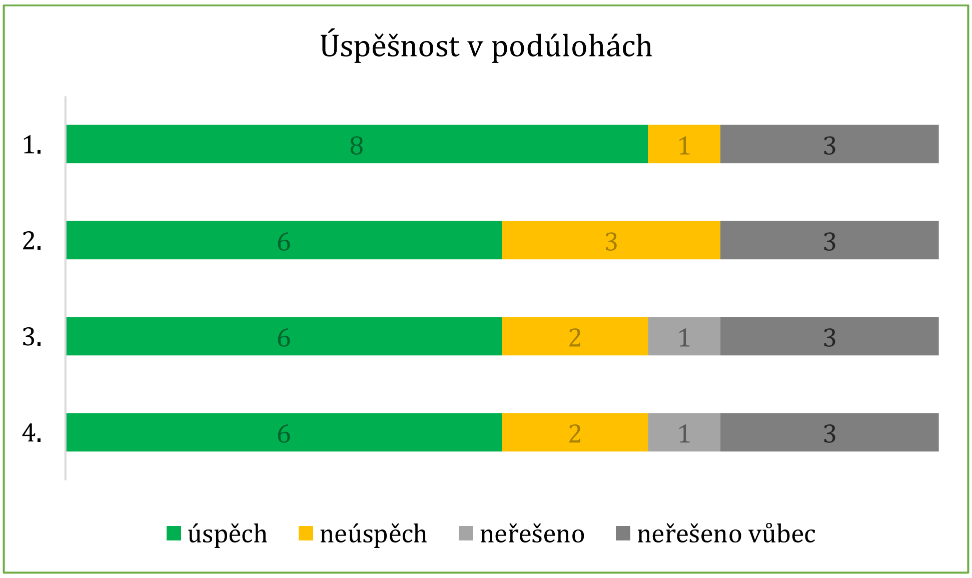


Diagram 18

3. ročník

V této úloze byli žáci 3. ročníku ze všech zkoumaných tříd nejúspěšnější. Při takto malé výzkumné skupině lze jen spekulovat, zda je to výběrem jednotlivců v této třídě, nebo specifickými předchozími zkušenostmi třídy, ať už přístupem učitele, nebo konkrétními úlohami, které byly třídě v tomto ročníku nebo nižších předkládány. Faktem ale je, že v této třídě je poměrně dost logicky a matematicky nadaných žáků. Domnívám se, že to napomáhá udržování heuristické atmosféry v hodinách matematiky a příznivě tak ovlivňuje celou třídu.

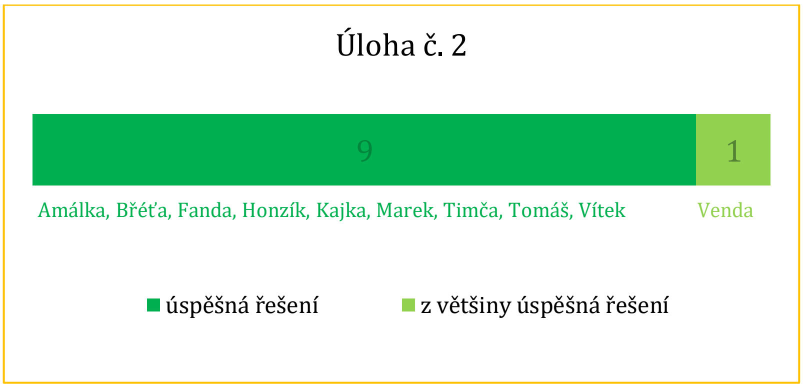


Diagram 19

Pouze Venda nevyřešil úlohu zcela úspěšně, ale i on odhalil princip zápisu jednotek a desítek. Zbylé dva řádky, kde se vyskytují trojciferná čísla, ponechal neřešené.

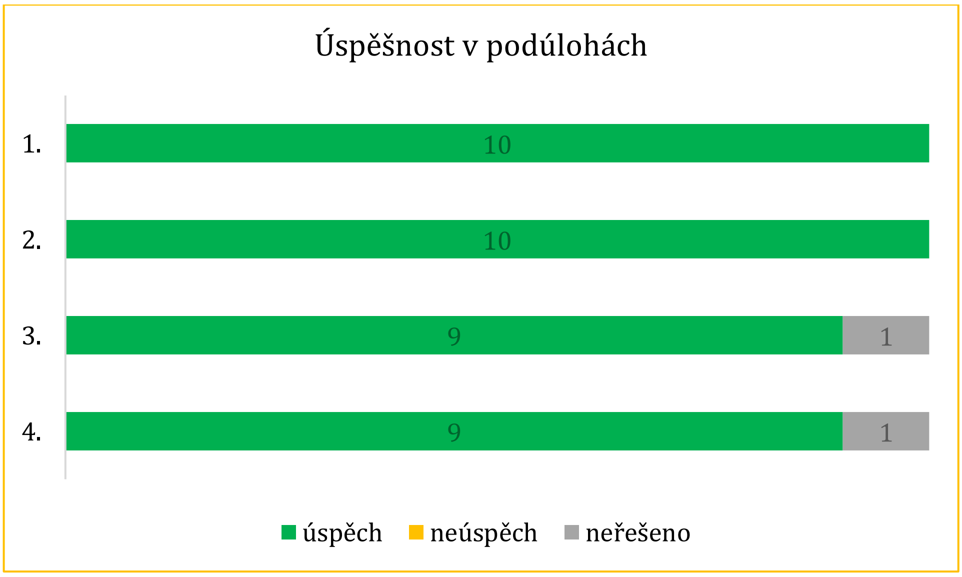


Diagram 20

Z žáků 3. ročníku si nikdo nedopisoval poznámky do příkladu v záhlaví úlohy.

4. ročník

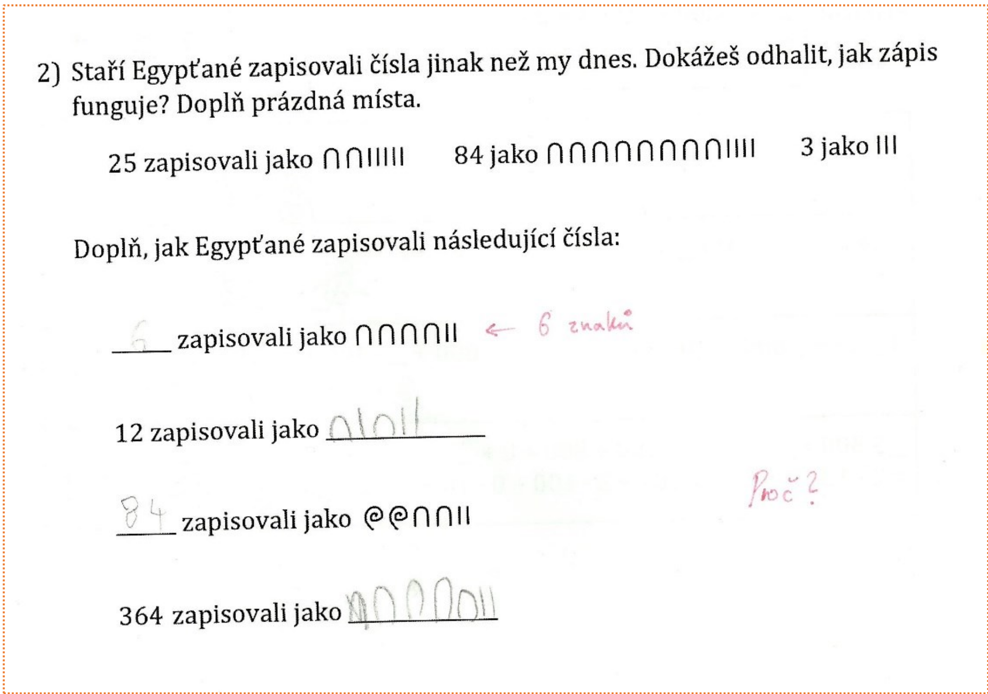
I v této úloze byli žáci 4. ročníku velmi úspěšní. Z celkového počtu 12 řešitelů vyřešilo 10 úlohu zcela správně, Oleg vyřešil první dvě podúlohy a pouze Kamča byla v úloze neúspěšná. Když odhlédneme od řešení Kamči s LMR, je výsledek srovnatelný s úspěšností ve 3. ročníku.

Diagram 21

U dvou ze zcela úspěšných řešitelů této úlohy se vyskytly jednorázové drobné chyby. V obou případech se jednalo o přehlédnutí se o jeden znak. Alenka zapsala číslo z 3. podúlohy jako 221, Valda v poslední podúloze zakreslil 2 namísto 3 znaků pro stovku.

Oleg správně vyřešil první dvě podúlohy, 3. ponechal neřešenou a do 4. doplnil obdivuhodných 36 obloučků a 4 čárky. Číslo 364 tedy z hlediska kvantity zapsal správně, ale je zjevné, že neodhalil význam znaku pro stovku ze 3. podúlohy. Podobně úlohu řešil i Alex, u kterého je vidět původní řešení s mnoha obloučky, které posléze vygumoval a nahradil úspornějším zápisem se znakem pro stovku.

Kamča v první podúloze doplnila číslo 6, pravděpodobně kvůli šesti znakům obsaženým v egyptském zápisu čísla. U zbylých jejích řešení mě nenapadá možná interpretace.


2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapisovali jako ∩∩||||| 84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩|||| 3 jako |||

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

6 zapisovali jako ∩∩∩∩|| ← 6 znaků

12 zapisovali jako ∩|∩||

84 zapisovali jako @@∩∩|| Proč?

364 zapisovali jako

Obrázek 86: řešení Kamči, 2. úloha

Opět přikládám diagram úspěšnosti v jednotlivých podúlohách.

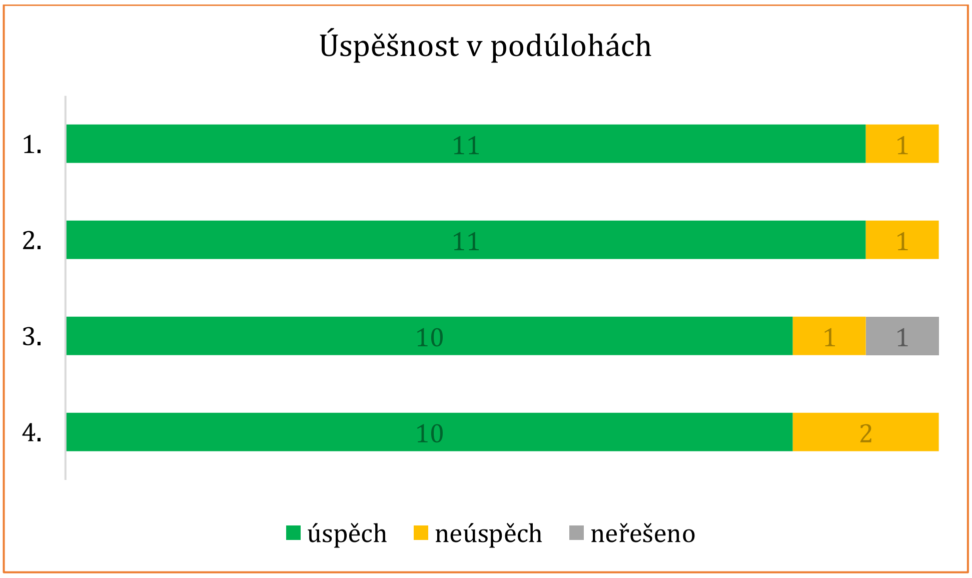


Diagram 22

Pouze Alenka si dopisovala poznámky do příkladu. Veškeré obloučky v příkladu si nadepsala číslem 10 a veškeré čárky číslem 1.

5. ročník

V této úloze byl i 5. ročník vysoce úspěšný. Z celkového počtu 13 řešitelů bylo 10 zcela úspěšných, Ota byl úspěšný v první části a 2 řešitelé úlohu vypustili.

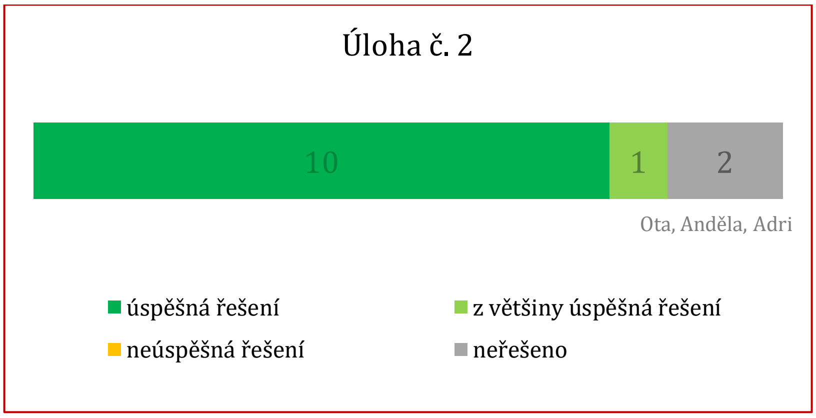
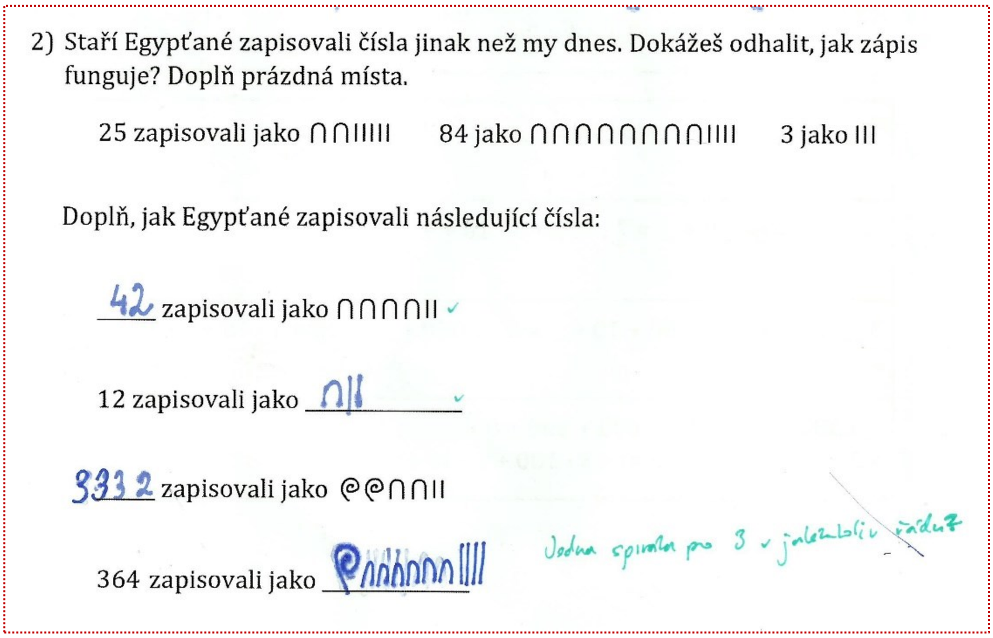


Diagram 23

Dva ze zcela úspěšných řešitelů se dopustili drobné chyby z nepozornosti v jedné z podúloh. Luděk ve 2. podúloze opomenul jednu čárku a Maxim ve 3. podúloze dopsal číslo 212 namísto 222.

Ota odhalil zápis desítek a jednotek a úspěšně vyřešil první dvě podúlohy. Ve 3. podúloze doplnil číslo 3 332, v poslední jeden namísto tří znaků pro stovku. V poslední podúloze je navíc viditelné jeho původní řešení, kdy významově prohodil čárky a obloučky. Z Otova řešení se mi jeví jako nejpravděpodobnější, že vnímal znak pro stovku jako číslici 3. Trojka je to nejspíše proto, že se jedná o třetí známý symbol. Ota tímto sloučil poziční a nepoziční soustavu. Pro toto vysvětlení je ale nutné připustit, že udělal ještě jednu chybu, a to v počtu desítek v 3. podúloze, kde se možná nesprávně spočítal obloučky.



Obrázek 87: řešení Oty, 2. úloha

Opět přikládám diagram úspěšnosti v jednotlivých podúlohách.

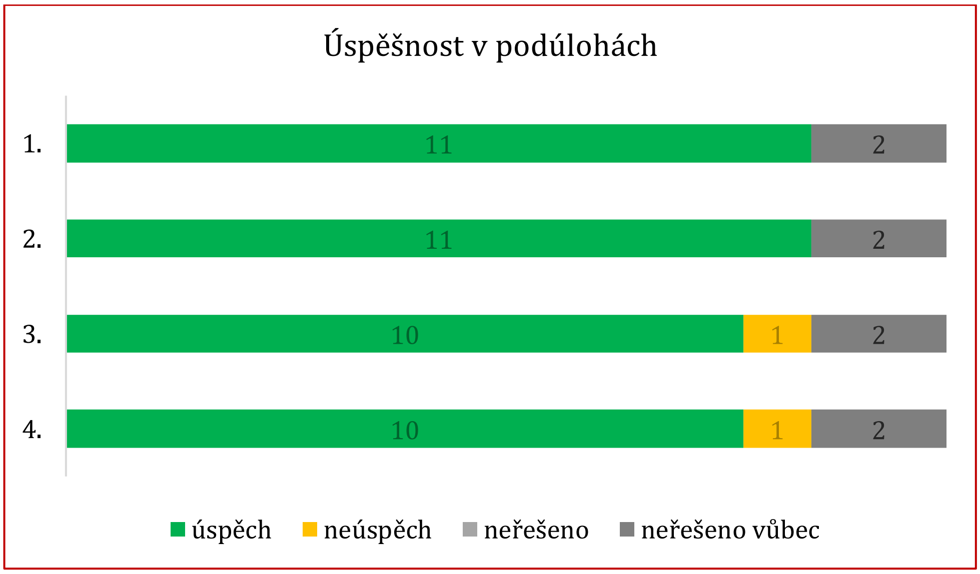


Diagram 24

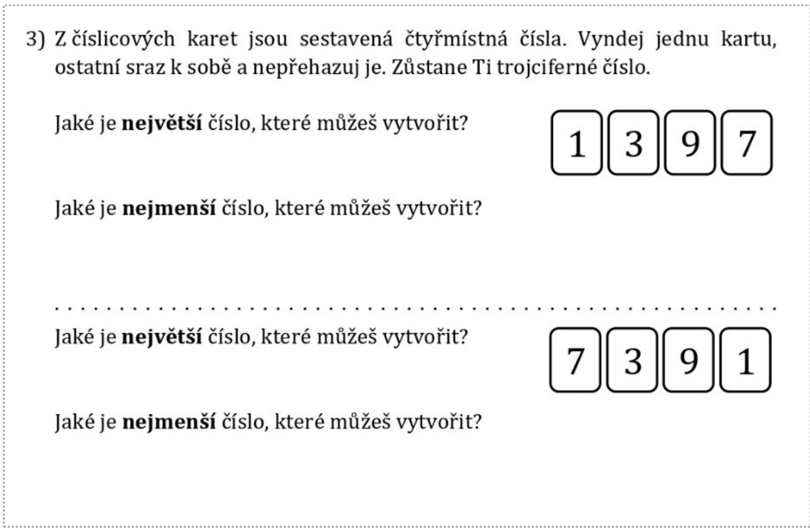
Shrnutí

Úloha měla nad očekávání vysokou úspěšnost, a to ve vztahu k ostatním úlohám i ve 2. ročníku. Překvapilo mě, kolik řešitelů odhalilo i znak pro stovku. Očekávala jsem daleko větší zastoupení řešitelů úspěšných pouze v prvních dvou podúlohách.

Domnívám se, že úspěšnost v úloze svědčí o dobrém povědomí o řádech v desítkové soustavě, kterou používáme. Řešitelé, kteří odhalili znak pro stovku, vnímají *sto* jako přirozené další pokračování řady 1, 10, … a nejspíše i jako efektivní kvantitu pro zápis čísla (vlivem obklopující je desítkové soustavy).

Výsledky žáků ze ZŠ Hvozdík mě překvapily i v relaci k výsledkům řešitelů z pilotáže. Je možné, že původní grafická a sémantická podoba měla na výsledek mnohem širší vliv, než jsem pojmenovala. Také je ale možné, že tento rozdíl způsobil jiný přístup ve výuce na obou školách, např. používání konkrétních pomůcek. Zajímalo by mne a nabízí se k dalšímu zkoumání, zda je pro vnímání řádů v desítkové soustavě jako něčeho uceleného, a tudíž efektivního pro zápis klíčová silná zkušenost s Dienesovými kostkami, které jsou na ZŠ Hvozdík hojně ve výuce využívány.

5.4.1.3. Řešení 3. úlohy


3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

1 3 9 7

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

7 3 9 1

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

Obrázek 88: ukázka, 3. úloha

2. ročník

Třetí úloha byla pro žáky druhého ročníku náročná na porozumění zadání. Velmi často se na ni žáci dotazovali a zadání jsem dovysvětlovala.

Pouze dva řešitelé byli v úloze zcela úspěšní. U dalších 5 řešitelů se vyskytla chyba pouze v jedné z podúloh.

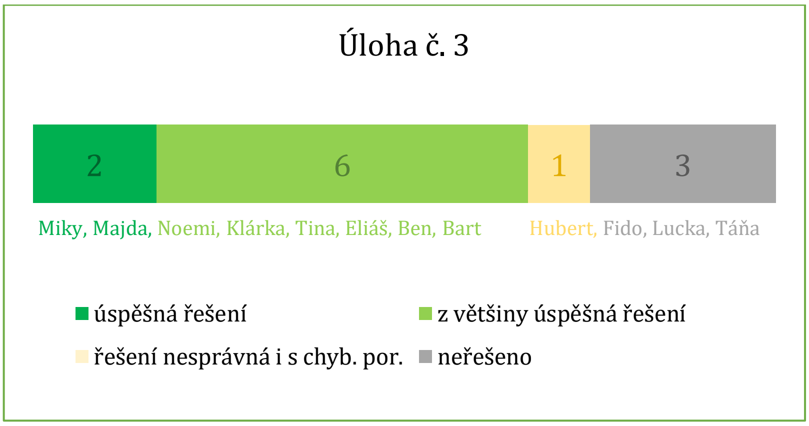


Diagram 25

V kategorii *z většiny úspěšná řešení* tři řešitelé chybovali ve druhé podúloze, kde ve dvou případech zapsali číslo 139, v jednom 197. Volba čísla 139 se poměrně často objevovala i ve vyšších ročnících. Nabízí se úvaha, že když pro nejvyšší číslo odebrali první číslici zprava, pro nejnižší odebrali chybně poslední číslici zleva, což také odpovídá strategii pro získání nejvyššího čísla odebrat řád jednotek, pro nejnižší číslo analogicky řád tisíců. V takovém případě by řešitel vnímal zapsané čtyřmístné číslo jako kvantitativní model a neuvědomil si, že odebráním karty číslice mohou změnit pozici, a tedy i řád, který zastupují. V druhé polovině úlohy však podobnou chybu řešitelé neopakovali. Jeví se mi proto jako pravděpodobnější vysvětlení, že možnost ještě nižšího čísla ve 2. podúloze zkrátka přehlédli a spokojili se s prvním relativně nízkým nalezeným číslem. Další podobná a velmi častá chyba byla ve třetí podúloze, kdy řešitelé uvedli číslo 739. Ve 2. ročníku se jí dopustil pouze Bart. Noemi uvedla číslo 731.

Tinka vyřešila pouze první polovinu úlohy, a to správně. Podle mého úsudku druhou polovinu přehlédla nebo neporozuměla struktuře zadání, ale vyřešit by ji taktéž dokázala. Táňa správně vyřešila pouze první podúlohu, ke druhé dopsala číslo 13 a dál už nepokračovala. Její řešení bylo zařazeno do kategorie *neřešeno*.

Hubert neporozuměl zadání a číslicové karty přehazoval. I s tímto porozuměním zadání však ve třetí podúloze jako největší uvedl číslo 739. Ostatní řešení má s jeho porozuměním správně. Jedná se o žáka s OMJ, tudíž je možné, že zadání neporozuměl i přes moje dovysvětlení během vypracovávání testu. Ačkoliv Hubert už poměrně dobře mluví česky, je možné, že celková nízká úspěšnost tohoto žáka v testu zřejmě souvisí s jeho znevýhodněním.

Dva řešitelé úlohu vypustili. Diagram níže opět rozlišuje, zda řešitelé vypustili pouze některou z podúloh, nebo neřešili úlohu vůbec.

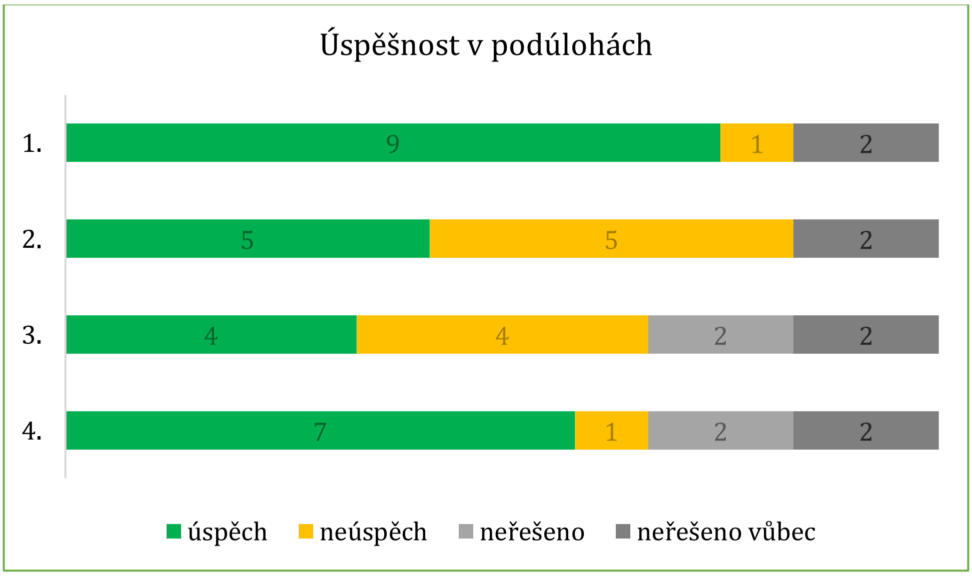


Diagram 26

3. ročník

Ve třetí úloze byla ve 3. ročníku poměrně vysoká míra porozumění zadání, což podle mého názoru mělo vliv i na řešenost úlohy. Nikdo zde nenechal úlohu neřešenou. Míra úspěšnosti řešitelů ale byla jen o něco vyšší než ve 2. ročníku. V úloze byli zcela úspěšní 3 řešitelé, dalších 5 chybovalo jen v jedné podúloze. Břéťa neporozuměl zadání a neúspěšný byl v úloze pouze Marek.

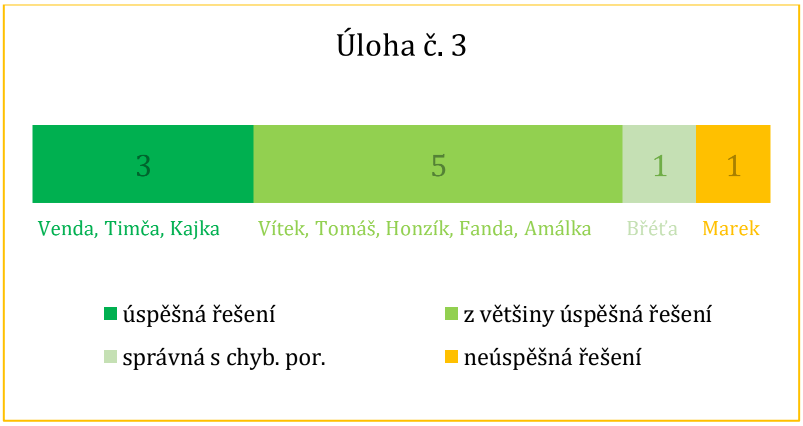
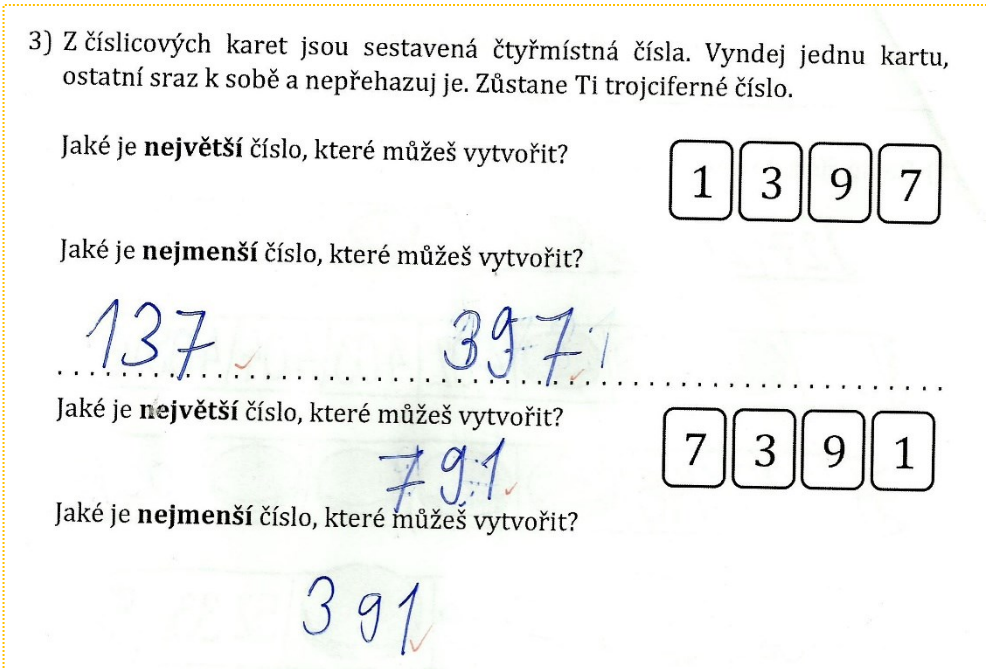


Diagram 27

Je zajímavé, že zcela úspěšní byli v úloze Venda, Timča a Kajka. Všichni tři jsou v hodinách matematiky spíše pomalejší a často vyžadují podporu. Domnívám se, že to může souviset s vyšší opatrností. Při využití metody vyčerpání všech možností zde měli výhodu Ti žáci, kteří si pečlivě porovnali všechny možnosti. Oproti tomu rychlejší žáci s vyšší sebedůvěrou dělali chyby pravděpodobně ze zbrklosti. U 2 ze 3 zcela úspěšných řešitelů této úlohy jsou viditelné opravy. Venda se opravil pouze v první podúloze, kde původně napsal číslo 197. Timčina opravená chyba se týkala porozumění zadání. Ačkoliv Timča gumovala, je pod jejím řešením stále patrné číslo 9731 v 1. podúloze a 97 ve 3. podúloze. Během vypracovávání testu se Timča při psaní druhého čísla pozastavila nad tím, že by měly být odpovědi v obou částech úlohy stejné a zavolala si mě pro moc s tímto problémem. Odkázala jsem ji znovu na zadání úlohy a zdůraznila, že má jednu kartu vyjmout a ostatní nepřehazovat. Timča posléze své odpovědi opravila.


3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

1 3 9 7

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

137 397

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

7 3 9 1

791

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

391

Obrázek 89: řešení Timči, 3. úloha

Z většiny úspěšní řešitelé měli chybou pouze v jedné z podúloh. Dva doplnili ve 2. podúloze číslo 139 a tři ve 3. podúloze číslo 739. Žádná jiná chyba se nevyskytla. Je zajímavé, že ze všech chyb se napříč ročníky objevují nejčastěji právě tyto. Vzhledem k úspěšnému řešení ostatních podúloh tento jev není vysvětlitelný žádnou z očekávaných chybných strategií jako vytažení nejvyšší/nejnižší číslice nebo odebrání řádu tisíců/jednotek. I vzhledem k tomu, že se těchto chyb dopustili jinak velmi úspěšní řešitelé testu a zároveň ti žáci, kteří při řešení matematických problémů v hodinách projevují sebedůvěru, předpokládám, že chyby vznikly na základě intuitivního a neověřeného řešení, kdy se jim číslo 139 zdálo už dostatečně malé, nebo číslo 739 už dostatečně velké. Tato interpretace chyb je konsistentní s faktem, že žáci takto chybovali ve 2. a 3. podúloze a nikoliv v 1. a 4. V 1. podúloze se nabízí intuitivní řešení, že pro největší trojciferné číslo musí být číslice 3 na začátku. S touto podmínkou existuje jen jedno možné číslo, a to je zároveň správným řešením. Ve třetí podúloze stejná úvaha vede k tomu, že první číslice bude 7, zde však existují dvě možná čísla, z nichž pouze jedno je správným řešením podúlohy. Analogicky ve čtvrté podúloze bude intuitivně nejmenší číslo začínat číslicí 3 a opět existuje pouze jedna možnost, a to správná. Ve 2. podúloze intuitivně nejmenší číslo začíná číslicí 1, i zde jsou však takováto čísla možná dvě a pouze jedno je správným řešením podúlohy.

U Vítka, z většiny úspěšného řešitele úlohy, jsou také viditelná vygumovaná čtyřmístná čísla odpovídající pokynu pro přehazování číslic. Vítek se stejně jako Timča zastavil u 3. podúlohy, na rozdíl od Timči takto řešil i 2. podúlohu. Neprosil mě o pomoc jako Timča, ale zřejmě mu stejná řešení připadala stejně jako Timči podezřelá, a sám si tak zadání znovu nebo poprvé přečetl.

Břéťa čísla pouze přehazoval, tvoře tak opět čísla čtyřmístná. U totožného postupu jsem Břéťu přistihla i při vypracovávání výstupního testu po intervencích. Břéťa se přiznal, že zadání vůbec nečetl. Zdá se mi proto téměř jisté, že zadání nečetl ani zde a spoléhal pouze na intuitivní interpretaci zadání.

Marek řešil pouze 2. podúlohu, kam doplnil číslo 139.

Diagram níže znázorňuje úspěšnost řešitelů v jednotlivých podúlohách. Břéťovo řešení s přehazováním číslic je kódováno jako chyb. por., tedy řešení s chybným porozuměním.

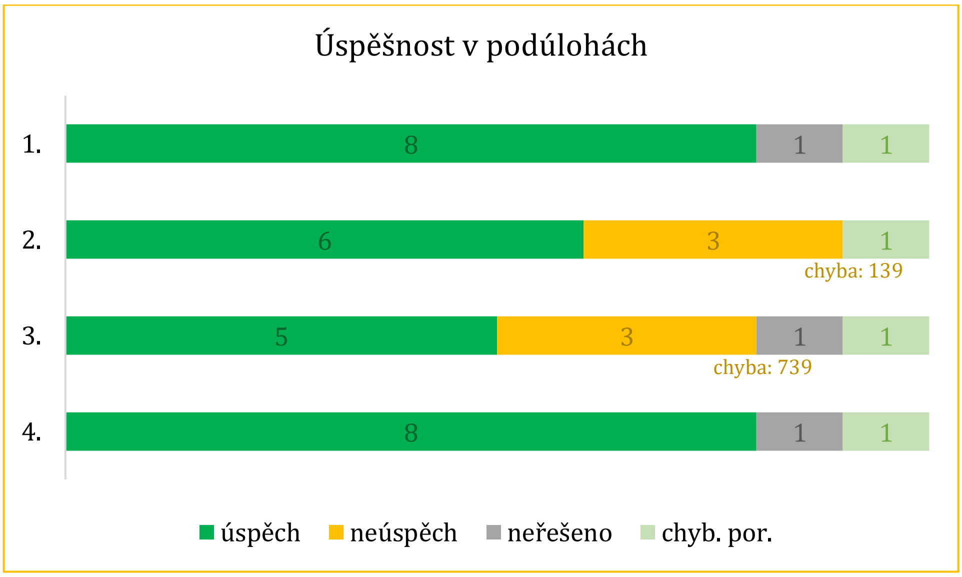


Diagram 28

4. ročník

Úspěšnost v této úloze byla i u žáků 4. ročníku různorodá. Polovina, tedy 6 řešitelů, bylo v úloze zcela úspěšných, další 2 chybovali pouze v jedné u podúloh. Neúspěšní byli v úloze 2 řešitelé a 2 pravděpodobně neporozuměli zadání.

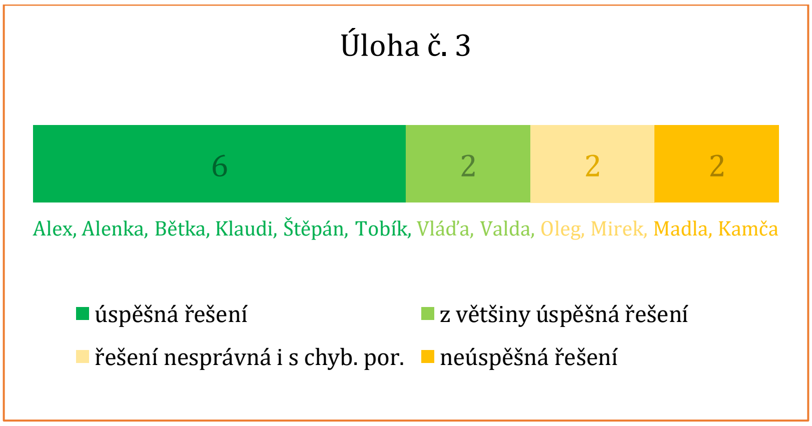


Diagram 29

Oba z většiny úspěšní řešitelé, Valda i Vláďa, udělali chybu ve 3. podúloze, a to odpovědí číslem 739. Stejné chyby se dopustila i Kamča, Madla, Oleg a Mirek. Madla navíc ve 2. podúloze doplnila číslo 139, dopustila se tedy obou chyb, které jsem popisovala u 3. ročníku. OIeg a Mirek řešili pouze 1. a 3. podúlohu. Oleg tím, že začernil příslušnou kartu, Mirek jejím oddělením čarou – zřejmě tedy úplně neporozuměli zadání a hledali vždy pouze největší číslo, první podúlohu mají správně. U chyby s číslem 739 (a 139) se domnívám, že je příčina v intuitivním řešení úlohy bez následného ověření, tak jako jsem popisovala výše. U Mirka, který karty odděloval čarou, je však diskutabilní, zda vnímal jako legitimní možnost vytažení číslice zprostřed čísla. Oddělování čarou by mohlo napovídat, že odebíral pouze karty zkraje. S takovouto interpretací zadání by jeho odpověď 739 byla správná. U Kamči předpokládám jinou příčinu chyby.

Kamča v prvních dvou podúlohách napsala čísla 139 a 137. V druhých dvou podúlohách čísla 739 a 731. Z obou čtyřmístných čísel tedy vyndala nejdřív poslední, poté předposlední číslici. Nevím, zda se Kamča domnívala, že první dvě karty musí zůstat na místě, nebo jí takto řešení dávalo smysl i kvantitativně. Pokud by však z jakéhokoliv důvodu rozuměla úloze tak, že může vyndávat pouze z posledních dvou karet, bylo by její řešení správné.

Diagram znázorňuje úspěšnost v jednotlivých podúlohách.

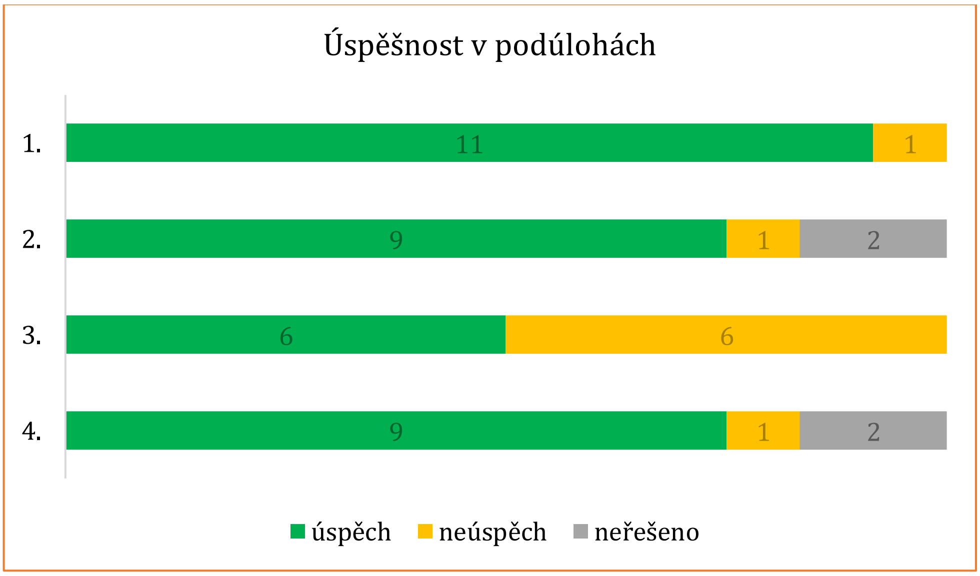


Diagram 30

5. ročník

V této úloze byli řešitelé z 5. ročníku nejúspěšnější. Přesto zde, jako i v ostatních ročnících, byla úspěšnost v poměrně různorodá. Z celku 13 řešitelů bylo 5 zcela úspěšných, 5 chybovalo pouze v jedné podúloze a tři zbylí řešitelé zřejmě plně neporozuměli zadání.

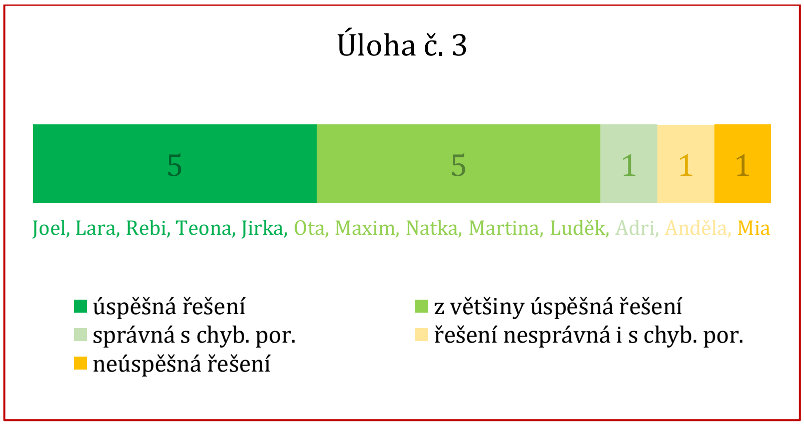
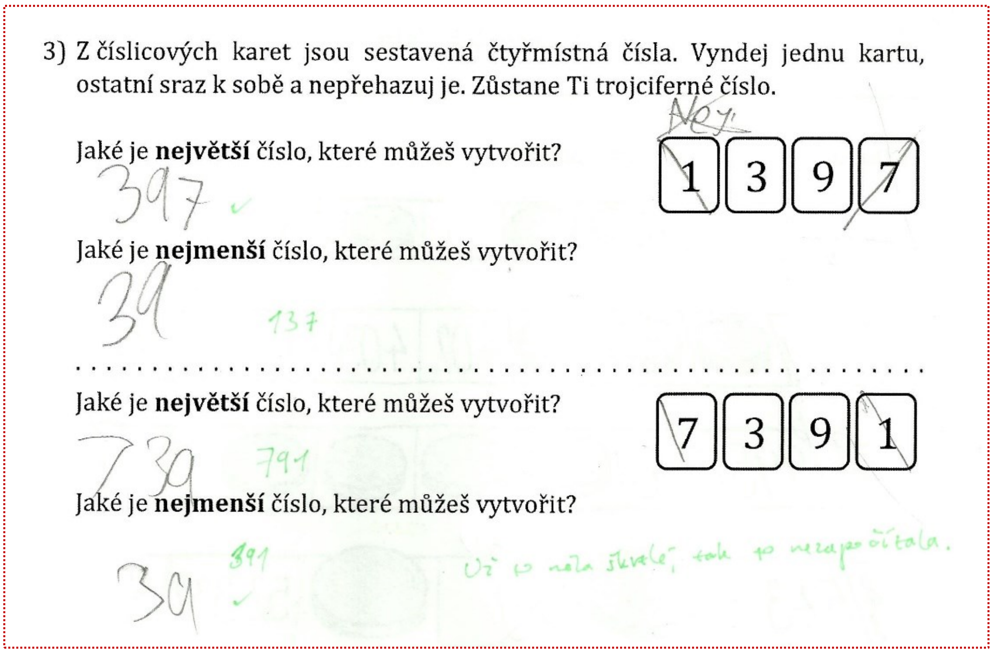


Diagram 31

V rámci z většiny úspěšných řešitelů 4 z 5 chybovali ve 3. podúloze dopsáním čísla 739. I zde se domnívám, že je příčina chyby v intuitivním řešení úlohy bez následného ověření, jako jsem popisovala u 3. ročníku. Pouze Maxim namísto toho chyboval ve 2. podúloze řešením 197 namísto 137. Maximovi zřejmě stačilo, že trojciferné číslo začíná jedničkou a dále si už své řešení neověřoval.

Adri a Anděla vyplnily pouze 2. a 4. podúlohu. Zdá se mi pravděpodobné, že neporozuměly zadání nebo struktuře úlohy. Adri má obě řešené podúlohy správně, byla zahrnuta mezi řešení úspěšná s chybným porozuměním. Anděla v obou případech doplnila číslo 137. Je možné, že kromě řešení v každé části pouze poslední otázky navíc porozuměla zadání tak, že může karty přehazovat. V této interpretaci by její řešení mohlo být považováno za správné. Přesto jsem z důvodu kombinace neporozumění nebo možné neschopnosti úlohu vyřešit její řešení nakonec zařadila mezi neúspěšná s chybným porozuměním.

Řešení Mii jsem zařadila mezi neúspěšná, ačkoliv taky vykazovalo známky neporozumění zadání. Mia v 1. a 3. podúloze vytvořila trojciferné číslo dle zadání, poté ale vyndala kartu z tohoto čísla, tudíž její řešení 2. a 4. podúlohy obsahují čísla dvojciferná. Této chybě zřejmě napomohlo, že si karty průběžně škrtala, tudíž už ji nenapadlo, že je pro hledání nejmenšího čísla musí znovu započítat. Její řešení s touto interpretací zadání by bylo správné, kdyby ve 3. podúloze byla neuvedla číslo 739, čímž se dopustila stejné chyby jako mnoho jejích spolužáků.



Obrázek 90: řešení Mii, 3. úloha

Diagram níže zobrazuje úspěšnost řešitelů v jednotlivých podúlohách.

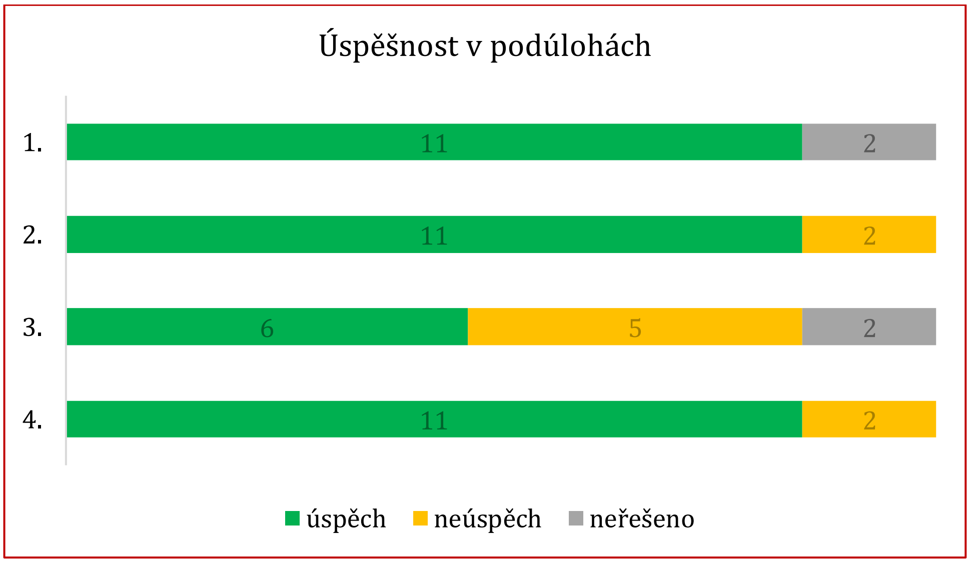


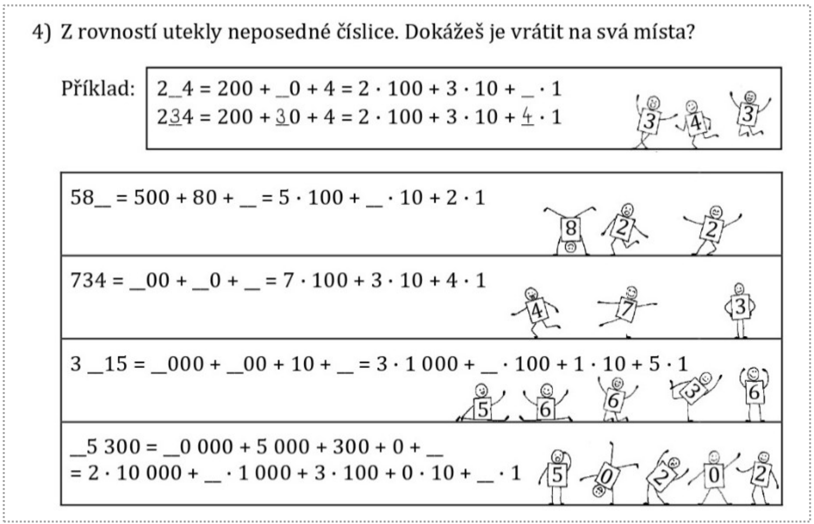
Diagram 32

Shrnutí

Ačkoliv matematická struktura úlohy silně odkazuje na *place value*, domnívám se, že porozumění tomuto jevu nezkoumala tak dobře, jak jsem původně očekávala. Řešitelé mohli úlohu velmi efektivně řešit metodou vyčerpání všech možností, což bylo předem očekáváno jako legitimní strategie. Především ale úloha jen slabě zaznamenává přemýšlení žáků. Koncepce úlohy vyzývá žáky k zápisu jejich řešení jako hotového produktu, nevyžaduje zdůvodnění, nesleduje myšlenky a záměry řešitele. Vše, co bylo výše popsáno jako možné příčiny chyb, je tudíž značně limitováno mým pozorováním a interpretací.

Fakt, že se zdaleka nejčastěji objevovaly chyby ve 2. a zejména ve 3. podúloze (číslo 739) je přinejmenším pozoruhodný. Příčinu chyb jsem interpretovala jako pravděpodobně intuitivní řešení bez následného ověření. I zde vidím potenciál pro další výzkum, který by bylo možné provést nabídkou dalších úloh téhož typu, na kterých by bylo sledováno, ve kterých permutacích karet se podobné chyby vyskytnou.

5.4.1.4. Řešení 4. úlohy



Obrázek 91: ukázka, 4. úloha

2. ročník

Tato úloha byla ve druhém ročníku i obecně zdaleka nejvíce vypouštěnou úlohou. Pro druhé ročníky byla obzvláště náročná, jelikož podle mně dostupných informací s takto zřetězenými rovnostmi zatím nepracují.

Zcela úspěšně 3. úlohu nevyřešil nikdo. Vzhledem k tomu řešení Barta, který má správně dva ze čtyř řádků, považuji za *z většiny úspěšné řešení*. Jedná se o téhož žáka, který byl dříve zmiňován v souvislosti s čárkou mezi třídami řádů. Bart správně doplnil druhou a třetí podúlohu. Ostatní podúlohy také vyplnil, ale chyboval v umístění číslic.

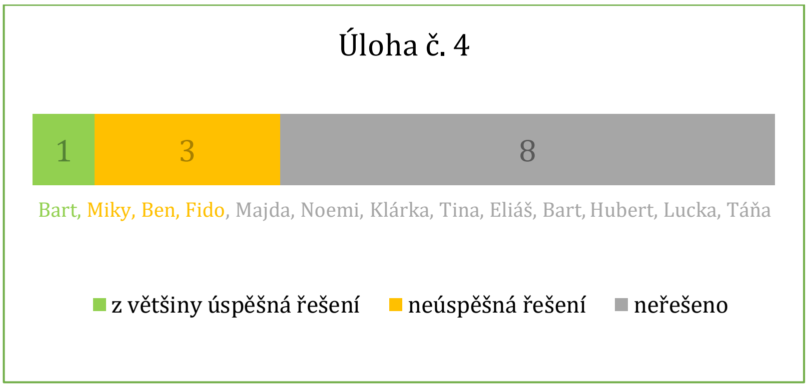
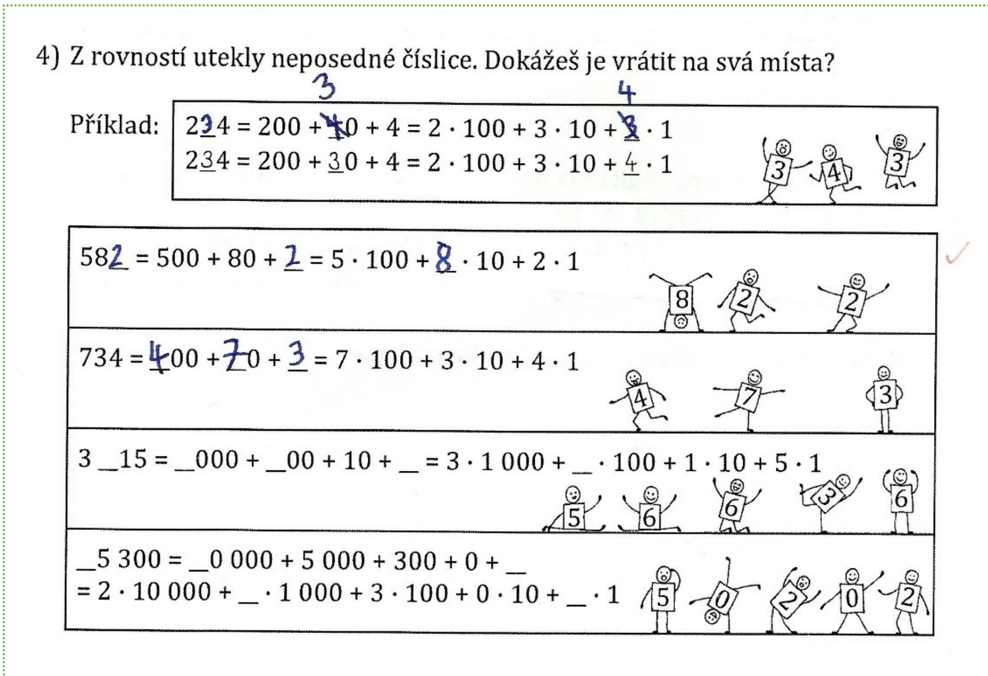


Diagram 33

Dva řešitelé číslice doplnili ve všech podúlohách a některé na správná místa. Fido doplnil číslice do prvních dvou podúloh, z čehož první podúlohu má správně. Zároveň ale Fido řešil i úlohu v příkladu. Nejdříve číslice doplnil na nesprávná místa, poté je škrtl a přepsal na správné – pravděpodobně na základě ověření s doplněným řádkem níže. Řešitelé obecně velmi často doplňovali číslice i v prvním řádku příkladu. Je možné, že jen chtěli zaplnit prázdná místa a příklad si vyzkoušet. Druhou, za mě pravděpodobnější interpretací je, že žáci vnímají slovo *příklad* jako synonymum pro *matematickou úlohu*, tedy něco, co by v testu měli řešit. Lze jen odhadovat, do jaké míry žáci vraceli číslice náhodně a do jaké míry se snažili v rovnostech hledat vnitřní logiku. Jisté však je, že se s rozvinutým zápisem čísla podobného typu dosud nesetkali.



Obrázek 92: řešení Fida, 4. úloha

Úlohu vypustilo 8 řešitelů. Dva z nich ale doplnili čísla v příkladu. Možná se tak úlohou alespoň chvíli zabývali a snažili pochopit, než ji opustili. Také je možné, ale podle mě méně pravděpodobné, že pouze označení *příklad* brali jako testový úkol.

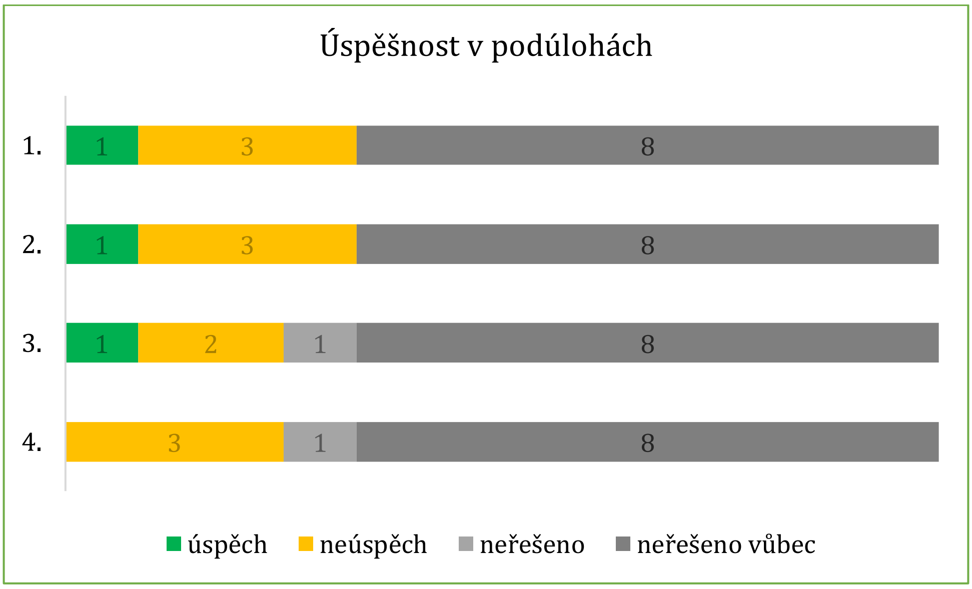


Diagram 34

3. ročník

Ve 3. ročníku byla 4. úloha také hojně vypouštěná, i když výrazně méně než ve 2. ročníku. Oproti 2. ročníku se také zvedla úspěšnost při řešení úlohy, což samozřejmě ovlivnilo i celkovou úspěšnost úlohy v této třídě. Jinými slovy, pokud už se řešitel rozhodl úlohu řešit, byl v ní nejčastěji úspěšný. Zcela úspěšní byli v úloze 2 řešitelé, z většiny úspěšní, tedy úspěšní ve dvou až třech podúlohách, byli 3 řešitelé. Neúspěšný byl Honzík a další 4 úlohu neřešili vůbec.

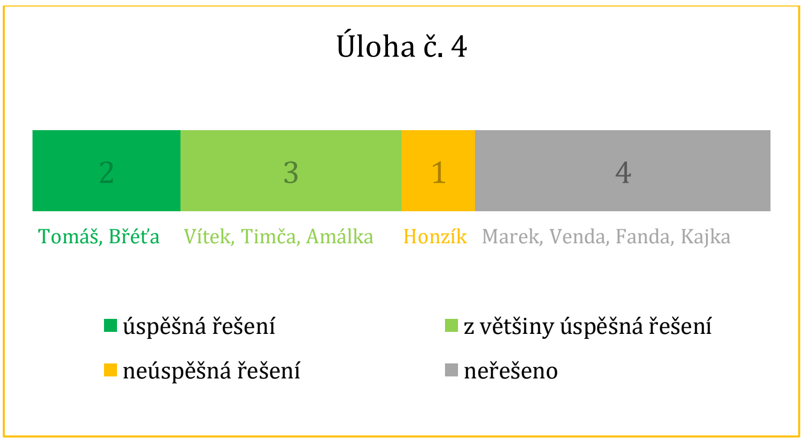
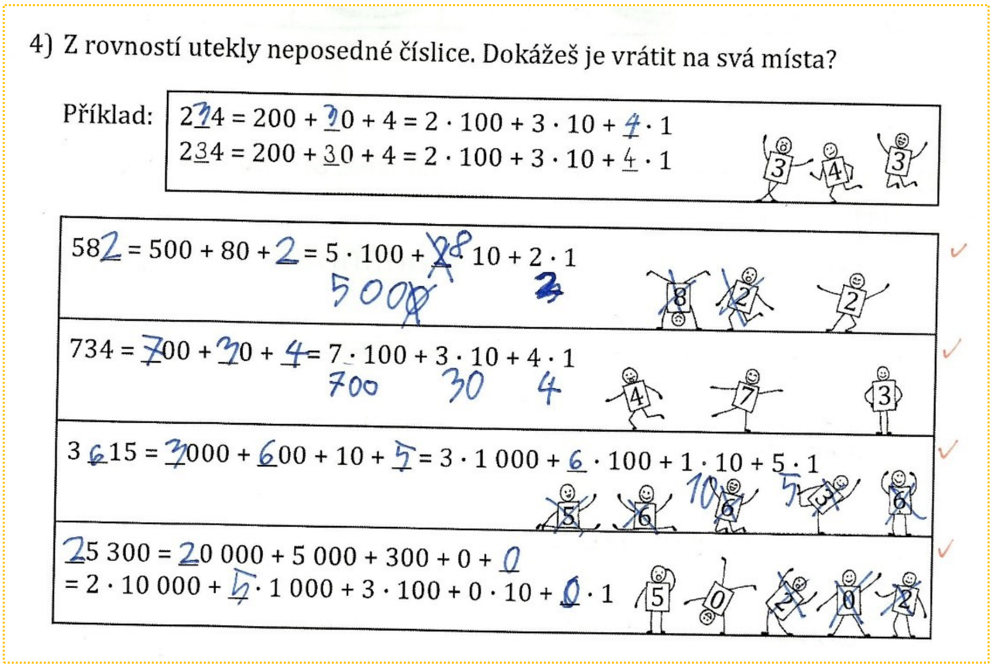


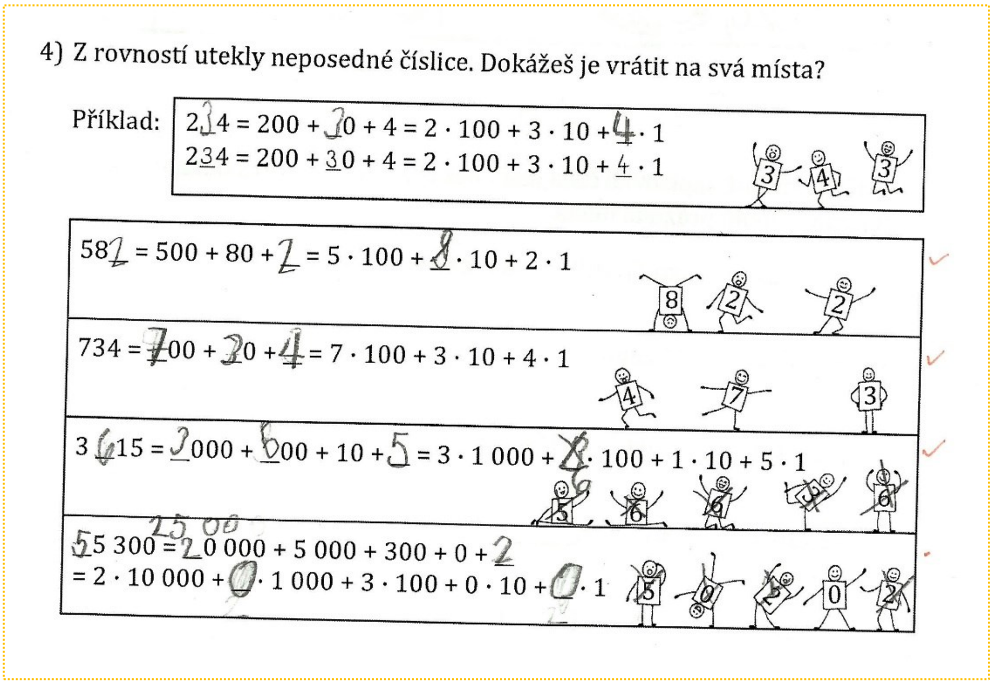
Diagram 35

Častou strategií bylo škrtání si již dosazených neposedných číslic. Dva žáci tuto metodu využívali již od začátku, další dva až v posledních dvou podúlohách. Amálka si číslice neškrtala vůbec a úspěšná byla pouze v 1. a 3. podúloze. Břéťa si do úlohy hojně dopisoval i další pomocné poznámky, konkrétně si nadepisoval součiny ve 3. části rovnosti. Zajímavé je, že si takto pomáhal zejména ze začátku úlohy a pro vyřešení poslední podúlohy už tuto pomůcku nepotřeboval vůbec. Vyvozuji z toho, že se jeho porozumění přímo během řešení úlohy vyvíjelo.



Obrázek 93: řešení Břéti, 4. úloha

Vítek a Timča vyřešili správně první 3 podúlohy. Je zvláštní, že se u nich ve 4. podúloze vyskytly totožné chyby, ačkoliv kontakt mezi těchto dvou žáků během řešení byl vzhledem k jejich umístění ve třídě nepravděpodobný. Vítek si nad první rovnítko dokonce nadepsal číslo 25 000, které posléze vygumoval na 2 500. Je také vidět, že zvažoval možnost doplnění obou dvojek do 3. části rovnosti, kam nakonec dopsal nuly.



Obrázek 94: řešení Vítka, 4. úloha

Amálka vyřešila správně 1. a 3. podúlohu. Ve druhé dopsala číslice v pořadí: 7, 4 a 3. Nenapadá mě zde jiné vysvětlení, než že číslo přečetla správně, ale při doplňování si spletla pořadí. Poslední podúlohu Amálka neřešila.

Honzík doplnil 1. a 2. podúlohu, z čehož má správně pouze tu 2., o které předpokládám, že je nejjednodušší. V první podúloze doplnil čísla v témže pořadí, jako jsou příslušní neposedové v řádku.

Diagram uvedený níže opět znázorňuje úspěšnost řešitelů v jednotlivých podúlohách. Kategorie *neřešeno vůbec* shrnuje ty řešitele, kteří vypustili celou úlohu, nikoliv jen jednotlivé podúlohy.

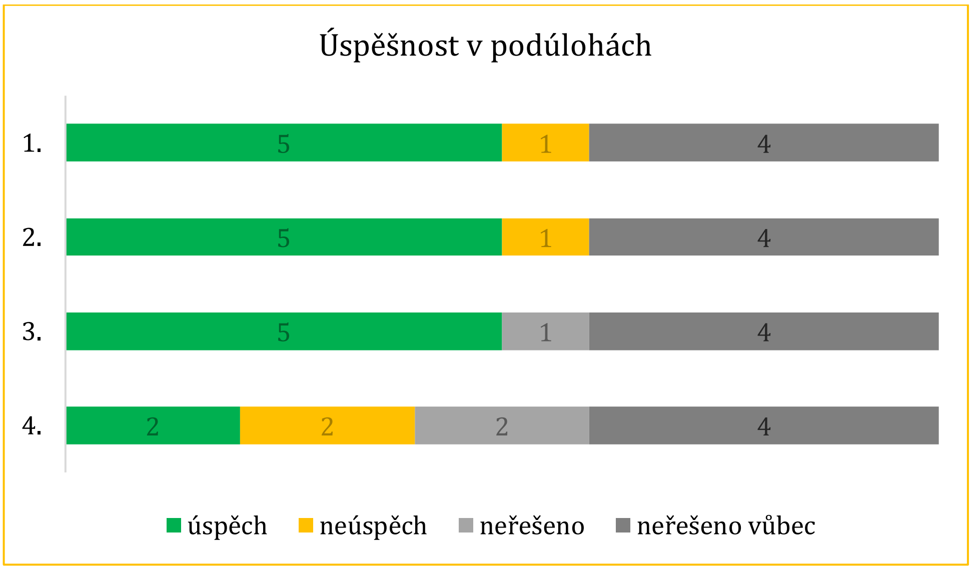


Diagram 36

Až 6 řešitelů doplnilo číslice i v příkladu, v tom 2 ze 4, kteří zbytek úlohy ponechali prázdný. Je kromě jiného možné, že řešitelé měli potřebu nenechávat políčka prázdná, i když se jednalo o příklad. U těch, kteří úlohu jinak neřešili, předpokládám, že pro ně byla úloha příliš náročná, ale alespoň číslice do příkladu doplnit dokázali, a tak udělali alespoň to.

4. ročník

V této úloze byli žáci 4. ročníku ze všech zkoumaných tříd nejúspěšnější. Jak jsem již popisovala v úvodu, je zřejmě příčina v klasičtějším, ale důsledném přístupu jejich učitele matematiky. Až 9 řešitelů bylo v úloze zcela úspěšných. Tobík byl úspěšný pouze v prvních dvou podúlohách, Kamča v žádné. Oleg pravděpodobně neporozuměl zadání.

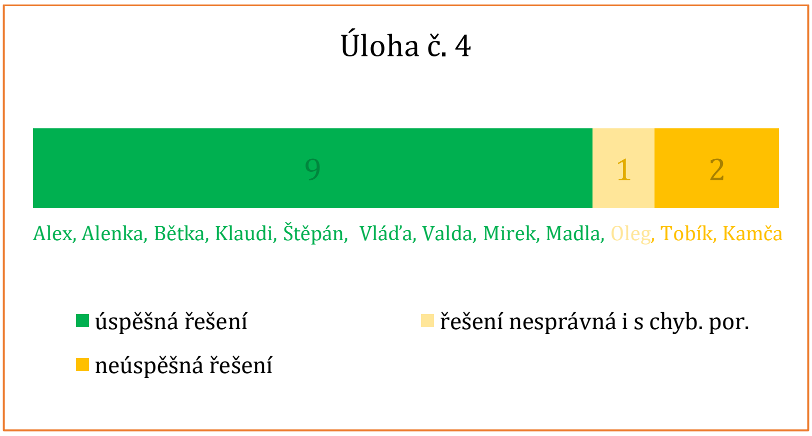
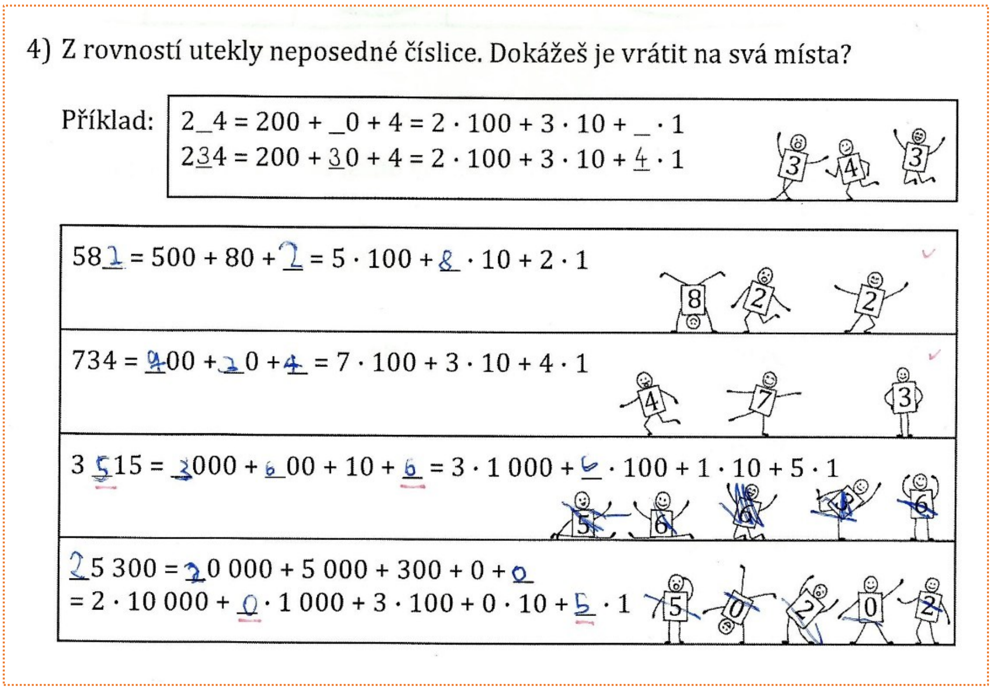


Diagram 37

V rámci zcela úspěšných řešitelů si neposedné číslice škrtalo 7 řešitelů, z toho jeden u všech podúloh, 4 u posledních dvou a 2 pouze u 3. podúlohy, kterou vzhledem k neobsazenému řádu stovek jinak než vylučovací metodou řešit nelze. Podle mého názoru tento trend dokládá, že poslední dvě úlohy byly pro žáky náročnější, proto měli potřebu si do řešení vnést systém, např. právě škrtáním číslic.

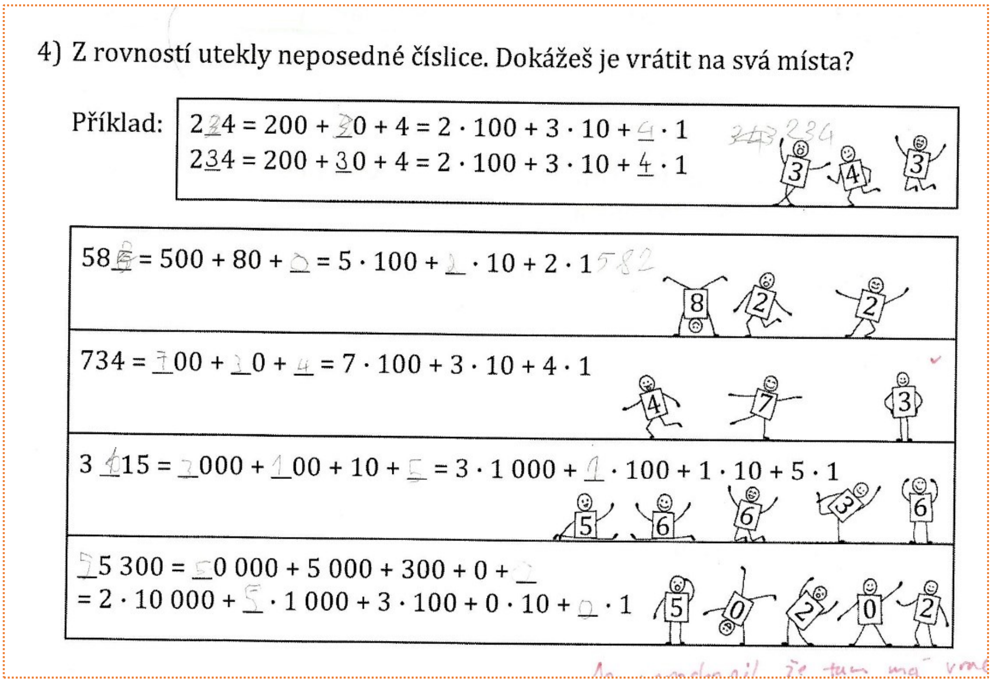
Tobík si neposedné číslice škrtal pouze v posledních dvou podúlohách a také pouze v těchto podúlohách nebyl úspěšný. Je tedy celkově vidět, že pro něj byla práce s většími čísly a větším počtem neposedných číslic v této úloze náročná a měl potřebu už volit organizovanější strategii, tedy např. škrtání číslic. V obou těchto podúlohách pouze zaměnil dvě číslice, ve 3. podúloze číslici 5 a 6, ve 4. podúloze číslice 0 a 5. Příčina této záměny mi však není zřejmá.



Obrázek 95: řešení Tobíka, 4. úloha

V řešení Kamči nepozoruji konkrétní strategii. Je také možné, že číslice vložila do prázdných míst náhodně. Pouze 3. podúlohu ponechala neřešenou.

Oleg používal i číslice, které nejsou v nabídce uprchlých neposedů. Je zřejmé, že neporozuměl zadání, ale jeho konkrétní strategie při řešení této úlohy mi není zjevná. Přesto se mi nezdá, že by Oleg postupoval zcela náhodně. Často doplňuje stejné číslice do stejných řádů. Ve 3. podúloze, která nabízí celistvý model čísla, byl Oleg úspěšný.



Obrázek 96: řešení Olega, 4. úloha

Diagram níže ilustruje také to, že 2. podúloha byla pro řešitele nejjednodušší, což odpovídá očekávání.

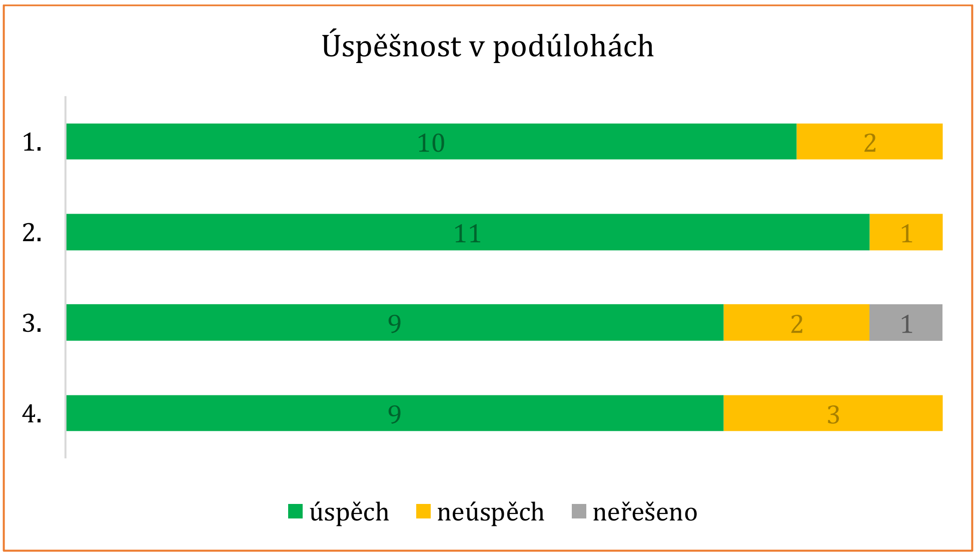


Diagram 38

5. ročník

V této úloze bylo v rámci 5. ročníku zcela úspěšných 5 řešitelů, další 3 byli neúspěšní pouze v jedné z podúloh. Zbylých 5 řešitelů úlohu vypustilo. Oproti ostatním ročníkům tedy chybí neúspěšní řešitelé, což lze interpretovat jako schopnost přiměřeného zhodnocení svých schopností žáků 5. ročníku.

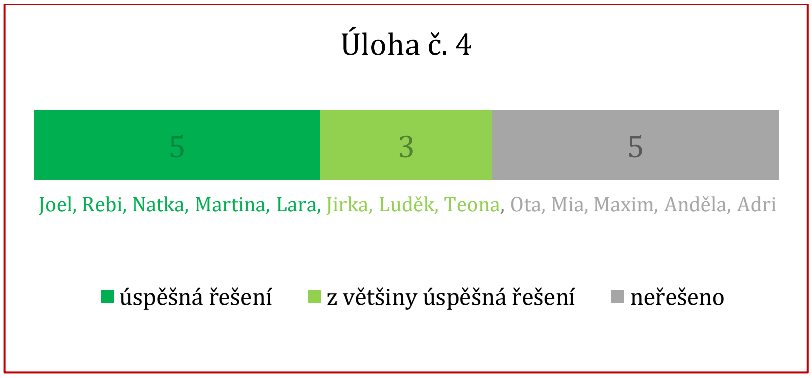


Diagram 39

V rámci řešitelů s neúspěchem pouze v jedné podúloze Jirka v druhé podúloze doplnil čísla v pořadí 4, 3, 7. Je možné, že jej zmýlilo vnímání rovnosti jako rovnost pouze členů bezprostředně sousedících s rovnítkem, nikoliv jako rovnost celých mnohočlenů. V případě číslic 4 a 7 by platilo, že z obou stran vždy stejná číslice bezprostředně sousedí s rovnítkem. Číslice 3 by pak byla dosazena vylučovací metodou. V ostatních podúlohách Jirka stejné chyby neudělal, ačkoliv to nabídka číslic umožňovala. Luděk a Teona chybovali v poslední podúloze. Oba zaměnili číslice 0 a 5 na posledních dvou místech pro doplnění. Tuto chybu si vysvětluji tak, že tito řešitelé doplňovali číslice počínaje prvními dvěma částmi rovnice, ve kterých se orientovali. Zbývající dvě číslice pak doplnili náhodně, neboť poslední část rovnice pro ně mohla být příliš složitá a matoucí, tedy nedokázali se v ní zorientovat.

Z řešitelů, kteří úlohu neřešili, pouze Ota doplnil číslice do příkladu. Zbylí řešitelé úlohu vynechali zcela. Přikládám diagram, který úspěšnost i vypuštění úloh znázorňuje.

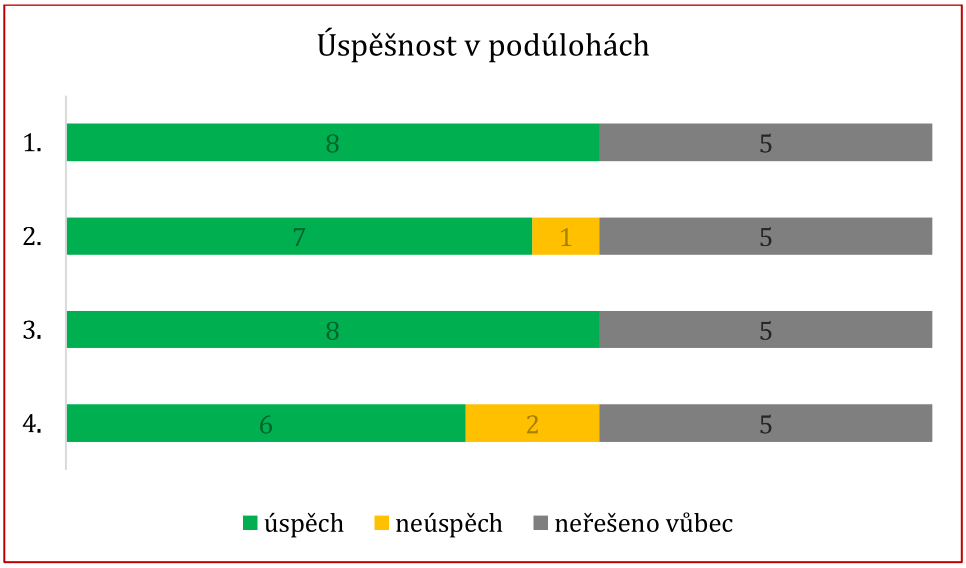


Diagram 40

Shrnutí

Úloha byla napříč ročníky nejvíce vypouštěnou úlohou, což ilustruje i diagram níže. Výjimkou je pouze 4. ročník, kde žádný z řešitelů nevypustil ani jednu z úloh. Ačkoliv úloha čerpá z *place value* formou, která se běžně na školách učí, tedy rozvinutým zápisem, vyžaduje po řešiteli mnohem více než to. Řešitel se zde musí především dobře zorientovat v jednotlivých mnohočlenech a jejich struktuře. Úloha předpokládá, že řešitel vnímá rovnost jako ekvivalenci, nikoliv jako proces. Dále vyžaduje schopnost analýzy a opětovné syntézy čísla, a to ve spojení s abstraktním vnímáním pozice číslic, neboť číslice v některých místech vypadly. Předpokládám, že např. číslo 2 700 a určení počtu tisíců v něm vyžaduje daleko menší míru abstrakce než číslo 2 _00. V prvním případě se jedná o model, se kterým se žáci setkávají. V druhém případě je už identifikace počtu tisíc možná jen na základě pozice číslice v čísle. V neposlední řadě úloha vyžaduje také dostatečnou motivovanost se do ní pouštět, což souvisí se sebedůvěrou a přiměřeným zhodnocením svých schopností, nebo obecným nastavením mysli, díky kterému se žák nebojí výzev i za cenu možného neúspěchu.

Diagram níže znázorňuje procentuální zastoupení řešitelů, kteří vypustili danou úlohu, v rámci všech řešitelů ze ZŠ Hvozdík. Z diagramu je jednoznačně patrné, že diskutovaná 4. úloha byla ze všech tou nejméně řešenou.

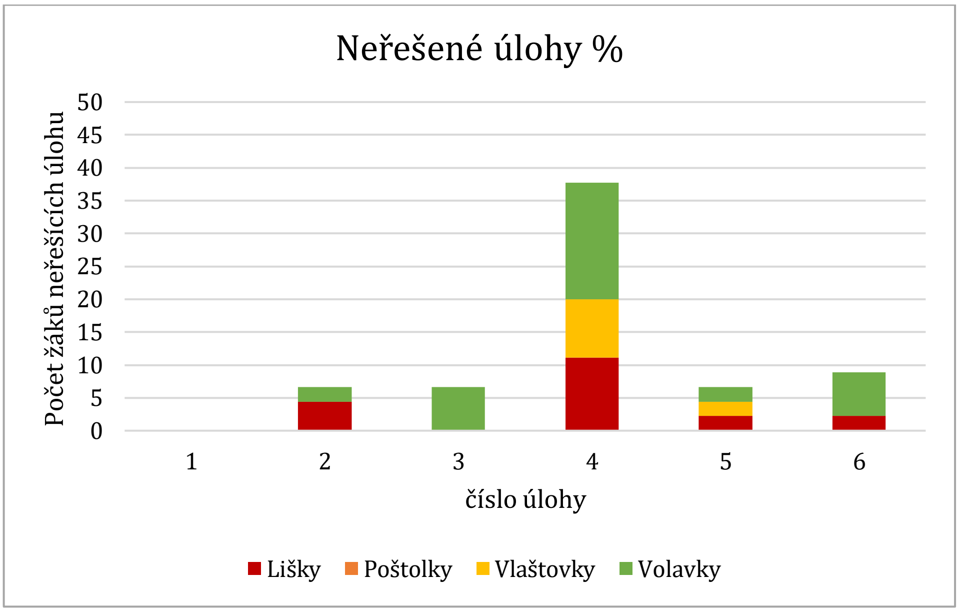
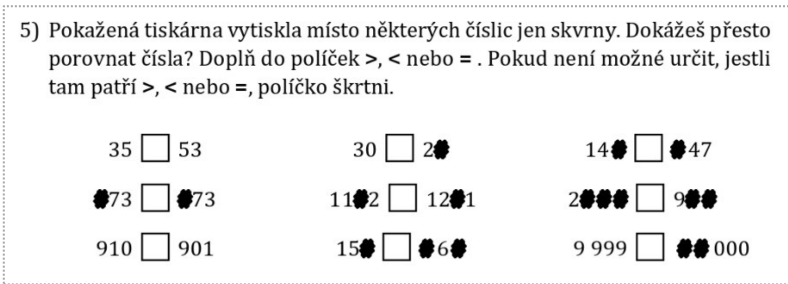


Diagram 41

Při uvážení výše popsaného není divu, že byla úloha v této míře vynechávána. Domnívám se, že úspěšnost v této úloze nesvědčí tolik o porozumění pozičnímu zápisu, ačkoliv je toto porozumění oproti ryze kalkulační strategii výhodou, ale o dobrých exekutivních funkcích řešitele obecně.

Úloha z mého pohledu nesplnila účel především zkoumat žákovské porozumění pozičnímu zápisu čísla, neboť vyžaduje i další dovednosti a porozumění dalším matematickým principům. Přesto se domnívám, že nabídla zajímavý další pohled na úroveň porozumění žáků, a to zejména co se týče propojení pozičního zápisu s dalšími oblastmi matematiky.

5.4.1.5. Řešení 5. úlohy


5) Pokažená tiskárna vytiskla místo některých číslic jen skvrny. Dokážeš přesto porovnat čísla? Doplň do políček >, < nebo = . Pokud není možné určit, jestli tam patří >, < nebo =, políčko škrtni.

Obrázek 97: ukázka, 5. uloha

Tato úloha se skládá z 9 podúloh. Málokdo vyřešil všechny podúlohy správně. Jako hranici pro kategorii *z většiny úspěšný* jsem si zvolila 3 a méně chyb.

V této úloze byl výrazný rozdíl v úspěšnosti ročníků pouze mezi 2. ročníkem a ročníky vyššími (diagram 8). Proto se budu věnovat pouze 2. ročníku zvlášť a zbylé popíšu souhrnně.

Nezávisle na ročníku, ale pouze výjimečně, se u některých řešitelů vyskytovalo použití znaků pro nerovnost jako šipek ukazující na vyšší číslo. V pilotáži jeden žák dokonce dokreslil středovou čárku šipky. Toto opačné použití znaků bylo většinou snadné odhalit na základě celkového vzorce vyskytlých chyb. Řešení jsem vyhodnocovala na základě obrácených znaků, tedy i takovýto žák mohl být v úloze zcela úspěšný.

2. ročník

Ve druhém ročníku nikdo nevyřešil všechny podúlohy správně. Do kategorie *z většiny úspěšná řešení* bylo zařazeno 5 řešitelů.

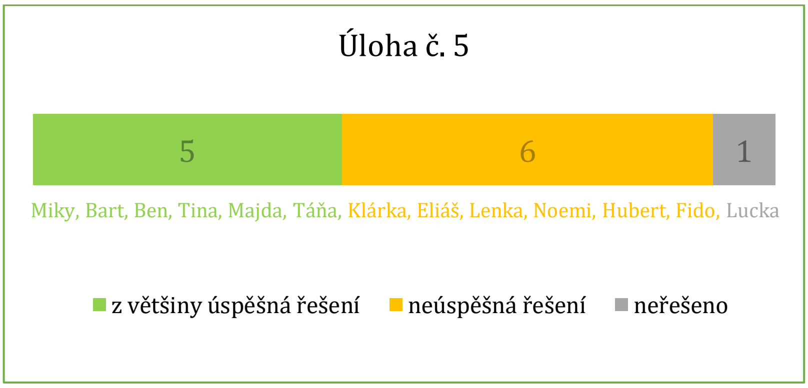


Diagram 42

Níže pro názornost přikládám přehledovou tabulku vyskytlých chyb. Jednotlivé řádky jsou přiřazeny konkrétním řešitelům. Správná řešení jsou vyznačena zeleně, chybná žlutě. Neřešené podúlohy jsou vyznačeny šedě. Pravý sloupec udává počet správně řešených úloh daného řešitele. Dolní řádek zas výskyt chyby v příslušné podúloze.

	35 □ 53	●73 □ ●73	910 □ 901	30 □ 2●	11●2 □ 12●1	15● □ ●6●	14● □ ●47	2●●● □ 9●●	9 999 □ ●●000	Σ
Miky						×				**8**
Bart		=					<			**7**
Ben		=					<		>	**6**
Tina		=					=		>	**6**
Majda		=				×	=			**6**
Táňa		=	<				<	<		**5**
Klárka		=				<	>		>	**5**
Eliáš		=			=	>	<	<	>	**3**
Lenka		=	<		=	>	<	<	>	**2**
Noemi		=								**2**
Hubert	>	=			=	>	<	<	>	**2**
Fido		=		<	×	×				**2**
# chyb	2	11	1	2	4	6	9	3	5	

Tabulka 2: chyby ve 2. úloze

Nejčastěji žáci druhého ročníku chybovali ve 2. a v 7. podúloze. Z celkového počtu 12 řešitelů 11 doplnilo do 2. podúlohy rovnítko. Jedním z možných vysvětlení je nedostatečné porozumění zadání, a to konkrétně složené podmínce, díky které je možným řešením i přeškrtnutí políčka. Pouze 3 ze 12 řešitelů možnost přeškrtnutí využili. U ostatních řešitelů nelze učit, zda možnost, že úlohu nelze řešit, žáci 2. ročníku vnímali jako legitimní – jednak kvůli očekávatelné nižší čtenářské gramotnosti, také kvůli pravděpodobně menší zkušenosti s neřešitelnými úlohami. Pokud tedy tuto možnost neuvažovali, jediné smysluplné řešení 2. podúlohy je doplnění rovnítka. Přesto 2 řešitelé škrtání používali, ale v této podúloze doplnili rovnítko. Nejpravděpodobněji tedy většina řešitelů vnímala vizuální shodnost jako i matematickou rovnost a neuvážila možnost, že pod kaňkami mohou být na obou stranách rozdílné číslice. Je také možné, že žáci, kteří používali škrtání jej nevnímali jako znak, že úlohu nelze jednoznačně řešit, ale jen škrtali úlohy, kde úlohu oni sami řešit nedokázali.

V 7. podúloze byly chyby různorodé. Jak jsem již zmiňovala výše, je pravděpodobné, že řešitelé nevnímali jako legitimní možnost, aby podúloha neměla řešení. Jednou ze strategií, které vnímám jako pravděpodobné, je doplňování si číslic pod kaňkou. I ve vyšších ročnících nebo v pilotáži jsem pozorovala, že si někteří řešitelé nadepisují nad kaňky číslice. Tato strategie je úspěšná pro všechny podúlohy s řešením > nebo <. Úskalím této strategie je, že nevyčerpává všechny možnosti u nerozhodných porovnání. Považuji za velmi pravděpodobné, že si řešitelé v 7. podúloze zvolili číslice pod kaňkou a podle toho, které to zrovna byly, rozhodli, zda je které číslo větší, menší, nebo rovno. Různí řešitelé si zvolili různé číslice, čemuž i odpovídá diverzita v rámci chybných odpovědí.

Další chybou, která se vyskytovala zejména ve 2. ročníku, ale v menší míře i v dalších ročnících, je preference hodnoty první číslice před počtem číslic v čísle, což se projevilo u posledních dvou podúloh. Tento jev se vyskytoval poměrně často v rámci pilotáže. Několikrát i u vyšších ročníků. Mezi řešiteli z 2. ročníku se tato chyba jednoznačně vyskytla pouze dvakrát. V dalších 3 případech žáci chybovali pouze v poslední úloze. To může mít několik vysvětlení. Žáci mohli vnímat hodnotu číslice jako důležitější před počtem číslic, ale v 8. podúloze nechybovali, jelikož s trojcifernými a čtyřcifernými čísly už nějakou zkušenost mají a dokážou rozhodnout, co je větší. Žáci také mohli přehlédnout počet číslic v čísle, což je obzvláště snadné v případě opakujících se číslic, které v podúloze jsou. Žáci také mohli vnímat jako důležité i ostatní číslice kromě té na první pozici. Je tedy možné, že v 8. podúloze v představě porovnávali čísla 2 000 a 900 a dospěli ke správnému výsledku, ale kdyby měla 8. podúloha čísla 2 000 a 999, dopustili by se stejného zjednodušení jako v 9. podúloze.

Poslední chybou, kterou zde zmíním, je znak pro rovná se v 5. podúloze. Číslice jsou záměrně voleny tak, aby hrála roli především jejich pozice. Řešitelé roli té dané číslice v čísle nemuseli přiřadit k řádu, který zastupuje, obzvláště, když je integrita čísla narušena kaňkou. Čísla tudíž považovali za stejná a zopakovali chybnou úvahu z 2. podúlohy.

Je jistě k zamyšlení, proč je mezi 2. a vyššími ročníky takovýto rozdíl v úspěšnosti. Jedním z možných vysvětlení je nižší porozumění hodnotě pozice (*place value*) a řádům. Žáci ve druhém ročníku běžně pracují s dvojcifernými čísly, kde zatím hodnota pozice není tak nazíratelná jako ve vyšších číslech. Žáci 2. ročníku mívají zkušenost s danými čísly jako s izolovanými modely, ale nepracují s nimi na úrovni řádů, což se v případě této třídy nepotvrdilo v rozhovoru se zdejší třídní paní učitelkou, ze kterého vyplývá, že její žáci čísla často modelují, např. s využitím Dienesovych kostek. Dalším možným a pravděpodobným faktorem je menší zkušenost žáků s nestandardními úlohami obecně a nemusí mít tudíž tak rozvinuté řešitelské strategie, jako potenciálně mívají žáci v ročnících vyšších. To může souviset s vedením třídy jako takové, ale i s kognitivními možnostmi takto mladých žáků. V jistě neposlední řadě mohla být velmi podstatným faktorem i míra porozumění zadání, jelikož žáci 2. ročníku zpravidla ještě nemají čtenářskou gramotnost na takové úrovni, jako žáci ročníků vyšších. Složená podmínka v zadání byla podle mého pozorování pro 2. ročník hůře uchopitelná než pro ročníky vyšší, kde už možnost přeškrtnutí vyžívalo větší procento řešitelů.

3. – 5. ročník

Ve 3. až 5. ročníku byla úspěšnost řešitelů v této úloze srovnatelná. Domnívám se, že pro úspěšné řešení této úlohy je potřebné porozumění, které není ve výuce pěstováno, tudíž úspěšnost jednotlivých řešitelů není tolik závislá na ročníku, resp. na zkušenostech získaných ze školní výuky matematiky. To samozřejmě neplatilo pro řešitele 2. ročníku, pro které byl samotný číselný obor významným parametrem obtížnosti úlohy. V této části budu pojednávat o řešeních řešitelů z 3., 4. a 5. ročníku. Do diagramů jsou však zahrnutí i řešitelé z 2. ročníku a ze 3. ročníku z pilotáže.

Zajímavé je, že napříč ročníky se u řešitelů vyskytovaly opakující se kombinace úspěšně a neúspěšně řešených podúloh. Zahrnula jsem pro širší vzorek do rozborů i řešení žáků z pilotáže (3. ročník; v tabulce 3 označeni písmeny), neboť mi tento jev připadal pozoruhodný. Na následující straně opět přikládám přehledovou tabulku vyskytlých chyb jako u 2. ročníku. Kromě jednotlivých chyb jsou i patrné časté kombinace úspěšně a neúspěšně řešených úloh.

	35 □ 53	[redacted]73 □ [redacted]73	910 □ 901	30 □ 2[redacted]	11[redacted]2 □ 12[redacted]1	15[redacted] □ [redacted]6[redacted]	14[redacted] □ [redacted]47	2[redacted] □ 9[redacted]	9 999 □ [redacted]000	Σ
Joel										9
Lara										9
Natka										9
Jáchym						×				8
Ota						×				8
Rebi							<			8
Valda						×				8
Štěpán						×				8
Klaudi						×				8
Alenka						×			×	8
Vláďa						×				8
Bětka						×				8
Alex						×				8
Tomáš						×				8
Venda						×				8
Marek						×				8
A.		=								8
B.		=								8
C.						×				8
D.						×				8
E.						×			×	8
F.						×				8
G.						×				8
H.							=		×	8
Teona		=					=			7
Luděk		=					=			7
Maxim							<		>	7
Mirek		=					<			7
Oleg		=				×				7
Honzík		=				>				7
Vítek		=					<			7
Timča		=					<			7
Amálka		=					>		×	7
I.	>					>				7
J.		>					<		×	7
K.						×	<			7
L.						×			>	7
M.						×	<			7
N.		=								7
O.		=					=			7
P.		=					<			7
Mia		=					<		>	6
Kamča		=			>		=			6
Madla		=			×		=			6
Fanda		=				=	=			6
Q.		<					<		>	6
Adri										5
Tobík		=				>		<	>	5
Břéťa		=								5
R.		=				>	<	<	×	5
S.		>					>	<	>	5
T.	>						>	<	>	5
Martinka	×					>	<	<	>	4
U.		=		<	>		<		>	4
V.		=				>	<	<	>	4
W.		=				>	<	<	>	4
X.		=				>	<	<	>	4
Y.		=				>	<	<	>	4
Z.		=				>	<	<	>	4
Č.		=				>	<	<	>	4
Anděla										3
Ď.		=			>	>	<	<	>	3
# chyb	3	31	0	2	6	36	34	15	20	

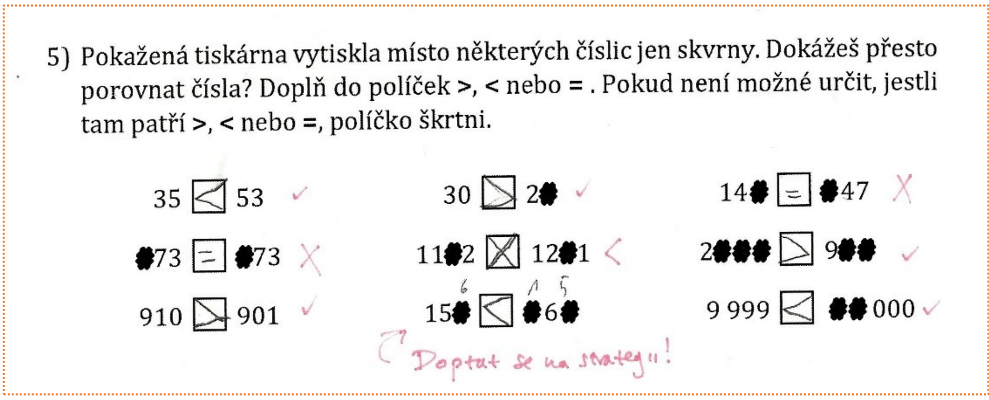
Tabulka 3: chyby ve 2. úloze

Očekávala jsem, že řešitelé chybující v 8. podúloze budou chybovat i v 9. podúloze. Obě podúlohy jsou zaměřené na přednost počtu číslic v čísle před hodnotou číslic při určování většího z čísel. Toto očekávání se splnilo, zejména pak v nižších ročnících.

Mimo předchozí očekávání se projevilo, že pokud byl řešitel neúspěšný v právě jedné podúloze, byla to v drtivé většině podúloha č. 6 a to ve všech případech znakem pro *nelze určit*. Zároveň však, pokud byl řešitel neúspěšný ve více než 1 podúloze, často byl v podúloze č. 6 úspěšný. Na diagramu 43, o kterém pojednávám níže, lze porovnat, že ačkoliv v 6. podúloze byli často neúspěšní i ti nejúspěšnější řešitelé úlohy, nejedná se o nejméně úspěšně řešenou podúlohu vůbec. Zmiňovaná podúloha obsahuje složenou podmínku, jak jsem již popisovala v rámci rozboru didaktického testu (kapitola 5.2). Domnívám se proto, že úspěšnost v ní souvisí s porozuměním pozičnímu zápisu čísla nelineárně. Předpokládám, že řešitelé neúspěšní pouze v této podúloze porovnávali číslo na základě pozice stovek, a tedy určili čísla jako neporovnatelná, aniž by vzali v potaz pozici desítek. Dalším možným vysvětlením je, že žáci vnímali jako možnost i dosazení nuly na pozici stovek v čísle napravo. Při takovém řešení ale očekávám, že v podúloze č. 9 taktéž odpoví *nelze řešit*. Takováto kombinace se však vyskytla pouze u Alenky ze 4. ročníku a jednoho řešitele z pilotáže.

Další velmi častou kombinací byl neúspěch v podúlohách č. 2. a 7. U obou těchto podúloh je správným řešením odpověď *nelze určit*. Nejsnáze se nabízí interpretace, že řešitelé nevnímali možnost *nelze řešit* jako legitimní. Tomu však neodpovídá řešení Břéti, Amálky a dvou řešitelů z pilotáže, kteří používali přeškrtnutí v jiných podúlohách, tudíž s touto možností nějakým způsobem operovali. Je také možné, že tito řešitelé porozuměli přeškrtnutí spíše jako signálu, že úlohu oni řešit nedokážou, nikoliv jako správné řešení, tedy že velikost těchto dvou čísel porovnat nelze. Jako velmi pravděpodobné se mi jeví, že řešitelé chybující v neurčitelných podúlohách používali strategii dosazování číslic, která ačkoliv zvažuje pouze jedno, nikoliv všechna řešení je pro všechny ostatní podúlohy strategií úspěšnou. Tito řešitelé by tak úspěšně vyřešili i dříve pojednávanou podúlohu č. 6 a zároveň si ani nemuseli všimnout, že mají podúlohy č. 2 a 7 řešené chybně. Dosazovací strategii by odpovídalo i zastoupení jednotlivých chyb, mezi kterými se nejčastěji objevuje „<“, což by odpovídalo statistice při náhodném dosazování číslic.

Ilustrací dosazovací strategie může být řešení Madly, která si pravděpodobně čísla v hlavě dosazovala. Pouze 6. podúloha byla pro Madlu složitější, a tak měla potřebu si dosazovaná čísla nadepsat. Pro 2. a 7. podúlohu její strategie nebyla úspěšná.



Obrázek 98: řešení Madly, 5. úloha

Dále byli řešitelé poměrně často neúspěšní v podúloze č. 9. Byli mezi nimi i ti řešitelé, kteří úspěšně vyřešili podúlohu č. 8 zkoumající tentýž princip v zápisu čísla. Celkem 6 řešitelů tuto poslední podúlohu škrtlo, předpokládám, že zvážili dosazení nuly na pozici desetitisíců. Jednalo se o Alenku ze 4. ročníku, Amálku ze 3. ročníku a další 4 žáky z pilotáže. Takovéto řešení bylo také označeno jako správné. Přesto 5 řešitelů dopsalo neúspěšné řešení „>". Je možné, ačkoliv dle mého názoru nepravděpodobné, že tito řešitelé používali dosazovací strategii a na pozici desetitisíců dosadili číslici 0. Pravděpodobnější podle mého úsudku je, že tyto žáky, úspěšné v 8. podúloze, v 9. podúloze zmátla velikost číselného oboru – buďto si nevšimli, že je číslo vpravo pětimístné, nebo s takto velkým číslem neuměli pracovat.

Zcela úspěšní v 6. úloze byli jen Joel, Lara a Natka. Jedná se o žáky z 5. ročníku. Dle mého pozorování jsou to žáci s dobrým logickým uvažováním, nikoliv nutně žáci motivovaní a pilní. Žáci zcela úspěšní v úloze museli nejen dobře porozumět zadání, ale také zvolit vhodnou strategii řešení, která předpokládá více různých řešení. Pouze v 5. a 2. ročníku se vyskytli žáci, kteří úlohu řešili, ale ne všechny podúlohy. Je ovšem možné, že i jiní řešitelé během řešení úlohy ztratili motivaci nebo se vyčerpali, ale namísto ponechání prázdných míst, doplnili ostatní podúlohy ledabyle či zcela náhodně. Napovídal by tomu i pokles úspěšnosti ke konci úlohy u některých řešitelů, což je pozorovatelné v pravém dolním rohu tabulky č. 2.

Diagram níže udává, kolik řešitelů z jednotlivých ročníků vyřešilo úspěšně 1 až všech 9 podúloh. Je patrné, že ve 2. ročníku byla úspěšnost řešitelů nejvíce různorodá. Řešitelé 3. až 5. ročníku už byli úspěšnější a napříč těmito ročníky byl poměr úspěšnějších s méně úspěšnými řešiteli srovnatelný. Je také k povšimnutí, že řešitelů, kteří úspěšně vyřešili právě 8 podúloh, bylo nejvíce.

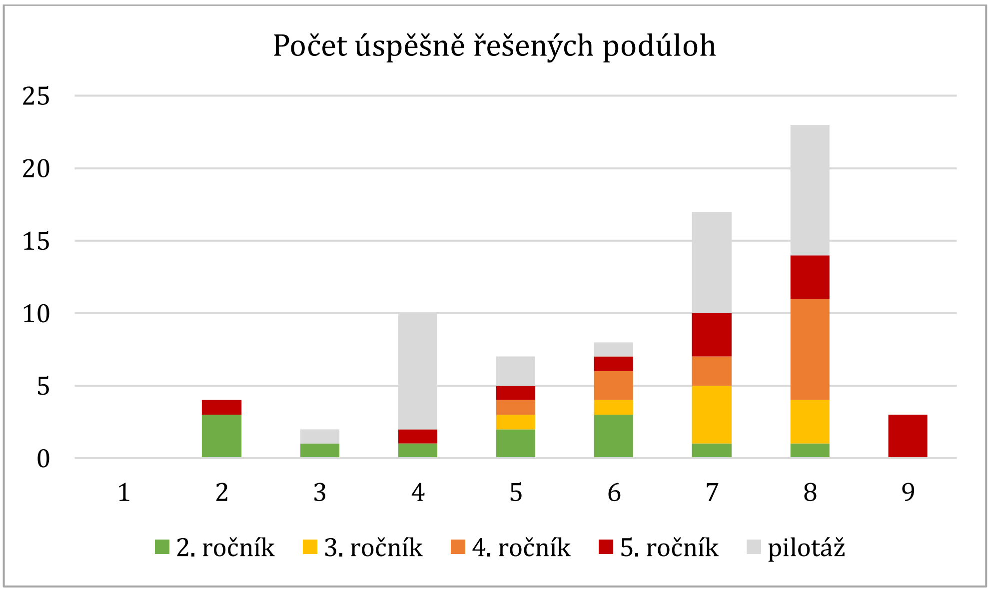


Diagram 43

Další diagram se zaměřuje na úspěšnost v jednotlivých podúlohách. Hodnoty uvádějí procentuální zastoupení úspěšných řešitelů v rámci daného ročníku, které je vyneseno na svislé ose. Z diagramu je patrné, že nejméně úspěšně řešenými byly výše diskutované podúlohy č. 2., 6. a 7.

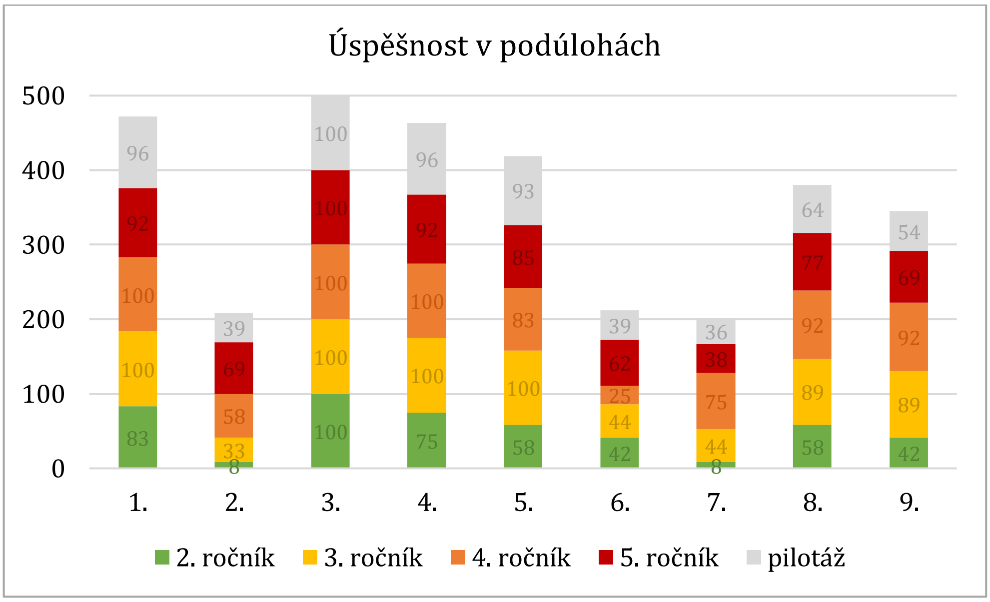


Diagram 44

Pozoruhodné je, že všichni řešitelé ve všech ročnících byli úspěšní ve 3. podúloze, ale nikoliv v 1., která měla být úlohou motivační, rozehřívací. Je možné, že nad 1. podúlohou se mnozí řešitelé ani nepozastavili, nebo si zprvu neuvědomili, jak se znak používá. Ve 3. úloze mohli řešitelé zpozornět právě kvůli vizuální podobnosti obou čísel, čehož jsem i byla svědkem u Maxima z 5. ročníku. Maxim potřeboval pomoct s porozuměním. Po mém dovysvětlení začal úlohu rychle řešit a u 3. podúlohy se zastavil se slovy: *„Á, pozor, to je chyták!“*

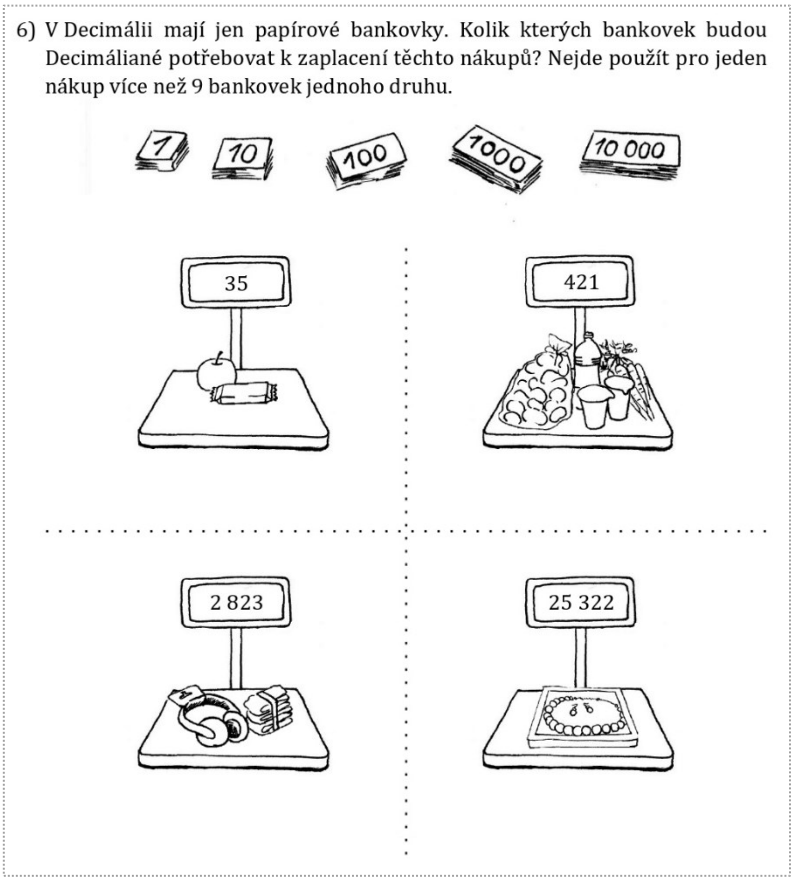
Celkový trend úspěšností řešení jednotlivých podúloh odpovídá očekávání.

Shrnutí

Úspěšnost v této úloze se značně lišila mezi 2. a ostatními ročníky. Toto mohlo být zapříčiněno slabší čtenářskou gramotností a na to navázané porozumění zadání, jako i setkání se s nestandardními úlohami či úlohami, které nelze řešit obecně. Úroveň úspěšnosti ve 2. ročníku jistě ovlivnila i velikost číselného oboru, která byla pro žáky 2. ročníku nestandardní. Ostatní ročníky byly srovnatelně úspěšné, což podle mého domnění poukazuje na to, že se úloha zabývá jevem, který není v rámci výuky matematiky akcentován a úlohy tohoto typu nejsou nacvičovány.

Dle mého úsudku úloha splnila očekávání. Z mého pohledu se jedná o nejlépe vystavěnou úlohu didaktického testu Pozemská čísla, neboť nejlépe zkoumá porozumění hodnotě pozice (*place value*) s minimem dalších souvisejících porozumění a dovedností. Velkým úskalím ovšem je porozumění zadání, a to zejména možnosti *nelze určit*. Pro vyšší validitu této testové úlohy by bylo vhodné se nejdříve ujistit, že žáci zadání rozumí, třeba i před samotným testováním žákům několik jednodušších úloh ukázat. Domnívám se, že tato úloha, a především ní vyvolána třídní diskuse, mají potenciál zvyšovat žákovská porozumění pozičnímu zápisu čísla.

5.4.1.6. Řešení 6. úlohy



Obrázek 99: ukázka, 6. úloha

2. ročník

Poslední úloha je opět úlohou standardní, která však vzhledem k číselnému oboru neměla ve 2. ročníku takovou úspěšnost, jako v ročnících vyšších.

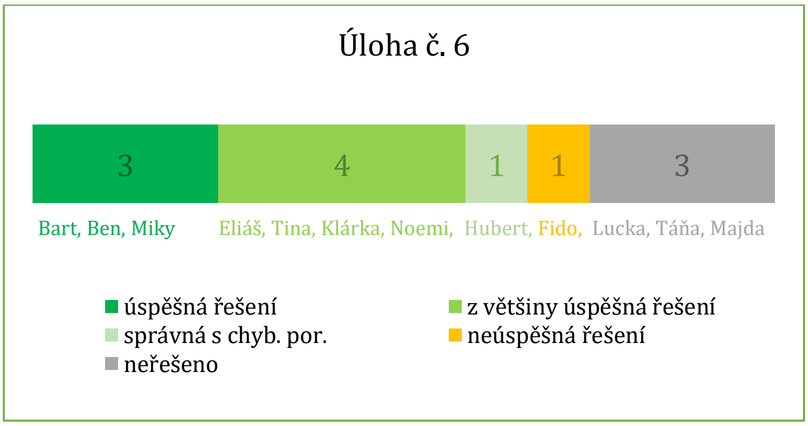
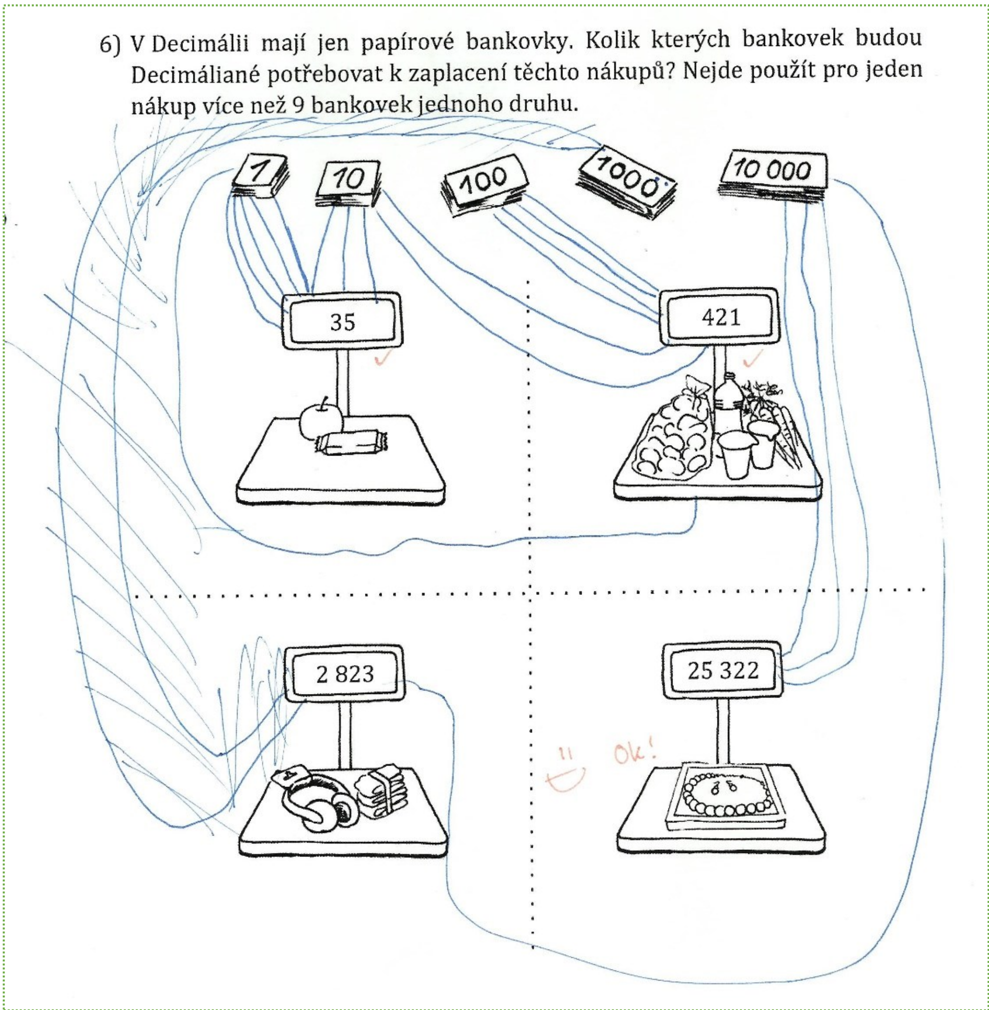


Diagram 45

Zcela úspěšní byli 3 řešitelé, z čehož Ben využil skulinky v zadání, které nedefinuje, že je potřeba platit přesné částky. Ben přesně zaplatil první dva nákupy a chystal se obdobně zaplatit i třetí nákup. Zřejmě v průběhu toho si skuliny všiml a další práci si zjednodušil zaplacením vyšší částky.

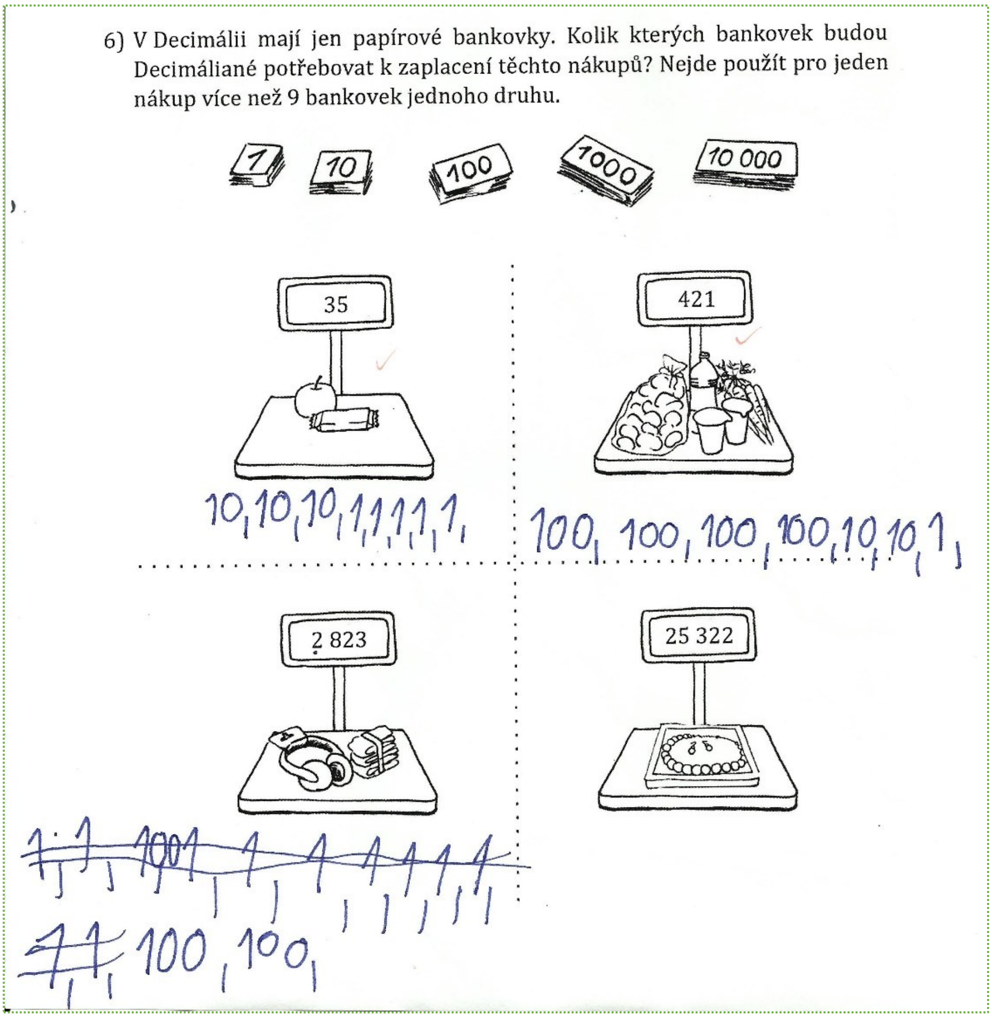


Obrázek 100: řešení Bena, 6. úloha

Klárka zaplatila správně první tři nákupy a poslední zcela vynechala. U jejího řešení jsou také vidět dvě čáry vedoucí od 10 000 ke třetímu nákupu, které však posléze škrtla. Zřejmě si uvědomila, že tato bankovka neznázorňuje 1 000, ačkoliv s pěticifernými čísly má zatím Klárka malé zkušenosti. U posledního nákupu si zřejmě nebyla jistá právě oněmi pěticifernými čísly a možná proto jej vynechala.

Dva řešitelé zaměnili řády v pěticiferném čísle. V jednom případě je tak místo 2 desetitisíc zaplaceno 2 tisíci a původních 5 tisíc v čísle je vynecháno. Ve druhém případě je použito 5 desetitisíc a původní 2 desetitisíce jsou vynechány. Je možné, že je to způsobeno slabším porozuměním pěticiferných čísel. Noemi a Tinka se pravděpodobně s takto vysokými řády nesetkaly a pozice v čísle pro ně nebyla dostatečným vodítkem. Obě chybovaly i v pěticiferném čísle v první úloze.

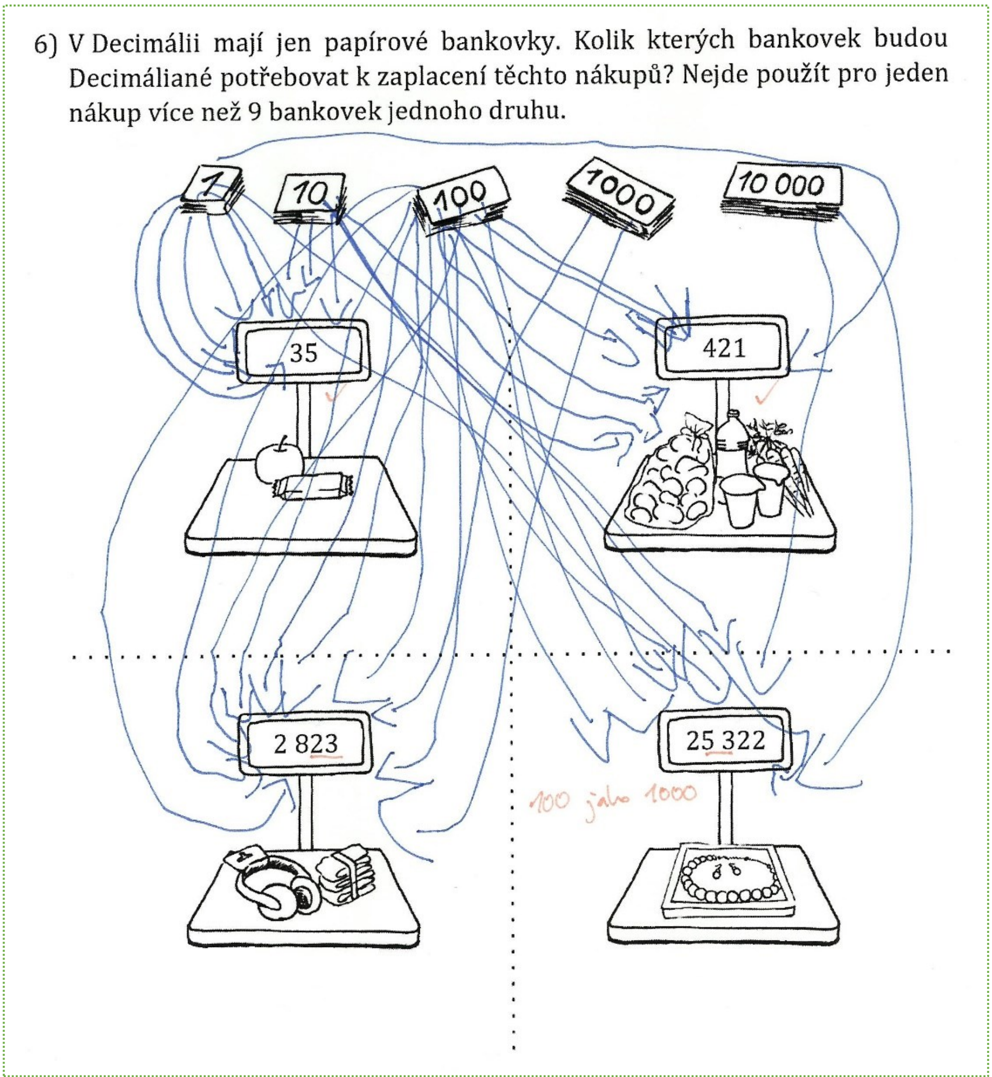
Fido správně zaplatil první dva nákupy, ve třetím k řešení nedošel a svůj návrh škrtl. Čtvrtý nákup vynechal. Fido v této úloze, jako i jiní řešitelé, patrně narazil na své limity a uvědomil si je. S touto reflexí svých možností už se o další podúlohu nepokusil.



Obrázek 101: řešení Fida, 6. úloha

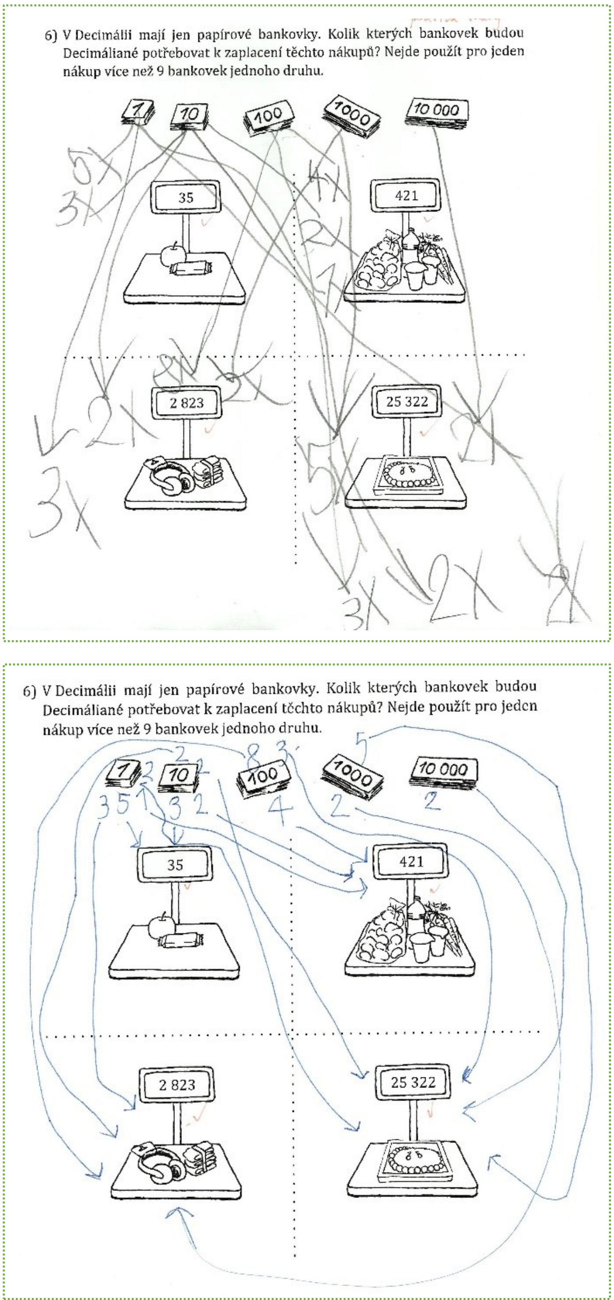
Hubert, již zmiňovaný žák s OMJ, spojil nákup s bankovkami vždy pouze jednou čarou a s jednou bankovkou zastupující nejvyšší řád v daném čísle. Nějaké porozumění číslům tedy projevil, ale zřejmě neporozuměl zadání, pokud ho vůbec četl.

U tří řešitelů se vyskytly drobné chyby zřejmě způsobené volbou méně přehledného přiřazování bankovek počtem čar. Tento zápis jsem si pro potřeby této práce nazvala jako *čárovaný*. V takovém zápisu bylo zřejmě pro řešitelé snadné něco přehlédnout. Typicky tito řešitelé opomenuli některý z řádů. Je zajímavé, že se způsob zápisu mezi ročníky vyvíjel. U nižších ročníků bylo spojování čarami velmi oblíbené, ale s vyššími ročníky se postupně vytrácelo. Ve 2. ročníku využilo čárování 5 z 8 žáků řešících úlohu (včetně Táni, bez Huberta). V některých případech byl vývoj zápisu pozorovatelný i v rámci řešení jednoho řešitele.



Obrázek 102: řešení Eliáše, 6. úloha – čárování

Pozoruhodný je fakt, že oba zcela úspěšní řešitelé této úlohy používali nezávisle na sobě obdobný způsob zápisu, který jsem si nazvala *indexované čáry*. Jedná se o šipky nebo čáry od bankovek, ale vždy pouze jednu a kvantita bankovek je připsaná číslicí. Spolu s žáčkou zmiňovanou v následujícím odstavci byli také jediní ze své třídy, kteří tento zápis zvolili.



Obrázek 103: řešení Barta a Mikyho, 6. úloha – indexované čáry

Úlohu vypustili 3 řešitelé, mezi něž je započtena i Táňa, která správně zaplatila pouze první nákup a zbylé vynechala. Domnívám se, že neřešení úlohy může souviset i s nižší čtenářskou gramotností v tomto ročníku.

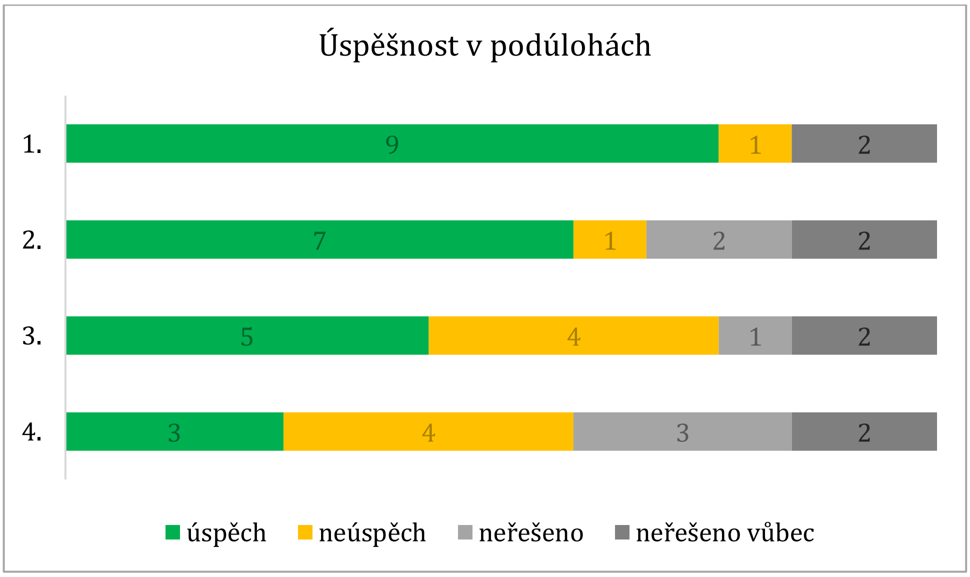


Diagram 46

3. ročník

Úspěšnost poslední úlohy byla ve 3. ročníku vysoká. Většina, tedy 7 řešitelů, byla zcela úspěšná, 2 řešitelé udělali chybu, která se zdá být spíše z nepozornosti. Do kategorie *jiné* spadá Marek, z jehož řešení nelze přesně vyčíst odpověď.

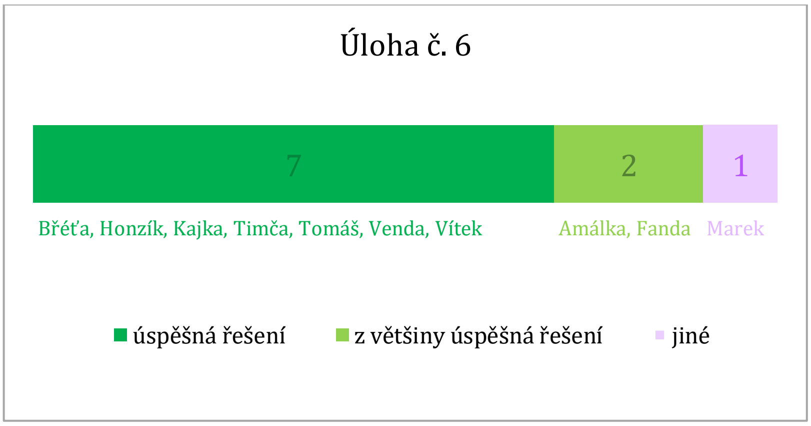
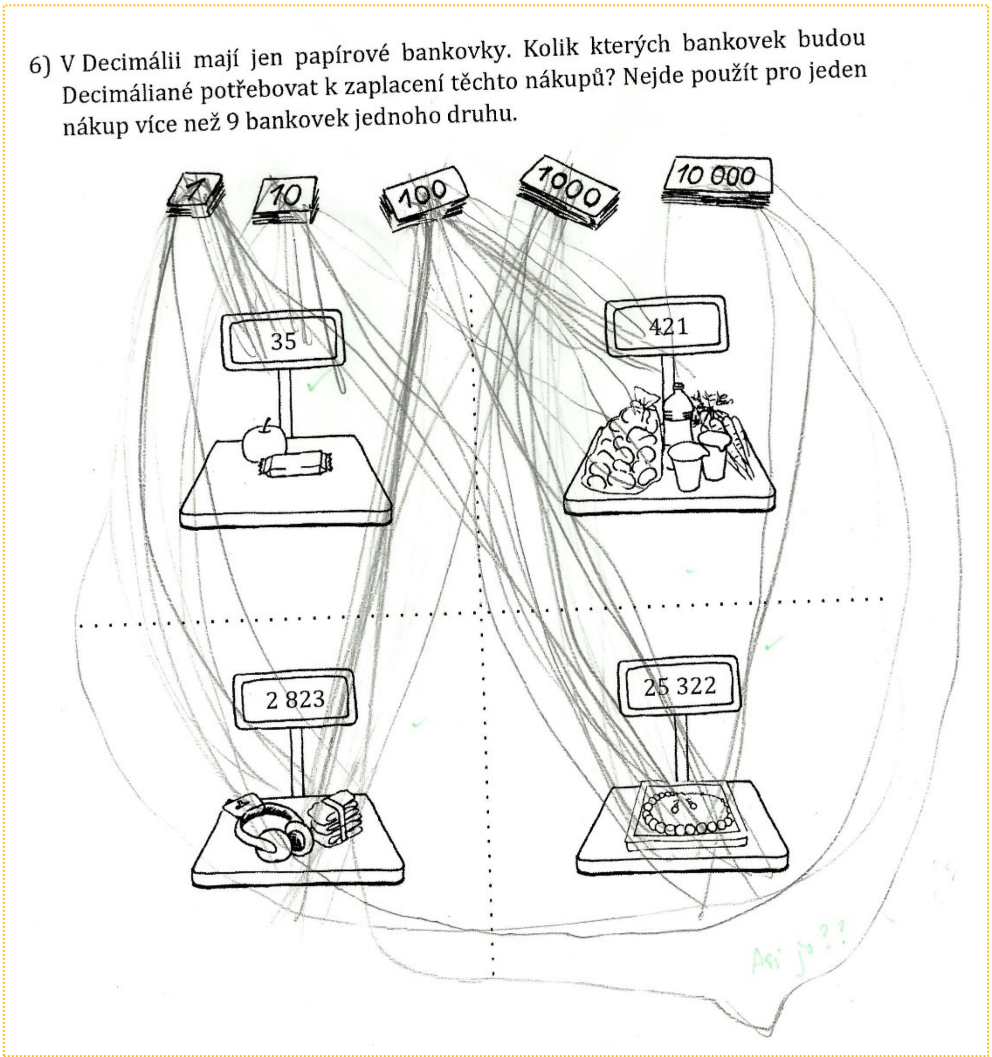


Diagram 47

Amálka udělala chybu pouze v poslední podúloze, kde zapomněla znázornit řád tisíců. Ostatní řády však má znázorněné správně. Chyb, které hodnotím jako chyby z nepozornosti, se dopustil také Fanda, který ve 3. podúloze znázornil 3 místo 2 tisíc. Ve 4. podúloze Fanda znázornil řád desetitisíců dvakrát, ale zapomněl na řád tisíců.

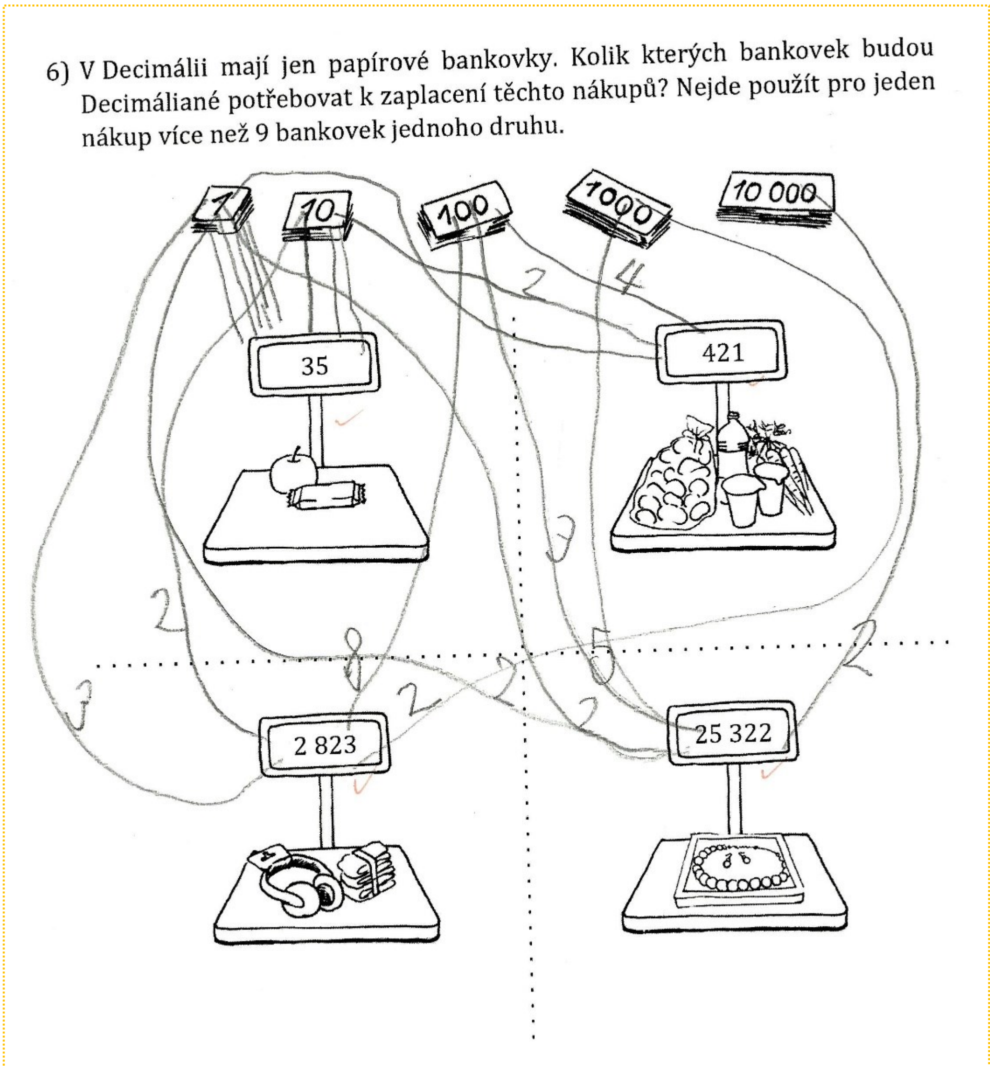
Pozoruhodný je opět vývoj zápisu řešení. Polovina, tedy 5 žáků použilo indexované čáry, tedy jednu čáru pro každý řád, ke které je číslicí dopsán počet příslušných bankovek. Břéťa si pro ještě větší přehlednost rozlišil jednotlivé podúlohy barvou čáry. V jeho zápisu navíc nejsou patrné žádné původní pokusy tužkou, ale vše je od začátku řešeno barevnými fixy. Břéťa tedy musel předjímat, že zápis v této úloze může být nepřehledný. Další 3 žáci ke každé podúloze dokreslili příslušný počet bankovek. Takovýto zápis jsem nazvala *prostý bankovkový*. Kajka jako jediná využila zápis *slovní*. Pouze Marek použil čárovaný zápis, který byl typický pro 2. ročník. Marek je v matematice spíše slabší. Jeho řešení této úlohy je v kolonce jiné, neboť je zápis dost nepřehledný a nelze jednoznačně určit, zda je správný. Pouze ve 2. podúloze je Markovo řešení jednoznačně chybné, neboť použil i desetitisícovou bankovku. Čár v jeho řešení je většinou více, než by pro správné řešení mělo být, ale některé jsou slabší a jiné silnější. Je také možné, že Marek opakovaným čárováním zakrýval svoji nejistotu ohledně správnosti řešení. Ukázku Markova řešení přikládám.



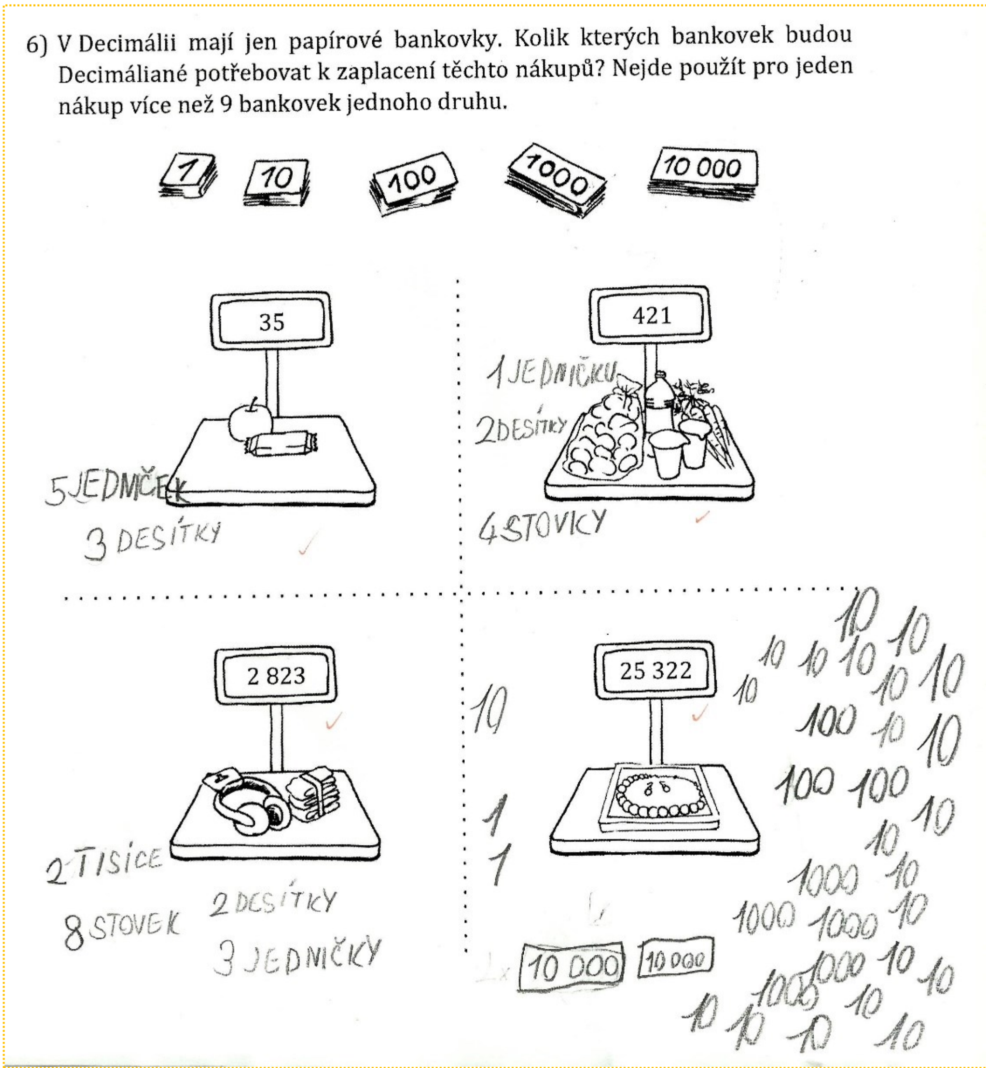
Obrázek 104: řešení Marka, 6. úloha

Ve dvou případech, které přikládám níže, se způsob zápisu vyvíjel. V řešení Vítka (obr. 105) vidíme progresivní vývoj z čárovaného zápisu v 1. podúloze na indexovaný zápis v dalších podúlohách. V řešení Kajky je patrný regresivní vývoj ze slovního zápisu v prvních třech úlohách na zápis bankovkový v poslední podúloze. Domnívám se, že vyšší obtížnost v poslední podúloze vedla Kajku k volbě zápisu nižší úrovně. V jejím řešení je vidět, že chtěla původně zvolit zápis *kvantifikovaný bankovkový*, který je podobnější jejímu původnímu slovnímu. Zřejmě jej volila proto, že nevěděla, jak se číslo 10 000 čte. Posléze ale přešla na prostý bankovkový zápis, zbylé bankovky už ale pro časovou úsporu neohraničovala. Je zvláštní, že bankovkový zápis nevyužila pouze pro řád, který nedokázala pojmenovat a nepokračovala v nižších řádech s původním slovním zápisem. Možná si u pěticiferného čísla nebyla jistá, zda se řádům stále říká tisíce, stovky a jednotky.

Spíše ale předpokládám, že už se nad efektivitou zápisu nepozastavila a pokračovala ve způsobu, jakým začala s nejvyšším řádem. Je patrné, že pěticiferné číslo bylo pro ni samo o sobě náročné a zahlcující a na přemýšlení o zápisu už nezbyla kapacita.



Obrázek 105: řešení Vítka, 6. úloha – progresivní vývoj zápisu



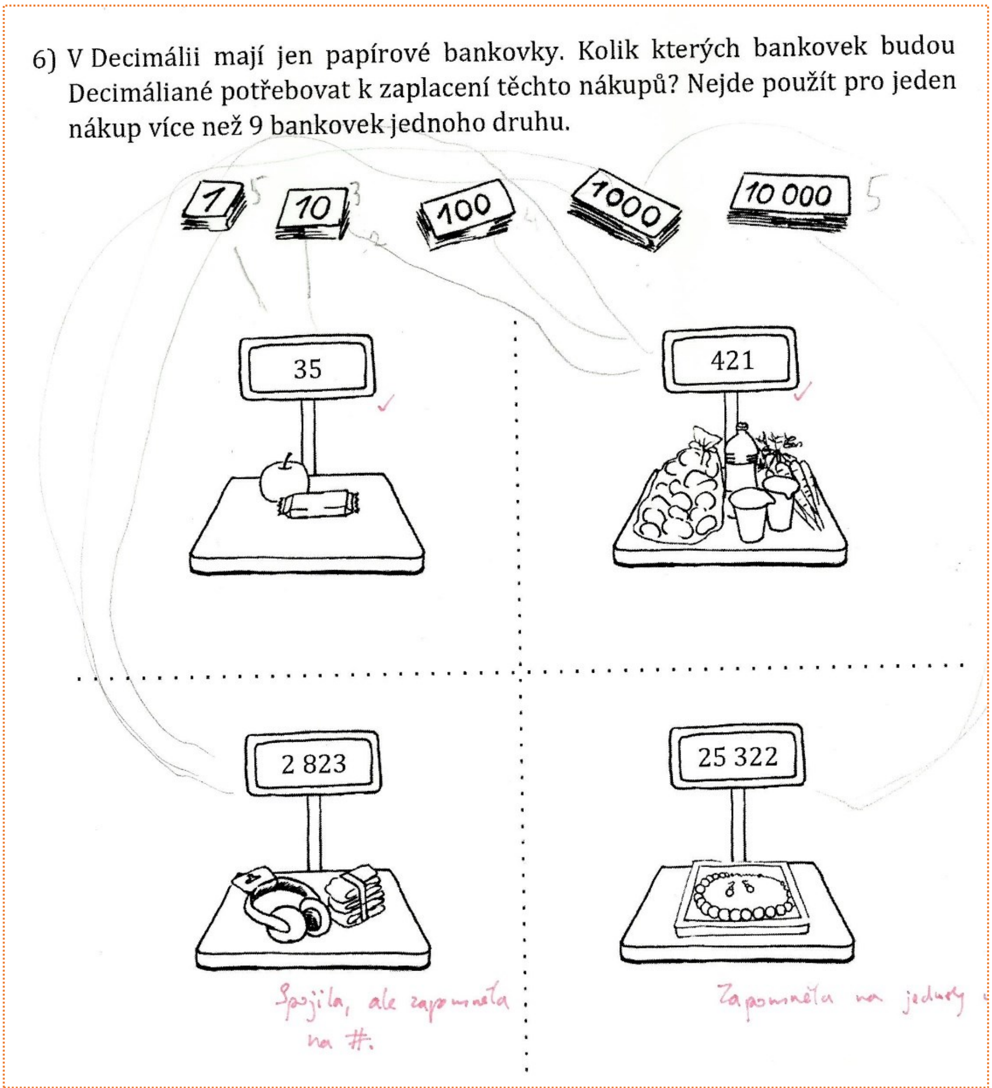
Obrázek 106: řešení Kajky, 6. úloha – regresivní vývoj zápisu

4. ročník

Úloha měla dle očekávání vysokou úspěšnost. Ze všech řešitelů byla pouze Kamča neúspěšná.

Diagram 48

Kamča úspěšně využila zápisu pomocí indexovaných čar v prvních dvou úlohách. Ve druhých dvou podúlohách pokračovala se spojením čárami, chybí však indexy a většina řádů. Není mi zřejmé, zda Kamča na indexy později zapomněla, nebo je nepovažovala za důležité. Ve 3. podúloze spojila nákup s tisícovou bankovkou dvakrát, což připomíná čárovaný zápis.



Obrázek 107: řešen Kamči, 6. úloha

Řešení Madly, která zaplatila vždy jen počet nejvyšších řádu se zaokrouhlení nahoru a řešení Tobíka, který ve třetí podúloze namísto jednotek a desítek zaplatil o dvě stovky víc, jsem považovala za správné, neboť v zadání úlohy není vyloučeno placení s vratkou.

Přikládám diagram úspěšnosti v jednotlivých podúlohách.

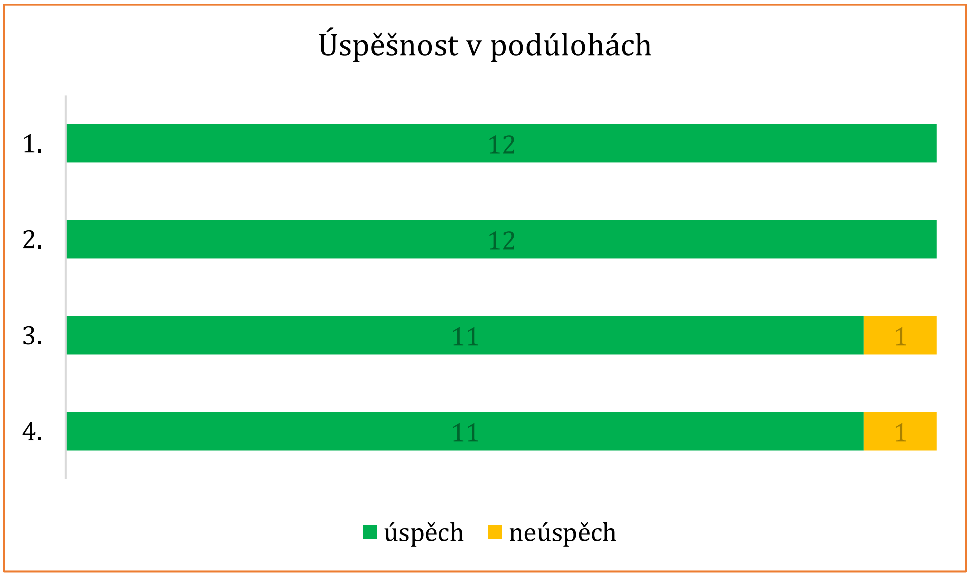
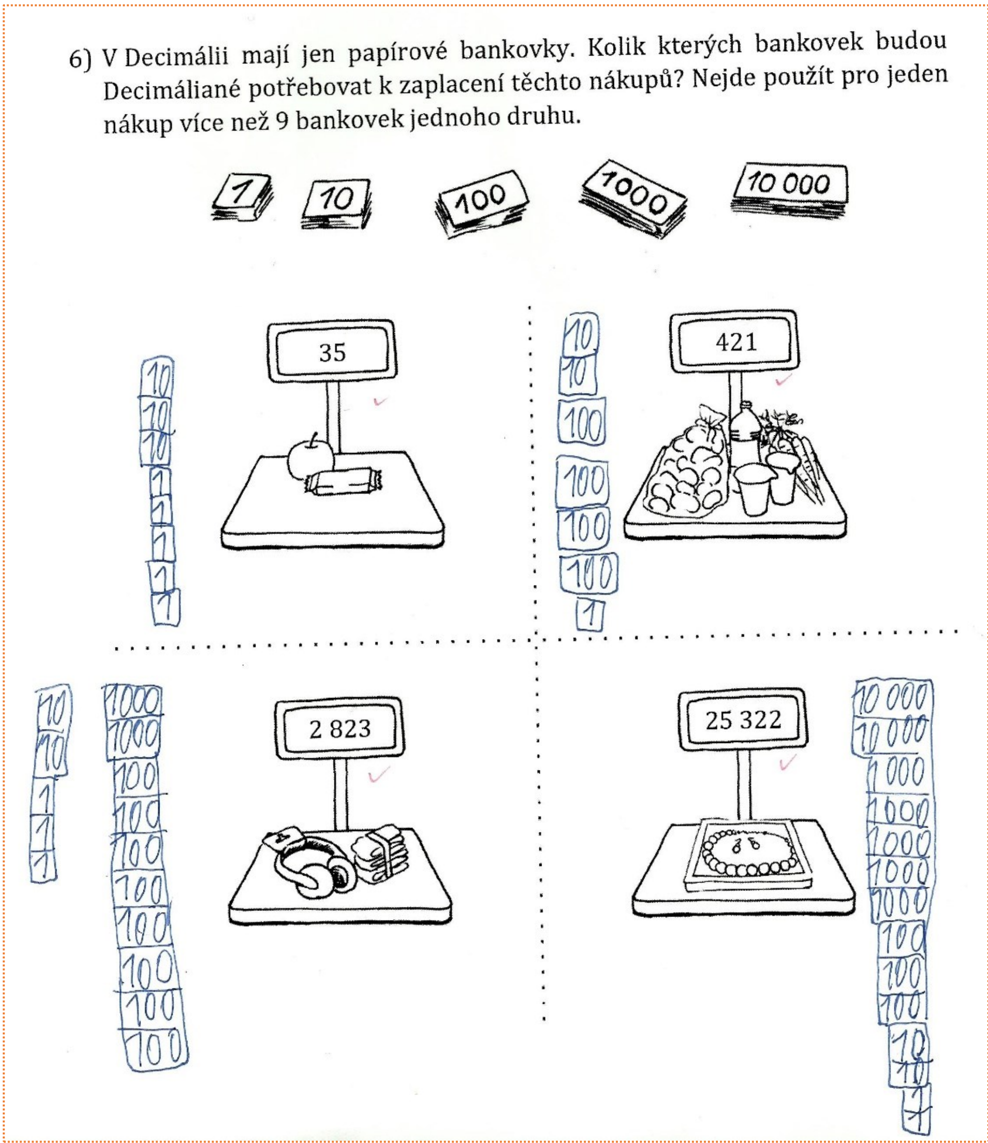


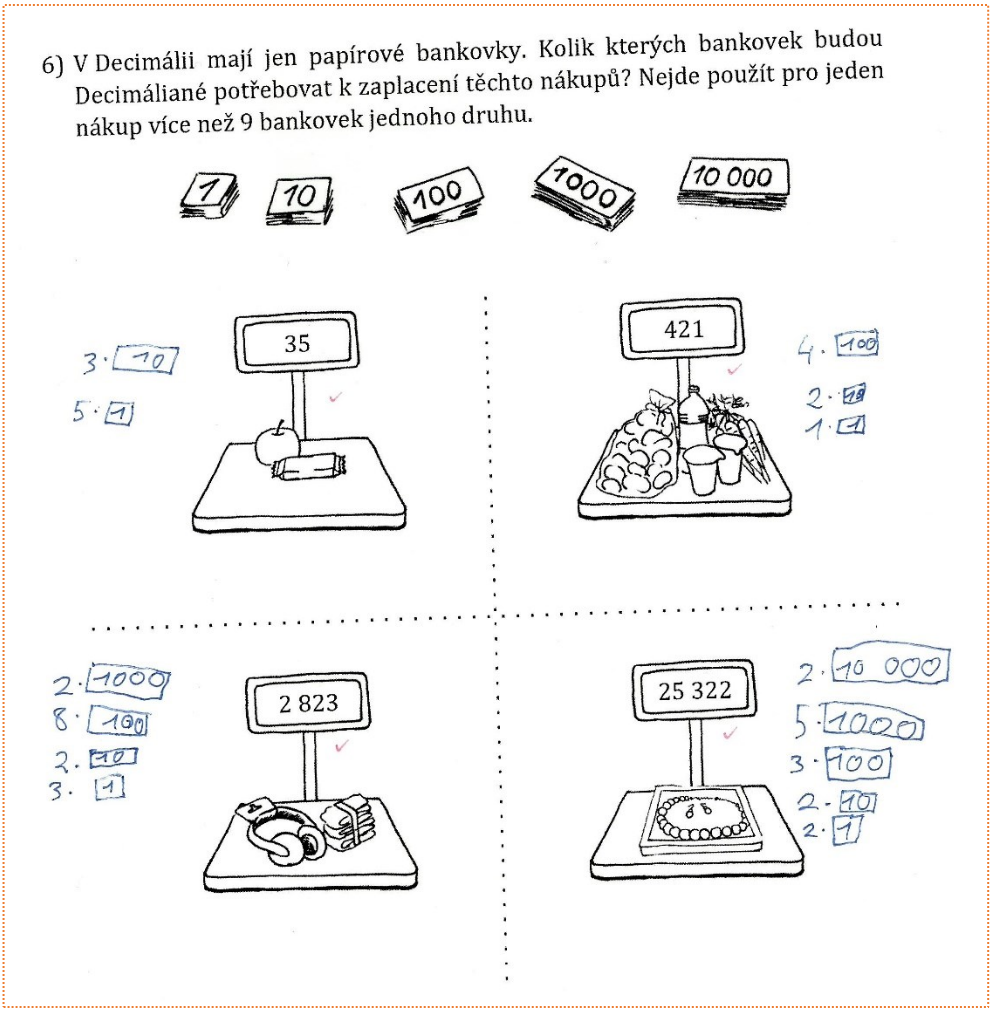
Diagram 49

I u takto úspěšné třídy mě zajímal vývoj zápisu. Pouze Šťěpán a Kamča použili zápis pomocí indexovaných čar. Štěpán byl celkově v testu velmi úspěšný. Klaudi a Vláďa použili přímý bankovkový zápis, z čehož Vláďa si pro úspornost kreslení sdružoval bankovky do sloupců (obr. 108). Valda použil kvantifikovaný bankovkový zápis (obr. 109). Zvlášť vyděluji zápis *kvantifikovaný řádový*, ačkoliv se od kvantifikovaného bankovkového odlišuje pouze absencí ohraničení bankovek. Tento zápis vymezuji zvlášť, neboť předpokládám u žáků, kteří ho zvolili, vyšší míru abstrakce v této úloze. Tento žák už pravděpodobně nevnímá sémanticky počet bankovek, ale jde po podstatě úlohy, tedy určení, jak je který řád zastoupený. To samozřejmě nelze tvrdit s jistotou a předpokládám, že vztah zápisu a míry abstrakčního porozumění je korelační, nikoliv kauzální. Roli určitě sehrává i tvořivost řešitele, potřeba dodržovat sémantické kontexty úloh a další potenciální faktory. Kvantifikovaný řádový zápis využilo 5 řešitelů. Níže předkládám ukázky zápisů včetně dosud nezmiňovaného řešení Tobíka, jehož zápis prošel vývojem i v rámci této jedné úlohy. Tobík (obr. 111) začal s *neohraničeným přímým bankovkovým* zápisem jako měla Kajka z 3. ročníku v poslední podúloze. Ve 2. a 3. podúloze využil Tobík zápis neohraničený přímý bankovkový, ale už organizovaný do sloupců. V poslední podúloze, zřejmě veden vědomím, že zde už by bylo bankovek mnoho, využil kvantifikovaný řádový zápis. Tobík už od začátku nepoužíval ohraničení, zřejmě tak i u přímého bankovkového zápisu vnímal, že na sémantice v úloze tolik nezáleží.

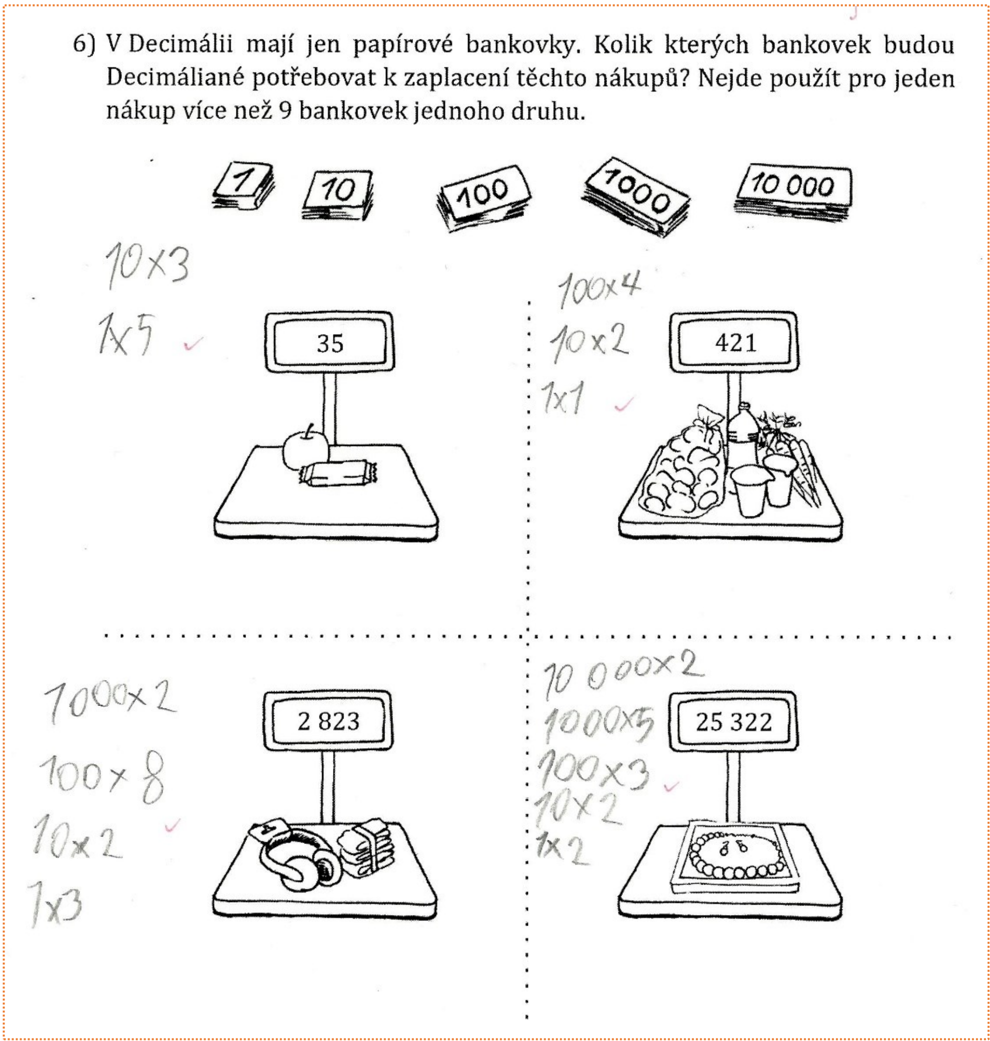


6) V Decimálii mají jen papírové bankovky. Kolik kterých bankovek budou Decimáliané potřebovat k zaplacení těchto nákupů? Nejde použít pro jeden nákup více než 9 bankovek jednoho druhu.

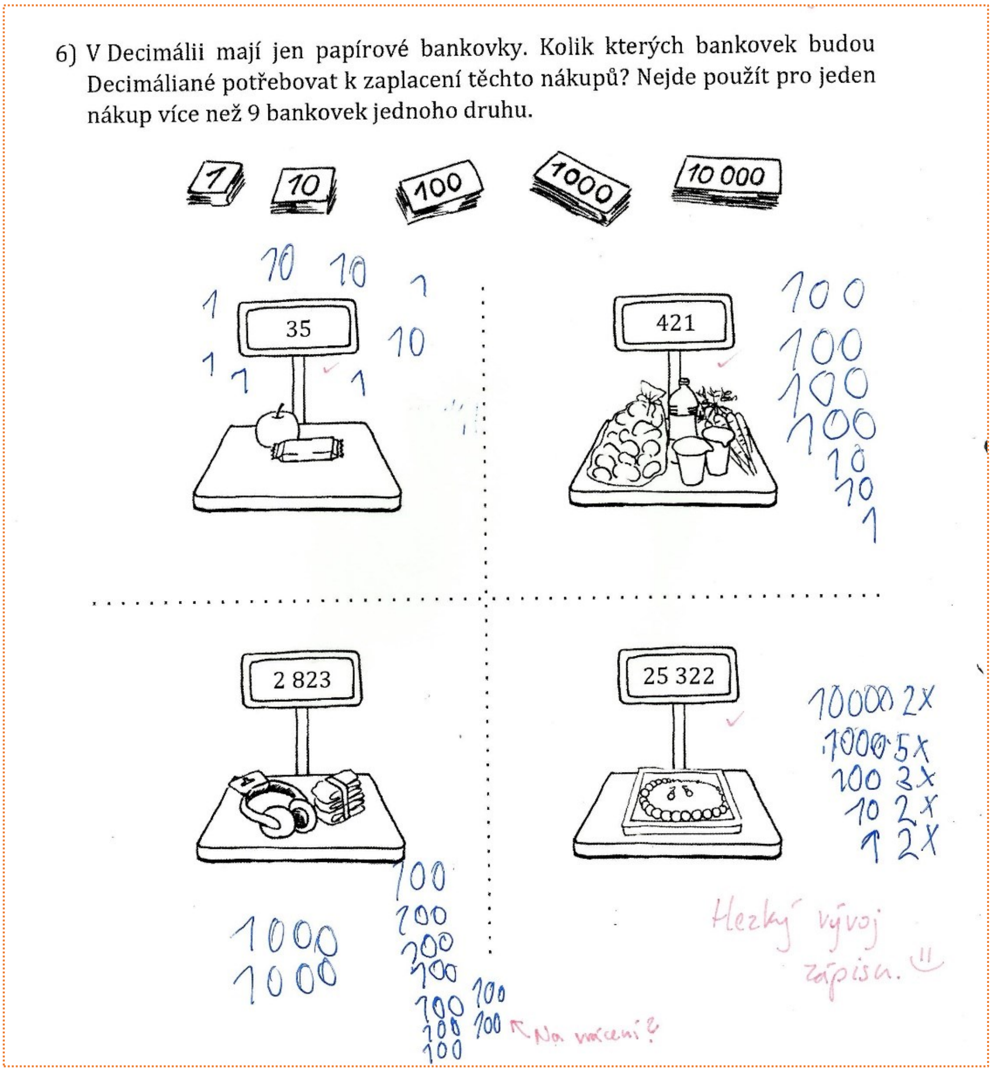
Obrázek 108: řešení Vládi, 6. úloha – prostý bankovkový zápis ve sloupcích



Obrázek 109: řešení Valdy, 6. úloha – kvantifikovaný bankovkový zápis

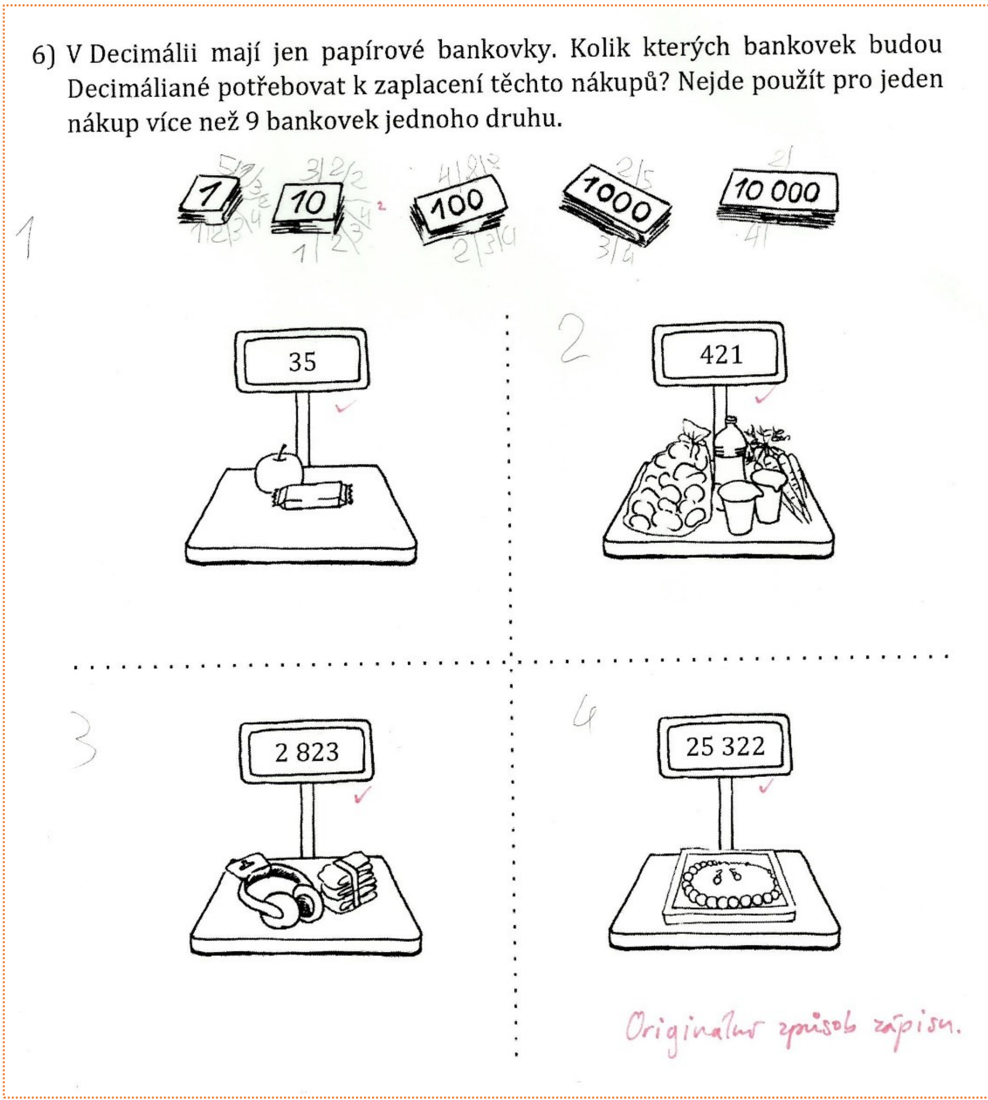

6) V Decimálii mají jen papírové bankovky. Kolik kterých bankovek budou Decimáliané potřebovat k zaplacení těchto nákupů? Nejde použít pro jeden nákup více než 9 bankovek jednoho druhu.

Obrázek 110: řešení Alenky, 6. úloha – kvantifikovaný řádový zápis



Obrázek 111: řešení Tobíka, 6. úloha – progresivní vývoj zápisu

Jako poslední zmíním zápis Olega, který se mezi všemi řešiteli vyskytl pouze jednou a je na tolik specifický, že jej označuji jako *Olegův zápis*. Oleg si nejdříve očísloval podúlohy, poté ke každé bankovce dopsal seshora počet využitých bankovek tohoto druhu a zezdola číslo podúlohy. Jednotlivá čísla pak oddělil čárkami.



Obrázek 112: zápis řešení Olega, 6. úloha

5. ročník

V poslední úloze byla v 5. ročníku velmi vysoká úspěšnost, což odpovídá očekáváním. Ze všech 13 řešitelů pouze Maxim nebyl úspěšný, avšak i ten vyřešil alespoň 1. podúlohu.

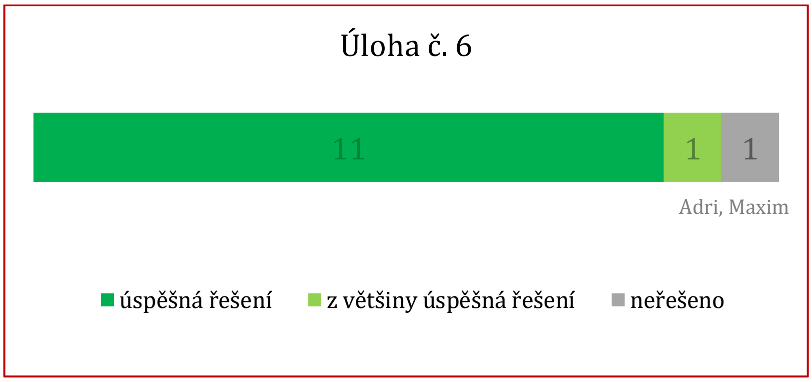
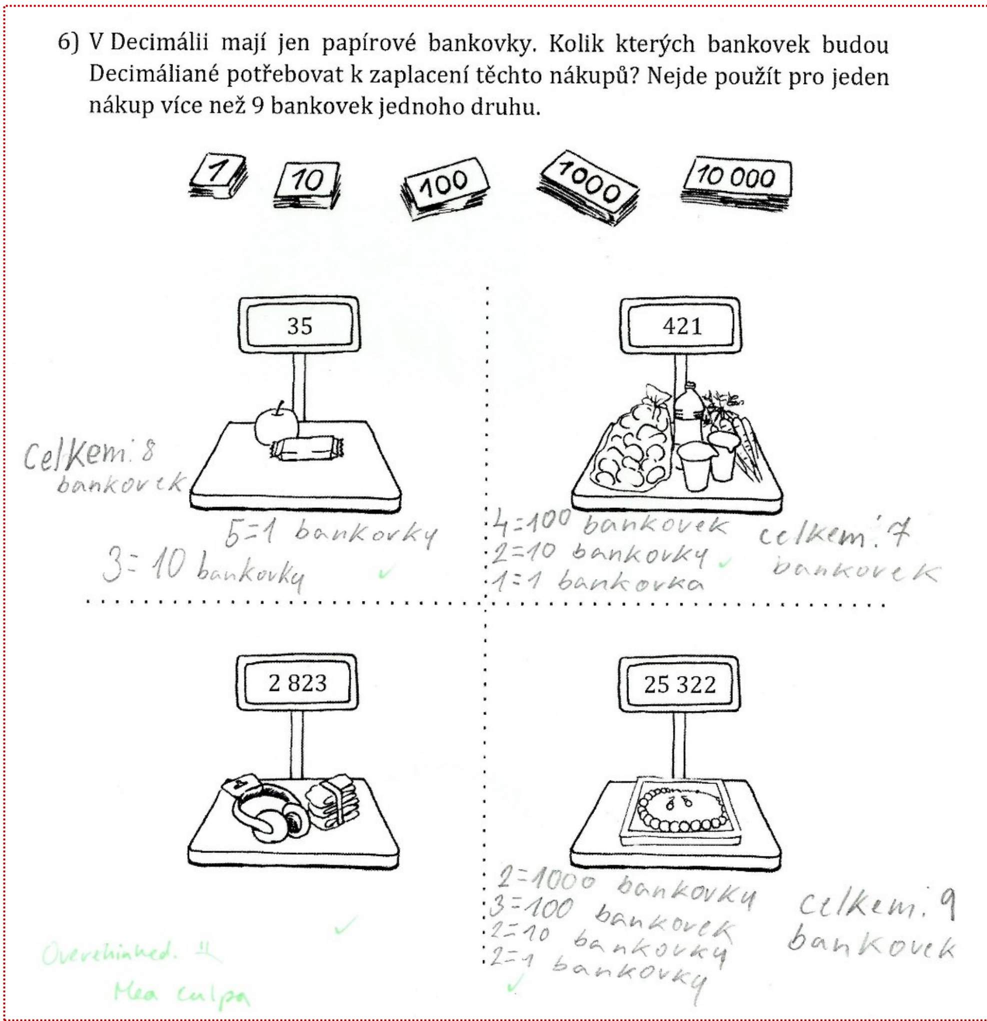


Diagram 50

Mia se dopustila jediné chyby tím, že v poslední podúloze vypustila řád tisíců. Vzhledem k jejím problémům se soustředěním považuji tuto chybu za drobnou a celkový výsledek v úloze za obdivuhodný. Mia navíc použila klasický rozvinutý zápis, který je, podle mého názoru, pro pracovní paměť jedním z náročnějších.

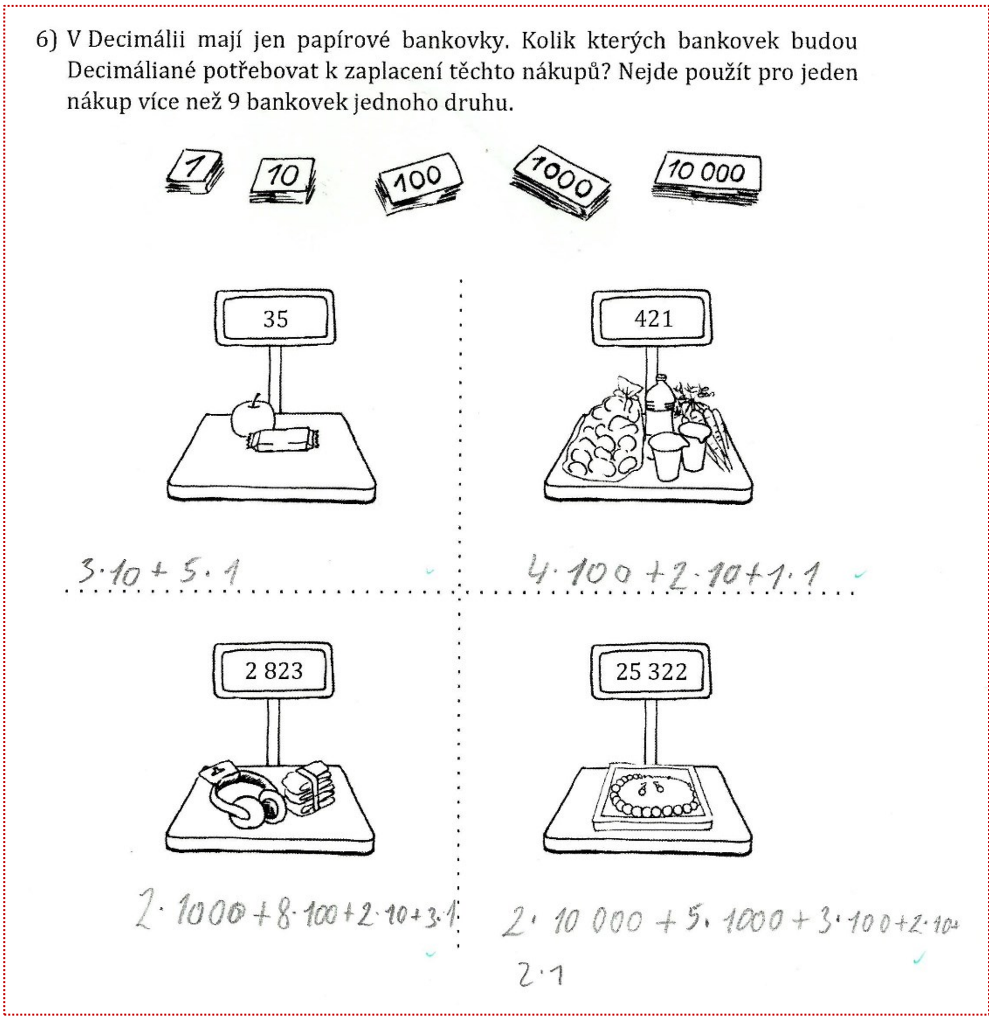
Adri zřejmě neporozuměla zadání správně a ztížila si tím práci. U každého nákupu Adri počítala bankovky tak, aby nepřesáhla počet 9 bankovek dohromady, proto také vynechala 3. podúlohu, ve které nebylo možné zadání podle její interpretace splnit. Ve 4. podúloze se však dopustila chyby, která jí zaplacení nákupu umožnila. Adri zde vypustila řád desetitisíců a namísto toho dvojku ze začátku čísla použila pro řád tisíců. Je možné, že by se stejné chyby nedopustila při zamýšlené interpretaci zadání, tedy že ji obtížnost úlohy v jejím podání zahltila natolik, že si číslo nevědomky zjednodušila. Může to však svědčit i o jejích slabších dovednostech v takto velkém oboru čísel.



Obrázek 113: řešení Adri, 6. úloha

Maxim vyřešil pouze 1. podúlohu, a to správně. Jelikož však dál nepokračoval, bylo jeho řešení zahrnuto do kategorie neřešeno.

Paleta způsobů zápisů řešení byla v 5. ročníku už poměrně pestrá. Nejvíce zastoupený byl klasický rozvinutý zápis, který využili 4 řešitelé.



Obrázek 114: řešení Rebi, 6. úloha – rozvinutý zápis

Shrnutí

Poslední úloha byla míněna opět jako motivační. S výjimkou řešitelů z 2 ročníku, pro které byla nestandardní velikost číselného oboru, byla úloha velmi úspěšně řešenou úlohou, spolu s 2. úlohou se jednalo o nejúspěšnější úlohy testu Pozemská čísla.

Častými chybami vyskytujícími se napříč ročníky bylo opomenutí některého z řádu při volbě méně přehledného zápisu nebo i v jiných případech. Tyto chyby však podle mého názoru nevypovídají o porozumění pozičnímu zápisu čísla. Dalším možným úskalím bylo neporozumění zadání časté ve 2. ročníku, ale vyskytující se i ve vyšších ročnících. Mezi jevy, které podle mě vypovídají o úrovni porozumění pozičnímu zápisu čísla, pak patřila záměna řádů nebo vůbec vynechání či nedořešení obtížnějších podúloh.

Pro mě velmi zajímavým pozorovaným fenoménem byla volba způsobu zápisu, která se v jednotlivých ročnících obměňovala. Tento jev mi přišel zajímavý nejen proto, že s vyššími ročníky se stával zápis přehlednějším, uspořádanějším, ale také kvůli pozorované korelaci mezi volbou zápisu a celkovou úspěšností v testu, zejména v nižších ročnících, kdy byli zpravidla úspěšnější ti řešitelé, kteří i volili vyspělejší zápis. Zda úroveň porozumění pozičnímu zápisu čísla skutečně ovlivňuje volbu zápisu nebo naopak, by bylo potřeba blíže prozkoumat a zůstává tak oblastí pro možný další výzkum.

Osobně se domnívám se, že volba zápisu souvisí s úrovní abstrakcí žákova porozumění tématu obecně, nejen pozičnímu zápisu. S porozuměním pozičnímu zápisu pak bude dle mého názoru souviset zejména volba těch zápisů, které se odprošťují od sémantického kontextu a zaměřují se čistě na řády (zejména zápisy *kvantifikovaný řádový* nebo *rozvinutý*). Pozornost si jistě zaslouží i uspořádání řádů, a to i řádů znázorněných bankovkami, při kterém řešitel nejen projevuje potřebu si zápis uspořádat, ale také ukazuje své porozumění posloupnosti řádů. Ve vyšších ročnících může být toto natrénovanou dovedností, ve 2. a 3. ročníku ale i pouhé shlukování stejných řádů k sobě podle mě svědčí o vypozorovaném vzorci v pozičním zápisu čísla.

Diagram níže znázorňuje procentuální zastoupení daného druhu zápisu v jednotlivých ročnících bez ohledu na řešitelovu úspěšnost v úloze. Zvláštní pozornost si dle mého názoru zaslouží výskyt klasického rozvinutého zápisu v 5. ročníku, a to i přes to, že takovému zápisu nebyli v tomto ani v dřívějších ročnících učeni. Domnívám se, že to může souviset s vnímáním čísla jako celku, tedy s jakousi potřebou jednotlivé řády spojit do jednoho matematického výrazu (jedné číselné hodnoty) pomocí vložených plusů.

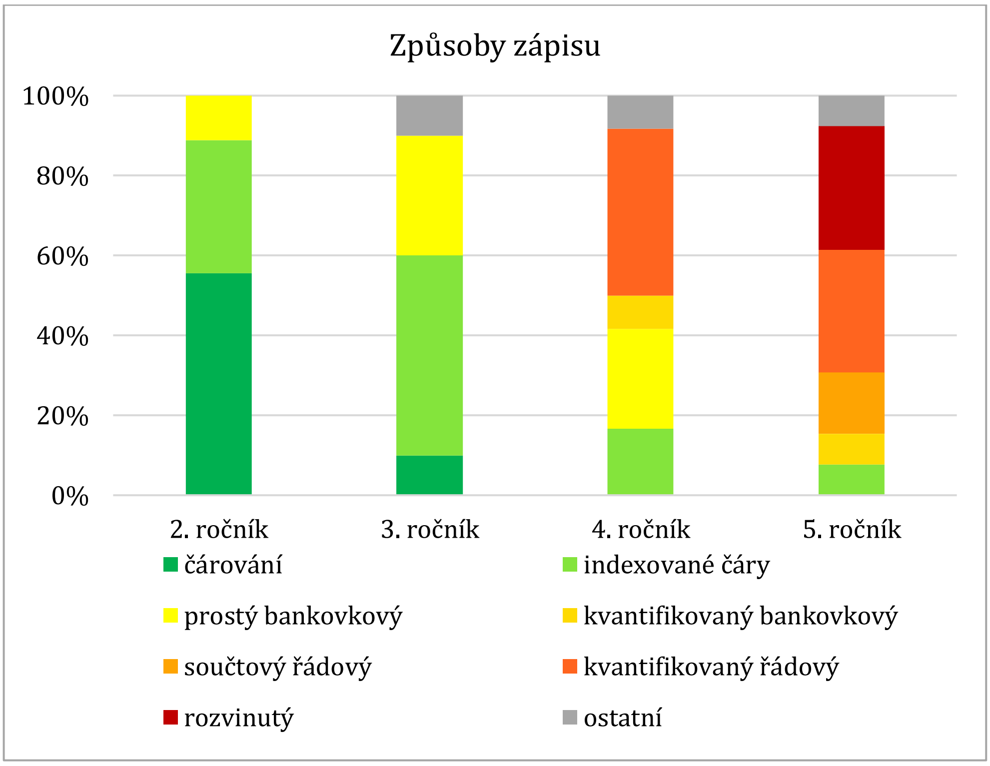


Diagram 51

Pro porovnání přikládám také diagram, který pro každý ročník rozlišuje volbu zápisu v rámci úspěšně, z většiny úspěšně a neúspěšně řešené úlohy. Neúspěšně řešené úlohy sdružují všechny formy neúspěchu kromě neřešení úlohy. Od 3. ročníku výše je z diagramu patrné, že neúspěch v úloze často souvisel i s volbou méně vyspělé formy zápisu.

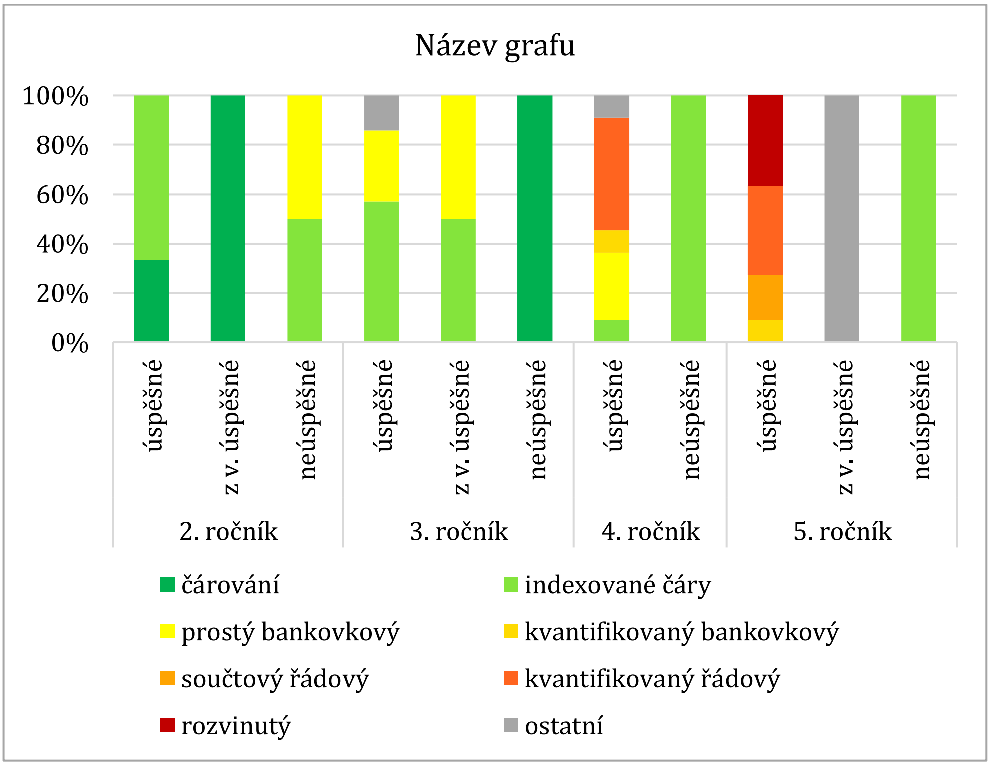


Diagram 52

Úloha podle mého názoru splnila svůj účel jako motivační závěrečná úloha, ale zároveň přinesla doplňující vhled do porozumění žáků. Navíc, aniž by to bylo předem očekáváno, nastínila další možnou oblast výzkumu, a to zkoumání vztahu mezi zvoleným zápisem řešení a porozuměním problému ať už v tématu pozičního zápisu čísel nebo v matematice obecně.

5.4.1.7. Nominace k testu Mimozemská čísla

Řešitelé didaktického testu Pozemská čísla byli na základě svých řešení rozřazeni do 3 kategorií: *silně doporučení*, *doporučení* a *ostatní*. Žákům bylo před samotným zadáním testu Mimozemská čísla sděleno, u koho bych velmi chtěla, aby se testu zúčastnil (*silně doporučení*) a u koho budu také ráda, kdyby se pro test rozhodl. Všichni ostatní se však také mohli přidat a stejně tak nominovaní se zúčastnit nemuseli. Nestalo se, že by se někdo ze silně doporučených rozhodl testu Mimozemská čísla nezúčastnit.

Řešitelé byli do skupin nejprve rozřazováni intuitivně na základě úspěšnosti v úlohách. Důležitým parametrem byly nestandardní úlohy, kde měla význam nejen objektivní úspěšnost, ale i ochota se do řešení nestandardních úloh pouštět. Dále bylo nahlédnuto řešení standardních úloh 1. a 6. s předpokladem, že řešitelé, kteří by byli v těchto úlohách neúspěšní, by měli velké obtíže v navazujícím obtížnějším testu.

Reliabilita prvotního intuitivního rozdělení byla posléze ověřována tabulkou s jednotlivými kategoriemi a přehledem úspěchu a neúspěchu v dané úloze. Z tabulek ve všech ročnících vyplývalo, že řešitelé spadající mezi silně doporučené byli v naprosté většině úspěšní (*zcela úspěšní* i *z většiny úspěšní*) ve všech nestandardních úlohách, řešitelé doporučení byli přibližně v polovině případů v těchto úlohách úspěšní a v polovině neúspěšní, řešitelé v kategorii ostatní byli ve většině nestandardních úloh neúspěšní (zahrnuje i neřešení úlohy). Jelikož byly výsledky v těchto tabulkách srovnatelné, a především jelikož rozdělení do těchto kategorií nebylo striktní, ale pouze orientační a řešitelé z kterékoliv kategorie se didaktického testu Mimozemská čísla mohli zúčastnit, považovala jsem toto intuitivní rozdělení v daném kontextu za dostatečné.

5.4.2. Mimozemská čísla

Didaktický test Mimozemská čísla byl zadáván ve stejných čtyřech ročnících jako předchozí test Pozemská čísla. Jak je popsáno výše, kdokoliv přítomný se mohl rozhodnout zúčastnit se, ale zejména k tomu byli vyzýváni úspěšní řešitelé testu Pozemská čísla. Výjimkou byly třídy 3. a 4. ročníku, ve kterých byla úspěšnost předchozího testu tak vysoká, že test Mimozemská čísla opět psali všichni přítomní, pokud nechyběli na předchozí test a nechtěli si jej doplnit. Než byl proveden podrobnější rozbor jednotlivých úloh, byla žákovská řešení každé z úloh rozdělena do kategorií: *zcela úspěšná řešení*, *z většiny úspěšná řešení*, *částečně úspěšná řešení, neúspěšná řešení*, *neřešeno* a případně *jiné*. Oproti řešením z předchozího testu už nebyly zařazeny kategorie s chybným porozuměním zadání. Samotné zadání úloh je spíše standardní a kdyby byly zadány s poziční desítkovou soustavou, neočekávala bych chybné porozumění textu. Celý test je vystavěn na odhalení a porozumění principu pozičního zápisu v šestkové soustavě. Každé jiné porozumění principu je zařazeno do kategorií *zcela úspěšná řešení*, *z většiny úspěšná řešení* a *částečně úspěšná řešení* podle míry podobnosti s principem pozičního zápisu čísla. Kategorie *jiné* byla využita jen ve 2. ročníku a seskupuje ta řešení, které nebylo možné zařadit do některé z předchozích kategorií.

Níže přikládám diagram relativní úspěšnosti jednotlivých ročníků v úlohách didaktického testu Mimozemská čísla. Relativní úspěšnost řešení úloh je vypočítána jako vážený součet řešitelů z kategorií *zcela úspěšná řešení* (přiřazeny 3 body), *z většiny úspěšná řešení* (přiřazeny 2 body) a *částečně úspěšná řešení* (přiřazen 1 bod) převedený na procento řešitelů v rámci třídy. Spojnicí je vyznačena průměrná úspěšnost všech tříd v dané úloze.

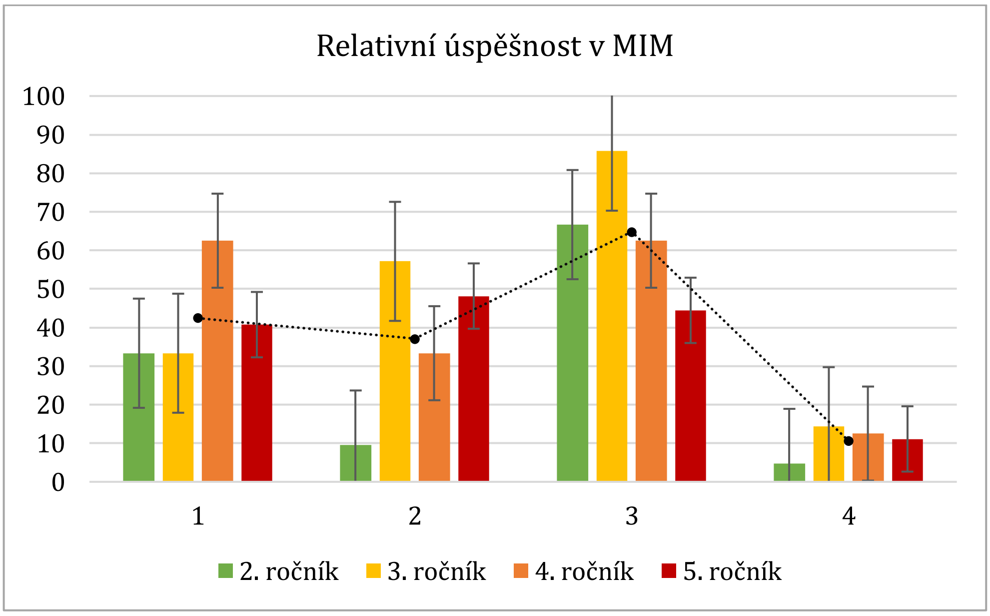


Diagram 53

Jak je vidět na diagramu výše, úspěšnost mezi ročníky nenabývá jednoznačného trendu. Nejméně úspěšní jsou většinou řešitelé z 2. ročníku, ve 3. úloze jsou však velmi úspěšní. Možným příčinám tohoto výsledku se budu věnovat níže. Srovnání mezi třídami však není vypovídající, neboť se testu Mimozemská čísla neúčastnily vždy celé třídy. Velmi záleželo i na motivovanosti méně úspěšných řešitelů testu Pozemská čísla, zda se k navazujícímu testu rozhodnou přihlásit, nebo nikoliv, což se mezi třídami výrazně lišilo. Třetí úloha byla průměrně nejúspěšněji řešenou úlohou testu, což vzhledem k tomu, že její účel není primárně výzkumný, ale především podpůrný, odpovídá očekáváním. Zajímavý je pohled na 1. a 2. testovou úlohu. Ve 2. a 4. ročníku pozorujeme, že byli řešitelé úspěšnější v 1. úloze, oproti tomu ve 3. a 5. ročníku byli žáci úspěšnější ve 2. úloze. Shodou okolností ve 3. a 5. ročníku vyučuji matematiky já, což může mít, ale pravděpodobně nemá, souvislost. Nejméně úspěšní byli žáci ve 4. úloze, což zcela odpovídá očekávání.

Didaktického testu Mimozemská čísla se zúčastnili tito žáci:

	silně doporučení	*doporučení*	*ostatní* / (nepsali PČ)
2. ročník	Bart, Ben, Miky	Eliáš, Klárka	Fido, Noemi
3. ročník	Honzík, Vítek	Břéťa, Fanda, Kajka, Venda	(Maty)
4. ročník	Alenka, Bětka, Klaudi, Štěpán, Valda	Madla	Kamča, (Matylda)
5. ročník	Joel, Lara, Luděk, Martina, Natka, Rebi, Teona	Ota	Jirka, Adri

Tabulka 4: řešitelé DT Mimozemská čísla

5.4.2.1. Řešení 1. úlohy

Obrázek 115: ukázka, 1. úloha

2. ročník

Než se budu věnovat jednotlivým řešením žáků, přikládám přehledovou tabulku úspěšnosti 7 zúčastněných řešitelů.

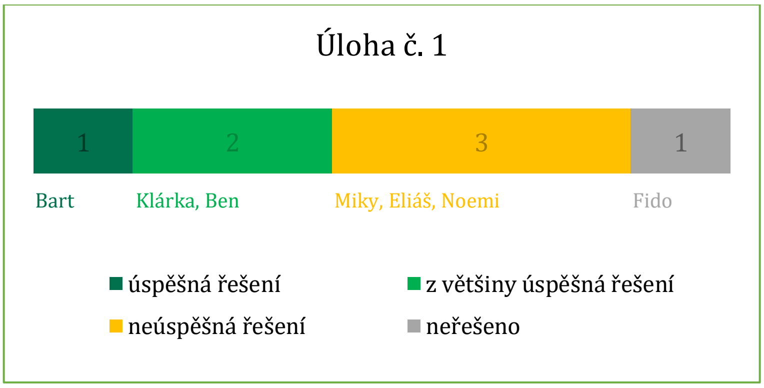
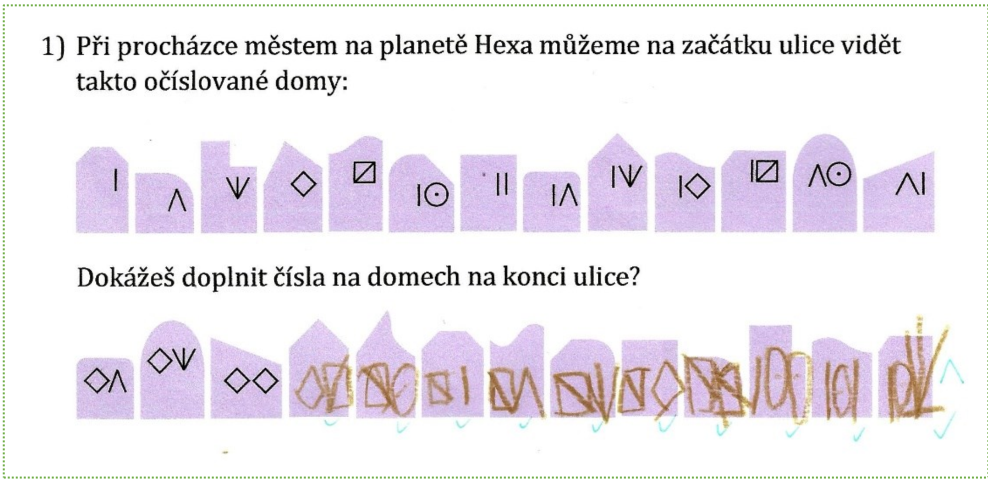


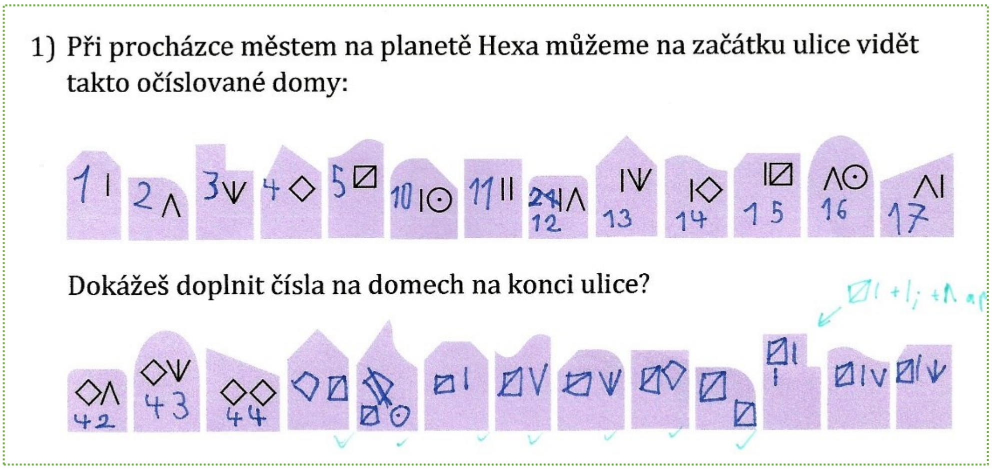
Diagram 54

Pouze Bart vyřešil úlohu zcela úspěšně. V jeho řešení navíc nejsou viditelné žádné škrty, poznámky ani jiné evidence přemýšlení. Jediné chyby se dopustil v posledním čísle, kde doplnil číslo $103_{(6)}$ namísto $102_{(6)}$. Pravděpodobně si jen spletl hexanské číslice.



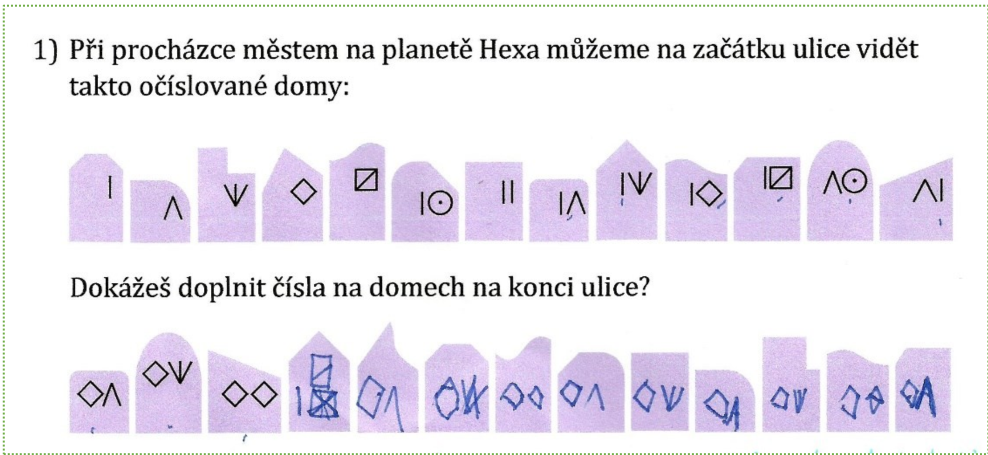
Obrázek 116: řešení Barta, 1. úloha

Ben a Klárka vyřešili úspěšně všechna hexanská dvojciferná čísla, ale měli problém se třemi posledními domečky, kde bylo nutné přejít na čísla trojciferná. U obou je vidět, že nad čísly uvažovali v desítkové soustavě. Klárka do posledních tří domečků doplnila čísla 56, 57 a 58, čímž navázala na hexanská čísla končící číslem $55_{(6)}$. Ben si k domečkům dopisoval přepisy hexanských číslic na arabské, pravděpodobně tedy o číslech také uvažoval v desítkové soustavě. Po předepsaném čísle $44_{(6)}$ dopsal správně číslo $45_{(6)}$, po kterém chtěl původně nejspíše dopsat číslo $47_{(10)}$ začínající číslicí 4, ale zřejmě si uvědomil, že nemá adekvátní znak pro číslici 7. Původní číslici 4 škrtl a pod ní dopsal správně číslo $50_{(6)}$. Dále úspěšně pokračoval až do $55_{(6)}$. Posléze opět narazil na problém, že mu chybí číslice, tentokrát bylo ale potřeba nejen upravit číslo na druhé pozici, ale přidat celý řád. Ben následně dopsal čísla $511_{(6)}$, $512_{(6)}$ a $513_{(6)}$. Ben zde nejspíše využil strategii *sčítání hodnot číslic*, tedy u hexanů neexistující číslici 6 si zapsal jako dvojznak 51 s hodnotou 5 + 1. Tento zápis šestky je v celém jeho testu konzistentní. Jeho řešení obsahuje i pozorování, že po pětce na pozici jednotek musí skočit k další v jeho porozumění desítce. V tomto případě Ben přeskočil i číslo $60_{(6)}$, což odpovídá rozšířenému úzu začínání počítání od jedničky (např. 1, 2, 3, … spíše než 0, 1, 2, …).

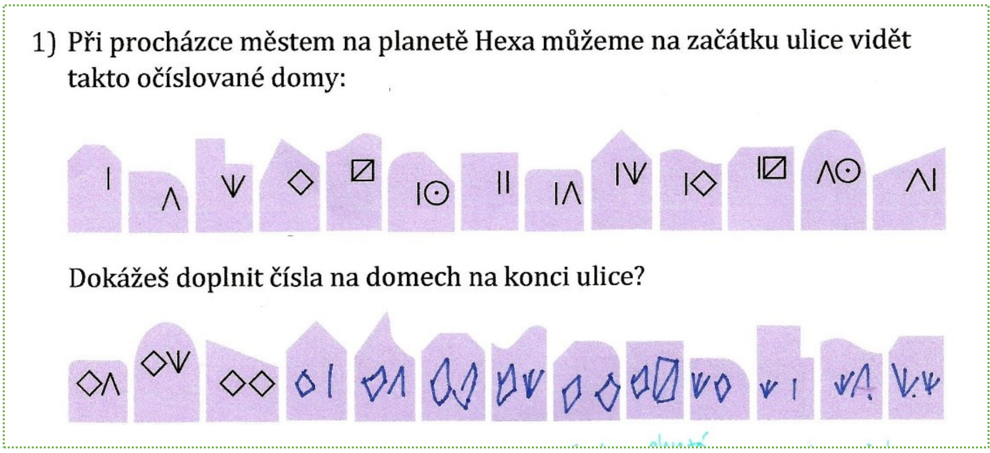


Obrázek 117: řešení Bena, 1. úloha

Eliáš a Noemi doplnili do domečků hexanská dvojciferná čísla, která připomínají správné řešení. U obou je pozorovatelná částečná posloupnost, ale nejvýše ve třech po sobě jdoucích číslech. Eliáš dokonce vypozoroval, že po čísle $45_{(6)}$ už nebude číslo opět začínající číslicí 4, navázal ale regresivně čísly $34_{(6)}$, $31_{(6)}$, $32_{(6)}$ a $33_{(6)}$.

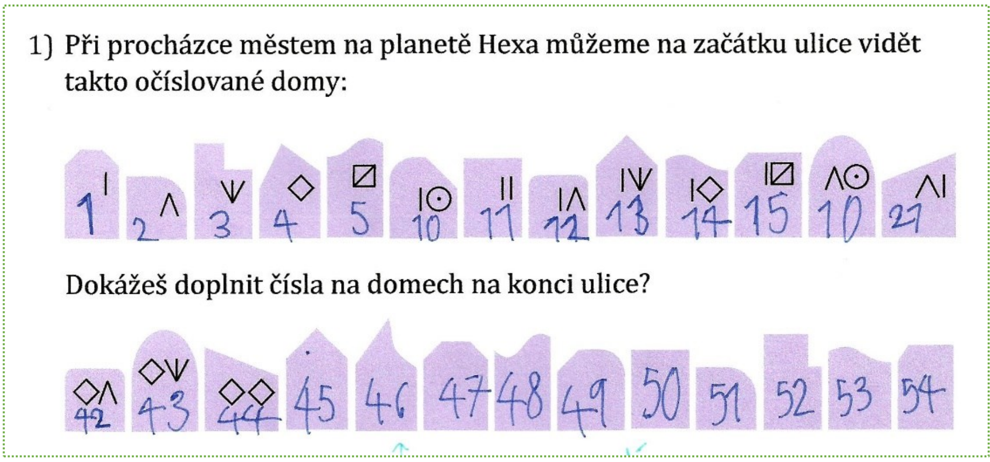


Obrázek 118: řešení Noemi, 1. úloha



Obrázek 119: řešení Eliáše, 1. úloha

Miky si ke všem číslům dopsal přepisy do arabských čísel. Pravděpodobně tak vnímal čísla v naší desítkové soustavě. K číslu $20_{(6)}$ doplnil arabskými číslicemi 10. Pravděpodobně se spletl píše 10, ale měl na mysli 20. Myslím, si, že zde mohl zapůsobit návyk v ruce, že další číslo po 15 bude opět začínat číslicí 1 a nesrovnalosti si posléze nevšiml. Čísla ve volných domečcích doplnil s použitím arabských číslic v desítkové soustavě.



Obrázek 120: řešení Mikyho, 1. úloha

Fido se úlohu nejdříve snažil řešit. Během vypracovávání testu si mě zavolal: *„Paní učitelko, já umím počítat mimozemsky!“* a postupně ukazoval na domečky odříkávaje řadu od jedné do třinácti. Během toho jsem si myslela, že skutečně čísla pochopil. Teď teprve mě napadá, že jeho ukázka mohla být žertem zmírňujícím frustraci z toho, že takto složitým číslům nerozumí, přičemž ho ani nenapadlo, že jeho žert s použitím jemu dobře známých čísel je pro hexanská čísla pravdivý. Fido ponechal úlohu neřešenou. Doplnil pouze první volný domeček hexanským číslem $111_{(6)}$.

3. ročník

Níže přikládám diagram úspěšnosti řešitelů ze 3. ročníku v úloze. Ze 7 řešitelů byli pouze Břéťa a Maty zcela úspěšní. Ani jeden z nich si nedopisoval do testu poznámky, ani své řešení neupravoval.

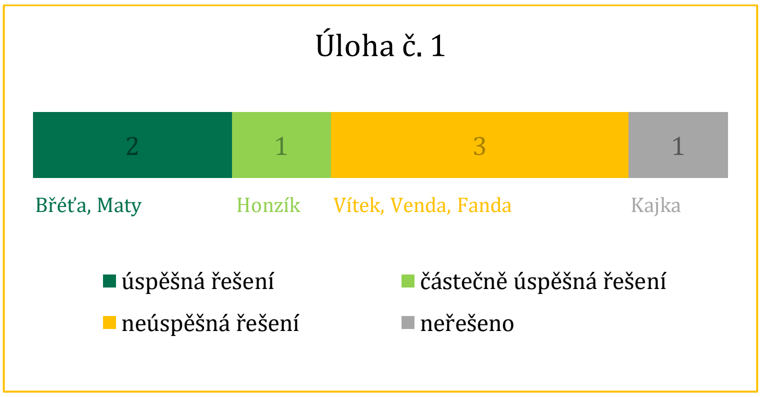
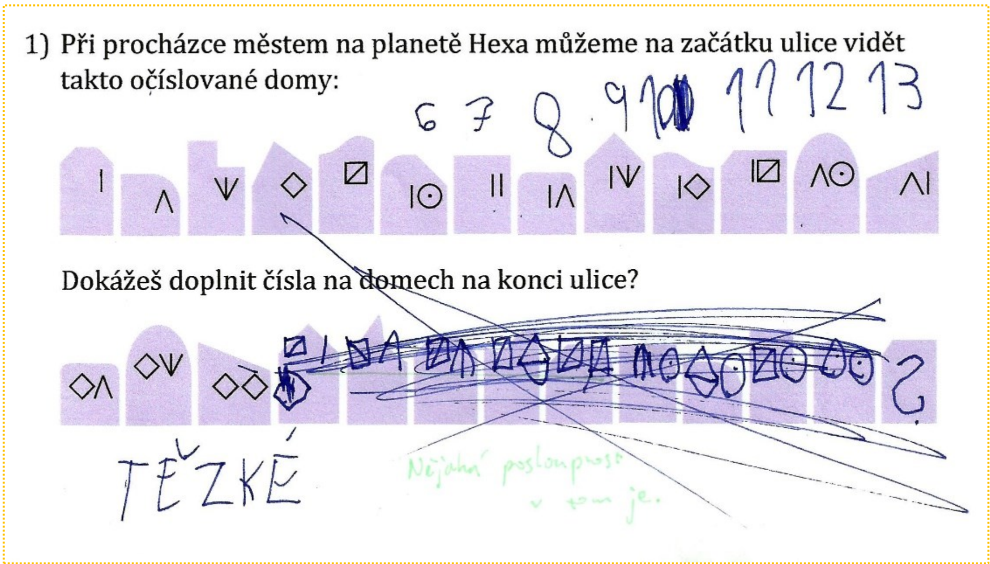


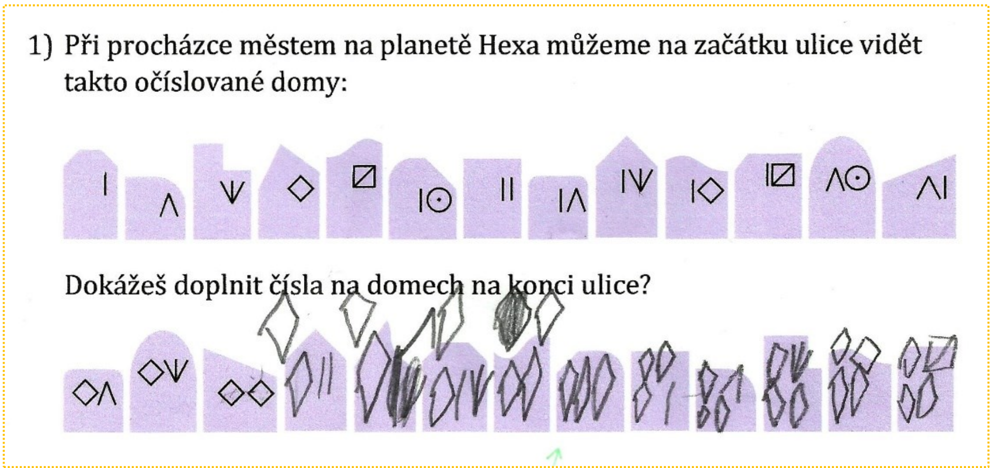
Diagram 55

Jako částečně úspěšné jsem označila řešení Honzíka. Honzík své řešení posléze přeškrtal a dopsal poznámku: „TĚŽKÉ“, přesto je v jeho původním řešení vidět posloupnost pěti po sobě jdoucích čísel od $51_{(6)}$ do $55_{(6)}$. V navazujících číslech je také snaha udržet nějakou posloupnost, zde ale Honzík střídal číslice na 2. pozici, tedy hexanskými číslicemi po sobě doplnil čísla 30, 40, 50 a 00. Sám si zřejmě uvědomoval, že jeho řešení není správné a své řešení přeškrtal. Nad odpovídající domečky v prvním řádku si Honzík klasickým zápisem dopsal čísla od 6 do 13, která posléze využil v dalších úlohách.



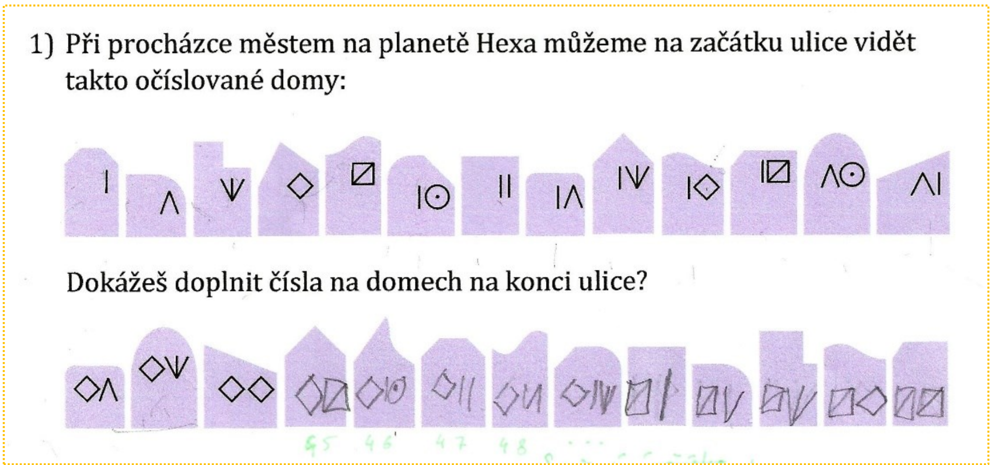
Obrázek 121: řešení Honzíka - 1. úloha

Vítek do prvního volného domečku dopsal hexansky 4411, dále pak 4412, 4413, 444, 4441, 4442, 4443, 4444 a 4445. Z jeho řešení usuzuji, že Vítek sloučil poziční a nepoziční soustavu a v jeho pojetí má hexanská číslice ◇ význam jak $10_{(10)}$ nebo základ, tak i $4_{(10)}$. Je také patrné, že druhé ◇ v prvních čtyřech domečcích dopsal až později a umístil je nad domeček, kam se ještě vešly. Pokud by tedy Vítek vnímal znak ◇ jako desítku, čemuž by napovídalo i jeho řešení 2. úlohy, jeho původní čísla s hodnotami 10 + 11, 10 + 12 a 10 + 13 by smysluplně navazovala na předcházející číslo ◇◇, tedy pro něj 20. Původní řešení by dávalo v součtech hodnot smysl, ale zřejmě si Vítek později uvědomil, že v jeho nepoziční soustavě by čísla dvacet něco měly mít na začátku dvě ◇. U čísla ve čtvrtém volném domečku vynechal číslici 1, možná účelně, možná ji jen opomenul. Je však vidět, že zapsané číslo ◇◇◇ mu evokovalo tři desítky, dále tedy pokračoval nepozičním zápisem desítek a číslicovým zápisem jednotek, kterým doplnil čísla 31 až 35.



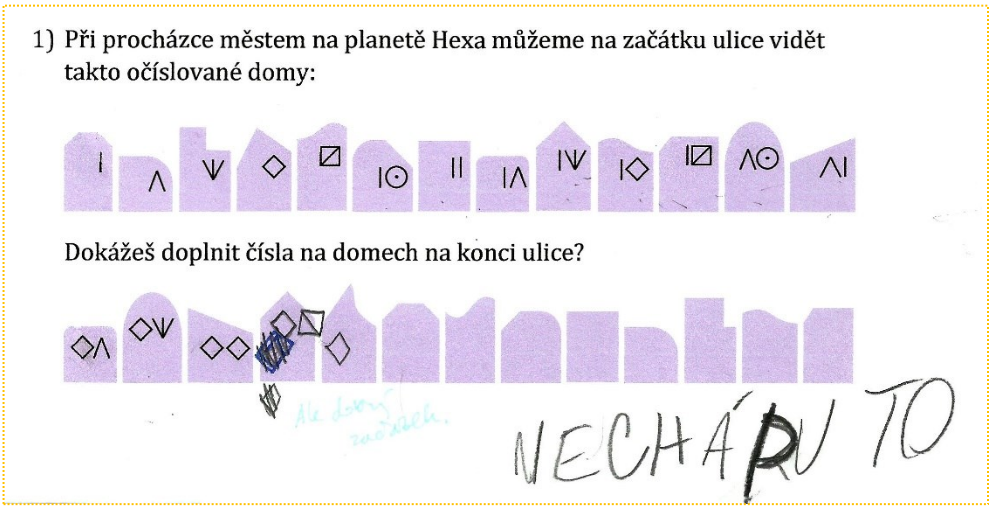
Obrázek 122: řešení Vítka, 1. úloha

Venda v prázdných domečcích pokračoval s čísly v desítkové soustavě. Pro Hexany neexistující číslice si nahradil dvojznaky, které odvodil z dvojciferných čísel v prvním řádku, což byla i ve vyšších ročnících poměrně častá strategie. Šestku tedy zapsal jako dvojznak 10, sedmičku jako dvojznak 11 apod. Stejný zápis použil i Fanda, ale pouze u prvních 3 domečků. Zbylé domečky Fanda ponechal prázdné.



Obrázek 123: řešení Vendy, 1. úloha

Kajka v prvním volném domečku dopsala správně číslo 45, je však vidět, že číslici ◇ nejdřív dvakrát škrtla a výsledné řešení dopsala teprve na třetí pokus. V dalším domečku chtěla také pokračovat počáteční číslicí ◇, ale neměla, jakou číslici by mohla doplnit na pozici jednotek. Dopsala pouze poznámku „NECHÁPU TO."



Obrázek 124: řešení Kajky, 1. úloha

4. ročník

Řešitelé ze 4. ročníku byli v této úloze výrazně úspěšnější než ostatní ročníky. Z 8 řešitelů byly 3 žačky zcela úspěšné, další 3 byli neúspěšní při přechodu na trojciferná čísla. Pouze Madla a Valda byli v úloze neúspěšní.

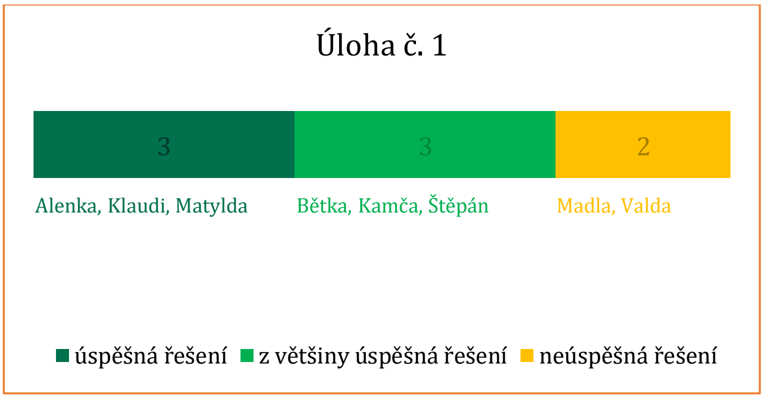
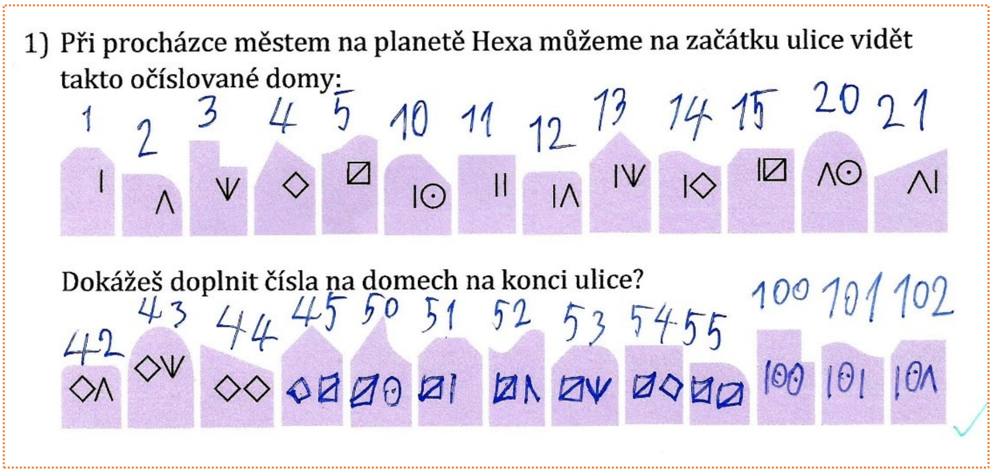


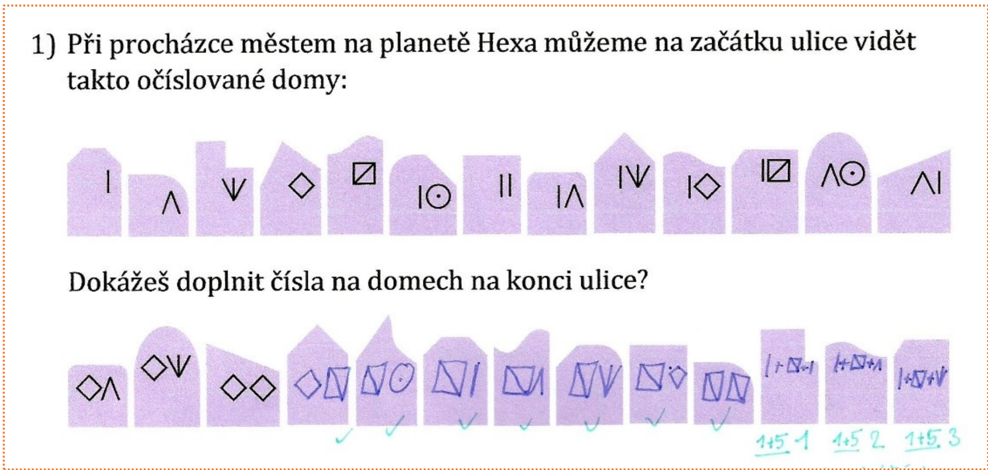
Diagram 56

V řešení Matyldy nejsou žádné vedlejší poznámky, opravila se pouze ve dvou číslicích, přičemž se jednalo o dvojku, kterou jen napsala obráceně. Klaudi se opravila v posledních dvou domečcích, kde původně doplnila hexansky 102 a 103. Alenka opravy nepotřebovala. Všechny domečky si však nadepsala přepisy do arabských číslic podobně, jako to dělaly někteří řešitelé z pilotáže.



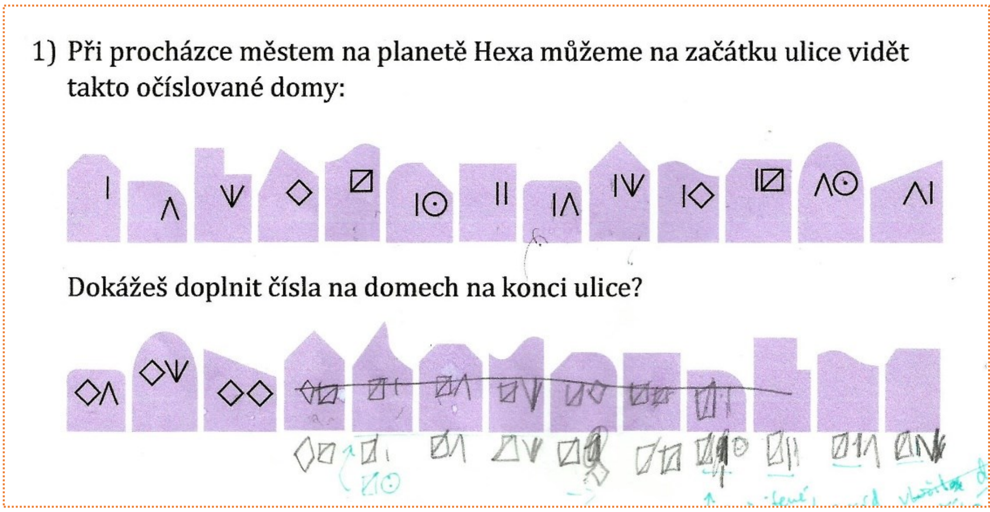
Obrázek 125: řešení Alenky, 1. úloha

Bětka úspěšně dopsala všechna dvojciferná čísla. Do posledních dvou domečků dopsala hexansky 1+5+1, 1+5+2 a 1+5+3. Předpokládám, že tady Bětka použila součet hodnot číslic pro číslice, které Hexané neznají, stejně jako to udělali někteří řešitelé z 2. ročníku. Bětka zde vložila plus i mezi 2. a 1. pozici, což je podle mě v jejím konceptu nadbytečné, neboť to evokuje spíše sčítání všech číslic, např. 1+5+1 = 7, ale jejím záměrem nejspíše bylo pouze 1+5 a 1, tedy 61. Bětka také opomenula číslo 60 stejně jako to udělal Ben ze 2. ročníku.



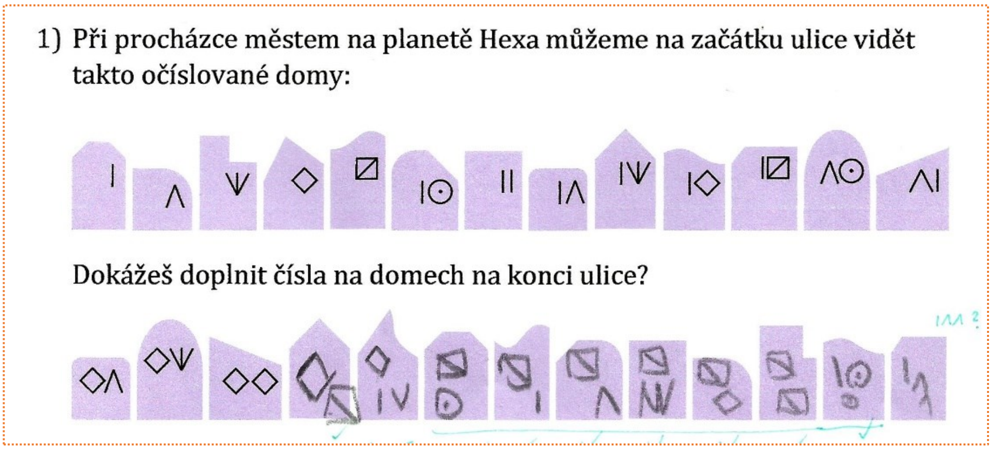
Obrázek 126: řešení Bětky, 1. úloha

Štěpán byl s výjimkou opomenutého domečku 50 také úspěšný ve všech dvojciferných číslech. Namísto přechodu na hexanská čísla trojciferná však zůstal v desítkové soustavě a číslice 6, 7, 8 a 9 nahradil dvojznaky 10, 11, 12 a 13 podle čísel z první řady domečků. Druhým možným vysvětlením jeho řešení, avšak vzhledem k opomenutému číslu 50 myslím, že méně pravděpodobným, je použití dvojznaků se součtem hodnot, tedy 51 namísto 6. V tom případě by jeho poslední čtyři domečky znamenaly $60_{(10)}$, $61_{(10)}$, $62_{(10)}$ a $63_{(10)}$, což by při úvaze přeskakování v čísle všech jednotek od 6 do 9 také bylo logickým vysvětlením. Přikláním se však k původní interpretaci, že se jedná o čísla $56_{(10)}$, $57_{(10)}$, $58_{(10)}$ a $59_{(10)}$.



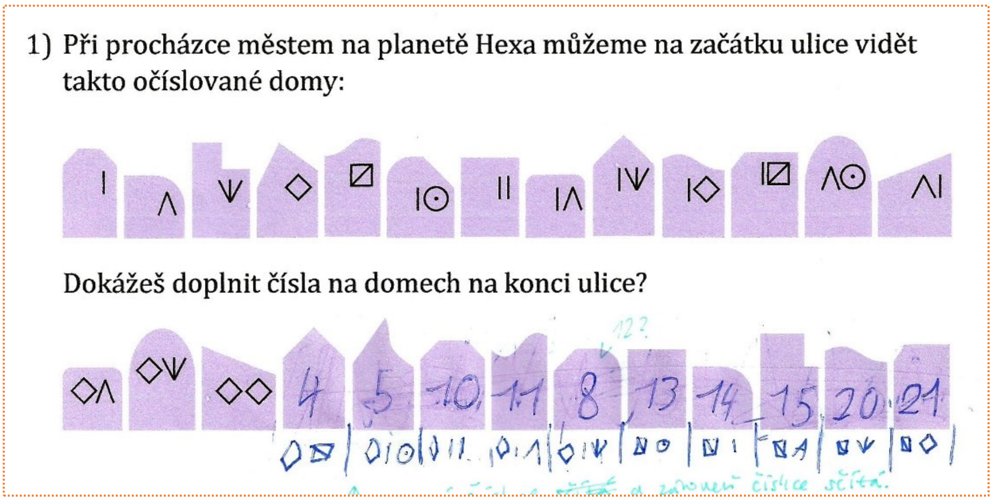
Obrázek 127: řešení Štěpána, 1. úloha

Kamča také úspěšně vyřešila všechna dvojciferná čísla, jen do druhého prázdného domečku vmezeřila ještě číslo 412 s obrácenou hexanskou dvojkou. Trochu mi to připomíná římské číslo 4, je tedy možné, že se Kamči s úlohou římská čísla spojila. Nicméně dále už pokračuje plynule nejen do 55, ale úspěšně doplnila i číslo 100. Do posledního domečku pak dopsala hexansky číslo 122, pro které nemám vysvětlení. Kamča zřejmě nevěděla, jaké číslo bude po hexanském 100 následovat, proto dopsala libovolné podobné trojciferné číslo. Vzhledem k jejímu zápisu 2. pozice nad 1. pozici je také možné, že číslo v předposledním domečku nevnímala jako 100, ale jako $60_{(10)}$, tedy že by použila dvojznak 10 pro číslici 6. Myslím, že toto vysvětlení však není pravděpodobné, neboť v dalších úlohách už si dvojznak 10 se šestkou neasociuje.



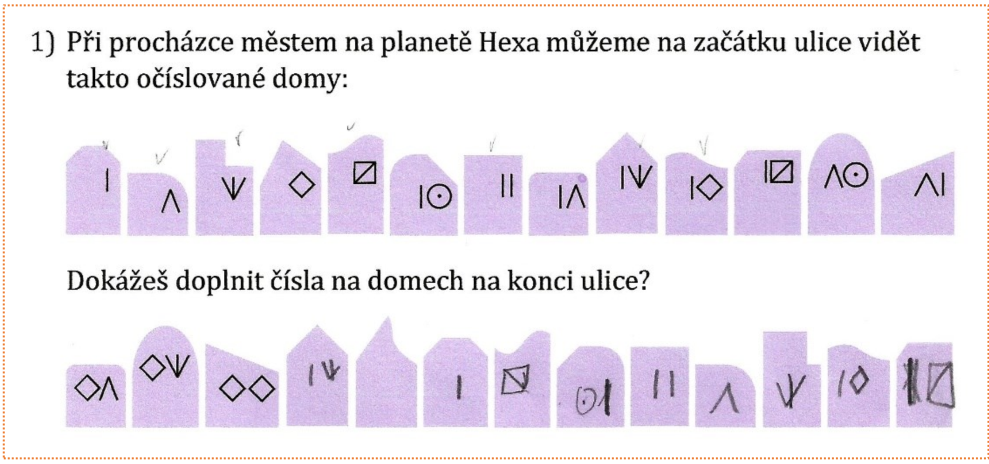
Obrázek 128: řešení Kamči, 1. úloha

Valdovo řešení je mnohokrát přeškrtáno a opraveno, ačkoliv jsem jej prosila, ať to nedělá. Valdovo konečné řešení pracuje s desítkovou soustavou. Valda na předepsané číslo 44 navazuje čísly $45_{(10)}$ – $54_{(10)}$, přičemž namísto číslic, které pro Hexany neexistují, také používá dvojznaky odvozené z prvního řádku domečků.



Obrázek 129: řešení Valdy, 1. úloha

Pro řešení Madly mě nenapadá žádné vysvětlení. Zdá se mi pravděpodobné, že mohla dopsat libovolná hexanská čísla, aby neponechala úlohu neřešenou.



Obrázek 130: řešení Madly, 1. úloha

5. ročník

Řešitelé z 5. ročníku byli v úloze poměrně úspěšní. Natka byla v úloze zcela úspěšná, další 4 řešitelé neuspěli pouze u trojciferných čísel v poledních třech domečcích.

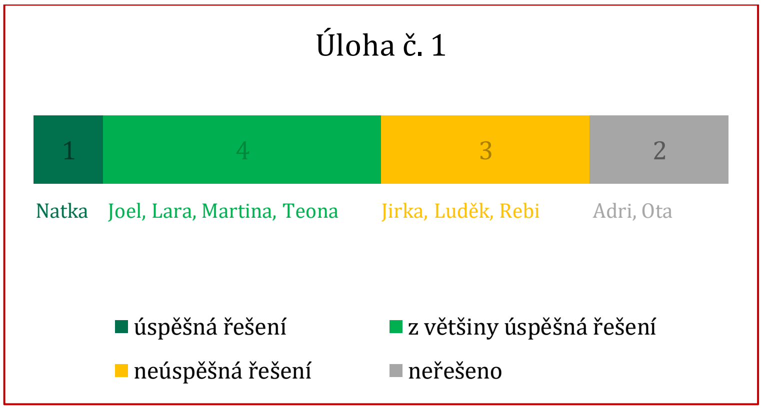
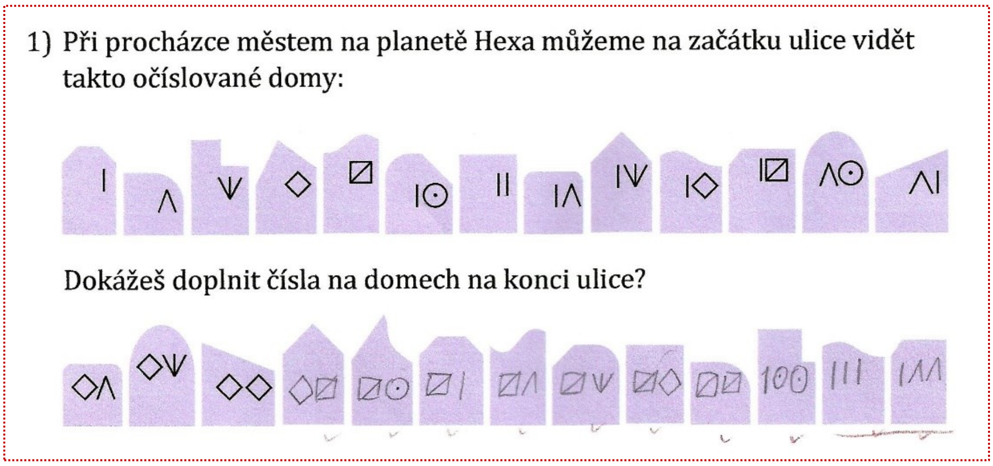


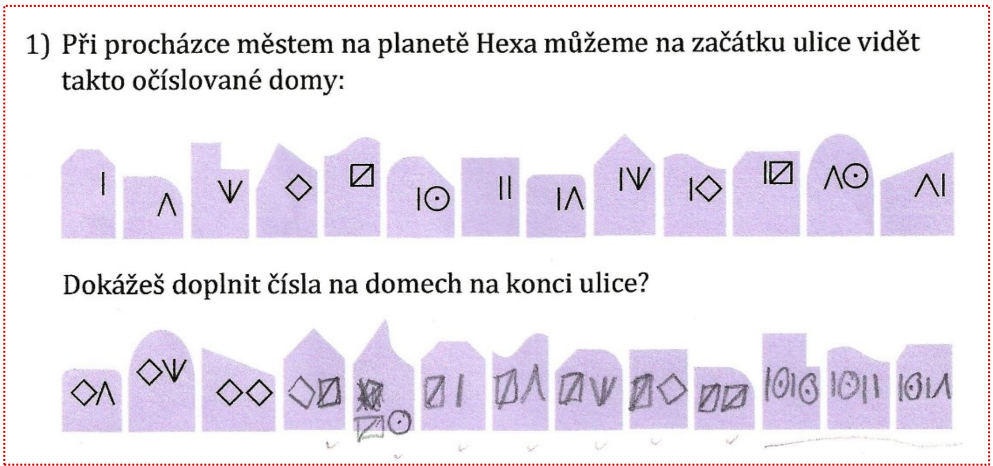
Diagram 57

Lara úspěšně odhalila i přechod do dalšího řádu a do příslušného domečku dopsala hexansky 100. Dále však nepokračovala v navyšování pouze jednotek, ale jednotek i desítek, tedy čísla 111 a 122. Domnívám se, že Lara sice odpozorovala vzor, jakým čísla pokračují, ale nepropojila si je s pozičním zápisem.



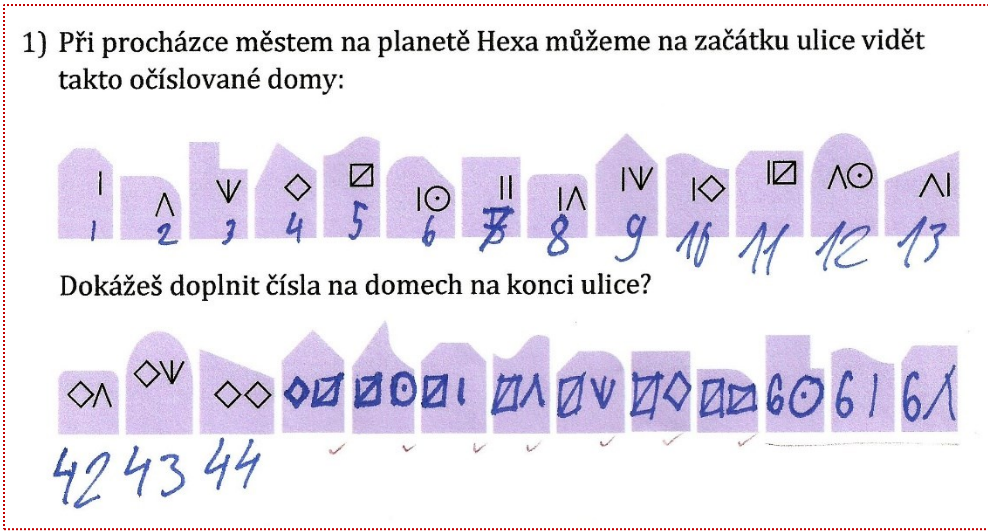
Obrázek 131: řešení Lary, 1. úloha

Martina do posledních tří domečků doplnila hexansky čísla 1010, 1011 a 1012. Ke správnému řešení přebývá pouze vmezeřená jednička. Není mi zřejmé, jak k tomuto řešení došla. Napadají mě dvě možné interpretace, z nichž mi žádná nepřijde pravděpodobnější. První z možných interpretací je zápis 1010 zamýšlený jako číslo $66_{(10)}$. Martina by zde využila číslice jako dvojznaky odvozené z prvního řádku domečků. Číslo 66 by mohlo graficky navazovat na číslo 55. Od čísla $66_{(10)}$ dále by Martina pokračovala čísly $67_{(10)}$ a $68_{(10)}$ pro něž opět použila číslicové dvojznaky. Druhou možnou interpretací zápisu 1010 je číslo $106_{(10)}$. Martina si mohla všimnout, že po každé hexanské pětce je potřeba navýšit řád, tedy přešla v desítkové soustavě ke stovkám. V řádu jednotek by však v tomto případě pokračovala podle předchozích domečků, tedy čísly $106_{(10)}$, $107_{(10)}$ a $108_{(10)}$. Další interpretace jsou možné, avšak na základě Martininých řešení dalších úloh se domnívám, že i zde uvažovala v desítkové soustavě a používala dvojznaky pro hexanské číslice odpovídající 6, 7, 8 a 9.



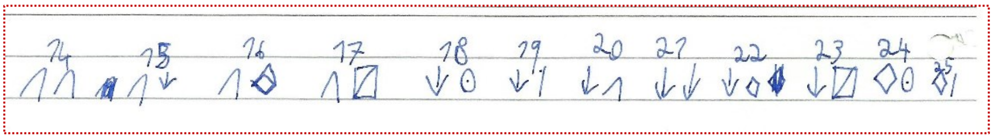
Obrázek 132: řešení Martiny, 1. úloha

Teona si k předtištěným domečkům dopsala přepisy v desítkové soustavě. Ve druhé řadě však čísla přepsala podle číslic, tedy hexanské 42 četla jako $42_{(10)}$ apod. Teona správně vypozorovala, že po číslici 5 na 1. pozici musí v dalším čísle změnit číslo na 2. pozici. Namísto přechodu do dalšího řádu po hexansky zapsaném 55 Teona použila arabskou číslici šestku a pokračovala s čísly $60_{(10)}$, $61_{(10)}$ a $62_{(10)}$.



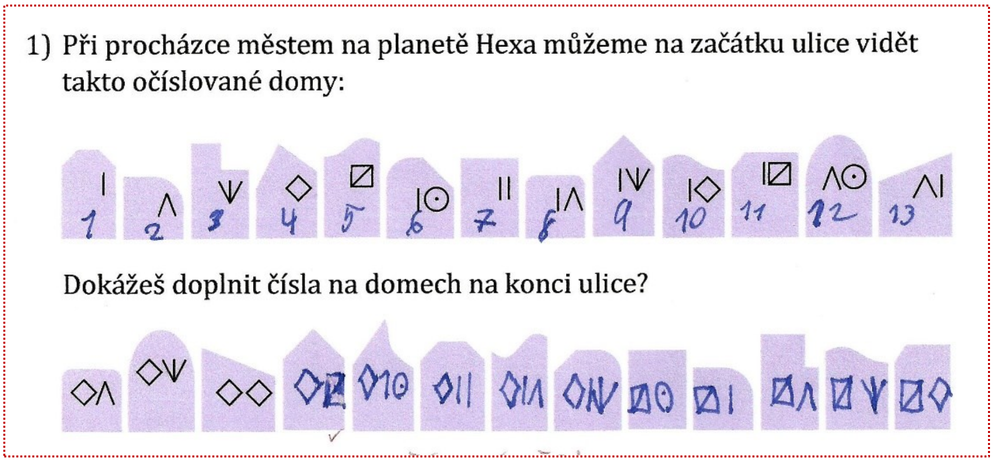
Obrázek 133: řešení Teony, 1. úloha

Joel úspěšně vyřešil domečky s dvojcifernými čísly a poslední 3 domky ponechal prázdné. Na vedlejší papír si Joel předepsal posloupnost hexanských čísel mezi prvním a druhým řádkem domečků v 1. úloze. Pravděpodobně tak učinil až během řešení 2. úlohy, ve které kvantitu hexanských čísel potřeboval. Předpokládám, že v této části pouze využíval vzorce v posloupnosti grafémů, ale řády a poziční zápis v šestkové soustavě objevil až později – nejspíše na základě 3. úlohy.



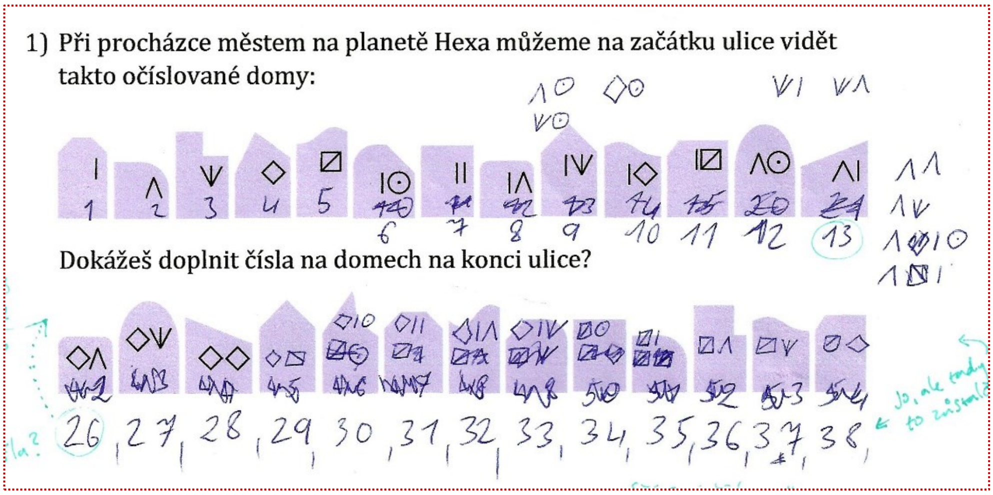
Obrázek 134: poznámky Joela

Jirka si také k první řadě domků dopsal čísla 1 až 13. Čísla v druhé řadě domečků však četl podle číslic jako v desítkové soustavě a v desítkové soustavě také s domečky pokračoval doplněním čísel $45_{(10)}$ až $54_{(10)}$. Jako číslice 6, 7, 8 a 9 použil dvojznaky odvozené z první řady domečků, tedy např číslo $47_{(10)}$ zapsal jako 411.



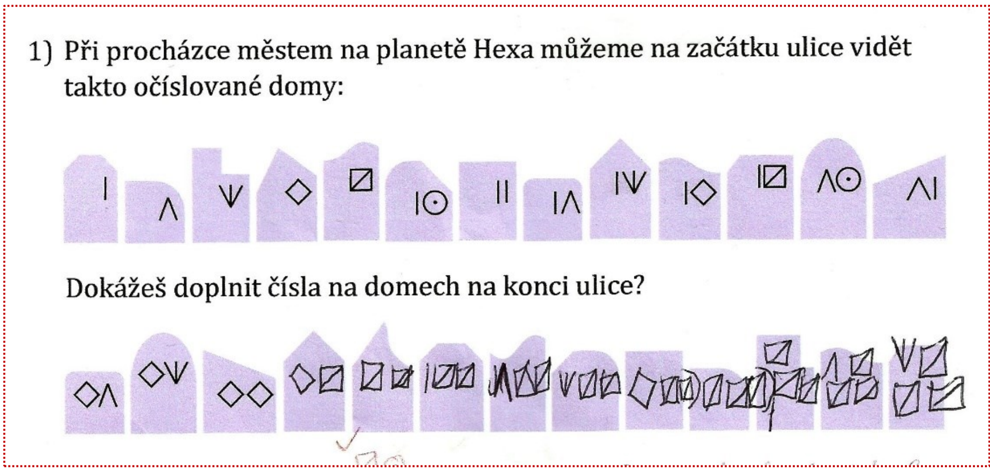
Obrázek 135: řešení Jirky, 1. úloha

Rebi svou odpověď několikrát upravila, v jejím řešení jsou vidět škrty. Nejdříve si k domečkům dopsala přepisy hexanských do arabských číslic. Na prázdné domečky původně správně doplnila hexanská čísla $45_{(6)}$ až $55_{(6)}$, zřejmě se ale zastavila u přechodu do dalšího řádu. Rebi tedy svou odpověď škrtla a doplnila do všech domečků čísla $45_{(10)}$ až $54_{(10)}$ v desítkové soustavě s hexanskými číslicemi. Také Rebi použila dvojznaky pro číslice 6, 7, 8 a 9 odvozené z prvního řádku domečků. Pod domečky dopsala čísla $42_{(10)}$ až $54_{(10)}$ klasicky arabskými číslicemi. Se svým čtením hexanských čísel Rebi ale zjevně nebyla spokojená. Rebi původní čísla u domečků, odpovídající desítkové soustavě, škrtla, ponechala jen čísla 1 až 5, na které navázala čísly $6_{(10)}$ až $13_{(10)}$ v první řadě domečků. Na konci řádku je vidět, že se Rebi snažila vyvodit další čísla a najít tak význam hexansky zapsané 42. Zajímavé je že u zápisu hexanských čísel $22_{(6)}$ až $25_{(6)}$ zřejmě uvažovala o jejich kvantitativních významech, tedy čtrnáct, patnáct, šestnáct a sedmnáct. Soudím tak z jejího škrtu číslic 4 a 5 a dopsání dvojznaku pro šestku a sedmičku u čísel šestnáct a sedmnáct. Sedmičku však už Rebi nedopsala, pouze se dotkla papíru. Domnívám se, že to byl moment, kdy si Rebi uvědomila, že potřebuje jiný postup. Nad domečky je vidět zápis hexansky 20, 30 a 40. Předpokládám, že si Rebi z domečků odvodila rozdíl mezi $10_{(6)}$ a $20_{(6)}$ a se zápisem si počítala po šestkách, tedy dvanáct, osmnáct a dvacet čtyři. Ke $24_{(10)}$ pak už stačilo přičíst 2 jakožto číslici na 1. pozici v čísle z prvního domečku druhého řádku. Rebi si pod domečky ve druhém řádku dopsala čísla $26_{(10)}$ až $38_{(10)}$, čímž úspěšně převedla čísla ze šestkové soustavy do desítkové. Původní hexanský zápis na těchto domečcích však nezměnila. Domnívám se, že ačkoliv už znala pořadová čísla domečků, neuvědomila si vzorec v posloupnosti hexanských čísel a odvozovala je od desítkové soustavy. Předpokládám tedy, že by Rebi např. ke kvantitě $32_{(10)}$ přiřadila hexanský zápis 412.



Obrázek 136: řešení Rebi, 1. úloha

Luděk ve svém řešení přešel na nepoziční zápis čísla, když. Luděk po hexanském zápisu 44 doplnil úspěšně hexansky 45, po něm však 55. Tato číselná řada je řadou po sobě jdoucích přirozených čísel, pokud zvážíme ciferné součty těchto čísel. Odtud zřejmě vycházelo Luďkovo porozumění hexanským číslům jako nepoziční soustavě. Druhá řada domečků tedy pro něj měla význam $6_{(10)}$ až $18_{(10)}$. Luděk v této své nepoziční soustavě netypicky řadil nejmenší číslici vlevo, namísto vpravo, jak by i odpovídalo pozičnímu zápisu. Toto uspořádání Luděk dodržuje i ve 2. úloze, ve 4. úloze, kde se setkává už s většími čísly, řadí číslice od největší po nejmenší.



Obrázek 137: řešení Luďka, 1. úloha

Ota a Adri 1. úlohu neřešili vůbec.

Shrnutí

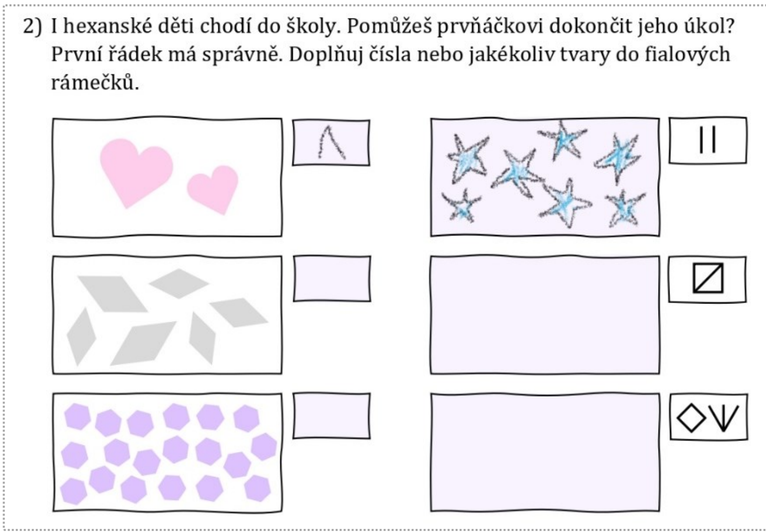
Mnozí žáci úspěšně odpozorovali rytmus, podle kterého se číslice v hexanských číslech střídají. Velmi často však měli řešitelé obtíže přejít na čísla trojciferná, což odpovídalo očekáváním. Domnívám se, že mnozí řešitelé pracovali s hexanskými čísly jako s posloupností znaků, přičemž pro přechod na trojciferná čísla neměli předložený příklad.

Další obsáhlá skupina řešitelů pracovala s hexanskými čísly jako s čísly, přičemž převažující zápis čísla pro ně byl zápis v desítkové soustavě. Tito žáci volili různé náhrady číslic 6, 7, 8 a 9, které mezi hexanskými nemají obdoby. Ve 2. ročníku se objevovalo využití hexanských dvojznaků s ciferným součtem v hodnotě zastupované číslice, tedy v podstatě zápis nepoziční, ale pouze v rámci jedné pozice desítkové soustavy S vyšším ročníkem bylo častější využití dvojznaků odvozených z domečků v první řadě v 1. úloze, tedy hexansky 10 pro šestku, 11 pro sedmičku, 12 pro osmičku a 13 pro devítku.

Předpokládám, že pro zcela úspěšné řešení 1. úlohy bylo potřeba tyto dva výše popsané přístupy spojit, tedy sledovat jak rytmus v posloupnosti znaků, tak i aplikovat zkušenosti z desítkové poziční soustavy. S takovýmto propojením mohl řešitel úspěšně odvodit posloupnost dvojciferných čísel, ale i přejít k číslům trojciferným přidáním dalšího řádu. Pouze na základě úspěšného řešení však nelze s jistotou říci, že řešitel tohoto propojení dosáhnul. Alternativně bylo také možné použít pouze desítkovou soustavu s hexanskými číslicemi a vynechat všechna čísla obsahující číslice 6, 7, 8 a 9, tedy po domečku čteném jako $55_{(10)}$ pokračovat čísly $100_{(10)}$, $101_{(10)}$ a $102_{(10)}$. Dále řešitelé mohli použít hexanský dvojznak 10 pro číslici šest a zápisem 100, 101 a 102 mínit čísla $60_{(10)}$, $61_{(10)}$ a $62_{(10)}$. Na základě písemné odpovědi zde není možné nahlédnout myšlenkové postupy řešitele, avšak napovědět mohou jeho odpovědi v dalších úlohách.

Méně častá byla jiná řešení 1. úlohy, která byla do různé míry chaotická či organizovaná. Z těch konsistentních se jednalo zejména o pojetí hexanských čísel jako nepoziční číselné soustavy, např. Vítek (3. roč.) a Luděk (5. roč.).

5.4.2.2. Řešení 2. úlohy



Obrázek 138: úloha 2, ukázka

2. ročník

Ve 2. úloze nikdo z řešitelů nebyl úspěšný, jen Bart a Ben byli úspěšní částečně.

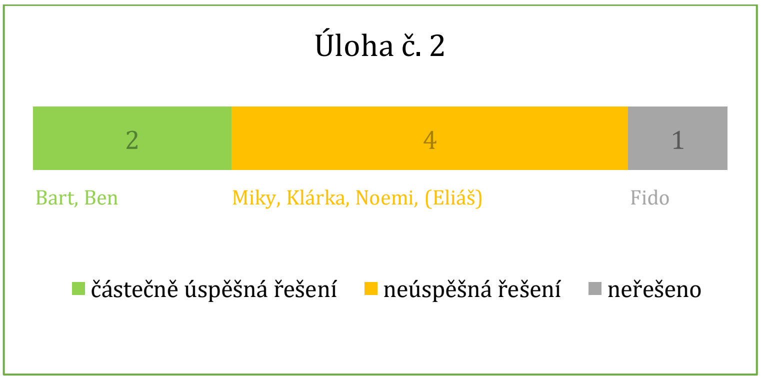
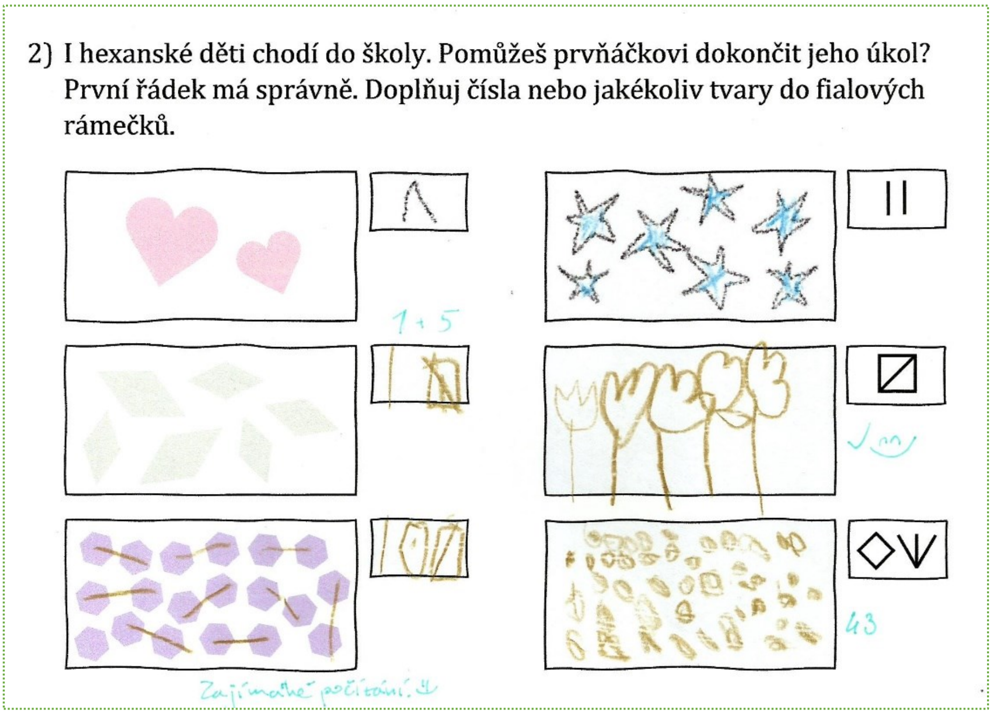


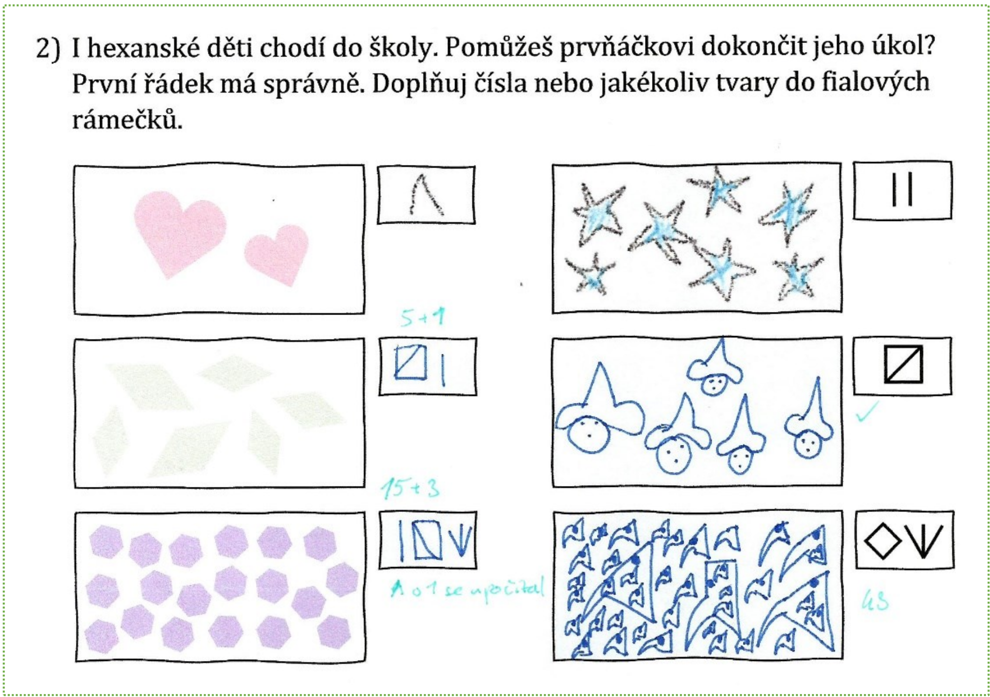
Diagram 58

Řešení Barta a Bena bylo označeno jako částečně úspěšné, neboť našli svůj alternativní způsob zápisu čísel v úloze, což bylo v rámci 2. ročníku nejpokročilejší úvaha. Ve vyšších ročnících byli jako částečně úspěšní označováni už jen ti řešitelé, kteří správně zapsali číslo $10_{(6)}$ v první podúloze.

V první podúloze Bart i Ben použili číslice se součtem hodnot 6. Doplnili čísla $15_{(6)}$ a 51(5). Ve druhé podúloze správně doplnili 5 objektů. Ve 3. podúloze Bart hexansky doplnil číslo 105, u kterého nevím, z jaké úvahy může vycházet. Zajímavý, avšak vedlejší, je jeho organizovaný způsob počítání objektů po dvojicích. Ben ve 3. podúloze doplnil hexansky číslo 153. Domnívám se, že při chybějících číslicích s hodnotou vyšší než 5 využil sčítání číslic, tedy číslici 8 v čísle $18_{(10)}$ znázornil součtem 5+3 podobně jako v 1. podúloze. Šestiúhelníčků je v rámečku 19, předpokládám proto, že si je chybně spočítal. Oba žáci ve 4. podúloze doplnili 43 objektů, což odpovídá číslu v příslušném rámečku, kdyby bylo čteno v desítkové soustavě.

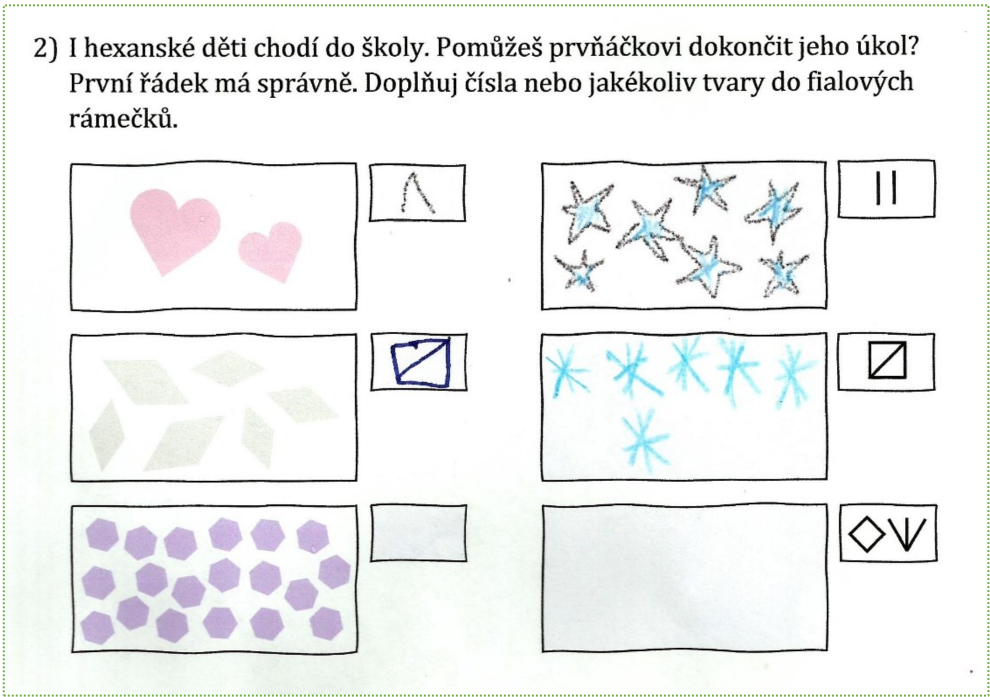


Obrázek 139: řešení Barta, 2. úloha

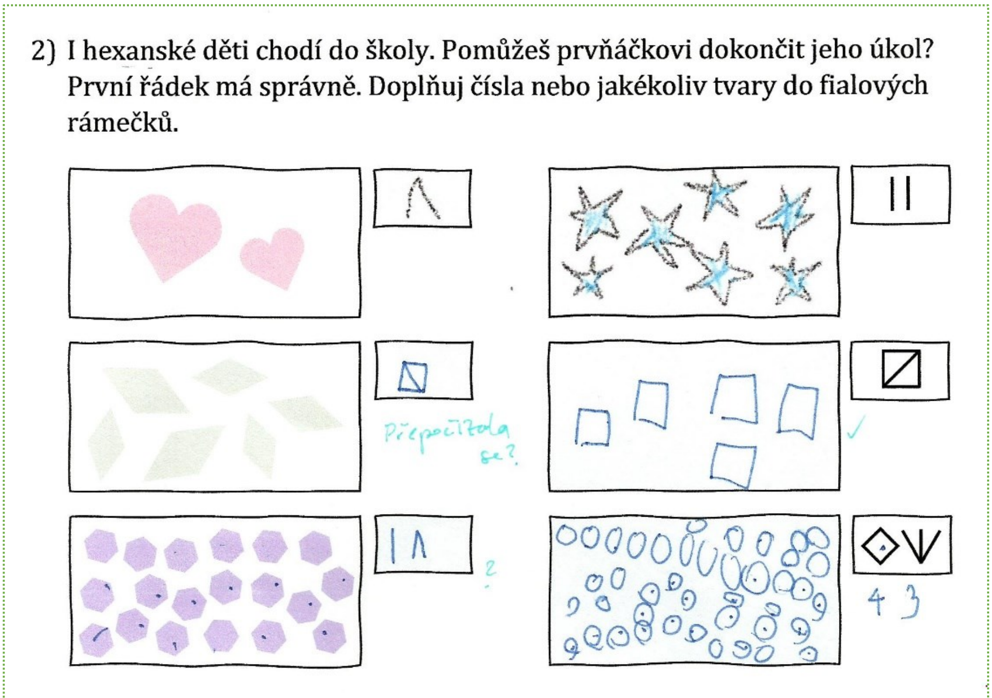


Obrázek 140: řešení Bena, 2. úloha

Fido a Noemi doplnili v 1. podúloze hexanskou číslici 5. Možná objekty jen chybně spočítali, ale spíše předpokládám, že to bylo požadovanému nejbližší číslo, které dokázali hexansky zapsat. Fido si navíc své řešení potvrdil tím, že ve 2. podúloze doplnil pět hvězdiček. Noemi 2. podúlohu vyřešila úspěšně. Fido dále v řešení úloh nepokračoval. Jeho řešení jsem krajně zahrnula do kategorie *neřešeno*. Noemi ve 3. podúloze doplnila hexansky 12, opět mě ale nenapadá úvaha, která k tomuto řešení vedla. Ve 4. úloze doplnila 43 objektů stejně jako Bart a Ben.

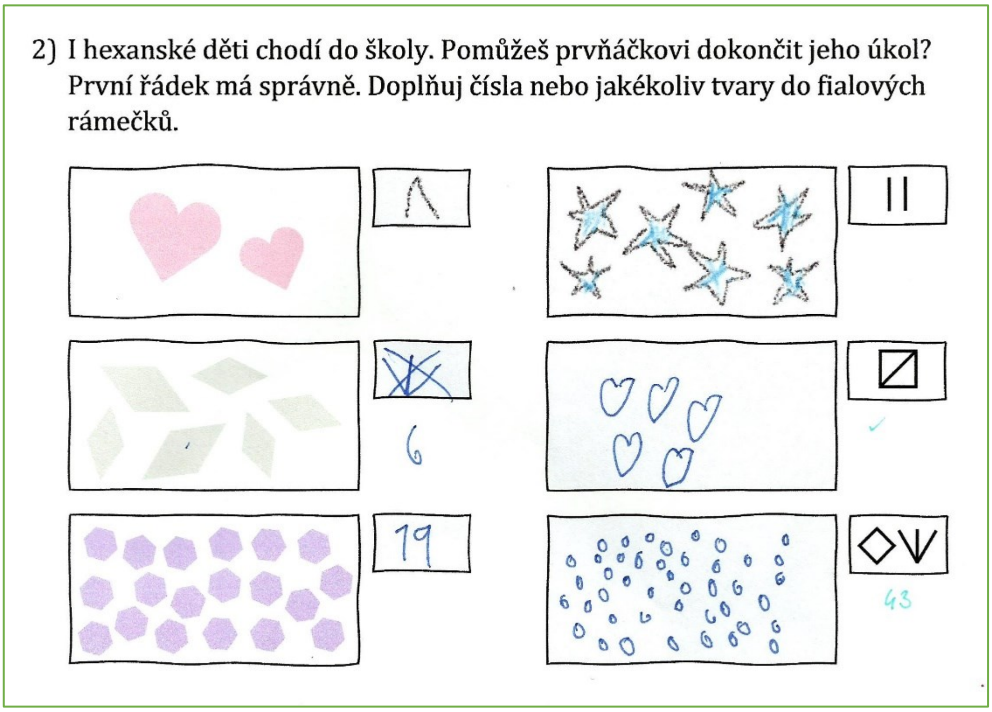


Obrázek 141: řešení Fida, 2. řešení

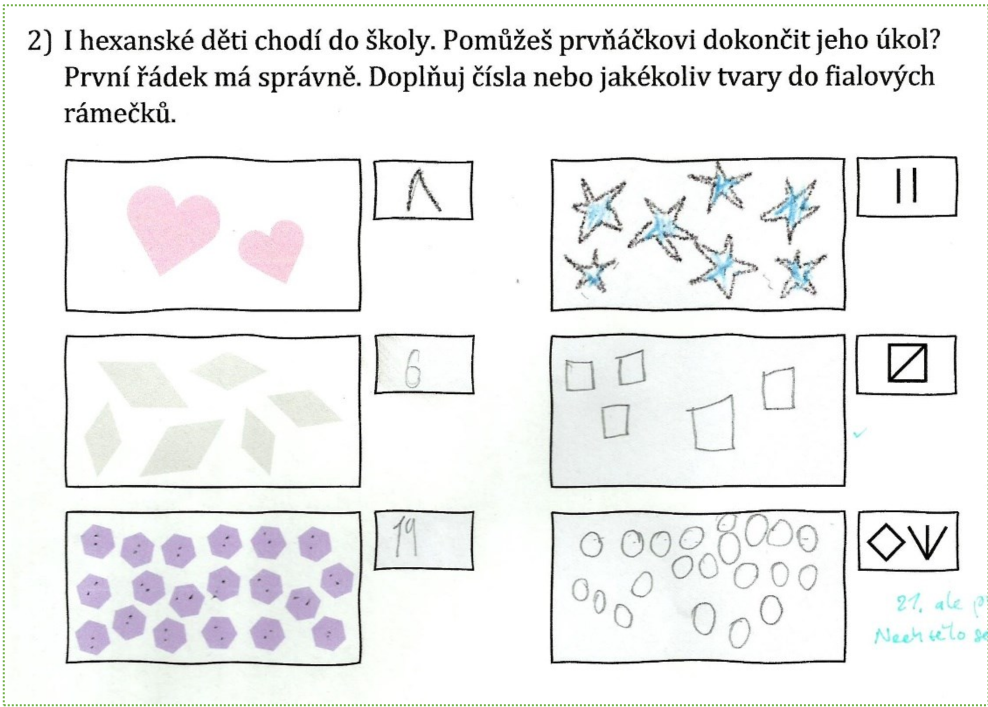


Obrázek 142: řešení Noemi, 2. úloha

Miky a Klárka řešili celou úlohu v desítkové soustavě s použitím arabských číslic. V 1. podúloze doplnili číslo $6_{(10)}$, ve 3. podúloze $19_{(10)}$. Ve 2. podúloze doplnili 5 objektů. Ve 4. podúloze Miky doplnil 43 objektů, Klárka pouze 21. Předpokládám, že Klárce došla vůle do rámečku doplňovat takové množství objektů.

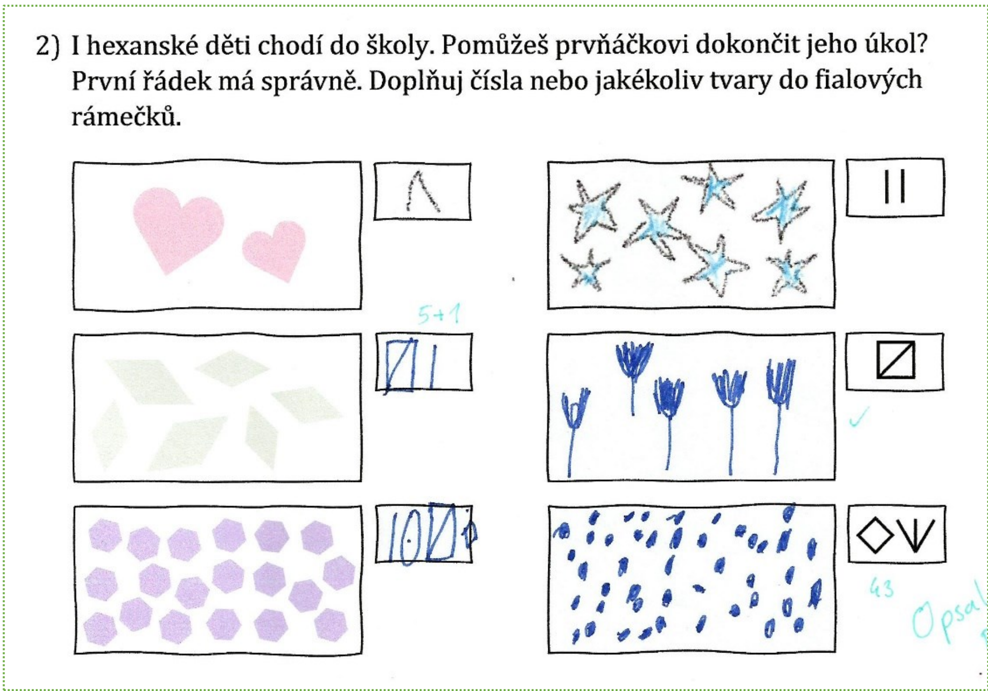


Obrázek 143: řešení Mikyho, 2. úloha



Obrázek 144: řešení Klárky, 2. úloha

Eliášovo řešení 2. úlohy nevyhodnocuji, neboť je totožné s řešením Barta, který seděl poblíž. U Eliáše oproti Bartovi však není patrný záznam počítání nebo jakékoliv jiné cesty k řešení. Použil také stejný tvar doplňovaných objektů, což může svědčit o tom, že si buďto nepřečetl zadání, nebo úloze nerozuměl na tolik, aby si uvědomil, že výběr tvaru není v této úloze podstatný.



Obrázek 145: řešení Eliáše, 2. úloha

3. ročník

V rámci této úlohy byli řešitelé z 3. ročníku ze všech ročníků nejúspěšnější. Až 3 řešitelé byli úspěšní ve všech podúlohách. Fanda byl úspěšný ve všech kromě 4. podúlohy a jako částečně úspěšní byli ve 3. ročníku a vyšších označováni ti řešitelé, kteří úspěšně vyřešili alespoň jednu z podúloh (vyjma 2. podúlohy, která byla spíše motivační), tedy ve všech případech 1. podúlohu.

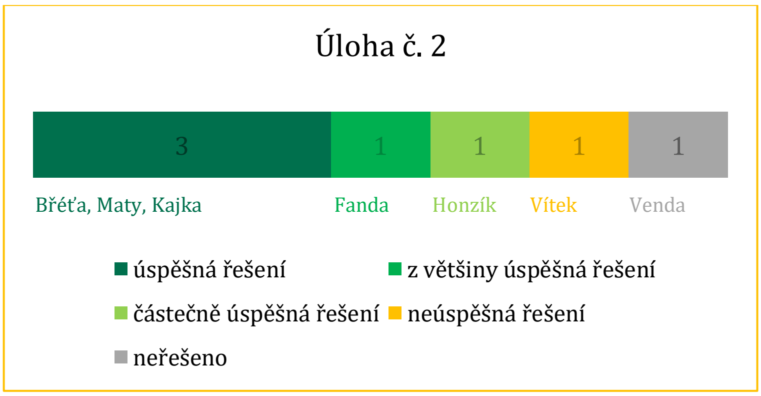
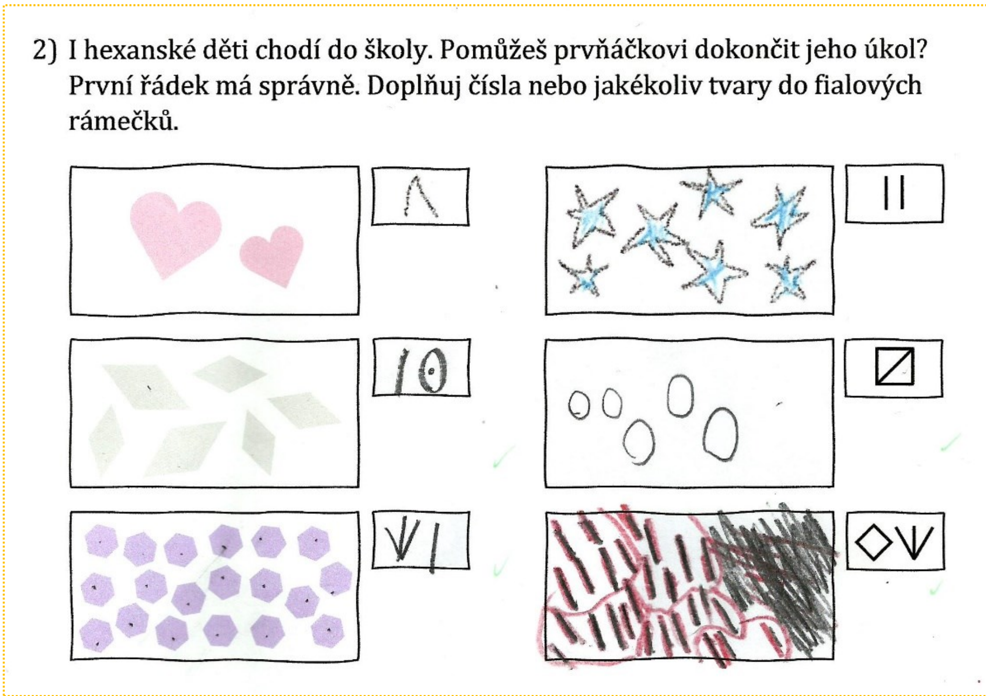


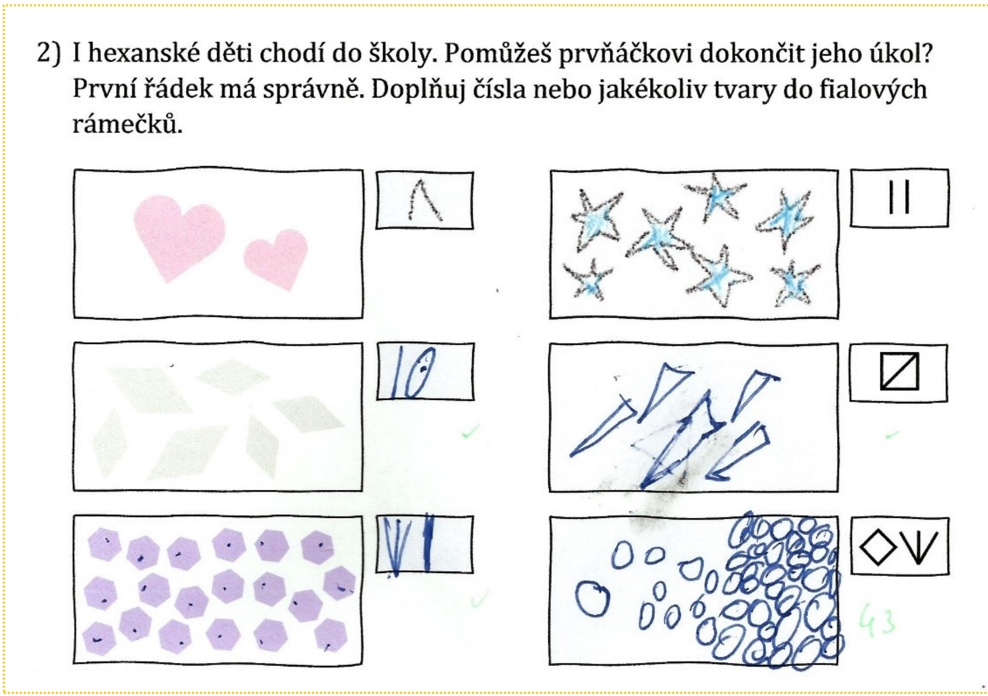
Diagram 59

Maty vyřešil 2. úlohu správně a v jeho testu není žádný další záznam přemýšlení. Břéťovo řešení stejně jako Matyho správné bez dalších úprav. U Břéti jsou patrné tečky od tužky vzniklé nejspíš počítáním objektů. Jediné drobné chyby se Břéťa dopustil v poslední podúloze, kde doplnil $26_{(10)}$ čárek namísto $27_{(10)}$. Kajka se s touto úlohou trápila dlouho a často se k ní vracela. Na zápis šestek a jednotek přišla během řešení 3. úlohy. Zapsat počet šestek a jednotek pro Kajku však bylo snazší než takto zapsané číslo přečíst. Pamatuji si, že ve 4. podúloze měla původně 43 čárek. Teprve ke konci hodiny čárky rozdělila do skupin po šestkách tak, jak to dělává při dělení se zbytkem. K tomu vyznačila i trojku a přebytečné čárky začmárala.



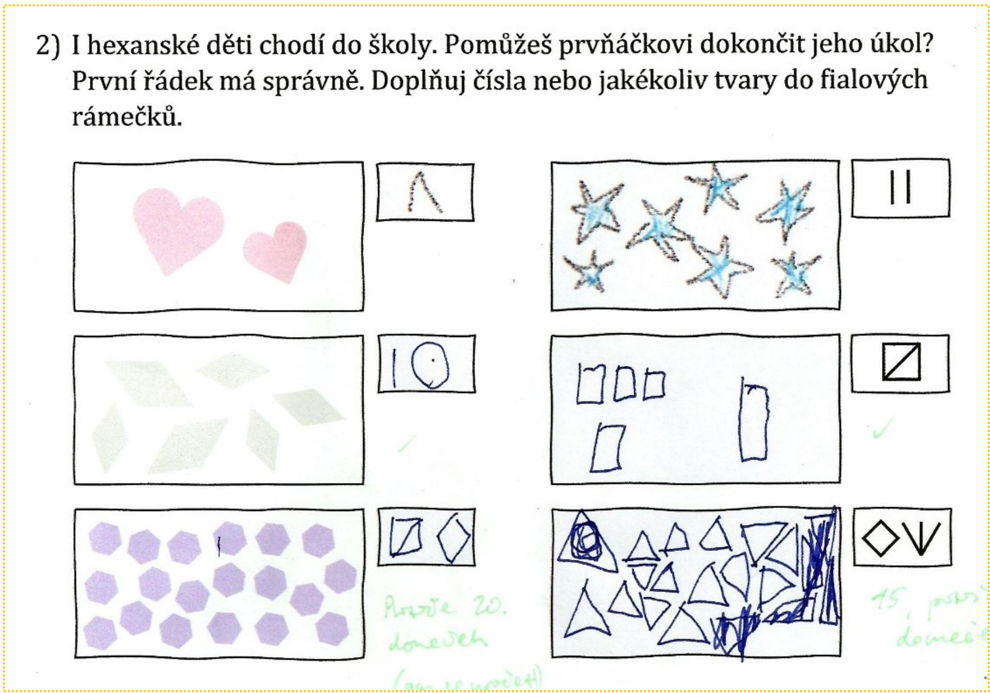
Obrázek 146: řešení Kajky, 2. úloha

Řešení Fandy je podobné jako to Kajčino, jen s tím rozdílem, že Fanda svoji chybu ve 4. podúloze neodhalil a ponechal tam 43 koleček. Jeho a Kajčina situace mi napovídá, že zapisovat čísla v poziční soustavě s alternativním základem může být pro žáky vskutku jednodušší než takováto čísla číst. Pokud už řešitelé odhalili význam 2. pozice, při zápisu provádějí už známou operaci dělení se zbytkem. Při čtení čísla jim však překáží silná asociace na desítkovou soustavu. Uvědomění, že číslo nelze číst pro ně běžným způsobem, ale že číslice na 2. pozici označuje počet něčeho jiného než desítek, v tomto případě šestek, už je krokem o zase další úroveň.



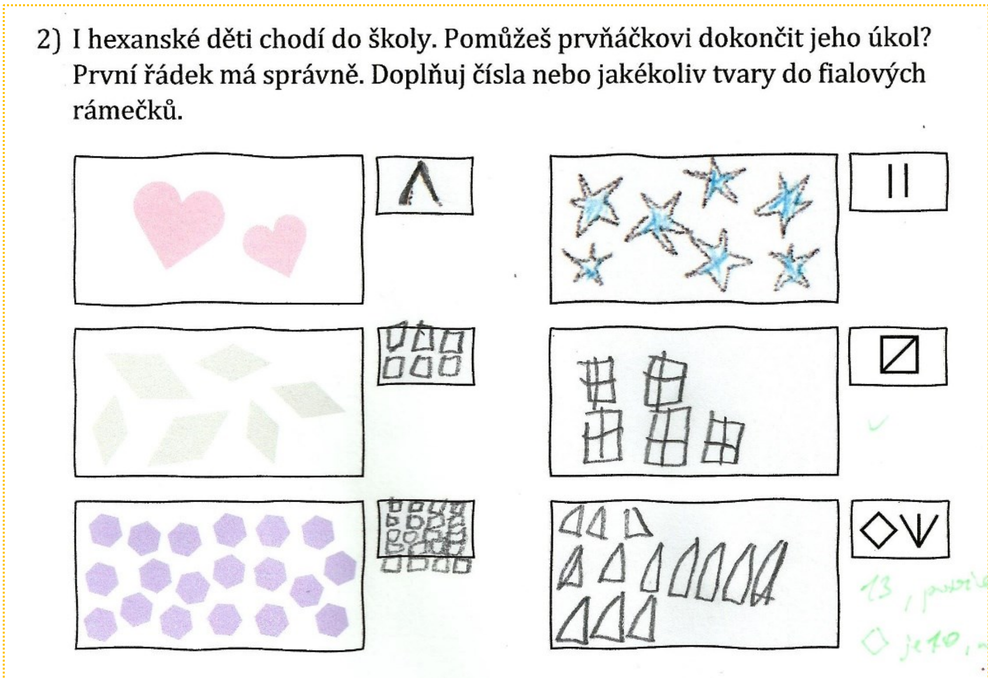
Obrázek 147: řešení Fandy, 2. úloha

Honzík v řešení 2. úlohy využil předepsanou řadu domečků z první úlohy. Do 1. podúlohy tak správně doplnil hexansky 10. Ve 3. podúloze doplnil hexanskými číslicemi 54. Domnívám se, že se spletl v počítání šestiúhelníčku a napočítal jich $20_{(10)}$ a posléze vycházel z řady domečků v 1. úloze. Kdyby na sebe první a druhý řádek domečků přímo navazovaly, měl by dvacátý domeček v Honzíkově původním řešení hexanské označení 54. Analogicky k tomu Honzík ve 4. podúloze doplnil do rámečku 15 trojúhelníků, neboť domeček s hexanským označením 43 je v 1. úloze patnáctý.



Obrázek 148: řešení Honzíka, 2. úloha

Vítek v 1. a 3. podúloze zapsal počty opět počtem, nepoužíval hexanské číslice. Ve 4. podúloze doplnil 13 objektů, což odpovídá smíšenému pozičně-nepozičnímu porozumění hexanských čísel, jaké jsem u Vítka popisovala při 1. úloze. Číslice ◇ je zde znakem pro desítku. Druhá číslice označuje počet jednotek, tedy 3.



Obrázek 149: řešení Vítka, 2. úloha

Venda doplnil pouze 2. podúlohu, a to správně. Zbylé podúlohy ponechal nevyplněné.

4. ročník

Úspěšnost v této úloze byla ve 4. ročníku spíše nižší. Pouze Klaudi správně vyřešila všechny podúlohy. Zároveň většina, tedy 6 z 8 řešitelů, správně vyřešila 1. podúlohu.

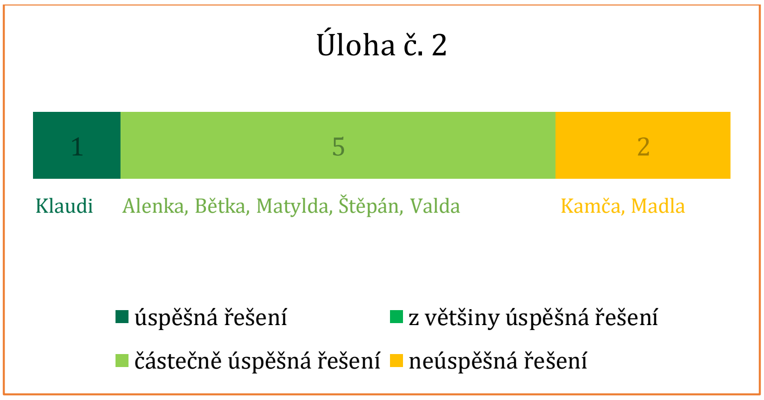
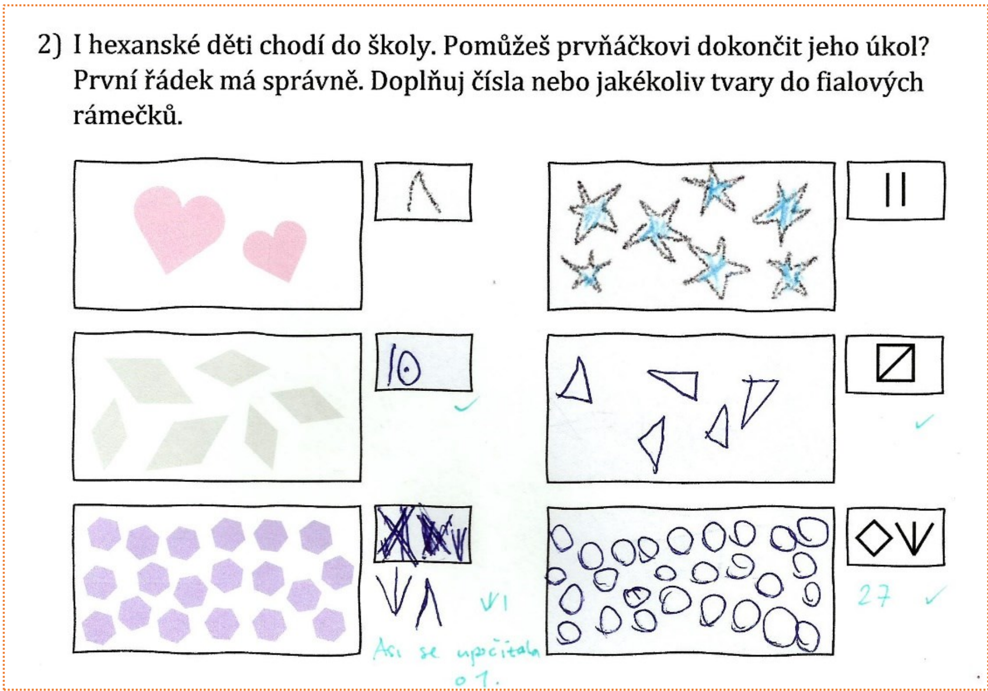


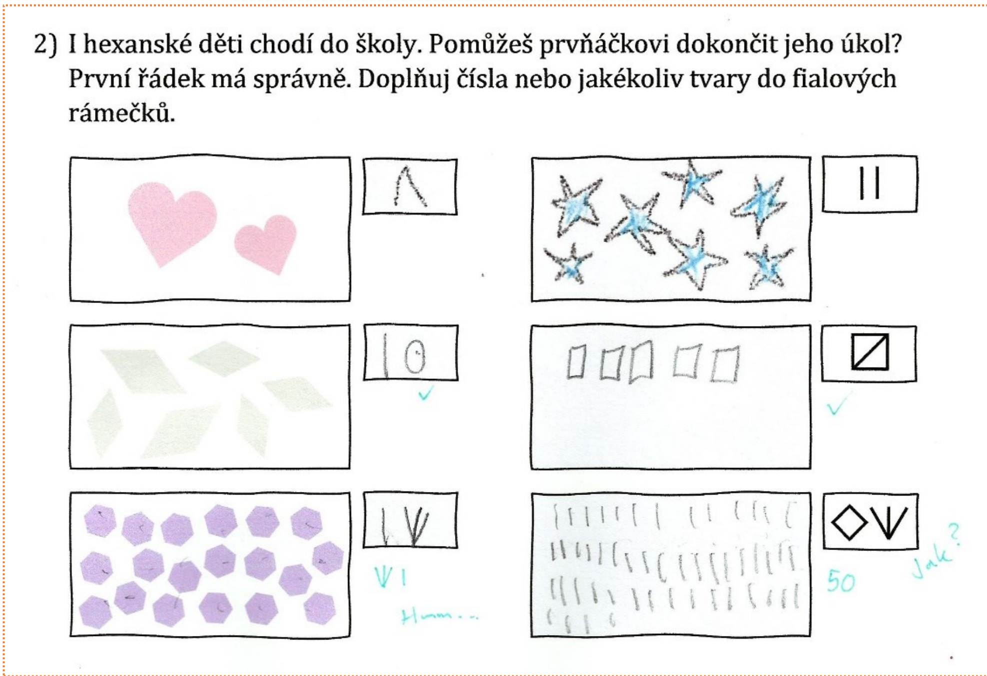
Diagram 60

Klaudi použila při svém řešení správnou úvahu, jen ve 3. podúloze si pravděpodobně chybně spočítala šestiúhelníčky. Jí zapsaný počet tak je 20, nikoliv 19. Klaudi nejdříve zapsala hexansky 23, poté své řešení škrtla a opravila na 32. Usuzuji z toho, že nejen odhalila dělení čísel na šestky a jednotky, ale i poznala, že pozice v zapsaném čísle je také důležitá.



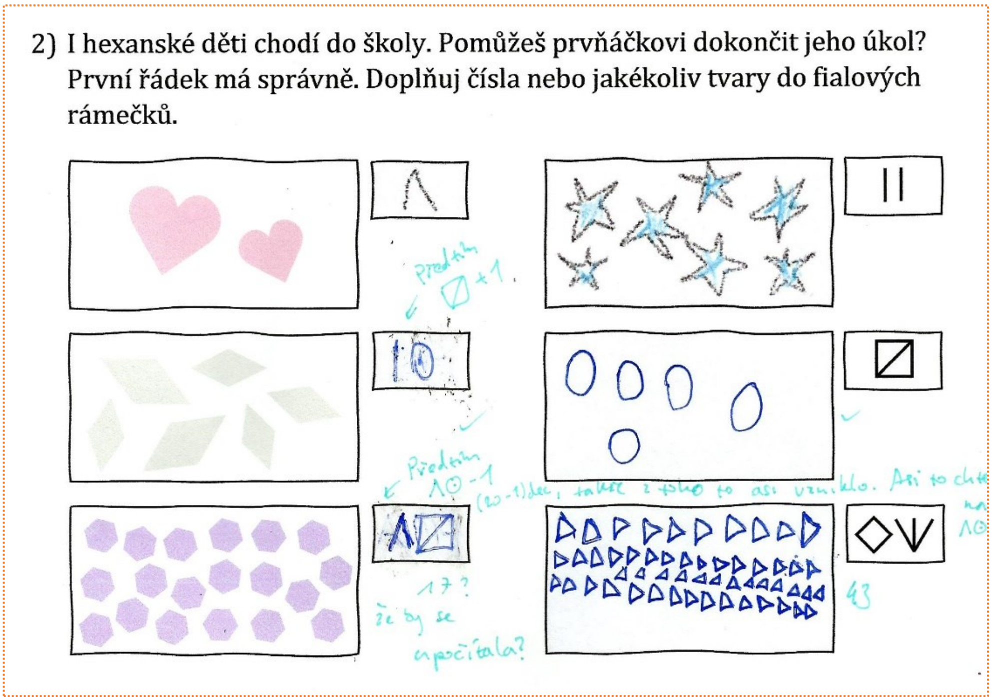
Obrázek 150: řešení Klaudi, 2. úloha

Štěpán také odhalil zápis $10_{(6)}$ v 1. podúloze. Pravděpodobně si pomohl řadou domečků z 1. úlohy. Ve 3. podúloze doplnil hexansky 13. Je možné, že Štěpán jen zaměnil pozice – v tom případě by bylo jeho řešení 1 jednotka a 3 šestky bylo správné. Jelikož však Šíma nepokračoval v dalších úlohách, přijde mi pravděpodobné, že tento princip neodhalil. Druhé možné vysvětlení je, že chtěl zapsat číslo $19_{(10)}$ v desítkové soustavě, podobně jako v 1. úloze. Pro číslici 9 Štěpán používá hexanský dvojznak 13. K zápisu 19, tedy hexansky 113 mu tedy chybí jen jednička na pozici desítek. Také je možné, že Štěpánova úvaha byla jiná, mně dosud nezjevná. Ve 4. podúloze Štěpán doplnil $50_{(10)}$ čárek. Zde mě nenapadá jiné vysvětlení, než že chtěl znázornit číslo $43_{(10)}$, ale přepočítal se v čárkování.

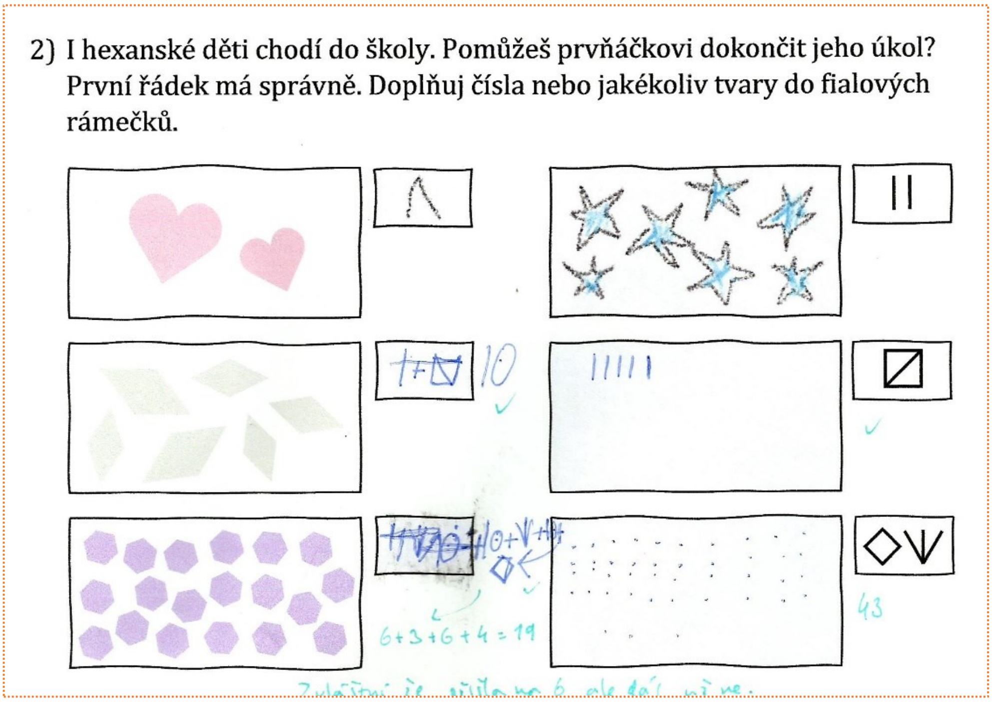


Obrázek 151: řešení Štěpána, 2. úloha

Alenka a Bětka mají podobná řešení. Obě v první podúloze původně zapsaly číslo šest součtem, nikoliv však dvojznaky. Alenka původně měla zápis hexanskými číslicemi 5 + 1, Bětka 1 + 5. Obě si odpověď posléze opravily na hexansky 10. Obě dívky také doplnily ve 4. podúloze 43 objektů. Ve 3. podúloze Alenka hexansky doplnila původně 20 – 1, tedy v desítkové soustavě, ale pro nedostatek hexanských číslic využila zápis pomocí výrazu. Alena posléze svoji odpověď změnila na hexansky 25, což podle mě vzniklo odečtením jednotky z místa jednotek, ale zároveň opomenutím přechodu přes základ, tedy nesnížením hodnoty číslice na 2. pozici. Pokud Alenka použila tuto popisovanou úvahu, jejím zamýšleným řešením by pravděpodobně bylo 15 namísto 25. Bětka nejdříve doplnila hexansky 113, což by při využití dvojznaku pro devítku odpovídalo zápisu 19 v desítkové soustavě. Posléze své řešení změnila na hexansky 20 – 1, tedy totožně jako původní řešení Alenky. Považuji za vhodné se zmínit, že tyto řešitelky neseděly při testu blízko sebe, tudíž tytu úvahy pravděpodobně probíhaly paralelně a nezávisle na sobě. Bětka své řešení podruhé změnila do podoby hexanského výrazu 10 + 3 + 10 + 4, což je s porozuměním 10 jako $10_{(6)}$ v součtu kýžený počet. Bětka zde možná měla větší důvěru ve sčítaní než odčítání, ale velmi pravděpodobně si nebyla jistá, zda hexanský zápis 20 skutečně vyjadřuje počet $20_{(10)}$, zatímco zápisem $10_{(6)}$ si jistá byla.

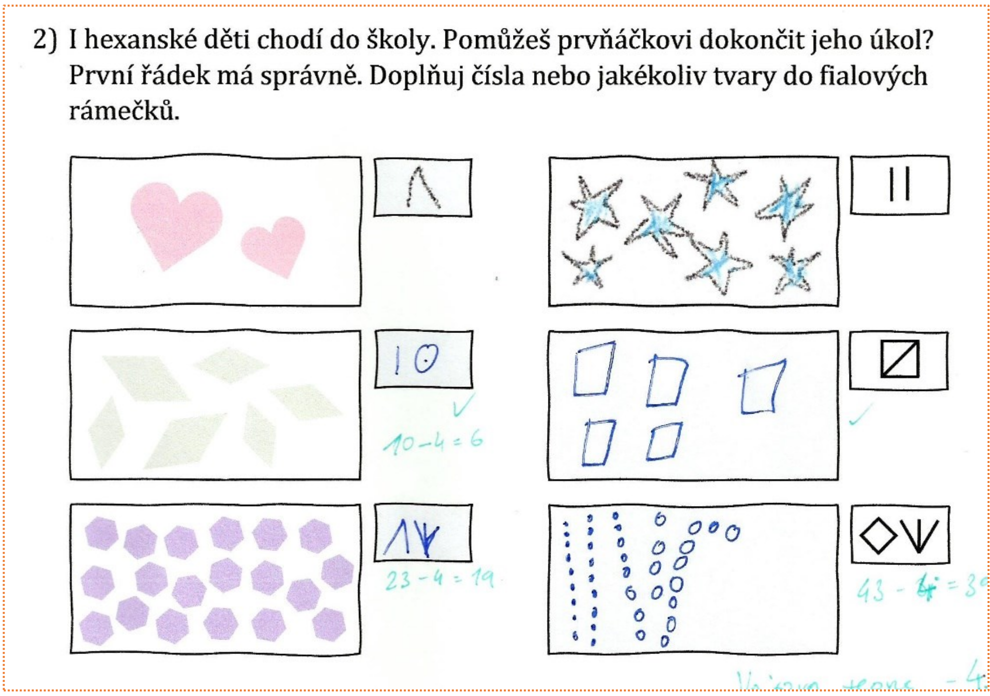


Obrázek 152: řešení Alenky, 2. úloha



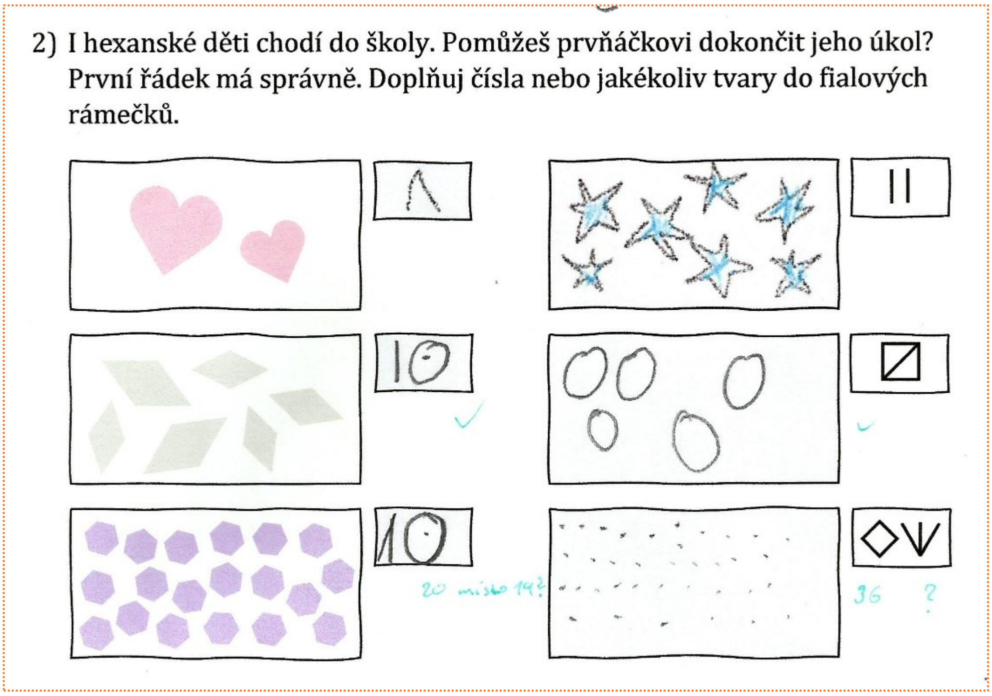
Obrázek 153: řešení Bětky, 2. úloha

Valda si pro hexanská čísla vytvořil vlastní postup. Během řešení často nahlas komentoval, že mu to nedává smysl, posléze radostně, že už na to přišel a že se mu to ověřilo. U 3. úlohy zase posmutněl, že mu jeho systém přestal fungovat, resp. že jsou Hexané divní, když používají pokaždé jiný systém a kdo se v tom má vyznat… Valda si v prvním řádku 1. úlohy všiml, že dvojciferná čísla znamenají počet o 4 nižší, než kolik by znamenaly čteny v desítkové soustavě. Tedy např. $11_{(10)} - 4_{(10)} = 11_{(6)}$. Tento postup však v šestkové soustavě platí pouze pro dvojciferná čísla obsahující právě 1 šestku. Valdův postup by fungoval, kdyby u dvojciferných čísel s n šestkami odečetl 4n. V 1. podúloze Valda úspěšně doplnil hexansky 10, tedy $6_{(10)} + 4_{(10)}$. Stejně postupoval i ve 3. a 4. podúloze s taktéž dvojcifernými čísly. Ve 3. podúloze doplnil hexansky zápis 23, tedy $19_{(10)} + 4_{(10)}$. Ve 4. podúloze doplnil 39 objektů, tedy $43_{(10)} - 4_{(10)}$.



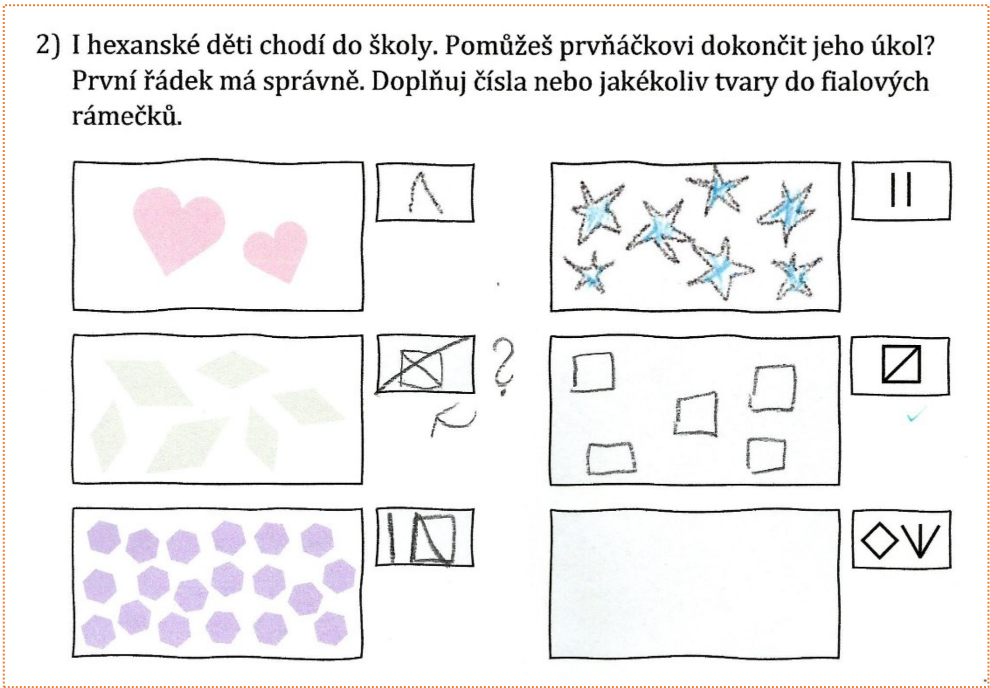
Obrázek 154: řešení Valdy, 2. úloha

Matylda úspěšně vyřešila 1. podúlohu. Ve 3. podúloze doplnila hexansky 20. Je možné, že si šestiúhelníčky chybně spočítala, nebo že dopsala nejbližší číslo z desítkové soustavy, které hexanskými číslicemi zapsat lze. Ve 4. podúloze doplnila $36_{(10)}$ objektů, čehož příčinu si neumím vysvětlit. Je možné, že Matylda neměla vůli tečkování dokončovat, nebo že se spletla, nebo je stejně tak možné, že za počtem $36_{(10)}$ byl vědomý záměr.



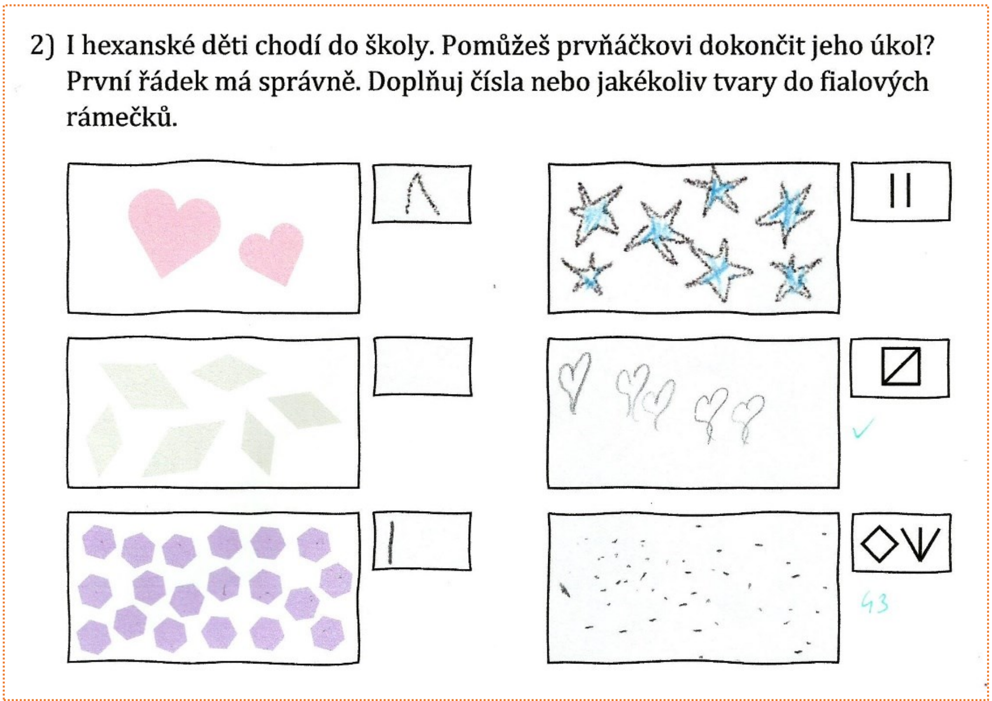
Obrázek 155: řešení Matyldy, 2. úloha

Kamča úspěšně vyřešila pouze 2. podúlohu. V 1. podúloze nejdříve doplnila hexanskou číslici 5, poté ji však škrtla a dopsala otazník. Ve 3. podúloze doplnila hexansky 15, což pravděpodobně vychází z nejbližšího nižšího čísla k číslu $19_{(10)}$, které s hexanskými číslicemi lze v desítkové soustavě zapsat. Poslední podúlohu ponechala Kamča neřešenou.



Obrázek 156: řešení Kamči, 2. úloha

Madla úspěšně vyřešila 2. podúlohu. Ve 4. podúloze vyznačila $43_{(10)}$ teček. Ve 3. podúloze dopsala pouze hexanskou číslici 1. Pravděpodobně chtěla těmito číslicemi zapsat 19 v desítkové soustavě, ale jelikož neměla k dispozici potřebnou číslici, ponechala místo jednotek prázdné stejně tak jako neřešila 1. podúlohu.



Obrázek 157: řešení Madly, 2. úloha

5. ročník

Ve 2. úloze byli všichni řešitelé z 5. ročníku alespoň částečně úspěšní, tedy všichni odhalili zápis čísla $10_{(6)}$. Výjimkou byl Luděk, který byl do kategorie *částečně úspěšný řešení* zařazen také, neboť jeho způsob zápisu je konsistentní a funguje.

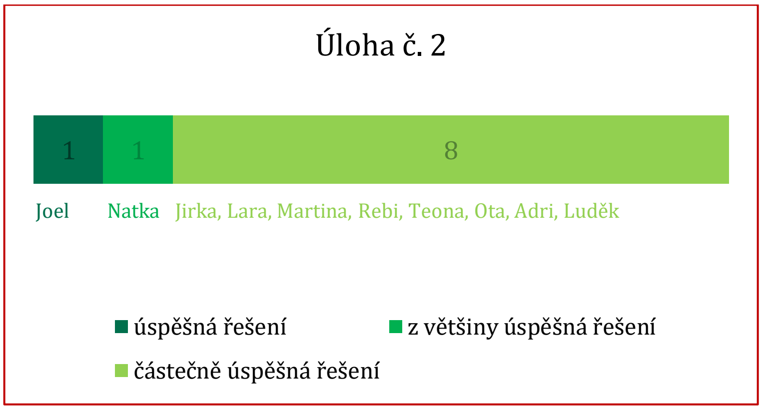
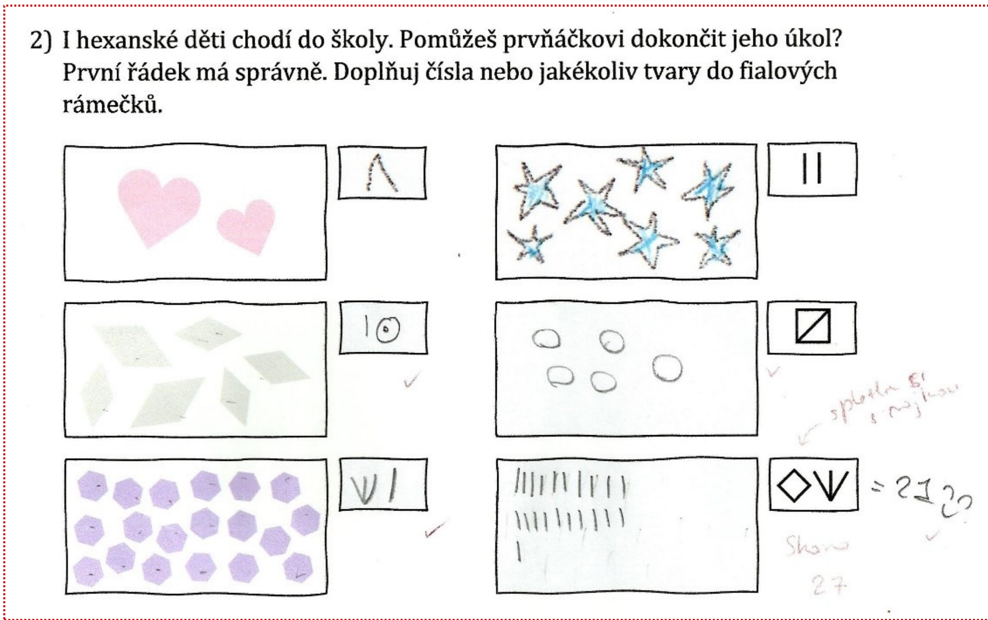


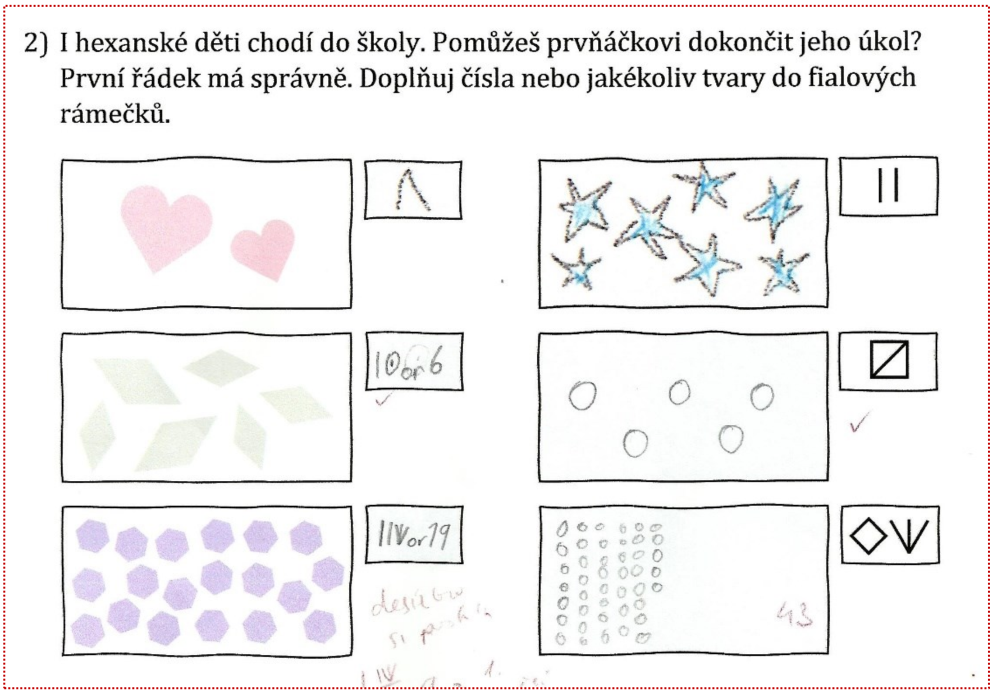
Diagram 61

Pouze Joel byl v úloze zcela úspěšný. Velmi pravděpodobně využil své poznámky z řešení 1. úlohy. Z většiny úspěšná byla Natka, která úspěšně vyřešila všechny kromě 4. podúlohy. Ve 4. podúloze doplnila $21_{(10)}$ čárek i dopsala číslo $21_{(10)}$ arabskými číslicemi. Číslo 21 dopsala i ke druhému domečku v druhém řádku v 1. úloze. Natčino řešení $21_{(10)}$, tedy $33_{(6)}$ se od úspěšného řešení liší o jednu šestku. Zdá se mi překvapivé, že by Natka chybně přečetla hexanskou čtyřku jako trojku, neboť hexanskou trojku úspěšně používá v této i ostatních podúlohách, ale tomuto vysvětlení nasvědčuje i její řešení 4. úlohy, kde číslo $43_{(6)}$ zakreslila jako 3 šestkové tyčinky a 3 jednotkové krychličky. Považuji za pravděpodobné, že příčina této Natčiny chyby je jiná a mně neznámá.

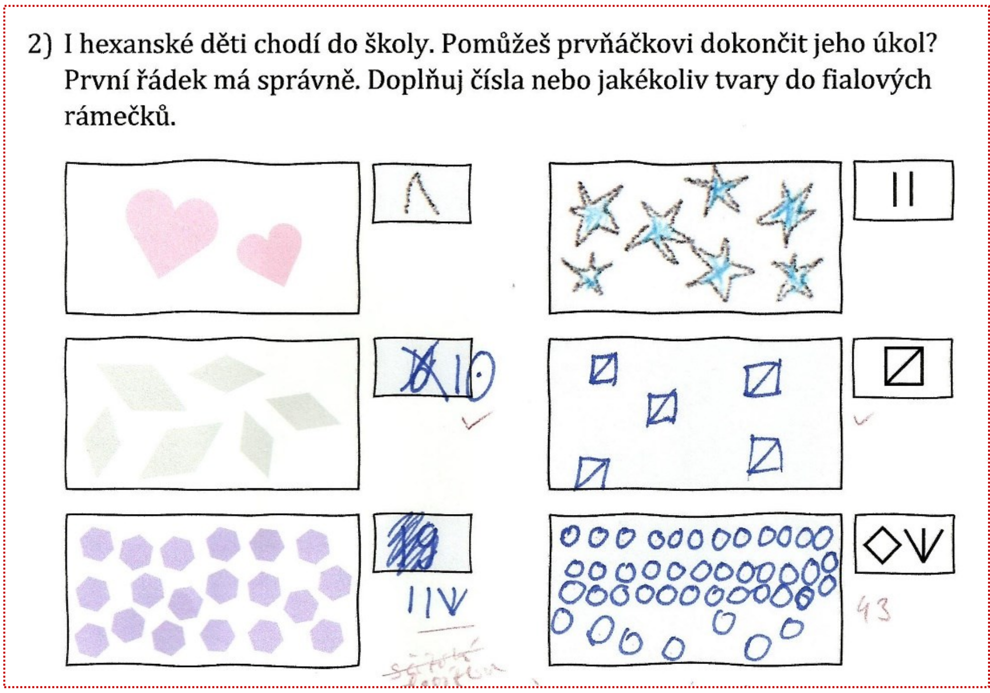


Obrázek 158: řešení Natky, 2. úloha

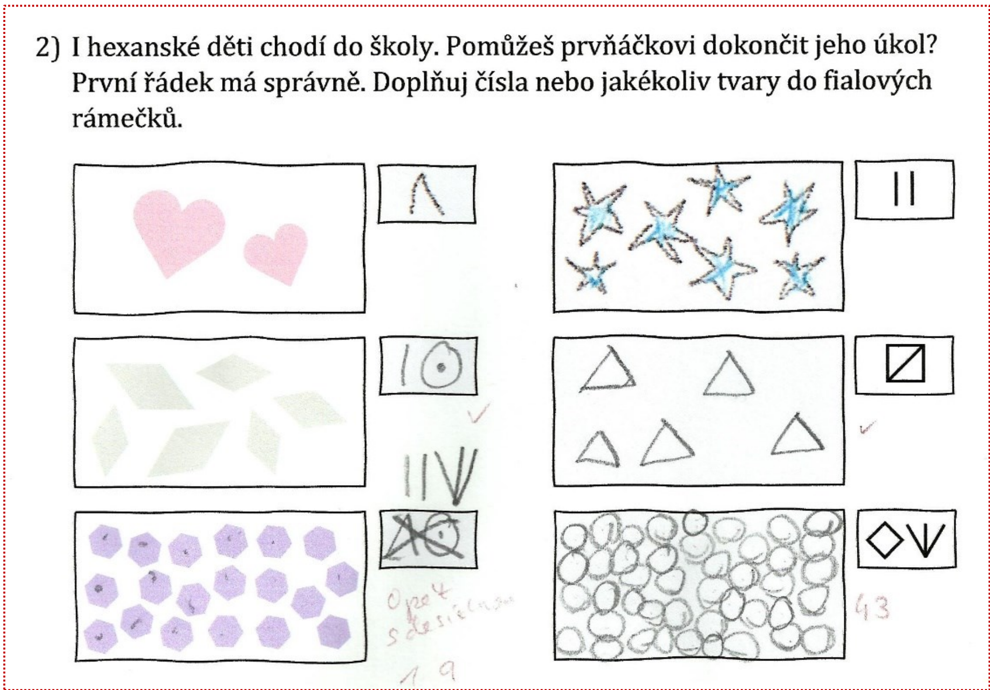
Řešení Jirky, Lary, Martiny, Rebi a Teony jsou velmi podobná. Všech těchto pět řešitelů uspělo v 1. a 2. podúloze. Teona nejdřív doplnila arabskou šestku, kterou posléze přepsala na hexansky 10. Lara zapsala do rámečku obě varianty, tedy 10 hexansky i 6 arabsky. Všech těchto pět řešitelů doplnilo ve 3. podúloze hexanský zápis 119, tedy 19 v desítkové soustavě s použitím dvojznaku pro devítku odvozeného z domečků v 1. úloze. Teona nejdříve stejně jako v 1. podúloze zapsala číslo arabskými číslicemi, později svoji odpověď škrtla a změnila. Martina původně zapsala hexansky 20. Je možné, že si chybně spočítala šestiúhelníčky, nebo to bylo nejbližší možné číslo zapsatelné hexanskými číslicemi. Posléze svoji odpověď i ona změnila. Lara opět uvedla obě varianty. Všech těchto pět řešitelů ve 4. podúloze zakreslilo 43 objektů. Je pozoruhodné, že mělo až pět řešitelů takto podobné řešení. Nemohu vyloučit, že si řešitelé během testu nepomáhali, seděli relativně blízko sebe, na druhou stranu ale Rebi vypracovávala test odděleně, a přesto došla ke stejným úvahám.



Obrázek 159: řešení Lary, 2. úloha



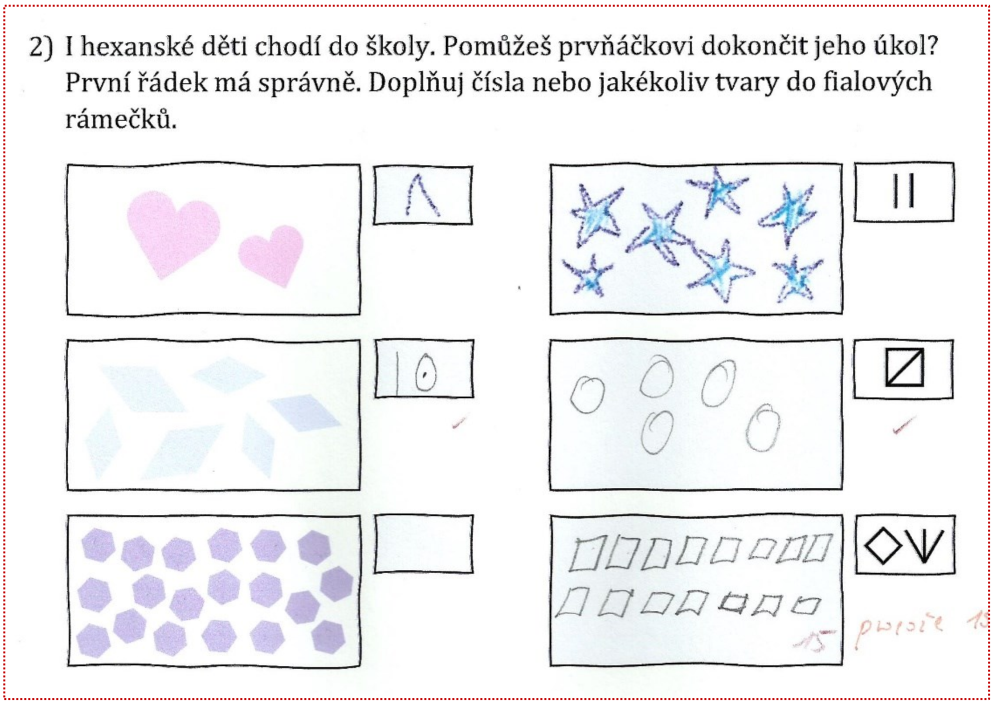
Obrázek 160: řešení Teony, 2. úloha



Obrázek 161: řešení Martiny, 2. úloha

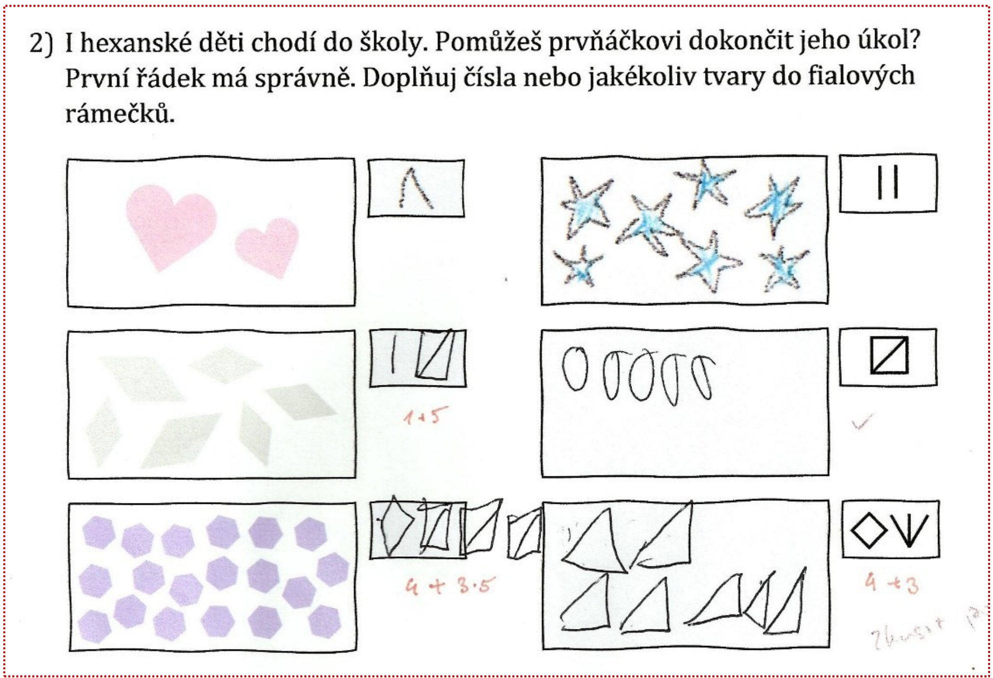
Ota a Adri úspěšně vyřešili 1. a 2. podúlohu. Ve 3. podúloze Ota doplnil pouze hexanskou číslici 1. Domnívám se, že chtěl zapsat číslo 19 jako v desítkové soustavě, ale jelikož mu chyběla číslice, své řešení nedokončil. Ve 4. podúloze doplnil $43_{(10)}$ objektů. Adri 3.

podúlohu neřešila. Ve 4. podúloze doplnila $15_{(10)}$ čtverců, zřejmě proto, že v první úloze je hexansky 43 nadepsaný v pořadí patnáctý domeček.



Obrázek 162: řešení Adri, 2. úloha

Luděk i v této úloze pracoval s hexanskými číslicemi jako s nepoziční soustavou. Všechna čísla zde četl jako ciferný součet. Při zápisu větších čísel Luděk opakuje pětku jakožto nejvyšší hexanskou číslici.



Obrázek 163: řešení Luďka, 2. úloha

Shrnutí

Téměř všichni řešitelé byli úspěšní ve 2. podúloze, což zcela odpovídá očekáváním, jelikož úloha byla motivační a záměrně stavěna tak, aby v ní řešitelé uspěli. Ve vyšších ročnících bylo mnoho řešitelů úspěšných i v 1. podúloze. Pravděpodobně zápis čísla $10_{(6)}$ odhalili na základě pořadí domečků v 1. úloze, což bylo i záměrem volby tohoto modelu.

Úspěšnost v 3. podúloze byla nízká, přesto ji někteří řešitelé úspěšně vyřešili zápisem čísla v šestkové soustavě, např. Kajka (3. roč.), Klaudi (4. roč.) a Joel (5. roč.).

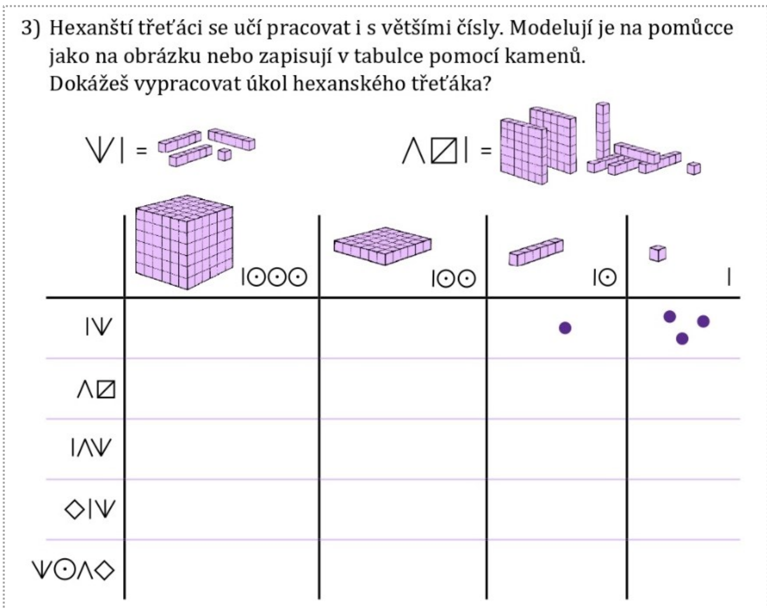
Úspěšnost ve 4. podúloze však byla velmi nízká. Na základě žákovských řešení vyvozuji, že zapsat počet jako číslo v poziční soustavě s alternativním základem může být jednodušší než takovéto číslo přečíst. Při zápisu čísla, tedy při převodu čísla zapsaného v desítkové soustavě do jiné, např. šestkové, řešitel provádí dělení (šesti) se zbytkem. V případě dvojciferného čísla stačí zapsat podíl na 2. pozici a zbytek na 1. pozici zprava. Např. $19_{(10)} : 6 = 3$ zbytek 1, tedy v šestkové soustavě $31_{(6)}$. Při opačném postupu, tedy při převodu zápisu čísla v šestkové soustavě do zápisu v desítkové soustavě žák provádí násobení, což je obecně hodnoceno jako méně kognitivně náročná aritmetická operace. Domnívám se, že úskalí převodu zápisu čísla ze soustavy o jiném základu než deset do desítkové soustavy však netkví v aritmetické operaci, ale v naučeném čtení čísel v desítkové soustavě, např. dvojznak 10 čteme deset. Slovo deset automaticky vyvolává v mysli jasnou představu o počtu. Pro úspěšný převod zápisu čísel z poziční soustavy s alternativním základem je nutné toto automatické čtení opustit a uvědomit si hodnoty pozic v zápise.

> Příklad: *Uvažme čtení čísla 43$_{(6)}$. Ačkoliv je číslo v testu zapsáno alternativní podobou číslic, žák si je na známé číslice překládá (mentálně nebo písemně přepisem do arabských číslic). Žák si následně přeložené číslice spojí do podoby 43, kterou automaticky čte čtyřicet tři, což jasně vyvolá představu o počtu, případně i adresy (u domečků). Pro úspěšný převod ze šestkové soustavy je však potřeba, aby žák tuto automatickou interpretaci opustil, číslo přečetl čtyři-tři, a vědomě využil znalosti hodnoty pozice, tj. 4 znamená čtyři krát šest. Teprve poté může žák číslice roznásobit podle řádů a součiny následně sečíst, tedy 4 × 6 + 3.*

I v této úloze bylo využití pouze desítkové soustavy velmi časté. Řešitelé si pro číslice 6, 7, 8 a 9 nejčastěji vytvořili nové znaky – dvojznaky (10, 11, ...), se kterými pracovali stejně jako v předchozí úloze.

Méně časté byly další přístupy k zápisu čísla, které využívaly nepoziční zápis, nebo byly odvozené z posloupnosti domečků v 1. úloze.

5.4.2.3. Řešení 3. úlohy



Obrázek 164

2. ročník

Tato úloha měla ve 2. ročníku poměrně vysokou úspěšnost. Domnívám se, že to souvisí s faktem, že tato třída často využívá Dienesovy kostky při výuce matematiky. Úlohu lze zcela úspěšně řešit i pouze v desítkové soustavě. Připomínám, že se nejedná o úlohu testovací, ale podpůrnou, která má řešitelům pomoci najít spojitosti šestkové a desítkové soustavy potřebné pro úspěšné řešení 4. úlohy. Výše popsaný fakt může také souviset s vyšší úspěšnosti ve 2. ročníku. Podle celkového řešení testu řešiteli z 2. ročníku totiž usuzuji, že pracovali výhradně v desítkové soustavě, tudíž jim řešení 3. úlohy pro ně klasickým způsobem zřejmě nebylo podezřelé.

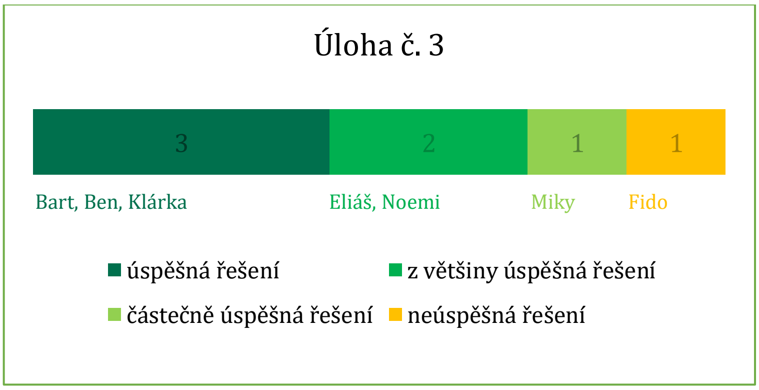
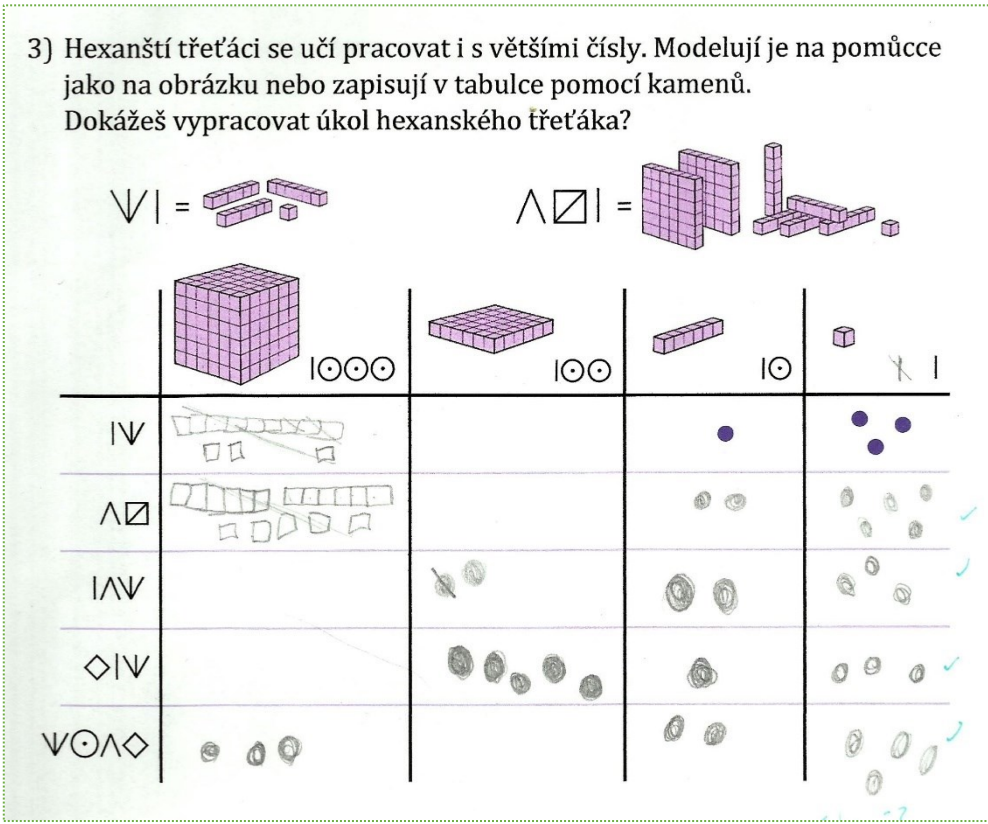


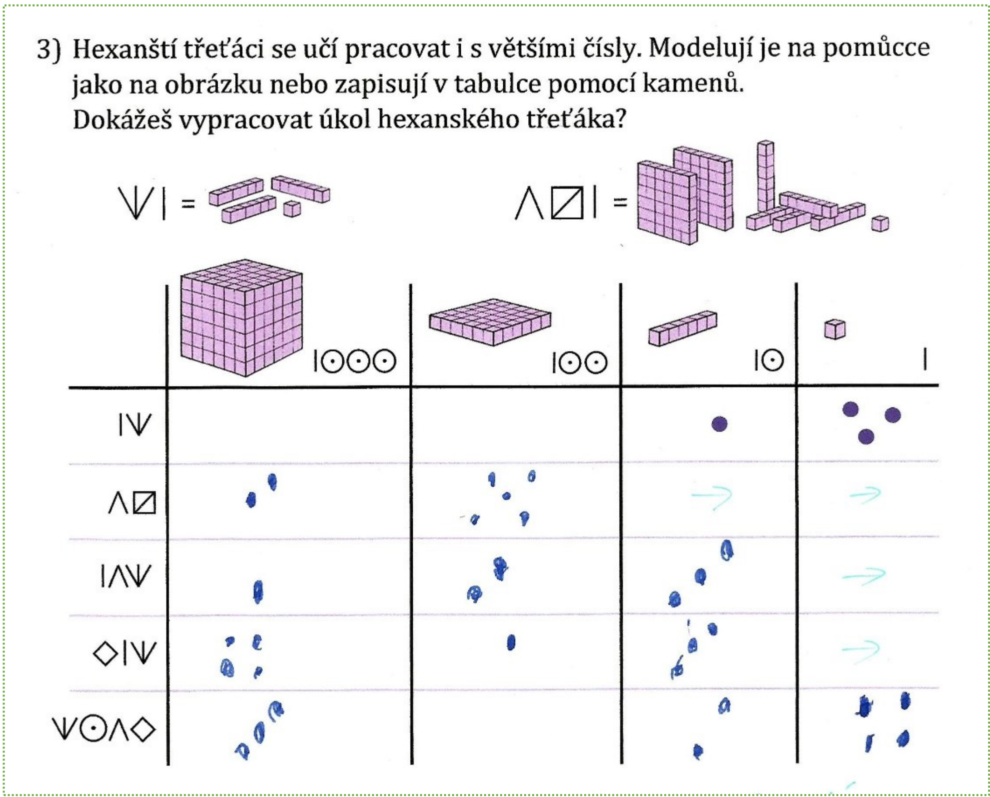
Diagram 62

Bart a Ben byli v úloze zcela úspěšní. Klárka se spletla pouze ve 3. podúloze zaznačením o jedné placky navíc. Předpokládám, že se spletla při zakreslování, nebo že chybně přečetla hexanskou číslici. V řešení Klárky je navíc evidence přemýšlení o úloze. Klárka nejdříve neporozuměla zadání a modely z Dienesových kostek kreslila. Posléze jsem jí, stejně jako mnohým dalším řešitelům z 2. ročníku, pomohla s porozuměním tabulky. Zajímavé však je, že na *tyčinkách* (2. pozice) zobrazila v první podúloze devět jednotek (blízké deseti), ve druhé podúloze už šest. Na tyčince v příkladových modelech i na jejich kreslených tyčinkách jsou slabounce patrné tečky od tužky, které vznikly Klárčiným počítáním. Klárka si tedy všimla, že Dienesovy kostky nejsou klasické, jaké zná z desítkové soustavy a jejich podobu zachovala. Dále se tím budu zabývat v Klárčině řešení 4. úlohy.



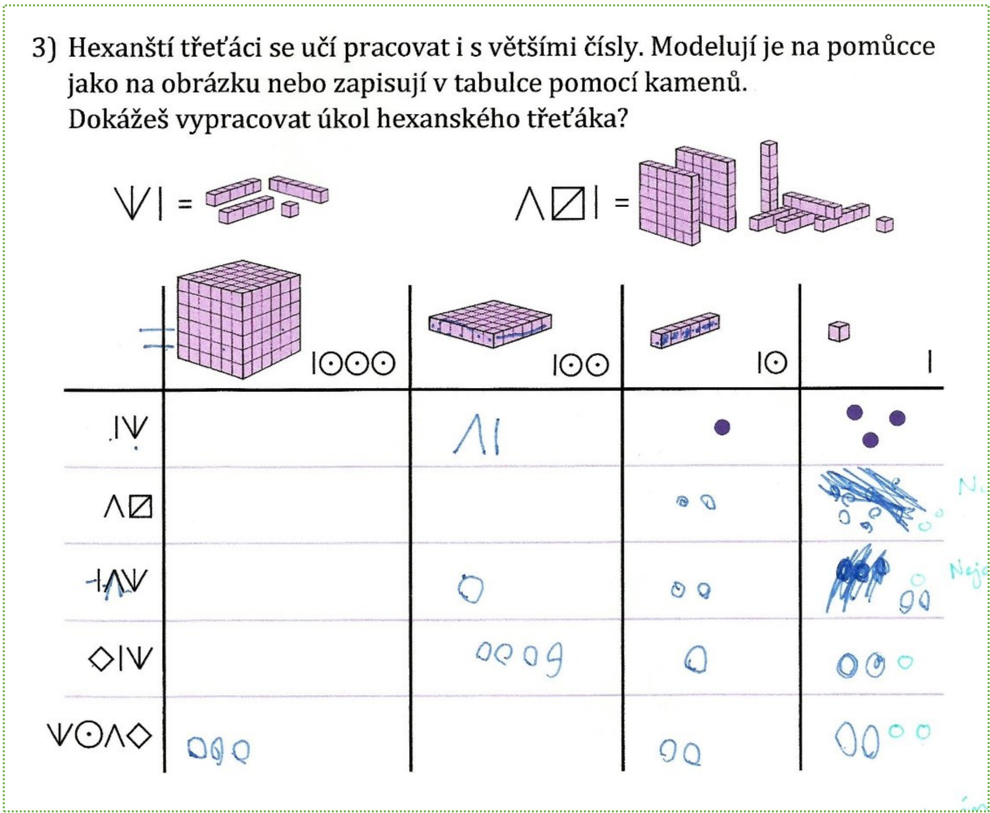
Obrázek 165: řešení Klárky, 3. úloha

Řešení Eliáše je v podstatě správné, jen kameny modelovaná čísla zarovnával vpravo namísto, aby zařadil řády pod příslušné modely v tabulce. Je možné, že to souvisí s jeho mírou porozumění řádům a pozičnímu zápisu. Zajímavé by bylo zjistit, zda takovéto řešení souvisí s typickou chybou při aditivních operacích pod sebou, když žáci často chybně zarovnají číslo vpravo. Je také možné, že naopak dobře rozumí řádům a ví, že má při zápisu zastoupení řádů v čísle nebo při jeho modelování z Dienesových kostek postupovat od největšího k nejmenšímu, jen zde neporozuměl tabulce. Práce s tabulkou byla obecně pro takto malé žáky obtížná.



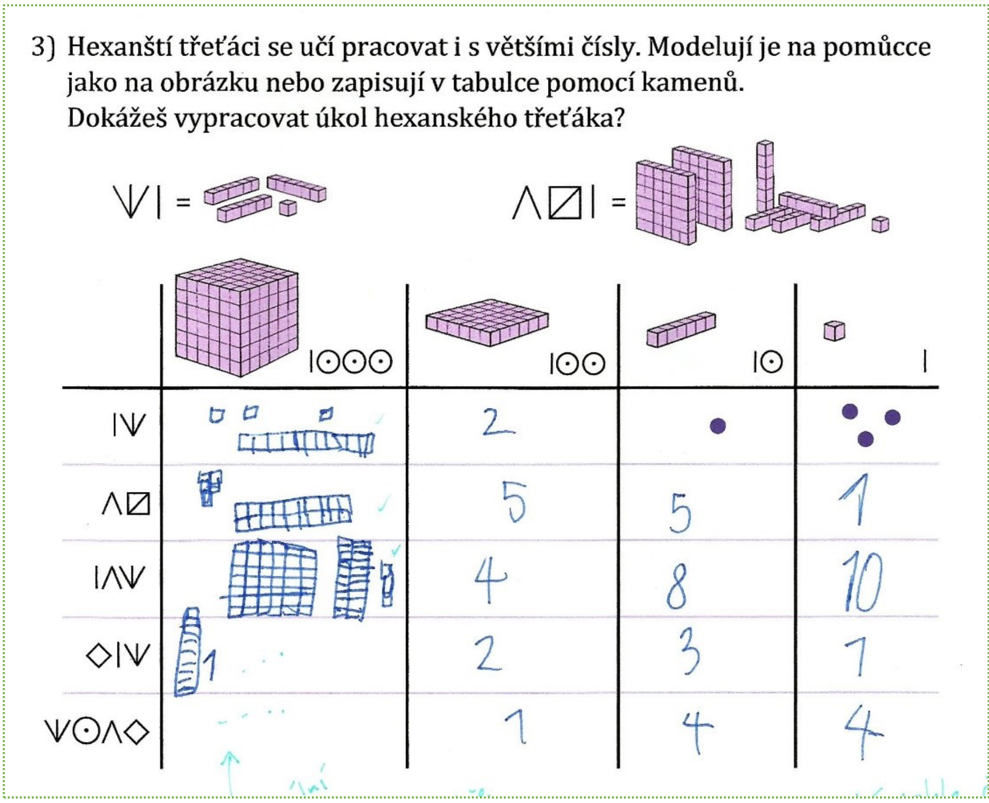
Obrázek 166: řešení Eliáše, 3. úloha

Řešení Noemi je téměř správné. Chybuje pouze v řádu jednotek, a i tam v prvních dvou podúlohách nejdřív zapsala správný počet kamenů a pak teprve jej škrtla a dopsala jiný. Příčinu této její si neumím vysvětlit. Také do prvního řádku dopsala hexansky 21 a nelze vyloučit, že je to evidence jejího uvažování o úloze.



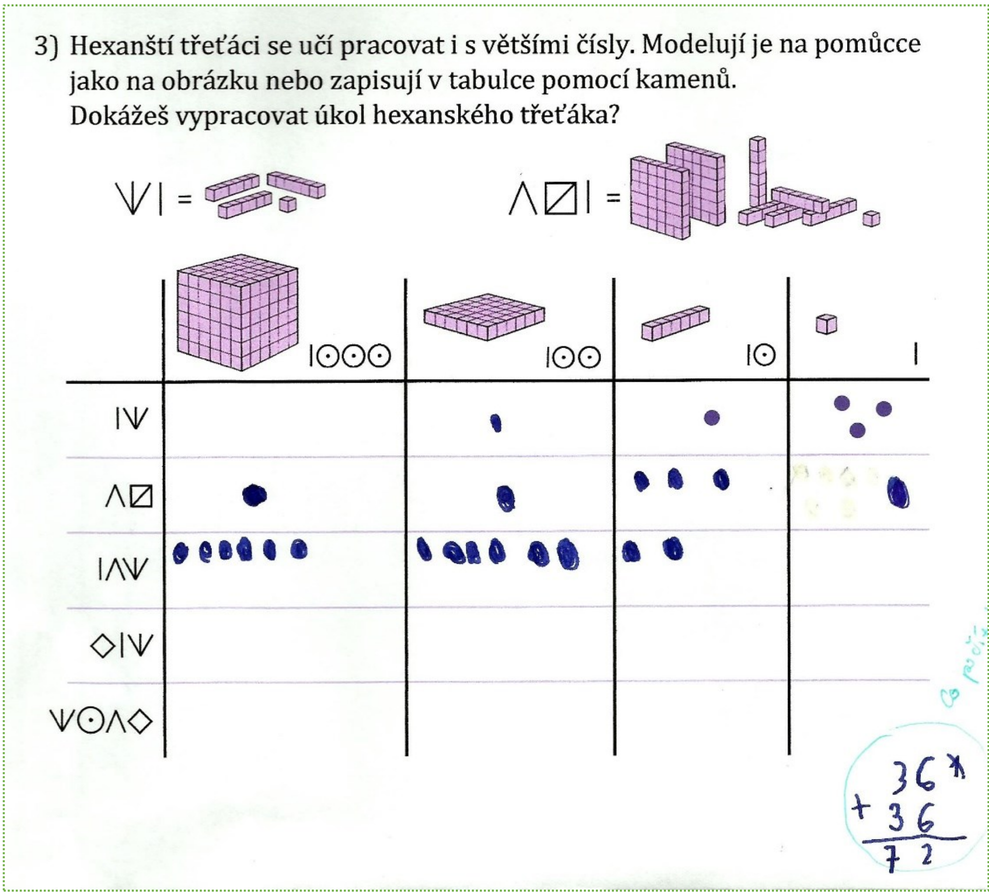
Obrázek 167: řešení Noemi, 3. úloha

Miky podobně jako Klárka nejdřív kreslil modely Dienesových kostek. V prvních tří řádcích tabulky jeho model správně odpovídá požadovanému hexanskému číslu. Ve čtvrtém řádku dokreslil pouze 2. pozici (tyčinky), ale dál už nepokračoval. Miky tady používá tyčinky jako model pro daný řád, nepropojuje ho striktně s obsaženým počtem jednotek. V prvním řádku má jeho tyčinka dvanáct jednotek, ve všech ostatních pak vždy deset. Jeho *placka* (3. pozice) má rozměry 6 × 7. Domnívám se, že Miky už si tvar s počtem asociuje abstraktně, nejde mu tedy o přesnost v zobrazení, ale o přibližné znázornění tvaru. Tvar je zde znakem pro řád. Ve 4. úloze už Miky ani nerozděluje tyčinky, placky a krychle na jednotlivé krychličky. Mrzí mě, že jsem Mikymu v této úloze chtěla pomoct s porozuměním tabulky, aniž by si o tom byl sám řekl. Vzhledem k tomu, že s jejím porozuměním chtělo pomoct mnoho řešitelů z 2. ročníku, obešla jsem pak všechny a chtěla se ujistit, že zadání rozumí. Mikyho jsem tím však pravděpodobně odradila od původního záměru modely z Dienesových kostek zakreslit, což by bylo řešení blízké cíli úlohy. Jeho pozdějšímu řešení (dopsaná čísla) nerozumím a dost možná jen doplnil různá čísla, neboť z mého vysvětlení neporozuměl, co se po něm chce, a naopak jsem jej zmátla.



Obrázek 168: řešení Mikyho, 3. úloha

Fidovu řešení nerozumím. Původně však měl v 1. podúloze správně doplněný počet jednotek. Níže pod úlohou má Fido rozepsaný součet 36 a 36. Je pravděpodobné, že číslo 36 souvisí s počtem jednotek v hexanské placce. Možná si chtěl Fido vypočítat kvantitu druhého čísla z příkladu, nebo kvantitu velké krychle, ale svůj záměr kvůli jeho obtížnosti nedokončil.



Obrázek 169: řešení Fida, 3. úloha

Celkově bylo pro žáky 2. ročníku náročné pracovat s tabulkou. Bylo potřeba ji dovysvětlovat a i tak zřejmě některé řešitele mátla. Dále byla úloha náročná nepřehlednými požadavky od řešitele. Není zde označeno, co je příklad (záhlaví s modely a první řádek tabulky) a kde začíná část, kterou má řešitel doplňovat. Úloha svým uspořádáním tak do značné míry spoléhala na řešitelovo předporozumění a zejména zkušenosti s podobnými typy úloh, nebo obecně s úlohami, kde je předvyplněný příklad. Jako nešťastná se ukázala i moje intervence ve snaze zajistit porozumění všech řešitelů, která nejméně jednoho řešitele zjevně zmátla.

3. ročník

V této úloze byli úspěšní všichni řešitelé z 3. ročníku s výjimkou Fandy. Stejně jako v předchozí úloze, i zde byl 3. ročník ze všech nejúspěšnější.

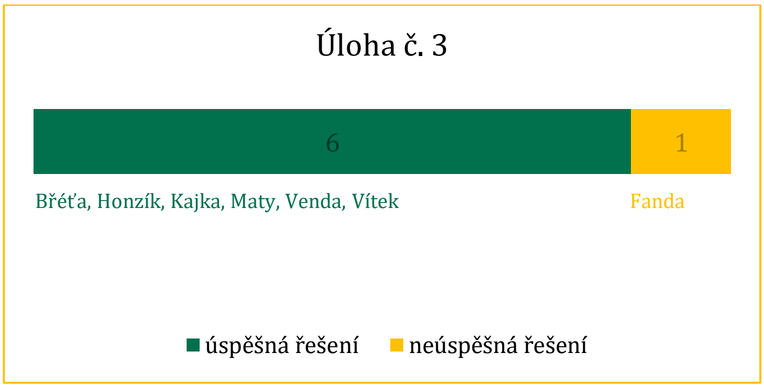
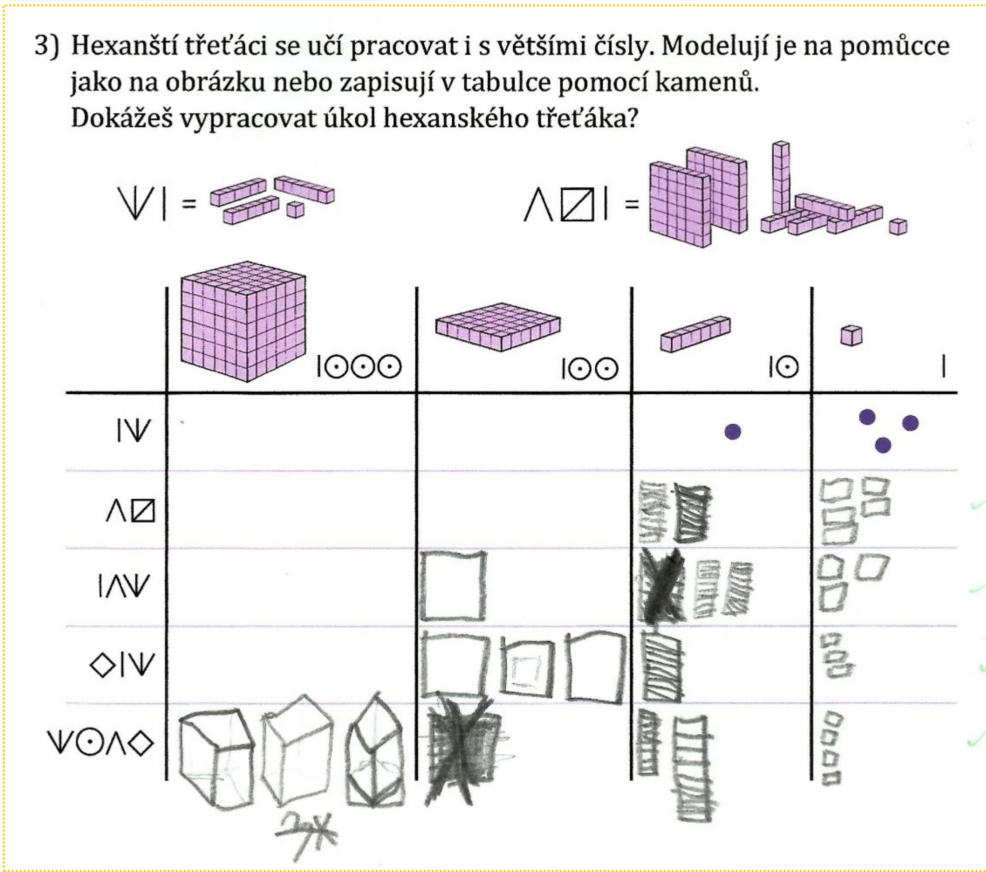


Diagram 63

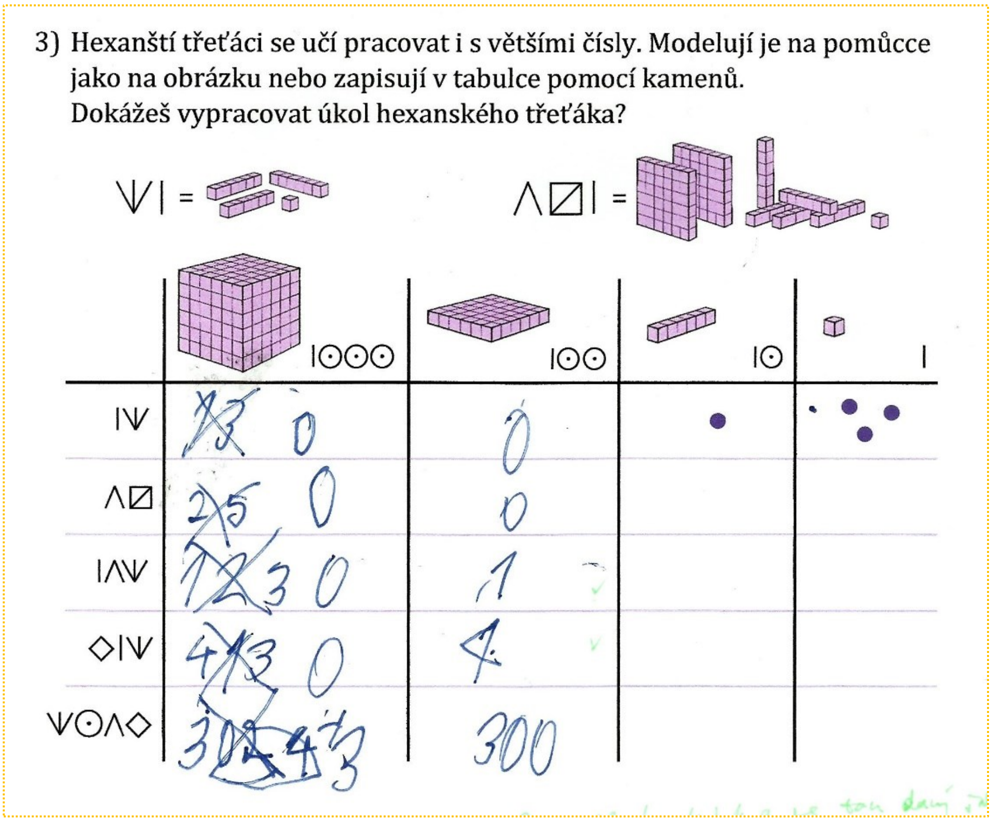
Většina úspěšných řešitelů této úlohy v tomto ročníku použila zápis pomocí kamenů, jak bylo v zadání. Pouze Břéťa místo kamenů dokresloval Dienesovy kostky. Placky ze 3. pozice a krychle ze 4. pozice Břéťa znázorňoval už symbolicky, u tyčinek ještě pečlivě znázorňoval kvantitu – deset jednotek v každé. Je zajímavé, že Břéťa úspěšně vyřešil 2. úlohu a přesto v tyčinkách kreslil deset, nikoliv šest jednotek. Je možné, že má Břéťa silnou asociaci na konkrétní podobu této učební pomůcky, ačkoliv jsme ji ve výuce využívali jen na podzim, což je poměrně dávno. Je samozřejmě možné, i pravděpodobné, že pomůcku třída využívala i v předchozích ročnících. Jeho řešení 4. úlohy je už celé v desítkové soustavě. Je tedy možné, že konkrétně u Břéti měla úloha opačný efekt, než bylo zamýšleno, tedy že ho spíše svedla zpět k desítkové soustavě, než aby mu pomohla objevit princip soustavy šestkové.



Obrázek 170: řešení Břéti, 3. úloha

Honzík začal podobně jako Břéťa kreslit do tabulky modely čísel z Dienesových kostek, už v prvním řádku však své řešení škrtl a pokračoval pomocí kamenů. Honzík také pravděpodobně během řešení 3. úlohy přehodnotil své dříve nesprávné porozumění hexanské číselné soustavě. Ve 4. úloze byl Honzík poměrně úspěšný, ale k 1. a 2. úloze se už zjevně nevracel.

Fanda si nejdřív čísla přepsal do arabských číslic. Posléze do tabulky doplňoval číslice, ale vynechal poslední dva sloupce. Fanda mi na dotaz sdělil, že zadání porozuměl tak, kolik kterých kostek se do předepsaného čísla vejde. Vytvořil si tak úlohu náročnější. Jeho řešení v tomto duchu bych považovala za správné, kdyby jej dokončil, což už ale z časových i obtížnostních důvodů nesvedl. V posledním řádku je vidět Fandovo nedostatečná zkušenost s velikostmi řádů a zřejmě i s touto pomůckou. Fanda zde doplnil, že se placka (stovka) vejde do tří krychlí (tisíc) třistakrát, namísto třiceti.



Obrázek 171: řešení Fandy, 3. úloha

Je zajímavé, že právě 3. ročník byl v této úloze tak úspěšný. Může to souviset s konkrétním složením žáků nebo s obecným přístupem třídy k nestandardním úlohám, který jsem popisovala i u 2. a 3. úlohy didaktického testu Pozemská čísla. S prostředím Kameny se třída v mých hodinách doposud setkala jen okrajově v jedné hodině na podzim, kde Kameny navíc neměly podobu tabulky, ale pouze se pokládaly na plstěné podložky. Přesto ale může být vzhledem k vyššímu ročníku v této třídě větší zkušenost obecně s tabulkami než ve 2. ročníku. Zároveň zde řešitelům nemuselo být použití desítkové soustavy tak podezřelé jako řešitelům z vyšších ročníků, kteří už o tématu mohli uvažovat komplexněji, což bylo pozorováno i ve výstupním testu ve 3. ročníku, který byl zadáván po intervencích (kapitola 6).

4. ročník

Ve 3. úloze byla i ve 4. ročníku většina řešitelů zcela úspěšná, jak je patrné i z diagramu níže. Pouze Štěpán úlohu neřešil.

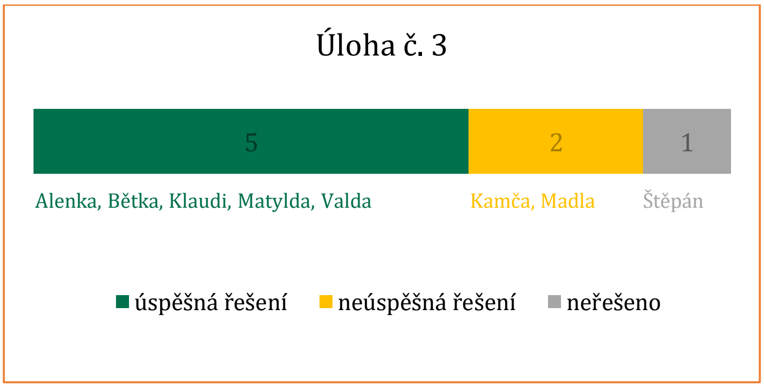
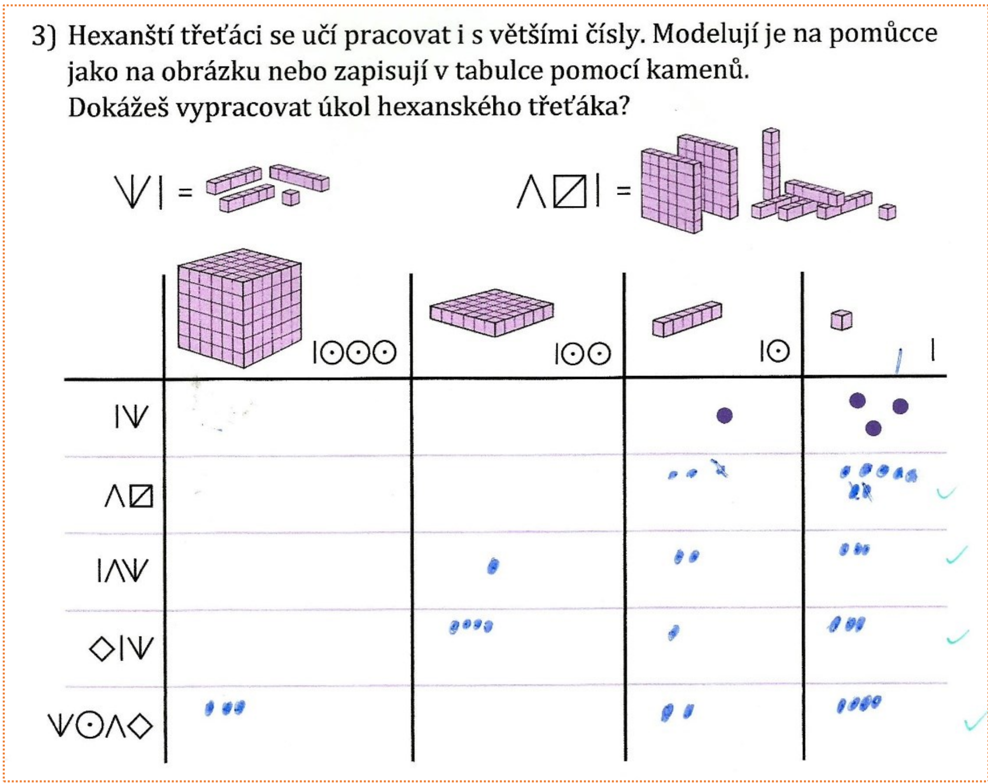


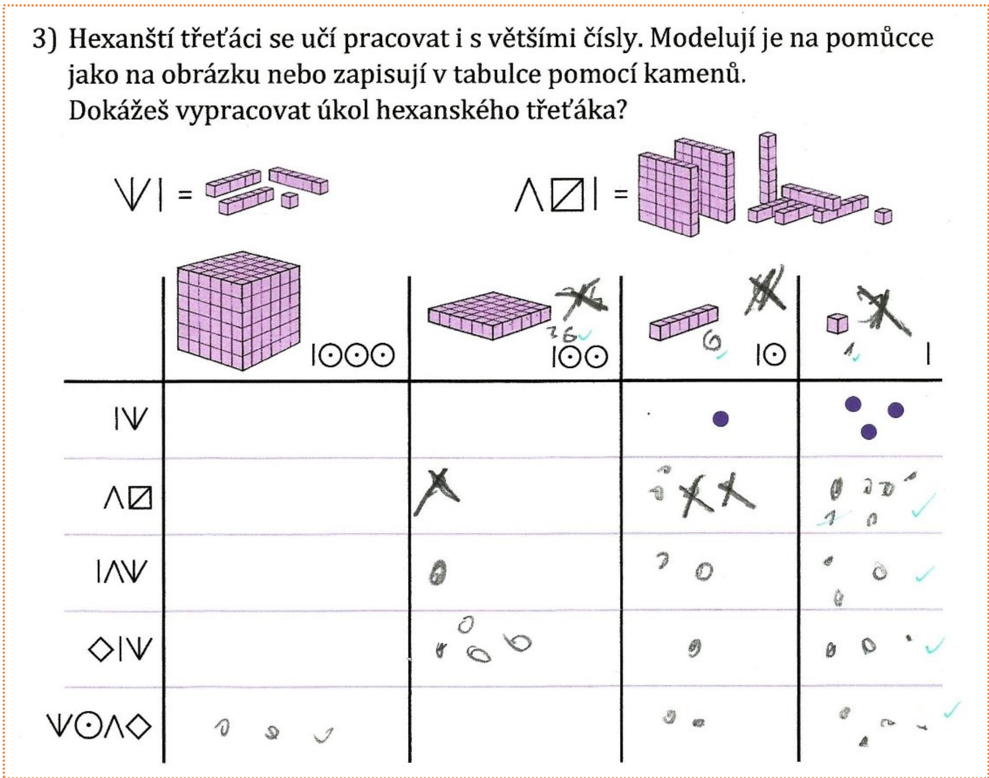
Diagram 64

Většina z úspěšných řešitelů úlohy dopsala řešení napoprvé, bez dalších úprav nebo poznámek. Pouze Bětka s Matyldou se opravovaly. U řešení Bětky je zajímavé, že pravděpodobně uvažovala o zapsaných číslech v desítkové soustavě, ale zároveň si všimla, že kvantita vázaná v Dienesových kostkách řádům desítkové soustavy neodpovídá. Tento rozdíl ve vnímání zapsaného čísla a vymodelovaného čísla se projevil i u Bena z 2. ročníku a projeví se i v Bětčině řešení 4. úlohy. Bětka do 2. řádku tabulky nejdříve doplnila 3 šestky a 7 jednotek, když pomineme, že 7 jednotek v šestkové soustavě zapsat nelze, Bětčin znázorněný počet odpovídá číslu $25_{(10)}$. Bětka poté toto řešení proškrtala a zbytek úlohy už také řešila čistě bez přechodu mezi soustavami. Nelze s jistotou určit, zda Bětce tato úloha v jejím porozumění pomohla, nebo ji naopak zmátla. Z jejího řešení však podobně jako z řešení Benova vyvozuji, že kvantitativní model je pro žáky tvárný a přístupný ke změnám, vnímání zápisu čísla je však podstatně rigidnější.



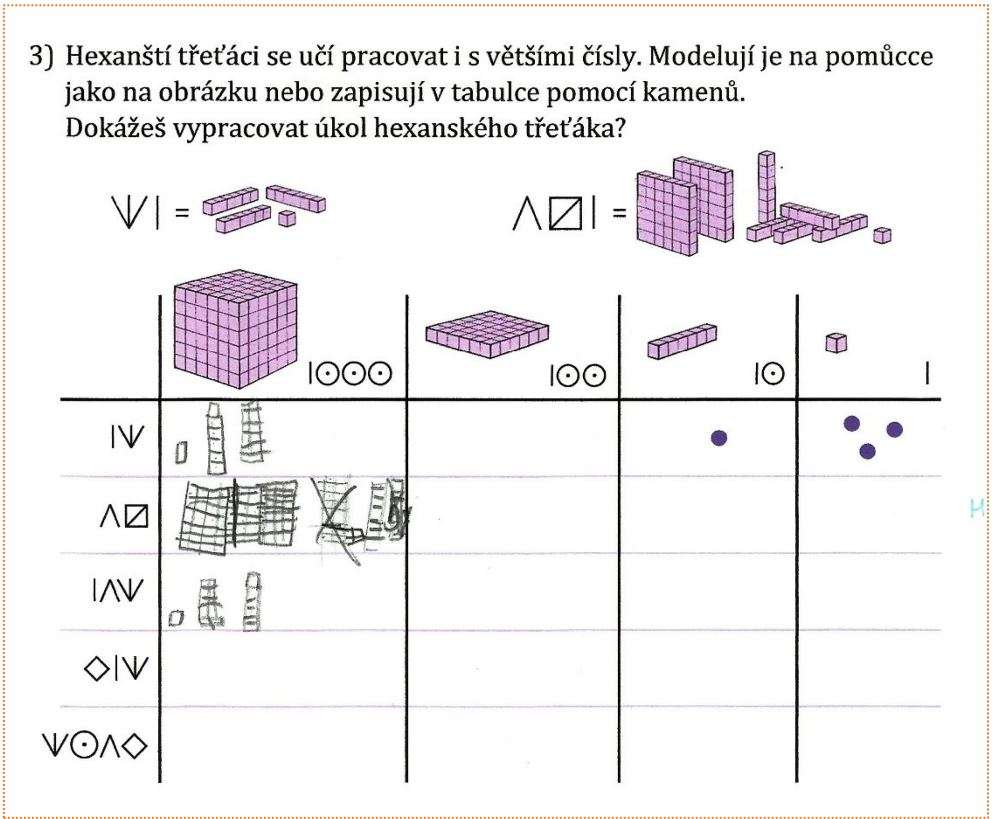
Obrázek 172: řešení Bětky, 3. úloha

Řešení Majdy také obsahuje škrty, nedokážu však vyvodit možné příčiny těchto změn. Madla si také nadepsala první 3 řády jejich číselnými významy v desítkové soustavě.



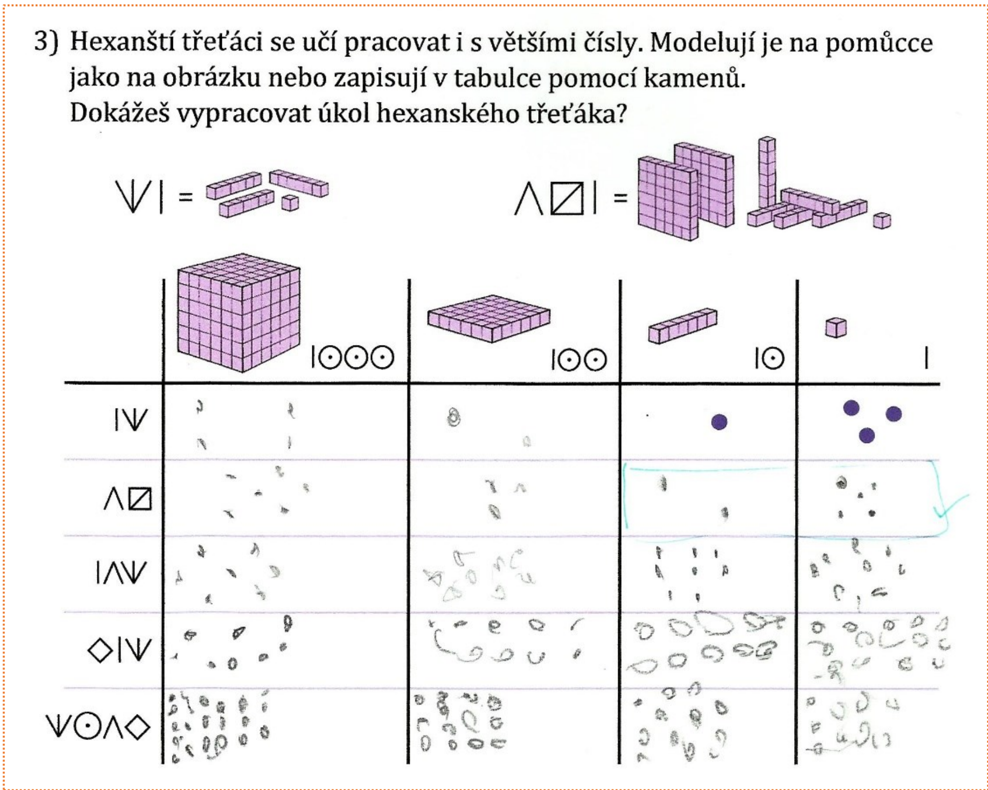
Obrázek 173: řešení Matyldy, 3. úloha

Madla zřejmě neporozuměla tabulkovému zápisu a k uvedeným číslům dokreslovala modely z Dienesových kostek. Její řešení není úplné, ale z doplněného, se domnívám, že Madla významově prohodila a někdy i posunula pozice v čísle. V 1. řádku je tak vidět 1 krychličku a 3 hexanské tyčinky (složené z šesti jednotek). Ve 2. řádku jsou vidět 2 tyčinky a nedokončených 5 placek. Ve 3. řádku Madla dokreslila 1 krychličku, 2 tyčinky a další jednu tyčinku namísto placek. Není mi zřejmé, jakým způsobem Madla poziční soustavě rozumí, zdá se mi však pravděpodobné, že nemá velkou zkušenost právě s touto pomůckou, možná i s kvantitativním znázorňováním řádů obecně.



Obrázek 174: řešení Madly, 3. úloha

Kamča zřejmě neporozuměla zadání. Okénka tabulky vyplnila tečkami, jejichž kvantita se s dalšími řádky navyšuje. Přesto má v příslušných sloupcích 2. řádku správně vyplněný počet kamenů. Nemyslím si, že by toto vzniklo náhodně, navíc jsou tečky zde nakresleny s o něco větší pečlivostí. Je tedy možné, že se Kamča snažila zadání porozumět a skutečně mu i porozuměla, trojciferná čísla pro ni však byla už náročná, a tak začala úlohu vyplňovat náhodně tak, jak by přibližně mohlo vypadat řešení, aby nenechala okénka prázdná.



Obrázek 175: řešení Kamči, 3. úloha

5. ročník

V této úloze byli řešitelé z 5. ročníků ze všech ročníků nejméně úspěšní. Alespoň částečně úspěšných byla polovina řešitelů, druhá polovina byla neúspěšná nebo úlohu téměř či vůbec neřešila.

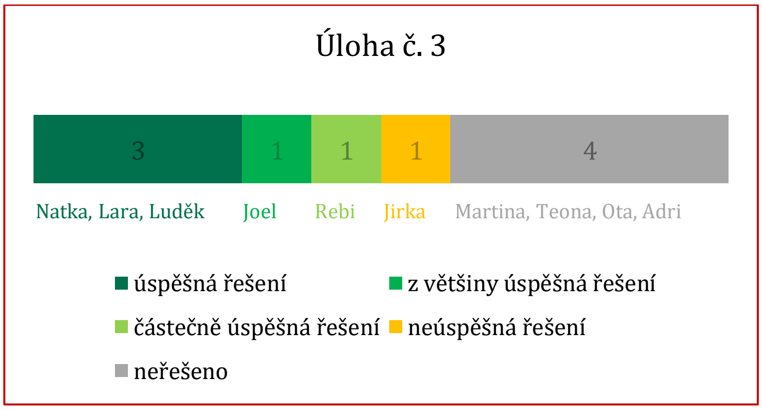
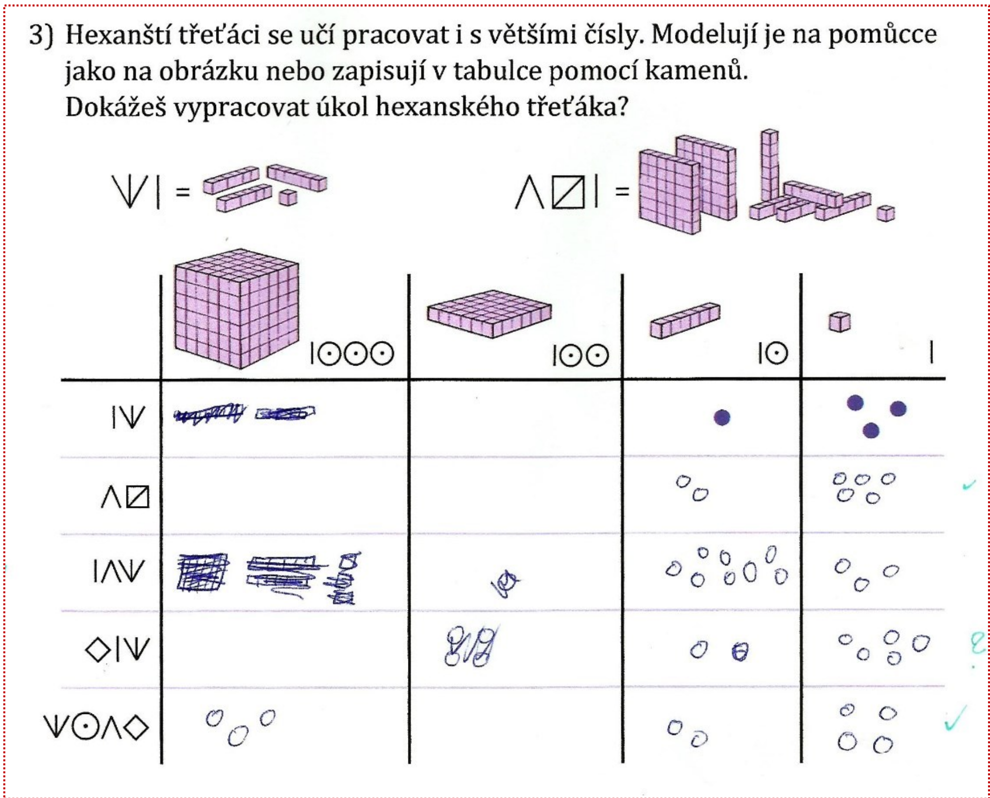


Diagram 65

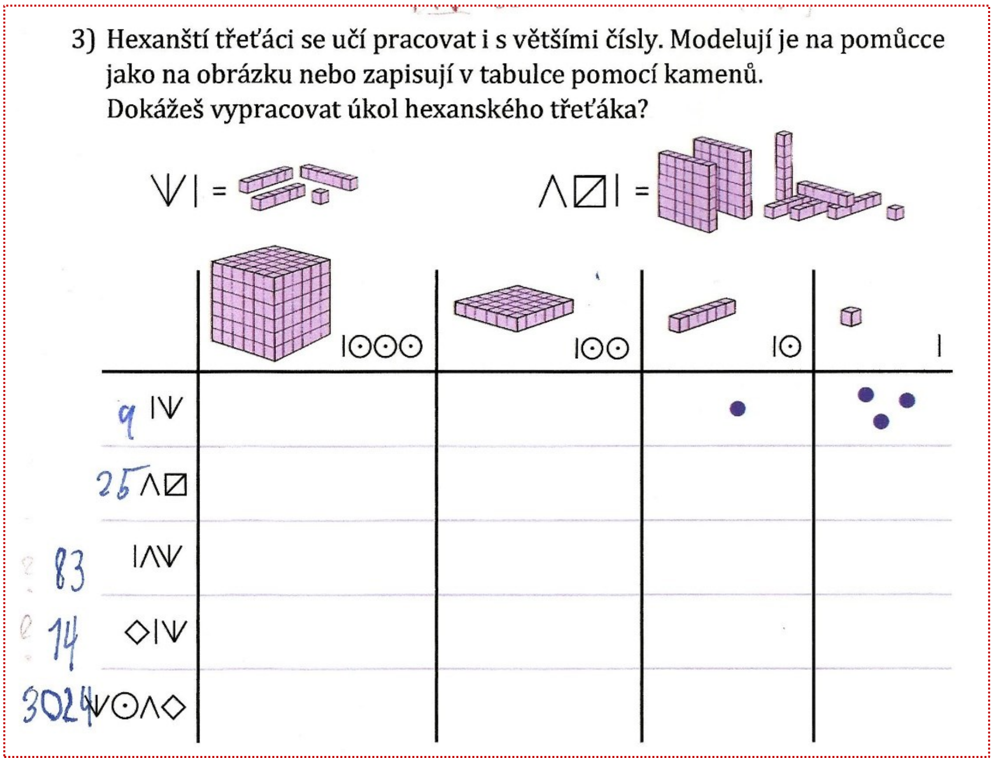
Zcela úspěšní byli Natka, Lara a Luděk. Lara si k hexanským číslům dopsala přepisy do arabských číslic. Domnívám se, že Luděk si tuto úlohu nepropojoval s ostatními úlohami a se svým porozuměním hexanské číselné soustavě, ale pouze odpozoroval vzorec, podle jakého jsou čísla modelována.

Joel se spletl pouze v jedné číslici, když namísto tří kamenů v poslední podúloze znázornil pět. Předpokládám, že si zde pouze spletl význam číslice. Rebi byla úspěšná v 1. a ve 4. podúloze. V 1. a 3. řádku je vidět, že si Rebi nakreslila modely příslušných čísel z hexanských Dienesových kostek – v 1. řádku 1 tyčinku a 3 krychličky, ve 3. řádku 1 placku, 2 tyčinky a 3 krychličky. Tento náčrtek mohl být jejím původním řešením, nebo si jej dokreslila jako nápomocnou ilustraci pro řešení. Rebi totiž ve 2. podúloze (3. řádek) doplnila 7 kamenů na pozici šestek a 3 kameny na pozici jednotek, což kvantitou odpovídá číslu $51_{(10)}$, tedy hexansky zapsanému čísli $123_{(6)}$. Rebi navíc původně kamínek na 3. pozici (placka) měla, ale posléze jej škrtla a pravděpodobně až poté doplnila dalších 6 kamínků na 2. pozici (tyčinky). Rebi tedy do jisté míre zjevně šestkové soustavě rozumí, ale jen na úrovni dvojciferných čísel. Podle škrtů usuzuji, že ve 3. podúloze měla Rebi také původně správné řešení. Svou odpověď však přehodnotila a příčina této změny mi není zjevná.



Obrázek 176: řešení Rebi, 3. úloha

Jirka v úloze nedoplňoval kameny, ale k hexanským číslům dopsal svůj způsob čtení těchto čísel. Číslo $13_{(6)}$ z 1. řádku si přeložil jako 9, neboť tuto formu devítky viděl na devátém domečku v 1. úloze a použil ji i ve 2. úloze. Číslo $25_{(6)}$ zapsal jako $25_{(10)}$ na základě přepisu číslic. Číslo $123_{(6)}$ přeložil jako $83_{(10)}$, zjevně kvůli jemu známé podobě číslice 8 jako hexanského dvojznaku 12. Ve 4. řádku mi není zjevná příčina jeho překladu na číslo $14_{(10)}$, ale domnívám se, že zde předpokládal dvojciferné číslo stejně jako v předchozím řádku. Poslední číslo přepsal opět na základě číslic.



Obrázek 177: řešení Jirky, 3. úloha

Martina úspěšně vyřešila pouze 1. podúlohu, dále nepokračovala. Teona v 1. řádku doplnila k hexanskému zápisu 13 číslo 9, které měla asociované z předchozích úloh. Do 1. a 2. sloupce v tomto řádku Teona doplnila 3 a 2 kameny. Domnívám se, že Teona neporozuměla zadání, ale chtěla něco vyplnit, po 1. řádku už ale úlohu opustila. Ota a Adri úlohu neřešili vůbec.

Je zajímavé, že v nejvyšším testovaném ročníku měla úloha takto nízkou úspěšnost. Domnívám se, že to může být paradoxně způsobeno vyšším porozuměním tématu. Řešitelé si zde mohli uvědomit, že se nejedná o desítkovou soustavu, a tudíž jim nepřišlo pravděpodobné, že by řešení v desítkové soustavě bylo správné. Předpokládám, že nižší úspěšnost v úloze souvisí i s konkrétním složením třídy a osobností jednotlivých řešitelů. Podle zkušeností s touto třídou mě nepřekvapuje, že právě tito žáci měli nižší vůli se pouštět do nestandardních úloh, kde nemají předem jistotu úspěchu, resp. není známý postup. Také mě nepřekvapuje, kteří žáci byli naopak v řešení nestandardních úloh v tomto testu velmi motivovaní.

Shrnutí

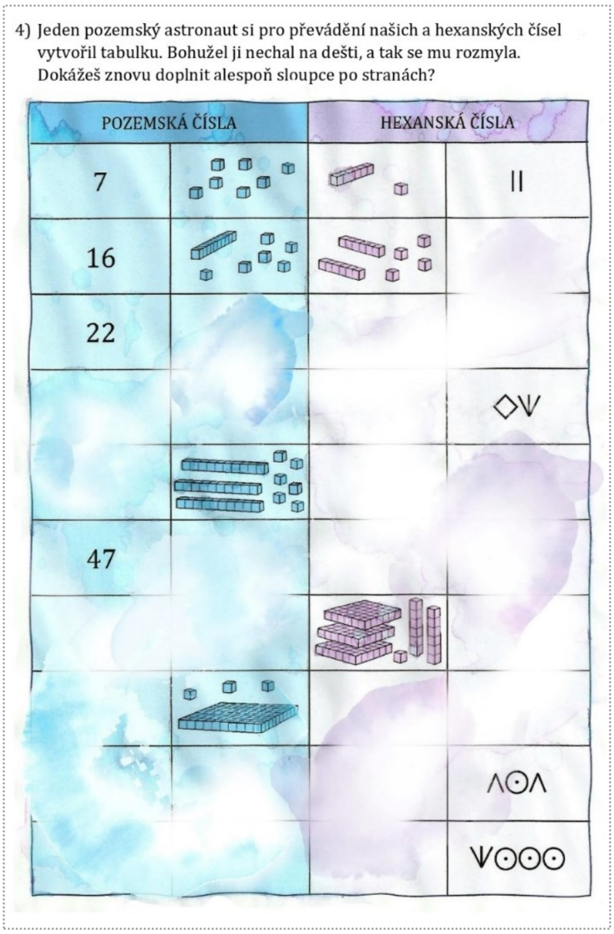
Tato úloha byla do testu zařazená jako podpůrná, aby na jejím základě mohli řešitelé odpozorovat podobnost šestkové a desítkové soustavy pro řešení úlohy navazující.

V této úloze byly úspěšnější zejména nižší ročníky. Je pravděpodobné, že úspěšnost v testu kromě jiných faktorů ovlivnila i zkušenost žáků s pomůckou Dienesovy kostky, která byla silná zejména ve 2. a 3. ročníku. Žáci ve 4. ročníku podle mě dostupných informací pomůcku nepoužívají, žáci 5. ročníku se s ní seznámili, ale nedostali prostor pro nabytí hlubších zkušenosti s ní.

Nejúspěšnější v této úloze byli žáci 3. ročníku. Úlohu bylo možné úspěšně řešit čistě na základě desítkové soustavy. Je možné, že úspěch řešitelů ze 3. ročníku tkví právě ve využití desítkové soustavy, zatímco vyšší ročníky mohlo zmást uvědomění, že se přeci o desítkovou soustavu nejedná a takovéto řešení považovali za nepravděpodobné. Tento předpoklad by se týkal i řešitelů z 2. ročníku, ti však dle mého předpokladu a pozorování zatím nemají takovou zkušenost s vyššími řády ani s prací s tabulkou.

Alternativní řešení této úlohy se objevovala zřídka. Nejčastěji se jednalo pouze o jinou volbu zápisu téhož, tedy kreslení Dienesových kostek. V jiných případech žáci doplňovali čísla nebo kameny na základě jiného porozumění zadání. Velmi okrajově se objevily i náznaky překladu čísla do šestkové soustavy.

5.4.2.4. Řešení 4. úlohy



Obrázek 178: úloha 4, ukázka

2. ročník

Dle očekávání, nikdo z 2. ročníku nebyl v úloze úspěšný. Přesto řešení skýtají mnoho zajímavých jevů.

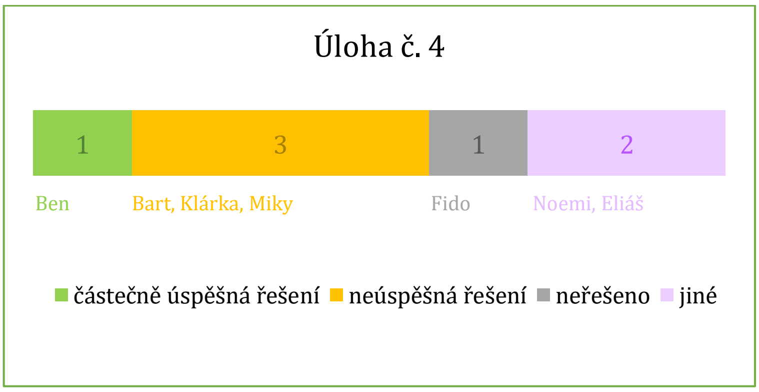
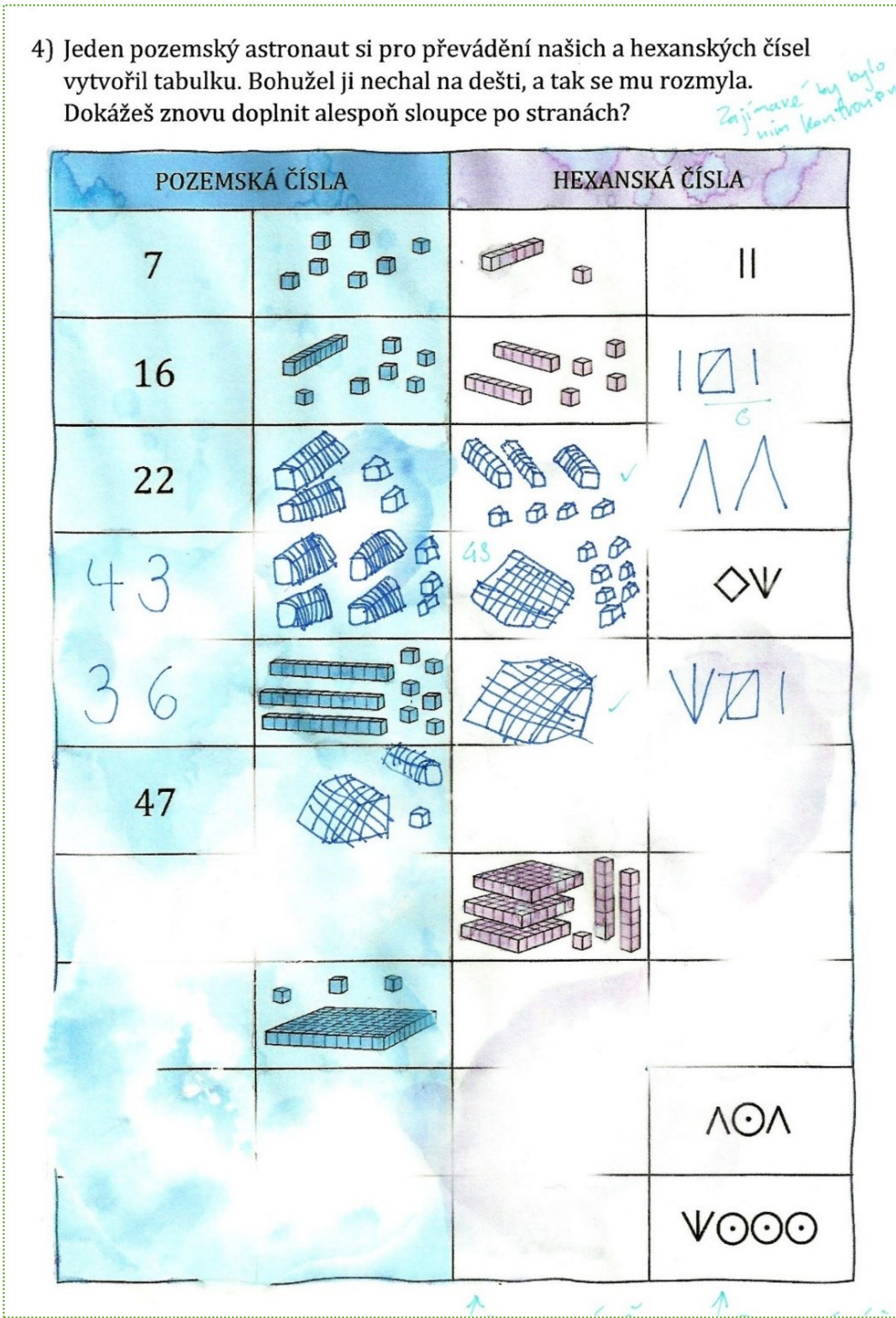


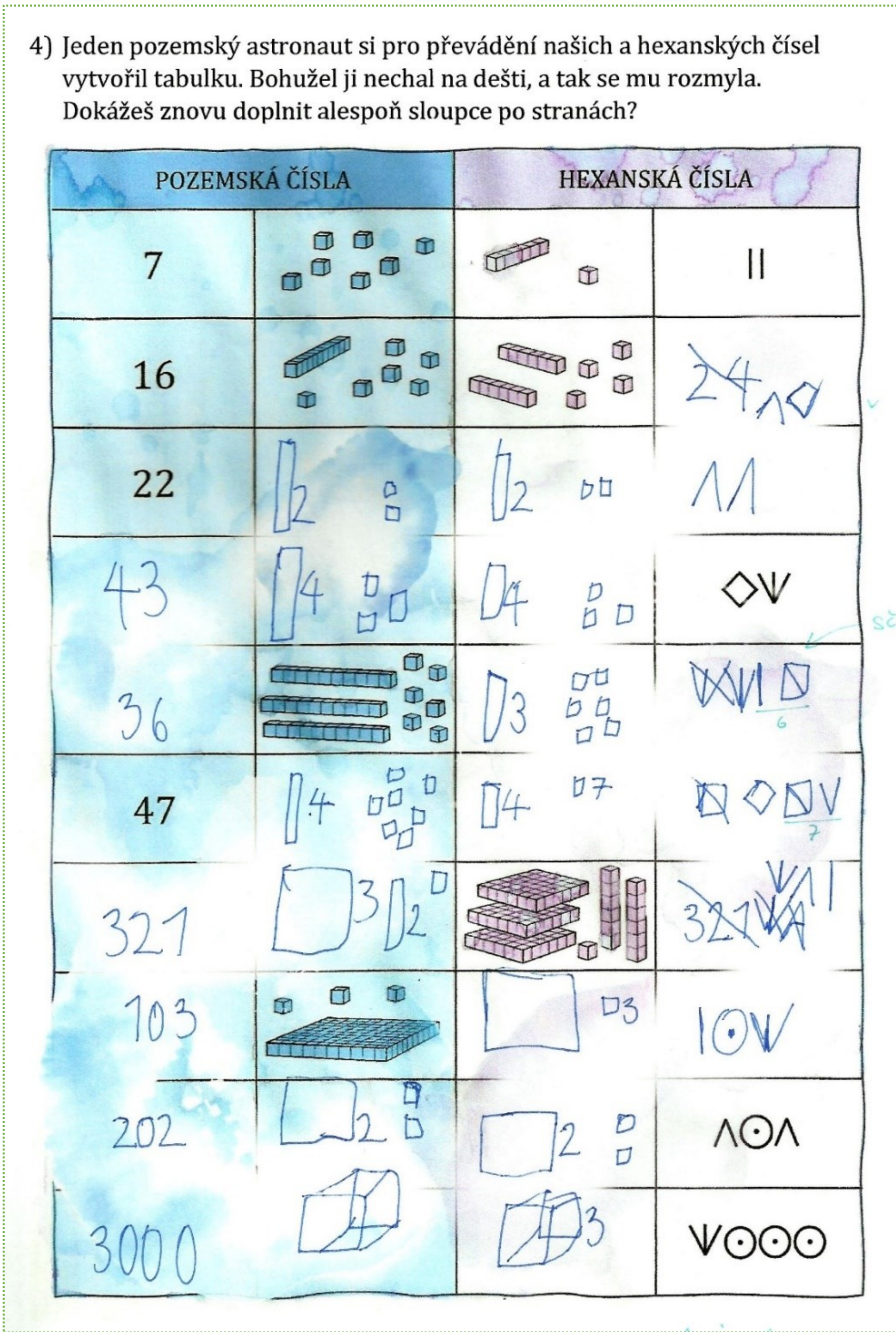
Diagram 66

Nejblíže objevu principu šestkové soustavy byl v této úloze Ben. Ben čte a píše hexanská čísla jako v desítkové soustavě. Když nemá vhodnou číslici, pomáhá si dvojznakem ze dvou číslic, jejichž hodnota odpovídá nahrazované číslici, jak je vidět v jeho řešení 2. a 5. řádku. Přestože Ben při zápisu číslicemi, ať už hexanskými nebo arabskými, používá výhradně desítkovou soustavu, při znázorňování kvantity čísla na hexanské pomůcce poměrně úspěšně rozděluje čísla do řádů šestkové soustavy. Ben navíc dbá na kvantitativní přesnost svých znázornění Dienesových kostek. Ve 3. řádku tak vidíme číslo $22_{(10)}$ rozdělené na 3 šestky a 4 jednotky, tedy totéž číslo v šestkové soustavě. Ve 4. řádku Ben přečetl číslo $43_{(6)}$ a porozuměl mu jako $43_{(10)}$, které správně znázornil Dienesovými kostkami v desítkové a téměř správně v šestkové soustavě. Ben správně zjistil, že zde už tyčinky nestačí a musí použít placku. Zbylých 7 jednotek znázornil jednotkovými *krychličkami*, namísto aby je rozdělil do 1 šestky a 1 jednotky. V 5. řádku Ben správně znázornil číslo $36_{(10)}$ jako placku. V 6. řádku už Benovi zřejmě došly síly. Znázorňuje zde číslo 43 tak, jak by mělo vypadat ve 4. řádku, zároveň jej ale umisťuje do sloupce pro pozemská čísla. Tyčinka a krychlička odpovídají počtu 7, který je uveden na místě jednotek v čísle $47_{(10)}$. Pravděpodobně už tady Ben smotal více myšlenek dohromady. Myslím, že je zde ještě vhodné pozastavit se nad tvarem Benovy placky. Ben nejdřív nakreslil mřížku 6 × 6 a poté přes ni dokreslil tvar připomínající spíše krychli než placku. Zdá se mi však pravděpodobnější, že pouze chtěl vystihnout i výšku a hloubku placky, než že by skutečně mínil dokreslit velkou krychli.



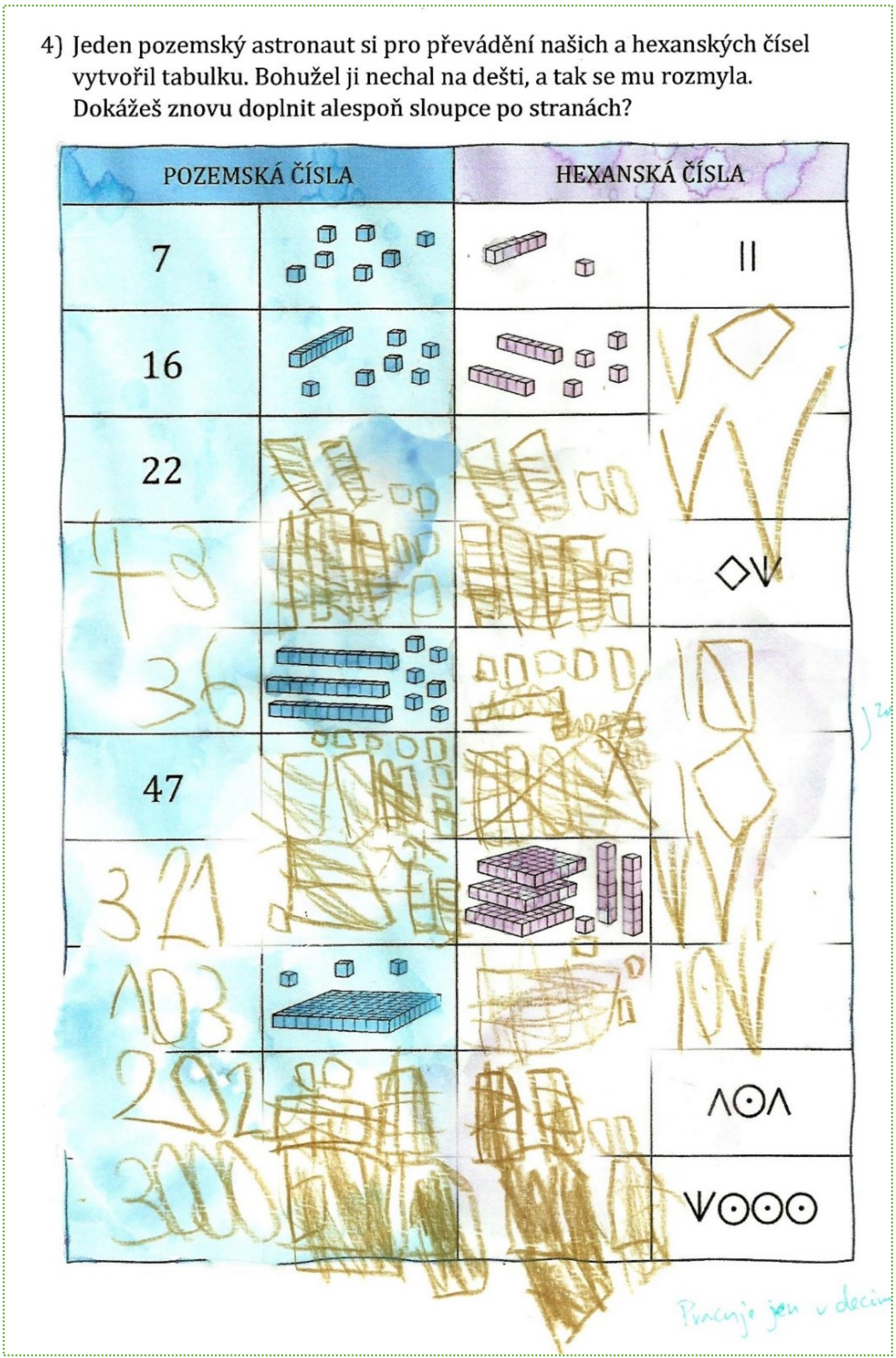
Obrázek 179: řešení Bena, 4. úloha

Miky, Bart a Klárka pracovali čistě v desítkové soustavě. Miky pro číslice, které nemají mezi hexanskými svůj ekvivalent, používal dvojznaky s odpovídajícím součtem hodnot. Na rozdíl od Bena Mikymu zřejmě nezáleželo na pořadí číslic v dvojznaku. Ve 2. řádku doplnil hexanské číslo podle hexanského modelu v Dienesových kostkách. Ve zbylých úlohách už pracoval pouze se soustavou desítkovou. Mikyho abstraktnější vnímání přibližného tvaru jako znaku pro řád zde mohlo způsobit, že si Miky ani nevšiml, že počty jednotek v hexanských tyčinkách neodpovídají desítkám.



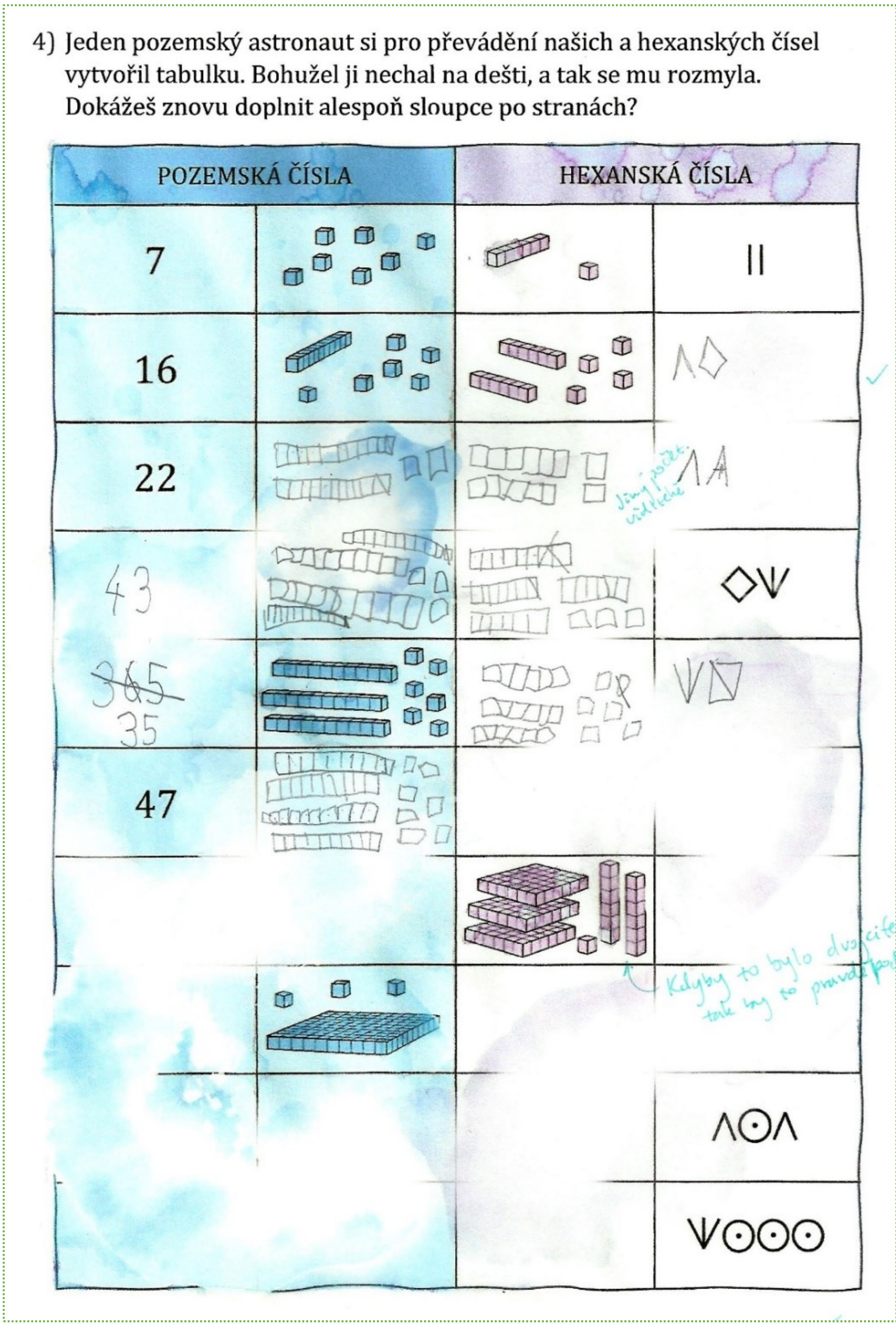
Obrázek 180: řešení Mikyho, 4. úloha

Bart čísla obsahující číslice vyšší než 5 do hexanských nepřepisoval. Namísto toho si v těchto případech do 3. a 4. sloupce dopsal jiné své číslo. Jeho modely v Dienesových kostkách odpovídají číslům ve sloupcích po stranách. Bart na přesné kvantitativní znázornění příliš nedbá, ale často lze spočítat, že jeho tyčinky jsou rozděleny na 10 jednotek, a to i ve sloupci s hexanskými čísly.



Obrázek 181: řešení Barta, 4. úloha

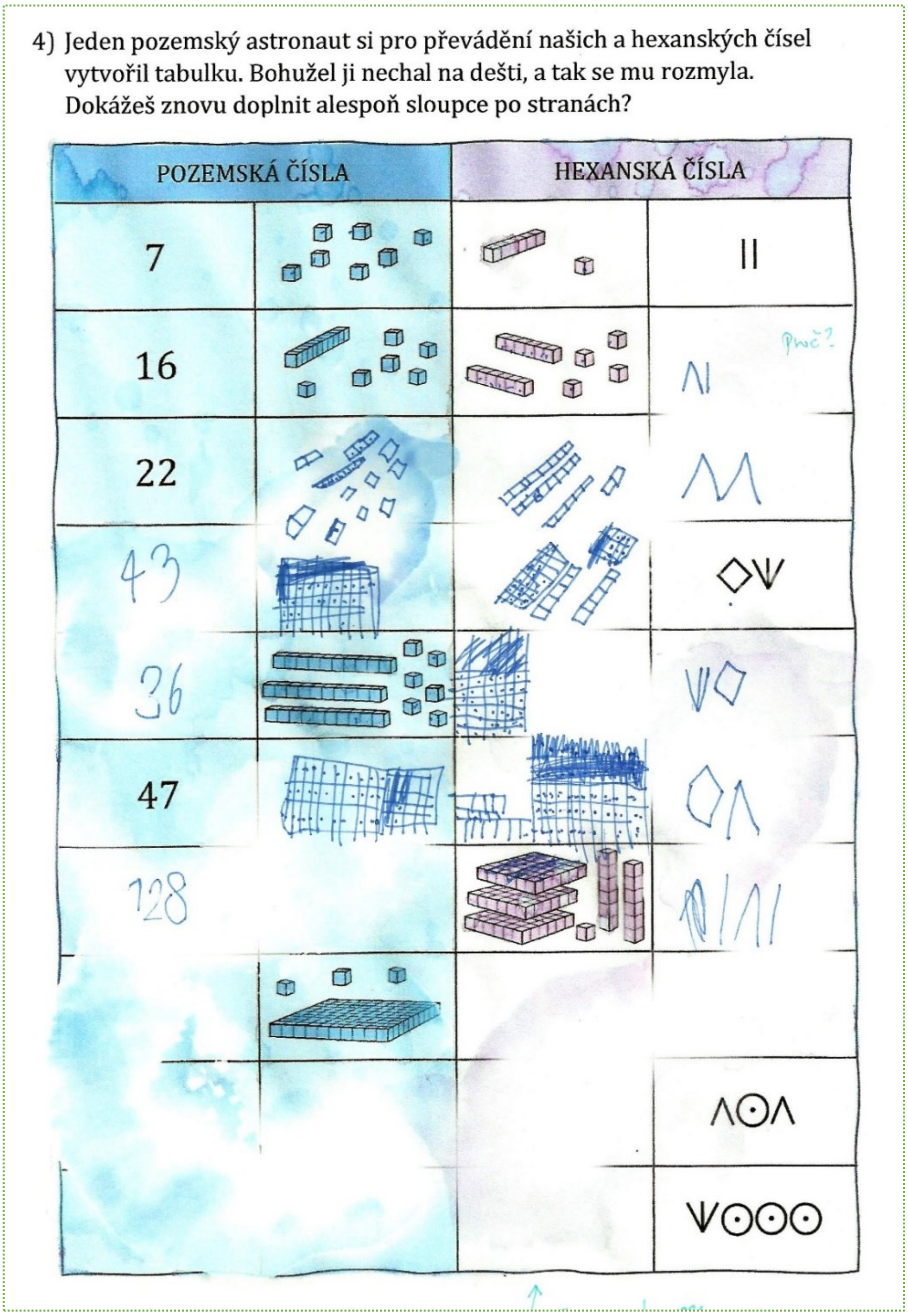
Klárčino řešení je ze začátku podobné řešení Mikyho nebo Barta, jen s tím rozdílem, že ve sloupci z hexanskými Dienesovými kostkami kreslí kratší hranoly, tedy znázorňující šestky. I přesto je Klárka v hodnotách na jednotlivých pozicích v desítkové i šestkové soustavě konsistentní, tedy např. v čísle 22 dokreslila ve 2. sloupci 2 desítky a 2 jednotky a ve 3. sloupci 2 šestky a 2 jednotky. V 5. řádku narazila Klárka na problém, když nedokázala hexansky zapsat šestku. Svoji původní odpověď v prvním sloupci škrtla a dopsala 35, což je počet, který už uměla zapsat. Klárka buď předpokládala, že se přepočítala, protože v úloze nemůže být číslo, které nelze zapsat, nebo si byla vědoma toho, že její řešení neodpovídá, ale spokojila se s tím nejbližším řešením, které dokázala nabídnout. Do 4. sloupce v 5. řádku tak doplnila hexanskými číslicemi 35 a ve vedlejším sloupci škrtla jednu jednotku, aby počet jednotek také odpovídal číslu $35_{(10)}$. V 7. řádku narazila opět na podobný problém. Zde už číslo neupravila, jelikož bylo předtištěné, stejně jako neupravila předtištěný model v řádku výše. Klárka znázornila číslo $47_{(10)}$ na pozemských Dienesových kostkách, ale v řešení téhož čísla v hexanském zápise ani v řešení ostatních řádků již nepokračovala. Je možné, že by se úlohou zabývala i dále, kdyby na sobě nepociťovala tlak z toho, že je poslední, kdo test odevzdává.



Obrázek 182: řešení Klárky, 4. úloha

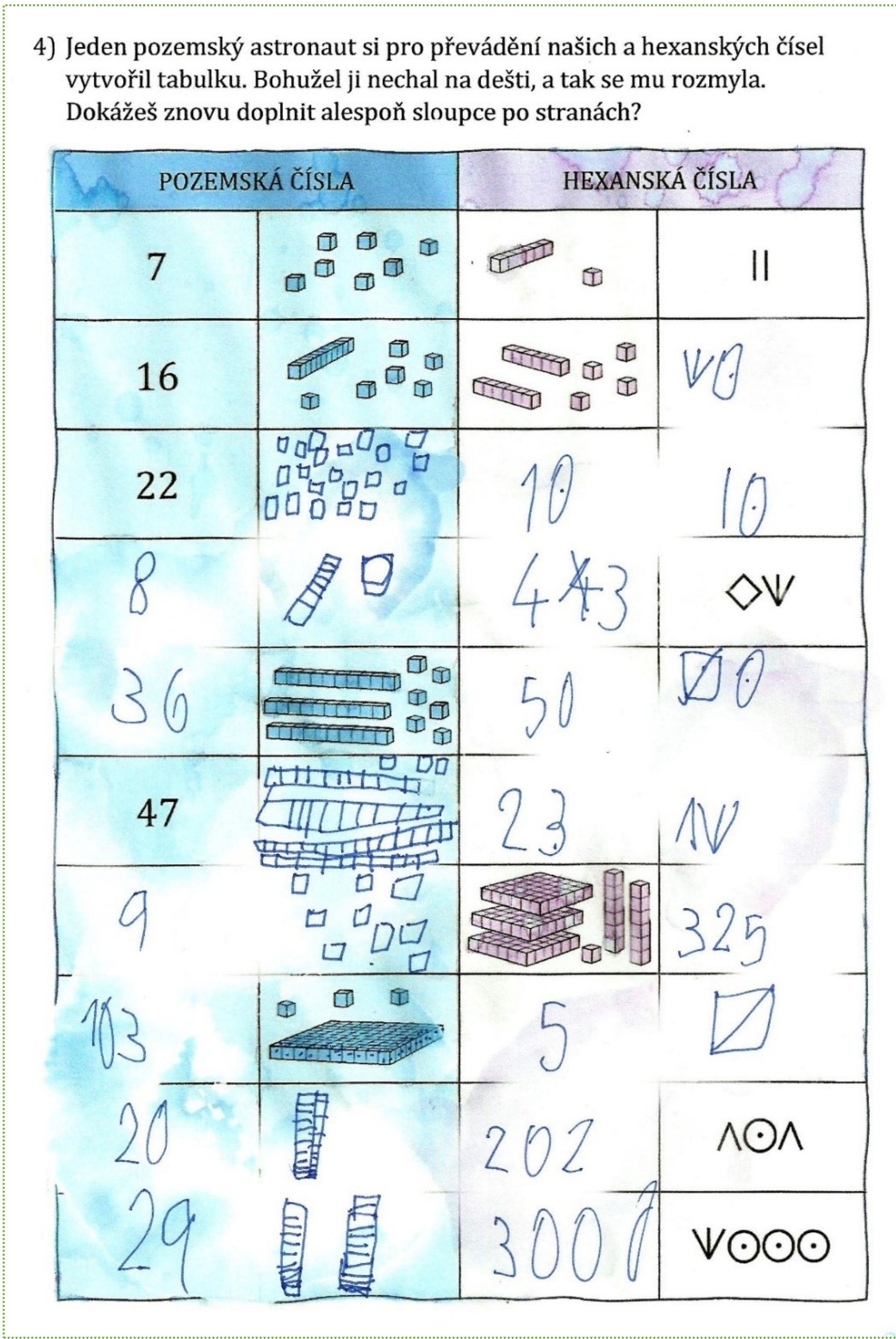
Řešení Noemi zřejmě také vychází z desítkové soustavy. Ve 2. a 3. sloupci doplňovala příslušné počty jednotek, zjevně pečlivě ověřované opakovaným počítáním, což je vidět podle teček. Jednotky však neorganizovala do žádných řádů – tyčinek ani placek. Arabské číslice bez hexanského ekvivalentu zřejmě nahrazovala náhodnou jinou číslicí. Ve 2. řádku doplnila hexansky 21, pro její řešení nenalézám vysvětlení. Obzvláště pozoruhodné je její řešení v 7. řádku, kde hexanskými číslicemi doplněné číslo 121 odpovídá počtu $121_{(10)}$

vymodelovaném z hexanských kostek jako číslo 321(6). Pravděpodobně však toto Noemi neodhalila a tato shodnost je náhodná, nejspíše způsobená i náhodně stejným posledním dvojčíslím čísel v šestkové i v desítkové soustavě. V tom případě by Noemi pouze zaměnila první číslici 3 na 1. Její číslo 128 dopsané v 1. sloupci téhož řádku si taktéž neumím vysvětlit.



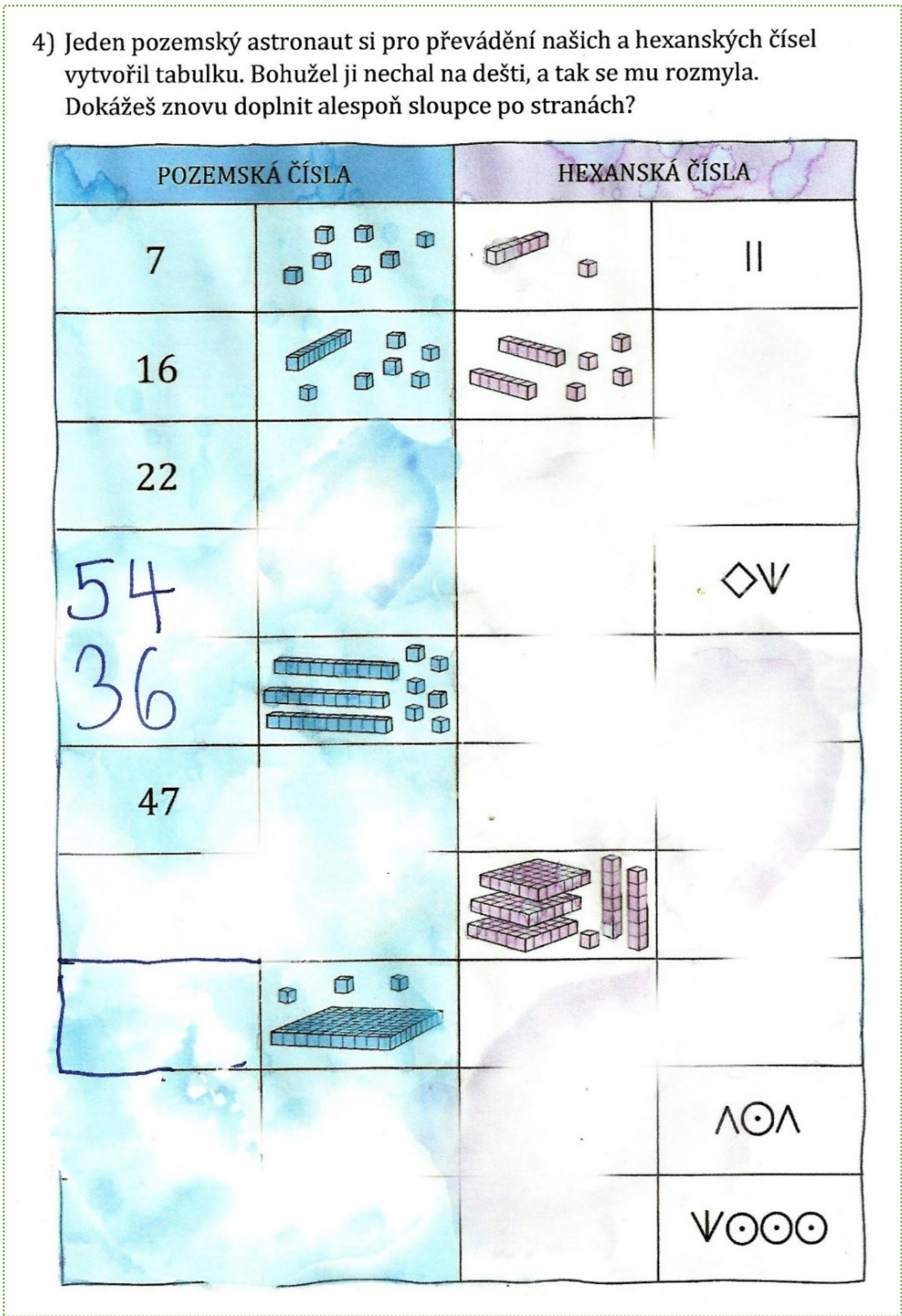
Obrázek 183: řešení Noemi, 4. úloha

Eliáš ve svém řešení zcela oddělil čísla v pozemských a hexanských sloupcích. Do prázdných políček pak doplňoval vlastní čísla. Dienesovy kostky znázorňoval pouze ve 2. sloupci, jejich počet však ne vždy odpovídá. Ve 3. sloupci místo toho doplňoval přepis hexanských čísel ze 4. sloupce arabskými číslicemi. Řešení Eliáše i Noemi považuji spíše za neúspěšná. Jelikož však nemohu s dostatečnou jistotou říct, že jsem jejich řešitelskému záměru porozuměla, řadím je do kategorie *jiné*.



Obrázek 184: řešení Eliáše, 4. úloha

Fido úlohu téměř neřešil. Pouze v 1. sloupci v 5. řádku správně doplnil číslo 36 a v témže sloupci o řádek výše číslo 54, čehož příčinu si neumím vysvětlit.



Obrázek 185: řešení Fida, 4. úloha

Celkově bylo vidět, že jsou řešitelé velmi pevně zakořenění v desítkové soustavě, což je pochopitelné. V jejich řešeních se tudíž projevily různé tvořivé přístupy, jak si s nevyhovující nabídkou číslic poradit. Ben ukázal, že dokáže přemýšlet i v jiné než desítkové soustavě, co se kvantitativního modelu týče. Jinými slovy přeskupit krychličky pro něj bylo přípustné, ale opustit způsob, jakým v jeho zkušenostech fungují čísla (tedy poziční desítková soustava) už ne. Domnívám se, že Ben zde správně vnímá že uskupení krychliček do tyčinek, placek a krychlí je arbitrární, netuší však, a vzhledem k běžným zkušenostem žáka 2. ročníku ani tušit nemůže, že arbitrární je i celosvětová usance používání desítkové soustavy.

3. ročník

V této úloze byla dle očekávání nízká úspěšnost, ale také poměrně nízká řešenost úlohy. I tak ale některá řešení konkrétních jednotlivců napovídají o částečném odhalení principu šestkové soustavy.

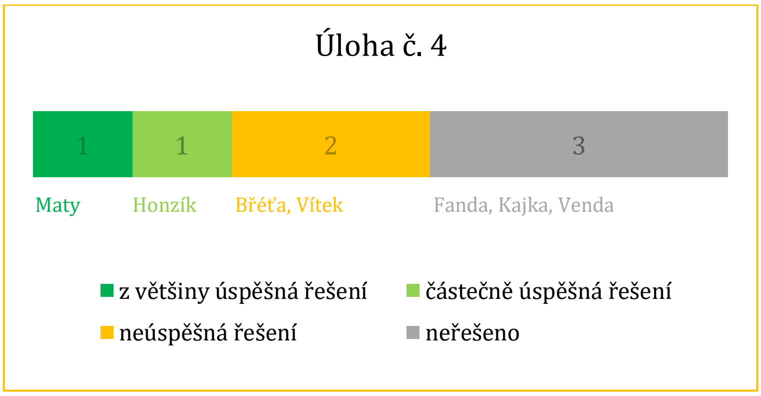
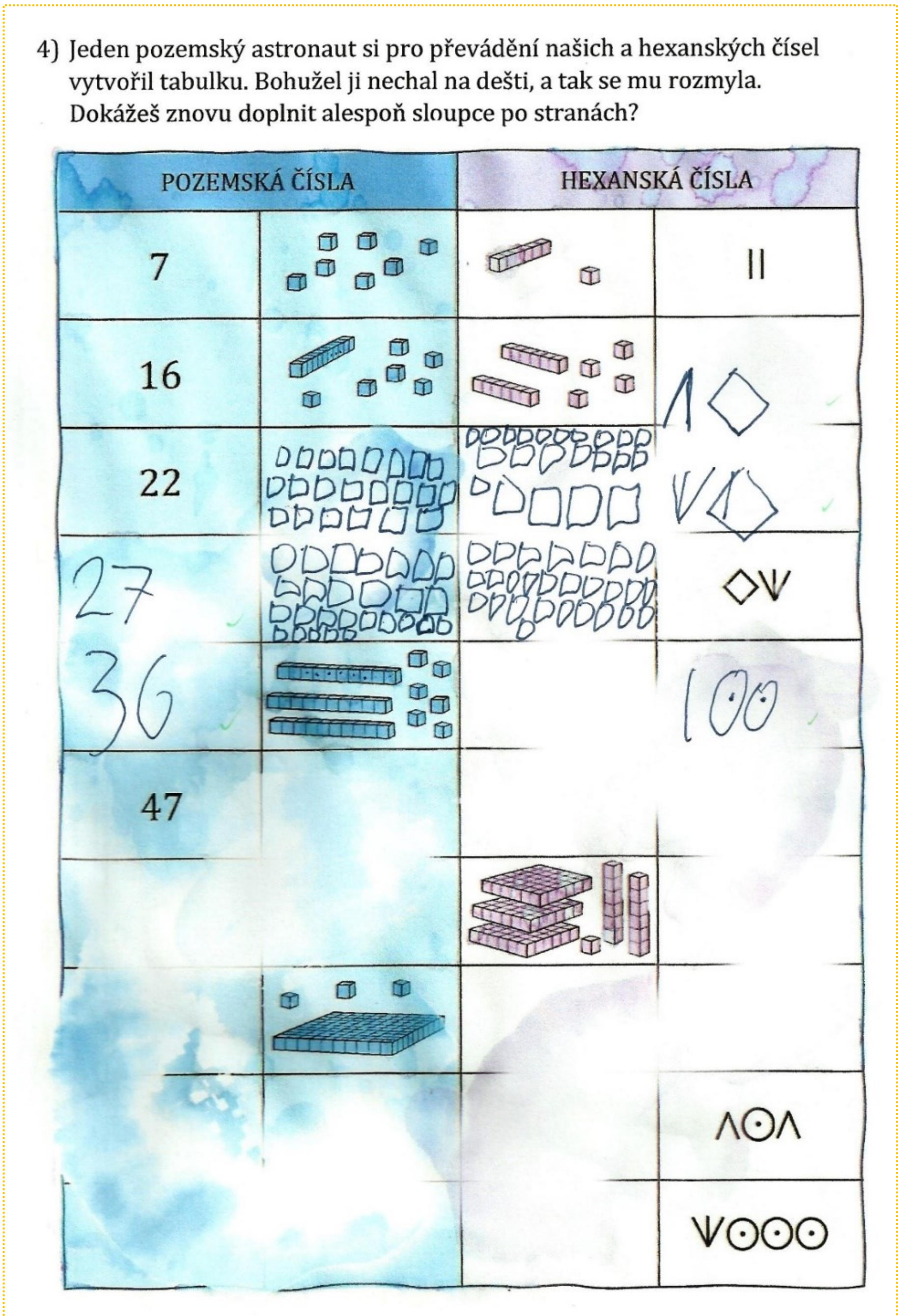


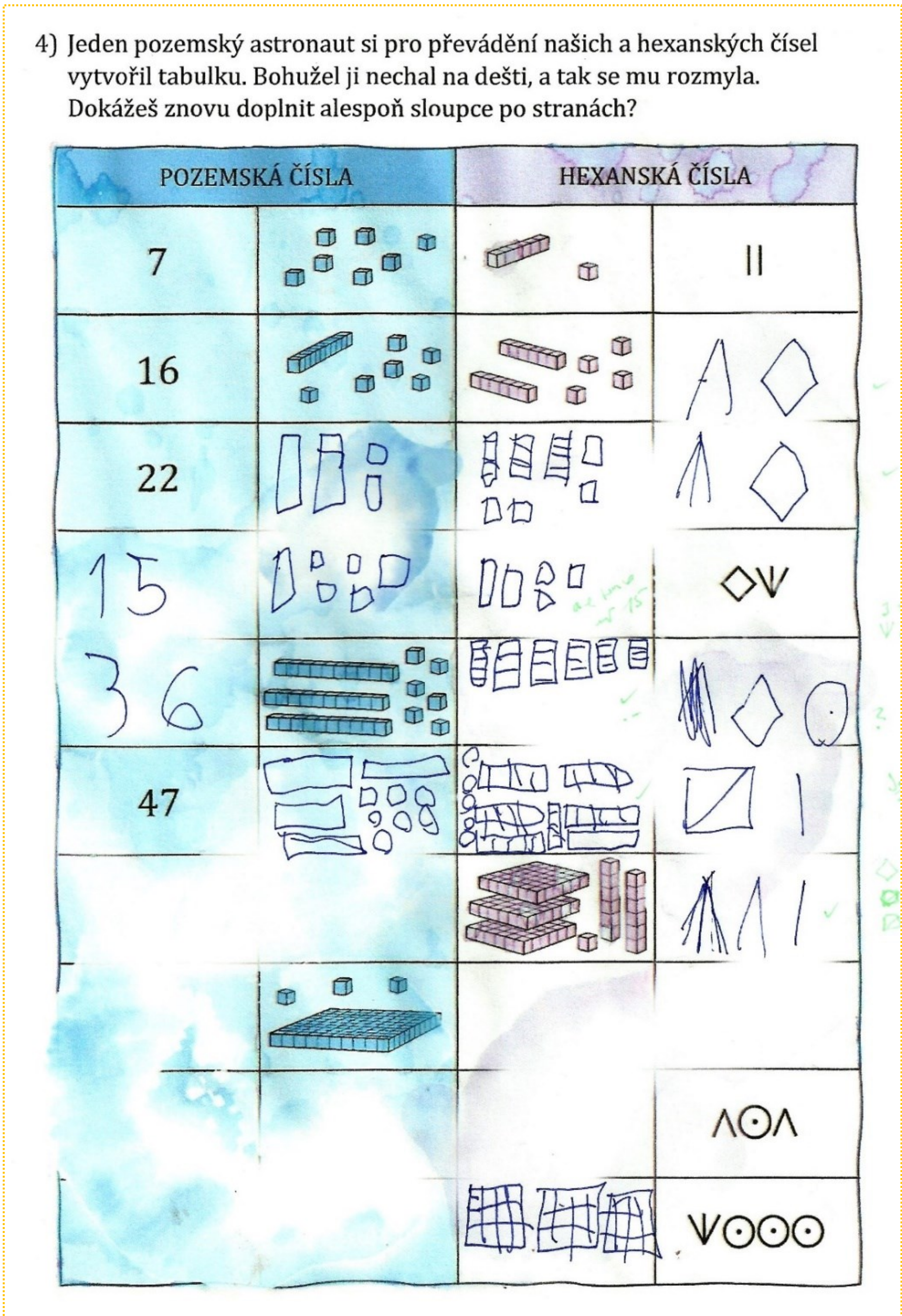
Diagram 67

Nejblíže úspěšnému řešení byl v rámci 3. ročníku Maty. Maty zcela správně vyřešil první čtyři podúlohy (2. – 5. řádek). Nepředpokládala jsem, že by někdo z žáků 1. stupně vyřešil (a stihl vyřešit) celou 4. úlohu, proto jeho řešení považuji za velký úspěch. Do prostředních sloupců Maty kreslil příslušný počet jednotek nikterak nepropojených do tyčinek. V 5. řádku už jednotky nekreslil, ale správně dopsal $100_{(6)}$. V celém jeho testu není žádná evidence průběžného přemýšlení, žádné škrty ani poznámky. Všechny úlohy až po tento 5. řádek poslední úlohy má zcela správně. Maty odevzdal přesně s koncem hodiny a šel si hrát. Zdá se mi pravděpodobné, že kdyby to byl stíhal, zvládl by pokračovat i s dalšími řádky 4. úlohy.



Obrázek 186: řešení Matyho, 4. úloha

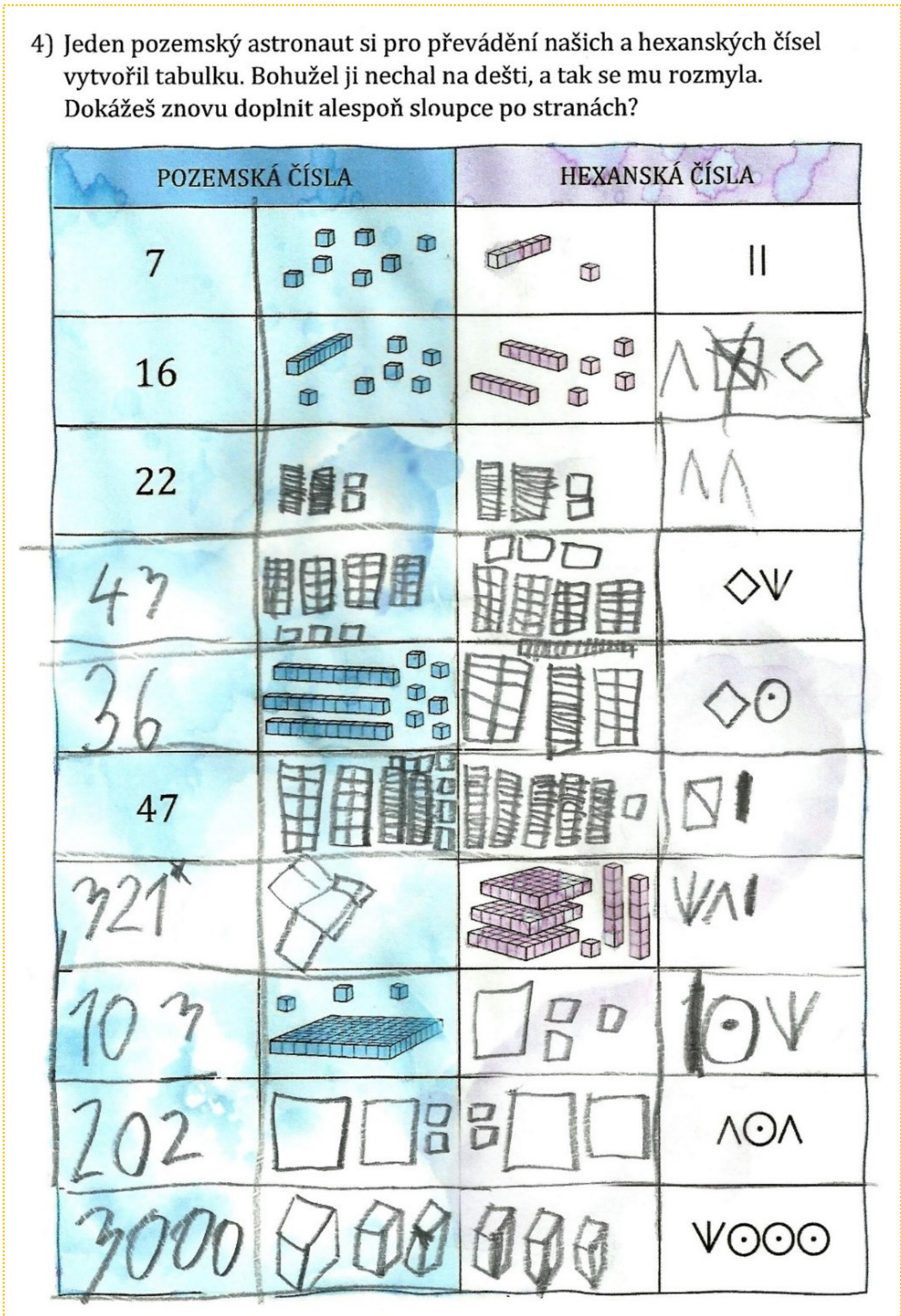
Honzík v poslední úloze úspěšně vyřešil 2. a 3. řádek, 4. ve své podstatě taky, jen si pravděpodobně spletl hexanskou čtyřku s dvojkou, čemuž odpovídá jeho znázornění hexansky 2 tyčinkami a 3 krychličkami, pozemsky 1 tyčinkou a 5 krychličkami. Honzík nebyl úspěšný v přechodu do dalšího řádu. U čísla 36 znázornil 6 tyčinek namísto 1 placky. Jeho hexanský zápis zde pravděpodobně vychází ze čtení hexanských čísel v desítkové soustavě. V tomto místě už je pravděpodobně kognitivně natolik zahlcen, že přestává vnímat 2. pozici jako šestky a vrací se k zakořeněné desítkové soustavě. Honzík ve 4. sloupci v 5. řádku dopsal hexansky 40 – zřejmě proto, že číslo $40_{(6)}$ následuje hned po $35_{(6)}$ stejně jako $36_{(10)}$ následuje hned po $35_{(10)}$. V 6. řádku Honzík správně znázorňuje počet pomocí tyčinek a krychliček v obou soustavách, jen stejně jako v řádku předchozím nepoužívá placku. Zde doplnil hexansky 51. Předpokládám, že si stejně jako v předchozím řádku pomohl nejbližším číslem, které je možné hexanskými číslicemi zapsat, tedy 45. Po čísle $45_{(10)}$ následuje číslo $46_{(10)}$ a pak hledané číslo $47_{(10)}$, analogicky v šestkové soustavě po čísle $45_{(6)}$ následuje číslo $50_{(6)}$ a pak hledané číslo $51_{(6)}$. V následujícím řádku už jen doplnil okénko ve 4. sloupci, přičemž ale správně rozpoznal 3. pozici znázorněnou Dienesovými kostkami jako placka. Nelze s jistotou říct, zda si zde uvědomil kvantitu hexanské placky, nebo si jen spojil tvar s jeho analogem v desítkové soustavě, avšak domnívám se, že kdyby využil podobnosti hexanské placky a placky jako stovky v desítkové soustavě, doplnil by i číslo v 1. sloupci 8. řádku. V poslední podúloze doplnil 3 Dienesovy kostky, které mohou znázorňovat placky nebo krychle, což nelze s jistotou určit. Domnívám se, že se má jednat spíše o krychle, neboť v předposlední podúloze číslo kostkami neznázornil a je možné, že měl jen obtíže s tím, jak má placku nakreslit.



Obrázek 187: řešení Honzíka, 4. úloha

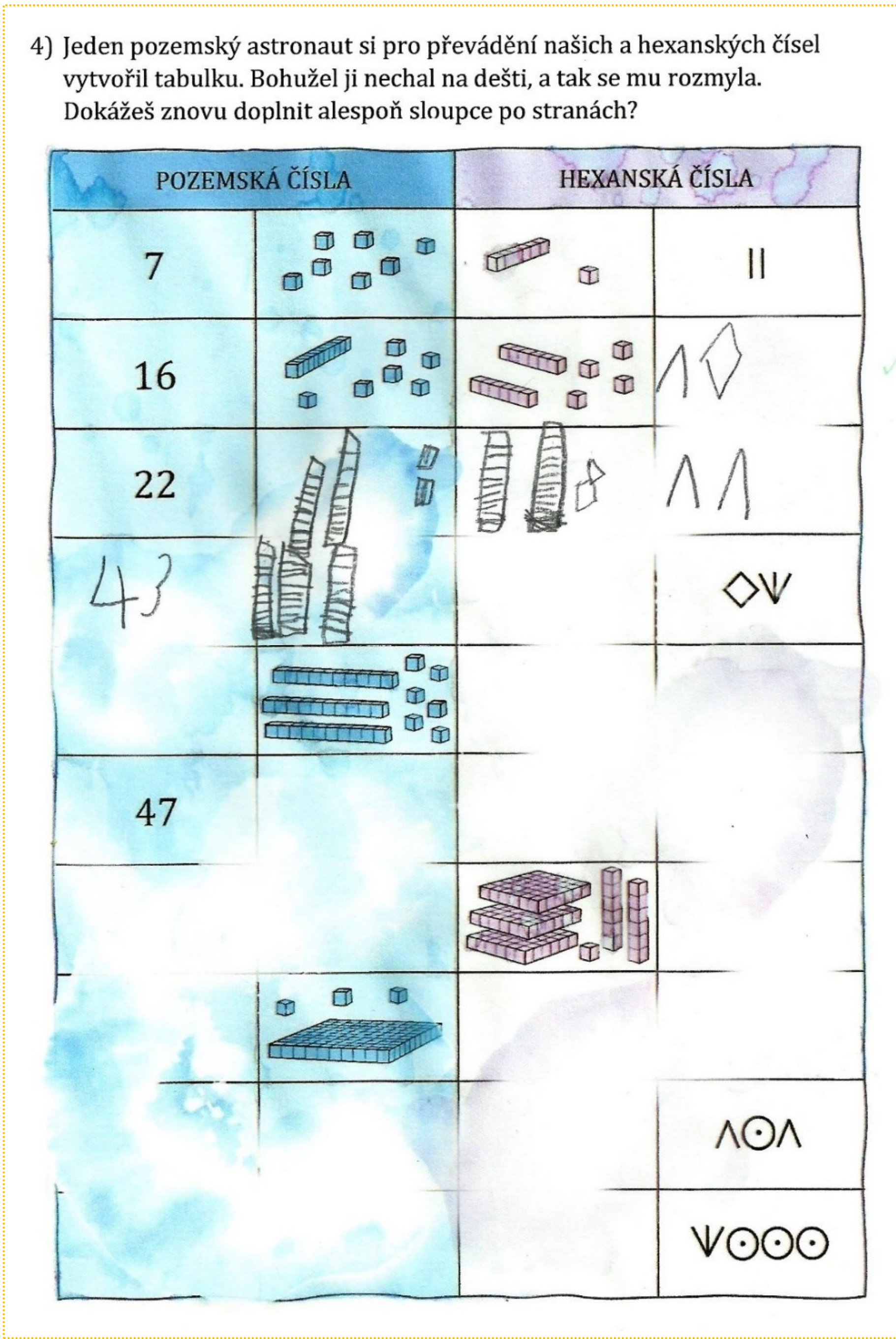
Břéťa pracoval jen v desítkové soustavě. Pouze v 1. podúloze správně zapsal hexanské číslo podle modelu v předchozím sloupci. U čísel, které v desítkové soustavě obsahují číslici, kterou Hexané neznají, použil totožnou strategii jako Honzík, tedy jako $36_{(10)}$ doplnil hexansky 40 a jako $47_{(10)}$ hexansky 51. Břéťa stejně jako v předchozí úloze dbal na kvantitu jednotek v tyčinkách, nikoliv však v plackách a krychlích, které už pojal symbolicky. Břéťa má v každé tyčince 10 jednotek, a to i ve sloupci s hexanskými čísly.

Některé jeho desítky jsou na místo klasických tyčinek ve formátu 2 × 5, zásadně však dodržuje vázanou kvantitu a jednotlivé desítky odděluje.



Obrázek 188: řešení Břéti, 4. úloha

Vítek, jako i všichni jeho spolužáci, kteří úlohu řešili, správně doplnil hexanské číslo ve 2. řádku. Dále používal jen desítkovou soustavu, se kterou doplnil 2. řádek a začal řešit i 4. řádek, který už nedořešil. Vítek odevzdal minutu po konci hodiny, je tedy možné, že maje více času, byl by řešil i další řádky.



Obrázek 189: řešení Vítka, 4. úloha

Fanda, Kajka a Venda 4. úlohu neřešili vůbec.

Oproti předchozímu ročníku jsem zde pozorovala, že zapsat číslo v šestkové soustavě už pro řešitele z 3. ročníku nebylo tak problematické. Řešitelů, kteří ve 3. ročníku pracovali ve 4. úloze pouze nebo převážně s desítkovou soustavou bylo oproti řešitelům z 2. ročníku výrazně méně ve prospěch těch, kteří princip šestkové soustavy alespoň částečně odhalili, nebo těch, kteří se do 4. úlohy nepustili vůbec (ať už z důvodů časových nebo odhadu svých možností). Řešení z 3. ročníku poskytlo zajímavé ukázky žákovského uvažování o tématu.

4. ročník

Úloha měla ve 4. ročníku, jako i v jiných ročnících, nízkou úspěšnost. Jako i v jiných případech, i zde se jednalo spíše o jedince, kteří principu šestkové soustavě alespoň částečně porozuměli.

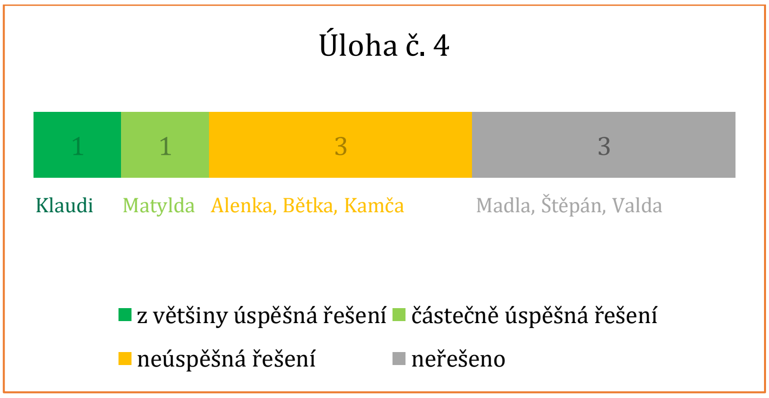
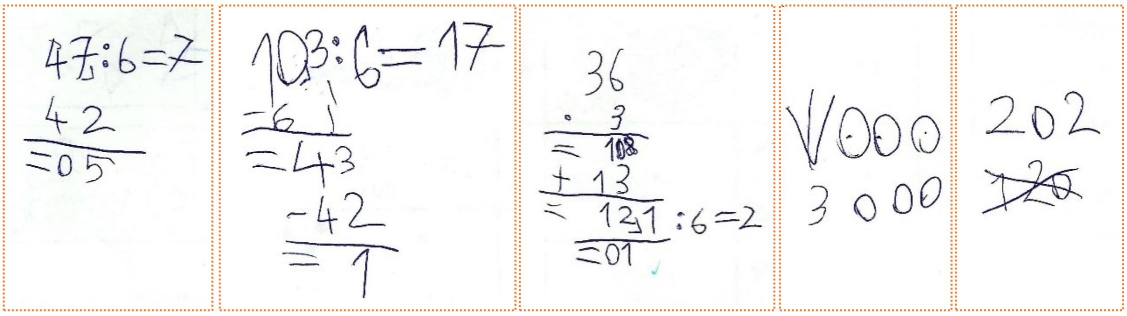
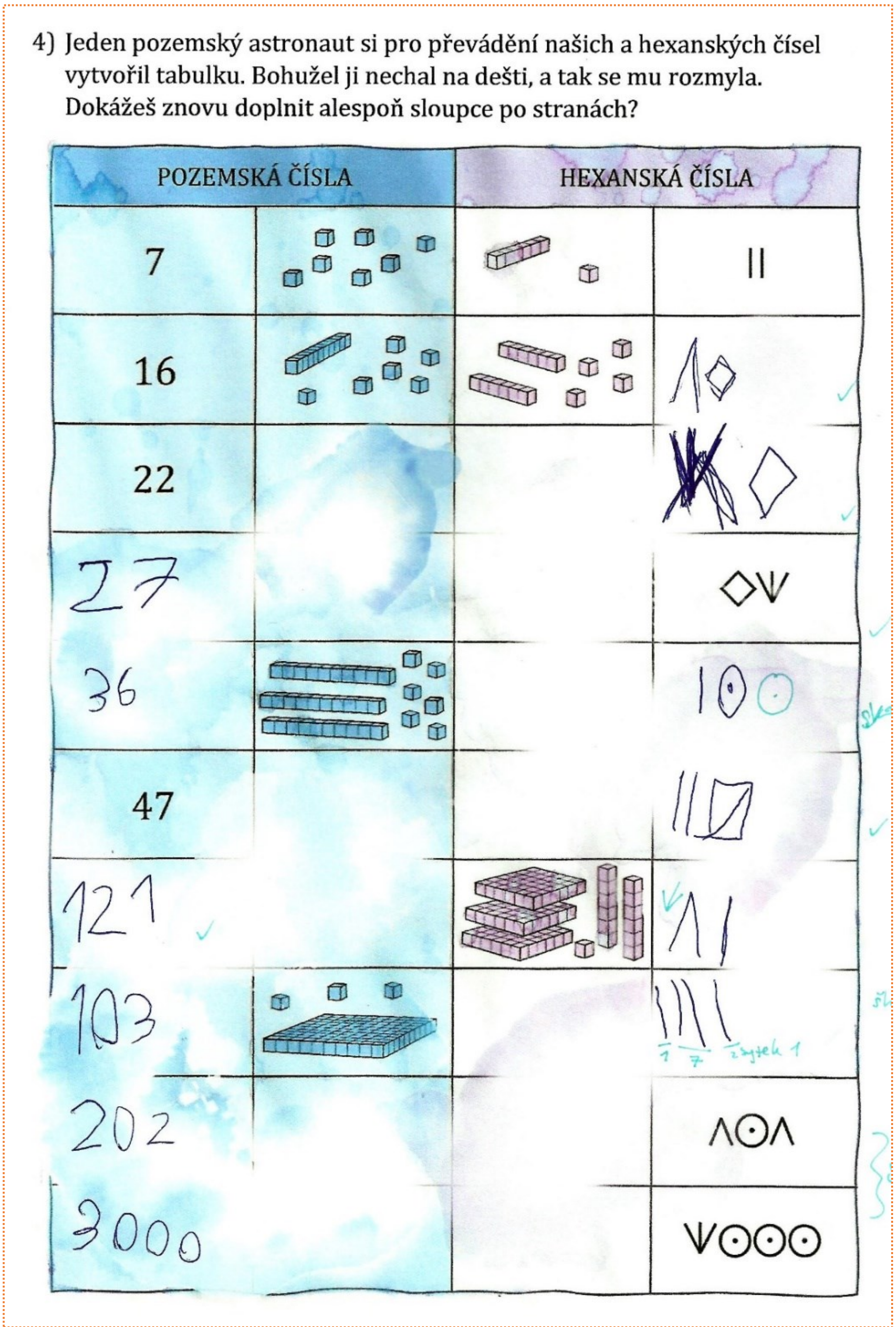


Diagram 68

Vysokou míru porozumění projevila Klaudi. Klaudi také psala nejdéle, neboť měla ze svého objevu radost a chtěla práci dokončit. Klaudi pro převod mezi soustavami nepoužívala nákresy Dienesových kostek, ale pojala to rovnou aritmeticky, což podle mě svědčí o značné míře abstrakce v jejím porozumění. Mezivýpočty si Klaudi psala na druhé straně testu a přikládám je zde také k nahlédnutí. Klaudi se svým postupem dělení se zbytkem byla úspěšná ve všech dvojciferných hexanských číslech. V 5. řádku správně vypočítala, že $36_{(10)}$: 6 je $6_{(10)}$. Výsledek, tedy $10_{(6)}$ dopsala do políčka, ale opomněla dopsat zbytek 0 na 1. pozici čísla. Z celkového jejího řešení se také domnívám, že počítala pouze s řádem šestek, ale nenapadlo jí, že by měla větší čísla nejdříve vydělit číslem $36_{(10)}$, tedy 3. řádem šestkové soustavy. V 6. řádku se stejným postupem dostala ke správnému výsledku, neboť při operaci $47_{(10)}$: 6 získala výsledek $7_{(10)}$ zbytek $5_{(10)}$, z čehož sedmičku v hexanských číslicích zapsala jako dvojznak 11 a na místo jednotek doplnila zbytek 5. Její zápisu tedy odpovídá čísli $115_{(6)}$. V 7. řádku správně určila znázorňovanou kvantitu (obr. 190, druhý výpočet), ve 4. sloupci však v čísle 3. pozici ponechala prázdnou, z čehož se domnívám, že placky šestkové soustavy Klaudi nevnímala jako další řád. V 8. řádku Klaudi opět vydělila číslo $103_{(6)}$ rovnou dělitelem 6, namísto aby začala vyššími řády. Výsledek (obr. 190, třetí výpočet) pak zapsala jako 171, tedy 17 a na 1. pozici zbytek 1, přičemž číslici 7 zapsala jako dvojznak 11. Poslední dva řádky už doplnila pouze v desítkové soustavě, což odpovídá mému předpokladu, že vyšší řády než řád šestek nebrala Klaudi v potaz. U čísla $202_{(6)}$ ještě zvažovala variantu $120_{(10)}$, případně $122_{(10)}$, přičemž pravděpodobně vycházela z předpokladu, že vyšší řád bude desetkrát větší, tedy $60_{(10)}$, čímž spojila šestkovou a desítkovou soustavu. Toto řešení však do úlohy nezapsala.

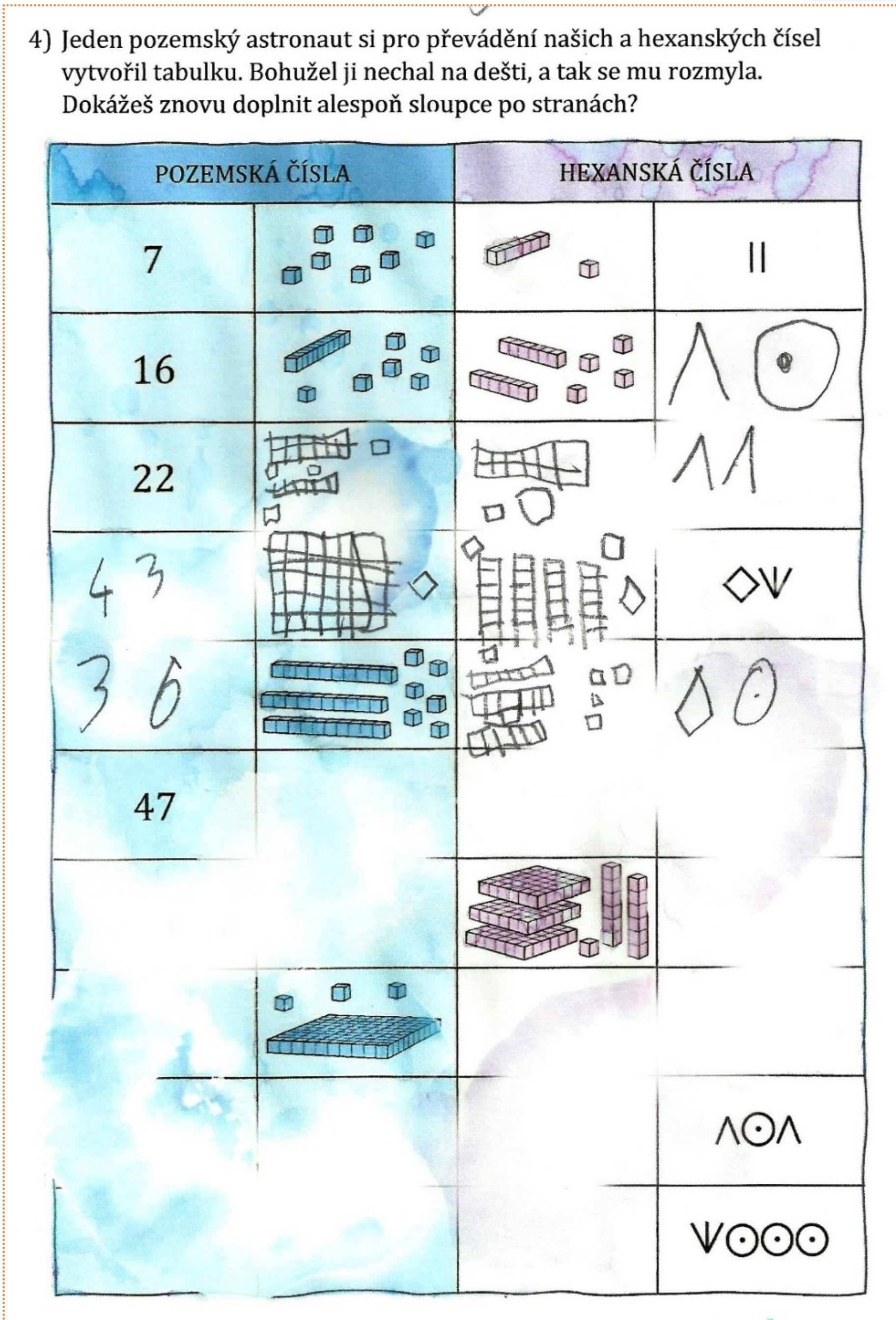


Obrázek 190: výpočty Klaudi



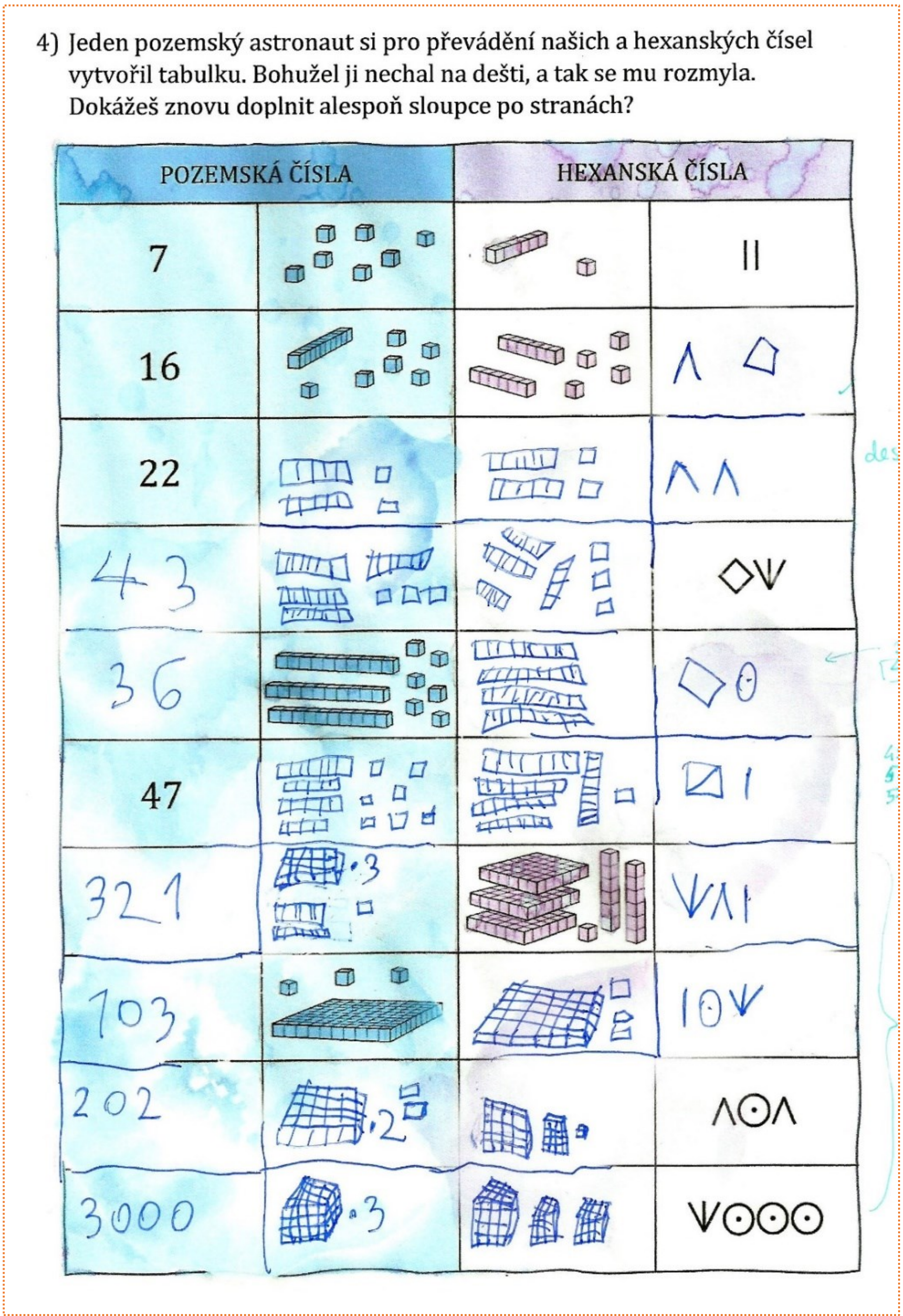
Obrázek 191: řešení Klaudi, 4. úloha

Matylda přepisovala čísla tak, aby měla v desítkové i šestkové soustavě stejnou podobu, tedy skládaly se ze stejných číslic na stejných pozicích. Přesto si však zřejmě uvědomovala, že takto zapsaná čísla neznázorňují stejný počet. Pozemská i mimozemská čísla Matylda znázorňovala pouze hexanskými Dienesovými kostkami. Číslo $22_{(10)}$ tedy správně rozdělila do 3 šestek a 4 jednotek. Ve sloupci určeném pro mimozemská čísla pak znázornila číslo $22_{(6)}$ jako 2 šestky a 2 jednotky. Ve 4. řádku číslo $43_{(10)}$ znázornila jako 7 šestek a 1 jednotku, neuvědomila si tedy další řád šestkové soustavy. Ve stejném řádku číslo $43_{(6)}$ znázornila jako 4 šestky a 3 jednotky. Následující řádek Matyldu pravděpodobně zmátl, neboť je zde číslo vymodelováno z tyčinek a krychliček desítkové soustavy. Vedle něj znázornila číslo $36_{(10)}$ podle svého způsobu, tedy s významem $24_{(10)}$. Jelikož číslo 36 nemohla zapsat hexanskými číslicemi, použila číslo v šestkové soustavě následující hned po 35. Další řádky už Matylda ponechala neřešené. Žačka odevzdala test 6 minut před koncem hodiny, předpokládám tedy, že jí od řešení dalších řádků 4. úlohy odradilo selhání jejího postupu ve 5. řádku.



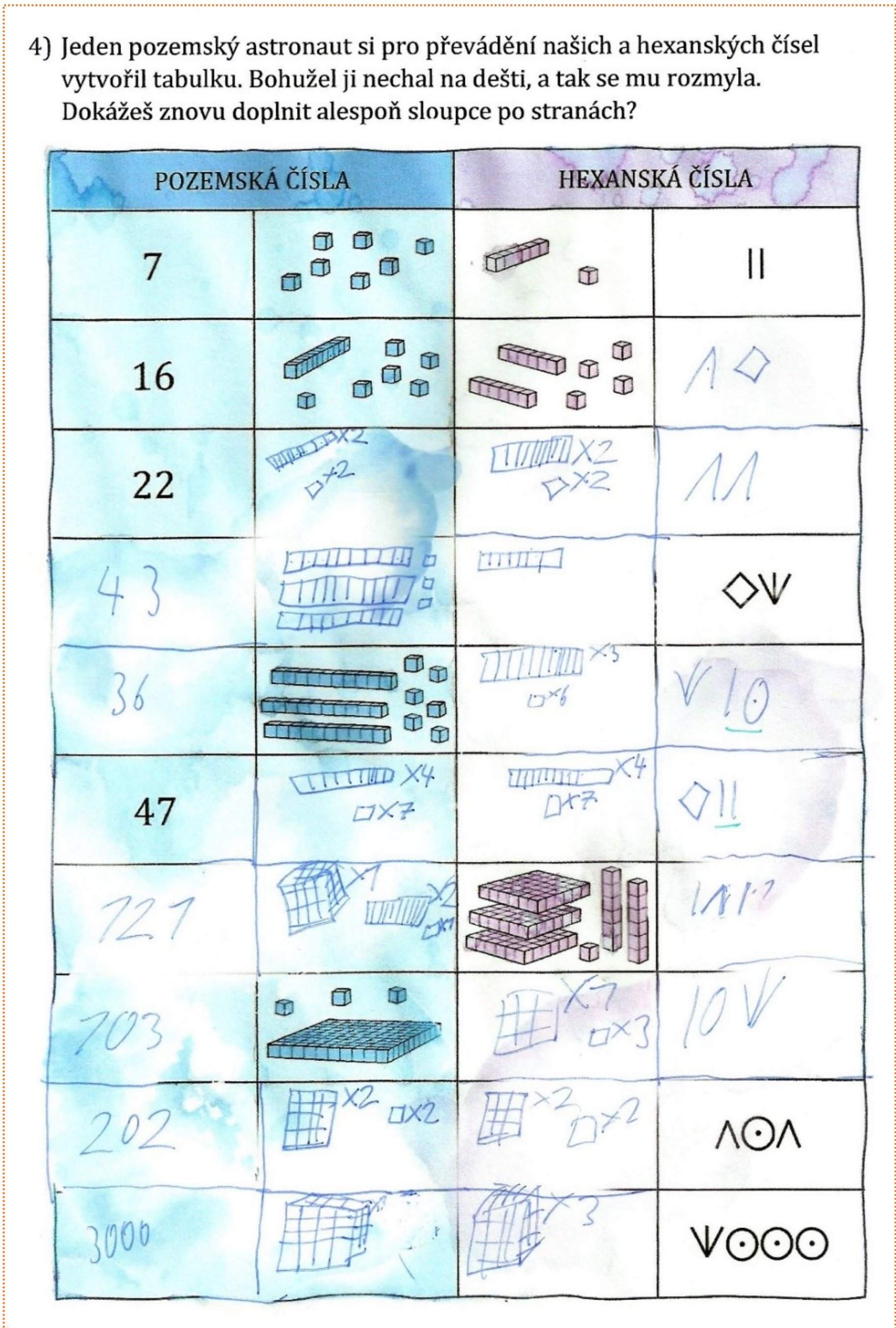
Obrázek 192: řešení Matyldy, 4. úloha

Ostatní řešili 4. úlohu v desítkové soustavě. Vyskytly se různé strategie, jak si poradit s číslicemi z desítkové soustavy, pro které Hexané nemají ekvivalent. Alenka stejně jako její spolužačka Matylda a Břéťa s Honzíkem ze 3. ročníku použila strategii dopočítávání od nejbližšího zapsatelného čísla. Číslo $36_{(10)}$ v 5. řádku tedy zapsala hexansky jako 40, neboť $35_{(6)} + 1_{(6)} = 40_{(6)}$. Stejně tak v řádku níže $45_{(6)} + 2_{(6)} = 51_{(6)}$. Dienesovy kostky, u kterých kreslila tvary pouze orientačně, nikoliv s přesným počtem jednotek, dokreslovala vždy podle čísla ve sloupci s příslušnou soustavou, tedy např. v 5. řádku ve 2. sloupci nakreslila 3 tyčinky a 6 krychliček podle pozemského čísla, ale ve 3. sloupci 4 tyčinky a 0 krychliček podle čísla mimozemského.



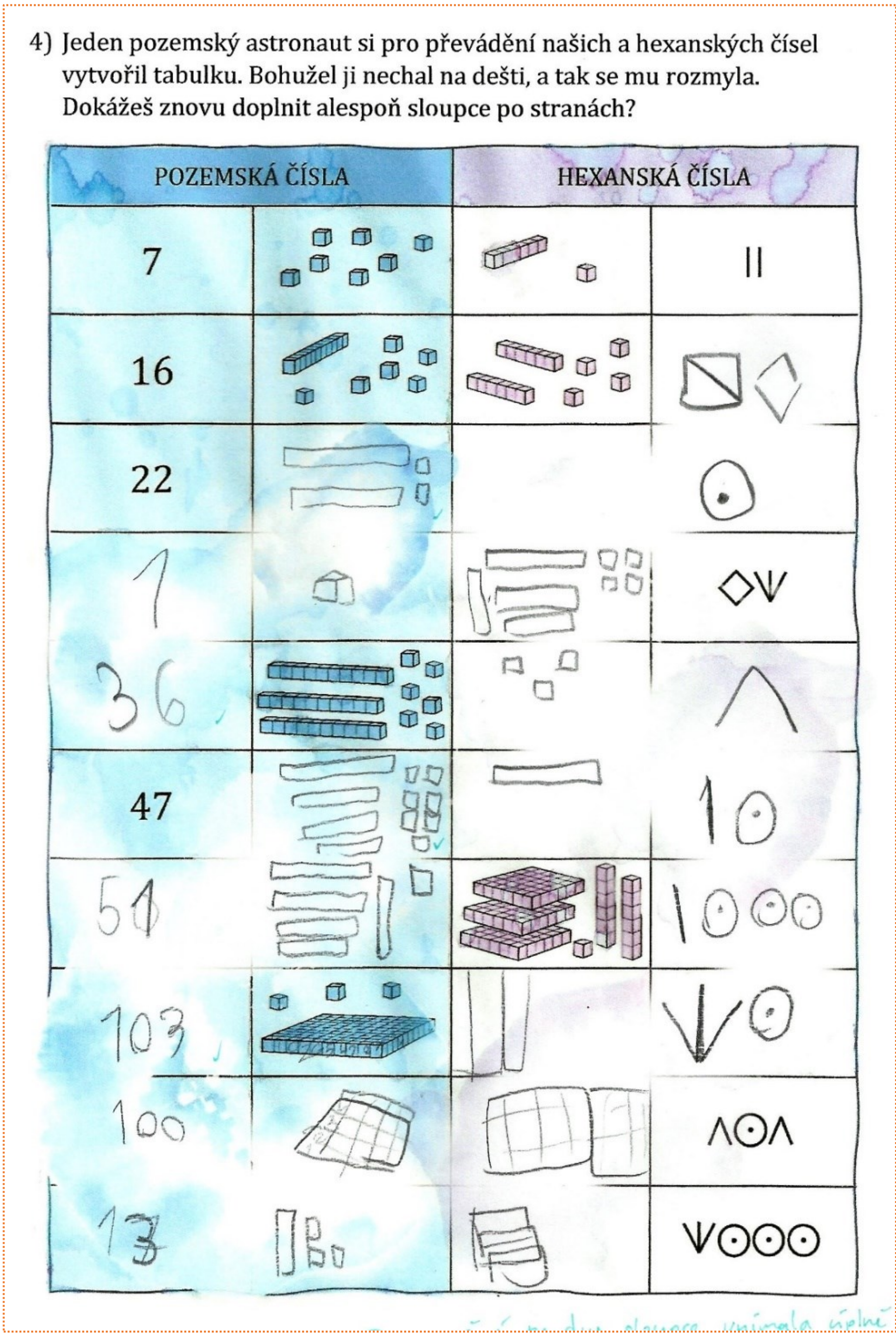
Obrázek 193: řešení Alenky, 4. úloha

Bětka také pracovala v desítkové soustavě. Namísto číslic 6 a 7, které Hexané nemají, používala dvojznaky odvozené z řádku domečků v 1. úloze, tedy dvojznaky 10 a 11. V 7. řádku Bětka vnímala model jako znázornění počtu, nikoliv jako zastoupení jednotlivých řádů. Počet jednotek v modelu vypočítala a jako pozemské číslo správně uvedla 121. Podobu 121 uvedla hexanskými číslicemi i ve 4. sloupci. Je však zajímavé, že ve 2. sloupci ještě vnímala tyčinky a krychličky jako řády a správně zapsala hexanské číslo jako $24_{(6)}$ namísto podoby 110, která by odpovídala jejímu pozdějšímu porozumění. V 7. řádku ve 2. sloupci namísto placky Bětka v modelu z Dienesových kostek použila pro znázornění stovky krychli. V dalších řádcích již používá placky a krychle úspěšně, zřejmě na základě příkladu v 8. řádku.



Obrázek 194: řešení Bětky, 4. úloha

Kamča vnímala sloupce s pozemskými a s hexanskými čísly odděleně. Ve sloupcích s pozemskými čísly doplnila volná okénka svými čísly. V této části úspěšně doplnila zápisy nebo model čísel. Ve sloupcích s hexanskými čísly doplnila zápisy a modely víceméně úspěšně, občas se spletla o jednu kostku v rámci řádu, což může souviset i s chybným přiřazením té dané číslice. Pouze ve 2. řádku číslice na 2. pozici neodpovídá, a v 7. řádku se Kamči pravděpodobně nechtělo takto velké číslo počítat, proto doplnila odhadem $1000_{(10)}$.



Obrázek 195: řešení Kamči, 4. úloha

Valda doplnil pouze 2. a 3. sloupec ve 3. řádku a 3. sloupec ve 4. řádku. Jeho modely odpovídají řešení v desítkové soustavě. Madla doplnila pouze ve 3. řádku číslo 22 zapsané hexanskými číslicemi. Štěpán doplnil pozemský zápis čísla $36_{(10)}$. Tato 3. řešení byla zařazena do kategorie *neřešeno.*

Míra porozumění byla v rámci 4. ročníku stejně jako i v jiných ročnících různorodá. Rozeznat dělení čísel na šestky a zbytek bylo pro žáky snazší, než přenést princip i k vyšším řádům. Zároveň mi z žákovských řešení opět vyplývá, že zápis čísla je něco zakořeněného a v mysli žáka neměnného, zatímco kvantitativní model může být uspořádán do různých tvarů. Zároveň poměrně nízký počet řešitelů si zde propojil tvary Dienesových kostek s řády v šestkové soustavě. Předpokládám, že by to mohla ovlivnit i nižší zkušenost s touto pomůckou z hodin matematiky.

5. ročník

Také v 5. ročníku byla úloha velmi málo řešená, zároveň ale pouze jeden řešitel ponechal úlohu zcela prázdnou. I u řešených úloh byla úspěšnost spíše nízká. Výjimkou byl Joel, který byl velmi motivovaný úloze porozumět a dokončit ji a jeho řešení je ze všech ročníků a řešitelů to nejúspěšnější.

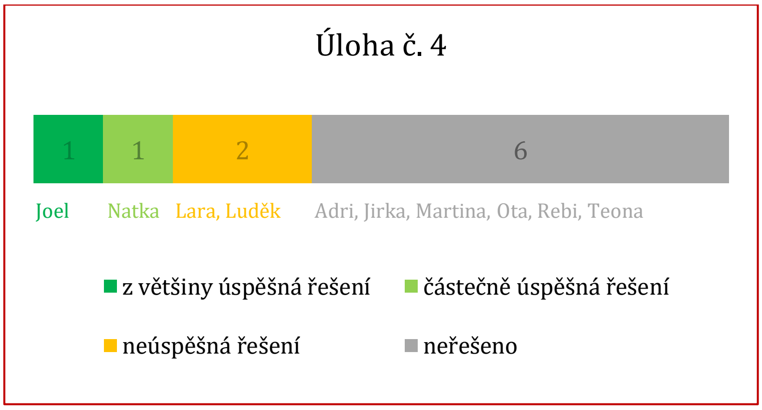
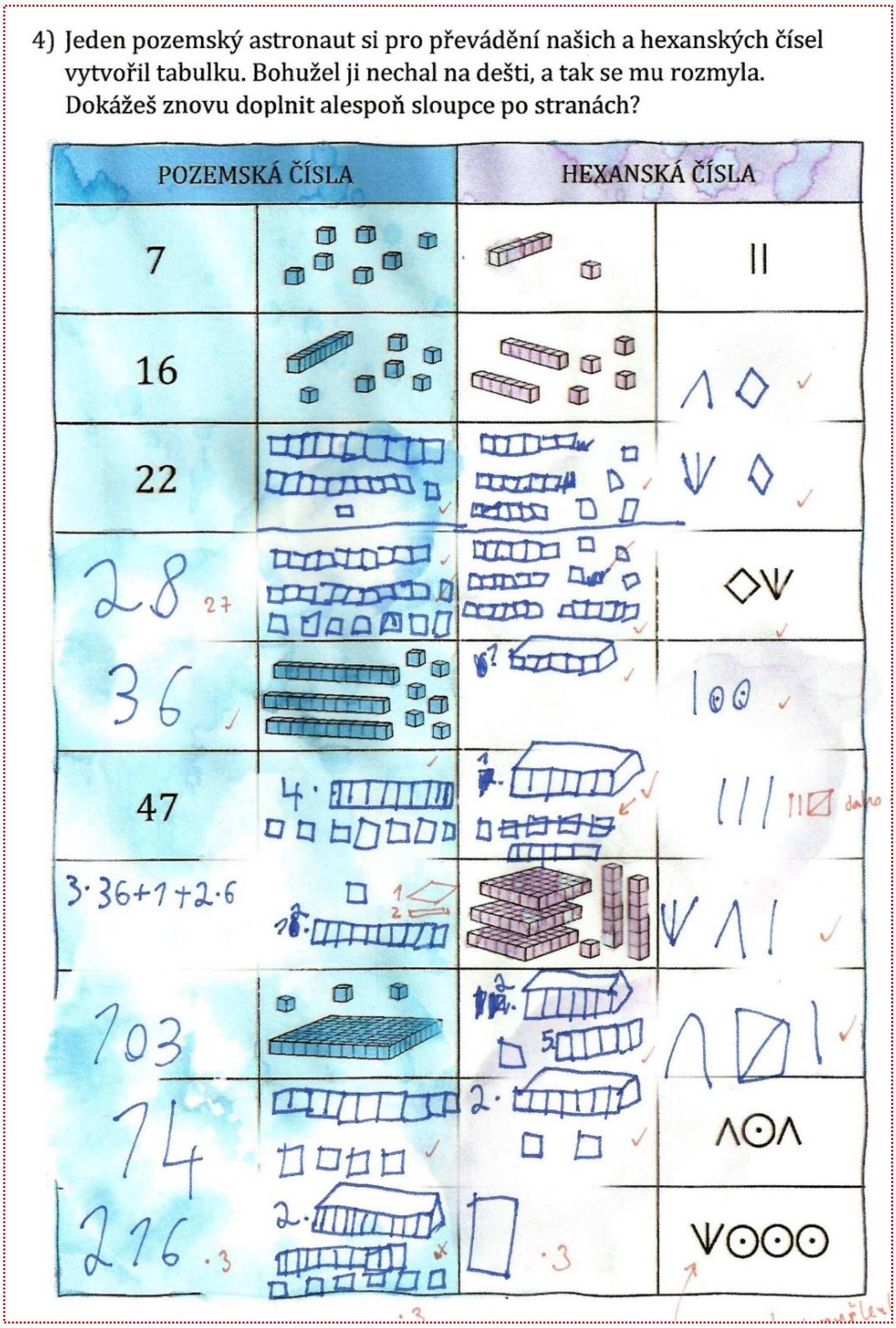


Diagram 69

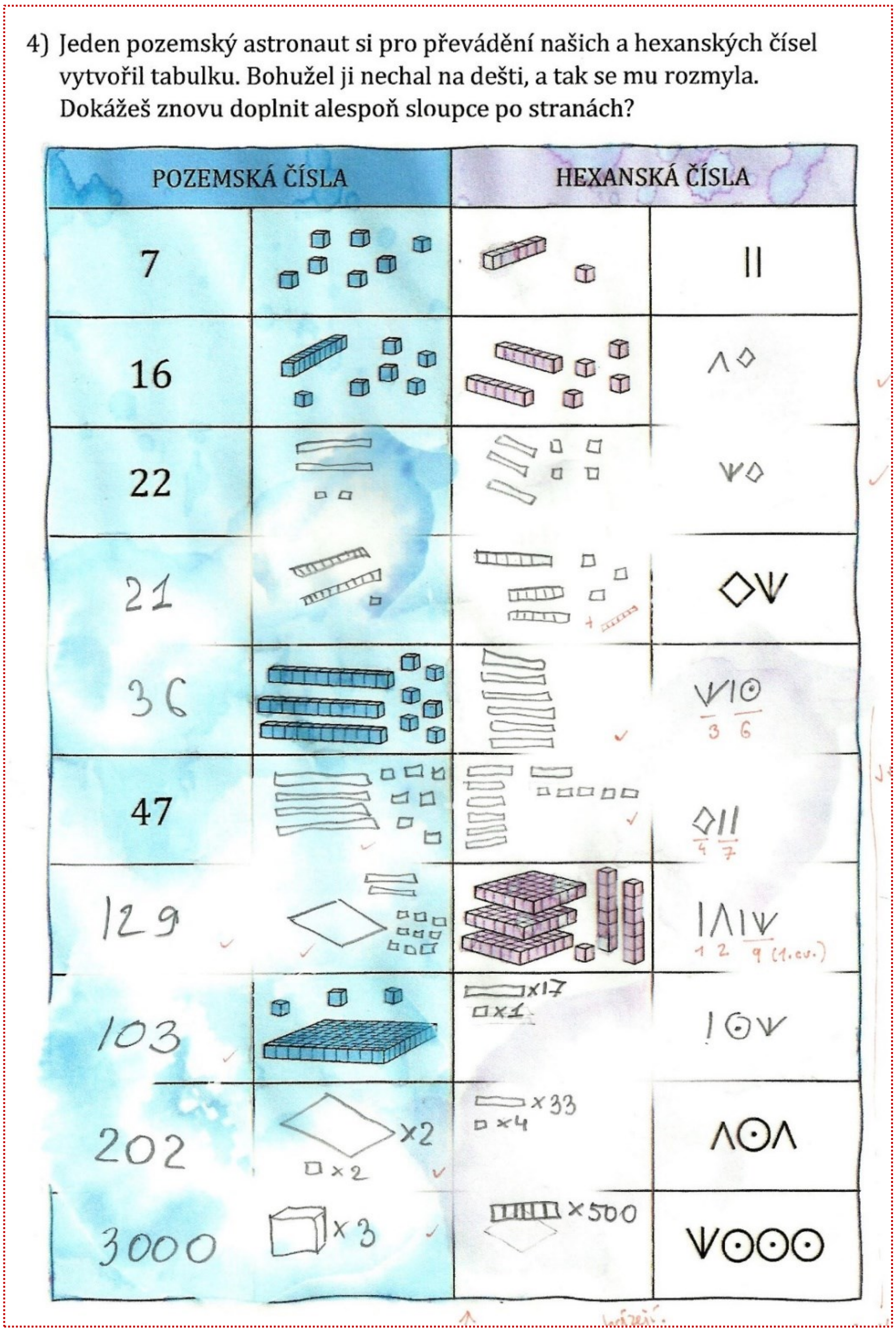
Joel byl ve svém řešení velmi vytrvalý. Během řešení projevil mnoho AHA-momentů. Joelovi jsem po dalších 10 minutách po konci hodiny zapůjčila kalkulačku, neboť jsem viděla, že principu rozumí a aritmetické operace u trojciferných hexanských čísel jej brzdí. Joelovo řešení je ve většině případů zcela správné. Ve 4. řádku si zakreslil v modelu čísla 4 krychličky namísto tří, zřejmě se spletl kvůli 4 hranolům. Na základě toho pak převedl číslo na $28_{(10)}$ namísto $27_{(10)}$. V modelu hexanských čísel v 5. a 6. řádku je vidět, že Joel původně nezohledňoval placky a v číslech použil 6 a 7 tyčinek. Posléze svůj kvantifikátor v obou případech škrtl, přepsal jej na jedničku a z tyčinek dokreslil placky. V 6. řádku se také Joel dopustil chyby, když škrtl původně správně zakreslené 4 krychličky z 5 z modelu hexanského čísla. Domnívám se, že Joel zde nejdříve správně odečetl od čísla $47_{(10)}$

hodnotu placky $36_{(10)}$, ale při následné kontrole se spletl vlivem desítkové soustavy a odečetl od původního čísla $40_{(10)}$, zbylo mu tedy $7_{(10)}$, což je v šestkové soustavě 1 tyčinka a 1 krychlička. V 7. řádku jsem Joelovi sdělila, že nemusí číslo počítat, ale stačí, když zapíše, jak by je počítal. Tímto vznikl zápis výrazem v 1. sloupci. Joel pak namítl, že to stejně počítat musí, aby mohl zakreslit modely čísel. Vlivem tohoto jeho argumentu jsem Joelovi zapůjčila kalkulačku. Joel se v tomto řádku dopustil chyby při modelu čísla v desítkové soustavě, kde použil 12 tyčinek namísto 1 placky a 2 tyčinek. Je možné, že by tato chyba byla nevznikla, kdyby číslo $121_{(10)}$ Joel i zapisoval, ne jej pouze viděl na kalkulačce. Možná by si tak lépe uvědomil přítomnost jedné stovky v čísle. Druhým možným vysvětlením, ke kterému se přikláním spíše, je, že Joela nenapadlo o plackách uvažovat dříve, než se s ní setkal v následujícím řádku. I v hexanském modelu v 8. řádku je vidět, že Joel původně používal pouze tyčinky a krychličky, neboť původně měl k tyčince dopsaný kvantifikátor $17_{(10)}$. Své řešení až později změnil na 1 placku a 5 tyčinek. Předpokládám, že si Joel uvědomil význam placek jako 3. řádu až v okamžiku, kdy narazil na trojciferné hexanské číslo. Zde přítomnost placek pravděpodobně odhalil a vrátil se ke svým dřívějším odpovědím, které podle tohoto nového poznatku upravil. V posledním řádku úlohy Joel znázornil pouze jednu krychli namísto tří. Do desítkové soustavy ji však převedl úspěšně. Předpokládám, že tato chyba jako i všechny dřívější vznikly přílišným zahlcením operační paměti v důsledku obtížnosti úlohy. Joel si v poslední podúloze musel uvědomit kvantitu 4. řádku šestkové soustavy, tedy spojit si rozměry krychle s operací $6 \times 6 \times 6$. Při této kognitivní zátěži je pochopitelné, že další podmínky již vypustil.



Obrázek 196: řešení Joela, 4. úloha

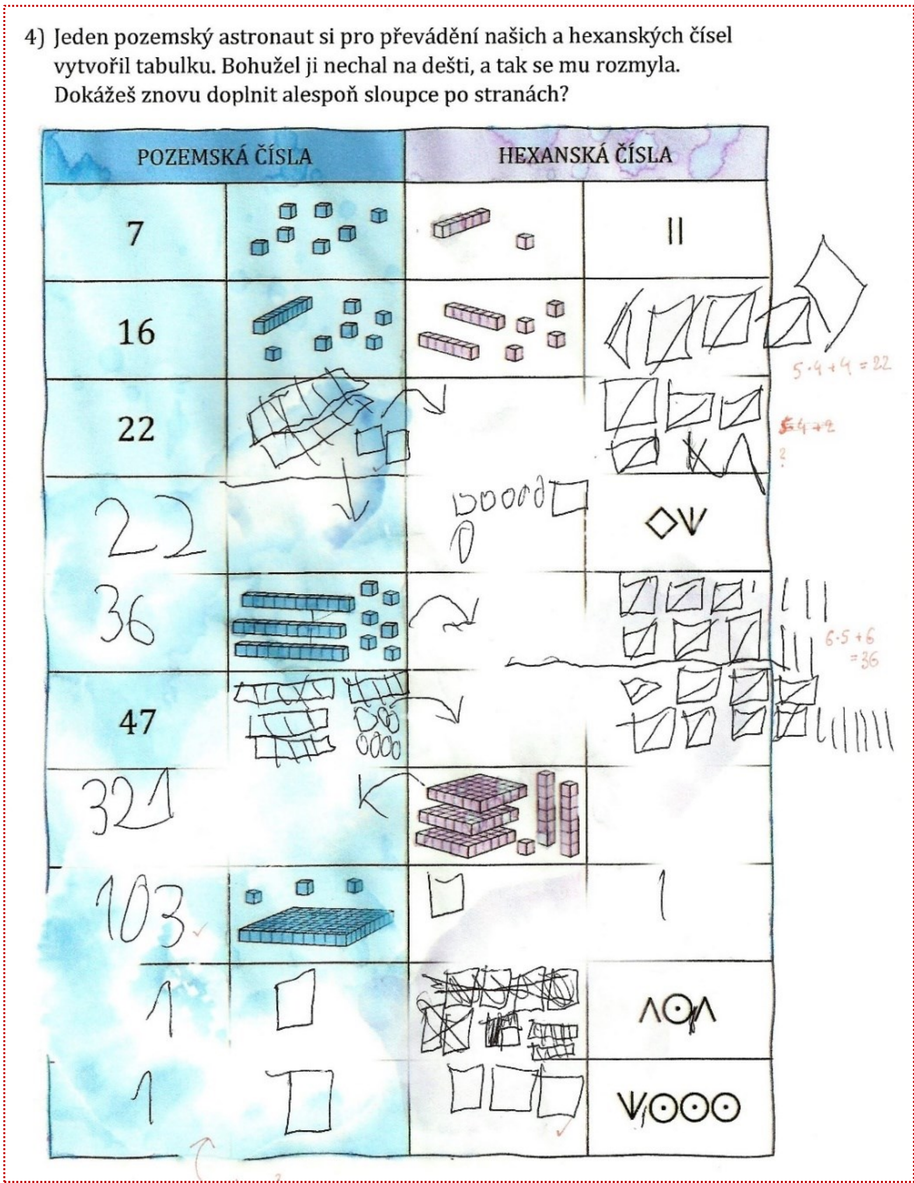
Natka podobně jako původně Joel pracovala v rámci šestkové soustavy pouze s 1. a 2. řádem. Úspěšně tudíž vyřešila řádky s dvojciferným hexanským číslem. Ve 4. řádku Natka vypustila jednu šestku, což se projevilo i ve výpočtu. Přesně tato chyba se v Natčině testu projevuje i v dřívějších úlohách. Číslo $21_{(10)}$ k hexanskému zápisu $43_{(6)}$ dopsala v 1. i v 2. úloze. Je také možné, že chyba vznikla zde, ve 4. úloze, a Natka doplňovala předchozí úlohy zpětně. V následujících řádcích Natka nejen neobjevila význam placky, ale přešla na zápis hexanskými číslicemi v desítkové soustavě. Poprvé se zde u Natky vyskytuje použití dvojznaků pro neexistující hexanské číslice, které byly u jejich spolužáků časté. Číslo $36_{(10)}$, ačkoliv vymodelované jako 6 tyčinek, už Natka hexansky nezapisuje jako 6 šestek a zbytek 0, ale používá desítkovou soustavu, tedy 3 desítky a 6 (dvojznak 10) jednotek. Obdobný zápis používá i v ostatních podúlohách. V 7. řádku se Natka pravděpodobně dopustila aritmetické chyby, když kvantitu modelu vypočetla jako 129. Bohužel Natčiny výpočty, pokud je vůbec prováděla písemně, nemám k dispozici. Na Natčině řešení je dále zajímavé, že přirozeně používá krychličky, tyčinky, placky i krychle v desítkové soustavě, ale nečiní tak analogicky v soustavě šestkové. Domnívám se, že to souvisí i s Natčiným neúspěchem v přechodu na trojciferná hexanská čísla. Je možné, že Natka vnímala hexanská čísla pouze jako dělení se zbytkem, ale koncept poziční soustavy byl pro ni zatím neuchopitelný.



Obrázek 197: řešení Natky, 4. úloha

Luděk ve 4. úloze opět použil hexanská čísla jako nepoziční soustavu. Nejmenší číslice však tentokrát řadí nakonec. Pozemské a hexanské sloupce Luděk propojuje jen částečně. Ve většině případů vnímá čísla odděleně. Ve 2. řádku Luděk doplnil hexanské číslice 55554 s celkovým součtem $24_{(10)}$, tedy 2 tyčinky a 4 krychličky vnímal jako 2 desítky a 4 jednotky bez ohledu na počet znázorněný na tyčinkách. Luděk počty na tyčinkách zakresluje nepřesně. Domnívám se, že si propojil tvary kostek s řády desítkové soustavy na základě

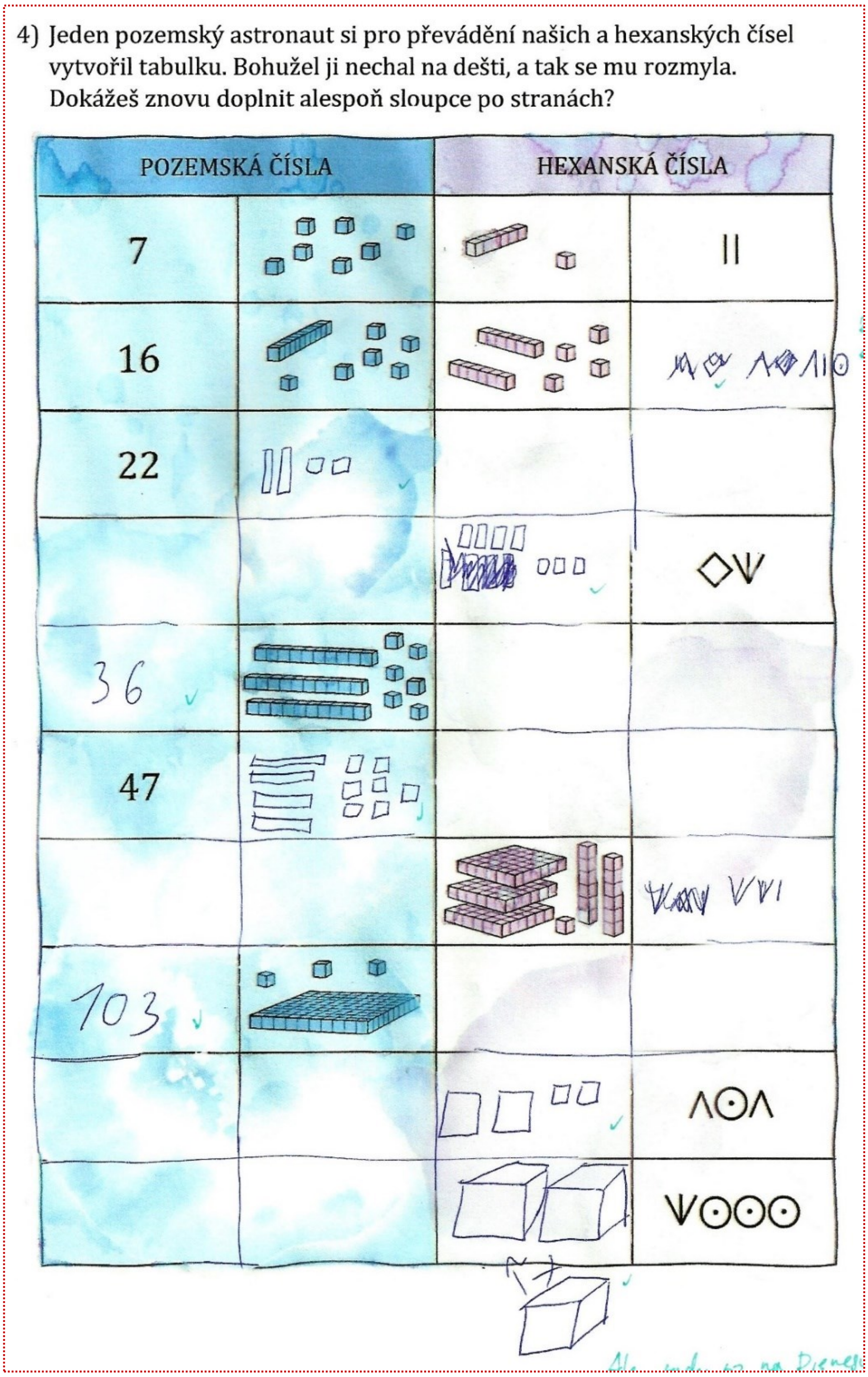
3. úlohy, ale možná ani nezaznamenal, že počet krychliček v jedné tyčince má svůj význam. Některá čísla Luděk propojuje mezi pozemskými a hexanskými pomocí šipek, jako např. ve 3. řádku. Jiné řádky nechává nepropojené a zvlášť znázorňuje čísla hexanská, zvlášť pozemská. Pozoruhodné je, že v 5. a 6. řádku Luděk opouští číslice pro počty mezi jednou a pěti. Zde využívá typickou podobu nepoziční číselné soustavy. I v této Luďkově v podstatě pětkové nepoziční soustavě je však silně viditelné přemýšlení v desítkové soustavě. Luděk neznázorňuje číslo $36_{(10)}$ jako 7 pětek a 1 jednotku, ale pětkami znázorňuje číslo celých desítek a přebytek zapisuje jako jednotky, tedy 6 pětek (což jsou 3 desítky) a 6 jednotek. Analogicky tak i v řádku níže. Luděk si tvořivě upravil čísla v posledních dvou řádcích. Předpokládám, že zde Luděk nechtěl znázorňovat vysoká čísla krychličkami, ale to zároveň zahrnuje předpoklad, že Luděk tato čísla četl v desítkové soustavě, tedy jako $202_{(10)}$ a $3\,000_{(10)}$, nikoliv podle ciferného součtu, což by odpovídalo jeho nepozičnímu porozumění hexanských čísel. Luděk si k číslům dopsal desetinnou čárku a tak tyčinkami a krychličkami znázornil mnohem nižší číslo $20{,}2_{(10)}$ a $3{,}000_{(10)}$.



Obrázek 198: řešení Luďka, 4. úloha

Lara v 1. podúloze doplnila hexansky 10. Její řešení nedokážu interpretovat. V dalších řádcích modelovala číslo pomocí krychliček, jelikož však použila pouze počet jednotkových krychliček, a nikoliv vázanou kvantitu v podobě tyčinek, placek apod., není možné určit, nakolik propojení desítkové a šestkové soustavy porozuměla. K hexanskému číslu v 1. řádku si Lara dopsala arabsky 7, zřejmě podle domečků z 1. úlohy. Ve 4. řádku však hexanské číslo 43 přepsala arabsky jako 43 a podle počtu krychliček je zřejmé, že tím mínila $43_{(10)}$. Totožně pak četla čísla ve dvou předposledních úlohách. Zbylé úlohy neřešila.

Rebi, Teona, Ota, Martina a Adri řešili pozemská a hexanská čísla odděleně. Vlastní čísla nedoplňovali. Rebi a Teona ve všech řádcích doplnily zápis nebo model čísla vždy v rámci jedné číselné soustavy. Namísto Dienesových kostek s konkrétními počty jednotek obě používaly schematicky čtverečky, obdélníky, čtverce a krychličky. Navíc v první podúloze Rebi doplnila hexansky nejdřív 24, to však škrtla, doplnila znovu 24 a opět škrtla a doplnila 210. Zápis šestnácti jako hexansky 210 se objevil už v jejím řešení 1. úlohy.



Obrázek 199: řešení Rebi, 4. úloha

Teona v 1. podúloze původně doplnila hexansky 113, ve 3. podúloze doplnila vlastní číslo 30 zápisem i modelem v pozemských číslech, ale sloupec s hexanskými čísly ponechala v tomto řádku prázdný. Dále v 7. řádku zapsala číslo hexansky jako 111. Otovo řešení je podobné jako řešení Rebi a Teony. Ota však zcela vynechal 4., 9. a 10. řádek. U modelu desítkové soustavy dbá na to aby se jeho tyčinky skládaly z přesně deseti jednotek. V rámci mimozemských čísel byl v 1. podúloze úspěšný, v 6. však doplnil hexansky 323 namísto 321. Martina z celé úlohy doplnila pouze modely čísel $22_{(10)}$ a $47_{(10)}$. Adri pouze dopsala zápis čísla $36_{(10)}$ a $103_{(10)}$ a k číslo $22_{(10)}$ doplnila model, avšak neúplně pouze 1 tyčinku a 2 krychličky. Jirka 4. úlohu neřešil vůbec.

Shrnutí

V této úloze řešitelé projevili své porozumění získané z přechozích úloh. Jednalo se o úlohu závěrečnou a z mého pohledu úlohu nejvíce vypovídající o míře porozumění šestkové soustavě.

Úspěšnost řešení byla dle očekávání nízká. Mnoho řešitelů vůbec neopustilo desítkovou soustavu a chybějící hexanské číslice nahrazovalo alternativami (zejména dvojznaky).

Někteří řešitelé, ačkoliv při zápisu čísel využívali pouze desítkovou soustavu, si uvědomili rozdílnost v kvantitách řádů desítkové a šestkové soustavy na modelech z Dienesových kostek. Mnoho z nich tuto rozdílnost pouze zakreslilo, ale dále používalo tyčinku jako znak pro desítku, placku jako znak pro stovku apod. Jiní s touto rozdílnosti pracovali i kvantitativně v modelech čísla a čísla tak úspěšně seskupovali podle řádů šestkové soustavy, ačkoliv jejich zápis číslicemi tomuto seskupení neodpovídal. S oporou o tento jev se domnívám, že pro mnohé řešitelé je přijatelné znázornit kvantitu jinými řády v rámci modelu, který může být proměnlivý kvádry vázané z jednotek mohou mít libovolné rozměry. Není však tak snadno přijatelné číslo podle těchto řádů zapsat, neboť drtivá většina izolovaných modelů čísel, se kterými se žáci setkávají, jsou čísla zapsaná v desítkové soustavě. Tento model, tedy zápis v desítkové soustavě, se tak stává rigidním a významově může v porozumění žáka splývat s pojmem *číslo* obecně.

Malá část řešitelů úspěšně využila šestkovou soustavu i v zápisu číslicemi. Častěji řešitelé odhalili řád šestek (tyčinek), ale nebyli úspěšní v odhalení a využití dalších řádů šestkové soustavy. Několik řešitelů však i tyto další řády využívali, ačkoliv s různou mírou úspěšnosti a s různou mírou oprav, škrtů a dalších záznamů procesu objevování.

V malém množství se vyskytlo i jiné pojetí hexanských čísel. Typicky se jednalo o tytéž řešitele, kteří své alternativní porozumění projevili už v dřívějších úlohách.

S ročníkem spíše klesal počet řešitelů 4. úlohy. Kromě konkrétního zastoupení osobnostních rysů žáků ve třídách se domnívám, že to může souviset i s vyspělejší metakognicí – konkrétně se schopností uvědomění si vlastního neporozumění problematiky a rozhodnutí se úlohu raději neřešit než ji řešit neúspěšně. Ve 2. ročníku úlohu řešila většina řešitelů, avšak většinou neúspěšně. Ve vyšších ročnících úlohu řešila menší část zapojených do testování, avšak ti, kteří úlohu řešili, byli průměrně úspěšnější. Mnozí řešitelé zahrnutí do kategorie *neřešeno*, a to zejména řešitelé z 5. ročníku však úlohu nechtěli ponechat zcela prázdnou, a tak doplnili alespoň ta okénka, ve kterých si byli řešením jisti.

5.4.3. Závěry

Sada didaktických testů Poziční soustavy byla zadávána s cílem identifikovat a popsat jevy vázané na porozumění žáků zápisu čísla v poziční soustavě. Pozorovaná úroveň porozumění jednotlivých žáků byla různorodá a výrazné rozdíly byly zaznamenány nejen mezi ročníky, což bylo očekáváno, ale i v rámci jednotlivých tříd.

Limitem interpretace výsledků je kromě mnoha psychologických a jiných faktorů během vypracovávání testů také samotná struktura didaktických testů. Jak bylo popsáno, některé z úloh nabízely jen omezený prostor pro záznam řešitelských strategií a myšlení vůbec. Jednalo se zejména o 3. úlohu, kde řešitelé většinou zaznamenávali pouze výsledek a zároveň bylo možné ke správnému výsledku dojít i s nižším porozuměním desítkové soustavě, tedy metodou vyčerpání všech možností. Dále 4. úloha pracovala s mnohými dovednostmi, které porozumění pozičního zápisu přesahují, např. porozumění rovnosti jako ekvivalence a schopnost orientace v matematických výrazech. Limitem 5. úlohy mohla být vyšší syntaktická složitost zadání, což kladlo vyšší nároky na čtenářskou gramotnost řešitelů a mohlo ovlivnit výsledky.

Ve výsledcích se projevovalo, že práce ve vyšším číselném oboru může vyžadovat větší prostor v pracovní paměti, přičemž již žáci naráželi na limity její kapacity a vyskytovaly se tedy chyby "z nepozornosti". Co se pozorování záznamů přemýšlení týče, nejzajímavější byla řešení žáků z 2. ročníku, u nichž je toto porozumění většinou zatím emergentní.

Z výsledků didaktického testu Pozemská čísla považuji za důležité opět zdůraznit nesouvislé rozložení úspěšnosti v nestandardních úlohách, tedy 2. až 4. úloze, vzhledem k ročníku. Domnívám se, že tento jev může vypovídat o převážení vlivu osobnosti žáka na porozumění pozičnímu zápisu než výuka, které jsou žáci součástí. Tato interpretace by vedla k závěrům, že běžně využívané metody rozvoje porozumění pozičnímu zápisu jej ve skutečnosti tolik neovlivňují a toto porozumění je odkázáno na individuální predispozice žáků. Je však zřejmé, že je potřeba provést v této oblasti další výzkumy.

Výsledky didaktického testu Mimozemská čísla byly opět rozdílné napříč řešiteli i v rámci jedné třídy. Dle očekávání měla nejvyšší úspěšnost 3. úloha, která byla podpůrná, a nejnižší úspěšnost úloha závěrečná, ve které se projevilo, jak žáci poziční soustavě s alternativním základem porozuměli. Je záhodno se zmínit, že didaktický test Mimozemská čísla byl pravděpodobně prvním setkáním s poziční soustavou s alternativním základem pro naprostou většinu řešitelů. Úspěšnost řešitelů byla nízká, přesto vzhledem ke zkušenostem žáků předčila očekávání. Opět se však jednalo o jednotky řešitelů, kteří projevili počínající či pokročilé porozumění šestkové soustavě. Stejně jako u testu Pozemská čísla se domnívám, že se jednalo spíše o individuální predispozice žáků, ačkoliv rozdílnost úspěšnosti mezi třídami je zajímavá.

Pozorovala jsem, že práce v soustavě s alternativním základem, zde v soustavě šestkové, může být snazší s modely čísla, které žáci spíše nevnímají rutinně a konvenčně. Oproti tomu zápis čísla je zdá se pro mnohé žáky automatizovaný v desítkové soustavě, nepřipouštějí jinou konvenci, což je vzhledem k jejich zkušenostem a k obecnému trendu výukových metod pochopitelné. S tím také souvisí pozorovaná větší obtížnost čtení čísla v poziční soustavě s alternativním základem než jeho zápis. Domnívám se, jak jsem popsala výše, že při čtení čísla převažuje automatický koncept, tedy silné propojení vztahu číslic s jejich významem jako čísla v desítkové soustavě, zatímco při zápisu jej řešitel nevnímá a nemůže vnímat celistvě, neboť zápis teprve vzniká.

Je pozoruhodné, že s vyššími ročníky řešitelé pro číslice 6, 7, 8 a 9 v hexanské soustavě spíše volili dvojznaky na základě vzoru (podle domečku) než na základě jejich hodnoty (součet hodnot hexanských číslic) jako tomu bylo spíše v nižších ročnících. Domnívám se, že to může napovídat o silnějším propojení číslice a její kvantitativní hodnoty v nižších ročnících, zatímco ve vyšších ročnících mohou žáci vnímat číslice již více jako symbol a pracovat s nimi abstraktně bez jejich přímé vazby na kvantitativní význam, např. u algoritmů aritmetických operací. Nabízí se interpretace, že v nižších ročnících žáci spíše inklinovali k nepozičnímu zápisu čísla jakožto zápisu nižší kognitivní úrovně. Proti tomu však svědčí využití nepozičních soustav i ve 3. a v 5. ročníku (Vítek a Luděk). Domnívám se, avšak bez bližších důkazů, že inklinace k nepozičním soustavám může souviset spíše s individuální úrovní kognitivní vyspělosti řešitele ve vnímání pojmu číslo, zatímco vazba na význam číslice může spíše souviset se zkušenostmi z výuky, tedy že ve 2. ročníku bývá kladen větší důraz na vazbu číslice-kvantita než v ročnících vyšších, kde se již pracuje s číslem na abstraktní úrovni jako s prvkem struktury Tato oblast se nabízí k dalším studiím.

Zajímavým, avšak vedlejším, jevem byla nižší řešenost náročnějších úloh ve vyšších ročnících. Může to souviset s lepším odhadem svých schopností, ale také s vypěstovanou nižší sebedůvěrou při řešení matematických problémů. Tento jev však mohl být důsledkem i mnoha jiných faktorů, které nejsou popsány.

V této kapitole byly popsány pozorované jevy vázané k porozumění pozičního zápisu čísla. Domnívám se, že moje práce otevírá mnoho dalších otázek, které mohou být prozkoumány.

6. Intervence

Ve 3. ročníku byly po zadání didaktických testů, tedy v období mezi 5. únorem a 4. březnem, provedeny pedagogické intervence zaměřené na rozvoj porozumění zápisu čísla v poziční soustavě a principu poziční soustavy obecně. Celkově se jednalo o 8 intervenčních vstupů v hodinách matematiky. První a poslední vstup měly rozsah jedné vyučovací hodiny, zbývající pak v průměru 20 min s extrémy od 10 do 30 minut. Do té doby žáci ve 3. ročníku nepracovali v hodinách matematiky s čísly nad 100 jako se samostatným učivem. Většina vstupů se týkala pouze desítkové poziční soustavy, jen v posledním vstupu žáci řešili i úlohy na poziční soustava o základu 4. Po těchto intervencích byly žákům 3. ročníku zadány výstupní didaktické testy podobné testům původním.

V této kapitole shrnu hlavní myšlenky a cíle jednotlivých vstupů, popíšu matematické chování žáků a doplním je popisem konkrétních situací, které v procesu poznávání pozičních soustav považuji za klíčové. Pokusím se zhodnotit, zda daným intervenčním vstupem byl naplněn cíl, který jsem si stanovila. Podrobný popis intervenčních vstupů ve formě přípravy na vyučovací hodinu včetně popisu průběhu, konkrétních reakcí žáků a fotodokumentace je zahrnut v příloze.

Vstup 1

Tento vstup proběhl formou vyučovací hodiny na téma řádů desítkové soustavy. Cílem bylo seznámit žáky s různými modely řádů (peníze, Dienesovy kostky, prostředí Kameny) a způsoby znázornění čísla obecně. Mým záměrem také bylo podnítit úvahy o pozičním zápisu čísla jako konvenci. Vyučovací hodina byla postavena na modelu EUR (evokace – uvědomění – reflexe).

V úvodní části žáci formou běhací hry platili nákupy pomocí peněz s hodnotami 1, 10, 100 a 1 000. Hra byl zadána jako problémová. Úkolem žáků bylo zaplatit jednotlivé nákupy s uvedenou cenou, přičemž se nemohli domlouvat slovně a mohli nosit platidla po jednom. Žákům záměrně nebylo sděleno, že jsou peníze umístěné v zadní části třídy v přesném množství pro zaplacení nákupů. Předpokládala jsem, že hlavním tématem vnímaným žáky zde bude spolupráce a pozornost zaměřená na řády bude okrajová, což se i potvrdilo v reflektivní diskusi po aktivitě. Přesto žáci pro úspěch v aktivitě museli neustále přepočítávat součty umístěných platidel jednotlivých řádů.

> Shrnutí reflexe: *Žáci uváděli zejména téma spolupráce a mimoslovní komunikace. Uváděli návrhy, co by jim pomohlo představený problém vyřešit rychleji a účinněji. Téma řádů se v diskusi neobjevilo. Jako účel aktivity akcentovali spolupráci, dále placení a kontext práce s penězi. Nejblíže tématu desítkové soustavy byl výrok: „Abychom se naučili platit i větší čísla."*

Hlavní část hodiny byla zaměřena na tvořivé znázornění čísla. Tato aktivita byla pojata velmi otevřeně a její postup i výsledky velmi záležely na zapojení a tvořivosti jednotlivých žáků. Žákům byly nabídnuty různé pomůcky, vylosovali si číslo a to číslo měli znázornit libovolným způsobem tak, aby jejich spolužáci dokázali číslo přečíst. Jedinou podmínkou bylo, že nemohou používat číslice. Zadávaná čísla byla trojmístná a čtyřmístná, aby byli žáci nuceni využít řády a nemodelovali číslo pouze jako jeho kvantitu. Aktivita měla také v žácích podnítit úvahy o arbitrárnosti řádů a symbolů je zastupujících – jimi vymodelované číslo může být intuitivní a logické, bez dřívější dohody o významu struktury a použitých symbolů si však nemohou být zcela jistí, že bude číslo přečteno správně. Stejně tak je tomu u pozičního zápisu čísla.

> Shrnutí a reflexe: *Žáci ve volbě znázornění čísla nebyli tak tvořiví, jak jsem od nich očekávala. Domnívám se, že to způsobilo v tomto kontextu poněkud nešťastné vnesení pomůcky Dienesovy kostky, ze kterých třída dosud pracovala jen s tyčinkami a krychličkami. Většina žáků zvolila je, pomůcka pro ně byla velmi lákavá. Svoji tvořivost pak projevili v rámci této práce s touto pomůckou, znázorňovaná čísla tak měla podobu oblouků, studen a jiných staveb. Alternativní způsoby museli žáci využít, až když zjistili, že pomůcky není dost na všechna čísla. V reflexi pak uvedli, že jednodušší bylo přečíst ta čísla, která měla jednotlivé řády vždy u sebe. Byla také vznesena a spolužáky přijata námitka na egyptský zápis čísla (inspirace testem Pozemská čísla), neboť egyptské číslice jsou podle žáků také číslice.*

V závěrečné reflexi žáci neměli hlubší podněty k tématu, odkazovali se zejména na první aktivitu.

Cíl byl podle mého hodnocení naplněn částečně. Žáci se seznámili s novou pomůckou, kterou považuji za dobrou reprezentaci řádů, zároveň však byla diverzita modelů řádů nízká a z mého pohledu nedostatečná pro vyvození společné vlastnosti všech znázornění.

Vstup 2

Cílem vstupu s tématem pozičního zápisu bylo, aby žáci rozlišili význam jednotlivých pozic v čísle. Žáci poznávali čísla znázorňována údery zvonků – každý řád od jednotek po tisíce měl přiřazený vlastní tón. Mým záměrem bylo narušit žákům známou podobu čísla jako hotového konceptu a rozložit číslo na proces, kde je každému řádu a každé číslici věnována pozornost zvlášť. Zároveň jsem chtěla vytvořit podmínky pro to, aby žáci sami objevili tabulku pro zápis čísla v prostředí Kameny.

> Příběh 2: *Jakmile jsem řády začala hrát střídavě, nikoliv od tisíců po jednotky, většina žáků to potřebovala zopakovat vícekrát, neboť se snažili hodnoty ve všech řádech udržet v hlavě. Honzík hlasitě zabědoval, že jsem mu zkazila strategii – psal si číslice hned, když je slyšel. Ihned ho však napadla strategie nová – tabulka. Párkrát ji odzkoušel a byl se sebou spokojen. Poté jsem Honzíka vyzvala, ať ji představí ostatním. Honzík si udělal tabulku řádů. Řády neměl nadepsané, ale fungovalo to obdobně jako prostředí Kameny. Do okének daného řádu si zapisoval číslice. Kajka také zapisovala rovnou číslice na danou pozici, ale pozice neměla pevné (např. v tabulce), proto se jí stalo, že při zápisu čísla 215 zapsala 2015, neboť mezi 2 a 15 měla větší mezeru a myslela si, že zapisovala 2 na pozici tisíců, ne stovek.*

Tento příběh je pro mě zároveň důkazem o naplnění cíle aktivity. Žáci v hodině také pojmenovali, že bylo jednodušší určit ta čísla, jejichž tóny byly seřazené od tisíců po jednotky. Žáci měli různé méně či více sofistikované strategie, jak proces tvorby čísla evidovat, všichni však propojovali pozici číslice s hodnotou řádu.

Při volbě této aktivity jsem se inspirovala na víkendovém Montessori školení věnovaném výuce aritmetiky. Na tomto školení byla zmiňováno modelování čísla hrou na tělo, kde je každému gestu přiřazen jeden řád. Aktivita, kterou jsem vnesla ve Vstupu 2 se stala oblíbenou, posléze jsme ji také obměňovali hrou na tělo, při které si žáci tvořili i vlastní gesta. Při jedné z těchto aktivit se odehrál následující příběh.

Příběh 3: *V rámci hry na tělo byla dohodnuta 4 gesta, tedy pro řády tisíců, stovek, desítek a jednotek. Honzík znázornil číslo 10 231. Nikdo proti desetinásobném provedení gesta pro tisíc neprotestoval a já je také prozatím ponechala bez komentáře. O několik čísel později zahrál Břéťa číslo 1 502, v němž znázornil 4 stovky a 10 desítek. To vyvolalo diskusi, zda se to smí nebo nesmí. Nejvýrazněji protestoval Pavel, že je to zbytečně složité a nepřehledné. Na tabuli jsem bez komentáře načrtla tabulku jako na Kameny a zapsala nejdřív 1|4|10|2 a pod to 1|5|0|2. Tomáš argumentoval, že je to totéž a obojí zápis je možný. Pavel nesouhlasil, protože nepíšeme 14102, Honzík a Břéťa si stáli za tím, že součet je však stejný a je jedno, který způsob budeme používat. Celkově žáci dovedně argumentovali. Nakonec jsem vášnivou diskusi uklidnila názorem, že asi není správný způsob a záleží tedy na tom, jak se domluvíme – zda budeme hrát podle součtu, nebo podle zápisu. Hlavním argumentem Bréti a Honzíka bylo, že se s jejich interpretací dá dělat složitější, a tudíž i zajímavější hádanky. Zdálo se, že třídu přesvědčí. Cítila jsem, že část třídy už má potřebu to konflikt uzavřít, proto jsme hlasovali. Vyhrála hra podle zápisu. Honzík pak vymýšlel další hádanku, přičemž rozhodnutí třídy respektoval. Po dalších číslech se objevilo i znázornění čísla 15 555. Nikdo neprotestoval. Rozšířila jsem na tabuli tabulku o řád 10 000 a zapsala do ní číslicemi výsledné číslo podle řádů. Zeptala jsem se, jestli by šlo Honzíkovo číslo zapsat i takto. Vítek souhlasil, řekl, že součet je stejný. Pavel poznamenal, že toto dává možná větší smysl než jak bylo číslo zahráno. Třída se shodla na tom, že pokud je dvojciferné číslo na začátku toho hraného, nevadí jim to, uvnitř čísla jej však neuznávají.*

V situaci popisované v příbězích i v hodinách matematiky mezi nimi třída mnohokrát svými slovy potvrdila, že poziční zápis je jednodušší a přehlednější než případné odchylky od něj jako např. změna pořadí řádů, nebo nedodržování pravidla jedné číslice pro jeden řád. Třída takto poznala a pojmenovala výhody celosvětově nejrozšířenějšího způsobu zápisu čísla – pozičního.

Vstup 3

Tématem vstupu byly kombinace. Cílem Vstupu 3 vázaným na téma této práce bylo, aby se žáci seznámili s konceptem ciferného součtu. Dalšími záměry při volbě této aktivity bylo nabytí bližší zkušenosti s prostředím Kameny.

Žáci hledali čísla, která lze v tabulce vymodelovat pomocí omezeného počtu kamenů. Žáci snadno dovedli vymodelovat nejvyšší a nejnižší číslo ze zadaného počtu kamenů. Úspěšně vyvrátili nabízenou hypotézu, že číslo z více kamenů bude i vyšší číslo. Jako téma vedlejší v rámci této práce se vynořily organizační principy při hledání všech možných řešení. Třída svými odpověďmi na doplňující otázky dokázala, že rozumí významu pozice daného kamene

Cíl byl podle mého uvážení naplněn, ačkoliv přímo pojem ciferný součet v hodině nezazněl. Aktivita byla pro žáky snadná, a tudíž i méně zajímavá. Jako nedostatečné hodnotím propojení modelu čísla v prostředí Kameny na dříve využívané kvantitativní modely (Dienesovy kostky). Domnívám se, že srovnání těchto dvou modelů by mohlo být zejména pro matematicky slabší žáky nápomocné v porozumění významu kamene a jeho pozice – tedy že tentýž kámen může zastupovat jak tisícovou krychli, tak i jednotkovou krychličku v závislosti na umístění.

Vstup 4

Tématem Vstupu 4 byla hodnota pozice při sčítání. Stanoveným cílem pro všechny žáky bylo spíše obecnější získávání zkušeností s *place value*. Vedlejšími cíli byl rozvoj argumentace, dokazování i práce s daty. Tato problémová aktivita skrytě navazovala na koncept ciferného součtu.

Hlavní náplní aktivity bylo samostatné, více či méně organizované hledání takového dvojciferného čísla AB, pro které platí, že AB + BA = 100, nebo co nejblíže 100. Zadání bylo ilustrováno na prostředí Kameny.

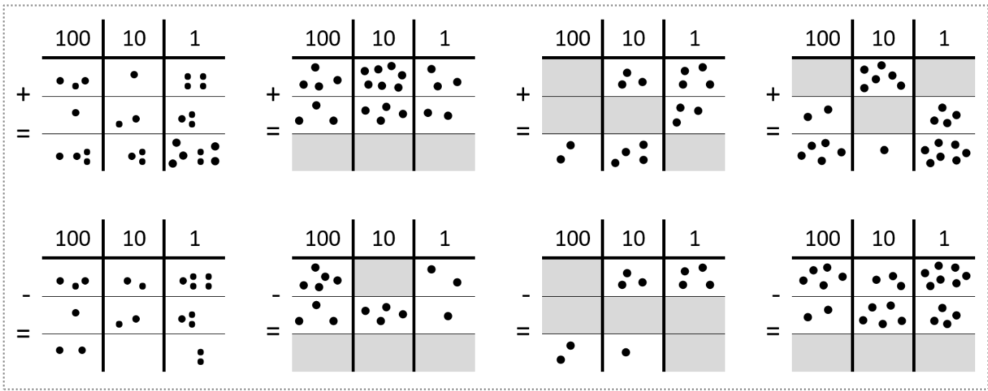
Žáci poměrně rychle začali tušit, že číslo 100 takto vytvořit nepůjde, obhájit tento postoj však nedokázali. Zároveň, ačkoliv byli stále více přesvědčení, že výzva nemá řešení, na otázku, zda bude existovat součet mezi 99 a 110, odpovídali, že určitě ano, jen ho zatím neodhalili. Žáci však nacházeli vedlejší pravidelnosti a principy. Mnozí po chvíli dokázali rychle k zadanému číslu CC najít číslo AB, pro které platí že AB + BA = CC, nikdo však nedokázal vysvětlit, jak to dělá. Břéťa si také všiml, že všechna čísla AB, pro které platí, že AB + BA = 99 jsou násobky devíti. Význam ciferného součtu nikdo z žáků nezmínil. Vzhledem k narůstající frustraci žáků jsme aktivitu opustili, žáci se ode mne však snažili získat odpověď, zda číslo 100 půjde vytvořit, nebo ne. Problémová úloha: *Najdi součet AB a BA, který bude mezi 99 a 110,* pak byla přidána na nástěnku výzev.

Jelikož byl cíl pojat obecně, domnívám se, že byl naplněn. Třída během aktivity i diskuse pracovala s řády desítek a stovek. S ciferným součtem žáci pracovali, domnívám se, že spíše podvědomě, nikdo jej však nezmínil ani formou procesuálního modelu.

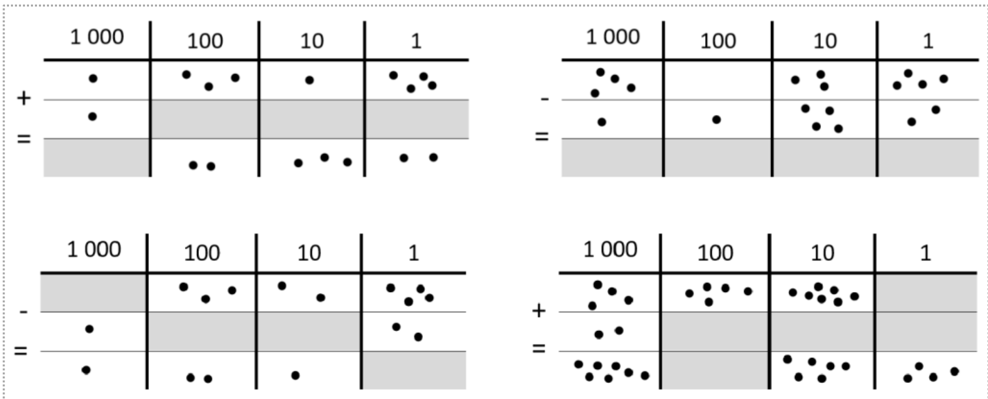
Problémová úloha byla převzata od autorů Edwards, Quinlan a Strayer (2016).

Vstup 5

Tématem vstupu byly aditivní operace a přechod přes desítku. Cílem pro třídu bylo odhalení a formulace principu přechodu přes základ při aditivních operacích v prostředí Kameny. Aditivní operace s využitím prostředí Kameny byly evokovány metodou Notice & Wonder[7]. Žáci posléze samostatně řešili úlohy přiložené níže, přičemž mohli využít skleněné kamínky a plstěné podložky. Následovala diskuse nalezených řešení.



Obrázek 200: aditivní úlohy



Obrázek 201: aditivní úlohy, prohlubující

Většina žáků se setkala s obtížemi už u základní sady úloh. Pro prohlubující úlohy si přišlo jen několik málo žáků.

[7] Metoda brainstormingu, ve které žáci popisují, co pozorují na obrázku/modelu a poté jaké otázky je k tomu napadají. Všechny nápady učitel bez komentáře sepisuje na tabuli.

Příběh 4: *U druhé úlohy Břéťa navrhl řešení 2/0/1/7 (políčka shora dolů a zleva doprava). Nikdo neprotestoval, všichni souhlasili. Ptala jsem se, jestli to má někdo jinak. Timča se ptala, jestli by mohlo být i 1/1/1/7. Napsala jsem její řešení na tabuli a ostatní souhlasili. Ptala jsem se tedy dál, jestli má tedy tato úloha dvě řešení. Vítek navrhl, že by ještě vlastně šlo prohodit dvojku a nulu (sic) - 0/2/1/7. Na mou otázku, zda tedy toto jsou už všechna řešení, Pavel směle navrhl, že by ještě šlo 1 celá 5 (sic). Ostatní ale nesouhlasili, protože by musel vzít půl kamene. Ptala jsem se, jaké číslo by tady kámen a půl znamenal, Břéťa odpověděl, že 150. Pavel reagoval: „Jo, aha. To by muselo být v desítkách."*

V příběhu výše žáci narazili na specifika aditivních operací ve vyšších řádech. Algoritmus písemného sčítání se skládá z několika menších aditivních úloh, kde však sčítance nabývají pouze celočíselných hodnot. Žáci již dříve odhalili, že hodnota vyšší než 9 přesahuje do pozice vyššího řádu (Příběh 3). Zde žáci úspěšně odhalili tentýž princip v opačném směru, tedy že hodnota menší než 1 (nebo necelé číslo) zasahuje do pozice nižšího řádu.

Příběh 5: *U třetí úlohy Pavel navrhl 3/5/3. Honzík protestoval jako první, ale mírně nejistě. Navrhl, že by to mělo být 2/5/3. Pavel silně nesouhlasil, protože 3 + 2 je 5. Fanda odpověděl: „Jo, ale tam těch kamenů je víc jak deset." Děvčata začala souhlasně přikyvovat. Vítek vysvětloval, že ještě jedna stovka je v desítkách. Pavel stále nesouhlasil a ptal se, jestli může použít kalkulačku. Ověřil si na kalkulačce součet 363 a 254 a chvíli mlčky sledoval tabuli. Po chvíli kývl a komentoval, že už mu to dává smysl a že tam má být dvojka.*

Ještě o přestávce mě Břéťa prosil, zda bych mu pomohla. Řešil v jedné z prohlubujících úloh, zda může položit – 1 kámen. Snažila jsem se ho nasměrovat, aby určil, co se vlastně děje, když ve víceciferném čísle odčítá větší číslici od menší. Napsala jsem mu vedle úlohu 24 – 15. To vypočítat dokázal. Ptala jsem se, co dělal, když musel odečíst 5 od 4. Říkal, že to odečetl od 25. Napsala jsem mu tedy 324 – 215. Tam už použil algoritmus a pojmenoval, že to bere z těch desítek. S tímto jsem už Břéťu nechala, ať zkusí úlohu vyřešit. Úlohu po chvilce vyřešil a výsledek si ověřil s kalkulačkou. Jedna číslice mu stále nevycházela, protože si sice rozměnil tisíc na *stovky, ale zapomněl z tisíců ten kamínek vyškrtnout. Poukázala jsem na to, zareagoval: „Jo, no jo.“*

Příběh 5 ilustruje poznávací proces žáků při zkoumání přechodu přes desítku. Porozumění, které nejdřív vnáší několik málo žáků, je postupně přejímáno i jejich spolužáky. Žáci s přechodem přes desítku v aditivních úlohách pracovali už i dříve. Nyní se s ním však setkali v pro ně nestandardním kontextu, na základě kterého, domnívám se, získali o něco hlubší porozumění desítkové poziční soustavě.

Vstup 6

Tématem vstupu bylo pravidlo devítky jako jev doprovázející změnu dvojciferného čísla – pokud je ciferný součet zachován, rozdíl těchto dvou čísel je vždy dělitelný devíti. Cílem aktivity je opět obecněji prohlubování zkušeností žáků s vlastnostmi poziční soustavy. Žáci zde pracovali s algoritmem: *Vezmi si 1 až 9 kamenů a vytvoř libovolné dvouciferné číslo. Číslo si zapiš. Přesuň jeden kámen do jiného sloupce. Nové číslo si také zapiš. Najdi rozdíl těchto dvou čísel.* Žáci poměrně záhy zjistili, že všechny jejich pokusy ústí ve výsledek 9. Hledali pak tedy taková dvě čísla vyhovující podmínce, kterých rozdíl není 9, nebo měli za úkol dokázat, že takové číslo neexistuje. Někteří žáci projevili emergentní porozumění, tedy spíše na intuitivní úrovni, ale nedovedli svůj názor před třídou obhájit.

Příběh 6: *Honzík se snažil vysvětlit, proč to nejde: „Protože se jedno číslo zvětšuje a druhé zmenšuje.“ Na tabuli uvedl jako příklad 53 → 44 a ukazoval při tom na desítky a jednotky. Trochu se v tom ale zamotal a většinu času jsem sama tápala v tom, co se snaží říct. Timča řekla, že Honzíkův příklad nejspíš pochopila, ale vlastními slovy jev vysvětlit nakonec nedokázala.*

Domnívám se, že Příběh 6 poukazuje na zajímavý jev sociálního učení. Žáci si algoritmus nejdříve vyzkoušeli a získali několik izolovaných zkušeností s popisovaným jevem. Honzík z příběhu výše jevu svým způsobem rozumí, ale ne na takové úrovni, aby dokázal své porozumění formulovat slovně a být se svým vysvětlením spokojen. I přes toto nedokonalé vysvětlení však pomohl Timče pozvednout její porozumění alespoň na podobnou úroveň jako je to jeho.

Cíl byl podle mého zhodnocení naplněn částečně, tedy u některých žáků. Všichni však získali zkušenost s tímto jevem v desítkové soustavě.

Princip devítky a matematické kouzlo byly převzaty od autorů Hejného metody.

Vstup 7

Tématem bylo směňování řádů. Cílem bylo, aby žáci dokázali multiplikativně porovnávat řády desítkové soustavy. Vstup je zaměřený na jednu ze základních vlastností pozičních soustav, kterým jsou řády jako mocniny základu, pro něž platí, že libovolný řád vynásobený jiným řádem je rovněž řád téže soustavy a analogicky při dělení. Zjednodušeně řečeno – při násobení nebo dělení řádu řádem té dané soustavy, pouze přidávám nebo odebírám nulu.

Žáci pracovali ve skupinách s neuspořádanou množinou otázek typu: *Kolik desítek se vejde do stovky?* K dispozici měli Dienesovy kostky. Žáci byli s prací velmi rychle hotovi, pomůcku téměř nevyužívali a otázky si ani nepotřebovali organizovat. Ačkoliv jsem žáky motivovala ke spolupráci, práce se většinou chopili ti matematicky zdatnější. Některé skupiny se pak zabývaly dalšími úlohami, jako např. *Kolik otázek by přibylo, kdybychom přidali řád desetitisíců?"*

Domnívám se, že cíl vstupu nebyl naplněn. Práce ve skupinách nebyla vhodně ošetřena, což vedlo k tomu, že si většinou zdatní žáci zopakovali to, co již znají, a matematicky slabší žáci tak získali spíše informace, nikoliv zkušenosti.

Vstup 8

Tento vstup proběhl opět formou vyučovací hodiny. Tématem byly jiné číselné soustavy než je soustava desítková. Hodina byla opět vystavěna ve struktuře EUR. Cílem hodiny bylo ukázat žákům, že existují i jiné způsoby zápisu čísla než je desítková soustava, kterou používáme.

V úvodním kruhu žáci sdíleli, co vědí o číselných soustavách, resp. jaké znají, a byly předloženy ukázky jiných číselných soustav pozičních i nepozičních, jaké používaly různé starověké kultury. Fanda i věděl, že my pracujeme v desítkové soustavě a zmínil i existenci soustavy dvojkové. Ostatní žáci pak vyvodili, proč se naší soustavě říká desítková. Společně v kruhu jsme modelovali číslo v desítkové soustavě a v soustavě čtyřkové.

S pomůckou podobnou Dienesovým kostkám pro čtyřkovou soustavu a tabulkou jako na Kameny žáci sami zkoušeli zapisovat čísla ve čtyřkové soustavě. Někteří odhalili i 4. řád soustavy, o který si pak tabulku rozšířili. Následovalo společné shrnutí nalezených zápisů.

Cíl seznámit se s existencí jiných číselných soustav byl naplněn. Navíc všichni žáci v reflexi projevovali nadšení a hodnotili hodinu příznivě. Nepředpokládám, že by žáci na základě tohoto jednoho setkání se čtyřkovou soustavou ovládli práci v pozičních soustavách a alternativním základem, to ani nebylo cílem. Samotná radost žáků z poznávání něčeho nového mě však ujišťuje, že vnášet do výuky podobné aktivity má smysl.

7. Výstupní didaktický test

Po pedagogických intervencích byly ve 3. ročníku na ZŠ Hvozdík zadány výstupní didaktické testy. Cílem bylo získat doplňující porovnání úspěšnosti řešitelů před a po těchto intervencích. Vzhledem k malému testovanému vzorku a k mnoha psychologickým i jiným faktorům, které úspěšnost řešitelů také ovlivňují, však nelze toto testování považovat za reliabilní a jako takové je spíše doplněním k již předem získaným důkazům o učení.

Zásadním faktorem limitujícím hodnověrnost výsledků testů a jejich porovnání s testy předchozími je i nižší počet testovaných. V období mezi prvním testováním a výstupním testováním, tedy kolem pololetí, ze 3. ročníku na ZŠ Hvozdík odešli 3 žáci. Někteří další v té době absentovali kvůli déle trvající nemoci.

Mezi zadáním vstupních a výstupních testů nebyly testové úlohy diskutovány, řešitelům jejich testy nebyly vráceny k nahlédnutí správnosti jejich řešení, ani nebyly v hodinách matematiky zadávány úlohy podobné testovým – vyjma úloh standardních, tedy 1. a 6. úlohy testu Pozemská čísla. Ostatní výukové aktivity, které se týkaly pozičního zápisu, byly v době testování omezené na minimum a mimo intervenční vstupy jsme se v hodinách matematiky věnovali spíše jiným tématům.

Výstupní didaktické testy Pozemská čísla a Mimozemská čísla jsou zahrnuty v příloze.

7.1. Pozemská čísla

V testech byly upraveny úlohy tak, aby se pokud možno neměnilo zadání, náročnost ani typ úloh. Toto nebylo možné u úloh objevitelských, jakou je 2. úloha v Pozemském testu. Proto byla egyptská čísla nahrazena čísly čínskými (obr. 202). Čínská číselná soustava je také desítkovou nepoziční soustavou, ale oproti egyptským číslům využívá kromě znaků pro mocniny 10 také znaky jako kvantifikátory – číslice 1 až 9 (Joseph, 2011). Na příklad číslo 324 bychom v egyptské a mnohých dalších nepozičních číselných soustavách vyjádřili jako: *sto, sto, sto, deset, deset, jedna, jedna, jedna, jedna*. V čínské soustavě číslo 324 vyjádříme jako: *tři sto, dva deset, čtyři.* Čínská čísla jsou tedy úspornější, ale také vyspělejší, komplexnější systém, na základě čehož jsem očekávala vyšší náročnost úlohy, než byla úloha původní. Zadání bylo změněno i v 6. úloze, kde byl kontext řádů změněn z peněz na Dienesovy kostky.

2) V Číně se zapisuje čísla jinak než u nás. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Pomůže Ti tabulka jejich znaků.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5 zapisují jako 五 16 jako 十六 72 jako 七十二

Doplň, jak Číňané zapisují následující čísla:

______ zapisují jako 九十 38 zapisují jako ______________

______ zapisují jako 百三十八 237 zapisují jako ________________

Obrázek 202: nová 2. úloha

7.1.1. Zadání

Didaktický test byl zadán 11. března na 2. VH. Žáků bylo přítomno pouze 6.

Před samotným zadáním testu jsme si se třídou povídali o významu opětovného zadání. Během testů měli žáci tendenci svá řešení sdílet, ale tato tendence byla mnohem mírnější než u předchozích testů tohoto výzkumu. Ohledně zadání se žáci spíš nedoptávali. Případné dotazy směřovaly k významu znaku pro stovku ve 2. úloze nebo k formě zápisu řešení v 6. úloze. Dotazy se tedy týkaly výrazněji změněných úloh.

Břéťu jsem upozornila na zadání 4. úlohy. Břéťa řešil úlohu přeuspořádáním číslic stejně jako ve vstupním testu (str. 120). Na otázku, zda četl zadání, sebevědomě odpověděl, že nikoliv. Po přečtení zadání své odpovědi upravil.

První test byl odevzdán Matym po 27 minutách od zadání, další pak do 32 minut. Břéťa a Fanda odevzdali test s koncem hodiny, tedy 40 minut po zadání. Možnosti úlohy dokončit nevyužili.

7.1.2. Výstupy

Ve většině úloh se úspěšnost řešitelů dle očekávání zvýšila. Na diagramu níže je znázorněno porovnání relativní úspěšnosti řešitelů v jednotlivých úlohách. Relativní úspěšnost řešení úloh je vypočítána jako vážený součet řešitelů z kategorií *úspěšná řešení* (přiřazeny 3 body) a *z většiny úspěšná řešení* (přiřazeny 2 body) převedený na procento řešitelů v rámci třídy.

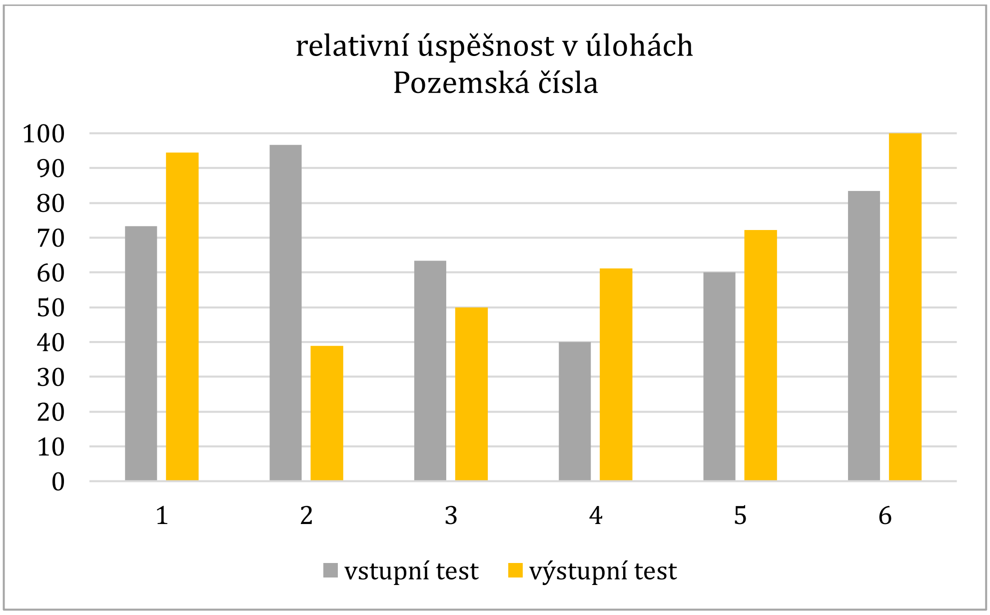
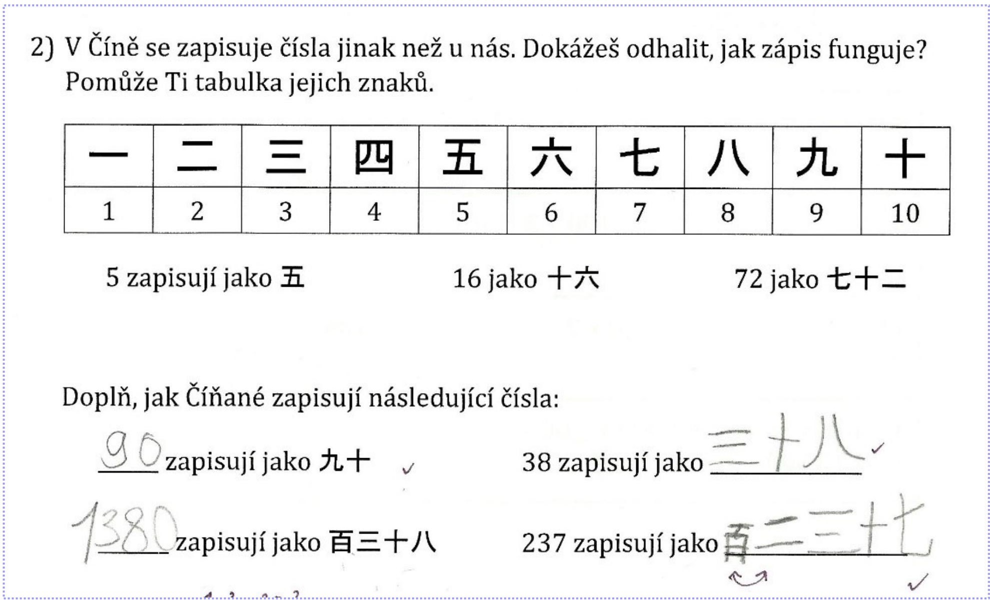


Diagram 70

V první úloze se změnil především poměr zcela a z většiny úspěšných řešení. Ve vstupním testu byli v této úloze z 10 řešitelů zcela úspěšní 4, z většiny úspěšných 5 a neúspěšný byl 1 řešitel – Břéťa, který byl neúspěšný v 3. a 4. podúloze. V testu výstupním bylo z 6 řešitelů zcela úspěšných 5, včetně Břéti, a z většiny úspěšný 1 řešitel – Fanda, který ve 4. podúloze doplnil číslo 25 700 namísto 25 701. Jelikož se jedná o standardní úlohu, je vyšší úspěšnost po výuce tématu čísel nad 100 očekávatelná.

Ve 2. úloze byla úspěšnost výrazně nižší, což odpovídá očekáváním o vyšší náročnosti úlohy. Úlohy ze vstupního a výstupního testu nelze přímo porovnávat, neboť čínská číselná soustava je na vyšší kognitivní úrovni než číselná soustava egyptská. Úloha navíc pracuje nejen s hloubkou zkušeností s desítkovou soustavou, ale také s dovedností analýzy a interpretace pozorovaných vzorců. Ve vstupním testu bylo z 10 řešitelů 9 zcela úspěšných a 1 řešitel z většiny úspěšný – Venda, který neodhalil význam stovkové číslice.

Ve výstupním testu byl z 6 řešitelů 1 řešitel zcela úspěšný (Maty), 2 z většiny úspěšní (Timča, Fanda), 1 neúspěšný (Břéťa) a 2 úlohu neřešili nebo téměř neřešili (Honzík, Pavel). Timča úspěšně odhalila význam číslice sto (obr. 203). Ve 3. podúloze zapsala 1380 namísto 138. Domnívám se, že jako kvantifikátor desítky četla číslici za, nikoliv před, tudíž by zapsané číslo četla jako *sto, tři, osmdesát* a na základě pozičního zápisu pak i trojce přiřadila význam počtu desítek, tedy zapsala výsledné číslo *sto třicet osmdesát*, které zapsané vypadá jako tisíc tři sta osmdesát. Ve 4. podúloze zopakovala chybu v pozici kvantifikátoru, tedy zapsala *sto dva, tři deset, sedm*. Fanda si s absencí příkladu pro stovkovou číslici poradil tím, že symbol spojil s jinou číslicí, která mu byla graficky nejblíže, tedy čínskou pětkou. I v tabulce číslic je vidět, že Fanda číslici pět upravoval, dokresloval (obr. 204). Ve 3. podúloze je ze škrtů vidět, že Fanda nad takovým řešením váhal. Při odevzdávání testu ještě slovně komentoval, že tam má být nakonec pětka. Číslo ve 3. podúloze tedy na základě pozičního zápisu zapsal jako 538. Stejným způsobem, tedy bez číslice stovky, pak zapsal i číslo ve 4. podúloze. Břéťa (obr. 205) v 1. podúloze doplnil číslo 910, tedy přepsal do desítkové soustavy jednotlivé číslice devět a deset. Ve 2. podúloze však číslo do čínské soustavy přeložil úspěšně. Ve 3. podúloze Břéťa zapsal číslo 31~~0~~8 a při odevzdání komentoval, že před tím má být ještě jedna číslice, jen neví jaká. Břéťa zde postupoval obdobně jako v 1. podúloze, ale navíc si uvědomil, že nula z čísla 10 je v pozičním zápisu nadbytečná a tuto číslici posléze škrtl. Znak pro stovku neodhalil. Ve 4. podúloze přepsal Břéťa pouze číslice do čínských, ale celé číslo ponechal v poziční desítkové soustavě. Pavel řešil pouze 1. podúlohu, kde čísla četl jako v klasické nepoziční soustavě, zapsal tedy 19 jako součet číslic 9 a 10. Zřejmě však pociťoval ohledně svého porozumění nejistotu a další podúlohy už neřešil. Honzík se během vypracovávání testu k 2. úloze často vracel a snažil se systém odhalit. Nakonec ji ponechal prázdnou.



2) V Číně se zapisuje čísla jinak než u nás. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje?
Pomůže Ti tabulka jejich znaků.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

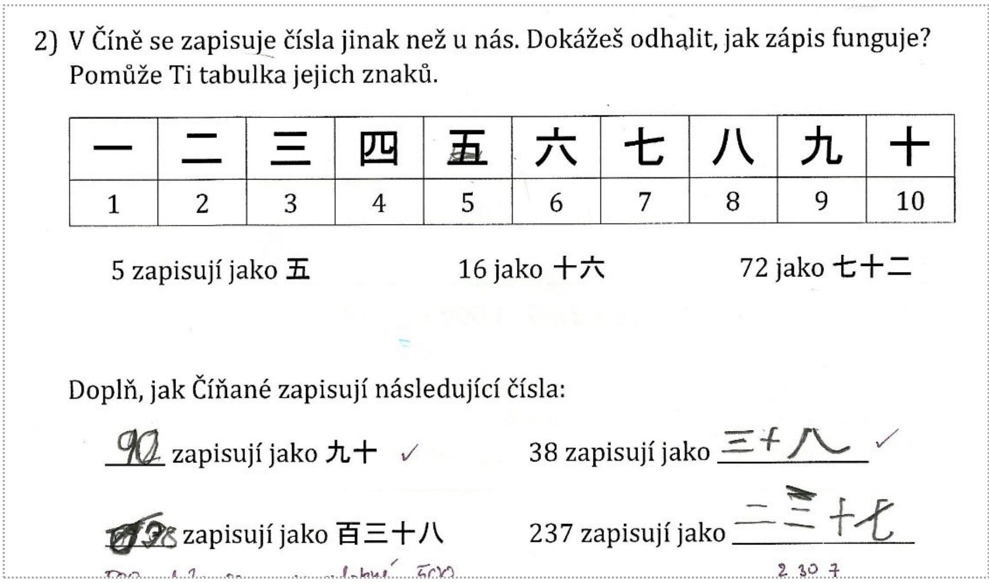
5 zapisují jako 五 16 jako 十六 72 jako 七十二

Doplň, jak Číňané zapisují následující čísla:

90 zapisují jako 九十 ✓ 38 zapisují jako 三十八 ✓

1380 zapisují jako 百三十八 237 zapisují jako 百二三十七 ✓

Obrázek 203: řešení Timči, 2. úloha



2) V Číně se zapisuje čísla jinak než u nás. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje?
Pomůže Ti tabulka jejich znaků.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5 zapisují jako 五 16 jako 十六 72 jako 七十二

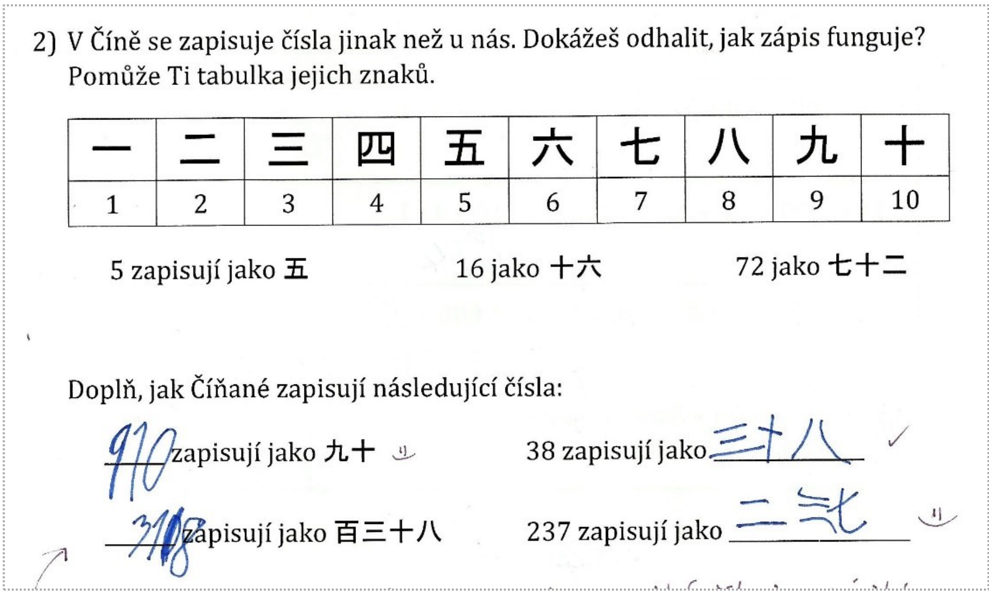
Doplň, jak Číňané zapisují následující čísla:

90 zapisují jako 九十 ✓ 38 zapisují jako 三十八 ✓

~~1~~38 zapisují jako 百三十八 237 zapisují jako 二三十七

2 30 7

Obrázek 204: řešení Fandy, 2. úloha



2) V Číně se zapisuje čísla jinak než u nás. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje?
Pomůže Ti tabulka jejich znaků.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5 zapisují jako 五 16 jako 十六 72 jako 七十二

Doplň, jak Číňané zapisují následující čísla:

910 zapisují jako 九十 38 zapisují jako 三十八

3108 zapisují jako 百三十八 237 zapisují jako 二三七

Obrázek 205: řešení Břéti, 2. úloha

Třetí podúloha měla v součtu nižší řešitelskou úspěšnost než ve vstupním testu. Zde však nelze výsledek interpretovat pouze na základě vypočtené relativní úspěšnosti. Ve vstupním testu byli z 10 řešitelů v úloze zcela úspěšní 3, z většiny úspěšných bylo 5, přičemž všichni úlohu řešili. Zde ve výstupním testu byli z 6 řešitelů zcela úspěšní 3. Timča úlohu neřešila a Pavel neřešil druhou polovinu úlohy, přičemž v obou řešených podúlohách byl úspěšný. Pouze Břéťa tedy celou úlohu zároveň řešil a nebyl úspěšný. Břéťa v úloze pro získání nejvyššího čísla vyndal číslici s nejnižší hodnotou a naopak. Tato strategie byla v 1. polovině úlohy úspěšná, nikoliv však v druhé. Využití této strategie napovídá o nepozičním vnímání číslicových karet, tedy o uvážení celkového součtu, nikoliv pozic číslic. Bohužel však není možné Břéťův výsledek porovnat s jeho řešením vstupního testu, neboť v něm Břéťa úlohu řešil s chybným porozuměním zadání.

V posledních třech úlohách se úspěšnost řešitelů mírně navýšila. Ve 4. úloze byli původně z 10 řešitelů zcela úspěšní 2, z většiny úspěšní 3, neúspěšný 1 (Honzík) a úlohu neřešil 1 (Fanda). Ve výstupním testu byli z 6 řešitelů zcela úspěšní 3, včetně Honzíka, z většiny úspěšný 1 (Timča), neúspěšný 1 (Pavel) a úlohu neřešil 1 (Fanda). Zvýšila se zejména úspěšnost v posledních podúlohách, tedy ve vyšším číselném oboru.

V 5. úloze byly podúlohy typově zachovány, změnila se pouze jednotlivá čísla a řazení. Pouze 7. podúloha byla pozměněna na o něco vyšší náročnost. V obou případech je správnou odpovědí *nelze řešit*, ve vstupním testu však mohlo být číslo vpravo větší, rovno nebo menší, ve výstupním testu pouze rovno nebo větší. V 5. úloze bylo ve vstupním testu z 10 řešitelů 9 z většiny úspěšných a 1 úlohu neřešil (Kajka). Níže přikládám přehledovou tabulku chyb vyskytlých v 5. úloze. Podúlohy jsou řazeny podle vstupního testu. Žákovská řešení ze vstupního testu, byla-li odlišná, jsou uvedena v závorce. Maty a Pavel, kteří vstupní test neřešili, jsou odděleni čarou. Jak je patrno z tabulky, celkově byli žáci v úloze úspěšnější. V chybách se opět projevily dva nejčastější vzorce, tedy chyba pouze v 6. podúloze a chyba pouze v 2. a 7. podúloze. Honzík byl v úloze zcela úspěšný, což byli ve vstupním testu z celkového počtu 45 řešitelů pouze 3 řešitelé a všichni z 5. ročníku. Úloha, jak jsem již popisovala v podkapitole 5.2.1, podle mého názoru ze všech testových úloh nejlépe zkoumá porozumění *place value*. Zásadní překážkou pro vyvozování závěrů ze srovnání výsledků v úloze před a po pedagogických intervencích je však velmi malý průnik testovaných žáků v obou didaktických testech, vstupním i výstupním. Domnívám se, že tato úloha by při větším vzorku testovaných mohla přinést zajímavá a reliabilní kvantitativní data.

	42 □ 24	2●8 □ 2●8	501 □ 510	3● □ 40	21●3 □ 23●1	●4● □ 13●	16● □ ●69	9●● □ 1 000	●●●● □ ●●●	Σ
Břéťa		=					= (n)	(n)	(n)	**8**
Fanda		(=)				X (=)	(=)			**7**
Honzík		(=)				(>)				**6**
Timča		=					<			**6**
Maty							<			**6**
Pavel		<					<			**5**
# chyb	2	11	1	2	4	6	9	3	5	

Tabulka 5: chyby ve 2. úloze, srovnání

V 6. úloze bylo z 10 řešitelů vstupního testu zcela úspěšných 7 řešitelů, z většiny úspěšných 2 řešitelé a 1 řešitel byl zařazen do kategorie *jiné* (Marek). Z 6 řešitelů výstupního testu bylo všech 6 v úloze zcela úspěšných. Fanda si zvolil časově náročný způsob zápisu řešení a úlohu nestihl dokončit. Po odevzdání jsem se jej doptala, a ačkoliv už své řešení nechtěl dokreslovat, ústně mi sdělil, kolik kterých kostek by použil. Jeho řešení bylo úspěšné. U standardní úlohy opět není překvapivé, že se úspěšnost řešitelů po probrání vyučovací látky zvýšila. Poslední podúloha pracovala s řádem desetitisíců, v nabízených modelech však desetitisíce záměrně nebyly. Model pro desetitisíce vytvořil a použil pouze Honzík. Jeho desetitisíce měly podobu velké krychle, nikoliv *tyčinky*, což je vzhledem k chybějícím zkušenostem s modely vyšších řádů zcela pochopitelné. Ostatní řešitelé použili příslušný počet tisícových krychlí.

Výše popsané výstupy z Pozemského testu dle mého názoru mohou naznačovat prospěšnost pedagogických intervencí pro porozumění pozičnímu zápisu čísla. Je však potřeba je nazírat kriticky, a to nejen z důvodu malého vzorku testovaných, ale také kvůli nemožnosti zmapování vlivů, které na porozumění pozičnímu zápisu mohly mít jednotlivé aktivity intervenčních vstupů, ale také jiné úlohy, např. úlohy standardní, které se v hodinách, ačkoliv v omezené míře, objevovaly.

7.2. Mimozemská čísla

Pro didaktický test Mimozemská čísla byly všechny úlohy typově zachovány, ale jako poziční soustava s alternativním základem byla využita soustava osmičková. Jako sémantická motivace posloužila fiktivní planeta Okta. V osmičkové soustavě vzhledem k vyšší hodnotě základu předpokládám o něco vyšší náročnost počtů. Řešitelům byly k testu poskytnuty kalkulačky, aby se nemuseli zdržovat aritmetickými výpočty, ale měli kapacitu operační paměti na logickou podstatu úloh.

7.1.1. Zadání

Didaktický test byl zadán 13. března během 4. VH. Žáků bylo přítomno 7.

Motivační fázi jsem výrazně podcenila. Namísto si nejdříve s žáky povídat o významu závěrečného testu jsem jim jen připomenula pokyny a rozdala testy. Žáci navíc před touto hodinou měli náročnou dvouhodinovku českého jazyka. Domnívám se, že žáci byli z testování unavení a už v tom neviděli smysl. To jistě mohlo do značné míry ovlivnit výsledky. Během vypracovávání testů byli žáci velmi neposední, povídali si mezi sebou o nesouvisejících tématech. Velmi často se nechávali rozptýlit. S fyzickými kalkulačkami žáci doposud neměli příliš zkušeností, nejspíše je i proto fascinovaly a ze začátku věnovali větší pozornost zkoumání možností kalkulačky než didaktickému testu. Zároveň se domnívám, že ačkoliv tato třída běžně přijímá výzvy s nadšením, opakovaný test pro ně již nebyl lákavý. Navíc tato třída už po prvním setkání s testem Mimozemská čísla projevovala frustraci a zklamání z toho, že to pro ně bylo těžké (sic). Se dvěma nejvíce vyrušujícími žáky jsem krátce a upřímně sdílela, proč je pro mě tento test důležitý. Výrazně to pomohlo v jejich zapojení. Zpětně hodnotím absenci úvodní motivační části jako závažný nedostatek, který by byl mohl příznivě ovlivnit atmosféru během vypracovávání testu a skrze to i výsledky žáků.

První test byl odevzdán Pavlem 30 minut po začátku vypracovávání, zbylé pak do 40 minut po začátku vypracovávání, tedy do konce vyučovací hodiny.

7.1.2. Výstupy

Vzhledem k výše popsaným faktorům není statistické srovnání vypovídající. Zaměřím se tedy spíše na zajímavé momenty v řešeních jednotlivých žáků. Přesto pro názornost přikládám diagram porovnávající úspěšnost řešitelů v jednotlivých úlohách. První řádek úlohy vždy uvádí výsledky výstupního testu, druhý testu vstupního. Vstupní i výstupní test Mimozemská čísla vypracovávalo 7 řešitelů, z čehož se obou testů účastnilo 5 řešitelů: Břéťa, Fanda, Honzík, Maty a Vítek. Pouze výstupní test vypracovávali Pavel a Timča, z čehož Pavel vstupní test obdržel, ale musel v průběhu vypracovávání odejít.

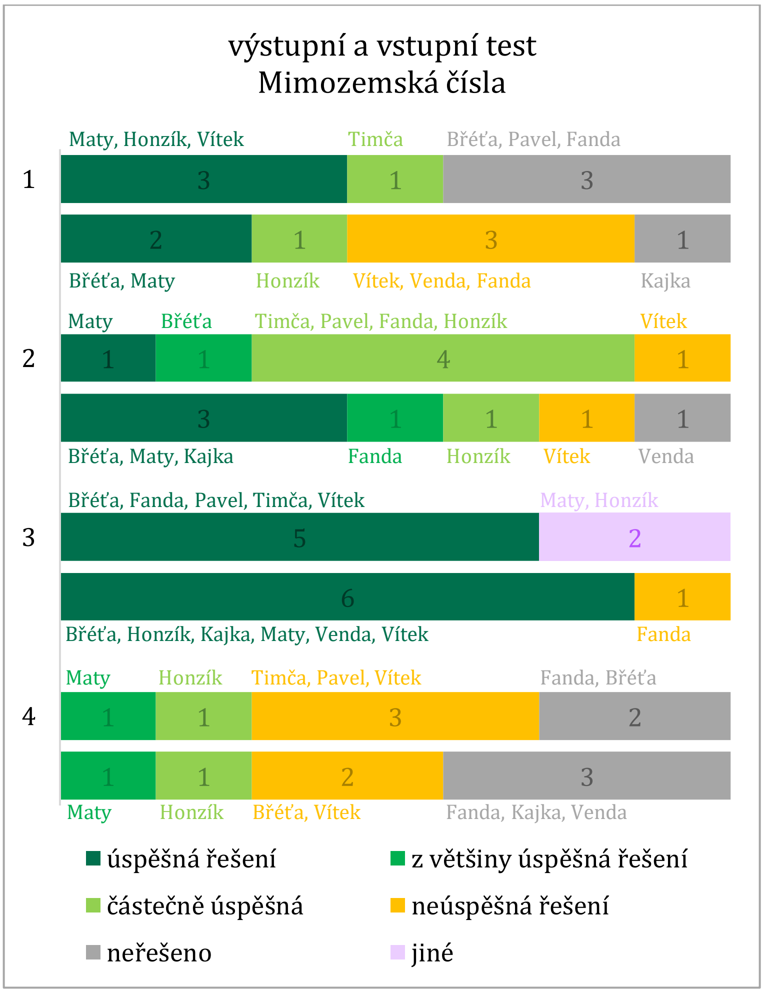
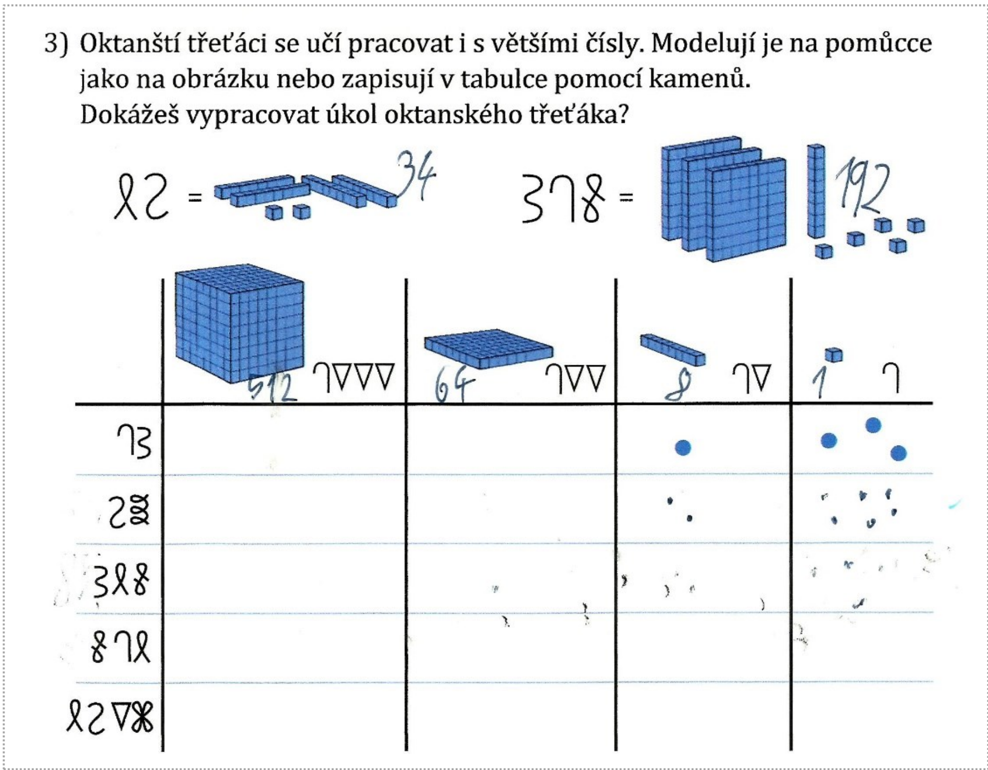


Diagram 71

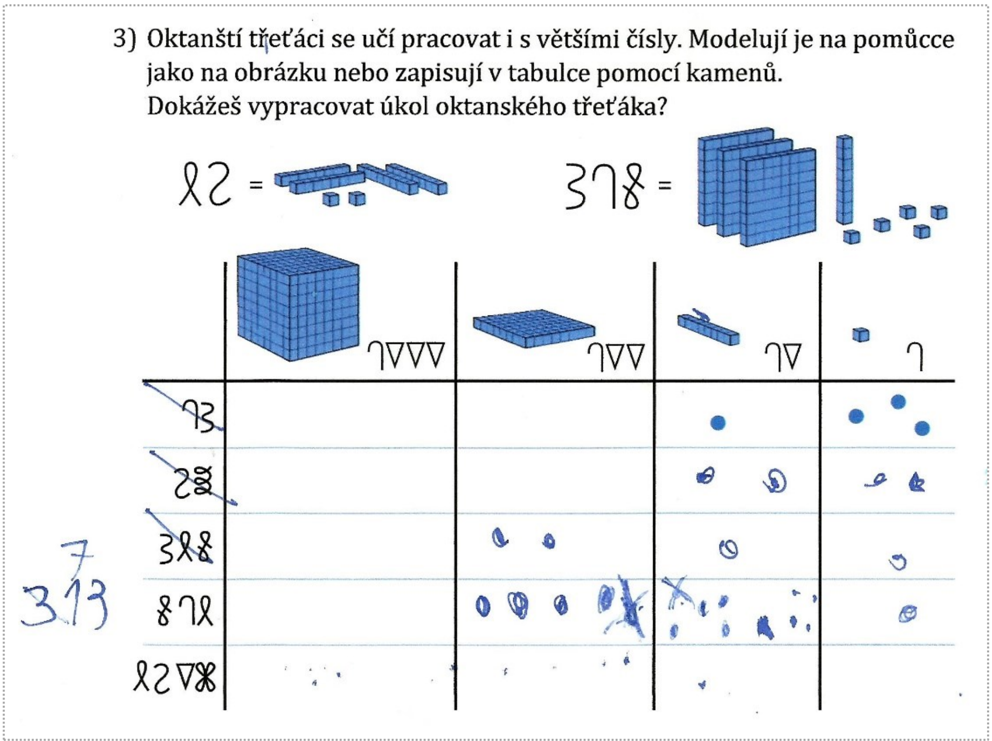
Úspěšnost se zvýšila pouze v 1. úloze, zároveň se však zvýšil i počet řešitelů, kteří úlohu vynechali. V případě Vítka a Honzíka je pozorováno zlepšení. Vzhledem k tomu, že horší výsledek výstupního testu se projevuje jako neřešení úlohy (např. Břéťa) předpokládám, že nejvýznamnějším faktorem majícím vliv na výsledky je motivovanost řešitelů. Je také možné, že žáci předem vyhodnotili neúspěch a úlohou se proto ani nezabývali. Vliv mohla mít i vyšší tvarová náročnost oktanských číslic oproti číslicím hexanským.

Ve 2. úloze se úspěšnost snížila. Maty byl v obou případech zcela úspěšný, Břéťa ve výstupním testu vynechal 4. podúlohu, ale ve zbylých podúlohách byl úspěšný. Přibylo částečně úspěšných řešitelů, tedy těch, kteří odhalili zápis čísla $10_{(8)}$. Timča a Pavel využili pro 3. a 4. podúlohu desítkovou soustavu. Nedostatkem výstupní verze testu je, že ve 3. podúloze je znázorněno číslo, které lze zapsat s nabízenými číslicemi i v desítkové soustavě, tudíž řešení žáků neobsahují alternativní strategie, jak si s nedostatkem číslic poradit. Fakt, že bylo možné bez obtíží použít desítkovou soustavu, mohl také ovlivnit úspěšnost v úlohách. Fanda ze zápisu dvouciferných čísel na domečcích v 1. úloze odvodil, že jsou hexanská čísla nad 8 vždy o 2 větší. Fandovo řešení celé 2. úlohy odpovídá tomuto porozumění. Honzík ve 3. a 4. podúloze doplnil zápis 32 a zakreslil $19_{(10)}$ objektů. Toto jeho řešení zcela odpovídá zápisu v šestkové soustavě. Domnívám se, že si mohl Honzík vybavit hexanská čísla a na jejich základě tuto úlohu řešit. Řešení Vítka zcela odpovídá desítkové soustavě, přičemž neexistující číslice Vítek v této i ve 4. úloze znázorňuje počtem zakreslených čtverečků.

Ve 3. úloze je vypočtena úspěšnost srovnatelná. Domnívám se však, že příčina neúspěchu Matyho a Honzíka vychází paradoxně z hlubšího ponoření se do osmičkové soustavy a zároveň neporozumění zadání. Maty si ke každému řádu dopsal jeho hodnotu vyjádřenou v desítkové soustavě. V 1. podúloze byl úspěšný. Ve druhé podúloze na řádek doplnil číslo $85_{(10)}$, které v tomto řádku i úspěšně vymodeloval v osmičkové soustavě. Dál v úloze nepokračoval. Honzík v 1. podúloze vymodeloval zapsané číslo $26_{(8)}$ v řádech desítkové soustavy, tedy 2 desítky a 2 jednotky. Připouštím, že Honzíkova řešení dalších podúloh nejsou náhodná, avšak ani Honzík je na zpětné dotázání po několika dnech nebyl s to interpretovat.

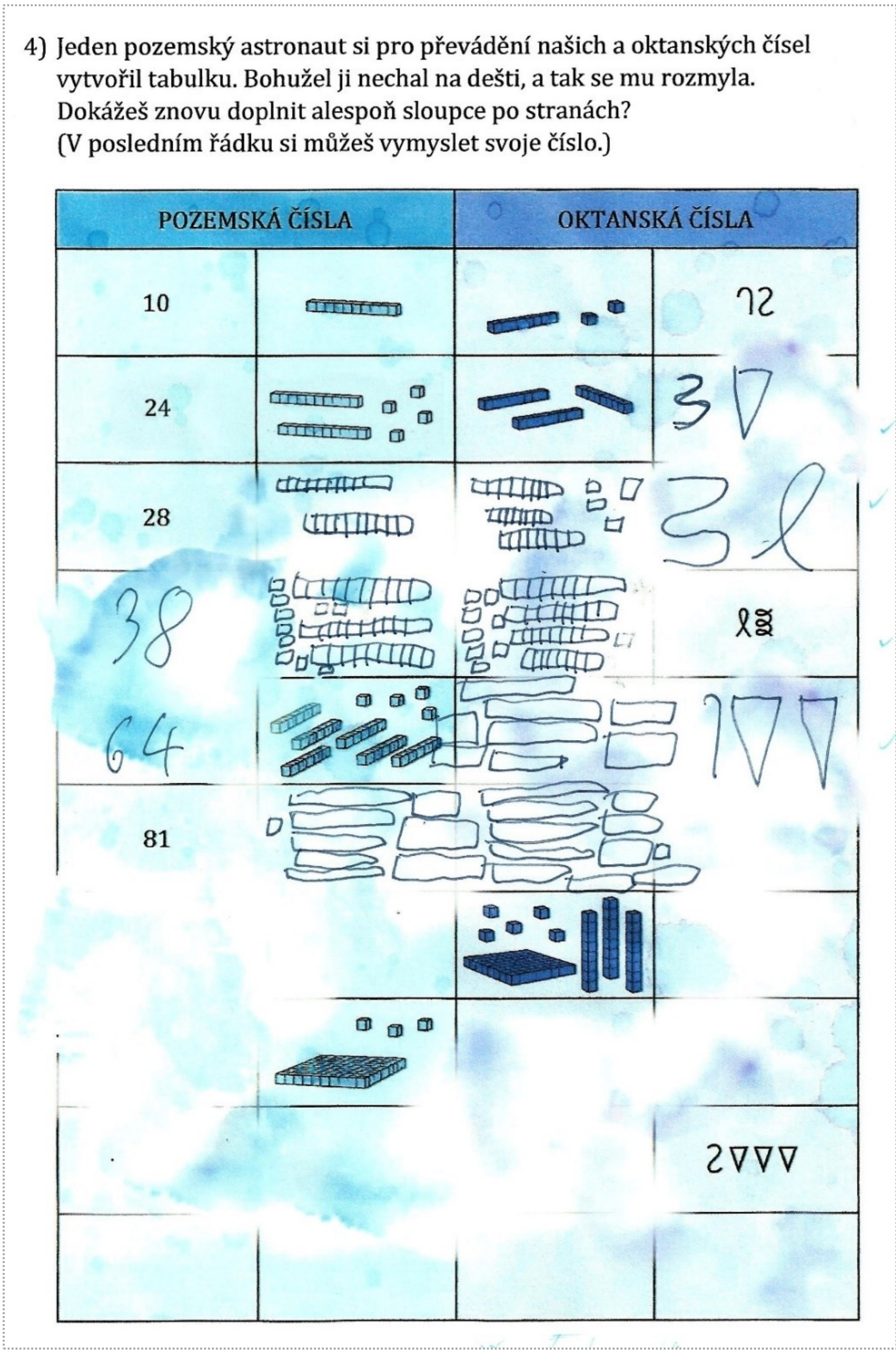


Obrázek 206: řešení Matyho, 3. úloha



Obrázek 207: řešení Honzíka, 3. úloha

Ve 4. úloze byla úspěšnost téměř totožná jako v případě vstupního testu. Maty stejně jako v předchozím testu úspěšně vyřešil první 4 podúlohy. Na rozdíl od svého předchozího testu, kde modeloval čísla volnou kvantitou, zde použil tyčinky a krychličky. U čísla $64_{(10)}$ Maty úspěšně zapsal číslo jako $100_{(8)}$. Oproti dřívějšímu testu však zde Maty pokračoval i další podúlohou, kde číslo $81_{(10)}$ vymodeloval v obou prostředních sloupcích v desítkové soustavě. Číslo oktansky nezapsal. Tímto Maty vyvrátil můj předchozí předpoklad, že by byl úlohu ve vstupním testu dokázal řešit i dál, kdyby měl dostatek času. Výstupní test Maty odevzdal před koncem vyučovací hodiny. Honzík úspěšně vyřešil první dvě podúlohy, aniž by zakresloval modely z Dienesových kostek. V úloze nepokračoval a test s koncem hodiny odevzdal. Vítek, Pavel a Timča řešili 4. úlohu pouze v desítkové soustavě, přičemž Vítek nahrazoval neexistující číslice počtem čtverečků, Pavel pro osmičku a devítku použil dvojznaky 10 a 11, Timča číslici vynechala.



Obrázek 208: řešení Matyho, 4. úloha

Řešení vstupních a výstupních testů mají jisté odlišnosti, jako např. míra řešenosti jednotlivých úloh. V celkovém pohledu jsou však výsledky srovnatelné. U žádného z žáků nepozoruji zásadní posun v míře úspěšnosti, ačkoliv se jejich úspěšnost může v jednotlivých úlohách mírně lišit, a to v obou směrech. Výsledky testu nepovažuji za hodnověrné.

8. Rozhovory s učiteli

V zájmu bližšího porozumění výsledkům testů a jejich návaznosti na to, jakým způsobem je třída vedená, byly provedeny polostrukturované rozhovory s vyučujícími matematiky v testovaných třídách. Důležité pro mě bylo nejen zjistit názor učitele na téma pozičního zápisu a jeho didaktické transformace, ale i nahlédnout na obecný přístup k vedení třídy, práci s chybou a klima v hodinách matematiky. Jelikož se v druhé části jedná spíše o pocitové, nikoliv měřitelné parametry, je potřeba i interpretaci rozhovorů a jejich následné porovnání s řešeními té dané třídy nahlížet spíše orientačně. Pro lepší náhled celkového přístupu školy byly navíc rozhovory provedeny i s vyučujícími v 1. ročníku. Ve 3. a 5. ročníku učím já, proto rozhovory k těmto třídám chybí.

Konkrétní otázky polostrukturovaného rozhovoru i přepisy[8] všech rozhovorů jsou zahrnuty v příloze. Níže v bodech předkládám výtah toho, co jsem si kladla za cíl během rozhovorů zjistit:

1) Jakou má učitel/ka osobní zkušenost s tématem pozičního zápisu, *place value* a řádů z dob školní docházky nebo ze své přípravy na povolání?
2) S jakými modely čísla pracují žáci v hodinách a jaké chyby v zápisu čísla se u nich objevují?
3) Klade učitel/ka důraz na řády a jejich znázorňování? Věnuje speciální pozornost přechodu přes základ?
4) Považuje za důležité věnovat se se žáky i jiným číselným soustavám než je naše desítková poziční soustava? Pokud ano, s jakým cílem?
5) Má učitel/ka pocit, že má k vyučování tohoto tématu dostatečnou oporu v učebnicích, dostupných pomůckách nebo jiných zdrojích?
6) Je z osobního pohledu učitele/ky téma pozičního zápisu, případně i číselných soustav, důležité?

[8] Přepisy byly z původních nahrávek vygenerovány neuronovou sítí Rev AI a následně doupraveny.

8.1. paní učitelka z 1.A

8.1.1. Rozhovor

Paní učitelka z 1.A si téma asociuje zejména s číselnou řadou a taky s propojením slovy čteného a číslicemi zapsaného čísla. Paní učitelka je aprobovaná na vyšší ročníky ZŠ a první třídu učí poprvé. Sama pociťuje nejistotu v oblasti didaktiky matematiky, což se projevovalo i během rozhovoru.

V hodinách matematiky žáci kromě klasického zápisu čísla arabskými číslicemi v desítkové soustavě používají i znázorňování kvantity kreslením i modelováním z reálných objektů. Často používají také čárkování. Paní učitelka hodnotí jako přínosné předkládat i modely vázané kvantity, např. perlový materiál (Montessori) nebo Dienesovy kostky, které pro budoucí práci s desítkovou soustavou velmi pochvaluje. Jako časté chyby v zápisu uvádí zejména zrcadlové překlápění číslic. Se záměnou pozic se zatím nesetkala. Uvádí také, že mnozí její žáci dokážou uvést číselnou řadu i ve vysokých číslech, která by však nedokázali zapsat. Uvádí také, že někteří žáci mají stále problém s vyjádřením kvantity zapsaného čísla.

Paní učitelka klade důraz na přechod přes desítku. Její žáci si při tom pomáhají např. krychličkami, které do desítky skládají. Desítku vnímá jako ucelenou. Klade důraz na to, aby žáci dobře ovládli spoje se sčítáním k desítce nebo se sčítáním od deseti. Takovéto úlohy jim vědomě předkládá k natrénování. V úlohách s přechodem přes desítku na přechod upozorňuje.

V budoucnu paní učitelka plánuje pracovat s jinými soustavami, např. s římskými čísly. Považuje za důležité, aby se s tím žáci časem seznámili. V první třídě jako příklad výuky alternativní číselné soustavy uvádí hodiny, tedy šedesátkovou soustavu.

Paní učitelka často vnáší do výuky i jiné učební materiály a pomůcky, učebnice jí spíše nevyhovují. Nezmiňuje však v tomto případě téma pozičního zápisu, ale výuku obecně.

Pro paní učitelku z 1.A je klíčové, aby žáci tématu především rozuměli. Opět je její tvrzení obecné a netýká se pouze pozičního zápisu. Uvádí i zkušenosti ze své školní docházky.

8.1.2. Interpretace

Z mého pozorování si je paní učitelka při výuce matematiky velmi nejistá. Často se radí s kolegyněmi a hledá oporu v různých metodách a jiných zdrojích. Vychází ve výuce zejména ze své zkušenosti s klasickou výukou a nabízí k tomu žákům oporu v pomůckách, propojuje počty s pohybem, skupinovými aktivitami a s námětovou hrou. Přístup paní učitelky je z mého pohledu do značné míry instruktivní, dbá také na pamětné zvládnutí a rychlost počítání. Její výuka je také podle mého pozorování silně individuální. Paní učitelka se snaží každému žákovi nabídnout tu úroveň, na které může zažít úspěch.

Třída paní učitelky nebyla testovaná, ale rozhovor pro mě posloužil jako izolovaný model učitelského porozumění tématu. Z rozhovoru jsem vybrala některé klíčové prvky její výuky, o kterých se domnívám, že mohou ovlivnit žákovské porozumění pozičnímu zápisu:

- Důraz na desítku: Rozklady čísel při přechodu přes základ mohou negativně ovlivnit žákovskou úspěšnost v těchto úlohách, ale obecně vydělování desítky jako celku může, domnívám se, podpořit vnímání desítky jako celku pozitivně ovlivnit porozumění pozičního zápisu čísla a řádům.

- Práce s vázanou kvantitou: Vázaná kvantita, dle mého názoru dobře reprezentuje a zastupuje číslice, které jsou v pozičním zápisu čísla klíčové. Dienesovy kostky zas poskytují kvantitativní model řádů i intuitivní vizualizaci přechodu přes základ a mocniny základu.

- Záměna pojmů číslice a číslo: Paní učitelka v rozhovoru tyto pojmy zaměňovala. Domnívám se, že to může mít vliv na pozdější práci žáků s významem číslic v zápisu čísla a negativně ovlivnit porozumění hodnotě pozice (*place value*).

- Důraz na rychlost a pamětné ovládnutí: Domnívám se, že toto může negativně ovlivnit žákovu představu o číslech, jejich kvantitách a posléze i představě o velikosti řádů, což následně vede např. k chybám v písemných algoritmech aritmetických operací.

8.2. paní učitelka z 1.B

8.2.1. Rozhovor

Paní učitelka z 1.B asociuje téma pozičního zápisu s posloupností čísel, tedy jak jdou čísla za sebou i u trojciferných, čtyřciferných a výše. Z dob vlastní školní docházky si paní učitelka vybavuje, že se učili pozice jednotek, desítek, stovek apod. pojmenovávat. Konkrétně uvádí i rozvinutý zápis čísla. V rámci pregraduální přípravy považuje prostor věnovaný tomuto tématu za nedostatečný.

Žáci v jejích hodinách pracují s různými modely čísla, např. s vláčky, Dienesovými kostkami (tyčinky a krychličky), spojovatelnými kostkami a různou formou volné kvantity. Ze začátku žáci používali čárečkový zápis čísel. Pro paní učitelku bylo důležité na zápis číslicemi nespěchat, ve větší míře tedy začali číslice používat při práci s čísly většími než dest, kde už byly čárky nepřehledné. Jako chyby v zápisu paní učitelka uvádí zrcadlové převrácení nejen číslic, ale i dvojciferných čísel jako např. 10. S jistotou vyvrací, že by žáci dokázali zapsat číslo číslicemi, ale nedokázali znázornit jeho kvantitu.

Paní učitelka považuje za důležité začínat s propedeutikou řádů už v prvním ročníku. Čísla větší než deset žáci modelují z Dienesových kostek, nebo číslicemi z Montessori číselných karet, kde se jednotky pokládají na pozici jednotek v desítkách. Při sčítání používají tabulky, kde je desítka oddělená čarou, aby si žáci uvědomovali, co desítku přechází. Tyto způsoby, kde je možné si číslo dopočítat po jednom a zároveň je desítka vizuálně oddělená, paní učitelka volí záměrně, neboť si uvědomuje, že je pro žáky velmi náročné si přechod uvědomovat. Také uvádí, že zkoušela do výuky vnést i klasický rozklad čísel při přechodu přes desítku, ale žáci tuto metodu nepřijali – jejími slovy nepochopili, proč by si to číslo měli rozdělit. Podle paní učitelky je takovýto postup mentálně náročný, neboť obsahuje mnoho operací najednou.

Jiné soustavy paní učitelka považuje za zajímavé a přínosné zpestření výuky, které rozvíjí matematické myšlení. Zároveň je ale nepovažuje za nezbytné, neboť ve většině oborů se pak jedinci s jinými číselnými soustavami spíše nesetkávají.

V učebnicích, které paní učitelka používá, jsou čísla znázorňována pomocí Dienesových kostek. Toto znázornění přijde paní učitelce dostatečné a srozumitelné, zároveň jí však přijde důležité vnášet i jiné modely čísla s vydělením desítek a jednotek, neboť je učebnice neobsahuje.

Porozumění tématu žáky je pro paní učitelku velmi důležité. Zmiňuje, že algoritmy aritmetických operací lze ovládnout i pamětně bez porozumění, ale podle ní se pak vytrácí představa o čísle, a tudíž žáci nemusí odhalit chybu ve výpočtu, tedy nemají dostatečné zkušenosti pro kvalitní odhady.

8.2.2. Interpretace

Paní učitelka z 1.B již od prvního ročníku klade důraz na vydělování řádů. Pracuje s různými pomůckami, zároveň podle mého pozorování dbá na to, aby žáci používaným modelům rozuměli. Nenutí jim něco, co žáci nepřijali za své, ale volbou pomůcek jim desítku jako něco uceleného dlouhodobě formuje. Podle mého pozorování je paní učitelka ve výuce spíše mediátorem, který nabízí podněty a žáky vede.

Zaujalo mě, že někteří žáci v 1.B překlápějí zrcadlově celou desítku. Ve své výuce se setkávám pouze s překlápěním jednotlivých číslic. Překlápění celých dvojciferných čísel je pro mě znakem, že tito žáci pravděpodobně vnímají zapsané číslo jako jeden znak, izolovaný model. Ve vedlejší třídě paní učitelka často upozorňuje na význam jednotlivých číslic v dvojciferném čísle a možná proto se se zrcadlovým zápisem celého čísla nesetkává. Samozřejmě to také může být velmi pravděpodobně pouze složením konkrétních žáků ve třídě.

Pozoruji i jistou souvislost mezi zdrženlivostí se zavedením číslic ve prospěch čárečkování a naprostou jistotou, s jakou paní učitelka uvádí, že žáci čísla, která zapisují číslicemi, i dokážou znázornit počtem. V rámci této práce je to okrajové téma, ale zaujalo mě to zejména ve srovnání s paralelní třídou, kde byly číslice vneseny brzy a někteří žáci s vyjadřováním jejich hodnoty mají problém. Opět se však může jednat o rozdíly mezi skladbou konkrétních žáků ve třídě.

Z rozhovoru opět vybírám klíčové prvky, o kterých se domnívám, že mohou mít vliv na porozumění pozičnímu zápisu:

- <u>Důraz na desítku</u>: Důraz na desítku je v této třídě méně intenzivní, za to důkladný. Žáci pro přechod přes desítku využívají i vlastní strategie, zároveň jsou však do výuky přinášeny takové materiály, aby byla desítka v počtech patrná, ačkoliv ve výpočtech nemusí figurovat přímo.

- Práce s Dienesovými kostkami: Dienesovy kostky poskytují kvantitativní model řádů i intuitivní vizualizaci přechodu přes základ a mocniny základu. Přispívají představě o velikosti čísla.
- Práce s číselnými kartami: Skládání čísla z číslicových karet je intuitivní, žák se může orientovat pouze podle známé podoby zapsaného čísla, aniž by přemýšlel o jeho rozkladu. Zároveň však karty jednotlivé řády obsahují a žák s nimi opakovaně pracuje mentálně i manuálně, čímž si je upevňuje.

8.3. paní učitelka z 2. ročníku

8.3.1. Rozhovor

Paní učitelka z 2. ročníku měla ze začátku rozhovoru silnou asociaci tématu pozičního zápisu s řády v desítkové soustavě. Za dob její školní docházky je pořád opakovali a nacvičovali. V době její přípravy na povolání (střední pedagogická škola) specificky tomuto tématu nebyl věnován prostor.

V hodinách kromě klasického zápisu čísla arabskými číslicemi v desítkové soustavě paní učitelka často využívá různé kvantitativní modely – většinou daný počet konkrétních objektů (volná kvantita). Obecně, nejen v matematice, je pro paní učitelku velmi důležité propojovat výuková témata s co nejvíce modely a s reálným světem. Její žáci podle jejich slov často chybují v tom, že si při sčítání a odčítání pod sebou zarovnají čísla doleva namísto, aby si dali jednotky pod jednotky, desítky pod desítky atd. Věnuje tomu v hodinách podle jejich slov dost prostoru, ale stále v tom mnozí žáci chybují. Žáky učí pracovat s chybou. Je pro ni důležité, aby si chybu sami našli a aby se jí nebáli.

Řády jsou pro paní učitelku klíčovým tématem v aritmetice. Snaží se, aby žáci čísla co nejvíce modelovali a aby je uměli přečíst. Ve svém vyjadřování klade důraz i na pojmenování jednotlivých pozic. Přechod přes základ je pro ni klíčovým místem v porozumění žáka. Přiznává, že někteří její žáci mají s úlohami, kde se přechod přes základ vyskytuje, stále velký problém a je to podle ní nedostatečným ovládnutím rozkladů čísel do celé desítky a zbytku.

Opora v učebnicích a pracovních sešitech je podle ní naprosto nedostatečná. Paní učitelka si ve velké míře dohledává materiály na internetu a ty pak hojně vnáší do výuky. Dle jejich slov jí pomáhají také pomůcky, které ve škole má, a obecněji také to, že má v malé třídě prostor věnovat se všem dětem a nabídnout jim organizačně to, co pro svůj rozvoj potřebují.

Pro paní učitelku je důležité, aby její žáci *place value* poznaly a porozuměly mu. Považuje za užitečné žákům představit i jiné číselné soustavy, z těch cizích nejen římská čísla. Klade přitom důraz na uvědomění si jiných kultur. Na rozdíl mezi poziční a nepoziční soustavou plánuje poukazovat, ale nikoliv nutně tímto pojmenováním.

8.3.2. Interpretace

Z mého osobního pohledu se paní učitelka aktivně snaží dát dětem co nejvíce prostoru, aby si mohly učivo osahat a zažít z různých stran. Podporuje žáky v práci s chybou a v tom, aby se nebáli sami si věci zkoušet a objevovat. Podporuje je v tom, aby si sami zorganizovali prostor a pomůcky, které potřebují k dosažení úspěchu. Na druhou stranu podle mě paní učitelka ve výuce hodně spěchá a některá témata žákům předkládá příliš brzy, i když o ně projevil autonomní zájem pouze malý zlomek třídy. Dle mého pozorování se paní učitelka snaží co nejvíce obohacovat klasickou výuku a standardní úlohy. Vnáší různé modely a pomůcky, ale stále poměrně jednotného typu. Ze zkušenosti vím, že často využívá také Dienesovy kostky. Zejména klade ve výuce důraz na aritmetiku a aritmetické operace. Méně pak pracuje se sémantickými modely, slovními úlohami a nestandardními úlohami. Přesto se žáci nebojí se do nich pouštět, což je podle mého názoru zejména opečovanou atmosférou v hodinách a celkovou podporou růstového nastavení mysli žáků při práci s chybou a s neúspěchem.

8.3.3. Aplikace

V řešeních testu se projevila ochota žáků se pouštět i do nestandardních nebo jinak náročných úloh. Žáci byli dobře motivovaní a chtěli si test vyzkoušet, což se projevilo i ochotou zapojit se i do navazujícího testu Mimozemská čísla i některých těch žáků, kteří v prvním testu byli méně úspěšní.

Menší obliba slovních úloh paní učitelkou může souviset s častým prvotním neporozuměním textu zadání a prosbou o dovysvětlení. To dále může také souviset s nabídkou menší škály úloh, tedy žáci nepotřebují často číst zadání, neboť úlohy jsou spíše klasické a zadání může být často zjevné i bez doprovodného textu. Je samozřejmě také potřeba zvážit kognitivní schopnosti žáků 2. ročníku obecně, u kterých bývá schopnost čtení s porozuměním zatím nižší.

V 5. úloze didaktického testu Pozemská čísla se projevilo, že žáci zřejmě nemají mnoho zkušeností s úlohami, které nelze řešit, což souhlasí s výstupy z rozhovoru s paní učitelkou. Samozřejmě i zde je potřeba přihlédnout k úrovni čtenářské gramotnosti žáků teprve 2. ročníku.

V didaktickém testu Mimozemská čísla se zřejmě projevila zkušenost žáků s pomůckou Dienesovy kostky. Zdá se, že žáci mají vytvořenou asociaci mezi tvary pomůcky a řády na úrovni desítek a jednotek. Někteří žáci z 2. ročníku projevili tuto asociaci dokonce na abstraktní úrovni, tedy využívali tvar jako znak a už nepotřebovali dokreslovat jednotlivé jednotkové krychličky.

8.4. pan učitel ze 4. ročníku

8.4.1. Rozhovor

Pan učitel ze začátku k tématu moc asociací nemá. Nevybavoval si žádné úlohy ani situace z dob své školní docházky vázané k tomuto tématu. Během jeho studia speciální pedagogiky didaktice matematiky nebyl věnován prostor, tudíž si musel vše potřebné dohledat a doplnit sám.

Ve výuce pan učitel téměř nevyužívá pomůcky. S alternativními zápisy čísla se jeho žáci setkávají během šifer a rébusů. Rozvinutý zápis čísla používali zejména před zavedením algoritmu pro písemné násobení. V nižších ročnících žáci kvantitu čísel zejména kreslili. Chybou v zápise, se kterou se pan učitel setkal, je např. zrcadlové překlápění číslic, nikoliv však celých čísel. U větších diktovaných čísel pak někteří žáci vynechávali nebo přidávali číslice, zejména nuly, které ve vyřčeném čísle neslyšeli. Většinou si žáci sami všimli, že jimi zapsané číslo slyšenému neodpovídá, když je chtěli po sobě přečíst. Případně psali i číslice v jiném pořadí. Chyby pan učitel ošetřoval častým opakováním a nacvičováním látky.

Na řády kladl pan učitel důraz už v prvním ročníku, kde si vyznačovali desítku. Od druhého ročníku pak začali s řády pracovat systematičtěji kvůli písemným algoritmům aritmetických operací. Na přechod přes desítku pan učitel klade důraz. Ze začátku žákům mezi početními úlohami označoval ty, ve kterých se přechod přes základ vyskytuje. Někteří žáci dříve chybovali v zápisu čísel pod sebou při aditivních úlohách. Při nacvičování této látky pan učitel klade důraz na hodnotu pozice. Zmiňuje, že porozumění je zejména důležité u počítání s desetinnými čísly.

Pan učitel v hodinách tematicky pracoval s římskými čísly, ale nekladl na ně důraz. V 5. ročníku plánuje žákům ukázat i poziční soustavy s alternativním základem, jako jsou dvojková, osmičková, dvanáctková apod. Při výuce jiných číselných soustav pro pana učitele není cílem, aby žáci učivo plně ovládli, ale aby získali povědomí i o jiných možnostech zápisu čísla. Celkově pan učitel ve výuce klade důraz na rozlišování konvence a logické struktury v matematice.

Pan učitel nepociťuje při plánování výuky nedostatek v žádné z oblastí opory, tedy pomůcky, učebnice, didaktické zázemí ani jiné zdroje.

Téma pozičního zápisu a jeho porozumění žáky je pro pana učitele důležité s důrazem na desítkovou soustavu. Ohledně ostatních číselných soustav je toho názoru, že se s nimi většina žáků v praktickém životě setká jen velmi zřídka a řadí je spíše do oblasti rekreační matematiky.

8.4.2. Interpretace

Na základě rozhovoru a vlastního pozorování soudím, že se výuka pana učitele opírá o klasické základy, tedy tradiční matematiku, důraz na technické ovládnutí počtů a o nácvik. Zároveň však pan učitel často zasazuje učivo do sémantických kontextů, využívá dramatizaci a obecně je příběh nosným pilířem jeho hodin. Co se materiálního zázemí týče, využívají žáci téměř jen tužku a papír/tabuli. Učebnice nebo pracovní sešity třída využívá jen velmi zřídka. Cílem je pro pana učitele vést žáky k abstraktnímu myšlení. V rozhovoru se zmiňuje, že při využívání pomůcek může být pro žáky problematické se od pomůcky následně oprostit (Příloha 6, U4: 00:07:33). Ačkoliv pan učitel považuje za zásadní nejdříve dobře ovládnout technickou stránku matematiky, se svými žáky se už často dostává k problémovým a komplexním úlohám, které jsou nezřídka nad rámec učiva.

8.4.3. Aplikace

Třída pana učitele dosáhla ze všech zúčastněných tříd nejlepších výsledků ve standardních úlohách a zároveň ve 4. úloze, ve které byl rozdíl významný. Právě 4. úloha podle mého pozorování nejvýrazněji pracuje s abstraktním porozuměním a aplikací *klasické* matematiky, jako je porozumění výrazům apod. Tento výsledek podle mého hodnocení odpovídá poznatkům získaným z rozhovoru.

V rámci rzobrů žákovských řešení (podkapitola 5.4) jsem popisovala jako možnou příčinu nižší úspěšnosti ve 3. úloze didaktického testu Mimozemská čísla nižší zkušenost žáků 4. ročníku specificky s pomůckou Dienesovy kostky, což s výstupy z rozhovoru taktéž shoduje.

Během zadávání didaktického testu Mimozemská čísla měli žáci k zadání výhrady související se zaměňováním pojmu číslice a číslo (podkapitola 5.3). Pan učitel během rozhovoru používal pojem *číslo* i v kontextu číslice. Domnívám se, že záměna těchto pojmů u žáků vychází ze vzoru jejich učitele.

Třída celkově projevovala dobré porozumění textovému zadání úloh, a to včetně 5. úlohy s výskytem možnosti *nelze řešit* – tuto odpověď ve svých odpovědích nevyužili pouze 3 žáci (Kamča, Oleg a Tobík). Zároveň byl 4. ročník jedinou třídou, ve které se v didaktickém testu Pozemská čísla ani jednou nevyskytlo vynechání úlohy. Z mého osobního pozorování je třída dobře motivovaná a nestandardních úloh se nebojí. Výše zmiňované výsledky i výsledky této třídy celkově mohou být významně ovlivněny ročníkem vzdělávání, ale také stylem výuky, které jsou součástí.

8.5. Shrnutí

Provedené rozhovory poskytly obecný náhled ohledně subjektivního vnímání tématu pozičního zápisu jako součásti vzdělávacího kurikula. Pozorována byla diverzita výukových stylů a přístupů, ale také porozumění a subjektivního hodnocení důležitosti tématu. Je zřejmé, že se jedná o velmi malý vzorek učitelské veřejnosti, na základě kterého lze do omezené míry zobecnit atmosféru školy, ale nikoliv zhodnotit přístup k tématu učitelů obecně.

Poznatky z rozhovorů s učiteli tříd zúčastněných v testování byly nahlíženy perspektivou analyzovaných řešení jejich žáků. V některých oblastech byly pozorovány možné korelace. Pro vyloučení vlivu náhody by však bylo potřeba provést rozsáhlý kvantitativní výzkum zahrnující analýzu výukových stylů učitelů zapojených tříd. Cílem provádění rozhovorů však bylo pouhé doplnění pohledu pro rozbory žákovských řešení a jako takové by mělo být nahlíženo.

Závěr

Tato diplomová práce se zabývá porozuměním zápisů čísla v poziční soustavě žáků 1. stupně a jeho rozvojem. Cíli práce bylo nahlédnout způsob, jakým se koncept poziční soustavy, s důrazem na soustavu desítkovou, vyučuje na našich školách a prostřednictvím teoretické rešerše i vlastního pozorování a hodnocení vlivu pedagogických intervencí posoudit přínos těchto postupů. Dále bylo cílem této práce nahlédnout do myšlení žáků a popsat některé miskoncepce, které se v oblasti číslo a zápis čísla vyskytují.

V teoretické části práce jsem popsala přístupy k didaktickému zpracování zápisu čísla v desítkové soustavě a hodnoty pozice, které mají oporu v pedagogickém výzkumu. Jedná se zejména o didaktické postupy, které nabízejí co nejširší škálu reprezentací čísla, tedy číslo z hlediska aritmetického i jazykového, konkrétního i abstraktního, číslo v roli kvantity i adresy apod. Pro podporu vlastního vybudování dobrého porozumění pozičnímu zápisu žákem se podle výzkumů osvědčuje zadávání a následná diskuse problémových úloh, kterých úspěšné řešení toto porozumění vyžaduje.

Za účelem vytvoření přehledu o úlohách k pozičnímu zápisu v desítkové soustavě, jaké se žákům nabízejí nejčastěji, jsem prohlédla několik učebnicových řad. Nejčastěji se objevovaly spíše úlohy rutinní, neproblémové, které lze snadno nacvičit bez porozumění jejich matematického obsahu, např. rozklady řádů do tabulky, obrázkové modely, rozvinutý zápis apod. V učebnicích jsem kromě úloh pozorovala také návody na řešení úloh, které ve snaze předat žákům osvědčené postupy obcházejí porozumění významu pozičního zápisu čísla, např. rámečky typu: „Pamatuj! Když porovnáváme číslo, porovnej nejdřív první číslici. Pokud jsou číslice stejné, porovnej druhou číslici, a tak pokračuj až ke konci čísla.“ Nestandardní a problémové úlohy jsou podle mého pozorování v tradičních učebnicích často označovány hvězdičkou, písmenem R (pro rychlíky) či jinou značkou, která je vyděluje pouze pro žáky, kteří již rutinní látku zvládli. Domnívám se, že takovýto přístup odsuzuje pomalejší žáky, nikoliv nutně méně kognitivně zdatné, k učení se matematiky zpaměti a bez hlubšího porozumění, což může mít negativní dopady zejména ve vyšších ročnících. Odborný diskurz didaktiky matematiky také zpochybňuje účinnost nácviku řádů už v prvních ročnících základních škol a spíše apeluje na budování předporozumění pozičnímu zápisu (*pre-place value*) prostřednictvím problémových úloh.

Učebnice však nejsou jediným zprostředkovatelem výuky a nelze na základě nich zobecňovat podobu výuky na českých školách, která silně závisí na přístupu každého učitele. S učiteli výzkumných tříd jsem provedla rozhovory, z nichž vyplývalo, že učebnice používají jen velmi málo a spíše si látku zpracovávají po svém. Jelikož se jedná o malou soukromou školu, domnívám se, že tento vzorek není reprezentativní a že v celistvém pohledu poptávka daného typu učebnic a jejich rozšíření může o formě výuky významně napovídat.

V praktické části práce jsem analyzovala žákovská řešení úloh didaktických testů a popsala možné příčiny neúspěchu v nich. Na základě nepřítomnosti souvislého trendu v úspěšnosti nestandardních úloh mezi ročníky jsem vyslovila domněnku, že nejčastěji využívané výukové metody pro rozvoj porozumění zápisu čísla v poziční soustavě jej ve skutečnosti nerozvíjí. Pro bližší porozumění tomuto jevu by bylo vhodné provést další výzkumy, které by kvantitativně zhodnotily trendy v úspěšnosti řešitelů standardních a nestandardních úloh napříč ročníky. Pozorovaným jevem byla také silnější inklinace k nepozičnímu zápisu u řešitelů se spíše slabším porozuměním, tedy zejména ve druhém ročníku, ale i ve vyšších, u méně úspěšných žáků – při této interpretaci je však nutné zvážit limity testování a uvědomit si možný logický kruh, tedy inklinace k nepozičnímu zápisu na základě nižšího porozumění nebo sledované nižší porozumění na základě inklinace k nepozičnímu zápisu. Pro hodnověrnější pozorování jevu a omezení vlivů náhody by byly potřeba další výzkumy. Pokud je však moje interpretace blízká objektivní realitě, byla by dalším z mnoha ukazatelů na význam paralely fylogenetického a ontogenetického vývoje ve výuce matematiky.

Dále byly v praktické části navrženy a realizovány možné aktivity pro rozvoj porozumění zápisu v poziční soustavě. Pozorovaný přínos se mezi aktivitami lišil, avšak vliv náhody je v příkladu jedné třídy nezanedbatelný a bylo by vhodné provést další pozorování.

Obecně lze shrnout, že přínosné pro rozvoj porozumění zápisu v poziční soustavě jsou zejména problémově zaměřené úlohy a jejich diskuse, což platí nejen v rámci učiva desítkové soustavy, ale ve výuce matematiky obecně. Klíčovým aspektem těchto úloh je, že práce s pozičním zápisem čísla je prostředkem k řešení úlohy, např. aritmetické, ne jejím cílem. Jako konkrétní příklady vhodných úloh lze zmínit prostředí Algebrogramy z Hejného metody, dále různé aritmetické a kombinatorické problémy s číslicovými kartami nebo v prostředí Kameny. Na základě mého pozorování se ukazuje jako přínosné obohacovat výuku o historické nebo jinak netradiční způsoby zápisu čísla, a to i vzhledem k jejich motivačnímu potenciálu.

Jako osobní přínos této práce vnímám zejména bližší náhled nejen na úlohy k pozičnímu zápisu čísla, ale vyšší citlivost na smysl zadávaných úloh obecně. Považuji za důležité být k aktivitám vnášeným do hodin kritická a zkoumat jejich matematický potenciál i smysluplnost pro žáky na dané úrovni myšlení. V praxi vnímám přínos problémově zadávaných úloh a didaktický potenciál diskuse – tato práce mě v tomto přístupu dále upevňuje.

Literatura

Bednarz, N. and Janvier, B. (1982) 'The understanding of numeration in primary school', *Educational Studies in Mathematics*, 13(1), pp. 33–57. doi:10.1007/BF00305497.

Clements, D.H. and McMillen, S. (1996) 'Rethinking "concrete" manipulatives', *Teaching Children Mathematics*, 2(5), pp. 270–279.

Coles, A.L.F. *et al.* (2017) 'Linked references are available on JSTOR for this article : RE-THINKING PLACE VALUE : FROM METAPHOR TO METONYM', 37(1), pp. 3–8.

Edwards, M.T., Quinlan, J. and Strayer, J.F. (2016) 'Reverse and Add to 100: Explorations in Place Value', *Teaching Children Mathematics*, 22(7), pp. 404–410. doi:10.5951/teacchilmath.22.7.0404.

Furinghetii, F. and Radford, L. (2020) 'Historical Conceptual Developments and The Teaching of Mathematics: From Philogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice', in *Handbook of International Research in Mathematics Education*, pp. 643–666. doi:10.4324/9781410602541-22.

Higgins, J.L. (1971) 'A New Look At Heuristic Teaching', *The Mathematics Teacher*, 64(6), pp. 487–495. Available at: https://www.jstor.org/stable/27958609.

Hughes, B.B. (1974) 'Heuristic Teaching in Mathematics', *Educational Studies in Mathematics*, 5(3), pp. 291–299. Available at: https://www.jstor.org/stable/3482053.

Jones, G.A. *et al.* (1996) 'Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment', *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), pp. 310–336. Available at: https://www.jstor.org/stable/749367.

Jones, G.A. and Thornton, C.A. (1993) 'Children's Understanding of Place Value: A Framework for Curriculum Development and Assessment.', *Young Children*, 48(5), pp. 12–18. Available at: https://www.jstor.org/stable/42725479.

Joseph, G.G. (2011) *The Crest of the Peacock*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. Princeton University Press. doi:10.1515/9781400836369.

Kamii, C. and Joseph, L. (1988) 'Teaching Place Value and Double-Column Addition', *The Arithmetic Teacher*, 35(6), pp. 48–52. Available at: http://www.jstor.org/stable/41193351.

Kvasz, L. (2008) *Patterns of Change: Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* doi:10.1007/978-3-7643-8840-9.

Lowry, W.C. (1967) 'Approaches to Discovery Learning in Mathematics', *The High School Journal*, 50(5), pp. 254–260. Available at: https://www.jstor.org/stable/40365964.

Piazza, M. (2010) 'Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations', *Trends in Cognitive Sciences*, 14(12), pp. 542–551. doi:10.1016/j.tics.2010.09.008.

Plassová, M., Stuchlíková, I. and Vavrečka, M. (2017) 'Úvod Do Aproximálního Numerického Systému', *Pedagogika*, 67(2), pp. 161–176. doi:10.14712/23362189.2017.410.

Pólya, G. (1963) 'On Learning , Teaching , and Learning Teaching', *The American*

Mathematical Monthly, 70(6), pp. 605–619.

Ross, S.H. (1989) ‘Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View’, *The Arithmetic Teacher*, 36(6), pp. 47–51. doi:10.5951/at.36.6.0047.

Ross, S.R. (2002) ‘Place Value: Problem Solving and Written Assessment’, 8(7), pp. 419–423. Available at: https://www.jstor.org/stable/41197845.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

JIROTKOVÁ, Darina – KLOBOUČKOVÁ, Jaroslava. Kritická místa matematiky na 1. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. 1 vyd. Praha: Univerzita Karlovy v Praze, Pedagogická fakulta, 2013, s. 19-61. ISBN 978-80-7290-723-6.

VESELOVSKÝ, Zdeněk. Etologie: biologie chování zvířat. Ilustroval Jan DUNGEL. Praha: Academia, 2005. ISBN 978-80-200-1621-8.

Další zdroje:

BOSTON COLLEGE. *TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study* [online]. [cit. 2024-04-10]. Dostupné z: https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html

Nahlížené učebnice

BALEJOVÁ, Renata, Martina HUBKOVÁ, Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ a Zuzana ŠVIHLOVÁ. Hravá matematika 3: učebnice pro 3. ročník ZŠ: v souladu s RVP ZV. 1. díl. Praha: Taktik, 2016. ISBN 978-80-87881-68-2.

BÁRTOVÁ, Marie, Marie BEĎAČOVÁ, Magdaléna FALTINOVÁ, et al. Hravá matematika 5: učebnice pro 5. ročník ZŠ. 1. díl. Praha: Taktik International, spol. s r.o., 2017. ISBN 978-80-7563-051-3.

BÁRTOVÁ, Marie, Marie BEĎAČOVÁ, Magdaléna FALTINOVÁ, et al. Hravá matematika 5: učebnice pro 5. ročník ZŠ. 2. díl. Praha: Taktik, 2017. ISBN 978-80-7563-052-0.

BLAŽKOVÁ, Jana. Matematika pro 3. ročník základní školy. Online. Brno: Didaktis, c2008. ISBN 978-80-7358-106-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena. Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. 1. díl. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2012. ISBN 978-80-7245-232-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena. Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. 1. díl. Vydání 5. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-216-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena. Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. 2. díl. Vydání 5. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-217-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena. Pracovní sešit k učebnici Matematika 3. Vydání druhé. Všeň: Alter, 2015. ISBN 978-80-7245-160-9.

BULÍN, Jindřich. Matematika: pracovní sešit 2 pro 2. ročník základní školy. Brno: Didaktis, c2007. ISBN 978-80-7358-077-3.

CIHLÁŘ, Jiří; MELICHAR, Jan a ZELENKA, Milan. Matematika pro druhou třídu: Učeb.pro zákl.školu. Díl 1, Pracovní učebnice. Praha: Fortuna, 1994. ISBN 80-7168-139-3.

CIHLÁŘ, Jiří; MELICHAR, Jan a ZELENKA, Milan. Matematika pro druhou třídu: Učeb.pro zákl.školu. Díl 1, Pracovní učebnice. Praha: Fortuna, 1994. ISBN 80-7168-139-3.

CIHLÁŘ, Jiří; MELICHAR, Jan a ZELENKA, Milan. Matematika pro druhou třídu: pracovní učebnice. Díl 2,. Matematika pro druhou třídu. Praha: Fortuna, 1994. ISBN 80-7168-140-7.

COUFALOVÁ, J. Matematika pro 1. ročník 2. část. 1. vyd. Praha: Fortuna, 1998. ISBN 80-7168-523-2.

COUFALOVÁ, Jana. Matematika pro 1. ročník 2. část. 1. vyd. Praha: Fortuna, 1998. ISBN 80-7168-523-2.

COUFALOVÁ, Jana. Matematika pro pátý ročník základní školy. Část první. Praha: Fortuna, 1997. ISBN 80-7168-488-0.

COUFALOVÁ, Jana. Matematika pro pátý ročník základní školy. Část druhá. Praha: Fortuna, 1998. ISBN 80-7168-528-3.

COUFALOVÁ, Jana. Pracovní sešit: matematika pro 2. ročník ZŠ. Díl 1. Praha: Fortuna, 1994. ISBN 80-7168-111-3.

COUFALOVÁ, Jana., a kol. Matematika pro 3. ročník základní školy část druhá. Praha: FORTUNA, 1995. 56 s. ISBN 80-7168-218-7.

COUFALOVÁ, Jana., a kol. Matematika pro 4. ročník základní školy část první. Praha: FORTUNA, 1995. 56 s. ISBN 80-7168-262-4.

COUFALOVÁ, Jana., a kol. Matematika pro 4. ročník základní školy část druhá. Praha: FORTUNA, 1995. 56 s. ISBN 80-7168-299-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 1. ročník základní školy: pracovní učebnice. 2. díl. Praha: SPN, 1997. ISBN 80-85937-65-4.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 1. ročník základní školy: pracovní učebnice. 2. díl. Praha: SPN, 1997. ISBN 80-85937-65-4.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 1. ročník základní školy: sčítání a odčítání s přechodem přes základ 10. 3. díl (volitelný). Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2007. ISBN 978-80-7235-352-1.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 2. ročník základní školy. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-527-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 2. ročník základní školy. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 9788072355303.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 3. ročník základní školy. Ilustroval Antonín ŠPLÍCHAL. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2008-. ISBN 978-80-7235-405-4.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 3. ročník základní školy: pracovní sešit 1. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008. ISBN 978-80-7235-406-1.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava. Matematika pro 3. ročník základní školy: pracovní sešit 2. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2008. ISBN 978-80-7235-407-8.

DIVÍŠEK, Jiří, Alena HOŠPESOVÁ a František KUŘINA. Svět čísel a tvarů: matematika pro 2. ročník. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-067-5.

DIVÍŠEK, Jiří; HOŠPESOVÁ, Alena a KUŘINA, František. Svět čísel a tvarů: matematika pro 4. ročník. Učebnice pro základní školy. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-157-4.

DIVÍŠEK, Jiří; HOŠPESOVÁ, Alena a KUŘINA, František. Svět čísel a tvarů: Matematika pro 4. ročník základní školy. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-158-2.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. 3. díl, Počítání do dvaceti. Šesté vydání. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-054-4.

EIBLOVÁ, Ladislava a MELICHAR, Jan. Matematika pro 4. ročník základní školy: pracovní sešit 1. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-442-8.

EIBLOVÁ, Ladislava a MELICHAR, Jan. Matematika pro 4. ročník základní školy: pracovní sešit 2. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-442-9.

EIBLOVÁ, Ladislava; MELICHAR, Jan; ŠESTÁKOVÁ, Miroslava a AUSBERGEROVÁ, Marie. Matematika pro 4. ročník základní školy. Online. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-434-4.

FALTINOVÁ, Magdaléna, Lenka PÍTOVÁ, Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ, et al. Hravá matematika 4: učebnice pro 4. ročník ZŠ: v souladu s RVP ZV. 1. díl. Praha: Taktik, 2016. ISBN 978-80-87881-72-9.

FALTINOVÁ, Magdaléna, Lenka PÍTOVÁ, Štěpánka VONDRÁŠKOVÁ, et al. Hravá matematika 4: učebnice pro 4. ročník ZŠ. 2. díl. Praha: Taktik International, spol. s r.o., 2016. ISBN 978-80-7563-025-4.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; ŠPAČKOVÁ, Ivona a OLŽBUTOVÁ, Jana. Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ: v souladu s RVP ZV. 1. díl, Sčítání a odčítání v oboru čísel do 100. 4. vydání. Praha: Taktik, 2022. ISBN 978-80-7563-462-7.

HALASOVÁ, Jitka, Marie KOZLOVÁ a Šárka PĚCHOUČKOVÁ. Matematika 1 se Čtyřlístkem: učebnice pro 1. ročník základní školy. 2. díl. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-979-7.

HOŠPESOVÁ, Alena, František KUŘINA a Jiří DIVÍŠEK. Svět čísel a tvarů: matematika pro 1. ročník. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-015-2.

HOŠPESOVÁ, Alena, Jiří DIVÍŠEK a František KUŘINA. Svět čísel a tvarů: matematika pro 3. ročník. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-117-5.

HOŠPESOVÁ, Alena, Jiří DIVÍŠEK a František KUŘINA. Svět čísel a tvarů: matematika pro 5. ročník. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-192-2.

JUSTOVÁ, Jaroslava. Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. 1. díl. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-212-5.

JUSTOVÁ, Jaroslava. Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. 2. díl. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-213-2.

JUSTOVÁ, Jaroslava. Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. 3. díl. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-214-9.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 1. ročník základní a obecné školy. 2. díl, Pracovní učebnice. Učebnice pro základní školy. Praha: Scientia, 1995. ISBN 80-85827-91-3.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 2. ročník základní školy: pracovní sešit. 1. díl. 2. opr. vyd. Praha: Scientia, pedagogické nakladatelství, 2002. ISBN 80-7183-272-3.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 2. ročník základní školy: učebnice. Praha: Scientia, 1997. ISBN 80-7183-063-1.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 3. ročník základní školy: pracovní sešit. 1. díl. 2. opr. vyd. Praha: Scientia, pedagogické nakladatelství, 2002. ISBN 80-7183-276-6.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 3. ročník základní školy: pracovní sešit. 2. díl. 2. opr. vyd. Praha: Scientia, 2002. ISBN 80-7183-277-4.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 3. ročník základní školy: učebnice. Praha: Scientia, 1998. ISBN 80-7183-111-5.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 4. ročník základní školy: pracovní sešit. Díl 1. Praha: Scientia, 1999. ISBN 80-7183-158-1.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 4. ročník základní školy: pracovní sešit. 2. část. Praha: Scientia, 1999. ISBN 80-7183-159-X.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 4. ročník základní školy: učebnice. Praha: Scientia, 1999. ISBN 80-7183-157-3.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 5. ročník základní školy: Pracovní sešit. Praha: Scientia, 2000. ISBN 80-7183-200-6.

KÁROVÁ, Věra. Matematika pro 5. ročník základní školy: učebnice. Praha: Scientia, 2000. ISBN 80-7183-201-4.

KÁROVÁ, Věra; SVOBODOVÁ, Jana. Počítáme do dvaceti: Pracovní sešit k Matematice pro 1. ročník ZŠ II. 4. vyd. Praha: Fortuna, 1995. ISBN 80-7235-756-1.

KASLOVÁ, Michaela; JAROŠOVÁ, Jana a NECHANICKÁ, Renata. Matematika pro 3. ročník základní školy: Pracovní sešit. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 1998. ISBN 80-7235-033-1.

KASLOVÁ, Michaela, Jana JAROŠOVÁ a Renata NECHANICKÁ. Matematika 4: učebnice zpracovaná podle vzdělávacího programu Základní škola. Ilustroval Miroslava JAKEŠOVÁ. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 1998. ISBN 80-7235-032-3.

KITTLER, Josef a František KUŘINA. Matematika 3 pro 3. ročník základní školy. Ilustroval Marie TICHÁ, ilustroval Miroslava JAKEŠOVÁ. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1993. ISBN 80-85823-19-5.

KOMAN, M., a kol. Matematika pro 4. ročník základní školy. Pracovní sešit. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1993. 80 s. ISBN 80-85823.

KOMAN, M., a kol. Matematika pro 4. ročník základní školy. Praha: Matematický ústav AV ČR, 1993. 136 s. ISBN 80-901218-7-X.

KORITYÁK, Stanislav. Matematika: pracovní sešit 1 pro 2. ročník základní školy. Brno: Didaktis, c2007. ISBN 978-80-7358-076-6.

KOZLOVÁ, Marie, Šárka PĚCHOUČKOVÁ a Alena RAKOUŠOVÁ. Matematika 2 se Čtyřlístkem: pro 2. ročník základní školy. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2012. ISBN 978-80-7238-983-4.

KOZLOVÁ, Marie. Matematika 3 se Čtyřlístkem: pro 3. ročník základní školy. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus, 2013. ISBN 978-80-7238-581-2.

KOZLOVÁ, Marie; PĚCHOUČKOVÁ, Šárka a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 3 se Čtyřlístkem: pracovní sešit 1 pro 3. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2013. ISBN 978-80-7238-737-3.

KOZLOVÁ, Marie; PĚCHOUČKOVÁ, Šárka a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 3 se Čtyřlístkem: pro 3. ročník základní školy: pracovní sešit 2. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2013. ISBN 978-80-7238-793-9.

MIKULENKOVÁ, Hana a Josef MOLNÁR. Matematika pro 1. ročník. 3. díl. Olomouc: Prodos, 1997. Řada Matematika 1-5. ISBN 978-80-85806-87-8.

MIKULENKOVÁ, Hana a Lenka KONEČNÁ. Matematika pro 1. ročník základních škol. 2. díl Olomouc: Prodos, 1992. ISBN 80-901297-1-4.

MIKULENKOVÁ, Hana; KONEČNÁ, Lenka. Matematika pro 1. ročník základních škol. 3. díl Olomouc: Prodos, 1992. ISBN 80-7230-091-1.

MOLNÁR, Jana.; MIKULENKOVÁ, H. Matematika 2. ročník 1. díl. Olomouc: Prodos, spol. s r. o., 1997. 64 s. ISBN 80-85806-77-0.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana. Matematika: 3. ročník. Díl 2. Základní škola. Olomouc: Prodos, 2000. ISBN 80-85806-90-8.

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana. Matematika pro 4. ročník. 2. díl. Olomouc: Prodos, 2018b. ISBN 978-80-85806-53-3. MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana. Matematika pro 4. ročník. 3. díl. Olomouc: Prodos, 2018c. ISBN 978-80-85806-54-0.

MOLNÁR, Josef.; MIKULENKOVÁ, H. Matematika 2. ročník 2. díl. Olomouc: Prodos, spol. s r. o., 1997. 64 s. ISBN 80-85806-88-6.

MOLNÁR, Josef.; MIKULENKOVÁ, H. Matematika 2. ročník 3. díl. Olomouc: Prodos, spol. s r. o., 1997. 64 s. ISBN 80-85806-89-4.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika. 5. díl, Počítání do sta. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2015. ISBN 978-80-7289-524-3.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika. 7. díl, Zdokonalujeme se v počítání do sta. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2014. ISBN 978-80-7289-663-9.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František (2015). Matýskova matematika pro 4. ročník, 1. díl. Brno: NOVÁ ŠKOLA, s.r.o. ISBN 978-80-7289-749-0.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František (2015). Matýskova matematika pro 4. ročník, 2. díl. Brno: NOVÁ ŠKOLA, s.r.o. ISBN 978-80-7289-750-6.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František (2016). Matýskova matematika pro 5. ročník, 1. díl. Brno: NOVÁ ŠKOLA, s.r.o. ISBN 978-80-7289-856-5.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František (2017). Matýskova matematika pro 5. ročník, 2. díl. Brno: NOVÁ ŠKOLA, s.r.o. ISBN 978-80-7289-879-4.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KAŠPAROVÁ, Martina a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 5 se Čtyřlístkem: pracovní sešit 1 pro 5. ročník základní školy. Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-063-5.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KAŠPAROVÁ, Martina; RAKOUŠOVÁ, Alena a KOZLOVÁ, Marie. Matematika 5. Plzeň: Fraus, 2015. ISBN 978-80-7489-062-8.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KAŠPAROVÁ, Martina; RAKOUŠOVÁ, Alena a KOZLOVÁ, Marie. *Matematika 5*. Plzeň: Fraus, 2015. ISBN isbn978-80-7489-064-2.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KOZLOVÁ, Marie a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 4: pro 4. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7489-028-4.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KOZLOVÁ, Marie a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 4: pro 4. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7489-028-4.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KOZLOVÁ, Marie a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 4: pro 4. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7489-021-5.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KOZLOVÁ, Marie a RAKOUŠOVÁ, Alena. Matematika 4: pro 4. ročník základní školy. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7489-017-8.

PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; KUBÍČKOVÁ, Alena a ŠPAČKOVÁ, Ivona. Hravá matematika 1: pracovní učebnice pro 1. ročník ZŠ. 2. díl, Sčítání a odčítání v oboru čísel do 20 bez přechodu přes základ 10. 3. vydání. Praha: Taktik, 2022. ISBN 978-80-7563-448-1.

ROSECKÁ, Zdena a PROCHÁZKOVÁ, Eva. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2011. ISBN 978-80-87565-07-0.

ROSECKÁ, Zdena. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 1. díl. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2013. ISBN 978-80-87565-48-3.

ROSECKÁ, Zdena. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 2. díl. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2013. ISBN 978-80-87565-60-5.

ROSECKÁ, Zdena. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Ilustroval Alena BAISOVÁ, ilustroval Jiří RŮŽIČKA. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2015. ISBN 978-80-87565-71-1.

ROSECKÁ, Zdena. *Matematika snadná, zajímavá i zábavná pro 3. ročník základní školy: počítáme s chutí a radostí*. 1. díl. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2012. ISBN 978-80-87565-29-2.

ROSECKÁ, Zdena. *Matematika snadná, zajímavá i zábavná pro 3. ročník základní školy: počítáme s chutí a radostí*. 2. díl. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2012. ISBN 978-80-87565-44-5.

ROSECKÁ, Zdena. Matematika: pro 1. ročník základní školy- 2. díl. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-87565-47-6.

ROSECKÁ, Zdena. *Veselé počítání: pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2011. ISBN 978-80-87565-08-7.

ROSECKÁ, Zdena. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. 2. Díl. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno, 2019. ISBN 978-80-87565-03-2.

ŠVIHLOVÁ, Zuzana; KUBÍČKOVÁ, Alena a ŠPAČKOVÁ, Ivona. Hravá matematika 1: pracovní učebnice pro 1. nebo 2. ročník ZŠ: v souladu s RVP ZV. 3. díl, Sčítání a odčítání v oboru čísel do 20 s přechodem přes základ 10:. 3. vydání. Praha: Taktik, 2022. ISBN 978-80-7563-449-8.

TARÁBEK, Pavol, Soňa KOPEČKOVÁ a Karel VOJKŮVKA. Matematika 2: pro 1. ročník základní školy. Ilustroval Miroslav RŮŽEK. Brno: Didaktis, c2005. ISBN 80-7358-035-7.

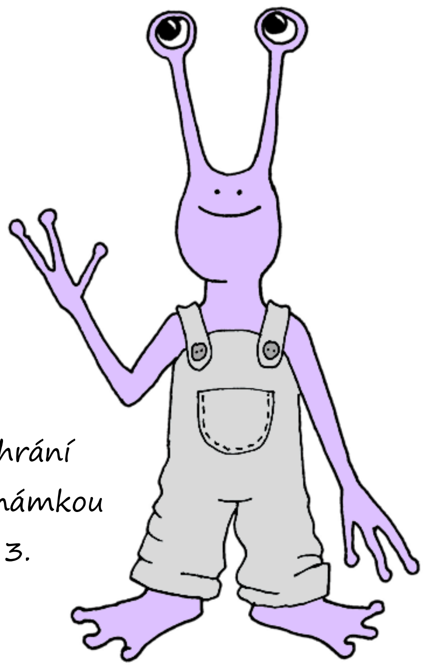
TARÁBEK, Pavol. Matematika 3: pro 1. ročník základní školy. Ilustroval Jan SMOLÍK. Brno: Didaktis, c2005. ISBN 80-7358-036-5.

TRCH, Milan. Matematika pro 1. ročník obecné a základní školy. Díl 2. Praha: Scientia, 1995. ISBN 80-7183-012-7.

VACKOVÁ, Ivana; FAJFRLÍKOVÁ, Ludmila a UZLOVÁ, Zdeňka. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2011. ISBN 978-80-7235-471-9.

VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; HUBKOVÁ, Martina; FALTINOVÁ, Magdaléna; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; ŠPAČKOVÁ, Ivona et al. Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ: v souladu s RVP ZV. 2. díl, Násobení a dělení v oboru čísel do 10. 4. vydání. Praha: Taktik, 2022. ISBN 978-80-7563-461-0.

Tento Hexan chrání
diplomku před známkou
horší než je 3.



Seznam příloh

Příloha 1 – Pilotní verze didaktických testů

Příloha 2 – Didaktické testy Pozemská čísla a Mimozemská čísla (+ autorské řešení)

Příloha 3 – Plán a záznam intervencí

Příloha 4 – Výstupní didaktické testy

Příloha 5 – Otázky k polostrukturovaným rozhovorům

Příloha 6 – Přepisy rozhovorů

Seznam obrázků

Obrázky 1 – 42: učebnicové úlohy

Obrázky 43 – 52: úlohy z TIMSS

Obrázky 53 – 64: ukázky z pilotážních didaktických testů

Obrázky 65 – 75: ukázky testových úloh

Obrázky 76 – 199: žákovská řešení

Obrázky 200 – 201: intervenční úlohy

Obrázky 202 – 208: ukázky a žákovská řešení výstupního did. Testu

Seznam tabulek

Tabulka 1: přehled úloh z TIMSS

Tabulky 2 - 3: chyby v úloze 5 did. testu Pozemská čísla

Tabulka 4: přehled řešitelů did. testu Mimozemská čísla

Tabulka 5: chyby v úloze 5 výstupního did. testu Pozemská čísla

Seznam diagramů

Diagramy 1 – 6: typy úloh v učebnicích

Diagramy 8 – 69: přehledy k žákovským řešením

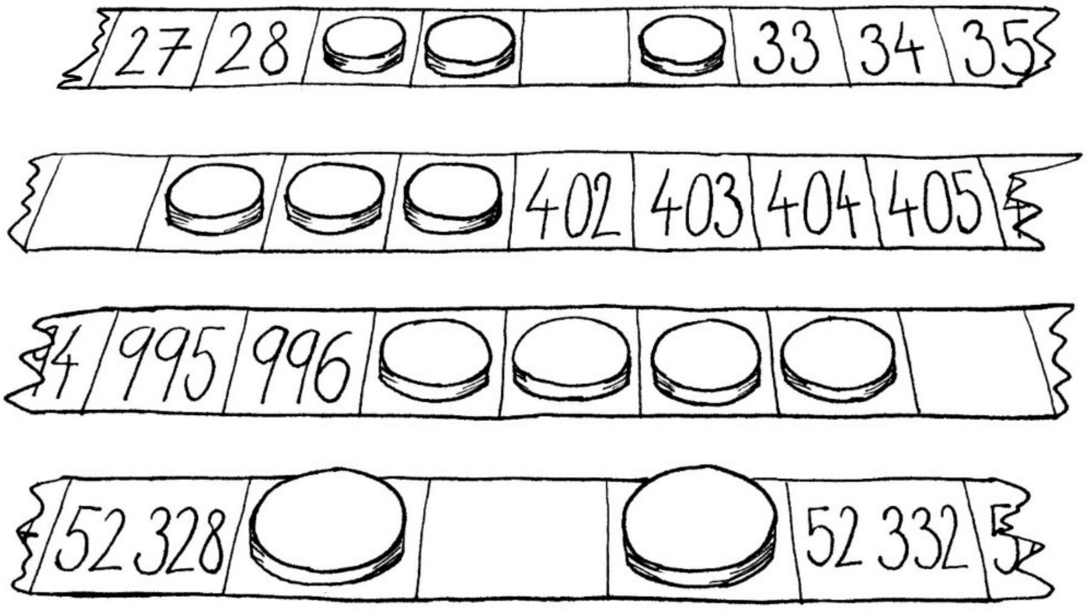
Diagramy 70 – 71: přehledy k výstupnímu did. testu

Příloha 1

Pozemská čísla

---

1) Doplň čísla do nezakrytých políček.



2) Teo si vymyslel vlastní šifru na čísla. Dokážeš odhalit, jak šifra funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapíše jako II..... 84 zapíše jako IIIIIIII.... 3 zapíše jako ...

Doplň, jak Teo zapíše následující čísla:

______ zapíše jako IIII..

12 zapíše jako ________________

______ zapíše jako □□III.

364 zapíše jako ________________

Příloha 1

3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vždy vyndej právě jednu kartu, ale ostatní nepřehazuj. Vždy Ti zůstane trojciferné číslo.

A) $\boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$ B) $\boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{9}$

Jaké je **největší** číslo, které tak můžeš vytvořit?

A) B)

Jaké je **nejmenší** číslo, které tak můžeš vytvořit?

A) B)

4) Vrať neposedné číslice na svá místa.

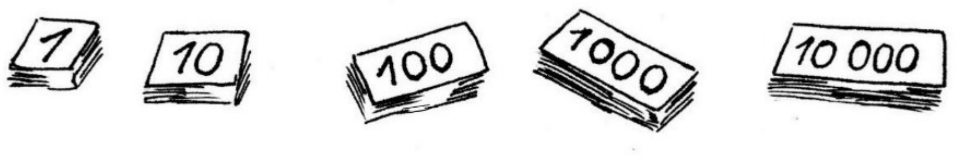
Příklad: 2_4 = 200 + _0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + _ · 1 | 3 4 3
2$\underline{3}$4 = 200 + $\underline{3}$0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + $\underline{4}$ · 1

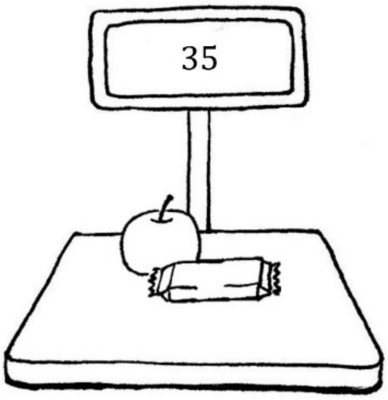
58__ = 500 + 80 + __ = 5 · 100 + __ · 10 + 2 · 1	8 2 2
704 = __00 + __ + __ = 7 · 100 + 0 · 10 + 4 · 1	4 7 0
3 __15 = __000 + __00 + 10 + __ = 3 · 1 000 + __ · 100 + 1 · 10 + 5 · 1	5 6 3 6 6
__5 300 = __0 000 + 5 000 + 300 + 0 + __ = 2 · 10 000 + __ · 1 000 + 3 · 100 + 0 · 10 + __ · 1	5 0 2 0 2

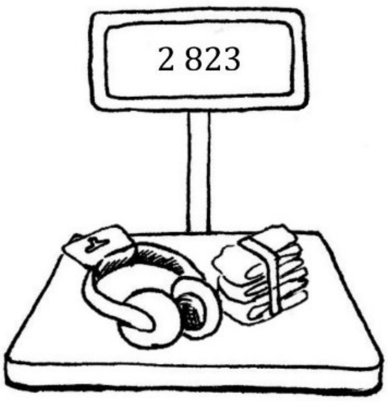
5) Pokažená tiskárna vytiskla místo některých číslic jen skvrny. Dokážeš přesto porovnat čísla? Doplň do políček **>**, **<** nebo **=** . Pokud není možné určit, jestli tam patří **>**, **<** nebo **=**, políčko škrtni.

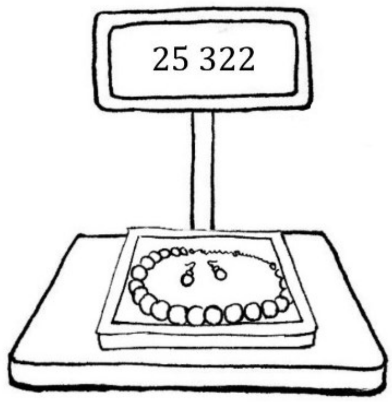
35 ☐ 53	30 ☐ 2●	14● ☐ ●47
●73 ☐ ●73	11●2 ☐ 12●1	2●●● ☐ 9●●
910 ☐ 901	15● ☐ ●6●	9 999 ☐ ●● 000

6) V Decimálii mají jen papírové bankovky. Kolik kterých bankovek budou Decimáliané potřebovat k zaplacení těchto nákupů? Není možné použít více než 9 bankovek jednoho druhu.









Příloha 1

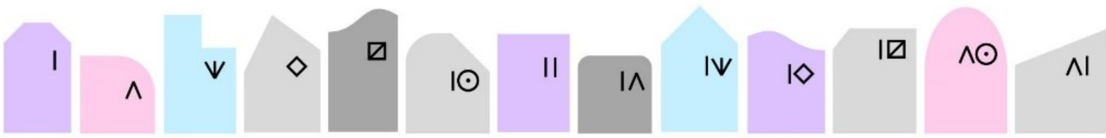
Mimozemská čísla

Obyvatelé planety Hexa mají jen 3 prsty na každé ruce.

My na Zemi máme 10 prstů a 10 číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9.
Oni mají 6 prstů a 6 číslic: ⊙, |, ∧, ⩛, ◇, ⧄.

Naše 0 je jejich ⊙, naše 1 je jejich |, naše 2 je jejich ∧, 3 je ⩛, 4 je ◇, 5 je ⧄.
Číslici 6, 7, 8 a 9 vůbec nemají.

1) Při procházce městem na planetě Hexa můžeme na začátku ulice vidět takto očíslované domy:



Dokážeš doplnit čísla na domech na konci ulice?

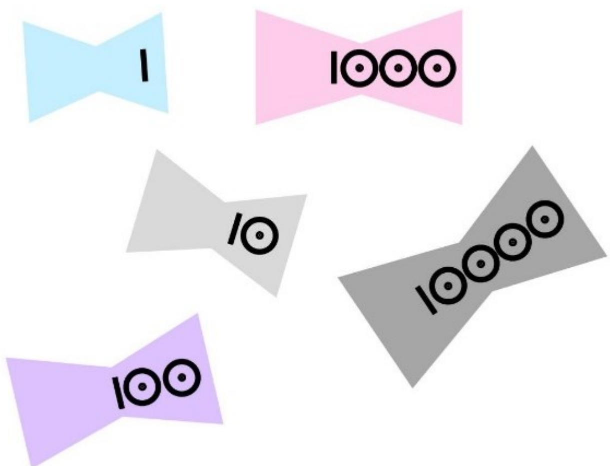
2) Zkusíš přesně zaplatit v obchodě tyto částky hexanskými penězi?

⩛ Hexony

∧⧄ Hexonů

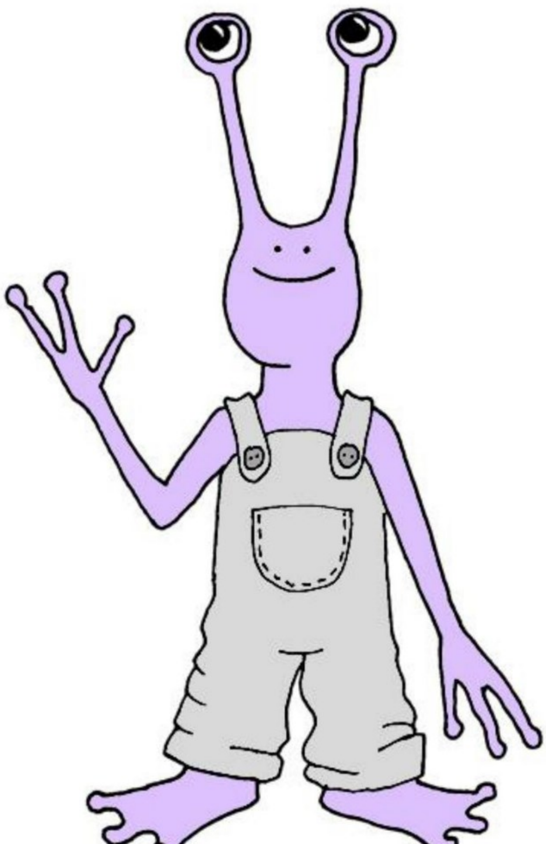
◇|⩛ Hexonů

⩛⊙∧◇ Hexonů



3) Zvládneš zapsat naše čísla jejich způsobem? Zvládneš zapsat jejich čísla naším způsobem?

3	⧄
7	‖
6	⩛⩛
16	|⊙⊙
36	∧⊙∧
122	◇⊙⊙⊙

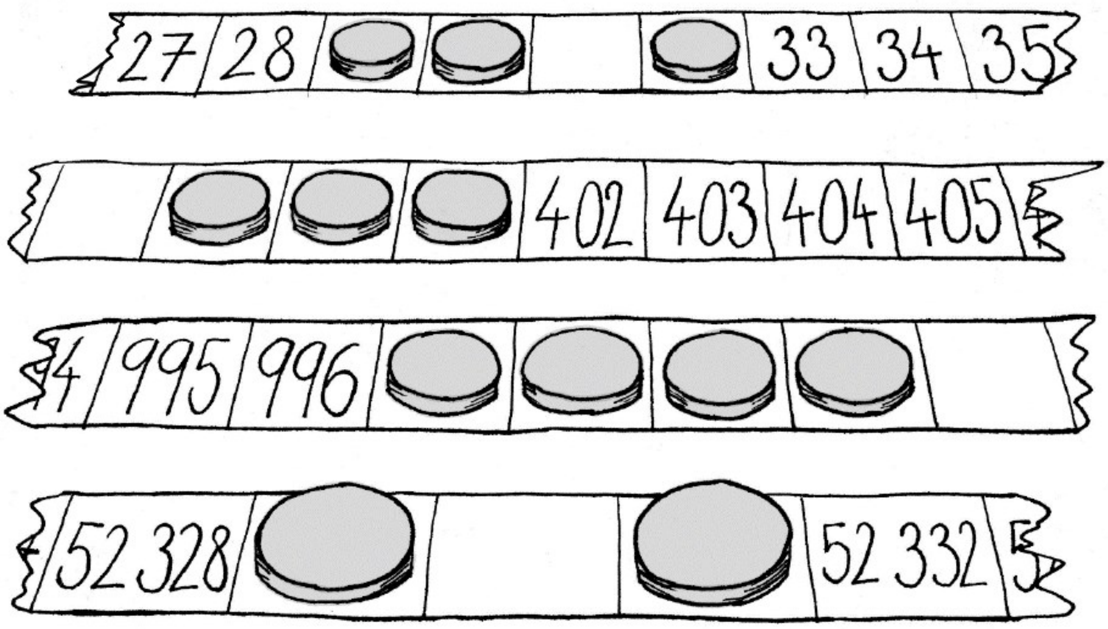


Příloha 2

Pozemská čísla

---

1) Doplň čísla do nezakrytých políček.



2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapisovali jako ∩∩IIIII   84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩IIII   3 jako III

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

______ zapisovali jako ∩∩∩∩II

12 zapisovali jako ________________

______ zapisovali jako 𓍢𓍢∩∩II

364 zapisovali jako _______________

Příloha 2

3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

1 3 9 7

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

. . . .

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

7 3 9 1

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

4) Z rovností utekly neposedné číslice. Dokážeš je vrátit na svá místa?

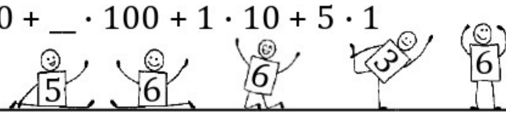
Příklad:

2__4 = 200 + __0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + __ · 1
2<u>3</u>4 = 200 + <u>3</u>0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + <u>4</u> · 1

58__ = 500 + 80 + __ = 5 · 100 + __ · 10 + 2 · 1

734 = __00 + __0 + __ = 7 · 100 + 3 · 10 + 4 · 1

3 __15 = __000 + __00 + 10 + __ = 3 · 1 000 + __ · 100 + 1 · 10 + 5 · 1

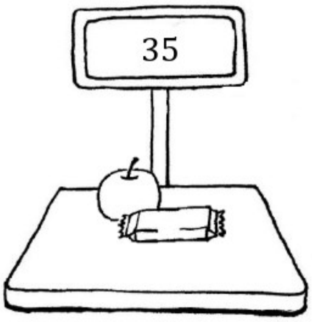


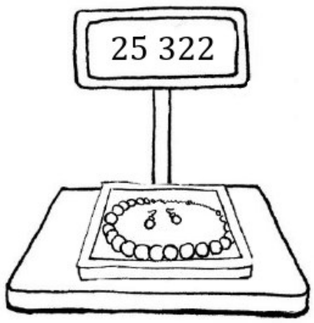
__5 300 = __0 000 + 5 000 + 300 + 0 + __
= 2 · 10 000 + __ · 1 000 + 3 · 100 + 0 · 10 + __ · 1

5) Pokažená tiskárna vytiskla místo některých číslic jen skvrny. Dokážeš přesto porovnat čísla? Doplň do políček **>**, **<** nebo **=** . Pokud není možné určit, jestli tam patří **>**, **<** nebo **=**, políčko škrtni.

35 □ 53	30 □ 2●	14● □ ●47
●73 □ ●73	11●2 □ 12●1	2●●● □ 9●●
910 □ 901	15● □ ●6●	9 999 □ ●●000

6) V Decimálii mají jen papírové bankovky. Kolik kterých bankovek budou Decimáliané potřebovat k zaplacení těchto nákupů? Nejde použít pro jeden nákup více než 9 bankovek jednoho druhu.



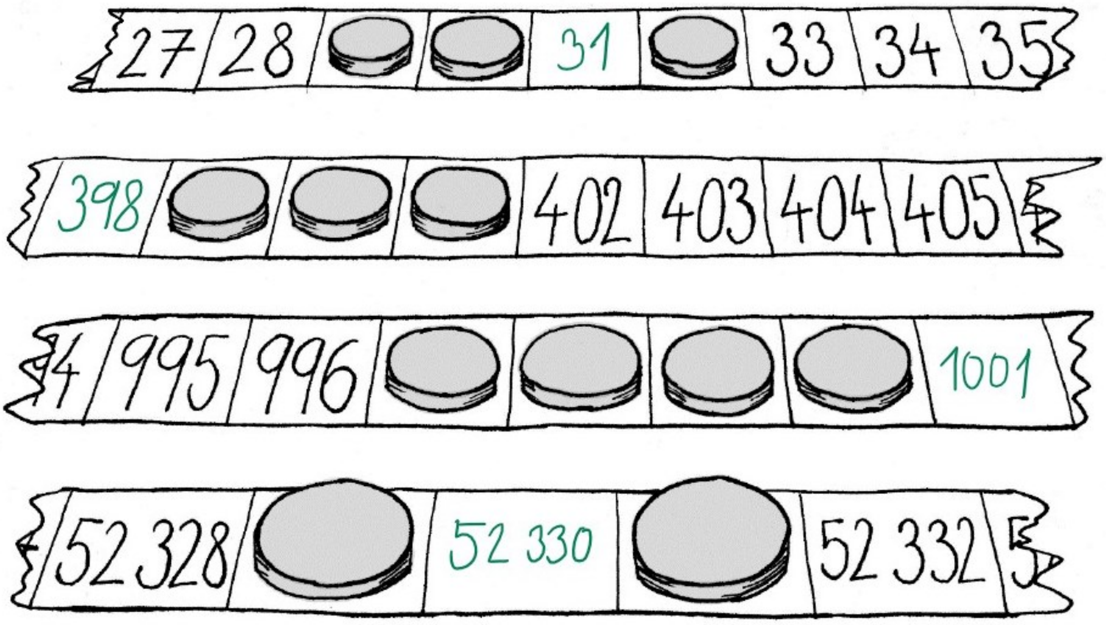


Příloha 2

Pozemská čísla

---

1) Doplň čísla do nezakrytých políček.



2) Staří Egypťané zapisovali čísla jinak než my dnes. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Doplň prázdná místa.

25 zapisovali jako ∩∩IIIII   84 jako ∩∩∩∩∩∩∩∩IIII   3 jako III

Doplň, jak Egypťané zapisovali následující čísla:

42 zapisovali jako ∩∩∩∩II

12 zapisovali jako ∩II

222 zapisovali jako 𓍢𓍢∩∩II

364 zapisovali jako 𓍢𓍢𓍢∩∩∩∩∩∩IIII

3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

1	3	9	7

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

397

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

137

. . . .

7	3	9	1

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

791

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

391

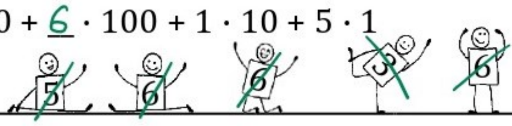
4) Z rovností utekly neposedné číslice. Dokážeš je vrátit na svá místa?

Příklad:
2__4 = 200 + __0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + __ · 1
234 = 200 + 30 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + 4 · 1

582 = 500 + 80 + 2 = 5 · 100 + 8 · 10 + 2 · 1

734 = 700 + 30 + 4 = 7 · 100 + 3 · 10 + 4 · 1

3 615 = 3 000 + 600 + 10 + 5 = 3 · 1 000 + 6 · 100 + 1 · 10 + 5 · 1



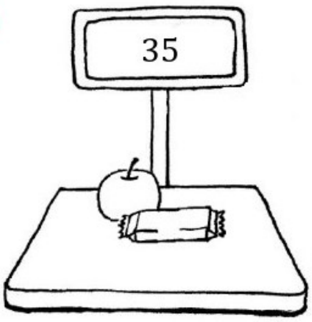
25 300 = 20 000 + 5 000 + 300 + 0 + 0
= 2 · 10 000 + 5 · 1 000 + 3 · 100 + 0 · 10 + 0 · 1

5) Pokažená tiskárna vytiskla místo některých číslic jen skvrny. Dokážeš přesto porovnat čísla? Doplň do políček **>**, **<** nebo **=** . Pokud není možné určit, jestli tam patří **>**, **<** nebo **=**, políčko škrtni.

35 $\boxed{<}$ 53	30 $\boxed{>}$ 2●	14● $\cancel{\square}$ ●47
●73 $\cancel{\square}$ ●73	11●2 $\boxed{<}$ 12●1	2●●● $\boxed{>}$ 9●●
910 $\boxed{>}$ 901	15● $\boxed{<}$ ●6●	9 999 $\boxed{<}$ ●●000

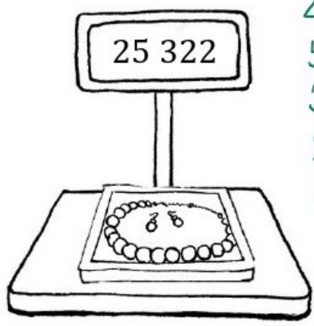
6) V Decimálii mají jen papírové bankovky. Kolik kterých bankovek budou Decimáliané potřebovat k zaplacení těchto nákupů? Nejde použít pro jeden nákup více než 9 bankovek jednoho druhu.

$3 \cdot \boxed{10}$
$5 \cdot \boxed{1}$



$4 \cdot \boxed{100}$
$2 \cdot \boxed{10}$
$1 \cdot \boxed{1}$

$2 \cdot \boxed{1000}$
$8 \cdot \boxed{100}$
$2 \cdot \boxed{10}$
$3 \cdot \boxed{1}$



$2 \cdot \boxed{10\,000}$
$5 \cdot \boxed{1000}$
$3 \cdot \boxed{100}$
$2 \cdot \boxed{10}$
$2 \cdot \boxed{1}$

Příloha 2

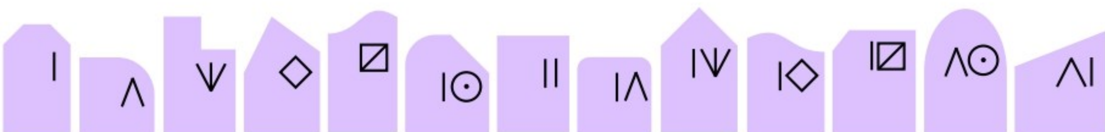
Mimozemská čísla

Obyvatelé planety Hexa mají jen 6 prstů, 3 prsty na každé ruce.

My na Zemi máme 10 prstů a 10 číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9.
Oni mají 6 prstů a 6 číslic: ⊙, |, Λ, Ѱ, ◇, ⧄.

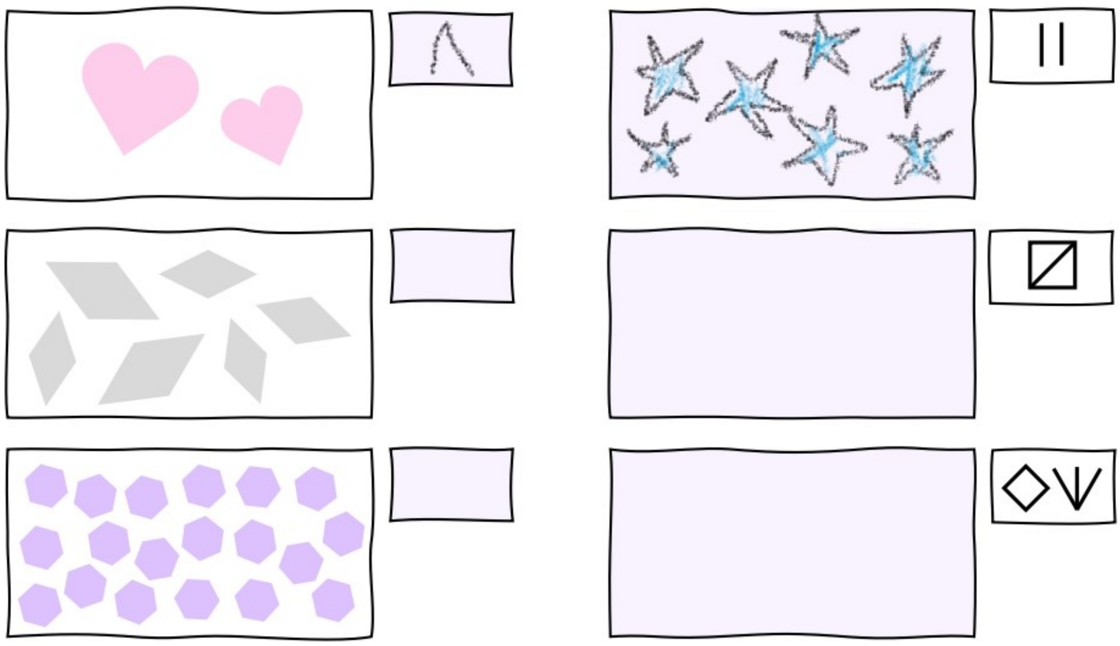
Naše 0 je jejich ⊙, naše 1 je jejich |, naše 2 je jejich Λ, 3 je Ѱ, 4 je ◇, 5 je ⧄.
Číslice 6, 7, 8 a 9 vůbec nemají, ale stejně jako my, i oni dokážou zapsat jakékoliv číslo.

1) Při procházce městem na planetě Hexa můžeme na začátku ulice vidět takto očíslované domy:

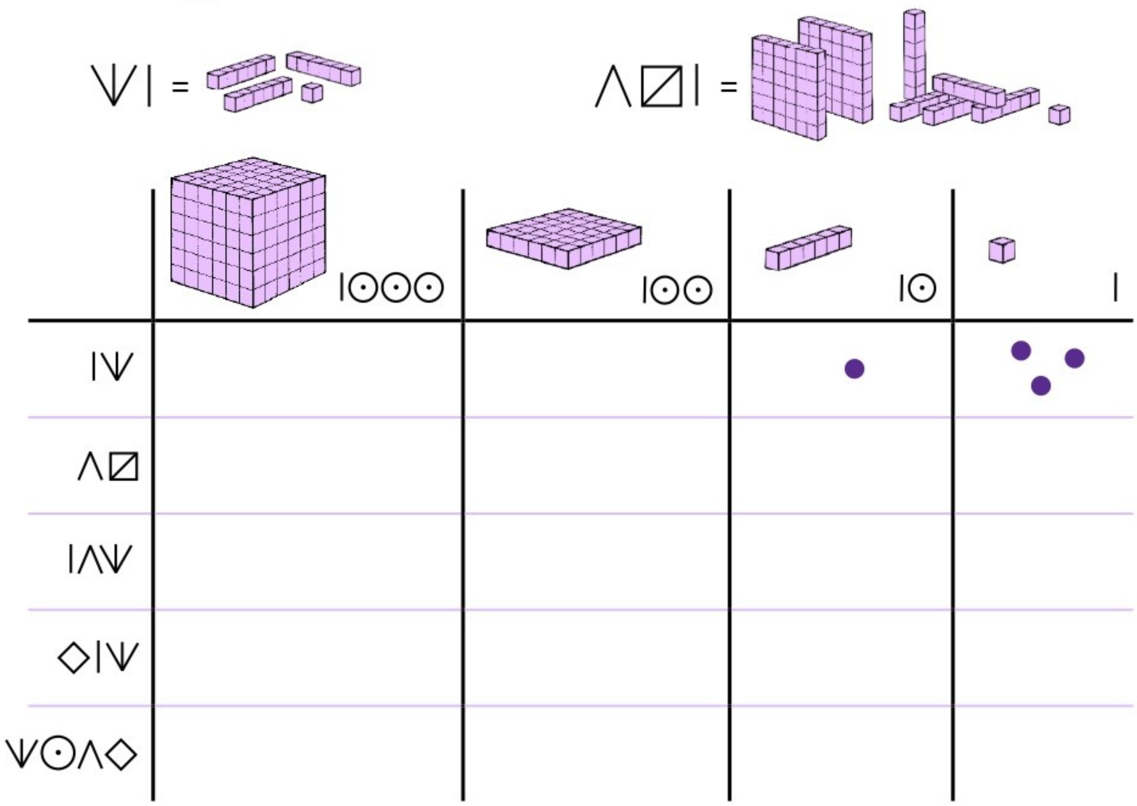


Dokážeš doplnit čísla na domech na konci ulice?

2) I hexanské děti chodí do školy. Pomůžeš prvňáčkovi dokončit jeho úkol? První řádek má správně. Doplňuj čísla nebo jakékoliv tvary do fialových rámečků.

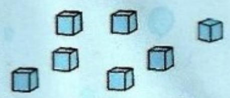
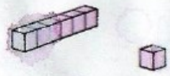
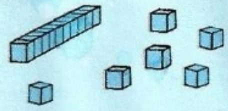
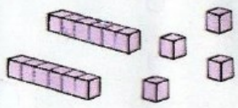
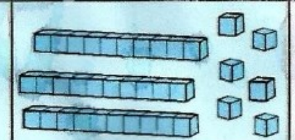
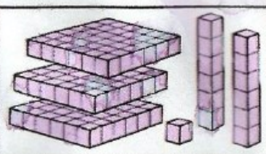
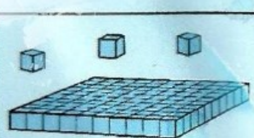


3) Hexanští třeťáci se učí pracovat i s většími čísly. Modelují je na pomůcce jako na obrázku nebo zapisují v tabulce pomocí kamenů. Dokážeš vypracovat úkol hexanského třeťáka?



Příloha 2

4) Jeden pozemský astronaut si pro převádění našich a hexanských čísel vytvořil tabulku. Bohužel ji nechal na dešti, a tak se mu rozmyla. Dokážeš znovu doplnit alespoň sloupce po stranách?

POZEMSKÁ ČÍSLA		HEXANSKÁ ČÍSLA	
7			||
16			
22			
			◇ψ
			
47			
			
			
			Λ⊙Λ
			ψ⊙⊙⊙

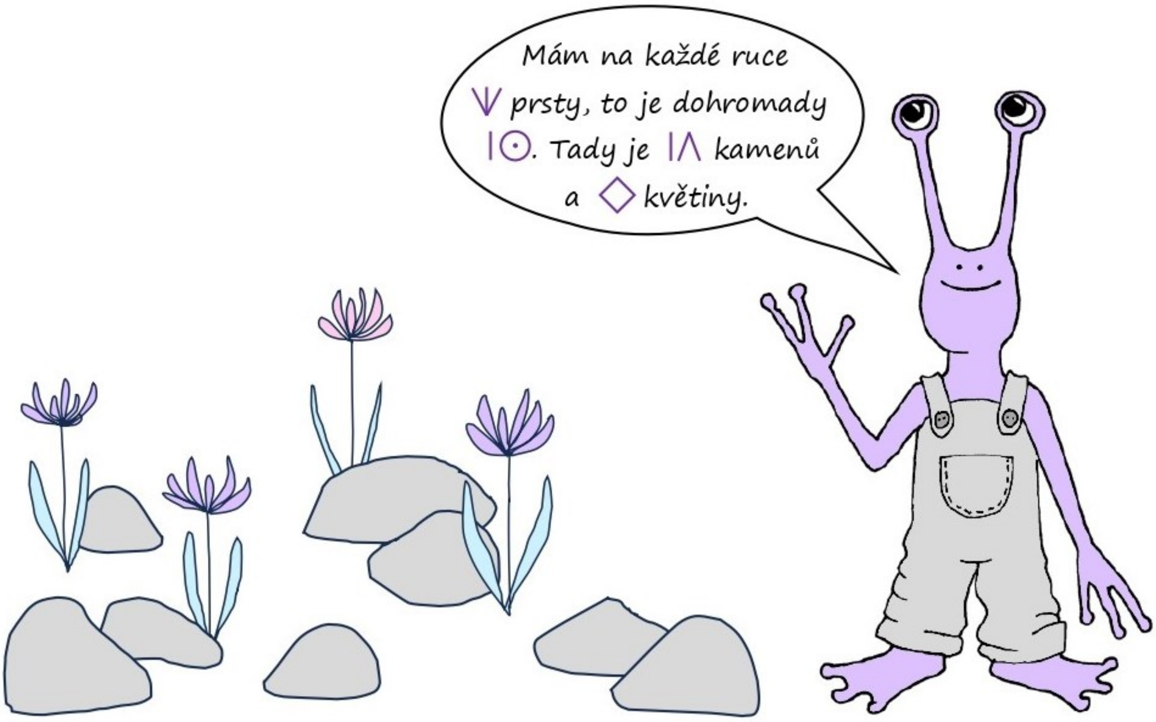
Příloha 2

Mimozemská čísla

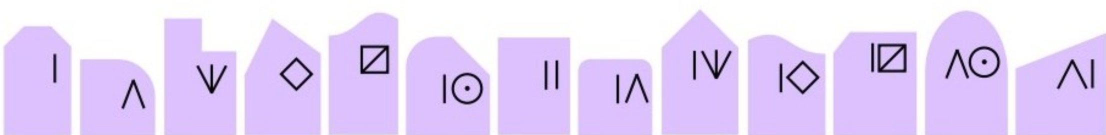
Obyvatelé planety Hexa mají jen 6 prstů, 3 prsty na každé ruce.

My na Zemi máme 10 prstů a 10 číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9.
Oni mají 6 prstů a 6 číslic: ⊙, |, ∧, ⩛, ◇, ⧄.

Naše 0 je jejich ⊙, naše 1 je jejich |, naše 2 je jejich ∧, 3 je ⩛, 4 je ◇, 5 je ⧄.
Číslice 6, 7, 8 a 9 vůbec nemají, ale stejně jako my, i oni dokážou zapsat jakékoliv číslo.

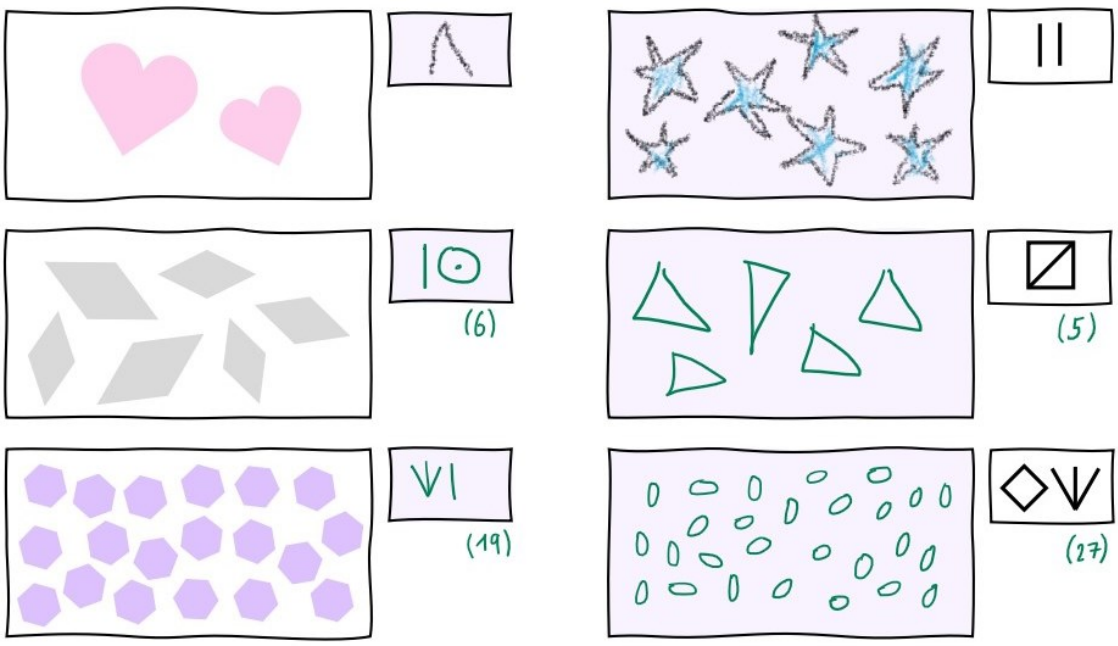


1) Při procházce městem na planetě Hexa můžeme na začátku ulice vidět takto očíslované domy:

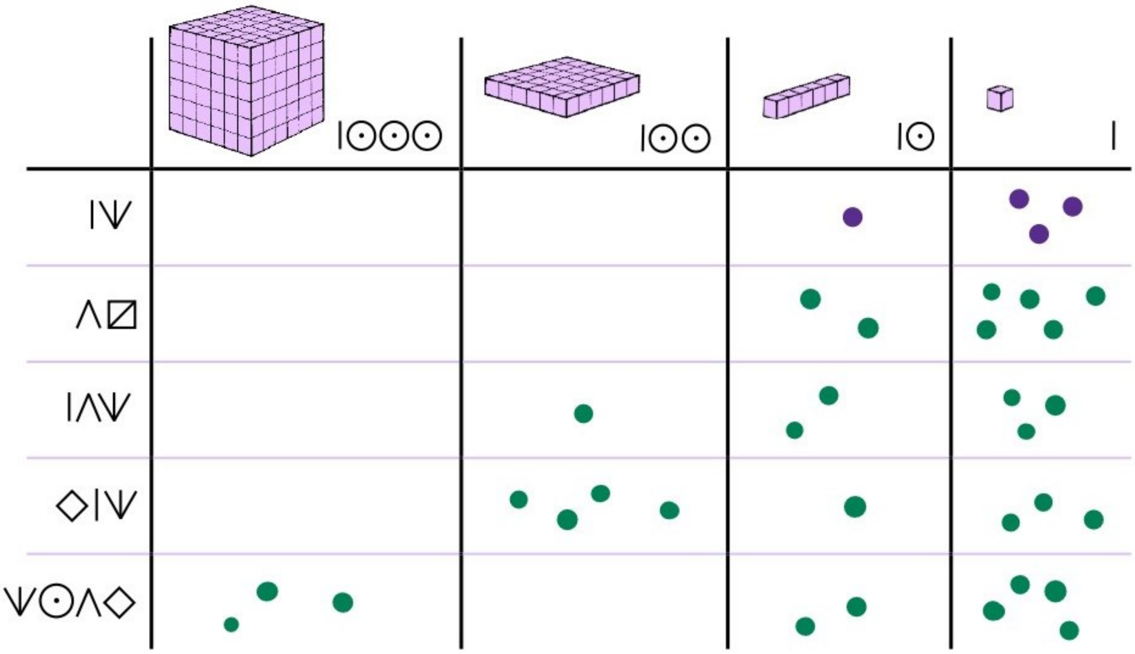


Dokážeš doplnit čísla na domech na konci ulice?

2) I hexanské děti chodí do školy. Pomůžeš prvňáčkovi dokončit jeho úkol? První řádek má správně. Doplňuj čísla nebo jakékoliv tvary do fialových rámečků.

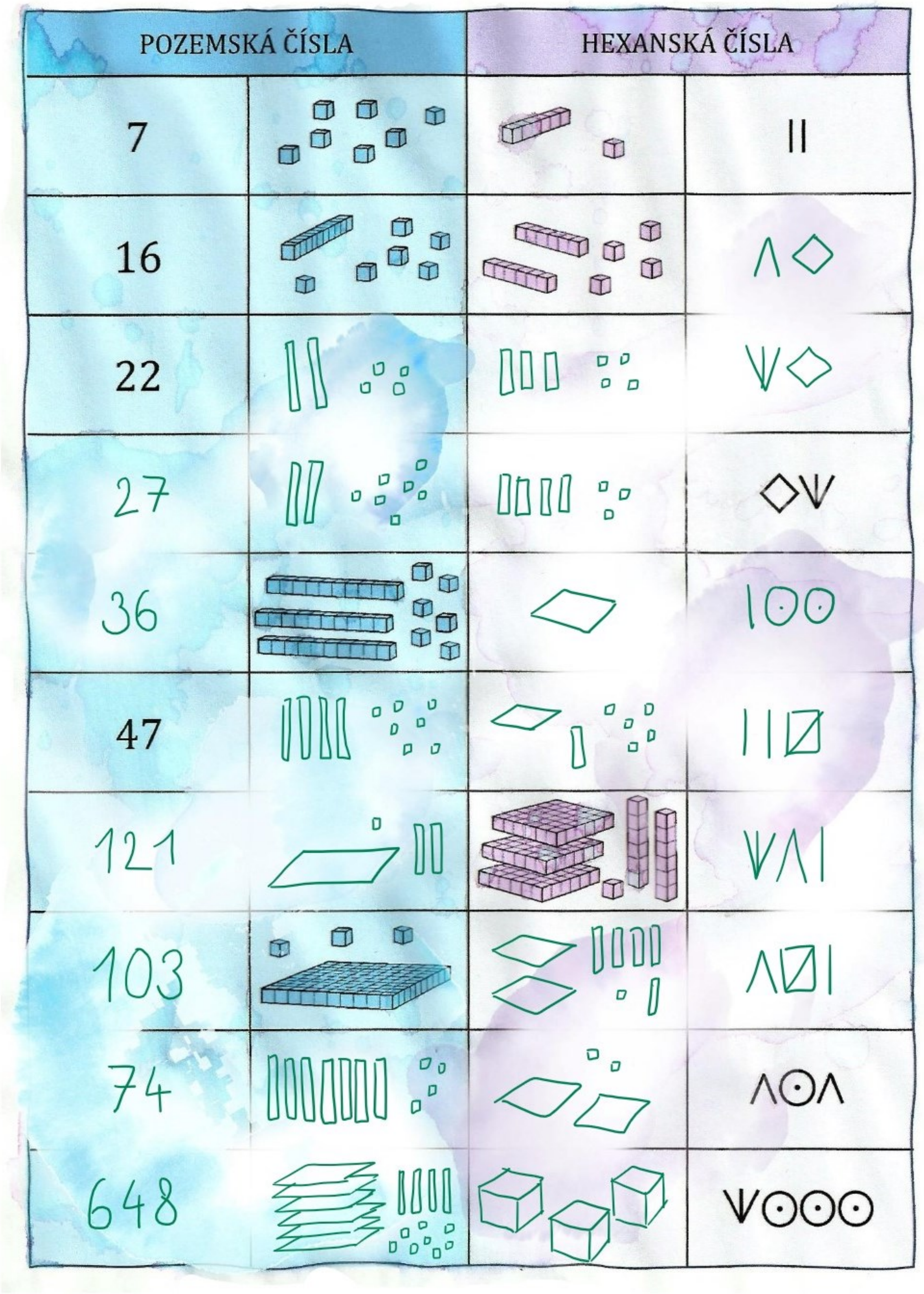


3) Hexanští třeťáci se učí pracovat i s většími čísly. Modelují je na pomůcce jako na obrázku nebo zapisují v tabulce pomocí kamenů.
Dokážeš vypracovat úkol hexanského třeťáka?



Příloha 2

4) Jeden pozemský astronaut si pro převádění našich a hexanských čísel vytvořil tabulku. Bohužel ji nechal na dešti, a tak se mu rozmyla. Dokážeš znovu doplnit alespoň sloupce po stranách?



Příloha 3

Plán intervence

Vstup 1 (VH)

Téma: Řády desítkové soustavy
Pomůcky: modely peněz (1, 10, 100), obrázky s nákupy, mobil/stopky, kameny, Dienesovy kvádry a jiné pomůcky ve třídě

Pondělí 5. února 2024, 3. VH

Toto byla hodina po velké přestávce. Na začátku hodiny byli trochu méně rozjívení, než obvykle po velké přestávce bývají. Břéťu a sekundárně i Fandu a Honzíka zaujaly Dienesovy pomůcky a hned se ptali: *"Tohle je stovka? Je tam i tisíc?"* apod. Pomůcka je hodně zaujala.

1) **Běhací hra** (10 – 15 min)

Vzadu třídy budou rozházené mince a bankovky (přesně tolik, kolik potřebují), vpředu před tabulí budou obrázky nákupů s cenou, kterou je potřeba zaplatit. Žáci mají za úkol všichni najednou nosit peníze k nákupům, ale vždy po jednom platidle. Nemohou spolu mluvit. Jakmile si žák bude myslet, že jsou všechny nákupy zaplaceny, sedne si do lavice. Aktivita se stopuje – pro žáky je formulována jako výzva, v jakém čase to zvládnou. Po vysvětlení aktivity a před jejím začátkem nechám žáky odhadovat, za jak dlouho se jim to podaří – jednotlivé odhady napíšu na tabuli a výzvou pro ně bude dodržet nebo překonat vlastní odhad. Po zastavení aktivity se jich opět zeptám, za jaký čas odhadují, že to zvládli.

Po aktivitě reflexe: *Co bylo úskalím? Co by příště pomohlo splnit úkol rychleji? Proč jsem vám zadala tuto aktivitu? – Jaký byl její účel? Jaké téma má asi vnést?*

Zdůvodnění: Jelikož běží všichni najednou a nemohou spolu mluvit, bude hlavním úkolem pro žáky najít systém, jak překonat chaos. Žáci budou muset u nákupů <u>neustále přepočítávat, kolik je již položeno jednotek, desítek, stovek</u> a případně tisíců. Pokud bude nákup zaplacený s vracením drobných, nebo pokud je použito více než 9 platidel jednoho řádu, nepodaří se zaplatit všechny nákupy.

Očekávání: Je možné, že žáci nebudou tolik soutěživí, když budou bojovat jako celá skupina proti hře, proto je tam prvek s odhadem času. Předpokládám, že se žáci budou trochu nadhodnocovat a neuvědomí si, jaký chaos může u této hry vzniknout. V rámci reflexe ale předpokládám, že chaos a nemožnost se domluvit jako překážku zmíní. Také očekávám, že jako téma odhalí velká čísla. Je možné, že někteří si všimnou i tématu řádů, nebo alespoň budou komentovat, že peníze nejsou reálné, ale mají hodnoty 1, 10, 100 a 1 000 – to už se jich mohu doptat, proč myslí, že tomu tak je a předpokládám odhalení souvislosti mezi penězi a řády.

Ze začátku žáci tipovali nadsazené časy a bylo vidět, že si z toho dělají legraci (10 hodin, 3 dny apod.), reálnější odhady byly 14 min., 5 min., 3 min. Žáky hodně lákalo během rozmisťování plateb mluvit. Občas něco špitli, většinu času se ale drželi. Brzy byla veškerá platidla u tabule, jen je museli správně distribuovat, protože vznikl předpokládaný chaos ohledně toho, kdo kam dal jakou minci nebo bankovku. Nakonec to zvládli za 4 minuty, 1 sekundu a 8 setin, což jak správně poznamenali, je skoro přesně mezi odhady 3 a 5 min. V reflexi říkali, že by jim pomohlo moci mluvit. Tázala jsem se, na čem konkrétně by se potřebovali domlouvat – hlavně uváděli, že by se potřebovali dohodnout na tom, kdo co nese, aby nevznikaly zmatky, že např. chybí jedna stovka, tak tři děti donesou jednu stovku. To jim podle jejich slov pak nejvíce ztěžovalo práci. Také říkali, že by jim pomohlo vyčlenit si jednoho hlídače, který by kontroloval, co je doneseno a ukazoval by, kam donesené platidlo položit. Při otázce, proč jsem jim aktivitu zadala, apelovali hlavně na spolupráci, také na tichost práce, ale k tématu čísel moc nesměřovali. Ptala jsem se tedy dál a upozornila, že spolupráce se dá rozvíjet i jinými aktivitami, tak proč jsem jim dala zrovna tuto. Navrhovali např.: *„Abychom se naučili platit v obchodě; Abychom se naučili platit i větší čísla,“* apod.

2) Tvořivý zápis čísla (15 – 25 min)

Otázka: *„Jak ještě můžeme znázornit čísla?“* – nechám žáky se zamyslet, ale neříkat své myšlenky nahlas. Každý žák si vylosuje jedno číslo (3-4ciferné). Úkolem je znázornit toto číslo jakkoliv a použít u toho cokoliv, co je ve třídě (a není to v osobním vlastnictví spolužáků). Jedinou podmínkou je, že nesmějí použít číslice (ujistím se, že vědí, co to znamená). Zadám žákům 7 minut na práci.

Když jsou čísla vymodelovaná, všichni žáci chodí a zkouší čísla přečíst – číslo, které rozklíčují, zapíšou na lísteček a položí ho lícem dolů k modelu čísla. Po uplynutí času (5-8 min) se autoři vrátí ke svému číslu a přečtou si lístečky.
Otázka: *„Přečetli spolužáci číslo tak, jak jste zamýšleli? Je vaše číslo čitelné? Jaká neporozumění se objevila? Čím to může být?*
Prostor pro diskusi.

Zdůvodnění: Žáci u takto vysokých čísel budou mít zřejmě sami potřebu využít řády a symbolizovat je, namísto, aby např. modelovali celou kvantitu tohoto čísla. Zároveň chci nechat žákům prostor pro zkoumání, že i hodnoty pozic jsou věc sice logická, ale stále arbitrární, stejně jako použití symbolu je věc smluvní, i když se snažíme, aby byl symbol pokud možno intuitivní (např. pokud žák použije různě velké objekty), spolužákům může dojít, že objekty znázorňují jednotlivé řády, ale bez dřívější dohody o symbolu si nemohou být jistí).

Očekávání: Tuto část nechávám poněkud volnou a jsem zvědavá, s čím žáci přijdou. Z mé zkušenosti jsou velmi kreativní, když dostanou svobodný prostor. Čísla si však vylosují, protože by jinak mohli tvořit čísla příliš malá nebo příliš velká, se kterými neumějí pracovat všichni jejich spolužáci (např. zlomky nebo mnohaciferná čísla). Předpokládám, že je napadne použít Dienesovy hranoly, dále je nasnadě poziční zápis pomocí kamenů, krychliček nebo jiných objektů. Podle mých zkušeností s některými žáky , budou chtít vymyslet něco speciálního a nespokojí se s klasickými modely (a předpokládám, že to bude na úkor čitelnosti čísla).

Žáci byli o něco méně tvořiví, než jsem očekávala. Většina pracovala s Dienesovými kvádry. Začali improvizovat až když jim došlo, že této pomůcky není dost pro celou třídu. Jen Amálka se od pomůcky zcela oprostila a použila Egyptský zápis čísla. Můj předpoklad, že některá budou vyžadovat kreativnější řešení, se naplnil nepředpokládaným způsobem – místo aby hledali jiné zápisy čísla, stavěli z pomůcky různé stavby – věže, vatry apod. To snižovalo čitelnost čísel, což i zaznělo v reflexi. Bylo by pravděpodobně pomohlo, kdybych jim předem řekla, že si pak budou čísla vzájemně číst, aby tomu mohli uzpůsobit svůj model. Někteří žáci hned věděli, co chtějí dělat. Jiní tápali a chtěli si znovu vylosovat číslo, protože např. bylo moc velké (Amálka). Vítek bědoval, že nemá dost materiálu (Dienesovy kostky), aby postavil tak velké číslo. Venda (žák s SVP) svoje číslo ani nedostavěl, a celkově se v této aktivitě zasekl na tom, že potřebuje víc tyčinek a dále se odmítl účastnit. Během aktivity se několik žáků ptalo, jestli placka je stovka, krychle tisícovka apod. Břéťa se ptal, jestli se počítá i *„to vevnitř“* (u tisícové krychle). Odkázala jsem je na jejich vlastní úsudek a představu, ale mezi sebou si to slovně ujasnili. Většina žáků bez obtíží přečetla vymodelovaná čísla. V reflexi zaznělo, že jednodušší bylo číst čísla, která jsou uspořádaná a mají tisíce u sebe, stovky u sebe atd., a zároveň nejsou kostky moc schované (jako např. tyčinky pečlivě vyskládané do kvádru). Také vznikla stížnost na Amálčin zápis – bylo prý podmínkou nepoužívat číslice a egyptské číslice jsou stále číslice, jen egyptské. Žáci se v kruhu usnesli, že tento Tomášův podnět přijímají a egyptské číslice jsou také číslice.

3) **Kruhová reflexe** (7 – 10 min)

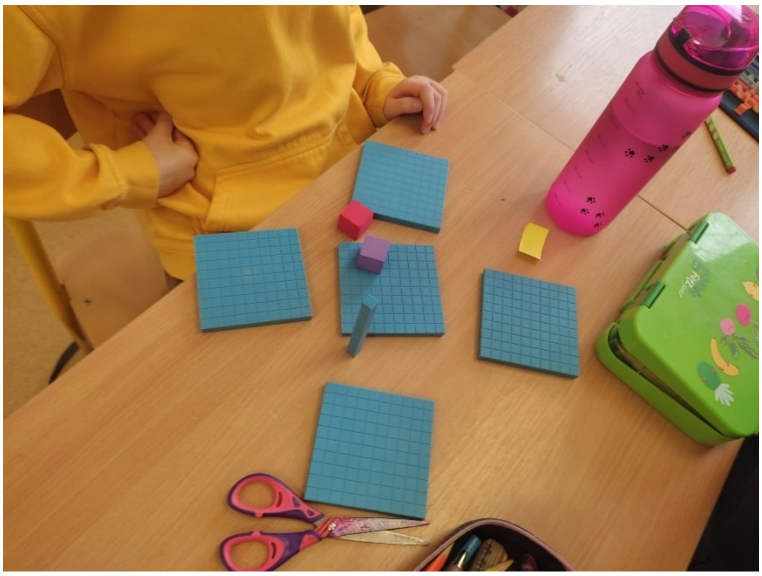
Každý žák si vezme do ruky jeden kamínek. Žáci se posadí do kruhu. Připomeneme si, co se v dnešní hodině dělo. V kruhu každý, kdo zrovna bude mít nápad, řekne jednu myšlenku z dnešní hodiny a položí kamínek doprostřed kruhu. Podle počtu kamínků v kruhu poznáme, zda už mluvili všichni.
Pokud by žáci hned neměli vlastní myšlenku, mohou odpovídat na otázku: *„Co už jste znali dříve a co vám naopak přišlo nové a třeba zajímavé?“*

Zdůvodnění: Žáci si připomenou aktivity z celé hodiny a verbalizují pro ně klíčové myšlenky.

Očekávání: Předpokládám, že žáci budou komentovat především fázi hledání zápisů, případně to, jak je spolužáci přečetli či nepřečetli.

Žáci nejdřív moc nevěděli, jak na otázku reagovat. Ze začátku nedokázali formulovat svoji myšlenku. Poté zaznělo, co si vzali z jednotlivých aktivit, ale spíše povrchní věci. Odkazovali se na spolupráci, na placení v obchodě, trochu i na práci s pomůckou.

Příloha 3



Příloha 3

Vstup 2 (10 – 15 min)

Téma: Poziční zápis desítkové soustavy
Pomůcky: mazací tabulky, diatonické zvonky

Žáci si připraví mazací tabulky. Nejdřív představím jednotlivé řády, což budou tóny (c' = 1, e' = 10, g' = 100, c'' = 1 000). Údery zvonků budu vytvářet různá čísla. Ze začátku odkrytě, pak zvonky zakryji a žáci se budou moci spolehnout jen na sluch. Nejdřív budu vytvářet čísla postupně od nejvyšších řádů/tónů po nejnižší, pak i střídavě. Úkolem žáků je odhalit a na tabulku zapsat znázorněné číslo. Po několika číslech si shrneme, jaká čísla třída odhalila.

Otázky: *„Která čísla byla jednodušší odhalit? … V čem ta ke konci byla složitější než ta na začátku? Měl způsob, jak si pomoct?“*

Doplňující otázka: *„Do čeho ještě by šlo ukrýt číslo?“*

Zdůvodnění: Tato aktivita má vnést nový model čísla (proces) – žáci zde nevidí číslo jako celek (hotový koncept) a tak si nemohou vybrat, v jakém pořadí budou číst jednotlivé řády. Přesto ale hodnoty jednotlivých řádů hrají důležitou roli, čímž chci navést žáky na to, že zapisujeme čísla pozičně (a řády jsou uspořádány), abychom se v nich orientovali snáze.

Očekávání: Může se stát, že pro žáky bude překážkou samotné rozeznávání výšky tónů. Pokud se to stane, budu vytvářet čísla nezakrytě. Očekávám, že ze začátku žáci přečtou čísla snadno, mnozí si je pravděpodobně ani nebudou zapisovat v procesu, ale až po zaznění celého čísla. Jakmile začnu hrát řády střídavě, předpokládám, že si začnou na mazací tabulky značit procesuální zápis – např. číslice na jednotlivé pozice, někteří si možná vytvoří tabulku jako u Kamenů a budou si zaznamenávat každý úder zvonku do příslušného řádu a teprve na konci ze svého zápisu přečtou číslo jako celek. U doplňující otázky předpokládám, že žáky napadnou další necelostní modely jako např. hra na tělo (tlesknu, plesknu, dupnu), tanečky apod.

Pondělí 19. února 2024, 2. VH

Jednalo se o pondělí po jarních prázdninách. Předtím jsme hráli bingo na zbytky po dělení, protože jsem chtěla, aby měli u sebe mazací tabulky, ale zároveň jsem jim pokynem: *„Vezměte si tabulky,“* nechtěla v aktivitě napovědět – nakonec na ně i psali slyšená čísla.

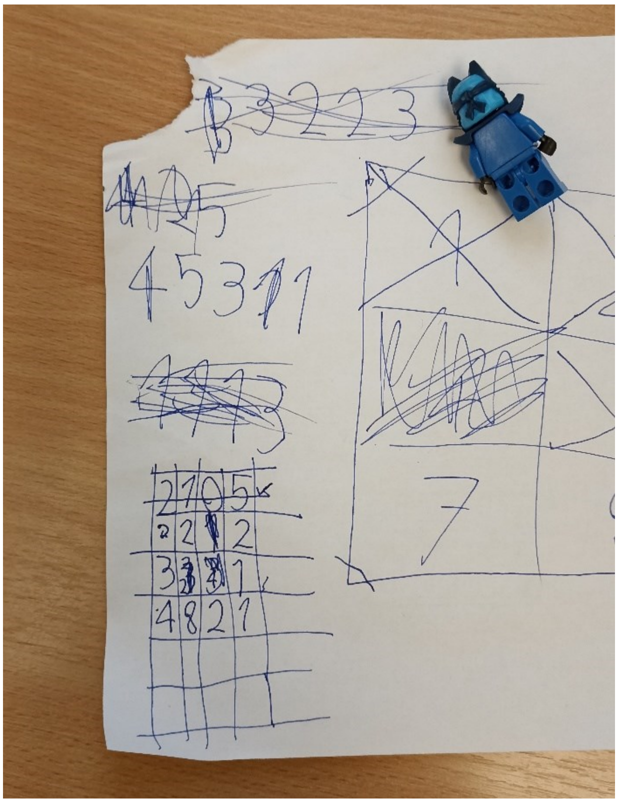
Odkryté zvonky a seřazené řády jim šly snadno, chyby se vyskytovaly pouze ve správném spočítání vyšších hodnot. Zpravidla chtěli, abych jim to zopakovala. Jakmile jsem řády prohodila, většina žáků to potřebovala zopakovat vícekrát, protože se snažili všechny 4 řády udržet v hlavě. Honzík hlasitě zabědoval, že jsem mu zkazila strategii – psal si číslice hned, když je slyšel. Ihned však Honzíka napadla strategie nová – tabulka. Párkrát si ji vyzkoušel a osvědčila se mu. Poté jsem ho vyzvala, ať ji představí ostatním. Honzík si udělal tabulku řádů, řády sice neměl nadepsané, ale fungovalo to obdobně jako prostředí

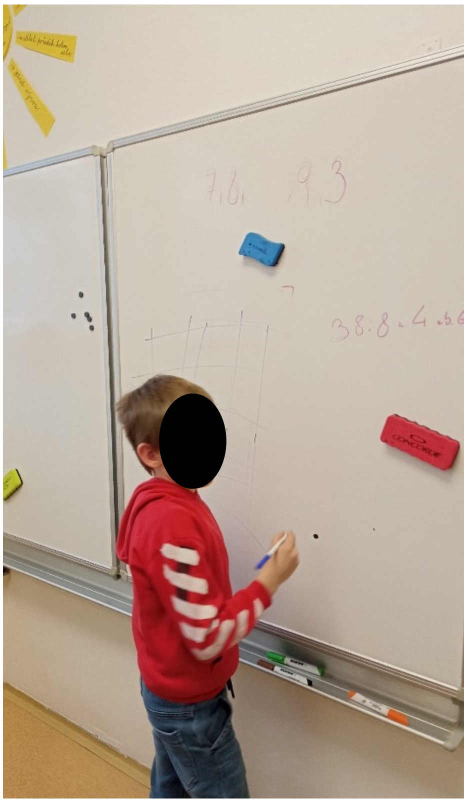
Příloha 3

Kameny. Do okének daného řádu už si zapisoval hotovou číslici. Nedělal čárky, jak jsem předpokládala, že se může u žáků objevit. Kajka také zapisovala rovnou číslice na danou pozici, ale pozice neměla pevné (např. v tabulce), proto se jí stalo, že při zápisu čísla 215 zapsala 2015 (mezi 2 a 15 měla větší mezeru, proto si myslela, že zapisovala 2 na pozici tisíc, ne stovek).

Aktivita se žákům líbila. Všichni spolupracovali. Zakryté zvonky pro ně byly těžší, ale nepojmenovali konkrétně, proč – jen to, že na to neviděli. Většina i zakryté zvuky zvládala velmi dobře.

K otázce, jak ještě se dá znázornit číslo, jsme se už nedostali, protože přišel konec hodiny.





Příloha 3

Vstup 3 (15 – 20 min)

Téma: Kombinace
Pomůcky: kameny, podložky/tabulky

100	10	1

Otázka: *„Platí, že čím více kamenů číslo má, tím vyšší je?“*
Nechám žáky argumentovat.

Zadání: *Jaká čísla lze vytvořit pomocí 3 kamenů?*
Každý žák si může vybrat, kde a s jakou pomůckou chce pracovat – mohou si načrtnout tabulku, nebo využít Montessori podložky. Na tabuli načrtnu prázdnou tabulku 100|10|1, ale nebudu ji nijak komentovat. Možná některý z žáků přijde s návrhem, že se dá řády rozšířit a že např. řešení 3 000 je také legitimní.

Kdo by byl hotov, může hledat řešení pro 4 kameny.

Po samostatném hledání si se třídou sepíšeme odhalená čísla. Nalezená čísla napíšu na tabuli. Zeptám se, zda už opravdu neexistují další řešení, případně, zda někdo dokáže zdůvodnit, proč ne. Zeptám se žáků, které číslo ze tří kamenů je největší a které nejmenší (případně, zda by takovéto uspořádání platilo i pro více kamenů). Pokud v diskusi u první otázky nepadne názorný argument, nechám žáky nejvyšší a nejnižší číslo z tohoto cvičení vymodelovat pomocí Dienesových kvádrů, na kterých je vidět, že jednotlivé objekty mají různou kvalitu (3 kameny = 3 objekty, ale není jedno, zda vezmu hranolek, placku nebo velkou krychli).

Zdůvodnění: Počáteční otázkou chci navodit přemýšlení v prostředí Kameny. Žáci si vybaví, jak prostředí funguje a co znázorňují Kameny v jednotlivých řádech. V následující aktivitě hraje roli myšlenka ciferného součtu (počet kamenů) a jeho distribuci. Žáci odhalují, že pozice číslice hraje v zápise významnou roli (v pozičních soustavách). Kromě toho žáci rozvíjejí kombinatorické myšlení a způsoby evidence nalezených možností.

Očekávání: U první otázky předpokládám, že žáci snadno odhalí, že tvrzení je nepravdivé. Předpokládám, že ne všem hned dojde, že kameny znázorňují jednotlivé řády, proto potřebuji vyvolat diskusi, aby si tuto skutečnost třída oprášila a mohla s ní dále pracovat. Je možné, že si někteří žáci ze začátku nebudou nalezená čísla evidovat a dojdou k této potřebě až v průběhu.

Středa 21. února 2024, 2. VH

Na začátku hodiny jsme hráli na tělo různá čísla: snožný výskok = 1 000, plesknutí o hruď = 100, tlesknutí = 10, lusknutí = 1. Nejdřív jsem ukazovala já, poté žáci dobrovolníci. Honzíkova tabulka vzniklá ve Vstupu 2 se značně rozšířila a používaly ji i další děti. Došlo k mnoha zajímavým momentům.

Nejdřív jsem chtěla, ať si v tabulce vymodelují nejnižší možné číslo a pak nejvyšší možné číslo. Prohodila jsem toto na začátek, protože to bylo jejich první hromadné seznámení s prostředím Kameny a chtěla jsem, abychom si ujasnili, jak s tabulkou a kameny pracovat.

Příloha 3

Hledání čísel bylo mnohem rychlejší (a nudnější) než jsem čekala. Dala jsem jim na to pro začátek pět minut a stejně byla většina hotová dřív. Velká část našla všech 10 řešení. Břéťa, zdá se, postupoval systematicky, ale on sám v tom systém neviděl, neboť na zeptání odpověděl, že v tom systém nemá. Na tabuli jsme si pak vypsali všechna řešení. Někteří žáci si byli jistí, že to jsou všechna, ale nebyli s to to dokázat. Ke konci už jsem moc nevěděla, na co se ještě ptát.

Dále bychom mohli pracovat s organizačními principy a s propojením tabulky a Dienesů, ať to vidí a uvědomí si i méně matematicky zdatní žáci.

Příloha 3

Vstup 4 (20 – 30 min)

Téma: Hodnota pozice při sčítání
Pomůcky: mazací tabulky nebo papíry

Pokyn: *„Napište si na tabulku libovolné dvojciferné číslo. Prohoďte číslice. Najděte součet obou čísel."* Mezitím budu také psát na tabuli svůj příklad. *„Jaké číslo vám vyšlo?"* - nechám pár dětí odpovídat. *„Kdo z vás má nejmenší číslo a kdo největší?"*

„Dám vám čas. Zkuste najít takové číslo, které se po prohození číslic a sečtení rovná 100, nebo se 100 alespoň blíží." Na tabuli předepíšu: AB + BA = 100

„Povedlo se? Jaké je nejbližší číslo?" – podle toho, jak budou reagovat se i zeptám, proč spousta čísel končí ve formátu CC a jestli tak dopadnou všechna čísla. Další reakce podle diskuse a podle toho, s čím přijdou žáci.

Zdůvodnění: Jelikož je sčítání komutativní, prohozením číslic pak sčítají stejné číslice, a tudíž jim vždy vyjde násobek 11. Je ale na nich, aby to objevili. Číslo 100 není možné tímto součtem vytvořit (byly by potřeba číslice s neceločíselnou hodnotou). Žáci tím ale prozkoumají hodnotu pozice a koncept ciferného součtu.

Očekávání: Předpokládám, že si žáci brzy všimnou, že hodně čísel končí ve formátu CC. Budu po nich chtít zdůvodnění a očekávám, že se najde někdo, kdo vysvětlí, že se vlastně sčítá stejné číslo a sčítání je komutativní (jejich slovy). Předpokládám, že bude pro žáky obtížnější vysvětlit, proč tomu tak u trojciferných součtů není, ale také, že se najde někdo, kdo to vysvětlí a zdůrazní přechod přes desítku. Je také možné, ale spíše to nepředpokládám, že si žáci všimnou, že i trojciferné součty jsou dělitelné 11. Pokud na to přijdou, budu chtít zdůvodnění, proč tomu tak je a jestli to platí pro všechna dvociferná čísla vystavená našemu algoritmu.

Ohledně hledání součtu 100 je možné, že žáci nepřijdou na to, že takový součet neexistuje a pokud ano, nejspíše na to půjdou metodou vyčerpání všech možností, resp. úseku mezi 99 a 110.

Středa 21. února 2024, 4. VH

Úloha se nesetkala s velkým nadšením. Myslím, že byla pro žáky na první dojem příliš jednoduchá, a tudíž nedostatečně atraktivní, aby chtěli prozkoumat její hloubku. Fanda hned po zadání tvrdil, že součtu 100 nebude možné dosáhnout. Chtěla jsem po něm, ať zkusí vysvětlit, proč si to myslí, ale toho nebyl schopen.

Žáci poměrně rychle začali tvrdit, že stovku udělat nepůjde a opakovaně se mě dotazovali, jestli jsem to zkoušela, jestli to jde apod. Nejblíže byla čísla 99 a 110. Stále se opakovali, že stovka spíše nepůjde, ale nikdo nedal dostatečný důkaz. Fanda si stál za svým, vyzvala jsem ho, ať přesvědčí třídu. Vznikl hezký moment, když Fanda oslovil třídu specificky: *„Tak třído, věříte mi?"* a všichni ho podpořili souhlasným: *„Joo!"* Chtěla jsem po třídě, ať tedy přesvědčí mne. Žáci byli naklonění tomu, že 100 nepůjde, ale když jsem se ptala, zda výsledek bude něco mezi 99 a 110, všichni odpovídali, že spíše ano. Najít takové číslo však nedovedli. Žáci navrhli všechny možností pro číslo 110, přičemž si sami řekli, že 37 a 73 budou počítat jako jedno řešení. Na tabuli jsem tato čísla jen obloučkem spojila. Pro číslo 99 nabídli několik možností, ale nevyčerpali všechny. Říkali, že už mají všechny, ale spíše se jim už nechtělo přemýšlet. Když jsem se zeptala, jestli by to mohlo být i číslo 18, řekli, že ano, ale další možnosti už spíše vyloučili (ještě chybělo 27 a 90). Ptala jsem se, jak dokázali tak rychle přijít na tolik řešení pro 110 a 99. Svůj dotaz jsem zdůvodnila tím, že jsem je pak už neviděla počítat, takže na to asi měli nějaký trik. Honzík odpověděl, že si všiml posloupnosti *mínus 10 plus 1* (sic). Ptala jsem se, jestli mají všechna tato čísla něco společného. Odpovídali poměrně povrchně – že jsou to všechno dvouciferná čísla, že všechna pak dají součet 110, nebo dokonce, že jsou všechna napsaná na tabuli. Dále téma neprohlubovali. Břéťa si ale všiml, že všechna čísla pro 99 jsou násobky 9 (sama jsem si toho dříve nevšimla). Na význam ciferného součtu v tomto algoritmu nepřišli a už jsem je nechtěla dále trápit. Přesto se ze mě snažili vytáhnout, jestli 100 půjde udělat.

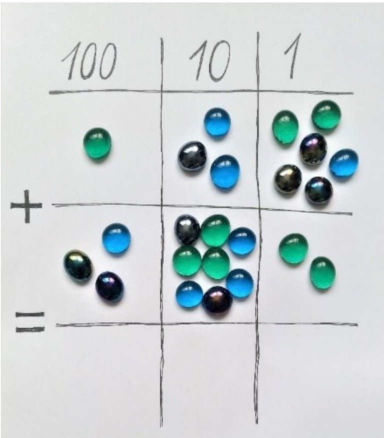
Úloha: *„Najdi součet AB a BA, který bude mezi 99 a 110,“* byla posléze doplněna na nástěnku výzev.

Příloha 3

Vstup 5 (20 – 30 min)

Téma: Aditivní operace a přechod přes desítku
Pomůcky: magnety, tabule, lístečky s úlohami, podložky, kameny

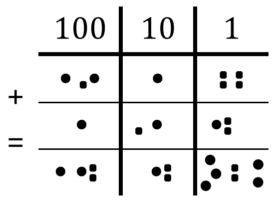
Notice&Wonder: Vymodeluji pomocí magnetů na tabuli tabulku jako na fotografii a vyzvu žáky, aby říkali, čeho si na tabuli všímají a co je k tomu napadá.

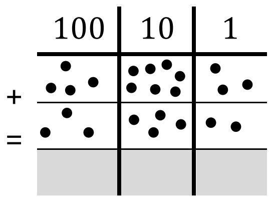


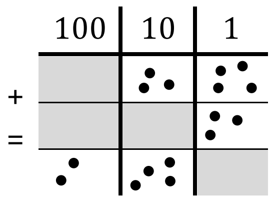
Zdůvodnění: Žáci se seznámí s tím, že v prostředí Kameny lze čísla nejen modelovat, ale i s nimi dále operovat. Doufám, že bychom se mohli dostat k problematice přechodu přes základ, případně i k odčítání.

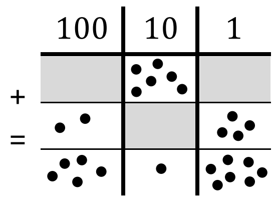
Očekávání: Předpokládám, že žáky rychle napadne, že je to klasické sčítání pod sebou, jen v prostředí Kameny. Jsem ale zvědavá, jaké myšlenky budou mít dál. Možná někoho napadne „padání" kamínků (obzvláště, když to bude na svislé tabuli), možná někdo odhalí přechod přes desítku – pravděpodobně jinými slovy.

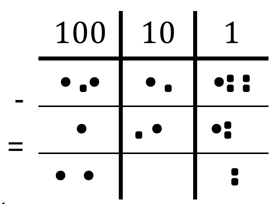
Poté žákům rozdám lístečky s úlohami. Zeptám se, co asi bude naším úkolem.

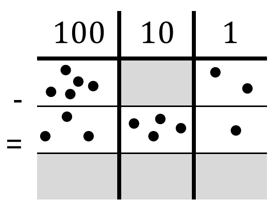


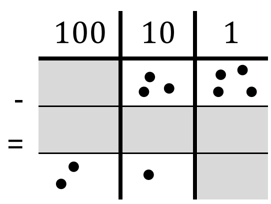


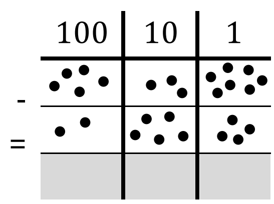




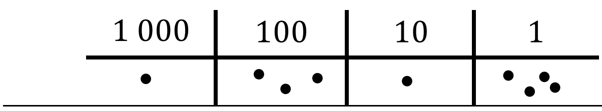


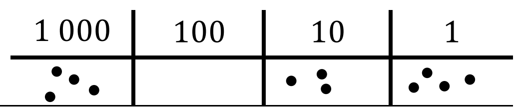




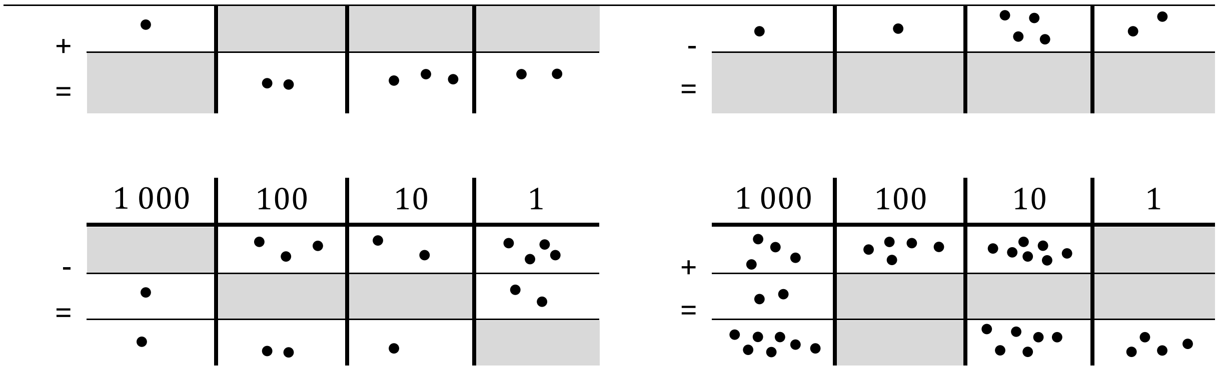


Žáci budou samostatně řešit úlohy, mohou si pomoct mazacími tabulkami a kameny. Pokud bude potřeba, budou k dispozici i Dienesovy kvádry. Pokud bude někdo brzy hotový, může si přijít pro další úlohy:





Příloha 3



Jakmile budou všichni hotovi s prvním lístečkem, sjednám si pozornost a se třídou probereme, jaká mají řešení a jakým způsobem úlohy řešili.

Zdůvodnění: Žáci si procvičí aditivní operace v prostředí Kameny. Pracují s přechodem přes základ.

Očekávání: Předpokládám, že slabší žáci mohou mít problém s přechodem přes desítku, neboť v prostředí Kameny není přechod tak intuitivní jako na Dienesových kvádrech. Může to ale přinést dobrý podnět do třídní diskuse – zda může být v jednom okénku 10 a více kamenů. Předpokládám, že někdo přinese strategii kamínky shrnovat dolů, což bude fungovat u sčítání, ale nikoliv u odčítání. U odčítání je potřeba si uvědomit, že Kameny v nižším řádku mají zápornou hodnotu – jsou to jakési antikameny, které při setkání s kladným kamenem kladný kámen pohltí a zaniknou. Názornější příklad by byl s důlky místo kamenů v odčítacím řádku. Předpokládám, že to děti odhalí a budou namísto shrnutí dolů, budou kamínky z obou řádků odebírat.

Pondělí 26. února 2024, 3. VH

N&W: Už když jsem to modelovala, čísla četli: 125, 392. Když jsem se jich ptala, co je k tomu napadá, Honzík ihned řekl výsledek sčítání. Asi by bylo lepší si to připravit na zavřenou část tabule a pak ukázat až jako celek. Když jsem se ptala, co je k tomu napadá dál, nejdřív vůbec nevěděli. Považovali výsledek za hotovou a jedinou věc, co k tomu lze říci. Vyzývala jsem je ale dál, jestli můžeme o tom na tabuli něco říct.

- Břéťa: *„Kdybych vzal jeden kámen (ze 3S) a dal ho sem (k 9D), tak bych tu měl 10 a musel bych dát jeden zase zpátky sem (ke stovkám).“*
- Fanda: *„Když odeberu jeden tady (z 3S), tak budu mít číslo o 100 menší, když i tady (z 1S), tak o dvě stě.“*

Když nepřicházel další nápad, ptala jsem se, jak poznali, co s tím mají dělat, když hned řekli výsledek. Timča: *„Protože je tam to plus.“* Nikoho nenapadlo shrnovat kamínky dolů, a to ani později na podložkách, se kterými pracovali Venda a Kajka (a zprostředkovaně Timča vedle ní).

Úlohy: Když jsem jim dala lístečky, chtěla jsem se nejdřív pobavit o tom, co na lístečcích je a co s tím nejspíš máme dělat. Většina ale okamžitě začala lístečky vyplňovat, někteří volali o pomoc, že nevědí, co mají dělat. Moje chyba byla, že jsem je předem neupozornila, že si chci o lístečcích nejdříve povídat. Všechny jsem zastavila a ptala jsem se, co vidí.

- Fanda: *„Tady to první je vzor.“*
- U: *„Aha, a jak jsi to poznal?“*
- Fanda: *„Protože tam není prázdné políčko.“*
- Břéťa: *„A protože to vychází.“*
- U: *„A co tedy asi budeme doplňovat a kam?“*
- Kajka: *„Do toho šedého.“*
- Honzík: *„A můžeme tam doplňovat hned čísla?“*
- U: *„Pokud vám to vyhovuje víc než kamínky, tak ano.“*

Žáci si vzájemně pomáhali. Kajka a Venda si vzali podložky a skleněné kamínky. Obcházela jsem je a odpovídala na dotazy. Honzík a Břéťa byli velmi rychle hotovi, vzápětí i Vítek a Pavel. Druhý lístek byl pro ně viditelně výzvou. Častou obtíží žáků bylo doplnění prostředního čísla, když sloupec obsahoval přechod přes desítku. Kajka s Timčou měly problém už u první úlohy, protože šly ze začátku zleva doprava a doplňovaly kamínky. Nejdříve zapsaly výsledek 715. Když jsme si to s Kajkou modelovaly na podložce a ptala jsem se jí, kolik je 11 desítek, po chvíli odpověděla, že 110. Ptala jsem se jí, jak by to tedy znázornila kameny. Váhavě navrhla, že tedy musí dát jednu stovku a pak ještě deset. Venda měl podobný problém, ale po otázce: *„Kolik tady máš desítek?“* se chytil a kamínky si sám vyměnil na jednu stovku.

Jelikož se blížil konec hodiny, nečekala jsem, až budou mít první lístečky všichni celé. Některým chyběly některé odčítací úlohy. Společně jsme si prošli řešení prvního řádku úloh.

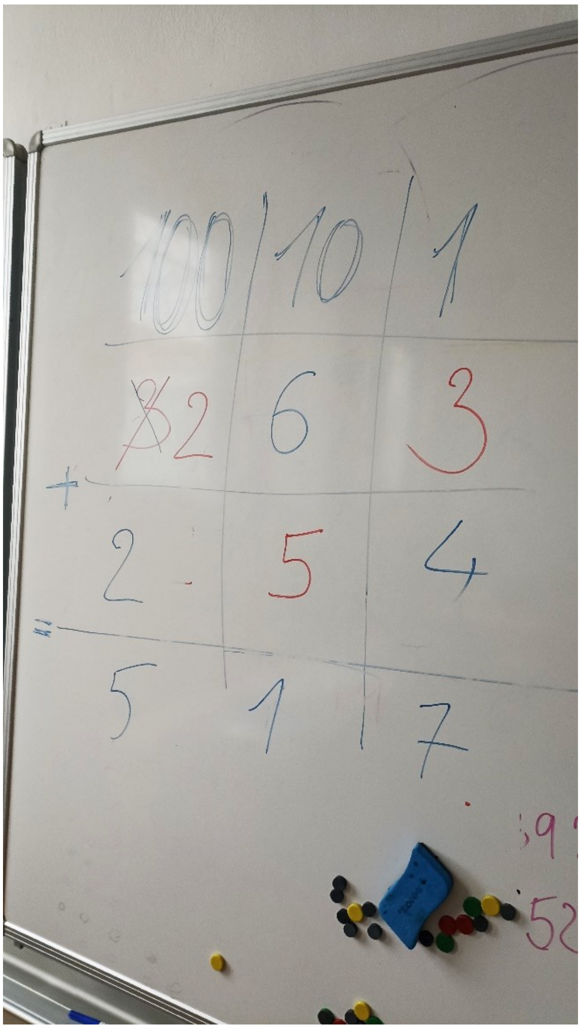
Losem jsem pro první úlohu zvolila Timču. Timča doplnila 815. Ptala jsem se, jestli někdo měl s touto úlohou problém, ale žáci se nepřiznali. Řekla jsem tedy sama, že tato úloha byla trochu problematická a ptala jsem se, jestli by dokázal někdo říct, proč asi mohl být s touto úlohou problém. Nikdo ale přechod přes desítku nepojmenoval. Pavel říkal, že nechápe, jak s tím mohl mít někdo problém – podle mě ale tušil, o co jde a měl potřebu se trochu vytáhnout. Když nikdo nezmínil kritické místo, šla jsem dál.

U druhé úlohy vylosovaný Břéťa navrhl řešení 2/0/1/7. Nikdo neprotestoval, všichni souhlasili. Ptala jsem se, jestli to má někdo jinak. Timča se ptala, jestli by mohlo být i 1/1/1/7. Napsala jsem její řešení na tabuli a ostatní souhlasili. Ptala jsem se tedy dál, jestli má tedy tato úloha dvě řešení. Vítek navrhl, že by ještě vlastně šlo prohodit dvojku a nulu (sic). Omylem jsem napsala 1/2/1/7 a chvíli to bylo na tabuli. Posléze mě Fanda opravil, že jsem asi chtěla napsat 0. Poděkovala jsem a opravila jsem řešení na 0/2/1/7. Na mou otázku, zda tedy toto jsou už všechna řešení Pavel směle navrhl, že by ještě šlo 1 celá 5 (sic). Ostatní ale nesouhlasili, protože by musel vzít půl kamene. Já jsem se ptala, jaké číslo by tady kámen a půl znamenal, Břéťa odpověděl, že 150. Pavel reagoval: *„Jo, aha. To by muselo být v desítkách.“*

U třetí úlohy vylosovaný Pavel navrhl 3/5/3. Honzík protestoval jako první, ale mírně nejistě, což pro něj není typické. Navrhl, že by to mělo být 2/5/3. Pavel silně nesouhlasil, protože 3 + 2 je 5. Fanda: „Jo, ale tam těch kamenů je víc jak deset.“ I děvčata začala souhlasně přikyvovat. Vítek vysvětloval, že ještě jedna stovka je v desítkách. Pavel stále nesouhlasil a ptal se, jestli může použít kalkulačku. Ověřil si na kalkulačce součet 363 a 254 a po chvíli odkývl, že už mu to dává smysl a že tam má být dvojka.

Úlohy s odčítáním jsme nestihli. Taky jsem s žáky nereflektovala, jestli pro ně bylo důležité, zda postupovali od jednotek ke stovkám nebo od stovek k jednotkám a případně proč.

Ještě o přestávce mě Břéťa prosil, zda bych mu pomohla. Řešil v těžším lístečku, že by tam měl být – 1 kámen. Snažila jsem se ho nasměrovat, aby určil, co se vlastně děje, když ve víceciferném čísle odčítá větší číslici od menší. Napsala jsem mu úlohu 24 – 15. To vypočítat dokázal. Ptala jsem se, co dělal, když musel odečíst 5 od 4. Říkal, že to odečetl od 25. Napsala jsem mu tedy 324 – 215. Tam už použil algoritmus a pojmenoval, že to bere z těch desítek. S tímto jsem ho už nechala, ať zkusí úlohu vyřešit. Úlohu posléze vyřešil a výsledek si ověřil s kalkulačkou. Jedna číslice mu stále nevycházela, protože si sice rozměnil tisíc na stovky, ale zapomněl z tisíců ten kamínek vyškrtnout. Poukázala jsem na to a on zareagoval: *„Jo, no jo.“*



Vstup 6 (10 – 15 min)

10	1

Téma: Pravidlo devítky
Pomůcky: kameny, podložky nebo tabulky, Dienesovy kvádry

Zadání: *Vezměte si 1 až 9 kamenů a vytvořte libovolné dvouciferné číslo. Číslo si zapište. Přesuňte jeden kámen do jiného sloupce. Nové číslo si také zapište. Jaký je rozdíl těchto dvou čísel?*

Nejdřív nechám žáky samostatně pracovat a zkoumat různá čísla, dokud všichni nebudou mít vyřešeno alespoň jedno. Poté žáky utiším a zeptám se, komu vyšel rozdíl 1, 2, 3, …, 9? Podivím se, že všem vyšlo 9 a vyzvu žáky, zda by dokázali najít takové číslo, aby po přesunutí jednoho kamene nebyl rozdíl 9. Pokud se časem nikdo nepřihlásí, že dokáže vysvětlit, proč takovéto číslo neexistuje, ukončím aktivitu já a uzavřeme, že jsme zatím takovéto číslo nenašli.

Na závěr žákům předvedu kouzlo. Nechám je z libovolného počtu kamenů od 1 do 9 složit číslo a přesunout do vedlejšího řádku libovolný počet kamenů (pouze jedním směrem, nikoliv tam a zpátky). Předestřu, že když mi řeknou, jaký jim vyšel rozdíl jejich dvou čísel, řeknu jim, kolik kamenů přesunuli.

Zdůvodnění: Žáci by měli přijít na to, že rozdíl mezi čísly bude vždy 9. Pokud budou pracovat s tabulku jako s přechodem mezi řády, přijdou na to, že přesunutím kamene z jednotek do desítek od čísla odečítají 1 a přičítají 10, naopak z desítek do jednotek odečítají 10 a přičítají 1. Kouzlo zadám jako doplňující aktivitu. Pokud některé žáky zaujme, předpokládám, že budou sami chtít přijít na to, jak to matematicky funguje, aniž bych je musela slovně vyzývat, aby princip kouzla odhalili

Očekávání: Ve třídě budou pravděpodobně rozdíly v rychlosti výpočtů. Někteří žáci zřejmě budou zkoušet už několikátý rozdíl a sami se podiví nad tím, že jim vychází vždy 9. Předpokládám, že zejména nadané žáky ze třídy tato aktivita zaujme a důvod, proč je to vždy 9 brzy odhalí, přesto ale pro ně nebude automatické poznatek zobecnit i na vyšší počet kamenů a odhalit podstatu kouzla – i když jim věřím, že časem přijdou i na to.

Úterý 27. února 2024, 6. VH (suplovaná hodina)

Ze začátku bylo pár nejasností ohledně toho, jak algoritmus funguje a taky měli problém s pojmem *rozdíl*. Chvíli trvalo, než jsme si všichni ujasnili, že je potřeba odčítat, a to konkrétně menší číslo od většího. Po zadání, ať zkusí pár dalších čísel najít sami a najít případ, kde rozdílem není devítka, Vítek hned zahlásil: *„To nejde!“* Nedokázal a nechtěl ale vysvětlit proč. Žáci si vyzkoušeli několik operací – někdo více, někdo méně. Všem vyšly samé devítky. Když se někdo hlásil, že má něco jiného, společnou kontrolou jsme přišli na to, že udělal chybu v odčítání. Ptala jsem se, jestli bude existovat číslo, pro které pak nevyjde rozdíl 9. Shodli se, že ne, ale jejich vnímání bylo spíše intuitivní. Honzík se snažil vysvětlit, proč to nejde: *„Protože se jedno číslo zvětšuje a druhé zmenšuje.“* Ukazoval to na tabuli na příkladu 53 → 44, ukazoval na desítky a na jednotky. Trochu se v tom ale zamotal a většinu času jsem i já tápala v tom, co se snaží říct. Timča řekla, že Honzíkovo zdůvodnění nejspíš pochopila, ale vlastními slovy to říct nakonec nedokázala. Třída jako celek však měla s pochopením látky problém. Myslím, že to bylo i mimo aktuální zájem většiny z nich.

Na závěr jsem zadala kouzlo. Několik žáků to na mě vyzkoušelo, někteří i opakovaně. Pro zrychlení a udržení motivace v takto pozdní hodině jsem jim dovolila použít kalkulačku na mobilu. Dva žáci toho využili. Břéťa po chvíli vykřikl: *„Já už vím!“* Zjistil, že jsou to všechno násobky devíti a že to číslo, které devítku násobí (sic), je počet přesunutých kamenů.

Příloha 3

Vstup 7 (20 – 30 min)

Téma: Směňování řádů
Pomůcky: Dienesovy kvádry

Žáci budou pracovat ve skupinách. Každá skupina obdrží lístečky s otázkami typu „Kolik 1 se vejde do 100?“ Úkolem žáků je jakkoliv zjistit odpovědi na dané otázky.

Poté si jejich odpovědi společně projdeme.
Otázky: *„Jakým způsobem jste hledali odpovědi? Co vám pomohlo?“*

Zdůvodnění: Otázky jsou záměrně rozstříhané na jednotlivé lístečky. Je na žácích, zda budou odpovídat nahodile, nebo si nejdřív otázky uspořádají. Cílem je jednak uvědomit si, že odpovědí jsou vždy hodnoty řádů v desítkové soustavě, ale také získat zkušenost s uspořádanou a neuspořádanou množinou tohoto typu úloh.

Očekávání: Žáci se do úloh pravděpodobně nejdřív pustí nahodile, někteří možná ani u vyšších řádů nebudou využívat pomůcku. Předpokládám, že si záhy všimnou, že jsou otázky typově podobné a začnou si je třídit podle kritéria dělitele nebo dělence (kolik ČEHO se vejde do čeho; kolik čeho se vejde do ČEHO). V obou případech žáci odhalí, že se odpověď na otázku zvyšuje po řádech. Nepředpokládám to, ale je také možné, že někteří žáci si vytvoří tabulku – v tom případě nejsnáze odhalí obousměrnou pravidelnost v odpovědích.

Čtvrtek 29. února 2024, 1. VH (suplovaná hodina)

Jako úvodní aktivitu jsme hráli hru, při které jsem losovala číslice a oni si každou novou museli vložit na danou pozici. Snažili se docílit co nejvyššího čísla. Posléze jsme si čísla četli a oni určovali, které číslo by bylo největší možné z daných číslic. Velmi je to bavilo, tak jsme zvyšovali obor. Začali jsme na čtyřmístných číslech, pokračovali pěti-, šesti- a skončili sedmimístnými čísly. Velmi rychle pochytili i princip, jak takto velká čísla číst. Sami už ale vnesli předporozumění, věděli, že milion má 6 nul a miliarda 9 (Maty nejdřív navrhl 7, ale pak se opravil, že by to bylo 10 milionů). Mezitím jsem zmínila mezery v čísle – zda už někdy viděli zápis čísel s mezerami a proč si myslí, že tam asi ty mezery jsou. Snadno odhalili, že místo mezer říkáme třídy řádů (svými slovy).

Pracovali ve skupinách po 3. Velmi rychle měli nalezené odpovědi na všechny otázky (první skupina za pět minut, poslední za 7). Jako gradaci jsem jim dala další otázku: *„Kolik otázek by přibylo, kdybych přidala řád desetitisíců?“* Tímto jsem se je snažila vést k organizaci otázek nebo uvědomění jejich pravidelnosti, žáci totiž rychle našli odpovědi a organizační princip tudíž vůbec nepotřebovali.

Honzík zapisoval čísla menší než jedna jako zlomky (místo očekávané 0). Zbytek jeho skupinky tomu nerozuměl, ale Honzíkovi pro jeho neústupnost věřili, že ví, co dělá. Ostatní skupiny používaly nulu. Po hodině jsem se Honzíka zeptala, odkud takovéto zlomky zná. Říkal, že se zlomky mohou psát buď takto (napsal na tabuli zlomek $\frac{2}{10}$), nebo takto (napsal zlomek 2/10) a že to viděl v autě a ptal se táty, co to znamená.

Společná reflexe byla trochu chaotická. Žáci si otázky nijak neuspořádávali. Pomůcky si sice nabrali, ale přišlo mi, že je příliš nepoužívali. Ptala jsem se tedy, na kolik otázek byla odpověď 1, 10, 100… Honzíkovi přišlo zajímavé, že jsou odpověďmi po sobě jdoucí čísla. Na rozšiřující otázku Maty našel odpověď 5. Zkoušeli jsme si sepsat otázky, které by přibyly. Třída nadiktovala kolik 1, 10, 100 až 10 000 se vejde do 10 000. Maty pak navrhl, že ještě vlastně chybí všechny opačné (kolik větší do menší). Shodli jsme se tedy, že je otázek 10.

Celkově jsem měla dojem, že žáci neobjevovali nic moc nového. Otázky zvládli rychle a snadno. Překvapilo mě to, protože s obdobnými úlohami má pátá třída stále ještě problém. Z mé strany nebyla zvládnutá reflexe. Očekávala jsem, že budeme rozebírat žákovské řešitelské strategie, ale jelikož to žáci rychle zvládli i bez vědomé strategie nebo organizačního principu, ke konci tápala, jak aktivitu reflektovat a ukončit.

Příloha 3

Vstup 8 (VH)

Téma: Jiné číselné soustavy
Pomůcky: vytištěné ukázky jiných číselných soustav, mazací tabulky, model čtyřkové soustavy, papíry s tabulkou jako na Kameny

Pondělí 4. března 2024, 2. VH

Minulou hodinu, tedy ve čtvrtek, jsem se v hodině zmínila o arabských číslicích. Žáci nevěděli, že číslicím, které používáme, se říká arabské, a hodně je to zaujalo. Slíbila jsem, že jim příští hodinu donesu ukázku. V úvodním kruhu jsem jim proto nejdřív ukázala vývoj těchto číslic – žáci hned věděli, o co se jedná. Pamatovali si, že jsem jim to slíbila.

1) **Úvodní kruh** (7 – 12 min)

Na mazací tabulku v kruhu napíšu číslo 12. Zeptám se žáků, co to je a jak vědí, co to je. Také se zeptám, z čeho se napsané číslo skládá. *„Slyšeli jste někdy o jiných způsobech, jak zapsat číslo?“* Nechám žáky odpovídat, poté vložím doprostřed kruhu ukázky, jak zapisovali čísla Římané, Řekové, Egypťané nebo Babyloňané. *„Každý velký národ, který psal, potřeboval postupně zapisovat i čísla. Každý si vytvořil svůj způsob, jak čísla zapisovat. Např. římská čísla se budete učit ve čtvrtém ročníku, jiná jsem vám donesla jen pro zajímavost. Věděl by někdo, jak se říká naší číselné soustavě?“* Pokud nikdo nebude vědět, prozradím, že je to desítková soustava a zeptám se žáků, proč se jí říká zrovna desítková. Nechám žáky argumentovat. *„Jak by to fungovalo, kdybychom neměli soustavu desítkovou, ale třeba čtyřkovou?“* Opět nechám prostor pro vyjádření žáků.

Do kruhu přinesu perlový materiál a papír s předkreslenou tabulkou. Do záhlaví vložím příslušná znázornění řádů v desítkové soustavě.
„Dokázal by někdo znázornit číslo 12 v desítkové soustavě?“
Povšimnu si, že je tam jedna tyčinka a dva korálky. Ukážu a přečtu na tabulce u čísla 12 číslici 1 a číslici 2. Dopíšu k zápisu 12 na tabulce závorku „(deset)“, protože se pohybujeme v desítkové soustavě.
„Troufnul by si někdo znázornit, jak bude vypadat počet dvanáct zapsaný ve čtyřkové soustavě?“
Opět nechám žáka modelovat a poté si povšimnu 3 tyčinek a žádného jednotkového korálku. Zapíšu na tabulku „$30_{(\text{čtyři})}$“.

Zdůvodnění: Nejdřív potřebuji žáky naladit na to, že vůbec jiné číselné systémy existují. Pravděpodobně se již setkali s existencí římských čísel, ale asi ne všichni. Toto povídání v kruhu má žáky uvést do děje zjistit, jaké poznatky a jaká předporozumění už mají.

Očekávání: Je možné, že žáci ze začátku nebudou tušit, na co se jich vlastně ptám. Předpokládám, že ukázka čísel z jiného historicko-geografického kontextu je zaujme a možná i rozmluví. Pravděpodobně si vzpomenou na Egyptská čísla z didaktického testu. Ve třídě jsou i děti informatiků – je možné, že si vzpomenou na dvojkovou soustavu.

Příloha 3

Předpokládám, že analogii s desítkovou soustavou na velmi názorném perlovém materiálu zvládnou a malý počet jako 12 si odpočítají.

Na ukázku původních a dnešních arabských číslic jsem mohla krásně navázat. Na otázku, jak poznali dvanáctku, žáci ihned rozebrali, že jednička znamená desítku a dvojka dvě jednotky. Zmínili také, že záleží na pořadí a že kdyby to bylo naopak, bylo by to 21. Ptala jsem se, jestli kdybychom takto zapsané číslo ukázali někomu z doby před 5 000 lety, jestli by také poznal, že je to dvanáct. Žáci nesouhlasili, protože se dříve prý zapisovala čísla jinak. Ptala jsem se tedy dál, jestli znají nějaké konkrétní způsoby, jak se zapisovalo čísla. Fanda navrhl, že zapisovali čárečkami. Na to navázala Timča, že Fanda asi myslí Římská čísla. Fanda se ohradil, že myslel *normální* (sic) čárkový zápis. Položila jsem do kruhu ukázky římských čísel. Pavel podotkl, že to nejsou čísla, ale písmena. Ukázala jsem tedy i řecká (atická) čísla, která také vycházejí z písmen a nechala žáky vysvětlit, proč se 5, 50, 500 atd. píše tak, jak se na ukázce píše. Snadno odhalili grafickou souvislost mezi 5 a 1, 50 a 10 atd. Vložila jsem do kruhu také ostatní ukázky – u Egyptských čísel si někteří vzpomněli, že je už viděli. Hodně je zaujaly obrázky vyšších řádů jako pulec a květ, který jim připomínal Pac-Mana. Žáci navrhovali ještě Hexanská čísla, ale shodli se, že to asi nebude zápis, který by někdo na Zemi kdy používal.

Na otázku, v jaké soustavě pracujeme my dnes, Fanda hned odpověděl, že v desítkové a že ještě existuje dvojková. Žáci rychle odhalili, že máme v desítkové soustavě 10 číslic, a proto by to mohlo být ono. Vyjmenovali jsme si, jaké to jsou. Ptala jsem se Fandy, kolik číslic má dvojková soustava. Vyjmenovali jsme si je. Dále jsem se ptala na pětkovou, šestkovou a čtyřkovou. Pro žáky nebyl problém vyjmenovat od nuly příslušný počet číslic.

Vzala jsem ukázky číselných soustav stranou a zeptala se žáků, jaké řády máme v desítkové soustavě. Ze začátku měli trochu problém, co to slovo znamená. Když jsem chtěla, aby to sami řekli, navrhovali něco ve smyslu pravidel nebo zákonů. Slovíčko si z předchozích hodin zjevně nezapamatovali. Snažila jsem se, aby pojmenovali, že řády rostou vždy „krát deset“, ale nenašla jsem vhodnou otázku. Žáci si všímali toho, že se přidá nula. Na spojitost s desítkovou soustavou jako krát deset, krát deset, krát deset, jsem je upozornila zvenčí. Načrtla jsem tabulku a poprosila Timču, ať vymodeluje z Dienesových kostek číslo 12. U analogické úlohy ve čtyřkové soustavě žáci snadno přišli na čtyřku místo desítky, a pak navrhovali 8 nebo 9 jako další řád, po chvíli Matyho napadlo 16, obhájil si to jako 4 × 4 a ostatní souhlasili. Poprosila jsem Břéťu, ať se žlutou pomůckou vymodeluje číslo 12 ve čtyřkové soustavě. Břéťa bez problému položil do příslušného řádu 3 čtyřky. Zapsala jsem na příslušné tabulky 12 se slovy: *„Jedna, dva, protože jedna desítka a dvě jednotky,“* a 30 se slovy: *„Tři, nula, protože 3 čtyřky a nula jednotek.“* Rozdala jsem žákům pytlíčky s pomůckou a kdo chtěl, mohl si vzít předepsanou tabulku řádů ve čtyřkové soustavě.

2) Modelování ve dvojicích (10 – 15 min)

Žáci si ve dvojicích sami zkusí převádět čísla do desítkové soustavy. K dispozici mají mazací tabulky nebo podložky a perlový materiál. Na tabuli napíšu čísla:

Příloha 3

$3_{(deset)}$ $4_{(deset)}$ $7_{(deset)}$ $9_{(deset)}$ $19_{(deset)}$ $32_{(deset)}$ $45_{(deset)}$ $66_{(deset)}$

Žáci nemusí převést všechna čísla, pracují svým tempem. Pokud někdo bude chtít, může si vyzkoušet převést čísla i do dvojkové soustavy, případně pak do jiných pozičních soustav.

Zdůvodnění: Žáci získají zkušenost s převodem do jiné soustavy. Perlový materiál zachovává oba důležité koncepty pro porozumění pozičním soustavám – počet a jeho uspořádání. Počet jednotlivých korálků je stále stejný, mění se jen způsob, jak jsou svázány do tyčinek, čtverců a krychlí.

Očekávání: Očekávám, že třída bude velmi různorodá v tom, do jaké míry převody zvládnou. Předpokládám, že menší čísla půjdou snáz, ale stále může být překážkou jejich zápis číslicemi. V takovém případě nechám slabší žáky, aby určovali jen, kolik bude mít číslo jednotlivých korálků, kolik tyčinek, případně čtverců.

Břéťa už netrpělivě čekal, jaká čísla má zapsat ve čtyřkové soustavě. Princip pochopil hned a hned si to chtěl také vyzkoušet. Nejdřív jsem se ještě ptala žáků, který řád znázorňuje která část pomůcky. Fanda, Timča, Venda a Adam (který byl u nás ten den na zkoušku) potřebovali ze začátku pomoci. Poměrně rychle však systém pochopili. Venda potřeboval trochu více podpory. Trochu matoucí byly i závorky. Na tabuli jsem je psala a vysvětlila, co znamenají, ale pro žáky to byl možná nadbytečný prvek. Maty, Břéťa a Honzík narazili na $66_{(10)}$. Někteří ji bez váhání zapsali jako $402_{(4)}$. Břéťa si mě zavolal, protože mu nedávalo smysl tam napsat číslici 4. Ptala jsem se těchto žáků, zda můžou v desítkové soustavě použít 10 desítek. Matymu došlo hned, že musí přidat řád a začal si počítat 16×4. Honzík se mnou diskutoval, že ta čtyřka dává smysl, protože potřebuje čtyři šestnáctky. Ukázala jsem na pomůcku a ptala se, kolik má dílků v každém řádu. Honzík říkal, že už pracuje jen na papíře a tam si těch dílků může dát víc. Po chvíli se přidal vedle sedící Maty a jal se Honzíkovi vysvětlovat, že musí přidat řád 64. Břéťovi rovněž stačilo málo nápověd.

Někteří žáci byli hotoví a ptali se, jaká čísla mají zapsat dál. Navrhovala jsem, že mohou zkusit jinou soustavu, třeba dvojkovou nebo pětkovou, ale bez pomoci tuto analogii nedokázali vytvořit a nevěděli, jak čísla do těchto soustav jen podle jejich názvů převést. Nakonec nastal čas shrnutí.

3) **Shrnutí práce** (7 – 12 min)

Společně si projdeme, jak které číslo třeťáci zapsali, jakou na to měli strategii, jak jim to šlo. Pokud se někteří dostali ke dvojkové soustavě, zeptám se opět, jak na to šli, ale také zda vědí, kde se dvojková soustava používá.

Zdůvodnění: Vzájemná oprava a podnícení sdílení žákovských strategií.

Příloha 3

Očekávání: Předpokládám, že část žáků na to půjde s velmi konkrétní oporou o perlový materiál, ale jiná část tuto oporu začne postupně opouštět a bude např. odčítat čtyřky nebo využije jiných způsobů dělení se zbytkem. Předpokládám, že problém bude dělat přechod do každého dalšího řádu nad čtyřkou, kde si žáci nemusí uvědomit, že 4 tyčinky už jsou jedním čtverečkem. Opět se tak otevře podnět, zda mohou být 4 a více objektů v jednom sloupci – analogicky ke kamenům.

Žáky jsem možná nechala bádat příliš dlouho. Spletla jsem si časy vyučovacích hodin a myslela jsem, že končíme ve tři čtvrtě. Kvůli této chybě jsme nestihli reflexi. Někteří žáci zapsali všechna čísla, někteří jen některá. Také se stalo, že někteří si sice čísla modelovali, ale nezapisovali. Losovala jsem jména žáků a žáci diktovali, jak zapsali dané číslo. Na tabuli jsem si udělala tabulku, jakou měli i žáci. Ostatní žáci kontrolovali, zda to mají stejně. Pavel se ptal, proč nezapisuji nuly u šestnáctek. Použila jsem analogii s desítkovou soustavou, ve které také běžně nezapisujeme 023. Pavel s tímto souhlasil. Někteří žáci se přímo hlásili o konkrétní čísla. Adam chtěl říct $32_{(10)}$ a Matymu záleželo na $66_{(10)}$. Maty třídě vysvětlil, že je potřeba přidat další řád.

4) **Závěr** (5 – 8 min)

Zeptám se žáků, zda je tato hodina bavila a zda jim přišla přínosná. Nakonec žáci vyplní krátký lísteček se svojí recenzí hodiny (1-5 hvězdiček a komentář).

Zdůvodnění: Ovládnutí alternativních pozičních soustav není výstupem ŠVP, proto nechci žáky mást (a strašit) otázkami typu, nakolik učivo ovládají a v čem by se chtěli zlepšit. Mým cílem této hodiny je žáky obohatit o něco zajímavého, jiného, pokud možno zábavného.

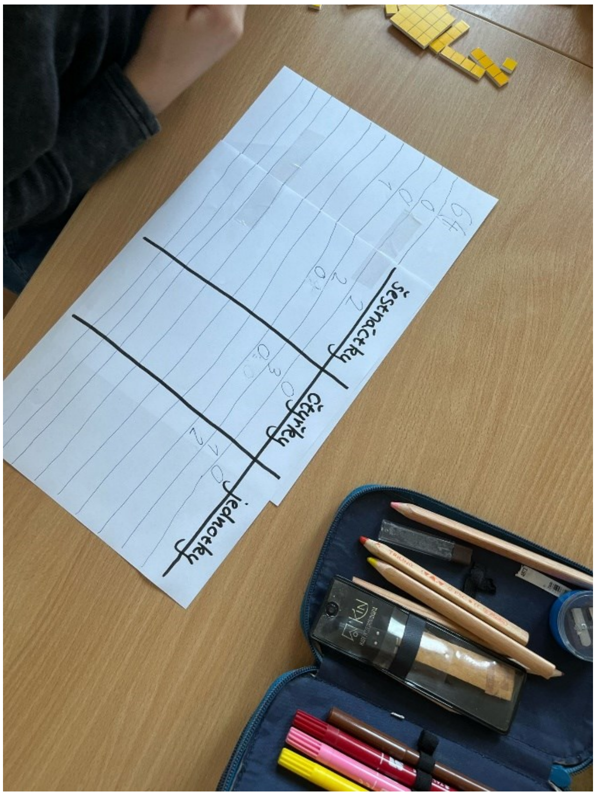
Očekávání: Dovedu si představit, že tato hodina bude pokrmem pro nadané žáky ve třídě, ale žáky slabší příliš nezaujme. Předpokládám, že se najdou žáci, kteří si budou chtít zkoušet i jiné soustavy a dost možná se otevře i téma soustav se základem vyšším než deset.

Pro zkrácení reflexe jsem použila signály rukami. Na komentáře už nezbyl prostor. Většina žáků ukázala palcem, že hodinu považovali za užitečnou. Podle mě je to spíše bavilo a nerozlišovali zábavné a užitečné. Místo psané recenze žáci ukazovali na prstech počet hvězdiček. Honzík a Fanda ukázali z 5 hvězdiček deset prstů. Většina ukázala 5. Jeden žák 4 a jeden 3. Ačkoliv byla ukázka soustav s alternativním základem hodně ochutnávková a nejsem si jistá, nakolik to žáci stihli vstřebat, bylo vidět, že je tyto alternativy hodně lákají.

Po hodině se mě Fanda zeptal, jestli umím binární soustavu. Jeho to učil táta informatik. Celkově Fandovi, který má v hodinách problém se soustředěním, tato hodina hodně podle mého pozorování sedla. Ukázala jsem Fandovi svoji oblíbenou poziční soustavu – mínus dvojkovou. Byl tím fascinován, ačkoliv to pro něj bylo obtížné na uchopení. Přišel za námi Břéťa a ptal se, co to je. Fanda úsměvně odpověděl: *„Tomu bys nerozuměl.“* Břéťa ale

Příloha 3

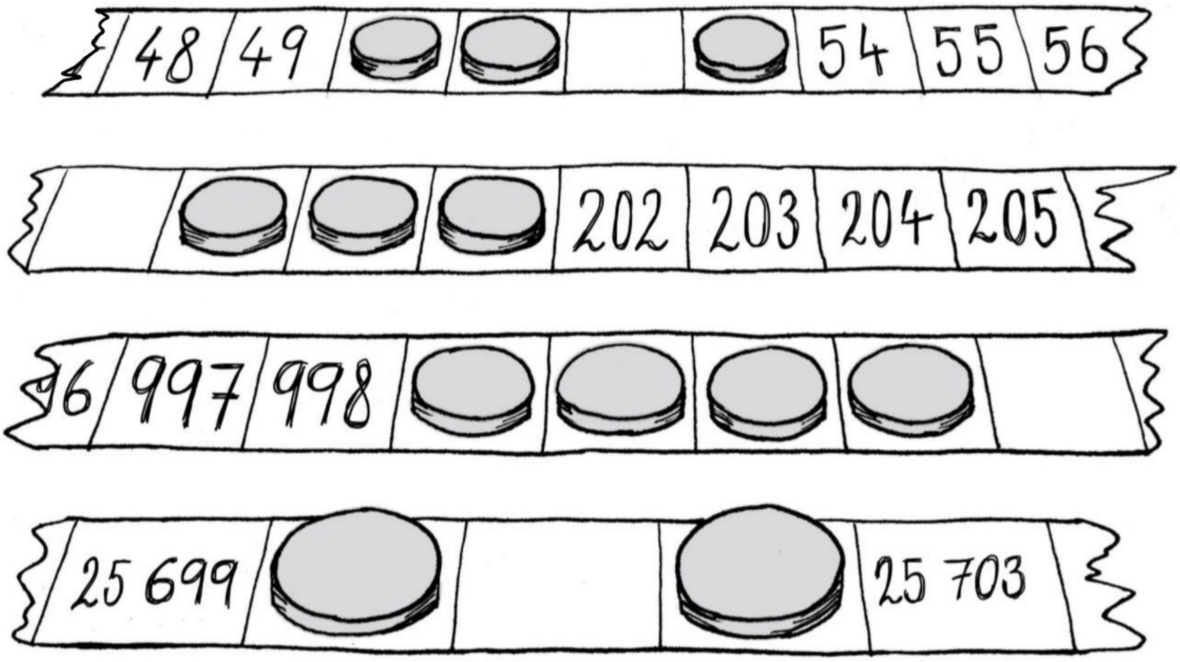
poslouchal, také ho to zaujalo. Fanda řekl, že mínus dvojkovou ukáže tátovi. Celkově byl dnes Fanda na sebe hrdý, že ví něco víc než ostatní a může se doma pochlubit.



Příloha 4

Pozemská čísla

1) Doplň čísla do nezakrytých políček.



2) V Číně se zapisuje čísla jinak než u nás. Dokážeš odhalit, jak zápis funguje? Pomůže Ti tabulka jejich znaků.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

5 zapisují jako 五 16 jako 十六 72 jako 七十二

Doplň, jak Číňané zapisují následující čísla:

_____ zapisují jako 九十 38 zapisují jako _____________

______ zapisují jako 百三十八 237 zapisují jako ________________

3) Z číslicových karet jsou sestavená čtyřmístná čísla. Vyndej jednu kartu, ostatní sraz k sobě a nepřehazuj je. Zůstane Ti trojciferné číslo.

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

9	1	6	4

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

. . . .

Jaké je **největší** číslo, které můžeš vytvořit?

4	6	1	9

Jaké je **nejmenší** číslo, které můžeš vytvořit?

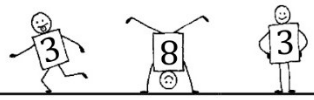
4) Z rovností utekly neposedné číslice. Dokážeš je vrátit na svá místa?

Příklad:

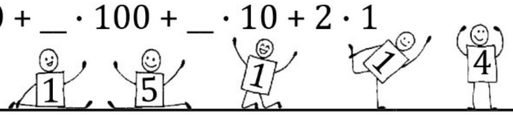
2_4 = 200 + _0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + _ · 1
2<u>3</u>4 = 200 + <u>3</u>0 + 4 = 2 · 100 + 3 · 10 + <u>4</u> · 1

623 = 600 + __0 + __ = __ · 100 + 2 · 10 + 3 · 1

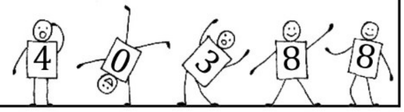
8__4 = __00 + __0 + 4 = 8 · 100 + 3 · 10 + 4 · 1



4 5__2 = __000 + 500 + __0 + 2 = 4 · 1 000 + __ · 100 + __ · 10 + 2 · 1



3__ 401 = 30 000 + 8 000 + __00 + 0 + 1
= __ · 10 000 + __ · 1 000 + 4 · 100 + __ · 10 + 1 · 1

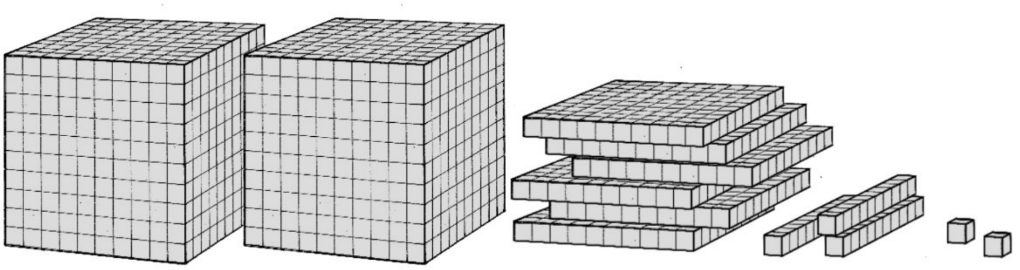


Příloha 4

5) Pokažená tiskárna vytiskla místo některých číslic jen skvrny. Dokážeš přesto porovnat čísla? Doplň do políček **>**, **<** nebo **=** . Pokud není možné určit, jestli tam patří **>**, **<** nebo **=**, políčko škrtni.

42 □ 24	501 □ 510	16● □ ●69
3● □ 40	2●8 □ 2●8	●4● □ 13●
21●3 □ 23●1	9●● □ 1 000	●●●● □ ●●●

6) Anika vymodelovala na pomůcce číslo 2 632. Znázorni další čísla jako ona.



....

63

....

429

....

3 502

....

24 630

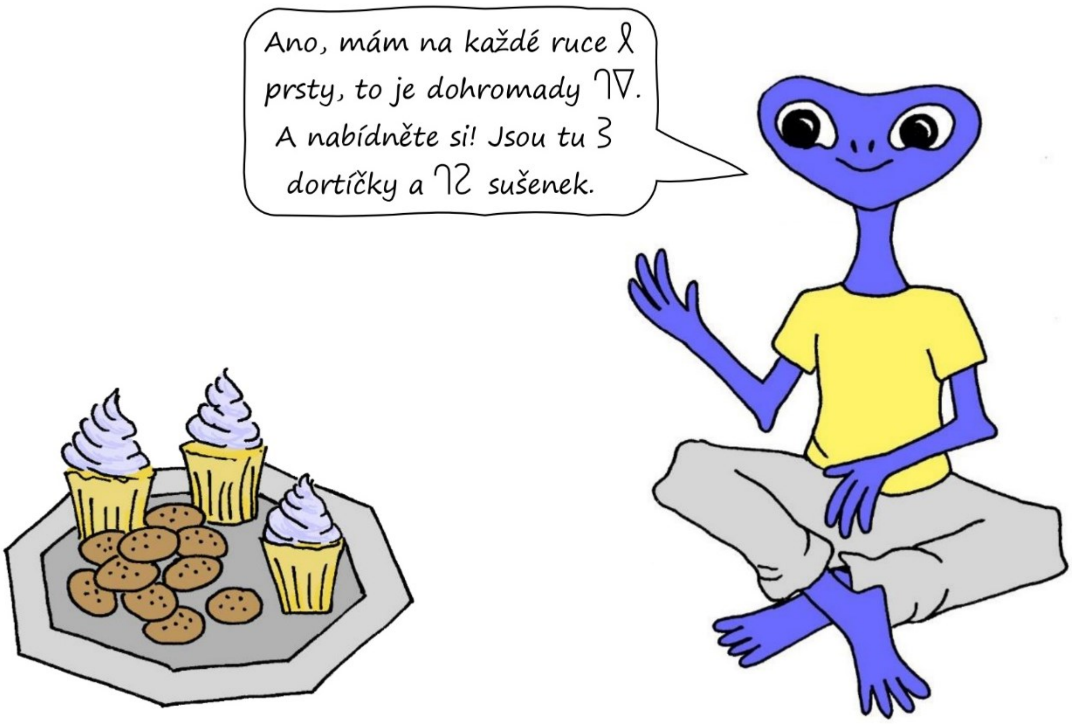
Příloha 4

Mimozemská čísla

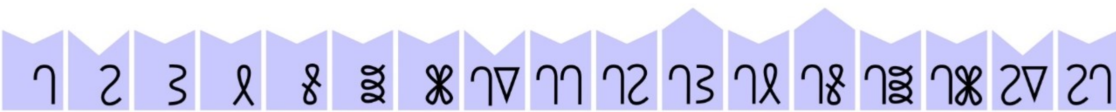
Obyvatelé planety Okta mají jen 8 prstů, 4 prsty na každé ruce.

My na Zemi máme 10 prstů a 10 číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9.
Oni mají 8 prstů a 8 číslic: ∇, ˥, ᘓ, Ʒ, ƛ, ȣ, ≋, ⌘.

Naše 0 je jejich ∇, naše 1 je ˥, 2 je ᘓ, 3 je Ʒ, 4 je ƛ, 5 je ȣ, 6 je ≋, 7 je ⌘.
Číslice 8 a 9 vůbec nemají, ale stejně jako my, i oni dokážou zapsat jakékoliv číslo.



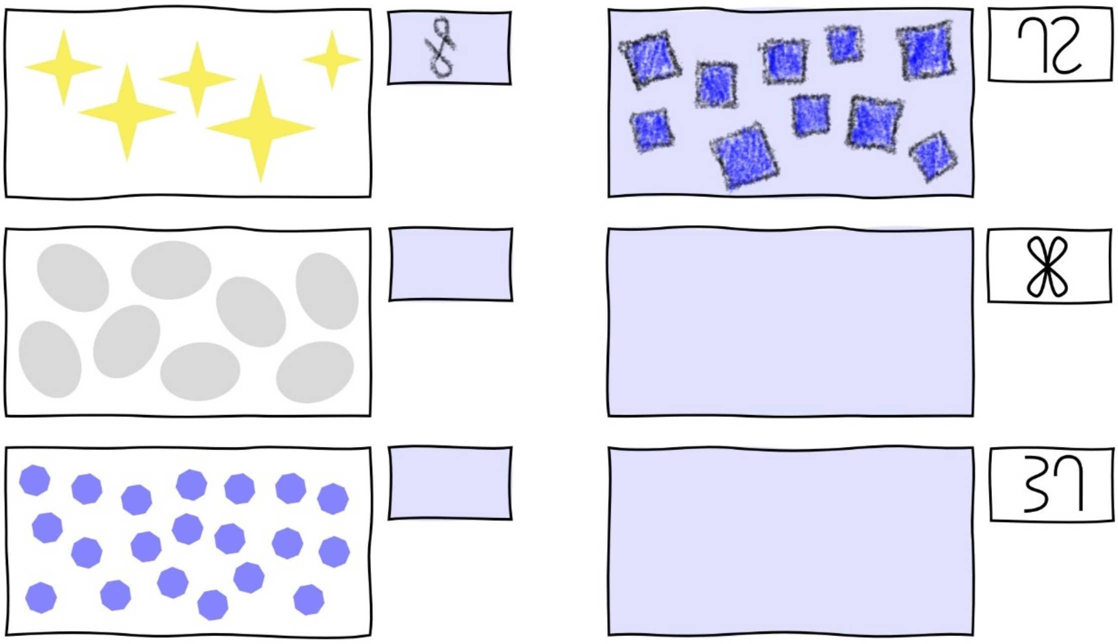
1) Při procházce městem na planetě Okta můžeme na začátku ulice vidět takto očíslované domy:



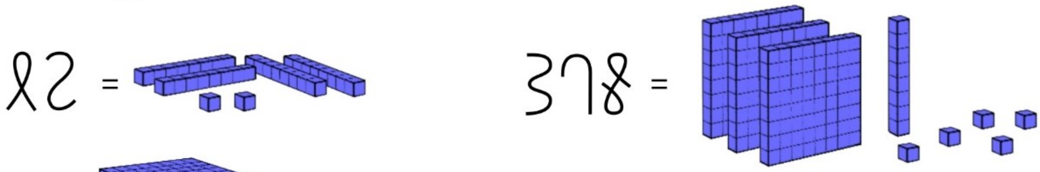
Dokážeš doplnit čísla na domech na konci ulice?

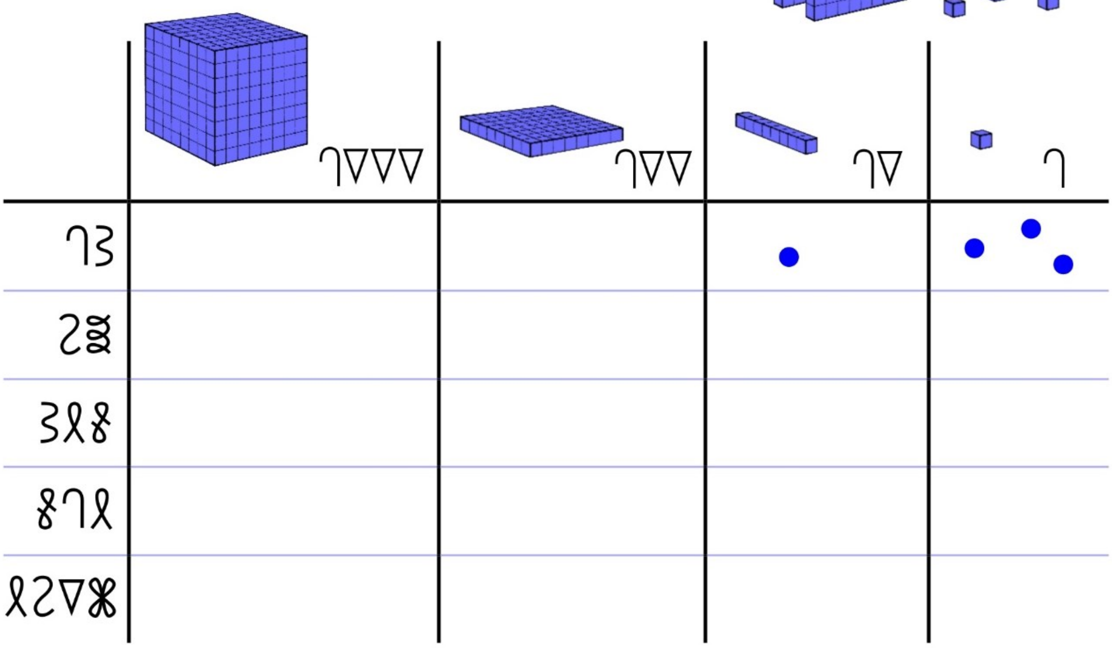
Příloha 4

2) I oktanské děti chodí do školy. Pomůžeš prvňáčkovi dokončit jeho úkol? První řádek má správně. Doplňuj čísla nebo jakékoliv tvary do fialových rámečků.

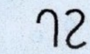
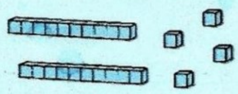
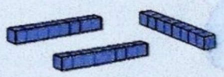
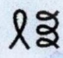
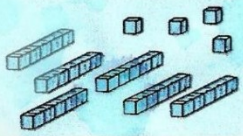
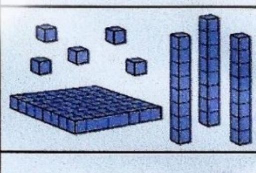
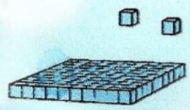


3) Oktanští třeťáci se učí pracovat i s většími čísly. Modelují je na pomůcce jako na obrázku nebo zapisují v tabulce pomocí kamenů. Dokážeš vypracovat úkol oktanského třeťáka?





4) Jeden pozemský astronaut si pro převádění našich a oktanských čísel vytvořil tabulku. Bohužel ji nechal na dešti, a tak se mu rozmyla. Dokážeš znovu doplnit alespoň sloupce po stranách? (V posledním řádku si můžeš vymyslet svoje číslo.)

POZEMSKÁ ČÍSLA		OKTANSKÁ ČÍSLA	
10			
24			
28			
			
			
81			
			
			
			

Příloha 5

Rozhovory s učiteli – otázky

Osobní porozumění

1. Co se vám vybaví, když se řekne „poziční zápis čísla"?
2. Vybavíte si nějakou úlohu k tomuto tématu z dob vlastní školní docházky?
3. Jak hodnotíte prostor věnovaný tomuto tématu v době Vaší pregraduální přípravy? Vybavujete si něco konkrétního?
4. Kdy a v čem se podle Vás poziční zápis čísla v rámci učiva prvního stupně ZV objevuje?

Place value (hodnota pozice)

※ Zápis čísla

5. Používáte ve výuce i jiná znázornění čísel než klasický zápis číslicemi? Jaká, v jakém kontextu výuky a proč? (např. Kameny, hra na tělo, jedničková soustava nebo i vláčky a jiná prostředí.)
6. S jakými chybami při zápisu čísla se ve výuce setkáváte? (1. roč.: Při didaktickém testu zaměřeném na *nedesítkovou* poziční soustavu si žáci často pomáhali součtem číslic, např. neexistující číslici pro 6 zapisovali jako 51. Setkáváte se s něčím podobným i v desítkové soustavě při přechodu přes základ?)

※ Řády

7. Jak ve výuce pracujete s řády? Používáte pro výuku řádů nějaké pomůcky nebo jiná znázornění?
8. Ve kterém ročníku začínáte na řády klást důraz, pokud vůbec?
9. Klasicky se v učebnicích objevuje rozvinutý zápis čísla – používáte ho ve výuce? Jakým způsobem a s jakým cílem?
10. Věnujete ve výuce speciální pozornost přechodu přes základ? V jakém kontextu a jakým způsobem?

Příloha 5

※ Place value s. s.

11. Napadne Vás nějaká konkrétní úloha, pro jejíž úspěšné řešení je klíčové porozumění pozičnímu zápisu?

12. S jakými chybami ohledně řádů a s tím související hodnoty pozice se setkáváte? Jak chyby ošetřujete?

Číselné soustavy

13. V RVP ZV je zakotvená pouze desítková soustava, často se ale na školách učí i římská čísla. V ŠVP ZŠ Heřmánek je výstup: *„Žák počítá v některých jiných číselných soustavách (souvislost mezi písemnými algoritmy).“* Pracujete ve výuce i s jinými číselnými soustavami? S jakými a proč?

14. (pokud ANO ↑) Vedete žáky k rozlišení pozičních a nepozičních číselných soustav?

15. Specifickým případem číselných soustav je jedničková soustava. Jejím příkladem může být prosté zaznamenávání počtu pomocí čárek. Používáte tuto soustavu ve výuce? S jakým cílem?

16. 1. roč.: V jakých kontextech a jak dlouho žáci pracují s jedničkovou soustavou? Jaká vnímáte pozitiva a jaké negativa oproti klasické desítkové soustavě?
    ostatní roč.: Jak, v jakém kontextu a proč používáte ve výuce jedničkovou soustavu?

Pomůcky a materiály

17. Přijde Vám, že se v učebnicích, které používáte, objevuje téma pozičního zápisu čísla dostatečně?

18. Typově jaké úlohy v učebnicích potkáváte? Vyhovují Vám nebo do výuky přidáváte vlastní?

19. Přijde Vám, že máte dostupné vše potřebné k vyučování pozičního zápisu čísla? (pomůcky, materiály, didaktiku)

Hodnocení důležitosti

20. Přijde Vám jako učiteli porozumění pozičnímu zápisu čísla pro žáky důležité?

21. Jaké oblasti učiva podle Vás čerpají z porozumění pozičnímu zápisu?

22. Je podle Vás osobně užitečné, aby se žáci učili i jiným číselným soustavám? Proč

Příloha 6

Rozhovory s učiteli – přepisy

Paní učitelka z 1.A

26. února 2024

Ta 00:00:04
Jedná se o rozhovor k diplomové práci. Já píšu ohledně rozvoje porozumění pozičnímu zápisů, tedy jedenáct jako jedna desítka, jedna jednotka. Prvňáci to nepsali, ale ostatní třídy psaly didaktický test. Možná jsi zaznamenala, Pozemská čísla a Mimozemská čísla. Chci zmapovat, i jak vy vnímáte toto téma v první třídě docela asi podstatné s tou desítkou. Výše asi nejdete u většiny žáků.

U1A 00:00:39
Do dvacítky, nebo jak to myslíš?

Ta 00:00:41
Jo, a i třeba do víc řádů, jako stovky, tisíce a tak to asi spíš ne.

U1A 00:00:45
No, řekli jsme si čísla do sta, tak to umějí vyjmenovat a umějí to napsat, že to jde od jedné do deseti, pak zase další řádka od deseti do dvaceti, tak to umějí.

Ta 00:00:56
Ty vlastně nejsi primárně prvostupňová, že ano? Ty jsi učila starší děti a prvňáčky máš prvně?

U1A 00:01:04
Ano, prvňáčky mám prvně, jenom jsem je učila třeba hudebku, nebo tanec a takovéto předměty.

Ta 00:01:11
Co se tobě osobně vybaví, když se řekne poziční zápis čísla?

U1A 00:01:16
To slyším poprvé.

Ta 00:01:18
Jo, jasně. Takže nějaká úloha, nebo řády a tyto věci. Vzpomeneš si na nějakou úlohu, třeba když jsi sama chodila do školy, jak jste to řešili? A kdy se podle tebe v rámci prvního stupně toto poprvé objevuje? Tedy řády, stovky, tisíce, desetitisíce?

U1A 00:01:40
Myslím, že tak ve třetí třídě bych začala.

Ta 00:01:45
A v té první tomu taky nějak věnuješ pozornost?

U1A 00:01:49
V první se snažím, aby to uměli jakoby pojmenovat. Že vlastně dokážou už počítat. Oni dokážou počítat do sta, a zrovna tak, kdyby jsme s tím pracovali, tak už umějí počítat i do toho tisíce. Že si to umějí říct. Ale samozřejmě bude problematičtější, tedy už od té stovky

by to asi neměli třeba napsat, si myslím, většina. Ale uměli by to asi říct. Jinak nevím, jestli myslíš jako říkat deset, dvacet, třicet, to teda taky umějí. Ano.

Ta 00:02:22
Spíš i třeba, když píšou dvanáct, tak jestli s nimi řešíš, proč je to jednička a dvojka? Nebo jen, že takto se píše dvanáct?

U1A 00:02:29
No, ale že ta jednička je těch deset, pak plus dva.

Ta 00:02:34
Jo, rozumím. Tedy s nimi ve své podstatě poziční zápis řešíš. Používáš nějaká jiná znázornění čísel, než klasický zápis číslicemi?

U1A 00:02:42
Mhm. Ano.

Ta 00:02:43
Jaká třeba?

U1A 00:02:46
Jako zápis. Tak třeba kreslíme kolečka. Tečky, čárky, nevím, dneska zrovna jsme kreslili nějaké berušky.

Ta 00:02:59
Jako ten počet znázorujete. V čem ti to přijde dobrý a v čem to má úskalí?

U1A 00:03:05
No úskalí to má v tom, že je to pomalé a že to nevidí přesně to číslo, ale dobré je to v tom, že prostě místo těch koleček si třeba můžou vzít opravdové kuličky, nebo opravdová dřívka, nebo se to představí na lidech. Počítáme i sebe, my si to tady rozestavíme, uděláme jako autobus nebo metro a vystupujeme, nastupujeme, a tak si to můžeme lépe představit.

Ta 00:03:36
Tedy ti přijde, že je to lépe propojitelné na to, že mám na příklad tři objekty a s nimi přičítám, odčítám...

U1A 00:03:41
Ano, že to vidí v té praxi, no. Oni ještě pořád někteří nedokážou říct rychle ten součet, tak když si ho potom představí na lidech, nebo na těch kostičkách, tak se jim lépe počítá. Někdo je na to dobrý, někdo je na to lepší, někdo je na to horší, no. Vlastně nevím, čím to zlepšit u těch dětí, které jsou na tom jako hůř, no.

Ta 00:04:09
A v čem konkrétně hůř? Nebo...

U1A 00:04:11
Nedokážou říct hned ten součet třeba, nebo že nedokážou...

Ta 00:04:14
Jo, tedy v té mentální aritmetice.

Příloha 6

U1A 00:04:17
Jo, jo, jo, jo. Jestli opravdu tohle, že jim to ukazuji na těch kostkách a prstech, jestli to opravdu zrychluje, anebo jestli je to třeba i zpomaluje, protože oni pak mají tendenci, pořád si to třeba na těch prstech ukazovat a pořád na to znovu koukat.

Ta 00:04:32
No, jako takhle. Není to asi rychlejší, než kdyby se naučili zpaměti ty spoje, ale aspoň za tím vidí tu kvantitu, což se jim může fakt hodit pak později, když se to bude nabalovat. Že když vlastně teď se budou snažit to zvládnout jenom pamětně a nebudou zatím vidět to číslo, tak to stejné pak budou mít tendence dělat i s těmi většími čísly, kde už to není tak jednoduché. S jakými chybami při zápisu čísla se setkáváš?

U1A 00:05:02
No, že obracej. Že obracej pravolevě. Čtyřku, pětku, trojku.

Ta 00:05:10
Rozumím. A s těmi třeba pozicemi nebo čísla nad deset? Mají problém to zapisovat nebo to zvládají?

U1A 00:05:18
Tohle zvládají. Jako že by obrátili jedničku a dvojku při dvanáctce? (Třeba.) To se mi zatím nestávalo, ale věřím, že když toho bude přibývat, že se to může stát. Tohle se zatím nestává, ale obracej jednotlivá ta *čísla*, to jo.

Ta 00:05:32
Přijde ti, že když se to neošetří, tak to pak způsobuje nějaké další problémy?

U1A 00:05:37
Já si myslím, že jo.

Ta 00:05:38
Jako i to s tím obracením, i to s tím převrácením, a tak.

U1A 00:05:43
Já si myslím, že jo, že by se to mělo furt opravovat. Prostě někdo má k tomu tendence, že i písmenka, i tohle. Prostě pořád na to upozorňovat. Oni naštěstí jsou takový, že jo, pardon, že to přijmou. Já zase nerozumím, že to mají nad tím napsané a nevidí to.

Ta 00:06:05
Jsou pak různá na to cvičení, že mají třeba zaznačit, která číslice je správně. Nebo ty obrázky, jak jsou přes sebe a najít to. To už je takové vedlejší. Mně se stalo, když jsem zadávala ten test z šestkové soustavy... A tam právě už nejsou všechny číslice a při přechodu do dalšího řádu, tak děti často dělaly, že šestku napsaly jako pět a jedna, jako součet. Stává se ti to u prvňáčku i v té desítkové soustavě? Že by třeba, no desítku asi ne, to mají odpozorované, ale třeba by chtěli zapsat sto a už by to nedokázali, že by to napsali třeba jako devadesát devět jedna, nebo něco takového?

U1A 00:06:49
To si nemyslím.

Příloha 6

Ta 00:06:51
Čím myslíš, že to je, že v té desítkové už to mají odkoukané, nebo je to přirozené?

U1A 00:06:57
Já teď úplně nerozumím, že místo desítky napíšou pět a pět, nebo pět a jednu?

Ta 00:07:01
Třeba, třeba.

U1A 00:07:03
Mně se tohle teda nestalo.

U1A 00:07:11
Dneska mi zrovna řekl někdo, ale to já mám dohromady teď i *1B*. A tam mi řekl *Jeník*: Kolik je jedna a jedna? Tak říkám, že dva, a on: Ne, to je jedenáct. Já říkám: No, ale to právě není jedenáct, že jo. To je deset a jedna. Ta první jednička je právě ta desítka, žejo. Takže já nevím, moje děti mi takový dotaz nepoložily, no. Takže nevím, čím to je.

Ta 00:07:38
Ano. Ono možná je taky rozdíl, jestli se řekne jedna a jedna, nebo jedna plus jedna, že to můžou vnímat jinak. No. Že zapíšu jedničku a jedničku. A kdy, protože ty budeš mít asi dál ty třídy, druhá, třetí a tak dál, kdy plánuješ začít klást důraz na řády? Ty jsi říkala, že se to objevuje ve třetím ročníku, třeba.

U1A 00:08:02
No, ale já osobně si myslím, že bych ráda už v té druhé třídě víc toto řešila.

Ta 00:08:05
A jakým způsobem?

U1A 00:08:07
No, mně se třeba hrozně líbí ten Montessori korálkový systém. My ho tady nemáme, ale ráda bych si podle něho...

Ta 00:08:15
Na druhém stupni po té rekonstrukci je a už lobuji, aby se sem dovezl zpátky.

U1A 00:08:18
No, to by bylo skvělé. Ale viděla jsem tady takové ty kostičky, co jsou po deseti. Nebo prostě nějaké jiné pomůcky, u kterýcj je jasné, že to bude těch deset. A teď je budeme zase skládat prostě dál.

Ta 00:08:31
Na těch kostičkách nebo ty korálky, to je vlastně to stejné. Tam je super, že je vidět zároveň i to, že jednoduše spočítám, kolik mám desítek těch hranolů, že jo. I to, že tam vidí tu kvantitu.

U1A 00:08:42
Tam ty hranoly, že z toho mají fakt dělat tu kostku, to je prostě úžasný.

Příloha 6

Ta 00:08:45
To jo. My jsme to i s páťáky používali, když jsme to rozširovali, pak na desetitisíce, jaký budu mít tvar, sto tisíce a tak. Klasicky se v učebnicích objevuje rozvinutý zápis čísla, což je takové to, když napíšu pět krát sto plus tři krát deset plus...

U1A 00:09:09
My ještě ne. My ještě nenásobíme teda.

Ta 00:09:13
Jasně, to asi nepředpokládám v prvním ročníku. Ale přijde ti ten rozvinutý zápis, což je v podstatě, že přepisují pětset třicet čtyři takhle. Nevím, jestli si pamatuješ třeba, když jste chtěli... A jestli bys ho třeba plánovala taky používat, případně proč...

U1A 00:09:39
Asi jo. Aby si uvědomili, že to jsou ty stovky, to jsou ty desítky, jo.

Ta 00:09:48
V první třídě věnuješ nějakou speciální pozornost přechodu přes desítku, když sčítají, odčítají a tak. Případně proč a v jakém kontextu, jakým způsobem?

U1A 00:10:00
No připadá mi to do té desítky takové vlastně, jakoby ukončené. I když jsou systémy, které počítají rovnou do dvanácti, ale prostě tak já to... tak jako jsem navyklá, že to dělám do té desítky. Některé děti třeba počítají do osmičky, do devítky, ještě se nedostaly k desítce... ale prostě ty, co umějí do desítky, tak dělám do deseti a pak dělám deset plus něco. A pak s tím přechodem jim vždycky vysvětluju, když nevědí, že prostě je to osm plus pět, tak aby si uměli rozdělit pětku na dva plus tři. To se právě dá různě s těmi kostičkami takhle dopočítávat. Aby to jako viděli, že prostě tady doděláme tu desítku zase.

Ta 00:10:44
Pracuješ, nebo spíš plánuješ pracovat s jinými soustavami, než je desítková? Ať už římská čísla, dvojková soustava, jakákoliv jiná.

U1A 00:11:07
To zatím nevím. Hodiny, to je vlastně taky nějaká soustava. (Ano, to je šedesátková.) Takže dneska jsem teda začala vysvětlovat hodiny a bylo to docela náročné pro ně. Myslím si, že ty ručičkové hodiny vysvětlit, že to je vlastně šedesát minut… Teď jim vysvětlit, jak dlouhá je ta jedna vteřina, tam až dojde šedesátkrát, že jo. No, a oni mi začaly říkat, že v té vteřině je nějaká setina ještě. Já říkám, no, tak já to takhle neznám, ale jestli je to méně než vteřina, tak těch zase bude šedesát do té vteřiny, ne? A oni, že ne, že těch je sto.

U1A 00:11:52
Ale já se přiznám, že vlastně nevím, jak to teda je. No ale tím, že jsem to takto učila a dělala podle sebe, tak jsem jim řekla: No, tak já vám dneska vysvětlím opravdu jenom minuty a hodiny a jak je to na těch ručičkách. A jak je to na digitálkách. Začali jsme to, no. Já už jsem jim to někdy vysvětlovala, někdy tak jako v říjnu. Teď zase jsme se k tomu vraceli s oběma třídami, tam to ještě neměli. Tak jako, jo, že prostě šedesát, tak jestli je to soustava, no, tak dejme tomu.

Ta 00:12:28
No, je taková zvláštní, protože právě vteřina už je zase jako sto setin, takže tam není těch šedesát. No, a hodin dvaet čtyři je den, a pak už to jde úplně jinak. Ale ten úsek je ta šedesátková.

U1A 00:12:41
No, ale jinou nevím, co tím, co bych mohla tak učit.

Ta 00:12:46
Římská čísla se často učí, ale nejsou v RVP ani v ŠVP, co jsem tak koukala.

U1A 00:12:51
To jsem si myslela později, ale ano. To bychom mohli dělat tak ve třetí.

Ta 00:13:03
Přijde ti důležité, aby rozlišovali poziční a nepoziční soustavy? Což třeba římská čísla jsou nepoziční, protože když napíšu... (No, jasně.) trojku, tak všechny mají stejnou roli v tom čísle.

U1A 00:13:22
Asi jo, asi je to podstatné.

Ta 00:13:25
Já tě nezkouším. -*Smích.*-

U1A 00:13:27
Ne, já jsem o tom spíš zatím nepřemýšlela.

Ta 00:13:31
Ty jsi říkala, že používáte ty čárečky občas, nebo i jiné způsoby. A v jakých kontextech a jak dlouho s nimi děti pracují?

U1A 00:13:46
No, snažím se vždycky, aby to převedly včas na číslo. No, takže s velkostí si hrajeme, pak se snažím: A teď to přepíšte na číslo.

Ta 00:13:57
Jasně, že počítají v tomhle a pak ten výsledek přepíšou. (Jo, jo.) Stalo se ti, že by žák dokázal už pracovat s těmi číslicemi, ale neviděl za tím... jako nepřepsal to do čárek? Že by znal devítku, věděl by třeba i, že devět plus jedna je deset, ale nedokázal by devítku přepsat na čárky?

U1A 00:14:18
No, myslím si, že některé děti s tím mají problém. Ty, co neumí počítat, tak je pro ně i vlastně problém to namalovat. Protože prostě, tak nějak jako jim to strašně trvá a dokážou ukázat úplně na jiný počet těch čárek než…

Ta 00:14:36
Jo, že to zatím nemají propojených.

Příloha 6

U1A 00:14:38
Že jsou takové nějaké celkově zpomalené, pak klidně tam napíšou víc nebo méně.

Ta 00:14:43
Přijde ti, že se v učebnicích, které používáš… Ty používáš vlastně asi ty anglické pracovní listy. …to téma pozičního zápisu objevuje, případně objevuje dostatečně?

U1A 00:14:56
Tohle je pro mě zatím tak nevhodná učebnice... Já se snažím vycházet z dalších jiných učebnic, vlastně i z toho Hejného. Protože ta americká mi připadá, že to je vlastně úplně pro starší děti. Já potřebuji i takové to opakování barev, aby vlastně viděli i posloupnosti, to tam jako trochu je. Ale všechno je tak jako, že obrazově dané. Ale že by tam byly opravdu i logické příklady, nevím no.

Ta 00:15:32
Takže si to doplňuješ nějakými vlastními úlohami.

U1A 00:15:34
Ano.

Ta 00:15:37
Přijde ti, že pro výuku pozičního zápisu, a to ať už teď v první třídě, nebo i pak obecně, že máš všechno, co potřebuješ? Ať už to jsou pomůcky, nějaké didaktické zázemí, učebnice, materiály a všechno?

U1A 00:15:50
Mně by třeba ty korálky vyhovovaly víc, no. Takže takhle jako beru ty kostičky, teď jim to musím nejdřív všechno napočítat, že jo. Teď každý má jiné barvy. Teď, aby to dalo nějaký smysl, tak to zas jich není dost, aby všichni měli. A teď si je musíme s *U1B* půjčovat, že jo. I když je mám, tak prostě nemůžu říct: Tak teď si vezměte zelenou řadu a žlutou řadu, protože to by jich nebylo dost. Takže má každý jiné. Někdo má fialové, někdo modré, někdo červené. A prostě není to tak jako jasné.

Ta 00:16:35
Rozumím. Když to v tom Montessori jsou propojená i na konkrétní čísla, ty barvy.

U1A 00:16:40
Jo, jo. Ale zase z tohohle můžou podle toho Hejného stavět ty kostičky. Oni je staví na sebe, dělají takový ten zápis, jakože udělají ten půdorys. A teď tři tady stojí na sobě. Tak to zase podle toho jde spíš, to zase by z těch korálků nešlo.

Ta 00:16:55
Ideálně je mít obojí, že jo.

U1A 00:16:56
Já mám sama tady tedy kuličky a ty dávám do plat od vajec. No, tam jsou i ty desítky. Ale je to pro ně trošku takové, že než to z toho plata vyndají tu kuličku, zas ji tam dají, je to trochu nešťastné. Takové, no.

Příloha 6

Ta 00:17:16
Napadne tě nějaká úloha nebo další učivo, pro které je klíčové dobře rozumět tomu pozičnímu zápisu?

U1A 00:17:26
Asi jako bankovnictví, jako víš, jako porozumět penězům si myslím.

Ta 00:17:32
Jasně.

U1A 00:17:32
To je prostě úplně klíčové. Hm.

Ta 00:17:37
A třeba i v rámci prvního stupně, jako takhle, jak formulovat otázku... Učivo nebo konkrétní úloha, kde je důležité, aby rozuměli tomu, že ta druhá číslice zprava je desítka, ta třetí číslice je stovka. A že když nebudou rozumět tomu, jak tam vlastně funguje přechod přes desítku a tak, tak to nedají. Nějakou úlohu.

U1A 00:18:00
No, myslím si, že takové sčítání třeba pod sebe. To prostě bez toho nepochopíš, jo. Jakmile už je nějaké trojciferné číslo, tak už si je musí napsat pod sebe a podle mě bez toho to vůbec nezvládnou. A samozřejmě, jestli potom, když dojdeme k násobení, no tak to taky, že jo.

Ta 00:18:29
Přijde tobě jako učiteli důležité, aby tomu žáci rozuměli?

U1A 00:18:35
No, to je pro mě úplně zásadní, aby tomu rozuměli. Protože já jsem teda nebyla moc dobrá na matematiku a když jsem něčemu nerozuměla, no tak jsem vůbec nevěděla. A pak mi to někdo třeba vysvětlil a konečně jsem ty *příklady* mohla dělat. Tak já opravdu se snažím všemi možnými způsoby, aby to pochopili, ale jak říkám, ne vždycky to jako pomáhá.

Ta 00:19:03
A poslední otázka je pro tebe osobně, nebo přijde ti užitečné, aby se žáci, ať už na prvním stupni nebo na druhém, kdykoliv, učili, setkávali s jinými číselnými soustavami než je ta desítková? Třeba pro život, a tak.

U1A 00:19:18
No, myslím si, že jo. Myslím si, že jo. Už to, že to existuje. Už jim to vůbec ukázat, že to existuje, aby to teda pochopili, až se s tím setkají. To určitě. Ale teď, pokud neznají tuhletu, tak…

Ta 00:19:39
No samozřejmě. Jakože asi ne hned v první třídě. Spíš jako obecně, jestli má smysl jim to ukazovat, že třeba v historii to bylo nějak jinak.

Příloha 6

U1A 00:19:45
To, určitě, no. Já taky vždycky, vždycky se snažím, když něco říkám o písmenech, o číslech, tak vždycky se snažím říct, jak to bylo v historii, protože teda ta návaznost je důležitá. A vlastně v historii, tak ty lidi třeba na tom byli jako ty malé děti, že jo. Taky nevěděli, čím počítat, tak používali ta dřívka, nebo uzlíky, jo.

Ta 00:20:11
Ano, to jsou vlastně i vědecké teorie, pedagogické výzkumy, že by ta výuka měla kopírovat historický vývoj. Tedy, že dětské porozumění vlastně kopíruje historii.

U1A 00:20:23
No, možná ano. Oni někdy už jsou ale dál, protože mají ty počítače, a tak.

Ta 00:20:28
No, ano. Ale prošli si tím. Někdo ve třech letech, někdo v šesti. (No, ano.) Děkuji moc za rozhovor. Máš ještě něco, co bys chtěla přidat, nebo se doptat, nebo cokoliv k tomu?

(Konec rozhovoru k DP a změna tématu.)

Příloha 6

Paní učitelka z 1.B

5. března 2024

Ta 00:00:00

Já vlastně chci tak jako trochu zjistit, jak učitelé… Protože od druhé do páté třídy psaly děti didaktické testy, na kterých se snažím zjistit porozumění právě pozičnímu zápisu v desítkové soustavě, ale případně pak i obecněji. Takže chci zjistit, jak i učitelé rozumí, nebo spíš jak vedou děti právě k tomuhle. Tak možná první otázka, co se tobě vlastně vybaví, když se řekne poziční zápis čísla? Jestli máš nějakou ucelenou představu.

U1B 00:00:35

No tak vlastně jak jednotlivá ta čísla jdou za sebou v těch vlastně větších číslech, dvouciferných, trojciferných, čtyřciferných a tak dále.

Ta 00:00:50

Vybavíš si nějakou konkrétní úlohu třeba, když jsi ty chodila do školy, která by byla vázána na toho?

U1B 00:00:58

Ne, to si popravdě úplně nevybavuji nic konkrétního. Nám asi bylo čistě vysvětlované, tohle to jsou jednotky, desítky, stovky. Naučili jsme se to nazpaměť, kolikáté číslo to je od začátku. Pak jsme to rozdělovali, samozřejmě jsme měli asi jediné aktivity, že jsme rozdělovali třeba číslo 365 na tři stovky, šest desítek…

Ta 00:01:30

Jasně, jo, jo, jo. Rozvinutý zápis.

U1B 00:01:35

Přesně tak. To bylo asi jediné, co jsme dělali, co si vybavuji.

Ta 00:01:38

A přijde ti, že v rámci nějaké pregraduální přípravy, kterou jsi měla, byl věnován tomuto tématu dostatečný prostor?

U1B 00:01:46

Na výšce ne, určitě ne. Bohužel. Bohužel si teda opravdu nevybavuji, že by to bylo nějakým...

Ta 00:01:54

Ty teda učíš prvňáčky. Tam se to objevuje jenom jako trošku, že jo, v těch desítkách. A máš pocit, nebo... Takhle, kdy bys řekla, že je tohle téma nějak nosné, nastupuje, nebo kdy plánuješ tohle téma přinášet do hodin v rámci prvního stupně?

U1B 00:02:13

Hm, já myslím, že už právě od té první třídy je dobré pracovat s tou desítkou jako celkem. Aby vlastně, když mají číslo třeba 16, aby dokázali pochopit to, že je tam ta desítka a ta šestka. Takže mi se líbí třeba pracovat s těmi kostičkami, jak jsou spojené. Nejlépe by byly ty korálky, které tady nemáme. Perličky.

Příloha 6

Ta 00:02:41
Budou! Už slíbili, že je převezou z druhého stupně. Protože tam jsou.

U1B 00:02:49
Takže se snažím, aby pracovali s tím už vlastně od té první třídy v rámci té desítky. A asi mnohem intenzivněji od té druhé třídy, kdy už vlastně berou ta čísla do stovky. Ale myslím si, že už od té první třídy je to dobré. Tam je takové jednodušší na pochopení, že prostě ta desítka.

Ta 00:03:07
Jasně. Ono, občas i v učebnicích se objevují nějaké pytlíčky, kroužkuje se to, nebo tak něco. Používáš ve výuce i jiná znázornění čísel než číslicemi?

U1B 00:03:21
Asi kromě nějakého čárkování, což už je potom vlastně přes tu desítku náročnější vidět v tom to konkrétní číslo, tak poravdě ne, teda. Nemám takovou zkušenost, nebo ještě jsem nedostala žádný takový tip. Sama jsem si nějak nic nenašla.

Ta 00:03:46
S jakými chybami při zápisu čísla se setkáváš ve výuce?

U1B 00:03:51
V té první třídě, že mi píšou děti čísla zprava doleva. Číslo deset napíšou jako nula jedna třeba. Ale i s obrácenou jedničkou.

Ta 00:04:06
Jakoby dvacet jedna místo dvanáct.

U1B 00:04:09
Jo, přesně tak. Akorát oni to opravdu napíšou i tu jedničku obráceně.

Ta 00:04:15
Takže ono to číslo je dobře, ale je prostě jenom převrácené.

Ta 00:04:19
Týjo, to je zvláštní. Mně se stává, že mi obracejí trojky, pětky. Třetí třída, že jo. Někteří. Ale že by celé to číslo, to se mi nestalo.

U1B 00:04:27
Jako úplně minimálně. Nestává se to často. Ale to obracení číslic jako takových, to se stává docela často. Ale stává se mi to takhle u těch čísel nad deset.

Ta 00:04:42
U vyšších ročníků, když psaly ty didaktické testy pak na jinou poziční soustavu, tak se docela často opakovalo, že když jim došla číslice pro nějaký počet, tak si napsali dvě číslice vedle sebe jako třeba devět jedna jako deset. Stává se ti to v desítkové soustavě s prvňáčky, kteří právě ještě nemají tak uchopený ten poziční zápis?

U1B 00:05:06
Ne, to určitě ne.

Příloha 6

Ta 00:05:07
Ani třeba pak u stovky, že vědí jak zapsat stovku.

U1B 00:05:10
Já jsem s nimi nedělala úplně zápisy, že by sami zapisovaly čísla do stovky krom toho jednoho žáka. Takže tohle to nedokážu úplně říct. (Jo, jasně.) Když už se bavíme o číslech do stovky, tak slovně většinou, nepíšeme.

Ta 00:05:29
Ty jsi říkala, že používáš hlavně ty hranolky pro znázornění řádů. Pracujete s řády ještě nějak jinak?

U1B 00:05:38
Používali jsme ještě další Montessori pomůcky, kde jsou napsané desítky pod sebou a přidává se tam, vlastně vkládá se tam třeba dvojka. Takže máme deset, deset jako číslo a vloží se tam ta dvojka. Je to takový dřevěný pás, jsou tam na něm vlastně desítky, a pak jsou k tomu jednotlivá dřívka pro číslice. A vlastně může se z toho složit třeba dvanáct, nebo naopak třeba dvacet a podobně.

Ta 00:06:09
Já si to moc neumím představit, ale já se kdyžtak pak podívám do skládku, co máš na mysli. Ve kterém ročníku, ty jsi říkala, že ve druhém je to intenzivnější, ale ve kterém ročníku bys dávala důraz na ty řády? Protože ve druhém tam jsou desítky už?

U1B 00:06:29
Tam by to mělo být do stovky, a ve třetí třídě předpokládám, že už počítají do více jak tisíce, miliony a tak dále. Takže...

Ta 00:06:47
Protože ty jsi předtím učila, promiň, ve čtvrté, páté třídě, že jo.

U1B 00:06:50
Ano, učila, už je to docela dávno. -*Smích.*- a popravdě si to úplně tak jako nevybavuju. Abych teď nedokázala říct, co přesně se učí. Já jsem učila ve čtvrté a v páté třídě.

Ta 00:07:05
Ne, jako ne, co se učí, ale co ty bys prostě vnímala za důležité, kdy přinést.

U1B 00:07:10
Asi bych řekla, že to bude právě ta třetí třída, kde se vlastně začíná pracovat s čísly nad tisíc a víc, kde už jako těch čísel je víc. Tak možná tam bych řekla, že se klade největší důraz, ale určitě bych s tím pracovala už v té první, druhé třídě, no. Na to pozor, aby si pořád ty děti uvědomovaly, že 28 jsou dvě desítky a 8 jednotek, no. Třeba ta, ta.. Teď jsem zapomněla, jak se to jmenovalo, jak jsme pracovali na tom Montessori kursu, s tou tabulkou a mají tam vlastně ty dřevěný kartičky, desítky, stovky.

Ta 00:07:59
Známková hra.

Příloha 6

U1B 00:07:59
Jo, no, no, no. Tak to si myslím, že je skvělé na takové pochopení. To třeba v té druhé třídě si myslím, že by bylo super, v té první třídě ještě k tomu moc nebylo.

Ta 00:08:11
Věnuješ ve výuce nějakou speciální pozornost přechodu přes základ, ve tvém případě přes desítku? Při sčítání, odčítání a těchto operacích.

U1B 00:08:22
Jako co konkrétně používám?

Ta 00:08:24
Jestli tomu věnuješ nějakou pozornost nebo to prostě necháváte, že takhle jsou čísla a nevymezujete to?

U1B 00:08:34
Určitě, určitě na to kladu větší důraz a používám právě třeba takové ty sčítací tabulky, kde ta desítka je rozdělená čárou a oni si tam vlastně dávají proužky těch čísel a uvědomují si, co už přechází přes tu desítku. Protože na těch dětech vidím, že je to pro ně mnohem složitější v té hlavě si ten přechod uvědomit.

Ta 00:08:58
Takže jakoby sedm plus čtyři, tak to je pro ně těžší?

U1B 00:09:01
Je to určitě těžší, než když počítají třeba dvanáct plus čtyři. Tam došlo docela rychle k uvědomění toho, že si to vlastně rozdělí na deset a dva plus čtyři. Tady u toho to úplně takhle udělat nemůžou. Ale zkoušela jsem vlastně i takové to rozdělování třeba šest plus pět, takže tu pětku by si rozdělali na čtyři plus jedna. A to je pro ně hodně těžké pochopit, popravdě, to rozdělení. Ale možná to je nedostatečné právě, že jsme to tak často ještě nedělali.

Ta 00:09:42
Takže nespočítají šest plus pět, anebo to nespočítají s tím rozložením.

U1B 00:09:46
Oni nechápou, proč si rozdělit to číslo na pět a jedna. I když jim vysvětluju, že potom vlastně se to rovná té desítce, tak pro ně je to hrozně moc operací najednou. Při tom zápisu, když vlastně to číslo jako rozděluji, tak se jim to, zase některým, se jim to nedokáže úplně spojit.

Ta 00:10:12
Napadne tě nějaká konkrétní úloha, pro které úspěšné řešení je klíčové, právě porozumění pozičního zápisu? A bez toho to prostě nejde?

U1B 00:10:23
Hm. Hm.

Příloha 6

Ta 00:10:26
Klidně řekni, že ne.

U1B 00:10:28
Takhle mě nenapadá asi z hlavy. To bych se musela hodně zamyslet. A nemyslím, že bych stejně na něco přišla, no. Ale docela by mě zajímalo tedy teďka, u čeho je to třeba důležité hodně. A vlastně potom třeba u dělení možná, ne? Taky tam si to uvědomovat.

Ta 00:10:47
To bych vlastně taky řekla. No ono jako se jde naučit ten algoritmus a nerozumět mu.

U1B 00:10:52
To je pravda.

Ta 00:10:54
Což, je vlastně u hrozně moc úlohu. Sčítat taky můžeš pod sebou a nerozumět tomu, a tak.

U1B 00:10:59
No. Vlastně v konci i samotné třeba to násobení a tak. Tak řekla bych, že to je dost důležité, protože to může asi potom v praxi trošku usnadnit ten život. Ale jako já jsem se to taky učila čistě technicky a dlouho jsem tomu nerozuměla vůbec, jak to funguje. Takže určitě to jde i bez toho, no ale… No teď úplně mě to z hlavy nenapadne, třeba v praxi, pro co je to důležité a tak.

Ta 00:11:33
V RVPčku nejsou zakotvené jiné než desítková soustava, ale často se na školách učí třeba římská čísla nebo tak. Plánuješ ty ve výuce učit, třeba v pozdějších třídách, nějaké jiné číselné soustavy než desítkovou?

U1B 00:11:50
Jo, myslím, že takové zpestření výuky a teda, že se o tom víc dozví. Určitě to není špatný. Římský číslice jsem určitě dělala, ale nepamatuji si, že bych zkoušela nějakou jinou soustavu. To popravdě ne.

Ta 00:12:11
A přijde ti důležité, aby žáci třeba rozlišovali poziční a nepoziční? Nebo tím, že asi jenom ta římská čísla…

U1B 00:12:25
Asi... Hm.

Ta 00:12:27
Jako tím myslím... Promiň. Ten princip, že když napíšu v římské trojku, tak tam dám tři jedničky, ale není to poziční, protože to neznamená, že je to jedna stovka, jedna desítka, jedna jednotka.

U1B 00:12:41
Tak zrovna římské číslice jsou důležitý, kvůli historii a tak, aby to rozuměly. Ale myslím si, že vůbec jako pro rozvoj nějakého myšlení matematického, tak že to špatné není, protože

se na to potom musí mnohem víc zamýšlet. Ale že by bez toho... Myslím si, že asi potom, jak v kterém oboru asi, je to důležité. Myslím si, že to není špatné učit, ale zase, že by to bylo vyloženě nutné, to asi taky ne.

Ta 00:13:22
Takovým hodně specifickým případem právě číselných soustav je jedničková, což je v podstatě čárečkování. (Ano.) Ty jsi říkala, že to občas používáte ve výuce. Kdyžtak s v jakém kontextu a s jakým cílem?

U1B 00:13:36
My jsme to používali hodně ze začátku, protože jsem chtěla na psaní číslic jít docela pomalu, aby ty číslice natrénovali, ale zároveň už s tím počítáním neměli takový problém. To jim šlo docela rychle, takže v tu chvíli jsme do těch deseti používali to čárkování, ale nad deset už jsem od toho upustila. Už jsme používali čistě číslice, protože pak už vyznat se v tom, když tam mám dvanáct čárek, je složitější.

Ta 00:14:10
Stalo se ti, že by dítě dokázalo spočítat úlohu v číslicích, ale nebo napsat číslo v číslicích a nedokázalo to přepsat do čárek? Že by třeba věděli, že pětka vypadá takhle, ale neměli za tím ten počet?

U1B 00:14:28
Ne, to asi, to asi dokážou. To se mi nestalo, že by nedokázali.

Ta 00:14:36
Nebo třeba i patnáctku a tyhle do dvaceti.

U1B 00:14:42
Že by měli číslo patnáctku a nevěděli, jak to přepsat do těch čárek? (jo.) Ne, to určitě ne.

U1B 00:14:50
Myslím si, že je škoda, že jsem nepracovala tímhletím způsobem víc se znázorněním. Třeba formou těch teček nebo koleček. Třeba jak je to na hrací kostce. Že jsou různé… Že devítka budou vlastně třikrát tři, jako do čtverce. Takže vlastně pak, když se děti podívají na to znázornění, tak vědí, že je to devítka. Problém je, že kdybych teďka to dala svým dětem, protože jsem je to neučila, tak by mi to počítali po jednom. Protože bychom neviděli, jak toto číst. Ale to je proto, že jsem s tím nepracovala. A to si myslím, že vůbec není špatné taky, vidět to číslo takle při tom znázornění.

Ta 00:15:31
Přijde Ti, že se v učebnicích, které používáš, nebo v pracovních sešitech objevuje téma pozičního zápisu nebo vůbec zápisu čísla dostatečně? Nebo máš potřebu tam vnášet něco svého ještě?

U1B 00:15:48
Já mám jednu takovou větší učebnici a tam se docela často znázorňují ta čísla nad deset právě formou těch hranolků, těch kostiček spojených. Takže tam si myslím, že je to dobře

vysvětlené a myslím si, že je to relativně dostatečné pro to pochopení, ale je to jako jediný způsob, není tam určitě těch způsobů víc.

Ta 00:16:16
Takže typově s touto úlohou se potkáváš, ale nějaké další spíš ne.

U1B 00:16:21
Ne, moc ne. Teď mě nenapadá, že by tam bylo něco jiného ještě, jak by to bylo znázorněné. Kromě toho rozdělení třeba dvanáct na… zase pomocí těch čísel, čísel deset a dva třeba. Vlastně rozklad toho čísla.

Ta 00:16:44
Přijde ti, že máš všechno potřebné, co se pomůcek týče, materiálů, nějakého didaktického třeba i zázemí a tak, pro to, abys dokázala učit tohle to? Jako poziční zápis, řády a tak, třeba i ve vyšších ročnících?

U1B 00:17:01
No, až tady budou ty perličky, tak to bude mnohem lepší. -*Smích.*- To si myslím, že je hodně dobrá pomůcka. Takže co se týče těch fyzických pomůcek, tak si myslím, že vlastně tohle to za mě je taková jako nejlepší pomůcka, která je dostatečná na to vysvětlení, takže to si myslím, že tady je. A co se týče těch učebnic, nevím, jaké se potom používají v tom vyšším ročníku, ale asi pro tu první třídu, já teda s tou svojí učebnicí spokojená nejsem, ale jako vysvětlené to tam je, zrovna tohle to konkrétní. Takže asi...

Ta 00:17:49
Promiň, používáš ty anglické?

U1B 00:17:56
No, no. Nějakým způsobem to tam vysvětlené je. A vlastně asi nedokážu úplně teďka posoudit, že bych to viděla v nějakých jiných učebnicích, kde by třeba těch možností, jak to vysvětlit, nebo znázornit bylo víc. Takže to nedokážu úplně posoudit.

Ta 00:18:15
Tobě jako učiteli, přijde ti důležité, aby žáci rozuměli o tomuhle pozičnímu zápisu?

U1B 00:18:21
Určitě, určitě. Protože jinak to spěje k tomu naučení se způsobu, jak *příklady* počítat, tak jak víceméně na běžných základkách to bývá.

Ta 00:18:36
Což ale je rychlá varianta, že ano.

U1B 00:18:43
Je. Je to rychlá a účinná varianta a v konci stejně pak takhle, i když to člověk pochopí, tak takovýmto způsobem pak počítá. Ale myslím si, že se potom možná ztrácí představa o těch číslech trochu. Protože vlastně v tom čísle uvidím ty... (Tu kvantitu.) Přesně, ty desítky a tak. A možná i takové to, když se potom řeknou třeba *příklad* stokrát sto, tak asi tuší, když už si uvědomují, že stovka je tolik desítek, tak už si uvědomují, že to číslo bude veliké.

Zatímco ti, kteří nechápou, že ve stovce je tolik desítek, tak řeknou třeba úplně nějaké nesmyslené číslo.

Ta 00:19:25

Ty jsi dávala příklad násobení. A ještě nějaké oblasti učiva ti přijdou, že na tohle navazují? Předtím jsi vlastně říkala dělení, že se bez toho neobejde.

U1B 00:19:36

I dělení, no. Určitě bych řekla, dělení jednociferným, dvojciferným číslem. Když se pak dělá třeba ten zápis a ty děti vlastně zapisují ta čísla, tak si myslím, že zase si vůbec neuvědomují, jakým způsobem to funguje. Dělají to čistě technicky, no. A to si myslím, že je taky hezké vysvětlovat na těch pomůckách, ale už je to taky mnohem těžší na pochopení, no. U těch velkých čísel.

Ta 00:20:06

A pro tebe teď osobně, poslední otázka, přijde ti užitečné, aby se děti na základce, ať už na prvním nebo na druhém stupni, učily jiným číselným soustavám, pozičním nebo nepozičním, kromě té desítkové?

U1B 00:20:22

Jestli mi to přijde důležité?

Ta 00:20:24

Užitečné.

U1B 00:20:29

Já si myslím, že asi jak jsem řekla předtím, není to nezbytné, že by to bylo nutné, protože v konci žijeme ve světě, kde používáme tenhle poziční zápis, desítkovou soustavu, ale určitě to není od věci, no. Myslím si fakt, já nevím, třeba v IT a tak, tak ve spoustě oborech se to využít může. A pro nějaký jako rozvoj vůbec si myslím, že to není špatné. Takže určitě bych to začlenila, myslím si, že se to asi úplně běžně ve výuce nepoužívá.

Ta 00:21:12

Občas možná v té informatice. My jsme se učili dvojkovou, ale asi až na střední škole.

U1B 00:21:16

My asi taky, až později. Dvojkovou. Takže jo, určitě. Mně to připadá důležité. Minimálně třeba ty římské číslice. Já si myslím, že pro nějakou zábavu a tak i další, proč ne.

Ta 00:21:38

Děkuju! Děkuji moc za rozhovor.

Příloha 6

Paní učitelka z 2. ročníku

26. března 2024

Ta 00:00:00

Je to tedy ohledně diplomky, kterou píšu na matiku, na poziční zápis čísla. Takový to, když napíšu jedna jedna, tak to znamená jedna desítka, jedna jednotka. (Jo.) Tak možná první, co se ti vybaví, když se vůbec řekne poziční zápis čísla?

U2 00:00:21

No, tak zápis čísel, jak jdou za sebou. Nějak, když někdo řekne, že napiš mi číslo, to dítě napíše nebo učitel. To si představuji.

Ta 00:00:35

Vybavíš si něco, co jsi dělala třeba za dob své školní docházky k tomuto tématu?

U2 00:00:40

Ježiši, to jsme jako… Já vím, že no ty desítky, jednotky, stovky, tisíce, to jsme probírali hodně. To jsme dělali pořád, ale pak jako, no klasika, že tohle je dvojka, v první třídě dvojka, tak obtáhnout si ji, vybarvit takhle. Ale jako ne, že by se nám ti učitele věnovali tak, abychom si to prožili. Jakože spíš jenom, tohle je tohle, takže udělej tohle. Tady máš jednotky, pamatuj si, že tohle to jsou jednotky, tohle jsou desítky, tohle jsou stovky, to si máš pamatovat, ale nějak jakože takové hraní s tím jsem nezažila. A právě to chci učit i moje děti, tohle, aby si s tím jako hráli, aby zase nemuseli se to jako tak nějak nabiflovat. Jo, jako jasný, že musí se něco nabiflovat z toho, musíš vědět, že tohle jsou přesně, když už jsme u toho tématu, že tohle jsou jednotky, desítky, stovky. Musí vědět, že číslo třeba jedenáct má jednu jednotku, jednu desítku. Ale zase to můžeš udělat i takovou tou hravou formou, a ne takovou tou hnusnou, když to řeknu takhle, že tohle musíš umět, tohle, tohle, takže tohle mi jako… Já naopak jsem měla velký problém s matikou, jako na prvním stupni, protože já jsem měla strašnou učitelku, až to můžu říct jako opravdu otevřeně, která mě podceňovala, říkala mi, že v životě nic nedokážu, že budu prodavačka, že ani to ne, a takhle mě jako sejmula. Takže já jsem jako v matice, na kterou jsem jako já měla opravdu… přístup, že mě to nebavilo, protože ten učitel mě jako nemotivoval, nedával mi možnost jako něco zkusit. Takový to ponížení ještě veřejně před dětmi, že. To je pro dítě, které je malé, které se vyvíjí, tohle je úplně vrchol.

Ta 00:02:24

Jaký máš pocit, že tomu byl věnovaný prostor, ty jsi měla nějaký kurzy, že ano, ať už Montessori, nebo tak. Myslím, že školu pedagogickou, nemáš? (Mám. Střední pedagogickou mám.) No, tak jak hodnotíš prostor, který byl tomuhle tématu věnovaný v době tvé přípravy? Poziční zápis.

U2 00:02:45

Jako tam jsme spíš řešili úplně něco jiného. My jsme někdy věci hrozně rychle proletěli, některým tématům jsme se věnovali jako dost, některá jsme jako projeli, jak jsem říkala. A někdy jsme si to měli nastudovat sami. Ale nám se hrozně měnili učitele jako na tyhlety věci, takže já jsem na metodiku měla každou chvilku někoho jiného. A zase můžu říct, že po čtvrťáku jsem měla teda učitku, která nás za ty čtyři roky shrnula nám všechno tak, jak jsme potřebovaly. Ale je to problém toho, že se tomu jako, ne, že nechtěj, ale není jako podle mě na to čas, jak mají hrozně moc věcí, které musíme stihnout v našem školství a snažíme se to jako dát co nejvíc do nějakého roku, když se to dá hezky pěkně naplánovat. Tak ze mě je tohle… Je to uspěchané zbytečně, podle mě. Kdybychom tomu věnovali více času, tak učitelé budou líp připraveni a nebudou mít třeba i na výšce nějaký problém. Že třeba plno věcí na výšce pro mě bylo i jako, když jsme měli třeba něco jako s pedagogikou, tak bylo pro mě jako nový. To jsem se jako neprožila. Jako já vím, že tam jako je plno věcí nových, ale že některý věci asi bych měla znát ze střední a neznali jsme to.

Ta 00:03:55
A máš pocit, že ostatní to třeba znali ze střední?

U2 00:03:57
Někteří jo, někteří ne. To by taky půl na půl. (Záleží na střední.) No, jo.

Ta 00:04:02
Kdy máš pocit, nebo kdy bys řekla, že se tohle téma objevuje v rámci prvního stupně?

U2 00:04:07
Řekla bych, že už i v první třídě. Záleží na dětech, jak chtějí. Protože třeba u mě děti, záleží jaké, přesně jaké děti tam přijdou. Když jsou děti, kteří vlastně neznají nic, jsou přesně takový ti typičtí školkáči, tak je potřeba tam věnovat nějaký čas úplně něčemu jinému. Ale když třeba u mě děti už byly takové, jak to říct, jako nabuzené, že chtěly všechno znát a všechno vědět, tak já jsem jim to postupně servírovala, ale jako přirozeně. A stalo se mi, že mi i přirozeně na to sami přišly. Paní učitelko, jak se říká tomuhle číslo, jak to jako stavíme, tak já říkám, no to jsou třeba ty jednotky. A oni si to pamatovali, takže já už jim v první třídě pomalinku servírovala taková ta témata. A oni si to jako pamatovali. Třeba já jsem i v první třídě řešila zaokrouhlování, které se učí až teďka ve druhé a postupně až dál. A my teďka jedeme zaokrouhlování jenom na ty jednotky, že jo, to je jednoduchý, úplně. A sami to už jako ovládají perfektně.

Ta 00:05:06
Na jednotky, jako že z necelých čísel.

U2 00:05:08
No, že třeba máš tady 59, že to je na... (Jako halíře?) No, no, no, no. (Jasně, jo.) Takže je to takové, ale tak jako přirozeně. A to se mi tady líbí, že třeba když jsem učila na státní, tak tohle se mi tam nestalo, protože jsem měla úplně jiné děti. Úplně jinak sociálně založené a tady jsou zase ty děti úplně jiné, což se mi líbí na tom. Přijde mi to fajn.

Ta 00:05:28
Používáš ve výuce jiná znázornění čísla, než klasicky číslicemi?

U2 00:05:34
Třeba kamínky, teďka. Nebo čárky jsme dělali v prvním třídě, že jo. Nebo i různé kostičky, že jo. (Ty tu desítkovou soustavu taky, že ano, používáš.) Taky, ano, jako různě. Chci, aby děti věděly, že dvojka, že i dva se dají znázornit jako jinak. Že třeba to můžou být dvě dřívka, dvě kostičky, takže to se snažím. A právě to musím i kvůli mojí *Táničce*, protože ta

potřebuje hodně vizualizovat tu výuku. Někteří jsou už takoví, že jo ví, tak si vezmou tu práci a dělají si ji sami. A já tu třídu mám fakt takovou rozloženou na ty, kteří si chtějí jít jako samostatně, a pak na ty, kteří potřebují pomoct. A to jsem ráda, že jim tady jako můžu dát ten prostor. Zase taky někdy chci, aby na některé věci přišli sami. Ale oni jak jsou zvyklí, že ví, kde co je, ví, že si cokoliv můžou vzít, tak se i tu vizuální výuku… Třeba ta *Táněčka* už ví, že tohle si vezme a teď to jí pomůže k tomu, aby to vypočítala. Takže v tomhle ty děti perfektně fungují.

Ta 00:06:34
Jsou třeba nějaké kontexty, kde tohle používáš víc než v jiných? Jako to alternativní znázorňování dejme tomu.

U2 00:06:42
Já se snažím třeba i v češtině některé věci, jako tam hrozně znázorňujeme. Já se snažím úplně všechno.

Ta 00:06:47
Promiň, myslela jsi zrovna teď číslo.

U2 00:06:49
Jo, číslo, pardon, pardon.

Ta 00:06:50
Jakože jestli třeba v něčem ve výuce, nevím, v nějakém tématu, to používáš častěji než v jiných tématech nebo tak?

U2 00:06:58
Já jsem vlastně všechno vždycky znázorňovala. Já jsem se snažila i na tabuli klasicky, potom i na tom koberci jim to nějak, já vždycky hledám i různé formy toho, jak je to dané téma naučit jinak ještě. Jakože nechci, aby se naučili jenom jeden postup, že chci, aby znali víc postupů. A taky se snažím, aby to měli ulehčené, protože někteří mi to spočítají z hlavy perfektně, třeba sčítání vedle sebe, někteří to už jedou automaticky, někteří si to dají pod sebe. A můžu jim to zjednodušovat, různé metody atd. se snažím.

Ta 00:07:33
S jakými chybami při zápisu čísla se setkáváš?

U2 00:07:38
Teďka je to přesně, jak máme to sčítání a odčítání pod sebou. Takže děti, když mají třeba číslo 284 minus 25, takže mi to nedají pod ty jednotky, ale že mi to napíšou k těm stovkám tak jako různě. To je taková ta typická chyba. To furt trénujeme, že to musí dát jednotky pod jednotky, desítky pod desítky, stovky pod stovky, takže to trénujeme. A už je to teda lepší, když to s těmi dětmi děláme pořád, tak mi to, už si na to dávají pozor, ale klasicky je problém u nás plus a minus. Pletou si, že při sčítání se sčítá, při odčítání se odčítá, pletou si znaménka. A je zvláštní, že při násobení si to jako nemají jak, ale stalo se mi, že když měli násobit, tak začali sčítat.

Příloha 6

Ta 00:08:26

Ty jsi říkala, že ses učila na svém prvním stupni hodně jako jednotky, desítky, stovky. Jak tohle téma těch řádů řešíš s druháčkami asi ještě moc ne, ale třeba jo. Nebo jak plánuješ řešit téma řádů?

U2 00:08:41

Řádů jako těch?

Ta 00:08:42

Jo, řád desítek, stovek, tisíců.

U2 00:08:44

My jsme s dětmi.. Já jsem na tabuli napsala obrovské číslo. A říkala jsem, tak pojďte, co je tohle? Jednotky, tohle jsou desítky. Různě zkoušíme a dokázali jsme to i do těch milionů, mi dokázali říct. Ale to je jenom takové to zpestření. Zase nechci, aby to dělali nazpaměť. Ale oni se snaží teď jako přirozeně na to přijít. A oni jako chtějí i ty větší čísla. Takže když jsme něco zaokrouhlovali, tak já jsem dala obrovské číslo, ať mi zaokrouhlí, a pak oni, se mi líbilo, jak mi řekli 49 milionů, 529 tisíc, takže oni mi to i řeknou. A učíme se takhle. Nebo jestli to je správně tak odpovědět na tvoji otázku.

Ta 00:09:22

To není, jestli to je správně nebo ne. To jde o to, jak to děláš, jak tohle řešíš. Klasicky se v učebnicích objevuje rozvinutý zápis, což je taková ta jak píšeš 3 krát 100 plus 5 krát 10 plus 3 krát jedna, třeba. (Mhm.) Tak jestli tohle to třeba používáš, hodláš používat, případně proč? Anebo proč ne?

U2 00:09:46

Já teďka nevím, jestli to budem nějak. Ale asi jako takhle, já určitě chci, aby znali různé možnosti zápisu příkladů. A zase když já vím, že děti mají někdy strach, když vidí obrovský jako hodně vedle sebe napsaných čísel, která musí buď znásobit vedle sebe, potom sečíst, tak oni z toho mají strach. Ve finále já se je snažím naučit to, že i když může být příklad jakkoliv dlouhý, tak že to není, že nemusí mít strach, ale že přesně rozkrokovat si to musí, vidět, co má přednost a takhle. Takže u nás jako ve třídě někdy bojuju s tím velkým strachem, že se bojí, že to neudělají správně. Ale ne, že by měli strach jako ze mě, že budu nadávat nebo něco, to ne, ale že se prostě toho bojí. A já si myslím, že tohle to už jako pramení, že už možná i některé děti ze školky z toho mají strach, protože fakt se některé dítě hodně bojí. Třeba ta *Táňa*, ta obrovsky má strach, jako z těch velkých čísel. I když se snažíš, všechno, tak ona má strach, oni mají z toho velký strach. Ale určitě jak jsem říkala, chci je naučit různé postupy, násobení, jak můžou ty příklady být atd. Takže určitě bych tohle to, tohle to bych jim zrovna ukázala. Jako chtěla bych, aby věděli, že takhle to taky funguje. Někteří mi na to přijdou hned, v některých to musíme jako nějak z nich zvyzvat. -*Smích.*- (Jasně, rozumím.) Hlavně, když je to na těch dětech na té úrovni, a tady to je důležitý.

Ta 00:11:15

Věnuješ nějakou speciální pozornost přechodu přes desítku? Ať už je to ve sčítání odčítání...

Příloha 6

U2 00:11:20

Jo, akorát s tím mají děti taky dost obecně problém. Oni jako perfektně počítají takové ty jednoduché příklady. Že 6 plus 4 ví, že to je 10, žejo. Ale potom s tím mají jakoby obecně furt problém, mi přijde. Že tam se nenaučily správně ten rozklad a dopočítávání. A to je jako, to je takový ten základ. Ale jako u mě ve třídě s tím mají děti problémy jako do teďka, že já mám 6 plus 9, tak jim opravdu trvá dost dlouho, než to, než mi řeknou výsledek, nebo než to nějak jako rozloží správně to do té desítky, dopočítávají potom. Jako věnovala jsem tomu hodně času. Ale zase jsem si říkala, že nemůžu tomu věnovat extrémně tolik času, že máme jakoby plno dalšího, ale věnovali jsme se tomu. Takhle, oni mi to dokázali říct, ale potom byli prázdniny. Zmizelo to, a potom jako znovu všechno jsme museli, no. Ale opravdu jsme tomu věnovali dost. Za mě si myslím, že dost času. Ale furt s tím jako obecně máme problém. A myslím, že to není problém jen u mých dětí, ale jako dětí jako obecně, že hodně dětí s tím má problém. A jako já za sebe osobně řeknu, že já jsem s tím měla dost problém, i já, když mě učila paní učitelka moje. Takže tak.

Ta 00:12:33

Takže rozumíš, proč s tím mají problém děti.

U2 00:12:36

No samozřejmě je to jako těžký. A teď, když zjišťuju ty malinké dětičky, že jo, ze školky, jak říkám, někteří to umí perfektně. Někteří mají problém. Za mě, já si myslím, že jsem to splnila, co jsem měla. Ale myslím si, že kdyby na to…, kdyby toho nebylo jako tolik, co musí člověk jako stihnout, tak by se tomu dalo věnovat jako ještě víc. A že je potřeba se k tomu furt vracet a furt to opakovat. To je za mě. To si myslím já.

Ta 00:13:04

Jakými chybami ohledně řádů, což znamená těch desítek, stovek a tak dále, anebo place value – no, hodnota pozice, se to asi překládá – prostě, že na téhle pozici je to stovka, se setkáváš. Ty jsi říkala, že to píšou jako u toho sčítání blbě. A ještě něco tě třeba napadá, že dělají? Případně, co s těmi chybami pak děláš?

U2 00:13:27

My, když mi udělají takhle chybu, tak já je nechám mně ten příklad třeba napsat na tabuli, takhle je ho napsali. A pak to zkusí, ať mi ho i vypočítají. A pak jim ukážu můj výsledek, a pak hledáme tu chybu společně. A pak vlastně jim to dojde. Jo, pančelko, já jsem to vlastně měl posunout. Já říkám, no výborně. No a teďka pak říkám, zkusíš si ještě nějaký příklad? Oni, že jo, jo, jo, jo, chtějí vždycky. A taky se mi někdy stane, že to zase napíšou špatně, ale snažím se pořád, aby to zkoušeli a našli si tu chybu. A zase vím, že děti obecně mají problém, když udělají chybu, že se bojí. A já je vedu k tomu, že chyba to není špatně. Že chyba je naopak správná, že tím se právě nejvíc naučí. A když takhle tu chybu udělají pětkrát, tak po šesté vím, že mi to napíšou správně. A pamatujou si to. Že já to s nimi dost probíram, ty chyby. A zase trvalo hodně dlouho je naučit to, že chyba není problém. Že chyba je naopak to dobré. A furt jsme o tom měli přednášky a básničky. A teda jako za mě ty děti s tím moje už umí pracovat. A nebojí se chybovat.

Ta 00:14:39
Bylo vidět i v tom testu, že zkoušejí věci, které jsou třeba nad jejich síly, ale fakt to zkoušejí, což je super. Napadne ti nějaká konkrétní úloha, pro které úspěšné řešení je nutné porozumění toho pozičního zápisu?

U2 00:14:55
Určitě sčítání a čítání pod sebou, za mě. Tam musí určitě, aby to vypočítal ten příklad správně, tak určitě musí vědět, že tohle jsou ty jednotky, desítky, stovky, tisíce, desetitisíce atd.

Ta 00:15:05
Zároveň, když si zapamatuji, že to musím srovnat takhle, tak vlastně nepotřebuji rozumět tomu proč.

U2 00:15:11
To je pravda.

Ta 00:15:13
Jestli tě napadne něco, že se to fakt nejde naučit, že prostě musí rozumět tomu pozičnímu zápisu.

U2 00:15:19
Teď asi ne.

Ta 00:15:22
Hm. Mně přijde, že takových úloh je fakt málo. Poziční zápis se moc neřeší vlastně tolik. Pracuješ ve výuce s jinými číselnými soustavami? Případně plánuješ? Třeba římská čísla a…

U2 00:15:38
Určitě, moc se na to těším. Já mám inspiraci, jak si mě, hrozně jsi mě inspirovala tím, jak jsi suplovala, že se dají čísla zapsat i jinak. Že to může být i čínsky, žejo atd. atd., a to mě extrémně... Říkám, až bude na toto stanovený čas, tak jim to taky chci ukázat. To za mě je úplně super, že čísla nejsou jenom, že tohle je čtyřka. Že to vlastně může vypadat v jiných kulturách plně jinak.

Ta 00:16:02
A proč je pro tebe důležité, aby tohle si zkusili?

U2 00:16:05
No, tak určitě za mě, že... jak to říct... Takový to uvědomění si, že není tohle…, že třeba pětka nebo čtyřka se dá zapsat jinak. Že jsou i jiné kultury. Takový to... nevím, jak to říct...

Ta 00:16:24
Propíchnout bublinu?

U2 00:16:25
No, že na světě je hodně kultur, které... No, to uvědomění. No, to takový, že ty kultury, no, objevování kultur.

Příloha 6

Ta 00:16:42
Uvědomit si, že to, že to nějak dělám já, neznamená to, že to tak dělají všichni.

U2 00:16:44
Jo, přesně tak, že třeba v té Číně se to dělá jinak. Nebo že římské číslice vypadají takhle. A proč třeba vidím, že jednička se píše jako na třídách, někdy jsem třeba, já jsem měla čtvrtá A třeba, my jsme byli Áčkaři, takže jsme to měli jedna, nebo čárka a V. A takhle. A že to je ta čtyřka takhle a že to jde i jinak... Mně třeba přijdou ta římská čísla, že je to takové jako honosnější. A s tím se pak setkáváme u těch čtvrťáků, jak tak vyučuji dějepis, tak mně přijde, že tam se ta římská čísla trošinku profrčely, trošku. Tak oni tomu rozumí, ale že tam potřebujou tak nějak ještě dodělat. Ale je to takové nové, no. Samo o sobě to je... Jako, setkají se s tím, určitě se s tím setkají, ale na ten první stupeň by se jim to mělo jenom tak jako ukázat a pak to rozvíjet podle mě dál, někde druhý stupeň, gymply, že jo. Ale jako určitě tím prvním stupněm dát tu možnost si věci vyzkoušet zažít a hodně věcí zažít, protože pak na tom druhém stupni už není taková ta možnost prožívat tu výuku, že si nemůžou už tolik hrát. První stupeň by měl být, jo jasně, tady máš práci, tohle se musíme naučit, ale zároveň si myslím, že by měli děti něco poznat, měly by si vyzkoušet různé věci, ohmatat si všechno a... To je za mě úplně to nejdůležitější. Že, jako jo, jasně, já splním práci, kterou mám s nimi udělat, ale fakt chci, aby toho zažili co nejvíc, protože já jsem třeba tolik jako věcí nezažila v té škole a myslím si, že to není správné, že ty děti chodí do školy, přesně zažij, snaž se co nejvíc nasát a hodně taky, aby jezdili na výlety, různě, protože tím se taky nejvíc naučí. Já třeba prvňáčky, když jsem je měla tady, tak jsem je vzala ven a při čtení jsme šli číst cedule. Četli jsme všechny cedule okolí tady na Ládví... A takhle jsme se naučili různá písmenka. Naučili jsme se hezky hláskovat, naučila jsme se hezky jako číst. A takhle, že to prožili. A nejenom tupě z nějaké učebnice. Ne, já se snažím co nejvíc to propojit různě.

Ta 00:19:02
Je to taky fakt, že vědomosti se doučíš, že ale zážitky musíš zažít.

U2 00:19:04
Jo. Značky mi četli, že to je Ládví, Kobylisy... V metru, do teďka to dělám v metru, že mi čtou zastávky. Různé, pořád. A já s nimi komunikuju, že není to, že bych s nimi já mlčela. Ty děti potřebujou... A už ve školce, když jsem učila ve školce, tak já jsem taky s nimi si furt povídala, pořád, pořád. Že s nimi, když se jim takhle člověk věnuje a mluví s nimi, tak oni chytají hodně. Takže to je taková superschopnost učitele, že dokáže všechny děti poslouchat najednou a na všechny dokáže odpovědět.

Ta 00:19:38
-Smích.- Vždycky vnímám tě, počkej. (Ano, ano.) A v hlavě si děláš pořadník. Přijde ti důležité, k těm číselným soustavům zpátky, rozlišovat poziční a nepoziční, nebo aby děti to rozlišovaly? To znamená třeba římská, když napíšu I I I, tak to znamená 3 a ne sto jedenáct.

U2 00:19:54
Ano. Ještě jednou, jak byla ta otázka?

Příloha 6

Ta 00:19:58

Rozlišování pozičních a nepozičních, jestli třeba když budeš učit jiné číselné soustavy, jestli ti přijde důležité, aby tohle to vnímaly, že tam ten rozdíl je.

U2 00:20:08

Určitě, to je jasné. Určitě, že... To bych jim určitě ukázala, že přesně III, počkej...

Ta 00:20:18

Není 111.

U2 00:20:19

No, ale to jsem zamotala. Jo! Jo, pravda, ano, že to není 111, ano, je to důležité. A teďka jsem se i taky já do toho zamotala. Je to důležité, ano, je to důležité, budeme to učit. Určitě to budu učit.

Ta 00:20:34

Používáš, to jsi říkala, že vlastně jsi používala záznam pomocí čárek, nebo doteď používáš. S jakým cílem tohle tam vnášíš do té výuky? Nebo v první třídě jsi to vnášela?

U2 00:20:49

Protože čím víc děti mají podnětů, co můžou vidět, tím víc si to zapamatují. A jo, já jsem se to učila, já jsem opravdu jenom, když jsem se učila, tak já jsem jenom seděla v lavici. Já tím, že potřebují, jako ty malé dětičky potřebujou pohyb do výuky. Takže když ho mají, tak se víc soustředí a zase nevydrží sedět, takže když můžou mít různé, třeba já jsem v jedničce dělala to, že měli různá stanoviště, a tam se potom střídali a tam si mohli udělat tohle, tady si složili tohle, tady zase mně skládali tohle, a furt na něco šahaly. Potom i písek, hodně mi psali do písku, tak jako různě skládali. Taky nejenom, že je učit jemné motorice, ale zároveň je učit poznávat různě, takže tohle. Za mě je opravdu důležité si to prožít všemi smysly nejlépe.

Ta 00:21:37

Stalo se Ti, že by nějaký prvňáček dokázal zapsat číslo číslicí, ale nedokázal to znázornit? Že bys třeba řekla pět a on ti napsal pětku, ale nedokázal by udělat pět.

U2 00:21:45

To se mi nestalo. Vůbec. Všichni věděli. Teda takhle, pardon, stalo. To je moje *Táňa*, ten má jakoby extrémní problém, teda když se řeklo tři přesně, nebo pět, tak ta s tím měla problém, ale tam je, tam, když to řeknu takhle otevřeně, tak rodiče se prostě *Táničce* nevěnovali. Oni mi ji dali do první třídy a řekli mi, že si myslí, že všechno úplně, paní učitelko, naučíte *Táničku* vy. Že tam nebyla žádná příprava. Takže já jsem začínala s dítkem, které absolutně neumělo barvy, neumělo nic.

Ta 00:22:18

Ani ve školce, jo?

U2 00:22:20

Takže *Táničce* jsme to museli kreslit, musela jsem jí tam ty medvídky dávat, tři modré medvídky, nebo čtyři modří velboudi, takhle všechno pořád dokola jsme to museli. A taky prsty, žejo. Řekli ukázat tři. A ona ukázala vždycky jako jinej počet, ale tam je jako problém v té rodině, že myslím, že ty rodiče se jí nevěnovali, zanedbali tady v tom. A proto jede tohle teďka. Ale myslím, že se *Táňa* hodně zvedla, že jak se jí člověk věnuje v té škole a ona se snaží a chce, tak to jde potom vidět. Ale bylo to jako náročné.

Ta 00:22:57
Přijde ti, že v učebnicích, které používáš, je téma pozičního zápisu dostatečně?

U2 00:23:02
Ne. Není. A v některých ani není.

Ta 00:23:06
Jako vůbec? (Ne.) Husté. Takže máš potřebu nějak vnášet svoje věci do toho?

U2 00:23:11
Jo, hodně. Jako sice já mám tématťák, ale když chci, aby něco poznali jiného, tak já jim to tam dám.

Ta 00:23:17
Jo, takže čerpáš z nějakých internetových zdrojů pomůcky a tohle…

U2 00:23:20
Jo, určitě, určitě. A učebnice to momentálně nemá. Takže jako... Vůbec se to tam... A učí se to málo. A... Jo. Mělo by se tomu věnovat více pozornost, protože přesně pak je problém s počítáním, sčítání pod sebou, pak i čísla, zápis... My jsme třeba teď nedávno zkoušeli, to, že jsem řekla číslo třeba tisíc dvěstě dvacet pět a napište mi ho. Jo. A oni to psali úplně třeba, že pětku dají na začátek, jako různě, takže on to je obecný takový problém. Nevěnuje se tomu pozornost dostatečná. A... Jako takhle, snažím se to ty děti naučit, jako co nejvíc

Ta 00:24:09
Takže, a máš pocit, že máš dostatek zdrojů z jiných…?

U2 00:24:15
Jo, to určitě. Na tom internetu je toho hodně. Ale mě mrzí, že v těch učebnicích, toho není, jako, že to není.

Ta 00:24:22
Tak jako zázemí podporu a tohle to…

U2 00:24:24
Ano, a já tohle vůbec nemám, v učebnici nebo v tom pracovním sešitu, ktery já mám. Tam se, jasně, tam je nejvíc na násobení, na dělení, ale na tady tu, na tohle důležité tam není. A samé slovní úlohy. Nic víc. (Jasně.) Jo, takže to dítě, co potom má dělat, jako. To je strašný. Jsem vytočená teďka.

Ta 00:24:46
Jasně. No, na ostatní otázky asi odpovíš ano, protože to je hodnocení důležitosti. Jestli ti přijde důležité, aby to žáci zvládali. (Určitě.) Jestli ti přijde důležité, aby se žáci na prvním stupni, nebo nejenom na prvním stupni, obecně kdekoli na škole potkali s jinými číselnými

soustavami. (Mhm, mhm.) A jaké oblasti učiva podle tebe čerpají z porozumění pozičnímu zápisu třeba dál? Ty jsi říkala sčítání, odčítání, násobení, všechny tyhle. A třeba ještě něco?

U2 00:25:18
Já už jsem teda trošinku mé dva chlapečky, nadané, jsme zkoušeli takovou jednoduchou rovnici. Jako to o jedné neznámé, že. Já s nimi zkouším co nejvíc různé věci, možnosti, že ta matika není jen o tom sčítání, plus, mínus, nebo o sčítání, odčítání, o dělení, násobení, že to máš jako různé. Že to je prostě, že toho je hodně. Že jsou různé možnosti, jak si spočítat příklad, že se různě píše příklad, že je můžou... Za mnou přišel *Daník* a říkal mi něco o sinusoidách atd. Různě mi to chtěl ukázat všechno. Takže jim dávám možnosti. S jakýmkoliv nápadem, se kterým přijdou, tak já si jim snažím jako na to pomoct odpovědět a ukázat jim to.

Ta 00:26:11
Díky, díky moc. Jsme se rozpovídaly. Děkuji moc.

Příloha 6

Pan učitel ze 4. ročníku

8. dubna 2024

Ta 00:00:00

Jedná se o rozhovor k diplomce, ohledně porozumění pozičnímu zápisu, s tím, že i tvoje děti psaly testy, v rámci kterých jsem nějak zjišťovala to porozumění a tudíž chci si trochu srovnat s těmi testy, jakým způsobem ty třeba vyučuješ, na co dáváš v tomhle tématu důraz, jestli to nejde nějak propojit s těmi výsledky testů. Tak možná první otázka. Co se ti vybaví, když se řekne poziční zápis čísla?

U4 00:00:41

Vybaví se mi nějaká pozice v zápisu čísla. Jako třeba v řadě?

Ta 00:00:51

Abych Tě trochu uvedla do tématu, když napíšeš 3, 8, 5, tak to znamená tři stovky, osm desítek, pět jednotek, prostě tohle to. Protože jiná čísla, třeba římská, jsou nepoziční. Tam, když napíšeš MM, tak obě M mají stejnou hodnotu tisíc. A vybavíš si nějakou úlohu k tomuhle tématu ze své školní docházky?

U4 00:01:13

Tyjo, si nevzpomínám moc. To už je dávno, ale ne.

Ta 00:01:17

Jakože nějaké řády, například…

U4 00:01:21

Jako matně, ale vlastně ne. Jako nevzpomínám si. Nebo nevzpomínám si na ten okamžik, kdy mě to někdo učil.

Ta 00:01:38

Jak hodnotíš prostor věnovaný tomuhle tématu v rámci tvé pregraduální přípravy? Což možná v rámci speciální pedagogy asi moc ne, nebo asi jste neměli vyloženě matematiku nebo didaktiku.

U4 00:01:51

To jsme tam neměli, ano. To jsem se musel připravit sám.

Ta 00:01:54

Rozumím. Kdy a v čem se podle tebe poziční zápis objevuje v rámci učiva prvního stupně?

U4 00:02:04

No, jako kdy se objevuje, nebo kdy jsem ho já začal používat?

Ta 00:02:10

To je vlastně asi stejná otázka.

U4 00:02:11

Já jsem s tím začal už v podstatě v první třídě.

Ta 00:02:19

Tedy předpokládám nějaké desítky, jednotky.

Příloha 6

U4 00:02:21
Ano, jednotky, desítky. A když jsme pak přešli na stovky, tak oni už se přirozeně ptali je, co bude dál a někteří už to věděli, jiní ne. Takže to bylo takové jako v podstatě i přirozené.

Ta 00:02:32
Používáš nějaká jiná znázornění čísel než klasicky zápis číslicemi ve svých hodinách, ve své třídě?

U4 00:02:41
Málo. V podstatě ne. Jenom když děláme nějaký rébus nebo nějaké kódy, tak jakože se dá třeba… Že jsem jim říkal, že v podstatě to, že vypadá dvojka, tak jak vypadá, to neznám, to znamená, že třeba nikde jinde ve světě nemůže vypadat jinak a že i kdybychom se my všichni dohodli na tom, že třeba znak v podobě spirály bude mít hodnotu dvě, tak že to bude fungovat stejně.

Ta 00:03:08
Jo. A používáš nějaké modely těch čísel? Ať už kvantitativní, jak třeba pomůcky nebo tak, nebo používal jsi dříve?

U4 00:03:17
Ne. Maximálně jsme třeba dělali, že jsem vyjádřil počet, že jsem třeba namaloval dva rohlíky, dvě čárky, dvě tečky, dva bonbony a symbol dvojka.

Ta 00:03:28
Jasně, v první třídě předpokládám.

U4 00:03:30
Ano, ano.

Ta 00:03:30
S jakými chybami při zápisu čísla se setkáváš ve své výuce?

U4 00:03:39
Jako, že ho neumí zapsat. Nebo...

Ta 00:03:42
Jako nějaké konkrétní chyby, třeba se stává, že někdo napíše dejme tomu v první, v druhé třídě.

(Přesun do jiné místnosti.)

Ta 00:03:49
Takže s jakými chybami při zápisu čísla se ve výuce setkáváš? Tím myslím, stává se třeba, že někdo v první třídě neumí zapsat 425. A napíše 400205.

U4 00:05:12
Když pomineme zrcadlové překlápění čísel…

Ta 00:05:16
Promiň, čísel nebo číslic?

U4 00:05:18
Čísel i číslic.

Ta 00:05:20
Jo.

U4 00:05:21
Ale to už teďkom se s tím nepotkávám.

Ta 00:05:24
Promiň, že ti do toho skáču. Protože v první třídě, *U1B* říkala, že se i stává, že někdo napíše desítku, ale jako celou takhle. -*ukázka*-

U4 00:05:32
Jo, takhle. Ne, tak to se mi nestalo.

Ta 00:05:33
Což beru jako zrcadlové překlápění čísel. Ale když někdo napíše jen pětku obráceně a tohle -*ukázka*- myslí jako patnáct.

U4 00:05:40
Ano, ano. Spíš, když měli zapisovat nějaké vyšší řády, třeba když měli zapisovat, já nevím, třeba 100 tisíc, já nevím, 621, tak někdy tam nebo 158 tisíc, třeba 316, tak tam byl ten problém, že si nejdřív museli představit, jak ta čísla jdou za sebou, že to někdy psali… jako že blbě zapisovali.

Ta 00:06:04
Jako v jiném pořadí, ty číslice.

U4 00:06:06
V jiném pořadí, ano, nebo úplně jiné číslo napsali. A pak, když si to znovu měli přečíst, tak zjistili, že tam je úplně jiné číslo, ale nedokázali mi říct příčinu „Jo, já když jsem to slyšel, tak já vlastně...“

Ta 00:06:16
Jasně. Že třeba vypouštěli nuly, nebo...

U4 00:06:19
Nuly, anebo třeba, když to bylo 168 tisíc 23, tak tu nulu přesně vypustili. Ano, no, no no.

Ta 00:06:27
Ano. To, co tam vlastně neslyší v tom čísle.

U4 00:06:30
Ano, ano.

Ta 00:06:31
Jak ve výuce pracuješ s řády? Jestli používáš, pomůcky jsi říkal, že ne, ale znázornění nějaká… Řády tím myslím jednotky, desítky, stovky, tisíce.

Příloha 6

U4 00:06:40
Takhle. Já jsem to nikdy barevně neoznačoval, nikdy jsem na to nevyužíval nějaké zvláštní barvy nebo pomůcky. Spíš jsem to... Spíš si to upevňovali tím, že jsme si to furt opakovali. Že jsme si napsali číslo a pak si ho rozdělili do vlastně jednotlivých kolonek a věděli, že to jsou jednotky, desítky, stovky, tisíce a tak dále.

Ta 00:07:02
Že to zapisovali třeba v nějaké tabulce? Nebo kolonek…

U4 00:07:07
Ani to ne. Prostě, že když jsme si napsali číslo, tak já jsem nejdřív na tabuli napsal číslo, kdy jsem teda udělal ty jednotlivé kolonky, co jsou jednotky, desítky, stovky a tak dále. A potom jsme si nějaká čísla diktovali a na tabuli bylo vlastně napsané to číslo, kdy oni věděli, kde jsou ty jednotky a snažili se pracovat jako z tabule. Že jsem nepoužíval žádný pomůcky.

Ta 00:07:30
Zároveň tvoje děti byly v testu nejúspěšnější.

U4 00:07:33
Protože to jako viděli a vlastně pořád jsme to opakovali, takže spíš takovým drilem než pomůckami. Protože mě přijde, že ty pomůcky někdy můžou pomoct, usnadní to, ale nesmí to být potom taková berlička, se kterou pořád chodíš. A to je potom ten problém, že když se od těch pomůcek potom chce ustoupit, tak to dělá potom větší… nebo tak to může dělat problémy.

Ta 00:07:57
Ve kterém ročníku jsi začal klást důraz na ty řády? Ty jsi říkal, že v první třídě už jsi to nějakým způsobem tam vkládal, ale vyloženě jako tohle jsou řády, takhle to funguje.

U4 00:08:10
Ve druhé třídě bylo to hlavní, když jsme začali sčítat pod sebou a odčítat. Tehdy vlastně to bylo důležité.

Ta 00:08:17
Klasicky se v učebnicích objevuje rozvinutý zápis čísla, což je takové to, když napíšu 521 jako 5 krát 100 plus 2 krát 10 a tak. Používáš ho ve výuce? Případně s jakým cílem?

U4 00:08:37
Když jsme dělali násobení a znali malou násobilku, takže mohli vlastně… když jsem jim třeba schválně zadal vyšší číslo, tak si ho mohli takhle rozdělit, vynásobit a sečíst. Takže to dokázali používat, že si tím dokázali pomoct.

Ta 00:08:52
Jasně. Před zavedením algoritmu písemného násobení.

U4 00:08:56
Ale zase nechtěl jsem to po nich dlouho. Bylo to spíše, taková věc, kdy jsem chtěl, aby to pochopili, jak to vlastně funguje, ale používal jsem to jenom chvilku, ne dlouho zase, aby to nebylo jako ustálená metoda, že každé číslo si takhle rozdělím.

Příloha 6

Ta 00:09:15

Věnuješ speciální pozornost přechodu přes základ? Přechodu přes desítku.

U4 00:09:20

Přes desítku. Ano. Nebo takhle, speciální?

Ta 00:09:24

Jako jestli třeba na to upozorňuješ, když se to v úlohách objeví, nebo v první třídě, jestli jste to nacvičovali vyloženě.

U4 00:09:30

Ano, a když jsem dělal překlady, kde to bylo třeba při sčítání, tak jsem někdy dělával nad tím příkladem tečku. Že věděli, že si tam musí dát pozor, že tam je nějaký přechod přes desítku, nebo když se odčítalo, že se tam musí jako dopsat tu desítku. Takže jsem dělal chvilku tečku nad tím příkladem a potom jsem říkal, že tečky končí a že si musí na to dávat pozor sami.

Ta 00:09:58

Napadne tě nějaká konkrétní úloha pro jejíž úspěšné řešení je klíčové porozumění pozičního zápisu? Že to bez toho nevyřeší, aniž by tomu rozuměli.

U4 00:10:09

Nějaké konkrétní úloha, u které by to bylo důležité…

Ta 00:10:15

Já možná dovysvětlím, co tím myslím. Protože třeba u písemného stačí, když si zapamatují, že to musí srovnat zprava, ale nemusí rozumět tomu, proč. Prostě se to můžou jen naučit. Ale nějaká úloha, kterou nevyřeší bez toho.

U4 00:10:32

Sčítání desetinných čísel. Když je pod sebou píšou, tak ví, že… No musí mít desetinou čárku pod sebou, takže se to dá zjednodušit. Ale u těch desetinných čísel mě tak napadá.

Ta 00:10:44

To mě nenapadlo, a to je vlastně pravda.

U4 00:10:46

Protože když mám u desetinných čísel jedno číslo delší a jedno kratší tak buď si tam dopíšu teda nuly, aby si to jako srovnali, ale potom, když to třeba násobí, tak tam mají potom strašně nul, takže vlastně už to nedělají, takže musí si tam správně napsat na daná místa.

Ta 00:11:00

S jakými chybami ohledně řádu a s tím související hodnoty té dané pozice se setkáváš a jak je ošetřuješ? Jak s nimi pracuješ?

U4 00:11:11

Když to špatně zapíšou, no…

(Přesun do jiné místnosti.)

Příloha 6

Ta 00:12:30
S jakými chybami ohledně řádu a s tím související hodnoty pozice - toho, na které pozici ta číslice je, se setkáváš ve své výuce a jak je řešíš? Jak s nimi pracuješ?

U4 00:12:43
Nejčastěji to bylo právě u sčítání, nebo později násobení pod sebou, když to bylo ve slovní úloze a museli si ten *příklad* sami sestavit. Nebo schválně jim potom píšu, že mají v písemce, mají *příklady* třeba na sčítání, či násobení a píšu je do řady, ne pod sebou. Takžo oni teďka musí jako se správně napsat ty jednotlivé řády pod sebou. A to je v podstatě asi jediná metoda, kterou na to používám.

Ta 00:13:10
Rozumím. Takže chyby dělají teda ty, že to občas napíšou jinak…

U4 00:13:14
No, dělali. Teď už to teda vidí, ale bylo to ze začátku tak, že to přesně napsali jen zprava, zprava doleva zapisovali ten příklad pod sebou.

Ta 00:13:32
Zleva. Jo. V RVP a v našem školním vzdělávacím plánu není přímo zakotvené, že by se měly učit jiné číselné soustavy, tím myslím římská čísla a prostě podobné. Ty s nimi pracuješ? Případně plánuješ pracovat?

U4 00:13:50
Pracuju s tím méně, protože se s tím pořád ani tolik setkávat nebudu. Měli jsme takové jako speciály třeba na římská čísla. A nebo jsme ještě zkoušeli... Zkoušeli jsme třeba ještě čínské násobení, jako ze srandy.

Ta 00:14:09
Jo. Což není zápis čísla. No v podstatě je. Protože tam ty čárky něco znamenají. Poziční zápis, dokonce.

U4 00:14:18
A pak ještě, ale to jsou soustavy. Tak vlastně ne, moc ne, římská čísla maximálně.

Ta 00:14:27
Těmi soustavami jsi myslel...

U4 00:14:29
Já jsem myslel, potom později to budu dělat v pětce. Jako dvojkovou soustavu, dvanáctkovou…

Ta 00:14:33
Jo takhle! To jsou určitě jiné poziční, teda jiné soustavy, než desítková klasická. S jakým cílem chceš pracovat, nebo jsi pracoval s těmi římskými, nebo chceš pracovat právě s těmi pozičními jinými než desítková?

U4 00:14:50
S jakým cílem? Spíš mi to přišlo jako takové zpestření matematiky a asi nejzajímavější je pro ně ta dvojková soustava, kterou mají spojenou děti s počítačem.

Ta 00:15:02
Jasně.

U4 00:15:03
Takže je to řeč, řeč kompjútrú, tak to číslo do dvojkové soustavy.

Ta 00:15:08
Tím už trošku odpovídáš na další otázku, jestli vedeš žáky, nebo plánuješ vést k rozlišování pozičních a nepozičních číselných soustav. To znamená uvědomit si rozdíl mezi římskými čísly, kde jedna jedna jedna znamená tři a pozičními, kde jedna jedna jedna jedna znamená jedna jednotka jednoho řádu jedna druhého a tak dál.

U4 00:15:32
Vlastně jsem nad tím nepřemýšlel, vždycky to vyšlo tak nějak samo, ale… Jako s jakým cílem, jestli to plánuju?

Ta 00:15:38
Jestli vedeš žáky k rozlišování nebo jestli to sám případně rozlišuješ, jestli ti to přijde důležité?

U4 00:15:45
Přijde mi to méně důležité.

Ta 00:15:51
Specifickým případem číselných soustav je jedničkova, což je v podstatě zapisování počtem, třeba čárek. Používáš ji ve třídě? Případně proč a v jakých kontextech? V čem ti to přijde dobré a v čem to má nevýhody?

U4 00:16:12
No, takhle. V té čtyřce už se s tím v podstatě moc nesetkávám nebo nepoužívám, ale když jsme se třeba učili pojem čísla nebo tak, tak jako počet čárek byl fajn, takže jsem to používal. Nebo počet nějakých bodů nebo něco takového. Takže vlastně tam, aby si uvědomili nějaký pojem čísla nebo, že můžeme vyjádřit hodnotu, já nevím, počtem zrní nebo čárek, tak to jsem používal. Jinak to v podstatě nepoužívám. Teďkom. Ve čtvrté třídě.

Ta 00:16:47
Jasně. Přijde ti, že se v učebnicích, které používáš, objevuje tohle téma dostatečně?

U4 00:16:56
Já používám učebnici spíše jen takovou, že ji máme a jen tu a tam s ní pracujeme, že ji používám málo učebnici, skoro vůbec by se dalo říct. Takže si myslím, že se tomu tématu tam nevěnují tolik, ale nedokážu říct, jestli jsem se jen špatně koukl já do té učebnice.

Ta 00:17:19
Jasně. Ale určitě máš potřebu si témata obecně zpracovávat po svém.

U4 00:17:24
Tak.

Příloha 6

Ta 00:17:26
Tudíž kdyby ti vyhovovala ta učebnice, tak ji spíš používáš. Předpokládám. (Ano.) Přijde ti, že máš všechno potřebné k vyučování pozičního zápisu, ať už to jsou pomůcky, materiály, jako pracovní listy nebo tak, nebo i didaktické zázemí k tomu. A tohle? Zdroje nějaké?

U4 00:17:59
Vzhledem k tomu, jak málo používám pomůcky, tak ano.

Ta 00:18:04
Jo, jasně.

U4 00:18:06
Takže ano.

Ta 00:18:08
A i ty ostatní věci, jako zdroje, inspirace, všechno. Že vlastně nepociťuješ nějakou nouzi v tomhle. (Ne.) Šťastný učitel. *(-Smích.-)* Přijde tobě jako učiteli, porozumění pozičnímu zápisu pro žáky důležité?

U4 00:18:31
Ano.

Ta 00:18:33
Jaké oblasti učiva podle tebe čerpají z tohohle, z toho porozumění? Na něco už jsme narazili, že jo. Ty aditivní úlohy třeba.

U4 00:18:43
Jaké oblasti učiva?

Ta 00:18:48
Vycházejí, na to navazují, čerpají z toho. Třeba jsme zmínili právě ty písemné algoritmy sčítání, odčítání.

U4 00:18:59
No, to pod sebou a čtení čísel, nebo třeba, já ještě někdy používám, ale to s tím možná úplně nesouvisí, když přepisují desetinné číslo na zlomek, takže při tom třeba, třeba jako je to sedm dvacetin, takže napíšu sedm lomeno dvaceti a sedm dvacetin. A vlastně, asi mě k tomu víc nenapadá teď.

Ta 00:19:30
Je podle tebe osobně užitečné, aby se žáci učili jiným číselným soustavám, než je klasicky desítková? … Teď neříkám zábavné, ale jako užitečné.

U4 00:19:44
No…

Ta 00:19:47
Teď myslím obecně nejenom na prvním stupni, třeba i později.

Příloha 6

U4 00:19:51
Tak to asi určitě, pokud budeme brát, že třeba později se tím budou setkávat zrovna nějaký programátoři, nebo v rámci studia matematiky, když budou pokračovat dál, ale běžný člověk se s tím setkává pramálo. Takže kladu větší důraz na to, aby pracovali v desítkové soustavě než trávit dlouhý čas třeba počítáním v jiných soustavách.

Ta 00:20:21
Jasně. Děkuji ti moc za rozhovor.

U4 00:20:23
I já děkuji.

Ta 00:20:24
Jenom ještě ten převod do té dvojkové soustavy, nebo jsme s nimi pracovali v osmičkové, nebo šestnáckové, tak jsem to vlastně učil v páté třídě, a bylo to spíš jenom takové jako rozšíření to, že se dá pracovat jako v jiných soustavách, aby si uvědomili, jak to vlastně funguje. Ale není to pro mě jako, jako středobod, abych je s tím seznamoval na tolik, že prostě… nebo že stejně se s tím nebudou setkávat. Takže budou počítat v desítkové soustavě a myslím si, že když by se tomu věnovalo hodně časů, tak vlastně nestíháš potom, nebo pak asi nemají čas na to ostatní.

Ta 00:21:09
Takže, jestli to shrnu, tak z toho vnímám, že ti přijde důležité, aby se setkali s tím, že nějaké jiné existují, aby měli to povědomí, že desítková je vlastně konvenční. Ale nemusí v tom umět počítat.

U4 00:21:25
Tak. Ano.

Ta 00:21:27
Děkuji.

U4 00:21:28
Za málo.