Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Historie matematiky v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ

History of Mathematics at subject matter of Maths at Primary school

Mgr. Irena Richtrová

Vedoucí práce: PhDr. Michaela Kaslová

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Historie matematiky v učivu matematiky na 1. stupni ZŠ* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Ve Vlašimi 15. 4. 2024

Děkuji PhDr. Michaele Kaslové za odborné vedení, pomoc a oporu, kterou mi poskytla při psaní této diplomové práce.

Děkuji všem učitelům, kteří se podíleli na ověřování navržených didaktických materiálů, za jejich cenné reflexe.

Děkuji své rodině za nekonečnou podporu a trpělivost při mém studiu.

ABSTRAKT

Diplomová práce je zaměřená na historii matematiky a na možnosti jejího zařazení do výuky matematiky na 1. stupni ZŠ. Cílem bylo vytvořit a sestavit soubor didaktických materiálů na základě východisek, která vyplývají z teoretické části. Bylo navrženo 6 tematických oblastí z historie matematiky a 20 konkrétních didaktických scénářů a aktivit s doplňujícím materiálem k přímému použití ve výuce včetně teoretické části pro učitele.

Vhodnost didaktických materiálů byla ověřována na 34 školách z celé České republiky. Na základě analýzy reflexí z vyučování byla posouzena nosnost vybraných historických témat a byly navrženy úpravy didaktických materiálů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Historie matematiky, historie čísel, historie geometrie, abakus, Pythagoras, Fibonacci, matematika 1. stupně ZŠ, didaktické materiály.

ABSTRACT

The diploma thesis is focused on the history of mathematics and the possibility of its inclusion in the teaching of mathematics at the 1st grade of elementary school. The goal was to compile a set of didactic materials based on the starting points that result from the theoretical part. 6 thematic areas from the history of mathematics and 20 specific didactic scenarios and activities with additional material for direct use in teaching, including a theoretical part for teachers, were proposed.

The suitability of didactic materials was verified at 34 schools from all over the Czech Republic. Based on the analysis of reflections from teaching, the loadability of selected historical topics was assessed and modifications of didactic materials were proposed.

KEYWORDS

History of mathematics, history of numbers, history of geometry, abacus, Pythagoras, Fibonacci, 1st grade primary school mathematics, didactic materials.

Obsah

Úvod

Historie matematiky – spojení dvou zdánlivě nesourodých disciplín, které jsou mi obě velmi blízké. Spojení na první pohled třaskavé, ale při bližším zkoumání neuvěřitelně přirozené. Vedle toho práce s žáky na prvním stupni základní školy, kterým chci pomáhat objevovat radost z poznání. To jsou důvody, které mě přivedly k tématu této diplomové práce.

Žák 1. stupně ZŠ je nesmírně vnímavý a chtivý poznání. Úkolem učitele je poskytnout mu dostatek různorodých příležitostí a podpory k objevování a osvojování si nových dovedností a poznatků, přičemž důraz je dnes ve vzdělávání zcela logicky kladen na rozvoj klíčových kompetencí, mezi které patří např. schopnost myslet v souvislostech, vztah k historickému odkazu našich předků nebo vědomí kulturní sounáležitosti.

Myslím, že si málokdo uvědomí, mimo lidí z oboru, jak poutavou historii matematika má, že historie matematiky je historií lidského poznání, rozvoje a pokroku. Jsou to dva provázané, na sobě závislé světy. Jejich společná cesta započala dávno před Pythagorem či staviteli egyptských pyramid a je plná poutavých příběhů nejen čísel, měření, objevů, velkých myslitelů, ale i magie.

Proto jsem připravila soubor didaktických materiálů, které jsou na vybraných prvcích z historie matematiky postavené. Učitelé tak mohou se svými žáky cestovat časem do pravěku, zastavit se na Nové Guineji, v Americe, u Pythagora, mezi kupci na hedvábné stezce nebo se stát natahovači provazů. Mohou podniknout dlouhou cestu se šunjou a jejími kamarády z Indie až do Itálie a budou-li vytrvalí, tak až na Mléčnou dráhu.

1 Teoretická část

1.1. Charakteristika žáka na 1. stupni základní školy

Ve věku 6–7 let se dítě stává školákem. Jedná se o jeden z nejvýznamnějších milníků v dětském věku, který s sebou přináší velké změny v oblastech sociálního postavení, zvyšujících se nároků na dítě a očekávání od něj. Může to být provázeno jistou mírou rozkolísanosti a zvýšené citlivosti dítěte. Z pohledu celkového vývoje označujeme období, kdy je dítě žákem 1. stupně ZŠ, jako mladší školní věk (Langmeier, Krejčířová, 2013). Protože však rozdíl mezi dítětem v 6, potažmo v 7 letech a dítětem v 11–12 letech je obrovský, můžeme období 9–12 let označit jako střední školní věk (Matějček Z., 1986, in Langmeier, Krejčířová, 2013). Některé rozdíly mezi těmito dvěma obdobími jsem podle Langmeiera a Krejčířové (2013) shrnula v tab. 1.

Období	Mladší školní věk 6–8 let	Střední školní věk 9–12 let
Emocionalita	rozkolísaná	stabilnější
Postoje, názory	sugestibilní	vyhraněnější
Vliv fantazie	silný (pohádky)	umírněný (hrdinové)
Schopnost soustředit se*	6–12 min	9–18 min

Tab. 1 Rozdíly mezi žáky mladšího a středního školního věku. *Údaje jsem doplnila podle údaje Fontany (2014, s. 156), kdy na každý rok dítěte je třeba počítat minutu až minutu a půl.

Z hlediska kognitivního vývoje se žák na začátku své školní docházky nachází přibližně na pomezí stádií, která podle Piageta nazýváme předoperační stádium a stádium konkrétních operací (Fontana, 2014). Myšlení žáka je v tomto období stále silně vázané na akci – pohyb a teprve postupně si žák začíná budovat strukturovanou soustavu symbolického myšlení, která je narozdíl od dospělých vázána na konkrétní zkušenost (Fontana, 2013). Žáci na 1. stupni ZŠ dokáží dobře popisovat své okolí a uvádět konkrétní příklady určitých jevů (vysvětlovat příčiny a uvádět definice patří do vyššího stupně myšlení). Žák je plně zaměřen na poznání reality. Je to období tzv. střízlivého realismu, který se projevuje ve všem, co žák dělá (učení, četba, malování, hra, …). Zpočátku mluvíme o naivním realismu, který je silně ovlivněn a do značné míry určován autoritami (rodiče, učitelé, …), později si žák buduje vlastní kritický pohled na svět – kritický realismus (Langmeier, Krejčířová, 2013).

Žák na 1. stupni ZŠ rozvíjí své myšlení skrze grupování (Fontana, 2014). Grupování, tedy seskupování či třídění předmětů a jevů na základě jejich společných znaků, dále řazení a přiřazování buduje zásadní kognitivní struktury dítěte, které mu pomáhají v orientaci ve vztazích mezi předměty a jevy a následně při řešení problémů. Následné tříbení (pozitivní kvalitativní změny) již existujících kognitivních struktur a pochodů odráží vývoj a zrání myšlení žáka (Fontana, 2014).

Fontana (2014) dále uvádí, že pojmotvorné dovednosti u žáků na úrovni konkrétních operací (tj. do věku 12–16 let, v některých oblastech myšlení či u některých jedinců i déle či celý život) jsou úzce spjaty s jejich tělesnou činností. Vlastní praktická zkušenost je při vzdělávání naprosto zásadní, je to surovina pro myšlení. *„Omezujeme-li jejich zkušenosti, omezujeme současně i jejich chápání,“* (Fontana, 2014, s. 79).

Je třeba si uvědomit, že značná část žákova učení závisí na „lešení“, které mu učitel poskytne (Fontana, 2014). Takové lešení pomáhá žákovi nacházet souvislosti, pomáhá vytvářet bezpečné podmínky k napodobování, zvnitřňování a praktickému uplatňování návyků, dovedností a znalostí.

1.1.1. Motivace žáka

Přirozenou potřebou žáka na 1. stupni ZŠ je být aktivní, zkusit si a objevovat věci na vlastní kůži vlastní reálnou činností. Jedná se o přirozený pud zvídavosti, kterým jsou obdařeni jak lidé, tak zvířata (Aktinsonová et. al., 1995, in: Fontana, 2014). Tento pud nás podněcuje ke spontánnímu zkoumání a objevování bez toho, že bychom byli zacíleni na zjevný hmotný výsledek. Jde o součást naší vnitřní (intrinsické) motivace. Na počátku školní docházky je žák obvykle chtivý vědění a poznání. Postupem času však jeho zájem o vzdělání ve většině případů opadá (Langmeier, Krejčířová, 2013). K jeho posílení jsou nejčastěji využívány prostředky vnější (extrinsické) motivace (pochvala, testy, známkování, …), které mají svá úskalí (Fontana, 2014). Mnohem vhodnější jsou nástroje, které posilují vlastní vnitřní motivaci k učení. Petty (2008) uvádí 7 důvodů, proč se žáci chtějí učit. Zmíním zde poslední dva (Petty, 2008, s. 47), které jsou pro tuto práci relevantní:

1. *„Věci, které se učím, jsou zajímavé a vzbuzují moji zvídavost.“*
2. *„Zjišťuji, že vyučování je zajímavé.“*

Dosáhnout výuky této úrovně, by mělo být metou každého učitele. Klade to na něj ovšem vysoké nároky. Při realizaci je nutné skloubit veškeré pedagogické dovednosti a zkušenosti. Petty (2008, s. 48) dále přibližuje, jak toho dosáhnout:

- projevovat nadšení a zájem pro vyučovaný obor/téma,
- ukazovat praktický význam vyučované látky,
- doplnit výuku o zajímavosti, pomůcky, návštěvu odborníků, exkurze,
- využívat žákovskou tvořivost,
- obměňovat činnosti,
- zajistit aktivní zapojení všech žáků,
- využívat překvapení a neobvyklých činností,
- zadávat žákům soutěživé a problémové úlohy, hádanky,
- propojit učení se životem žáků a jejich zájmy,
- dát vyučované látce osobní rozměr.

Ginnis (2017) pro efektivní učení zdůrazňuje mj. princip 1) novosti – nové a neotřelé si žáci pamatují lépe, 2) zapojení více smyslů a činností – zrak, sluch, hmat, řeč, vlastní emoční prožitek a 3) zapojení pohybu – aktivní prožití výuky, prokrvení mozku. Krykorková (2011) shrnuje poznatky o zařazení narativní metody (práci s příběhem) do výuky a uvádí její význam. Narativní metoda aktivizuje žáka v roli pozorného posluchače, který příběh zároveň prožívá. Příběh v něm zanechává emoční stopu. Předpokládá se, že narativní metoda pozitivně ovlivňuje ukládání obsahu vyučované látky do dlouhodobé paměti. Mezi další přínosy využití příběhů ve výuce jsou např. zvýšení motivace, zanesení osobního rozměru, lepší porozumění díky konkrétním příběhům (porozumění smyslu), rozvoj řečových schopností, rozvoj narativního myšlení aj. (Krykorková, 2011).

1.2. Matematika na 1. stupni ZŠ

Matematika je spolu s mateřským jazykem zcela přirozeně základním školním předmětem a každého žáka provází celou jeho povinnou školní docházkou. Tomu odpovídá i bohatá časová dotace. Budování a rozvoj matematické gramotnosti ve všech jejích oblastech je předpokladem dobré orientace v dnešním rychlém digitálním kosmopolitním světě a tedy úspěšného začlenění do společnosti. Obsah předmětu matematika je centrálně, avšak pouze rámcově vymezen v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, na jehož podkladě si každá základní škola sestaví vlastní konkrétní plán vzdělávání (Školní vzdělávací program, ŠVP). RVP ZV dělí vzdělávací oblast matematiky na čtyři okruhy: Číslo a početní operace (pro 1. stupeň), Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Pro každý okruh jsou stanoveny očekávané výstupy či jejich minimální doporučená úroveň pro zvláštní případy podpůrných opatření.

Cílem vzdělávání každého žáka je jeho všestranný rozvoj, jenž je v RVP ZV vymezen v podobě klíčových kompetencí (RVP ZV, 2023, s. 10–13). Matematické okruhy *Závislosti, vztahy a práce s daty* a *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* reflektují současné potřeby moderní doby na vzdělávání a nutnost propojovat matematiku s každodenním využitím v životě. O to mají usilovat, a jistě usilují, i okruhy Číslo a početní operace a Geometrie v rovině a v prostoru, zároveň však můžeme říci, že tyto dva bohaté okruhy nesou vlastní bazální obsah matematiky (základní početní operace v různých početních oborech, základní geometrické znalosti a dovednosti), který je nositelem tradice ve smyslu vědění a poznání našich předků.

V rámci matematiky na 1. stupni se žáci pohybují především v oblasti aritmetiky. Na konci 5. ročníku se žák orientuje v desítkové soustavě, v číslech velkých i malých a dokáže s nimi provádět základní početní operace. Žák má vytvořené základy pro počítání v oblastech zlomků, desetinných čísel, záporných čísel a procent. Dále se žák orientuje v základních měrných jednotkách času, délky, obsahu, objemu a teploty a počítá s nimi. V geometrii se žák orientuje v rovině, sestrojí základní rovinné obrazce a dokáže určit jejich vlastnosti. Žák se orientuje také v prostoru a mezi základními prostorovými útvary, u kterých rovněž dokáže popsat mnohé vlastnosti.

1.2.1. Mezipředmětové vztahy

Rozdělení školní výuky do jednotlivých předmětů, dle RVP ZV do jednotlivých vzdělávacích oblastí, je přirozeným výsledkem historického rozdělení vědních disciplín. Škola je místem, kde se má žák připravit na život v dnes velmi komplexním světě tak, aby v něm byl schopen adekvátně uspět. K tomu je nutné budovat jeho znalosti a dovednosti v souvislostech, propojovat je napříč jednotlivými předměty a současně hledat situace z reálného života, kde je může vyzkoušet a aplikovat (Starý, Rusek, 2019). Propojování předmětů v rámci výuky vede k:

1) myšlení v souvislostech,
2) lepšímu pochopení vyučované látky,
3) tréninku kritického myšlení,
4) podnícení kreativity a inovace,
5) motivaci žáka ke vzdělávání.

První stupeň ZŠ je ve svém principu ideálním místem pro mezipředmětové vzdělávání. Třídní vyučující pracuje se svými žáky po většinu času, který oni tráví ve škole. Je tedy v jeho možnostech propojit výuku ve smysluplný kontinuální celek. To vyžaduje mj. kvalitní práci s cíli, zejména pak s těmi vyššími (dle Bloomovy taxonomie) a dlouhodobými (Starý, Rusek, 2019).

1.3. Zařazení historie matematiky do výuky matematiky

Na mezinárodní úrovni je využití historie matematiky ve výuce matematiky předmětem debat a výzkumu již několik desetiletí. V 70. letech 20. století byla v rámci Mezinárodní komise pro výuku matematiky (ICMI – Intarnational Commission on Mathematical Instruction) založena pracovní skupina, která využívání historie matematiky ve výuce matematiky intenzivně studuje. Přehled výsledků studia této oblasti popisuje Clarková (Clark et al., 2019). Přístupy učitele k začlenění historie do učiva matematiky rozdělil Jankvist (2009b in: Clark et al., 2019) do tří kategorií:

1) informativní přístupy – učivo je doplněno o historické informace, ukázky, obrázky, konkrétní příklady z historie;
2) modulové přístupy – historie využita k tvorbě speciálních výukových jednotek, ve kterých se žáci detailněji seznámí s konkrétním tématem/problémem;
3) přístupy vycházející z historického vývoje – tato kategorie v podstatě odpovídá metodě genetické paralely (např. Hejný, 1990), kdy je matematické učivo žákům předkládáno způsobem, který do jisté míry kopíruje historický vývoj matematiky, přičemž samotná historie matematiky nemusí být explicitně zařazena do výuky.

Zařazení historie matematiky do učiva může mít mnohé pozitivní důsledky jak na žáka, tak na učitele, a pokud budeme odvážní ve svých úvahách, tak i na celou společnost. Zároveň je nutné zvažovat protiargumenty, obavy a námitky odpůrců takového přístupu. Všechny možné benefity integrace historie matematiky do učiva matematiky popisuje ve studii pro ICMI Tzanakis et al. (2000 in: Clark et al., 2019). Z pohledu žáka 1. stupně ZŠ bych zdůraznila především:

A) Motivační potenciál

   Samotné zařazení historického učiva může mít velký motivační náboj. Také autorky starších diplomových prací věnujících se aplikaci historie matematiky do učiva na 1. stupni ZŠ, na které jsem při zpracovávání této problematiky narazila, zdůrazňují především její motivační charakter (Henrichová, 2007; Kuncová, 2008; Burešová, 2013).

B) Lepší porozumění probírané látce, potažmo matematice jako takové

   Změna perspektivy nahlížení na matematickou úlohu může pomoci s jejím řešením. Žák je vybaven alternativními nástroji na řešení, které mu pomůžou s pochopením jednotlivých kroků řešení. Žák si uvědomí, že matematika není jen penzum hotových postupů, pouček a výpočtů, ale *de facto* živý organismus, který se vyvíjel spolu s lidskou vzdělaností, reagoval jak na vnější lidské potřeby (vyměřit, postavit, rozdělit, …), tak na ty vnitřní (hledat krásno, magično, důkaz, …).

C) Posílení kulturního vědomí

Žák poznává, že matematika je součástí kultury. Nejenže je kulturou ovlivněna, ale sama kulturu spoluvytváří. Matematika je výsledkem značného lidského úsilí, je odkazem myslitelů předchozích generací.

D) Rozvoj metakognitivních dovedností

Žák si rozšiřuje své portfolio strategií řešení problémů, poznává, že cesta k řešení může být dlouhá a plná dočasných a nedokonalých „meziřešení“.

Zařazení historie matematiky do výuky má své výhody i pro učitele. Učitel tak prakticky může rozšiřovat svůj didaktický repertoár, má další nástroje jak motivovat žáka. Je to jeden ze způsobů, jak se zaměřit na procesuální podstatu matematiky. Díky znalosti dlouhého vývoje matematického poznání v historii lidstva učitel lépe rozumí nesnázím svých žáků při osvojování si daného učiva.

Odborných prací, které by se zabývaly přímo integrací historie matematiky do výuky na 1. stupni ZŠ je málo. Smestad (2015) sepsal výsledek diskusní skupiny odborníků, která stanovila kritéria pro tvorbu didaktických materiálů, jenž zpracovávají historická témata matematiky pro výuku žáků na 1. stupni ZŠ. Takové materiály by měly:

- být zaměřeny na významné události/postavy historie matematiky, které tematicky souvisí s a doplňují kurikulum;
- obsahovat široké spektrum aktivit, úkolů, problémů k řešení;
- motivovat žáka k „dělání matematiky“;
- podněcovat žákovu představivost;
- obsahovat poutavé příběhy;
- využívat rozličný podpůrný materiál: obrázky, texty, videa, zvuky, fyzické předměty;
- obsahovat kulturní aspekt – poukázat na lidské úsilí a kulturní souvislosti;
- být přiměřené věku s odpovídající časovou náročností;
- podporovat žákovskou diskusi;
- nezkreslovat a měly by být řízeny učitelem.

Z výčtu této kapitoly je patrné, že integrace historie matematiky do výuky matematiky není triviální záležitostí a existují pro ni pádné důvody podložené četnými výzkumy, které nasvědčují, že promyšlená výuka v historických souvislostech má pozitivní vliv nejen na vztah žáka k matematice, ale také na formování jeho osobnosti, především na budování jeho hodnotových postojů a na rozvoj jeho metakognitivních schopností. Je nasnadě, že postupné a systematické seznamování žáků s ranou historií lidstva formou poutavých příběhů a zajímavých aktivit včetně motorických činností bude pravděpodobně zvyšovat jejich zájem o historii, podněcovat jejich zvídavost a vytvářet pozitivní vztah ke kulturnímu dědictví společnosti.

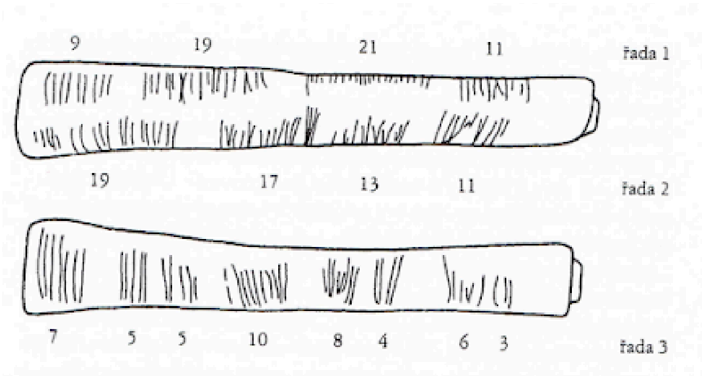
1.4. Historie matematiky

V této kapitole stručně převypravuji vybrané úseky z historie matematiky, které se pojí k učivu na 1. stupni ZŠ a které mají potenciál jej obohatit. Protože cílem není zkoumat zevrubně podstatu každého tématu, ale uvést historické souvislosti, fakta a zajímavosti, dovoluji si k tomu účelu čerpat z knih, které jsou svým charakterem spíše populárně naučné, ale pro tyto účely dostatečně bohaté.

1.4.1. Pravěké počátky

Představa počtu či lépe množství se rodila a vyvíjela spolu s vývojem člověka a jeho způsobu života. Nejstarší dochované artefakty, tzv. vrubovky (kosti se zářezy) ukazující na zaznamenávání počtu a využívání matematických představ jsou datovány do mladšího paleolitu (starší doby kamenné, počátek asi 35 tisíc let př. n. l.) a věku mladopaleolitických lovců rodu *homo sapiens fossilis* (člověk předvěký; Hora-Hořejš, 1995). Do této doby patří paviání kost s 29 zářezy nalezená v roce 1970 ve Svahilsku v jižní Africe. Vědci odhadují, že zářezy mohly sloužit k zaznamenávání lunárního cyklu (Mareš, 2011). O něco málo mladším artefaktem je nález z našeho pravěkého naleziště v Dolních Věstonicích. V roce 1936 objevil Karel Absolon kost mladého vlka s 55 příčnými zářezy, které jsou rozděleny do dvou skupin (o 25 a 30 zářezech) dvěma delšími zářezy ve střední části kosti. Stáří kosti je určeno na 25–28 tisíc let (Mareš, 2011). Nejmladší slavnou vrubovkou (asi 8,5–11 tisíc let – Mareš, 2011, až 20 tisíc tet – Pickover, 2012) je paviání kost nalezená roku 1960 ve střední Africe u rybářské osady

Išango na břehu Edvardova jezera na území dnešní Demokratické republiky Kongo. Na kosti jsou zářezy sofistikovaně uspořádány ve skupinách ve třech řadách. Pozoruhodné je, že skupiny ve dvou řadách mají vždy lichý počet zářezů a ve druhé řadě tyto zářezy odpovídají prvočíslům mezi čísly 10 a 20. Většina skupin v poslední řadě jakoby odkazovala na násobení dvěma (Mareš, 2011, Pickover, 2012).



Obr. 1 Kost z Išanga (Mareš, 2011, s. 18)

Účel a smysl těchto předmětů můžeme však pouze odhadovat a je nutné mít na paměti, že náš odhad může být do značné míry zkreslen. Určitou analogií k pravěkým lovcům mohou být zbytky dnešních primitivních kmenů v Jižní Americe (Seife, 2019) nebo v Oceánii (Mazur, 2017), které mnohdy nemají ani slovo pro pojmy jako počet nebo číslo. Tamní domorodci počítají v podstatě v binární soustavě (Seife, 2019), mají výraz pro „jeden“, „dva“, ale číslo tři vyjádří už jako „dva a jeden“, čtyři jako „dva a dva“. Pokud chtějí spočítat např. svůj úlovek, pak přiřadí ke každé rybě jeden klacík a nakonec ukáží, tolik měli ryb (Mareš, 2011). V každém případě můžeme tvrdit, že veškerá vyjádření počtu či množství vycházela z každodenní potřeby pravěkých lidí. Pravěcí lidé dokázali rozlišit mezi jedním mamutem a stádem mamutů. Rozdíl mezi jednou nebo dvěma šelmami mohl být rozdílem mezi životem a smrtí. Počátky geometrie nejsou o nic pozadu. Mladopaleolitičtí lovci si stavěli jednoduché stanové přístřešky, zemljanky (s kruhovým nebo čtverhraným půdorysem – tvar byl zprvu dán vlastnostmi použitého materiálu (Mareš, 2011)), vznikaly pravěké osady (Hora-Hořejš, 1995). Snadno si představíme, že museli řešit využití prostoru/plochy při stavbě přístřešku/chýše či osady (Mareš, 2011). Zemědělství, které se rozvinulo asi před

12 tisíci lety v mladší době kamenné, v neolitu, pak vedlo k vyměřování prvních polí. Neolitické usedlíky označuje Hora-Hořejš (1995) za první skutečné architekty a stavitele, kteří poprvé staví obydlí trvalejšího charakteru. Příkladem využití geometrie jsou také mnohé megalitické památky (např. Stonehenge) sloužící k obřadním účelům (Mareš, 2011). Geometrické prvky lze mj. vysledovat v jeskynních malbách a jejich rozvržení a ve zdobení předmětů (kamenné, kostěné, dřevěné, hliněné; zbraně, keramika, náboženské předměty, …) a výrobě šperků (Hora-Hořejš, 1995).

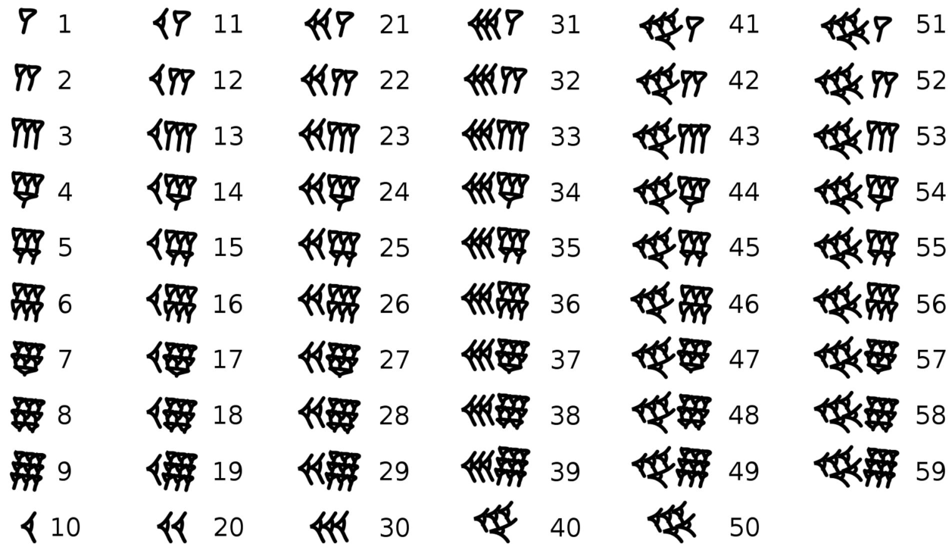
1.4.2. Historie číslic

Dovednost zapsat číslo jde přirozeně ruku v ruce se vznikem písma. Různé druhy písma v jednotlivých starověkých kulturách se zprvu vyvíjely víceméně nezávisle na sobě. Nejstaršími dochovanými psanými texty jsou zbytky hliněných tabulek z Mezopotámie s matematickými výpočty, které jsou datovány do 2. pol. 4. tisíciletí př. n. l. (Mazur, 2017). Nejednalo se ještě o klínové písmo, ale o starší piktografický zápis (Mareš, 2011). V téže době tesali Egypťané hieroglyfy do kamene (Mareš, 2011, Mazur, 2017) a vlastní numerický zápis měli již zřejmě také v Číně (Mazur, 2017).

Babylonské číslice

Trvalé osídlení území Mezopotámie (převážná část dnešního Iráku) sahá do doby před 10 000 lety. V úrodné oblasti kolem řek Eufrat a Tigris se začal rozvíjet zemědělský způsob života. Chov dobytka, obdělávání půdy a budování zavlažovacích systémů kladlo nároky na základní odhadování, vyměřování, výpočty a budování struktury ještě před vznikem písma. Původní zemědělské osady se rozrůstaly v města s rozsáhlými sídlišti z cihel z nepálené hlíny. Vznik piktografického písma ve 4. tisíciletí byl významným vývojovým milníkem pro budoucí civilizovanou společnost (Mareš, 2011). Jako nejstarší civilizovaný národ lidských dějin označuje Burian (1973) národ Sumerů, kteří přišli do oblasti Mezopotámie na sklonku 4. tisíciletí.

Dějiny Mezopotámie jsou velice spletité a jsou to dějiny národů Sumerů, Akkadů, Asyřanů, Amorejců, Chetitů a mnoha dalších (Burian, 1973), které v průběhu staletí ovládaly zdejší významná města a které mezi sebou sváděly boj o nadvládu. Ve 2. tisíciletí př. n. l. si dominantní postavení vydobyla Babylonská říše, která dala jméno i číselné soustavě, kterou lidé v Mezopotámii používali. Tzv. babylonská sexagesimální (šedesátková) soustava v sobě kombinovala i prvek desítkové soustavy. K zápisu začali Sumerové na počátku 3. tisíciletí př. n. l. používat klínové písmo. Tamní učenci vytlačovali čísla pomocí seříznutého rákosu do měkkých vlhkých hliněných destiček. Čísla 1–9 byla tvořená jedním symbolem v daném počtu a uspořádání. Pro číslo 10 a jeho násobky pak využívali odlišný symbol. Jednotky znázorňovali opět připojením 1–9 obtisků prvního symbolu. Takto Babyloňané zapisovali čísla 1–59 (obr. 2).



Obr. 2 Babylonský zápis čísel 1-59

Od čísla 60 nastupuje poziční charakter soustavy (tab. 2), který na jednotlivých pozicích pracuje s mocninami čísla 60 podobně, jako my používáme v současné desítkové soustavě mocniny čísla 10.

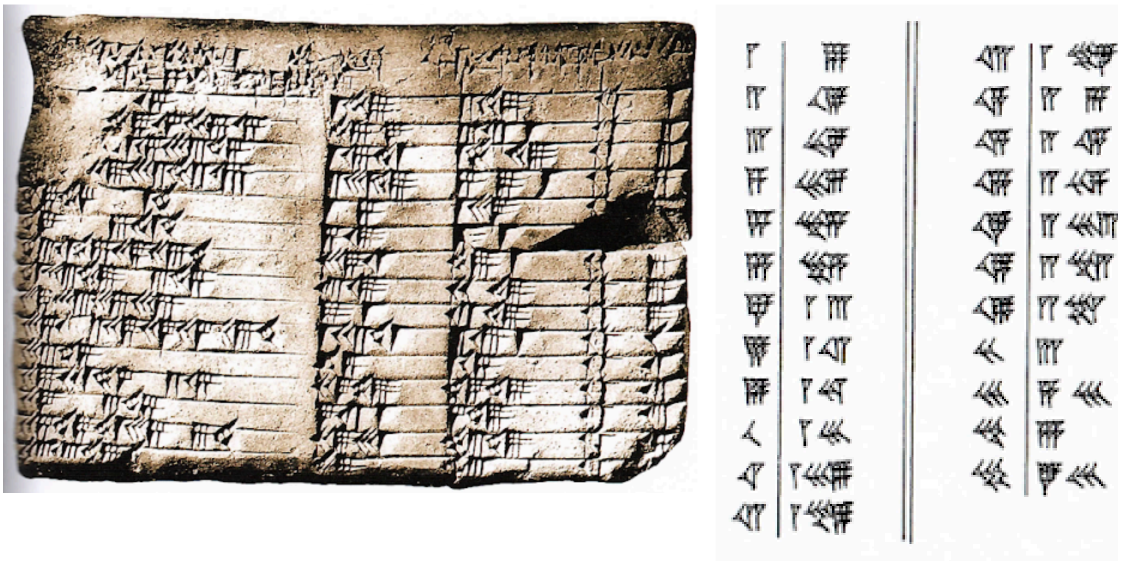
Zpočátku však babylonskému zápisu chybělo označení pozice prázdného řádu (Seife, 2019), pro který my používáme nulu. Symbol pro číslo 1 mohl znamenat 1 nebo 60, respektive další mocniny čísla 60. Pozici prázdného řádu tak nechávali prázdnou, což ovšem komplikovalo čtení takového čísla (tab. 3), při kterém se spoléhali především na kontext.

	$1 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0 = 60 + 40 = 100$
	$1 \cdot 60^1 + 40 \cdot 60^0 = 60 + 59 = 119$
	$14 \cdot 60^2 + 5 \cdot 60^1 + 35 \cdot 60^0 = 50\,400 + 300 + 35 = 50\,735$

Tab. 2 Příklady babylonského pozičního zápisu čísel. S využitím znaků z obr. 2.

	$1 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0 = 60 + 1 = 61$
	$1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0 = 3\,600 + 0 + 1 = 3\,601$ nebo také $1 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 1 \cdot 60^0 = 216\,000 + 0 + 0 + 1 = 216\,001$

Tab. 3 Nejednoznačnost babylonského zápisu čísla s prázdným řádem/prázdnými řády. S využitím znaků z obr. 2.



a

b

Obr. 3 a) Tab. Plimpton 322 (Pickover, 2012, s. 35), b) Nippurská tabulka (Mazur, 2017, s. 38).

Staří Babyloňané byli zdatní počtáři. Současná symbolika výpočtů vůbec neexistovala a zápis čísel do hliněných tabulek měl své limity. Veškeré matematické problémy byly dány slovně a počítány především pamětně.

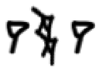
Při sčítání a odčítání nebyl zpravidla problém, u složitějších postupů využívali Babyloňané s oblibou nejrůznější tabulky. Tabulka Plimpton 322 (obr. 3a) je hliněná destička stará asi 3800 let (autor žil přibližně v době vlády krále Chammurapiho) a obsahuje celočíselná řešení Pythagorovy věty, tzv. pythagorejské trojice (Pickover, 2012). Dalším artefaktem z tohoto období je Nippurská tabulka (asi 1700 př. n. l.), která zachycuje násobky 9 (obr. 3b, Mazur, 2017). Běžnou pomůckou byly také destičky s druhými mocninami čísel, které Babyloňané velice dobře znali a dovedně je využívali k základním počtům (Mareš, 2011). Například součin dvou čísel prováděli jako rozdíl druhých mocnin jejich součtu a rozdílu, který nakonec vydělili čtyřmi. Dnes bychom to zapsali takto (Mareš, 2011, s. 25):

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}.$$

Tabulky měli Babyloňané také pro další mocniny a součty mocnin, poradit si dokázali i s problémy lineárních či kvadratických rovnic (Mareš, 2011). Mareš (2011) dále uvádí, že ovládali geometrii, byli vynikajícími astronomy, měřili úhly, počítali plochy rovinných obrazců i objemy jednoduchých těles (koule, krychle, válce; jehlan je nezajímal), věděli o konstantním poměru obvodu a průměru kruhu.

Přibližně mezi lety 700 a 300 př. n. l. (Mazur, 2017) Babyloňané vyřešili problém s nejednoznačným zápisem čísla s prázdnými řády. Prázdné místo vyplnili zástupným symbolem (tab. 4), který pak zapsanému číslu jednoznačně určil jeho hodnotu. Hovoříme o tzv. poziční nule (Mareš, 2011), která nemá funkci čísla. Podle Pickovera (2012) se tento symbol neužíval na konci čísel, avšak ostatní autoři to nezmiňují.

Babylonská číselná soustava byla ve své době úžasná a jedinečná, neboť kombinací pouhých 2 symbolů a pozičního systému bylo možné zapsat jakkoliv velké číslo. Číselný základ 60 měl své opodstatnění. Oproti našemu základu 10 má číslo 60 celkem 12 přirozených dělitelů (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60), takže se s ním velice dobře počítá. Využíváme toho dodnes, neboť babylonská šedesátková soustava se otiskla nejen do rozdělení času (hodina, tj. 60 minut, tj. 3 600 vteřin), ale také do rozdělení úhlů na stupně, minuty a vteřiny.

Současný zápis	0	60	3601	216 001
Oblast Sumeru				
Oblast Babylonu				

Tab. 4 Příklady zástupného symbolu (poziční nuly) pro prázdný řád a jeho využití v babylonském zápisu čísla. Symbol poziční nuly se lišil dle oblasti (Mareš, 2011). S využitím znaků z obr. 2.

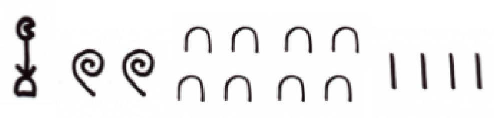
Egyptské hieroglyfy

Vedle Mezopotámie se na opačném cípu úrodného půlměsíce začala v záplavových oblastech kolem řeky Nilu rozvíjet egyptská civilizace. Nejstarší záznamy sahají do předdynastické doby kolem roku 3100 př. n. l. (Mareš, 2011). Hieroglyfické, do kamene tesané písmo sloužilo především k oslavě mocných faraonů a jejich činů. Běžné záznamy se psaly na papyrus (nebo cokoliv, co bylo poruce - střepy, kameny, …) pomocí rákosového stébla (Mareš, 2011). Písemné záznamy včetně těch číselných měli na starosti egyptští kněží.

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
hůl	 ohnutá hůl	 stočený provaz	 lotos	 ukazující prst	 zvíře	 muž se zdviže-nýma rukama

Tab. 5 Hieroglyfické číslice starých Egypťanů (podle Mazura, 2017)

Egypťané počítali v desítkové soustavě. Každá mocnina čísla 10 měla svůj vlastní symbol (tab. 5). Zápis čísla byl aditivní (kolikrát se v čísle vyskytovala určitá mocnina čísla 10, tolikrát se zapsal její symbol). Např. číslo 1284 se zapsalo jako:



Obr. 4 Ukázka zápisu čísla egyptskými hieroglyfy

Každých deset stejných symbolů (které se seskupily např. při sčítání) bylo nahrazeno symbolem pro mocninu vyššího řádu (Koval, 1969). Matematika sloužila Egypťanům výhradně k řešení praktických záležitostí. Kromě stavitelství se ve velkém uplatňovala v zeměměřičství a také v astrologii. Egypťané vytvořili první skutečně funkční kalendář založený na lunárním cyklu, který měl 12 měsíců po 30 dnech. Na konci každého roku přidali navíc 5 dnů. Tento kalendář o 365 dnech se později stal základem i pro náš kalendář používaný dnes (Seife, 2019).

Další starověké číselné systémy oblasti Středomoří

Hebrejský číselný systém vycházel z hebrejské abecedy, která má 22 písmen. Prvních devět písmen bylo zároveň symboly pro čísla 1–9, dalších devět písmen pro čísla 10, 20, 30, 40, …, 90, poslední čtyři písmena označovala čísla 100, 200, 300 a 400. Číslo 700 zapsali jako 400 + 300 (Mareš, 2011). Zápis vyšších čísel nebyl pravděpodobně ustálený a lidé intuitivně využívali symboly pro jednotky také pro zápis stovek nebo tisíců. Mazur (2017) píše o speciálních symbolech pro hodnoty 500, 600, 700, 800 a 900. Zajímavé je, že číslo patnáct psali jako 6 + 9, neboť zápis 10 + 5 byl totožný jako počátek jména Boha (Mazur, 2017).

Staří Řekové obohatili matematiku v mnoha jejích oblastech a zaujímají v její historii výsostné postavení. Řecký zápis čísla však nijak nevynikal. V 8. stol. př. n. l. začali Řekové k zápisu čísla využívat tzv. akrofonní systém (Mazur, 2017). Čísla 5, 10, 100, 1 000 a 10 000 byla označená počátečním písmenem slova vyjadřujícího daný počet (tab. 6).

Jednotky 1-4 byly značeny pouze svislými čárkami (Mareš, 2011). Maximální počet symbolů v řadě byl 4. Čísla 50, 500 a 5000 se podle Mareše (2011) psala jako Γ^{Δ}, Γ^{H}, Γ^{X}, Mazur (2017) uvádí trochu jiný způsob. Později začali Řekové místo akrofonního systému používat abecední sekvenční systém, který je podobný tomu hebrejskému. Přirozeně k tomu používali písmena řecké abecedy, takže α = 1, ß = 2, … (Mareš, 2011, Mazur, 2017).

Hodnota	Značka	Řecký výraz	Výslovnost
5	Π později Γ	Πεντε	Pente
10	Δ	Δεκα	Deka
100	H	Ηεκατόν	Hekaton
1 000	X	Χιλιοι	Chilioi
10 000	M	Μυριοι	Myrioi

Tab. 6 Starořecké akrofonní číslice (podle Mareše, 2011)

Je patrné, že nám dobře známý systém římských číslic je podobný řeckému akrofonnímu systému. Římané jej obohatili o princip odčítání menší číslice od větší, je-li zapsaná vlevo od ní (Mazur, 2017).

Číslice na Dálném východě

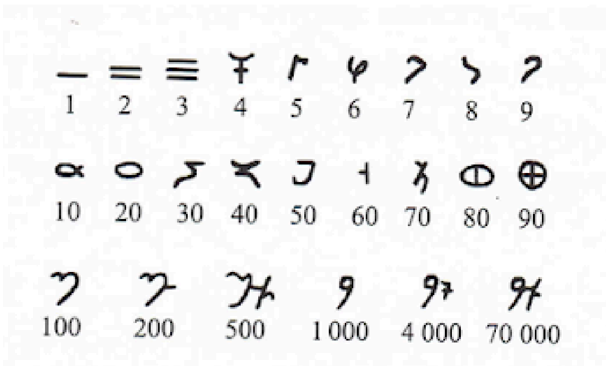
Matematických památek z Číny a Indie je málo. Buď se vlivem klimatických podmínek a použitím málo trvanlivých materiálů nedochovaly (Indie) nebo byly v historii záměrně ničeny (Čína, Mazur, 2017). První dochované čínské číslice pochází z dynastie Šang (1600–1029 př. n. l.) a byly součástí dekadické soutavy (Mareš, 2011). Tato soustava byla ve 4. stol. př. n. l. (Mareš, 2011) nahrazena číslicemi, které se s drobnými změnami používají dodnes (obr. 5).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
10^2	10^3	10^4							
百	千	萬							

Obr. 5 Čínské znaky z dynastie Chan (206 př. n. l. – 9 n. l., V. Katz in: Mazur, 2017, s. 52).

Zápis čísla pomocí těchto symbolů se provádí jako součet počtu mocnin čísla 10. Zapisuje se zleva doprava a např. číslo 5432 by vypadalo jako sled symbolů pro 5, 10^3, 4, 10^2, 3, 10, 2, tedy jako $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2$. Pro vlastní výpočty se však používal desítkový systém založený na počítacích hůlkách, který byl poziční. V tomto systému se čísla skládala od vyšších řádů k nižším zleva doprava, přičemž se prázdné řády ponechaly prázdné (takže v zápise vznikla mezera). S čitelností takových čísel pomáhala vertikálně-horizontální orientace hůlek, která se střídala (liché mocniny čísla deset se psaly vertikálně, sudé horizontálně, Mazur, 2017). Počítání s hůlkami bylo rychlé, praktické a levné. Pytlíček s hůlkami byl důležitou součástí výbavy nejen každého obchodníka, ale také vědce, vojenského důstojníka či cestovatele. Nahrazeny byly až v 16. stol. n. l. abakem (Mazur, 2017). Vzácnými literárními zdroji, které odhalují tajemství matematických znalostí starověké Číny a přibližují dovednosti jejích matematiků, jsou knihy *Matematika v devíti kapitolách* (kniha z konce 3. stol. př. n. l., k dispozici je její kopie z 3. stol. n. l.) a *Kniha o číslech a výpočtech* (kniha přibližně z téže doby, Mareš, 2011, Mazur, 2017). *Devět kapitol* pojednává mj. o záporných číslech. Mareš (2011) uvádí, že kladná čísla byla psána černě, záporná červeně. Naproti tomu Mazur (2017) píše o používání červených počítacích hůlek pro kladné koeficienty a černých hůlek pro záporné.

Indoarabské číslice

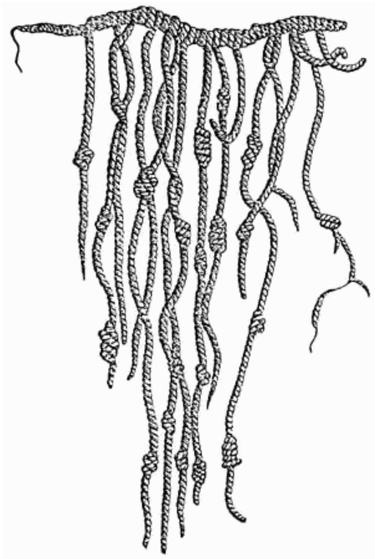


Obr. 6 Indické číslice bráhmí (Mazur, 2017, s. 61).

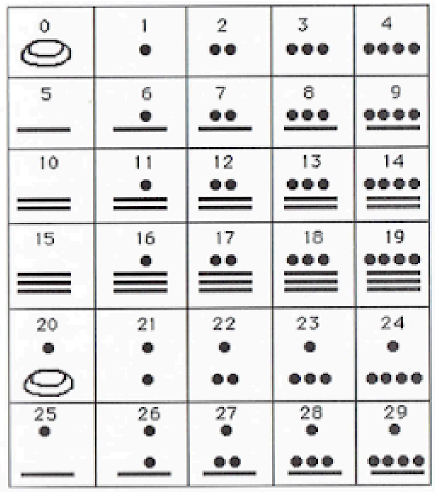
Počítání s čínskými hůlkami velice připomíná náš současný indoarabský systém. Skrze tuto podobnost existují domněnky, že se čínskou dekadickou poziční soustavou Indové nechali inspirovat (Mazur, 2017). Původní indický systém čísel (bráhmí, obr. 6) byl ale odlišný a podobal se výše uváděným abecedním systémům hebrejskému či řeckému. U některých znaků lze již vidět podobnost se současnými arabskými číslicemi. Používání brahmínských číslic je doloženo ve 3. stol. př. n. l. (Mazur, 2017). Kdy přesně Indové přešli do poziční desítkové soustavy nevíme, ale mohlo to být kolem 5. stol. n. l. (Seife, 2019). V 19. stol. n. l. byl severozápadní Indii (dnes Pákistán) nalezen tzv. Bakšálský rukopis, který dokládá používání používání poziční soustavy (Pickover, 2012, Mazur, 2017). Datum jeho vzniku je však nejisté. Odhaduje se na 3.–4. stol. n. l. (Pickover, 2012). Podle práce G. G. Josepha z roku 2000 měl Bakšálský rukopis na základě rozboru použitého jazyka vzniknout mezi roky 200 a 300 n. l. (G. G. Joseph, 2000, in Mazur, 2017). Je doloženo, že v 6. stol. n. l. používal indický mudrc Aryabhata poziční soustavu (bez číselné nuly, jen s nulou poziční, Mareš, 2011). Počítání s nulou (včetně záporných čísel označovaných jako dluh) se v 7. stol. n. l. věnuje učenec Brahmagupta (viz níže Nebezpečné číslo, Mareš, 2011). První „západní" písemnou zmínku o indických číslicích nacházíme z roku 662 n. l. u syrského biskupa (Seife, 2019). Popisuje jich však jen 9, o nule nevěděl. Na počátku 7. stol. n. l. vznikl islám, který se záhy rozšířil po celém Blízkém východě a pokračoval dál na západ i na východ. Muslimští učenci převzali indickou početní soustavu včetně jejich číselných symbolů, rozpracovali numerické postupy základních početních operací, řešení matematických úloh včetně rovnic a počítání se zlomky (mj. dali světu pojmy algoritmus a algebra). To všechno nové číslice a především, ve své podstatě jednoduše geniální, poziční systém umožnili a usnadnili (Mareš, 2011). Díky tomu je dnes označujeme jako arabské číslice, přestože se vyvinuly z indických symbolů. Tyto arabské či indoarabské číslice se v průběhu následujících staletí dále vyvýjely. Vznikly východoarabské a západoarabské formy číslic, číslice nazývané apices, které se objevily ve Španělsku v 10. a 11. stol. n l. Podoba dnes používaných číslic, označovaných jako arabské, se ustálila v 16. stol. (Seife, 2019). Ve stejné době (16.–17. stol.) začalo pomalu docházet k dalšímu kvalitativnímu posunu v matematice, totiž k přechodu od rétorické matematiky k symbolické (Mareš, 2011, Mazur, 2017).

Číslice v Americe

Inkové, prastarý národ západního pobřeží Jižní Ameriky, neměli písmo, přesto si vedli podrobné záznamy. Používali k tomu sofistikovaný systém provázků s uzlíky. Spletené šňůrce s navázanými provázky s uzlíky se říkalo kipu (obr. 7a). Počet, způsob uvázání i barva uzlíků měly svůj význam. Mohli nést informace o majetku, úrodě, daních, kalendáři atp. Mareš (2011) uvádí, že se jednalo o jakési zdokonalené vrubovky. Nejstarší dochované kipu se datuje do doby 3 tis. let př. n. l. (Pickover, 2012). Španělé, kteří v 16. stol. n. l. dobyli inckou říši, kipu – ďáblovo dílo – ve jménu Božím likvidovali.



a



b

Obr. 7 a) incké kipu, b) mayské číslice (Mareš, 2011).

Oproti tomu Mayové na poloostrově Yukatán měli své piktografické písmo a používali dvacítkovou (vigesimální) početní soustavu (obr. 7b). Historici podle toho usuzují, že chodili bosi a k počítání využívali všech dvacet prstů (Mareš, 2011). Matematické dovednosti Mayů vycházely z praktického života a náboženství (Mareš, 2011). Týkaly se tedy především výpočtu kalendáře, astronomických jevů, stavitelství, majetku, daní a obchodu. Přestože svého vrcholu dosáhla mayská civilizace v 9. stol. n. l., Mayové neznali kolo. Jejich dvacítková soustava byla však překvapivě vyspělá. Především byla poziční a začínala nulou! Symbol pro nulu byla jakási mořská lastura. Čísla 1–4 Mayové znázorňovali příslušným počtem puntíků (možná kamínků), vodorovná čárka (počítací dřívko, Mareš, 2011) značila číslo 5. Dvě vodorovné čárky dávaly číslo 10, tři číslo 15, ale číslo dvacet bylo značené jedním puntíkem umístěným o úroveň výše (řád dvacítek). Doplněný byl znakem pro nulu v první úrovni (řád jednotek). Třetí úroveň byla ale řádem „třistašedesátek“ (tedy 20 x 18 místo očekávaných 20^2, Mazur, 2017). Mareš (2011) sice uvádí, že se jednalo o násobky čísla 380 (19 x 20), ale osobně se přikláním spíše k Mazurovi. Tato nepravidelnost má pravděpodobně souvislost s mayským solárním kalendářem, který Mayové rozdělili na 18 měsíců po 20 dnech, ke kterým na konci roku přidávali dalších 5 dnů (Seife, 2019).

Aztécká říše se rozvíjela na území Mexika severně od Mayů. V době příchodu španělských dobyvatelů (16. stol. n. l.) byla na svém vrcholu. Matematikou se Aztékové částečně inspirovali u Mayů, avšak jejich soustava nebyla poziční, ale aditivní (Mareš, 2011, Mazur, 2017).

Matematika obyvatel Severní Ameriky byla v době příchodu Evropanů na úrovni primitivních vrubových záznamů (Mareš, 2011).

1.4.3. Geometrie starověkého Egypta[1]

Před příchodem klasické řecké matematiky vycházela starověká geometrie výhradně z praktických potřeb člověka. Jak název napovídá, tou prvotní potřebou byla potřeba měřit zemi. Ve starém Egyptě tuto činnost vyměřování zastávali tzv. natahovači provazů. Jejich označení je odvozeno od hlavní pomůcky, kterou k vyměřování používali, tedy od lana. Lano bylo k měření speciálně upravené – bylo opatřeno 13 uzly, které jej dělily na 12 stejných dílů. Lano bylo také napuštěno vosky a pryskyřicemi, kvůli trvanlivosti a pevnosti. 13uzlové lano se používalo k vyměřování pravých úhlů pomocí sestrojení trojúhelníku o stranách 3 – 4 – 5 dílů. Zručnost egyptských „inženýrů“ nás dodnes nepřestává udivovat.

Vedle stavitelství se natahovači provazů uplatnili také při každoročním vyměřování polí po záplavách, které trvaly přibližně od července do října. V listopadu bylo nutné opětovně vyměřit záplavami poničené meze zemědělských pozemků, aby bylo možné co nejdříve začít se zemědělskými pracemi. Velikost polí byla důležitým údajem, podle kterého se prováděl výpočet nejen očekávané úrody, ale také výpočet daní. Tyto údaje spravovali k tomu určení písaři.

[1] V této kapitole čerpám informace z následujících online zdrojů:
https://amerisurv.com/2021/08/15/whats-a-rope-stretcher/
https://www.starovekyegypt.net/

1.4.4. Řecká matematika

Řecká matematika navazovala na egyptské stavitele a mezopotámské učence. Stejně jako v Egyptě byla její dominantní složkou geometrie. Rozdílem byl ale kvalitativní rozdíl v uvažování o matematice. Ve starém Egyptě i v Mezopotámii byla stále především nástrojem k řešení praktických úloh a problémů. Oproti tomu v Řecku se matematika stala jedním z hlavních předmětů zájmu bádání, uvažování a stala se nástrojem vysvětlování fungování a smyslu světa – byla předmětem filozofie.

Thales z Milétu (620/625–545 př. n. l.) je označován za prvního matematika (Rooney, 2017). Byl nejvýraznějším představitelem tzv. Milétské školy a samotnými Řeky zařazen mezi sedm velkých mudrců (Mareš, 2011) Usoudil, že pralátkou, která je podstatou veškeré hmoty, je voda. Měl za to, že svět je deska plovoucí na hladině (Mareš, 2011). Během svého života hodně cestoval (Egypt, Babylonie), studoval naučné spisy. Thaletovi přisuzujeme následující matematické poznatky: *„průměr dělí kruh na dvě poloviny, úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné, vrcholové úhly jsou shodné, všechny úhly nad průměrem jsou pravé (tzv. Thaletova věta)“* (Bečvář, Fuchs, 1994, s. 27). Znalosti o podobnosti trojúhelníků dokázal využít při měření výšky pyramid a vzdálenosti lodí od pevniny (Bečvář, Fuchs, 1994, Rooney, 2017). Thales ovládal astronomii a úspěšně předpověděl zatmění Slunce v roce 585 př. n. l. (Bečvář, Fuchs, 1994).

Pythagoras ze Samu (cca 590–500 př. n. l.) bývá označován za otce matematiky (Rooney, 2017) a prvního filozofa (Mareš, 2011). Pythagoras byl uchvácen čísly, číselnou mystikou, hudbou a harmonií. Pomocí čísel a hudby vysvětloval svět včetně celého kosmu. Mladý Pythagoras hodně cestoval (Egypt, Babylonie, Kréta). Nakonec se usadil v Krotonu v jižní Itálii, kde založil filozoficko–matematickou školu pythagorejců. Jednalo se o uzavřené společenství lidí – posluchačů, u kterých se Pythagoras těšil nejvyšší autority. Pythagorejci modelovali čísla pomocí kamínků, kterým říkali *calculi* (odtud pochází pojem kalkulovat). Čísla tak nabývala různých geometrických tvarů – vznikla tzv. figurální čísla. S nimi se daly dobře rozvíjet a především dokazovat matematické koncepty, teorie a hypotézy. Matematický důkaz je klíčovým prvkem, kterým pythagorejci obohatili matematiku (Mareš, 2011). Např. podstatu všem dobře známé Pythagorovy věty znali lidé víc jak tisíc let před Pythagorem (a snad už neolitičtí zemědělci, Mareš, 2011) a umně ji využívali v zeměměřičství a ve stavitelství. Dokládá to např. destička Plimpton 322 (obr. 3a, viz výše Babylonské číslice). To, čím ji Pythagoras (respektive jeho žáci) proslavil, je právě matematický důkaz. Pythagorejci široce rozpracovali teorii čísel (Bečvář, Fuchs, 1994) – vedle figurálních čísel se věnovali sudým/lichým číslům, dokonalým číslům (dokonalé číslo je součtem všech svých dělitelů, např. 6 = 3 + 2 + 1). Ve světě pythagorejců měla místo pouze čísla přirozená a souměřitelná, tedy racionální, která se dala vyjádřit poměrem přirozených čísel. Odhalení existence iracionálních (nesouměřitelných) čísel byl pro ně těžko přijatelný fakt, se kterým se těžce vyrovnávali. Šlo např. o $\sqrt{2}$, tedy úhlopříčku čtverce o straně 1, nebo poměr zlatého řezu Φ (Φ = 1,6180339…). Zlatým řezem je přitom přímo nasycen pythagorejci uctívaný pentagram, který si zvolili za svůj symbol.

Aristoteles ze Stageiry (384–322 př. n. l.) je pokládán za největšího filosofa starověku. Položil základy logického usuzování a dokazování analýzou jednotlivých prvků výpovědi a zkoumáním vztahů mezi nimi, větou a úvahou. Položil základy dokazování sporem, kdy předpokládáme opak dokazovaného tvrzení a posloupnoti myšlenkových úvah dospějeme do bodu, kdy tento předpoklad vyvrací sám sebe nebo obecně platný axiom (Mareš, 2011). Aristoteles byl nejstudovanějším učencem středověku a raného novověku a jeho učení mělo zásadní vliv na vývoj západní kultury. Značnou roli v tom sehrálo křesťanství, které si Aristotelovo učení dogmaticky osvojilo (Seife, 2019, viz kapitola 1.4.7.).

Eratosthenes (275–195 př. n. l.), matematik, astronom a filozof, pocházel ze severní Afriky a stal se jedním ze správců Alexandrijské knihovny. Věděl, že je Země kulatá a navrhoval její obeplutí po kružnici. Svá astronomická měření použil ke geografickým výpočtům, např. výpočtu obvodu Země (Burian, 1973).

1.4.5. Historická počítadla

Mareš (2011) vysvětluje, že abakus bylo označení pro jakoukoliv plochou desku, kterou lidé začali používat jako pomůcku pro výpočty. Nejprve to byla deska s vrstvou písku, do kterého se prstem dělaly vodorovné žlábky pro počítání s kameny, později deska s již vyhloubenými žlábky, do kterých se vkládaly kuličky. Nejstarší zmínky o používání abaků jsou z poloviny 3. tis. př. n. l. z Mezopotámie (Mareš, 2011). Nejstarší dochovaný abakus můžeme obdivovat v Národním muzeu v Athénách. Je to tzv. Salamínská destička (nalezena na ostrově Salamis) pocházející z Mezopotámie ze 4. stol. př. n. l. (Mareš, 2011). Abakus byl nedocenitelnou pomůckou pro základní aritmetické operace v době, kdy:

- zápis čísla nebyl záležitostí pár tahů,
- nebyl k dispozici dostupný levný zápisový materiál,
- výpočty se dělaly pamětně,
- počítání s čísly zapsanými v nepozičních soustavách bylo krkolomné,
- neexistovala matematická symbolika – znaménka pro matematické operace, rovnítko, mocniny atd.

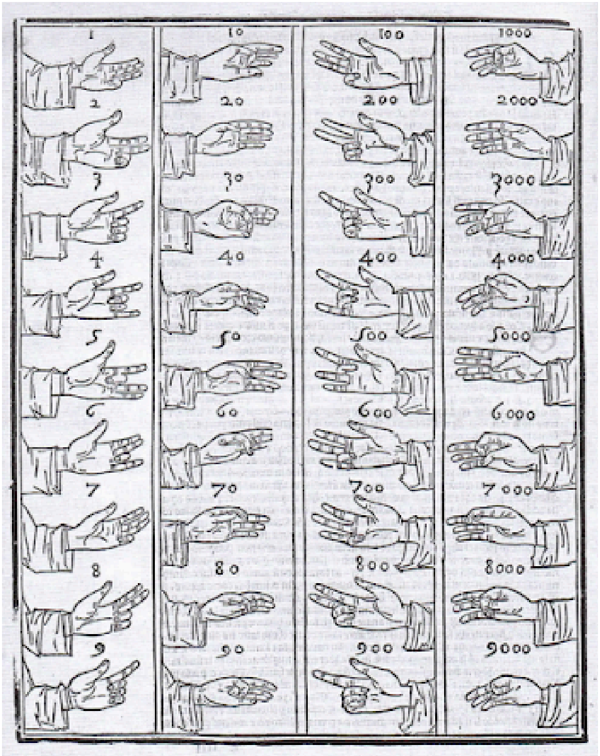
Abakus se z Mezopotámie šířil do celého Starého světa, s obchodníky nebo možná pří dobyvačných výpravách Alexandra Makedonského, a pravděpodobně se jedná o jeden z artiklů, kterými západní svět obohatil ten východní (Mareš, 2011). Přibližně od 13. stol. n. l. se v Číně začal používat abakus nazývaný suanpan, na kterém se již posouvají korálky po tyčkách či drátech (Pickover, 2012). V Japonsku se podobnému abaku říká soroban, v Rusku sčot.

Na abaku odpovídají jednotlivé žlábky či tyčky řádům – mocninám čísla deset. Každý tento řád je rozdělen na menší a větší část. Korálek v menší horní části má hodnotu 5 a svou pozicí určuje, zda korálky (hodnoty 1) ve větší části značí čísla 1–4 nebo 6–9. Pokročilý uživatel abaku dokáže s touto pomůckou snadno násobit, dělit, počítat s mocninami, desetinnými čísly i zlomky, tím pádem řešit i náročné úlohy.

Když se ve Španělsku na konci 10. stol. n. l. setkal Gerbert z Aurillacu (budoucí papež Silvestr II.) s indoarabskými číslicemi 1–9, vylepšil jimi abakus (vznikl tzv. gerbertovský abakus). Do žlábků vkládal vždy jen jeden kamen s označením hodnoty indoarbskými symboly (byly to výše zmíněné znaky apices, Mazur, 2017).

Počítání na prstech a obchod

Vedle používání abaku a dávno před ním používali lidé k počítání své tělo, především prsty na rukou, případně na nohou. S vysokou pravděpodobností se to posléze odrazilo ve vzniku různých číselných soustav o základech 5 (částečně mayská soustava, částečně řecká akrofonní a římská), 10 (soustavy egyptská, čínská, indická, částečně babylonská, …), 20 (mayská soustava). Prsty měli lidé stále u sebe a využívali jich ve starověku i středověku i při obchodování s cizinci.



Obr. 8 Prstová číselná notace z knihy Lucy Pacioliho z konce 15. stol. n. l.
(in Mazur, 2017, s. 67).

Benediktinský mnich Beda Ctihodný zaznamenal ve své knize *O počítání a mluvení pomocí prstů* z 8. stol. n. l. úplnou starověkou prstovou notaci čísel od jedné do milionu (Mazur, 2017). Obr. 8 ukazuje podobnou prstovou řeč čísel z knihy Lucy Pacioliho z konce 15. stol. (in Mazur, 2017, s. 67). Uzavírání obchodu s pomocí prstů bylo běžné v Orientu, od Alžírska po Čínu (Rooney, 2017).

1.4.6. Fibonacci

Leonardo z Pisy, jinak také Leonardo Pisánský, dnes známý především jako Fibonacci, byl nejvýznamnějším středověkým evropským matematikem. Jeho data narození a úmrtí jsou jen přibližná, často se uvádí 1170–1250 n. l. (Mareš, 2011, Mazur, 2017), Pickover (2012) udává 1175–1250 n. l. Narodil se v italské Pise do rodiny obchodníka a konzulárního úředníka Guilerma zvaného Bonacci (Dobrák; Mareš, 2011). Mladý Leonardo procestoval se svým otcem značnou část Středomoří, kde se setkával s arabskými vzdělanci, od kterých čerpal nové poznatky především o matematice, o kterou se velmi zajímal. Podle Mareše (2011) to byl první „čistokrevný“ matematik od doby Diofanta (cca 3. stol. n. l.), který působil v Alexandrijské knihovně. Fibonacci se tak seznámil s desítkovou poziční soustavou, s indickými číslicemi včetně nuly a s výpočty, které byly v novém číselném systému značně jednodušší. Po svém návratu do Pisy roku 1200 začal sepisovat své matematické znalosti z cest v knize *Liber abaci* (*Kniha o počítání*), která vyšla v roce 1202. Slovo *abaci* v názvu odkazuje na umění *abaco*, které, oproti našemu očekávání, spočívalo v počítání s indickými číslicemi bez použití abaku. Fibonacci chtěl tuto novou matematiku zprostředkovat latinskému světu, který využíval především římské číslice. Ve své knize seznamuje čtenáře s indickou číselnou soustavou, názorně demonstruje způsoby – „algorismy“ – aritmetických výpočtů a věnuje se také obchodní matematice.

Fibonacci ale nebyl prvním, kdo přinesl indické číslice do Evropy. Indické číslice začaly do Evropy pronikat již od 10. stol. n. l. V roce 976 n. l. vyšel Codex Vigilanus. Byl to první západní rukopis s indickými číslicemi (Mazur, 2017). Gerbert z Aurillacu, jenž se v roce 999 n. l. stal papežem Silvestrem II., používal indické číslice (apices) ve svém gerbertovském abaku (viz výše, Mazur, 2017). Ve 12. stol. n. l. přeložil Robert z Chesteru do latiny významné arabské dílo Al-Chorezmího *Algebru* (z 9. stol. n. l.), které mj. pojednává o indických číslicích. Taktéž ve 12. stol. Jan Hispanus ze Španělska popisuje indický číselný systém ve svém díle *Kniha algoritmů z praktické aritmetiky*. Obchodníci, kteří obchodovali přímo s Araby, také pravděpodobně znali jejich číslice. Přínos Fibonacciho *Liber abaci* spočíval především v názorném zavedení indických číslic včetně nuly jako čísla (Bečvář, 2001) do výpočtů, které Fibonacci ukazoval na konkrétních úlohách včetně úloh z obchodní praxe, kde se nevyhýbal ani dluhům, tedy záporným číslům. Tím výrazně pomohl k šíření indických číslic (předchozí práce zmiňující indické číslice mají spíše informativní charakter). Matematická úroveň *Liber abaci* byla na tehdejší dobu velmi nadprůměrná, obsahem velmi bohatá a stala se primárním zdrojem pro výuku matematiky pro obchodníky a další zájemce o matematiku na několik století (Mareš, 2011). Přesto se indoarabské číslice plně prosadily až v 16. stol. n. l. (Mazur, 2017). Např. v roce 1299 byly ve Florencii indické číslice zakázány pro jejich údajnou snadnou zaměnitelnost a velké riziko podvodů (Seife, 2019). Benefity indické soustavy byly však tak zásadní, že jejich obliba mezi uživateli dál rostla.

Ve druhém rozšířeném vydání *Liber abaci* z roku 1228 se vyskytla zajímavá úloha o králících (Jarošová, 2010), jejímž řešením je řada čísel, kterou dnes nazýváme Fibonacciho posloupnost. Jedná se o řadu čísel, ve které je každé následující číslo součtem dvou čísel předchozích (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …). Posloupnost úzce souvisí se zlatým řezem, neboť poměr každých dvou sousedních čísel (vyjma úplného počátku řady) se se vzrůstající vzdáleností od začátku řady čím dál více přibližuje tomuto „božskému poměru“. Tuto posloupnost můžeme vysledovat v mnoha přírodních jevech přímo nebo v podobě zlaté spirály či dalších přírodních jevech odrážejících zlatý řez (Olsen, 2013).

Kromě *Liber abaci* vydal Fibonacci i další matematická díla. Jedním z nich zapůsobil i na tehdejšího císaře Fridricha II., který se zajímal o vědu (a který roku 1212 vystavil českému králi Přemyslu Otakaru I. Zlatou bulu sicilskou stvrzující dědičnost královského titulu v českých zemích). V roce 1240 Fibonacciho ocenila Republika Pisa za zásluhy o rozvoj vědy. Oceněn byl tehdy jako Leonardo Bigollo, což se překládá buď jako „k ničemu se nehodící“ nebo jako „cestovatel“. Jméno Fibonacci mu bylo přiřknuto až v 19. stol. a odvozeno bylo od spojení *„filius Bonacci tj. syn Bonacciův“* (Bečvář, 2001, s. 266).

1.4.7. Nebezpečné číslo

Dnes je pro nás těžké si představit, že cesta k objevení něčeho pro nás tak běžného, jako je nula, trvala lidstvu dlouhá tisíciletí. Čísla vznikala jako záznam skutečných objektů. Zpočátku nebylo třeba a ani nedávalo smysl považovat „nic“ za číslo. První nula, kterou začalo lidstvo používat, byla tzv. poziční nula (viz kapitola 1.4.2.), ačkoliv se ve své podstatě jednalo o pouhý zástupný symbol bez číselné hodnoty. Ve starém Řecku byla nula dokonce v přímém rozporu s tehdejší filozofií, jejíž základy položil Pythagoras a které později rozvedl Aristoteles (Seife, 2019). Seife (2019) vysvětluje, že pro Pythagora (6. stol. př. n. l.) a jeho pokračovatele byla čísla úzce spjata s geometrií, magickou mocí a dokonce představovala jakýsi vesmírný řád, který shrnuli do úsloví „Všechno je číslo“. Nula nepředstavovala žádný objekt, jak by tedy mohla být číslem? Násobení nebo dělení nulou odporovalo zdravému rozumu. Nejen myšlenkou nekonečného dělení dráždil Řeky svými paradoxy (např. Achilles a želva) Zenon z Eleje (5. stol. př. n. l.). Aristoteles (4. stol. př. n. l.) měl tento filozofický problém smést ze stolu prohlášením, *„že matematikové nekonečno nepotřebují a nepoužívají. Ač snad nekonečno může ve vědomí matematiků potenciálně existovat – jako například představa dělení úsečky na nekonečný počet dílů – nikdo takovou operaci ve skutečnosti provést nedokáže. Tudíž nekonečno není. Nekonečně malé dílky v Achillově paradoxu jsou pouhým výtvorem Zenonovy fantazie, nemají nic společného s reálným světem,“* (Seife, 2019, s. 57). Stejně tak byla pro Řeky nestravitelná nula, která představovala prázdnotu a temnotu, kterých se lidé báli. Prázdnota podle Aristotela také nemůže existovat, neboť, jak tvrdí, vše je vyplněno hmotou. Takto Aristoteles podal dokonce důkaz Boží existence, když tvrdil, že vesmír je konečný a beze zbytku vyplněný a že za poslední vesmírnou slupkou je už jen Bůh jako hybatel všeho (Seife, 2019). Tuto myšlenku posléze přejala křesťanská církev, čímž byla nula na dlouhá staletí Evropě zapovězena (Seife, 2019).

Filozofie v Indii stála na zcela jiných základech. Podle Indů vznikl svět z nicoty a zároveň byla nicota nejvyšším cílem lidského úsilí. Indická matematika také nebyla svázána logikou řecké geometrie a skutečného světa, takže Indové mohli s čísly provádět operace, které Řekům nedávaly smysl. Již výše jsem zmiňovala Bakšálský rukopis (cca 3. stol. n. l., viz Indoarabské číslice), ve kterém jsou řešené úlohy z aritmetiky, algebry či geometrie (Pickover, 2012). Autor v něm používá tečku pro neznámou, ale zároveň také jako symbol pro nulu – není však specifikováno, zda se jedná o nulu poziční nebo už číselnou (Pickover, 2012). Zajímavé je, že znaménkem „+“ jsou označena záporná čísla (Pickover, 2012).

Za počátek číselné nuly autoři matematicko-historické literatury obecně pokládají dílo indického matematika a astronoma Brahmagupty (asi 596–668 n. l.) s názvem *Brahmasputasiddhanta* (628 n. l.) neboli „Otevření vesmíru“ (Mareš, 2011). Brahmagupta definuje nulu jako číslo, které vznikne *„odečtením nějakého čísla od sebe sama“* (Mazur, 2017, s. 85). Nulu Brahmagupta označuje černou tečkou a ve svém díle vysvětluje, jak se s nulou počítá (tab. 7). Nevyhýbá se při tom ani záporným číslům, které nazývá „dluhy“ (kladné jsou pak „zisky“, Mareš, 2011, Mazur, 2017). Nepředpokládá se, že by Brahmagupta číselnou nulu vymyslel, nicméně jeho dílo se stalo primárním zdrojem číselné nuly pro náš svět.

Dluh zmenšený o nulu je zase dluh.	- a + 0 = - a
Zisk zmenšený o nulu je zase zisk.	a - 0 = a
Nula zmenšená o nulu je zase nula.	0 - 0 = 0
Dluh odečtený od nuly je zisk.	0 - (- a) = a
Zisk odečtený od nuly dluh.	0 - a = - a
Součin dluhu nebo zisku s nulou je nula.	- a · 0 = 0 ; a · 0 = 0
Součin nuly s nulou je nula.	0 · 0 = 0
Součin nebo podíl zisku a dluhu je dluh.	a (- b) = - (ab) ; a / (- b) = - (a / b)
Součin nebo podíl dluhu a zisku je dluh.	- a · b = - (ab) ; - a / b = - (a / b)

Tab. 7 Převedení Brahmaguptových pravidel pro počítání s nulou do současného zápisu (I. Richtrová).

Zcela nezávisle na indické matematice se podle Pickovera (2012) ve stejné době (7. stol. n. l.) objevila nula v mayské číselné soustavě (viz kapitola 1.4.2). Je zajímavé, že pro Maye byla přirozeným počátkem číselné soustavy. Každý měsíc tak nejprve začínal dnem nula. Seife (2019) v tom spatřuje velkou výhodu oproti našemu systému. Osobně se domnívám, že to může být předmětem zajímavé debaty. Mayská nula však neměla žádný vliv na rozvoj asijské a evropské matematiky.

Někteří arabští chalífové si byli vědomi vysoké úrovně řecké, indické a čínské vzdělanosti a zasloužili se o to, aby byly ve velkém překládány a přepisovány díla tamních filozofů a učenců. Na přelomu 8. a 7. stol. n. l. byla v Bagdádu založena knihovna Dům moudrosti, která se stala centrem arabské vzdělanosti na několik staletí. Odtud se východní vzdělanost šířila na západ. Fibonacci pomohl rozšířit indoarabské číslice včetně nuly do Evropy (viz kapitola 1.4.6.), kde však narazily na zakořeněné Aristotelovy principy v křesťanské společnosti.

2 Analýza: Zastoupení historie matematiky v českých učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ

Vzhledem k tématu své práce jsem chtěla zjistit, do jaké míry pracují české učebnice matematiky pro 1. stupeň ZŠ s látkou historického učiva. Za tímto účelem jsem prostudovala veškeré dostupné učebnice matematiky pro 1. stupeň v Pedagogické knihovně J. A. Komenského v Praze. Jednalo se o řady učebnic nakladatelství Alter, Didaktis, Fraus, H-mat, Klett, Nová škola, Nová škola Brno, Prodos, Prometheus, SPN, Studio 1+1 a Taktik, které měly v té době (leden 2023) platnou schvalovací doložku Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy. Od nakladatelství Fraus jsem měla k dispozici dvě řady učebnic – Matematika a Matematika se Čtyřlístkem, řadu Matematika pak ve dvou vydáních (1. a 2. vydání). V učebnicích jsem hledala matematické učivo, jehož obsah jasně vychází z historie matematiky, nebo jednotlivé historické úlohy. Úlohy, které byly pouze pro zatraktivnění zasazeny do historického prostředí, jsem nebrala v potaz. Z hlediska odkazu na historii matematiky jsem rozlišovala:

a) úlohy, které na historii nijak neodkazují (pouze pracují s danou látkou),
b) úlohy, které na svou historii odkazují pouze stručným, často jednovětným, uvedením např. "dříve lidé používali/měřili…"
c) úlohy, které podrobněji odkazují na vlastní historii.

Úlohy bez historického odkazu přirozeně často doplňují úvodní úlohy s představením historických souvislostí. Některé učebnice je však uvádí bez jakéhokoliv úvodního historického kontextu. Výsledky analýzy jsem zpracovala do tabulky (Příloha 1).

Z šetření vyplývá, že nakladatelství Fraus (ve své řadě Matematika), H-mat a Prodos zařazují do svých učebnic učivo s přesahem do historie matematiky a to od 3. ročníku výše (viz Příloha 1). Nutno dodat, že tým autorů 1. řady učebnic Matematika nakladatelství Fraus a učebnic nakladatelství H-mat se do značné míry shoduje. Ostatní nakladatelství do svých učebnic historickou látku zařazují pouze okrajově. Jedná se především o římské číslice (11/12 nakladatelství je zařazuje do svých učebnic), staré měrné jednotky (nejčastěji tělesné délkové – 7/12 nakladatelství) a v ojedinělých případech geometrická tělesa (nejčastěji pouze v podobě ilustrace jehlanu na příkladu egyptských pyramid; 3/12 nakladatelství). Historické učivo se v učebnicích vyskytuje dominantně ve 4. ročníku.

2.1. Závěr analýzy

Průzkum napříč českými učebnicemi matematiky pro 1. stupeň ZŠ mi odhalil míru zastoupení učiva s historickým kontextem. Toto zastoupení bych shrnula v následujících čtyř bodech:

1) **Výrazný rozdíl k přístupu a zařazení historického kontextu do učiva matematiky.** Autoři učebnic matematiky nakladatelství Fraus (řada Matematika), H-mat a Prodos ve svých učebnicích systematicky pracují s historickou látkou. Historické učivo v učebnicích ostatních nakladatelství je zařazeno jen okrajově.

2) **Malá rozmanitost historických témat.** Kromě výše uvedených výjimek je historické učivo v učebnicích matematiky pro 1. stupeň ZŠ omezeno především na římské číslice a historické tělesné míry.

3) **Nízká kontinuálnost.** Ve většině případů je toto historické učivo uvedeno v podobě izolovaných příkladů a úloh, ke kterým se autoři ve svých učebnicích dále nevracejí.

4) **Řazení historického učiva do vyšších ročníků 1. stupně ZŠ, zejména do 4. ročníku.**

3 Praktická část

3.1. Cíle práce

1. Vytvořit didaktický materiál, který doplní současné učebnice matematiky pro 1. stupeň ZŠ o prvky historie matematiky s přihlédnutím k věku žáků a RVP.

2. Reflektovat vytvořené materiály na základě primárního vyzkoušení v pedagogické praxi studentů PedF UK.

3.2. Metodologie práce

Úkoly plynoucí ze stanovených cílů práce:

1. Provést rešerši současných učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ (viz kapitola 2).
2. Prostudovat literaturu historie matematiky.
3. Stanovit kritéria pro výběr témat.
4. Vybrat témata vhodná ke zpracování.
5. Sestavit didaktický materiál (texty, úkoly, přílohy, pomůcky) přiměřený věku a schopnostem.
6. Ověřit vhodnost navrženého materiálu dvěma formami:
    a. Nezávislé ověřování studenty–učiteli v pedagogické praxi
    b. Analýza získaných reflexí na odučené hodiny s prvky akčního výzkumu
7. Vytvořit didaktická doporučení.

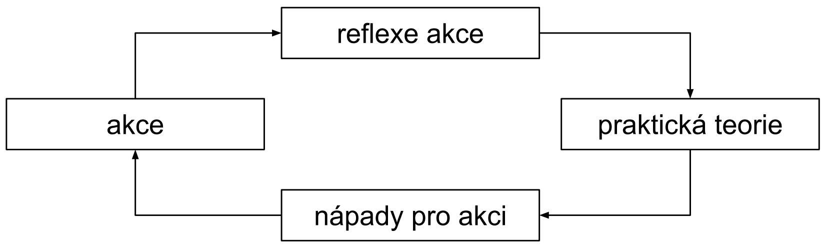
Pro výběr témat jsem stanovila kritéria, která by měla splňovat podmínky vhodnosti, přiměřenosti a novosti. Jsou to:

- vazba na RVP ZV – přímá nebo rozšiřující;
- nová historická témata s didaktickým potenciálem – na základě své analýzy (viz kapitola 2) jsem *a priori* vynechala témata římských číslic a starých měr a jednotek, která jsou v učebnicích matematiky hojně zastoupena (staré míry a jednotky ve své práci podrobněji zpracovala také Burešová, 2013), dále témata historických zlomků nebo indického násobení (metodika podrobně zpracovaná v učebnicích s Hejného metodou);

- témata s metodickým potenciálem – využití manipulačních pomůcek, venkovní aktivita, nosné téma (výrazná osobnost, jev, …).

Výsledné scénáře představují materiál, který by měl odpovídat danému věku v kontextu RVP ZV. Vhodnost navrženého didaktického materiálu měla být ověřena studenty[2] PedF UK oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ v kombinované formě v hodinách matematiky na 40 školách z různých lokalit České republiky. Zpětné vazby z odučených hodin byly získány v podobě reflexí. Scénáře studenti hodnotili na 7stupňové škále. Reflexe byly vyhodnoceny analýzou dokumentů. Výsledky jsou podkladem pro hodnocení navržených didaktických materiálů *a posteriori* a východiskem pro případné úpravy. Zdůvodnění volby konkrétních scénářů a doprovodné komentáře jsou zpětnou vazbou směřující k hodnocení a) atraktivnosti tématu, b) propracovanosti tématu.

Celý proces tvorby didaktických materiálů, jejich ověření, analýzy reflexí a z ní vyplývajících úprav obsahuje *de facto* všechny fáze akčního výzkumu (obr. 9) jak je podle Elliotta popisuje Janík (in Maňák, Švec, 2004).



Obr. 9 Fáze akčního výzkumu podle Elliota (1981 in: Maňák, Švec, 2004, s. 58).

[2] Sama jsem své materiály z důvodu rodičovské dovolené nezkoušela.

3.3. Návrh scénářů a aktivit

Provedená analýza učebnic odhalila jistou míru odtržení školské matematiky od vývoje myšlení a historie a nedostatek narativních prvků, které jsou žákům dané věkové skupiny blízké. Na základě studia historie matematiky jsem dle zadaných kritérií (viz kapitola 3.2.) vybrala témata pro tvorbu didaktických materiálů. Témata jsem roztřídila do následujících šesti tematických oblastí:

1. Pravěké vyjádření množství
2. Historický zápis čísla
3. Kupecké počty
4. Kde se vzala nula
5. Vlastnosti čísel
6. Geometrie v historické praxi

Pro každý tematický námět jsem navrhla scénáře a aktivity, aby byly prvky historie matematiky zasazeny do didaktické struktury, nebyly pouze v izolovaných úlohách. Při tvorbě didaktických materiálů jsem se snažila řídit doporučením podle Smestada (2015, viz kapitola 1.3.) Navrhované scénáře a aktivity jsem promýšlela jak z pohledu žáka, tak z pohledu učitele. Lekce jsou většinou doplněny o úvod pro učitele, jehož cílem je poskytnout učiteli základní informace a souvistlosti k tématu, upozornit na didakticky obtížná místa ve scénáři a poskytnout odkaz na literaturu, pokud jej téma osloví k hlubšímu studiu. Některé lekce jsou doplněny o doporučenou pro žáky. Jedná se zejména o populárně naučné tituly, které dané téma zpracovávají způsobem a jazykem, kterému žák rozumí. Hodí se obzvláště pro žáky nadprůměrné a nadané, které projeví o danou problematiku zájem. Zároveň je to velice kvalitní zdroj informací i pro učitele, který mu poskytne základní penzum informací v dobře strukturované formě.

U všech scénářů a aktivit jsem promýšlela věkové zařazení, výukové cíle, potřebné pomůcky a nezbytnou přípravu. Při tvorbě materiálů jsem kladla důraz na aktivní zapojení žáků, zařazení manipulativních činností a dramatizace, práci s textem, uplatnění mezipředmětových vztahů. Většina základních úkolů je zamýšlena pro práci všech žáků (na všech stupních intelektového rozvoje), důraz však kladu na aktivní spolupráci mezi žáky a práci ve skupinách. Tím chci zajistit podporu žáků s deficity v oblastech kognitivních funkcí a cíleně podpořit vrstevnické učení. Sám učitel může naopak cíleně zajistit spíše homogenní složení jednotlivých skupin na úrovni žákovských schopností a poskytnout cílenou pedagogickou podporu tam, kde je potřeba. Ve scénářích je dále navrženo množství úkolů pro nadané a velmi motivované žáky (s označením ⚡ viz tab. 8)

Je vždy na zvážení učitele, který zná své žáky, aby posoudil, zda jsou úkoly pro všechny přiměřené. Cílem těchto materiálů není lpět na jejich úplném vyplnění všemi, ale podněcovat zájem o historii a podporovat myšlení s využitím historických témat.

Pro lepší přehlednost využívám v materiálech následující symboliku:

Použitá symbolika u navrhovaných vzdělávacích aktivit/scénářů
🆄 úkol pro všechny
🄰 úkol pro děti bez deficitů v oblasti kognitivních funkcí
⚡ úkol pro nadané a silně motivované žáky
🆂 úkol pro společné řešení žáci + učitel
🅷 úkol „ohodnoťte“
🆁 úkol „reflektujte“
❔ otázka, kterou položí učitel; často má žáky nasměrovat k nějakému uvědomění
❓ stěžejní otázka lekce
➔ poznatek nebo myšlenka, kterou si mají žáci v důsledku předchozí činnosti uvědomit
💡 nápad, myšlenka podněcující ke zkoumání
⇨ navazující činnost

Tab. 8 Symboly použité ve scénářích

Důležitým aspektem ve výuce, který se snažím v materiálech zohledňovat, je kontinuita a využívání nabitých dovedností a znalostí v další práci.

Didaktické pomůcky pro budování historických souvislostí

Aby měla výuka obohacená o historické souvislosti (a výuka historie obecně) smysl, považuji za důležité používat názorné didaktické pomůcky. Jsou to především model časové osy a mapa.

- Makromodel časové osy

  Na základě zkušeností dr. Kaslové (konzultace 28. 2. 2023) je pro kvalitní budování představy časových období historie u žáků mladšího a středního školního věku vhodné vytvořit proporcionální 2D makromodel, který pracuje s plochou, jenž můžeme postupně zaplňovat událostmi. Osobně jsem k tomu účelu použila roli 30 cm široké stuhy o délce 7 metrů. Stuhu jsem rozměřila po jednotlivých tisíciletích (tisíciletí odpovídá 1 m stuhy), staletích (každých 10 cm) a desetiletích (1 cm). Jeden rok v tomto měřítku odpovídá tedy 1 mm délky modelu. Při seznámení s takovým modelem žáci nejprve hledají aktuální rok, rok svého narození, případně rok narození členů své rodiny, ukazují si, jak dlouhých je sto let, tisíc let atd. Předpokládám, že pravidelnou prací s takovýmto fyzickým modelem získají žáci kvalitní představu o vzdálenosti historických období či jednotlivých událostí a jejich trvání, která nebude (nebo jen minimálně) zatížená zkreslením. Pozitivem je rovněž manipulativní charakter pomůcky.

- Mapa

  Příběhy z historie matematiky mají také svůj zeměpisný kontext, který je důležitý. Pro základní orientaci pracujeme tedy i s mapou (světa či jinou), avšak v přiměřeném rozsahu odpovídajícímu věkové skupině žáků.

3.3.1. Pravěké vyjádření množství

Vrubovky

<table>
<tr><td>Ročník</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Charakteristika</td><td>Žáci zaznamenávají počty formou čárky (= zářezu).</td></tr>
<tr><td>Cíle</td><td>Žáci zaznamenávají dané objekty pomocí čárek.
Žáci vytváří model počtu zástupnými předměty.
Žáci hodnotí počet slovy hodně, málo, ani hodně, ani málo.
Žáci porovnávají množství pomocí slov méně, více.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úvod pro učitele</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pravěk je souhrnné označení doby, která končí s rozvojem prvních civilizací, zakládáním městských států a starých říší, typicky Mezopotámie, Egypt aj., v období kolem 4. tisíciletí př. n. l. Do té doby prošel člověk dlouhým vývojem, který trval desítky tisíc let. Učil se chodit, používat nástroje, používat zvuky, ze kterých se postupem času vyvinula řeč, … Život pravěkého člověka byl řízen přítomností a aktuálními potřebami. Pravěký lovec dokázal rozlišit malé nebo velké stádo bizonů, uměl vyjádřit počet jeden nebo dva. Více nepotřeboval. Podobně jsou na tom ještě dnes (nebo donedávna byly) zbytky primitivních kmenů v Oceánii nebo v Jižní Americe. Vrubovka je termín používaný pro lidský artefakt, který je opatřen zářezy nebo vrypy. Jedná se o primitivní záznam počtu, který využívali lidé již před desítkami tisíc let, jak dokládají nálezy kostních vrubovek v Africe a v Dolních Věstonicích. Vyučování věnované záznamu počtu na pomyslné vrubovky zavede žáky ke skutečným kořenům lidstva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Literatura pro učitele</td></tr>
<tr><td colspan="2">FOLTA, Jaroslav. Věstonická vrubovka. Online. Vesmír. 1997/6. ISSN 0042-4544. [cit. 2024-02-27]. Dostupné zde: https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/1997/cislo-6/vestonicka-vrubovka.html

LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. Posvátná čísla:</td></tr>
</table>

tajné kvality kvantit. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7. KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Pomůcky
Vhodné klacíky k čárkování, tmavé fixy, kamínky (případně nějaká náhrada např. fazole, víčka od PET lahví atp.), model časové osy, vytištěné obrázky vrubovek (Příloha 4).
Příprava
Učitel promyslí vhodný venkovní prostor pro aktivitu a dopředu určí, co budou žáci počítat „čárkováním“ (aby se pravděpodobný výsledek pohyboval nejlépe v oboru 1–20, případně v nižších desítkách).
Scénář vyučování
Motivace U: *„Kdysi dávno, v době, kterou označujeme za pravěk, žili lidé – pralidé. Pralidé nežili jako my dnes. Praděti neměli hračky, jako máte vy doma, a jejich domov vypadal taky úplně jinak. Nejdříve to byla třeba jeskyně, v pozdějších dobách nějaká chýše. Pralidé si ani nepovídali jako my, nepoužívali řeč, jakou používáme my. Tu si teprve museli pomalu vytvořit a to trvalo dlouho předlouho několik tisíc let. A když už pralidé řeč měli, tak měli slova jen pro ty věci a činnosti, které nejvíce potřebovali. Takže určitě měli slovo pro mamuta, pro oheň, pro nebezpečí, protože nebezpečí na ně tehdy číhalo na každém kroku. Ale určitě měli i další slova, když už měli řeč. Co myslíte, jak to měli pralidé s počítáním? Myslíte, že uměli počítat? … Lidé, nebo chcete-li pralidé, uměli poznat, zda je stádo bizonů malé nebo velké, rozlišovali mezi jedním a více než jedním, později možná dokázali určit dva nebo tři. Dokonce i dnes žije v jižní Americe domorodý kmen indiánů, který má ve své řeči výrazy pouze pro jeden, dva a mnoho. Slova pro větší čísla jim úplně chybí a tak se v nich ani nevyznají.“*

Povídání o pravěku: Kdy to bylo? Jak se žilo? Jak si pralidé povídali?

Učitel ukáže žákům obrázky vrubovek (Příloha 4).

- ? Co to asi je?
- ? K čemu to mohlo pralidem sloužit?

Učitel napíše na tabuli/list papíru slovo *vrubovka*. Společně jej vyhláskují a přečtou (při genetické výuce čtení).

Učitel může vést se žáky krátkou diskusi o tom, co asi mohli pralidé pomocí těchto konkrétních vrubovek počítat (podle počtu zářezů).

Model časové osy – Učitel žákům předvede, jak daleko je pravěk vzhledem k délce lidského života.

Aktivita

U: „Zahrajeme si na pralidi na průzkumné výpravě.“

Na procházce nebo na školním pozemku vytvoří žáci dvojice. Každá dvojice dostane klacek a fix.

- U Během procházky/časového limitu zaznamenejte pomocí čárek neboli zářezů na klacek počet ... (každá skupina si vylosuje cílový objekt zájmu k počítání).
    - Objekty k počítání: např. kosi, ovce v ohradě, jehličnany, lidé se psem na procházce, lidé s kočárkem, … „mamuty“.

Reflexe

- U Slovy hodně, málo, ani hodně, ani málo vyjádřete, kolik jste načárkovali objektů, které jste počítali. – Prostor pro vyjádření žáků, případně krátkou pro diskusi na téma: Co je hodně a co je málo?
- U Za každou čárku dejte před sebe jeden kamínek. Kolik máte čárek, tolik budete mít před sebou kamínků.

U Podívejte se na kamínky k sousední dvojici doprava a zkuste říct, zda jste zaznamenali více nebo méně objektů než oni. – Všichni se vystřídají, pokračuje vždy dvojice vlevo. **U** Kdo umí spočítat své kameny před sebou, řekne nám, kolik napočítal.
Tipy a doporučení
Metodu zástupného předmětu pro evidenci počtu (podobně jako zde při reflexi kamínky reprezentují jednotlivé čárky alias zářezy) je vhodné využívat ve výuce pravidelně. Stejně jako vrubovky je to jeden z prehistorických způsobů vyjádření množství bez potřeby číselné soustavy a čísel vůbec. Zástupné modely lze snadno porovnávat nebo s nimi lze jednoduše manipulovat dle potřeby.

Počítejme jako domorodci na Nové Guineji (Papuánština)

Ročník	1
Charakteristika	Hravý způsob počítání malých množství, které lze využít při rozličných aktivitách.
Cíle	Žáci si hravou formou fixují představu počtu 1–6.
Úvod pro učitele	
Výprava na ostrov Nová Guinea mezi domorodé Papuánce simuluje výpravu do doby kamenné. Domorodé kmeny Papuánců tam donedávna žili zcela izolovaně od moderní civilizace. Jedná se o tisíce různých kmenů, které se dorozumívají až tisícem různých jazyků. Jsou to potomci zdejších lovců lebek a mnohdy se jedná ještě o pamětníky kanibalismu, který zde byl běžnou součástí života. Tradiční způsob života, který tu byl zakonzervován po tisíce let, se tak odráží i ve způsobu počítání, které je vztaženo k jedničce a dvojce. sago = jedna — rua ma rua = dva a dva = čtyři rua = dva — rua ma rua ma sago = dva a dva a jedna = pět rua ma sago = dva a jedna — rua ma rua ma rua = dva a dva a dva = šest	

Jedná se o způsob počítání kmene Gapapaiwa (Rooney, 2017). Ságo je také obecné označení pro jídlo a pro škrobový pokrm ze ságové palmy, který tvoří základ stravy zdejších domorodců.
Pomůcky
Model časové osy, mapa světa, obrázky s různým počtem (1–6) objektů (jablíčka, vločky, květiny – podle aktuálního období). Vhodná encyklopedie s fotografiemi domorodců z Nové Guineje.
Scénář aktivity
Učitel ukáže žákům vztyčený palec a řekne *„sago“*. Učitel ukáže žákům dva prsty a řekne „*rua*“. Učitel střídavě ukazuje jeden nebo dva prsty, pak přejde na obrázky s jedním nebo dvěma předměty, a žáci podle počtu říkají buď sago (= jeden, jedna) nebo rua (= dva). Učitel ukáže žákům tři prsty a řekne *„rua ma sago“*. Učitel střídá prsty, objekty na obrázcích v počtu 1–3 a žáci hromadně určují počet novým způsobem. Učitel ukáže čtyři prsty a vybídne žáky aba navrhli, jak se to tímto novým způsobem asi řekne ➜ *„rua ma rua“*. Učitel připevní obrázky s objekty v počtu 1–4 na tabuli. Střídavě ukazuje na tato uskupení a žáci nahlas říkají daná čísla novým jazykem. Učitel postupně vyvolává žáky, kteří jej v ukazování u tabule zastupují. Podle situace se žáci hned nebo další hodinu podobným způsobem seznámí i s vyjádřením počtu pět (rua ma rua ma sago) a šest (rua ma rua ma rua). ? Jakým jazykem jsme to teď mluvili? (Žáci tipují, učitel může nechat otázku zatím otevřenou.) ? Jak se tímto jazykem řekne tři? ? Jak bychom přeložili přesně *„rua ma sago“*? (➜ dva a jedna)

? Jak bychom přeložili přesně *„rua ma rua“*? ? Kdo by tímto způsobem mohl asi počítat? U: *„Tímto způsobem se ještě dnes počítá u některých domorodých kmenů na ostrově Nová Guinea. Dříve se mu říkalo Papua a lidem, kteří tam žijí, se proto říká Papuánci. Tito Papuánci ještě poměrně nedávno, představme si třeba dobu, kdy byli vaši rodiče dětmi, žili zcela odtrženě od moderního světa. Používali jen ty nejjednodušší nástroje, které si sami vyrobili. Můžeme se tedy domnívat, že jejich způsob života a tedy i počítání, byl velmi podobný životu lidí v pravěké době.“* Učitel ukáže ostrov Nová Guinea na mapě světa. Ukáže (nebo žáci ukáží), kde žijeme my. Na modelu časové osy žáci hledají dobu, kdy byli rodiče malí, a učitel ukazuje, jak vzdálená je doba pravěku. ? Kdo si pamatuje, jak se říká obyvatelům tohoto ostrova? ? Jak bychom tedy mohli označit tento jazyk? - Učitel může upřesnit, že se na Nové Guinei mluví ve skutečnosti skoro 1000 různých jazyků, a toto je pouze jeden z nich. ➜ Tomuto jazyku budeme zjednodušeně říkat papuánština. Reflexe ? Líbí se vám líbí takovéto počítání? ? Jaké jsou jeho výhody? ? Jaké jsou jeho nevýhody?
Tipy a doporučení
Využití papuánského počítání v hodinách: ● ve dvojici s hrací kostkou: žáci se střídají v hodu, hozený počet řekne žák papuánsky ● učitel říká čísla od 1–6 střídavě česky a papuánsky, žáci je ukazují na prstech ● hra shlukování – žáci se volně pohybují, učitel řekne číslo papuánsky,

žáci utvoří skupiny o daném počtu dětí; celé se to opakuje ● hra telefon – žáci sedí s učitelem v kroužku na koberci, každý má svůj lísteček s číslem nebo počtem puntíků 1–6 (aby se čísla mohla opakovat, mají různé barvy); učitel začne – např. „*zelená rua ma rua volá žluté sago*“ a otočí svůj lístek číslem dolů, pokračuje žák se žlutým číslem jedna: „*žluté sago volá modrou rua ma rua ma rua*“ atp.

3.3.2. Zápis čísla

Zápis čísla více různými způsoby s aktivními odkazy či přesahy do historie lidstva představuje atraktivní prohloubení probírané látky a umožňuje tak žákům důkladné vytváření singletových spojů v budování představ o množství a o čísle. Nadaným žákům nabízí další prostor pro matematický rozvoj, ostatním žákům poskytuje alternativu k pochopení symbolického jazyka číslic, přičemž není naším cílem lpět na zvládnutí všech jeho podob všemi.

Babylonský zápis čísla

Nejstarší důkazy o vzniku a používání písma, které máme k dispozici, pocházejí z Mezopotámie, tedy z oblasti tzv. úrodného půlměsíce, kde lidé vyšlechtili první obilí. Vznikaly zde první městské civilizace. Nejstarší klínové tabulky jsou datovány kolem roku 2900 př. n. l. (Mareš, 2011). Písaři patřili k nejváženějším obyvatelům měst. S žáky prvního ročníku se lze bavit o důležitosti vzdělání a následně se zamyslet, zda vidí nějakou podobnost mezi těmito lidmi, kteří žili před více než 5 tisíci lety a jimi samotnými? Ano, sami žáci si také osvojují dovednosti v psaní.

a) Zápis čísla v klínovém písmu

Ročník	1
Charakteristika	Žáci rozšiřují své dovednosti v oblasti zápisu čísla.
Cíle	Žáci vysvětlí, jak se ve starém Babyloně psala čísla. Žáci zapíší čísla 1–20 klínovým písmem. Žáci hodnotí vyzkoušené formy zápisu babylonských číslic.

Úvod pro učitele
Klínové písmo se používalo v celé oblasti Mezopotámie díky dostupnosti hlíny, do které se dělaly otisky rákosu. Předchůdce papíru sice již existoval, ale ve vzdálené Číně, která byla zeměpisně i kulturně izolovaná (více informací např. zde: https://papir-novak.cz/aktuality/historie-papiru/). Lidé starověkých civilizací používali písmo a počítání především k praktickým účelům zaznamenávání úrody, k výpočtu daní, majetku, dědictví, k obchodu, ve stavitelství a pro náboženské účely. Se žáky lze vyzkoušet otisky do modelíny např. dřevěnou špachtlí s hranatým profilem. Nicméně tento způsob vyžaduje určitou zručnost a výsledný zápis na „modelínových“ tabulkách je poměrně drobný. Jako alternativu zápisu je možné zvolit razítkové otisky na papír. Razítka lze jednoduše vyrobit např. z moosgummi přilepením na špejli nebo špachtli.
Pomůcky
Modelína, dřevěné špachtle s hranatým profilem, podložky pro práci s modelínou, špejle, tavná pistole a pěnová hmota moosgummi na výrobu razítek, barvící polštářky na razítkování, papíry A5, lepidlo. Obrázek tabulky Plimpton 322 (Příloha 5). Mapa světa, model časové osy.
Příprava
Učitel připraví několik kusů razítek z pěnové hmoty moosgummi a špejlí pomocí tavné pistole. Před hodinou učitel nachystá stanoviště, na tabuli zapíše čísla 1–20 v klínovém písmu nebo připraví přehledový plakát.
Literatura pro žáky
KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. *Posvátná čísla: tajné kvality kvantit*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7.

Scénář

Motivace - Výprava do historie

Učitel ukáže žákům vytištěný obrázek hliněné destičky s klínovým zápisem (tabulka Plimpton 322, Příloha 5).

? Co to asi je?

U: *„Toto je hliněná destička s tzv. klínovým písmem. Už nepatří do pravěké doby, ale do doby, kdy už byli lidé vyspělejší. Už nežili v tlupách v jeskyních, ale již se naučili pěstovat obilí, stavěli města a začali používat písmo."*

Učitel ukáže žákům na mapě světa, kde se nacházelo území Mezopotámie, a na modelu časové osy ‚se projdou" zpět o 2,5–5 tisíc let zpátky.

Aktivita - práce na stanovištích

Učitel žákům ukáže, jak vypadala babylonská čísla (připravený zápis/plakát na tabuli). Každý žák dostane vzor zápisu babylonských čísel 1–20 (může si jej nalepit do sešitu).

1. Stanoviště modelíny
   - U Z modelíny udělej placku, která bude silná podobně jako ‚sešit'. Vem dřevěnou špachtli a vytlač do modelíny symboly klínových čísel podle vzoru.
   - Výsledné modelínové destičky se zápisem čísel učitel vyfotí (nutno opatřit popiskem se jménem autora) a později vytiskne, aby si je žáci mohli vlepit do sešitů.
2. Stanoviště otisků
   - U Pomocí speciálního razítka tiskej zápis babylónských čísel.
3. Stanoviště zápisu
   - U Zapiš symboly čísel pomocí klínových znaků.

- Úkoly na stanovištích 2 a 3 žáci zpracovávají do sešitu nebo na připravený papír A5. **Reflexe** ? Jak se vám líbí babylonská čísla? ? Která forma zápisu byla nejobtížnější a proč? ? Jaké by to bylo, používat pouze hliněné destičky? ? Jaké mají podle vás babylonská čísla výhody? ? Jaké mají podle vás nevýhody? ? Co lidé ve staré době, o které byla řeč, mohli počítat? ? Proč psali do hlíny?
Tipy a doporučení
● Pravidelné využívání babylónských číslic v hodinách. ● Žáci zapisují výsledky příkladů babylonským zápisem. ● Učitel připraví 10 krabic s víkem (např. od bot), do kterých schová různý počet předmětů. Žáci je obchází a zapisují počet předmětů babylonským zápisem. ● Každý žák dostane na záda lepící lísteček s babylonským číslem. Úkolem žáků je seřadit se vzestupně bez jediného slova. ● Učitel zadává slovní úlohu ústně a číselné údaje ukazuje zapsané klínovým písmem na papíru. Žáci zapisují odpověď na mazací tabulky klínovým písmem (nebo mají možnost volby mezi klínovým písmem a arabskými číslicemi). ● Učitel využije téma Babylonu také v Čj a Vv – legenda o Babylonské věži.

b) Klínové násobkové tabulky

Ve druhém ročníku se učitel vrátí ke klínovému písmu. Nejprve se žáky vyluští záhadu Nippurské destičky (Příloha Babylonský zápis čísla). Žáci se při zápisu čísel babylonským způsobem doposud setkali jen s čísly v nižších desítkách, ve kterých se uplatňuje pouze desítkový systém. S číslem 60 nastává změna a projeví se i poziční pravidlo zápisu.

Ročník	2
Charakteristika	Žáci řeší záhadu reálného artefaktu a odhalují pravidlo babylonského zápisu čísel větších jak 59. Pravidlo následně mohou využít při vlastní tvorbě.
Cíle	Žáci využívají své dovednosti k řešení problému zápisu čísla. Žáci vytvoří vlastní násobkové tabulky zapsané babylonskými číslicemi. Žáci procvičují malou násobilku.

Úvod pro učitele

Předpokladem k následující aktivitě je základní znalost babylónských čísel. Při zápisu čísel 1–59 má tento zápis charakter desítkové aditivní soustavy. Stačí k tomu pouhé dva symboly, jeden pro jednotku , druhý pro desítku . Nyní mají žáci za úkol odhalit poziční pravidlo, které se používá pro zápis čísel větších jak 59. Žáci budou v zápisu čísla rozlišovat zleva doprava řád šedesátek, tedy 60^1, a řád jednotek (60^0). Číslo  může být naše 1 nebo 60, případně 3600 atd. Záleží především na kontextu. Babyloňané později zavedli symbol  pro neobsazenou pozici řádu, tzv. poziční nulu. Pro účely těchto lekcí je to však informace nadbytečná ev. doplňující, pokud vyvstane mezi žáky taková otázka.

Žáci nejdříve řeší zápis čísel větších než 60. Posléze tvoří vlastní násobkové tabulky s využitím klínového písma. Obtížnost si volí žáci sami výběrem násobilkové řady a formou zpracování (modelína vs. razítkování). Aktivity spolu souvisí a jsou zamýšlené do dvou po sobě navazujících hodin matematiky.

Pomůcky

Záhada Nippurské destičky: namnožené Nippurské destičky (destičku lze také pouze promítat) a její části A–H rozstříhané (Příloha 5).

Vlastní násobkové tabulky: modelína, dřevěná špachtle či jiný nástroj na vytlačování klínů do modelíny, razítka klínů s moosgummi a barvící polštářek na razítkování, čtvrtky.
Literatura pro žáky
KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. *Posvátná čísla: tajné kvality kvantit*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7.
Scénář aktivit
Záhada Nippurské destičky U: *„Dnes se vydáme opět do starého Babylonu. Tentokrát máme k dispozici fotografii velice zajímavého artefaktu. Jedná se o tzv. Nippurskou destičku, která kterou vytvořil šikovný písař někdy kolem roku 1700 př. n. l.“* Učitel promítá podobu Nippurské tabulky nebo rozdá žákům její kopie. Žáci si u mapy připomenou, kde se nacházela Mezopotámie, časové období ukáží na modelu časové osy. U: *„Vypadá to, že destička je plná čísel. Vaším úkolem bude, destičku rozluštit.“* Práce ve trojicích: U Každá skupina si vezme jeden lísteček (Příloha 5 – Rozdělená Nippurská destička). Čísla z destičky zapisují arabskými číslicemi. - Lístky s označením A a B jsou jednoduché, u lístku C nastává problém s pozičním zápisem čísla 60. Bez této znalosti nedávají čísla na dalších lístcích smysl. ⇨ Učitel učekává ruch ohledně výsledků. Žáci postupně odkrývají, co vyluštili – Nippurskou tabulku přepisují arabskými číslicemi na tabuli. Nejdříve skupina s lístkem A, pak B, pak C. ? Co nám to tam vychází za čísla? Co by mohla znamenat?

💡 Mohla by to být násobilka 9, ale pak to nějak nesouhlasí.

Učitel na tabuli načrtne následující tabulku, kde se žáci pokusí rozklíčovat zápis čísel 60+. Žáci v lavicích pracují na své mazací tabulky.

6 x 9									7 x 9
54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
									

⚡ Koho již napadne řešení, ověří jej na číslech z Nippurské destičky.

➜ Symbol  může znamenat jak číslo 1, tak číslo 60; záleží na kontextu, tedy smysluplnosti.

U Žáci společně s učitelem dokončí překlad Nippurské destičky (lístky D, E, F, G, H).

⚡ Žáci zkouší babylonsky zapsat čísla 100, 120, 200, …

Reflexe

- ❓ Co jsme dnes objevili?
- ❓ Připomíná vám to něco? (➜náš poziční zápis čísel; pokud to žáky nenapadne samotné, lepší nechat otevřené)
- ❓ Napadají vás k tomu nějaké otázky?

Vlastní násobkové tabulky

Učitel navazuje na předchozí aktivitu záhady Nippurské destičky. Žáci si připomenou, co při tom objevili.

U Vyber si jednu řadu násobků z malé násobilky a vytvoř vlastní násobkovou tabulku.

- Žák si vybere, zda bude dělat otisky do modelíny či otisky razítkem na papír.
- Modelínové násobkové tabulky učitel vyfotí, posléze vytiskne, žák nalepí do sešitu.

- Samotné tabulky z modelíny a/nebo jejich zvětšené fotografie poslouží jako dekorativní pomůcka ve třídě.

⚡ Zkus vytvořit násobkovou tabulku čísla 11 (12, … 20).

Obr. 11 Ukázka, jak mohou násobkové tabulky vypadat (foto autor). Placka z obyčejné modelíny (z jednoho válečku z balení), modelovaná ručně, tloušťka do 0,5 cm, výška x šířka přibližně 5 x 6 cm. Na otisky byla použita dřevěná špachtle s hranatým profilem.

Reflexe

? Jaký smysl mělo psát takové destičky tehdy?
  - → destičky sloužily jako přehledové tabulky, lidé se neučili násobilku jako my dnes z hlavy, ale měli na to tabulky

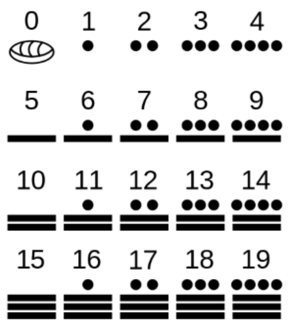
? Jaký smysl má psát takové destičky dnes?
  - → trénink myšlení, trénink násobilky, objevování a zažívání historie

Tipy a doporučení
Fotografie násobkových tabulek v elektronické podobě mohou být dobrým materiálem pro editaci obrázků při informatice.

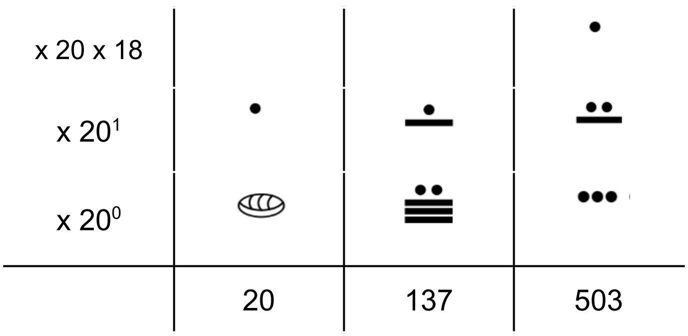
Mayské číslice

Výprava do říše Mayů, původních obyvatel Střední Ameriky, může být v hodinách matematiky dalším vítaným zpestřením.

<table>
<tr><td>Ročník</td><td>1–2</td></tr>
<tr><td>Charakteristika</td><td>Žáci rozšiřují své dovednosti v oblasti zápisu čísla.</td></tr>
<tr><td>Cíle</td><td>Žáci zaznamenávají čísla pomocí mayských číslic.
Žáci provádí aditivní matematické operace v zápisu mayských číslic.
Žáci provádí rozklad čísla zapsaného mayskými číslicemi.
Žáci zapíší číslo >20 a <360 mayskými číslicemi.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úvod pro učitele</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mayové vybudovali svou civilizaci na poloostrově Yukatán více jak dva tisíce let před naším letopočtem. Od 8. stol. n. l. začala jejich civilizace upadat a v 16. stol. podlehla španělským dobyvatelům. Mayové stavěli pyramidy podobně jako Egypťané. Mayské pyramidy však sloužily k náboženským účelům. Zajímavostí je, že nemáme žádné důkazy o tom, že by Mayové znali kolo a že by používali nějaký druh povozů. Jako zemědělci pěstovali především kukuřici, která byla hlavní složkou jejich jídelníčku.



Mayský zápis čísel 0–19

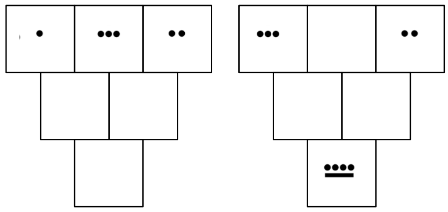


Ukázka pozičního zápisu čísel >19.

Mayské číslice lze velice dobře zařadit do výuky již v prvním ročníku základní školy. V oboru čísel 0–19 jsou velice intuitivní. Výhodou je přehledné počítání po pěti a snadné zařazení manipulativní činnosti, která může pomoci žákům získat vhled do představy počtu. Zajímavé je, že Mayové začínali přirozeně</td></tr>
</table>

počítat od 0, pro kterou měli speciální symbol (tvar jakési mořské lastury). Protože základem číselné soustavy Mayů je číslo 20, je namístě se domnívat, že tito indiáni chodili bosí, protože počítání po pěti a po dvaceti ukazuje na aktivní potřebu používat všechny dostupné prsty (Mareš, 2011). Nevýhodou počítání s mayskými číslicemi je nepravidelnost ve třetím řádu, který neodpovídá druhé mocnině čísla 20, jak by se očekávalo. Jedná se o násobky čísla 360, tedy součinu 20 x 18. Tato nepravidelnost má co dočinění pravděpodobně s mayským kalendářem, ve kterém měl rok 360 (18 x 20) dnů plus 5 závěrečných dní.
Literatura pro učitele
BUREŠ, František, 2004. *Legendy a příběhy Mayů*. Praha: Portál. ISBN 80-7178-883-X.
Literatura pro žáky
KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Návrh aktivit
Zápis mayského čísla Pomůcky: párátka/sirky/dřevěné špachtle + kuličky z modelíny/fazole/knoflíky atp. Aktivita: Žáci modelují diktované číslo, kontrolu provádí ve dvojicích. Učitel pak diktuje, co mají žáci s číslem udělat („přidej/zvětši o“ a „uber/zmenši o“. Později žákům postačí mazací tabulky.
Součtové trojúhelníky s mayskými čísly Pomůcky: manipulativní materiál na tvorbu mayských čísel, dostatečně velká šablona sčítacích trojúhelníků; Využití mayských čísel v součtových trojúhelnících je v 1. a 2. ročníku velmi příhodné, neboť žáci mohou názorně „sesypávat kuličky a čárky“. Pomoci to

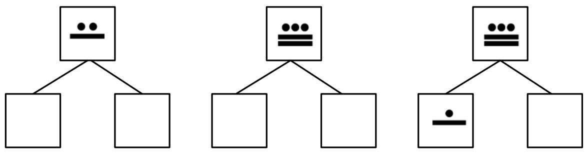
může především žákům, jejichž představa o čísle je zatím na úrovni izolovaných modelů. Pro tyto účely je vhodné pohybovat se v číselném oboru 0–19 (tedy v rámci prvního řádu mayského systému čísel). Žáci pracují nejprve manipulačně, později stačí papír a tužka.



Obr. 11 Ukázka sčítacího trojúhelníku s využitím mayských číslic

Rozklad čísla s mayskými číslicemi

Stejně jako u součtových trojúhelníků usnadňuje polosémantický mayský zápis čísla v oboru 0–19 řešení úlohy. Postup je obdobný jako u součtových trojúhelníků.



Obr. 12 Ukázka úlohy s rozkladem čísla zapsaného v mayském systému

Sčítání a odčítání v řádu „dvacítek“

Žáky s dobrým vhledem do matematiky může učitel již v průběhu druhého ročníku (případně na konci 1. ročníku) seznámit s pozičním systémem mayského zápisu čísel větších než 20. Řád jednotek tedy učitel rozšíří o řád „dvacítek“. Žáci jej opět využívají při aditivních matematických operacích.

Tipy a doporučení

Úvod do mayského systému čísel zajistí učitel opět s mapou světa a modelem časové osy.

Egyptský zápis čísla

Žetony s hieroglyfy

Ročník	2–3
Charakteristika	Žáci rozšiřují své dovednosti v oblasti zápisu čísla.
Cíle	Žáci zapíší číslo egyptskými hieroglyfy. Žáci určí počet jednotek, desítek, stovek, …, které číslo obsahuje.
Úvod pro učitele	

Zápis čísla pomocí egyptských hieroglyfů je velice jednoduchý aditivní systém pracující s mocninami čísla 10. Dobře se hodí k zvědomování desítkové soustavy. Následující tabulka (nebo její zkrácená forma např. 1–1000) může viset ve třídě jako pomůcka.

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
 hůl	 ohnutá hůl	 stočený provaz	 lotos	 ukazující prst	 zvíře	 muž se zdvižе-nýma rukama

Ukázka zápisu čísel:

1367	
1494	
2024	

Pomůcky a příprava
Vytištěná Příloha 6 v dostatečném množství (1x na dvojici žáků). Dostatečné množství žetonů (kolečka kartonu/moosgummi/korku/nařezaných

větví, malé oblázky atp.) s nadepsanými hieroglyfy číslic (9 od každého symbolu do trojice), mapa světa, model časové osy. Dále si učitel připraví lístečky pro skupiny, na kterých bude slovně vypsaný seznam čísel (např. osmi čísel) zapsaných jako počet mocnin čísla 10 (př.: šest stovek, čtyři desítky, osm jednotek). Každá skupina dostane jeden lístek. Je lepší, aby byl každý seznam jedinečný.
Literatura pro děti
KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. *Posvátná čísla: tajné kvality kvantit*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7.
Návrh aktivity
Žetony s hieroglyfy Učitel seznámí žáky s podobou zápisu egyptských znaků pro čísla 1, 10, 100 a 1000 (ev. pro zajímavost i čísla 10 000–1 000 000). Žáci si udělají vlastní přehledovou tabulku do sešitu (Příloha 6): U Vystříhej, sestav a do sešitu nalep vlastní tabulku s egyptskými číslicemi. Žáci se rozdělí do trojic. Každá trojice dostane sadu žetonů s hieroglyfy a lístek se seznamem čísel (viz Pomůcky a příprava). U Úkol do skupiny – učitel žákům předvede, jak bude probíhat práce ve skupině: 1) žák 1: přečte číslo ze seznamu (zapsané jako počet stovek, desítek, jednotek); 2a) žák 2: vyskládá jej pomocí žetonů s hieroglyfy; 2b) žák 3: zapíše jej pomocí arabských číslic; 3) všichni ve trojici zápisy zkontrolují - Žáci si ve trojici pravidelně mění úlohy.

Aktivita může mít nespočet variant. Žáci mohou využívat i další způsoby zápisu čísla (římské číslice, mayské číslice atd.), seznam čísel na lístečku může být zadán graficky tabulkou, které ve svých učebnicích používá nakladatelství H-mat:

100	10	1
●●●● ●●	●●●●	●●●● ●●●●

Žáci si mohou sami vymýšlet zadání.

Tipy a doporučení
Egyptské číslice lze využít ve výtvarné výchově.

Čínské počítací hůlky

a) Zápis čísla pomocí čínských hůlek

Ročník	2
Charakteristika	Žáci rozšiřují své dovednosti v oblasti zápisu čísla.
Cíle	Žáci zapíší dvojciferné číslo pomocí čínských hůlek.
Úvod pro učitele	
Učitel otevře téma zápisu čísel pomocí čínských hůlek skrze postavu dívky Mulan, kterou žáci mohou znát z pohádky zpracované studiem Disney z roku 1998. Mulan je bájná čínská hrdinka, která úspěšně bojuje za svou zem ve válce proti nájezdům válečných kmenů.	
Pomůcky a příprava	
Dostatek hůlek (např. dřevěných špachtlí, špejlí, sirek, nastříhaných brček, …), případně mřížka na papíru vhodné velikosti (podle velikosti hůlek). Mřížku lze vyrobit jednoduše z papíru A4 (hůlky velikosti sirek) nebo A3 (větší hůlky) rozstřižením papíru podélně na poloviny, které pak žáci přehnou na třetiny.	

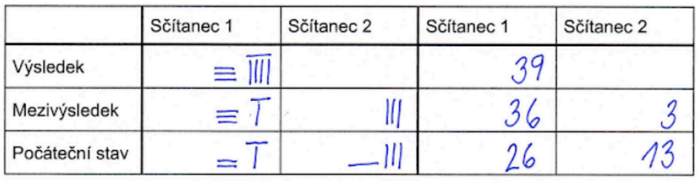
Vystřižený obrázek Mulan (např. Příloha 7).
Zdroje
Více informací zde: https://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Kultury/cina.html LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. *Posvátná čísla: tajné kvality kvantit*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7.
Aktivita
Motivace Učitel ukáže žákům obrázek Mulan. ? Je tu někdo, kdo zná tuto dívku? Jakpak se jmenuje? Z jaké země pochází? ? Kde leží Čína? ⇨ práce s mapou ? Co víte o Číně? Učitel stručně představí Mulan, a protože je hodina matematiky, tak ukáže žákům, jak se v její zemi používaly k počítání hůlky. **Aktivita** U: “Když chce Mulan zapsat čísla, dělá to takto…” Učitel postupně “čárkuje hůlky” pro čísla 1, 2, 3. Pak vyzve žáky, aby pokračovali. Učitel ukáže změnu u čísel 6 a 7, dále pokračují žáci. Obdobně postupuje učitel u desítek 10, 20, … Každý žák dostane hůlky, případně mřížku. Učitel/Mulan postupně diktuje čísla (např. 11, 25, 47, 62, 86, …), která zapisuje na tabuli a žáci je skládají z hůlek. Žáci si čísla vzájemně kontrolují. Učitel/Mulan zadá číslo žákům sedícím v lavici vlevo, žáci vpravo vyskládají číslo o 3 větší. Učitel/Mulan zadá číslo žákům sedícím v lavici vpravo, žáci vlevo vyskládají číslo o 2 menší.
Tipy a doporučení
Žáci vyrobí přehledovou tabulku zápisu čísel čínskými počítacími hůlkami, která

bude viset ve třídě jako pomůcka. Zápisy čínskými hůlkami řadí učitel pravidelně. Později přidá (nadaným žákům dříve) řád stovek.

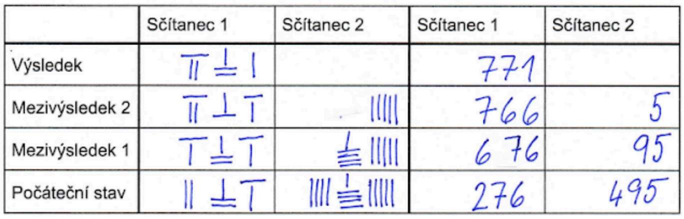
b) Sčítání pomocí čínských hůlek

Počítání pomocí čínských hůlek učitel využije například před vlastním písemným sčítáním o odčítáním. Tento způsob může některým žákům pomoci s pochopením „přidávání a ubírání“ desítek při přechodu přes desítku při písemném sčítání. V navrhované aktivitě učitel nejprve ukáže, jak se postupovalo historicky, tj. od nejvyšších řád, a žáci se pak sami rozhodnou, zda budou postupovat od nejvyšších řádů nebo od jednotek. Je ke zvážení, zda historický aspekt ignorovat a v rámci jednoduchosti rovnou počítat od nejmenších řádů, aby byla zachována jednotnost při následném písemném počítání.

Ročník	2–3
Charakteristika	Žáci se seznámí se způsobem sčítání v systému čínských početních hůlek.
Cíle	Žáci si vyzkouší sčítání dvojciferných čísel s čínskými početními hůlkami. Žáci řeší krátké slovní úlohy. Žáci procvičují sčítání dvojciferných čísel psaných arabskými číslicemi a čínskými početními hůlkami.
Úvod pro učitele	
Učitel navazuje na znalost zápisu čísla pomocí čínských početních hůlek, může opět využít postavu Mulan, jako průvodce. Při sčítání s čínskými hůlkami se postupovalo odspodu nahoru. Postup je naznačen v tabulkách, kde je vše pro jednoduchou ilustraci popsáno i arabskými číslicemi. Nejprve se zapsaly oba sčítance vedle sebe. Sečetly se nejvyšší řády a mezivýsledek se zapsal nad původní zápis. Tak se postupovalo až se dospělo k výsledku.	



Obr. 13 Ukázka sčítání dvojciferných čísel



Obr. 14 Ukázka sčítání trojciferných čísel

Učitel ukáže žákům, jak to dělala Mulan (v souladu s historií nejprve od nejvyšších řádů), ale žáci se mohou rozhodnout, zda budou postupovat stejně nebo raději od jednotek.

Pomůcky

Dostatek hůlek (např. dřevěných špachtlí, špejlí, nastříhaných brček, …), obrázek Mulan, rozstříhané barevné lístky (Příloha 7; jedna tabulka je určena k doplnění vlastními čísly), lepidlo, sešit, psací potřeby.

Zdroje

Více informací zde: https://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Scitani/cina.html

Aktivita

Učitel ukáže žákům sčítání s využitím “čínských hůlek”. Mulan zadává jednoduché slovní úlohy (viz níže). Stejně jako u písemného sčítání postupuje pomalu od nejjednodušších příkladů (dvojciferné číslo s jednociferným bez přechodu/s přechodem přes desítku, dvojciferné s dvojciferným atp.)
Žáci si to zkouší samostatně nebo ve dvojicích. Pracují s hůlkami nebo zápisem na papír. Nadané děti zkouší náročnější zadání.

Tipy na úlohy:

- Mulan má doma 14 šatů a koupila si dalších 5. Kolik má Mulan doma šatů?
- Mulan uvařila velký hrnec polévky. Hosté již snědli 17 porcí. V hrnci zbylo

9 porcí. Kolik porcí polévky Mulan navařila?

- Včera Mulan skončila na konci 39. stránky své oblíbené knížky. Dnes přečetla již 7 stránek. Na kolikáté stránce skončila Mulan své čtení dnes?
- V parku v jezírku napočítala Mulan 11 zlatých rybek a 18 stříbřitých rybek. Kolik rybek napočítala Mulan dohromady?

Sčítání ve dvojici/trojici (pomůcka Barevné lístky)

Žák nebo dvojice žáků si vezme jeden lístek s označením prázdného kruhu/trojúhelníku s čínským zápisem dvou čísel a čísla sečtou uvedeným způsobem.

Druhý/třetí žáky z dvojice/trojice si vezme proužek se stejnou barvou, ale s plným obrazcem, a sečte čísla uvedená v arabských číslicích. Pracuje samostatně.

Oba žáci/všichni tři si porovnají výsledky, které musí být stejné, protože se jedná o totožné příklady zapsané rozdílně. Vrátí lístečky a vezmou si jiné.

Žáci vyzkouší odčítání s čínskými hůlkami.

Tipy a doporučení

- Podobným způsobem lze dětem ukázat odčítání.

<table>
<tr><th></th><th>Menšenec</th><th>Menšitel</th><th>Menšenec</th><th>Menšitel</th></tr>
<tr><td>Výsledek</td><td>= |</td><td></td><td>21</td><td></td></tr>
<tr><td>Mezivýsledek</td><td>= ||||</td><td>|||</td><td>24</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Počáteční stav</td><td>≣ ||||</td><td>= |||</td><td>44</td><td>23</td></tr>
</table>

Obr. 15 Ukázka odčítání dvojciferných čísel

- K procvičování lze využít prázdné tabulky (Příloha 7).
- Na těchto odkazech je vysvětleno také násobení a dělení:
  https://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Nasobeni_papir/cinske_nasobeni_pocetni.html (cit. 2024-02-21)
  https://bimbo.fjfi.cvut.cz/~soc/Deleni/cina.html (cit. 2024-02-21)
  Dělení je velmi podobné systému, kterému se děti při písemném dělení učí.

Domino

V Příloze 8 je můj návrh známé hry domino. Kombinuji v ní osm různých zápisů čísel 1, 5, 10, 50, 100, 500 a 1000. Jedná se o zápis čísel:

- arabskými číslicemi,
- římskými číslicemi,
- babylonskými číslicemi,
- egyptskými hieroglyfy,
- mayskými číslicemi,
- grafickou podobou na počítadle soroban,
- slovně česky,
- slovně anglicky.

Hra tedy předpokládá základní znalost všech uvedených způsobů zápisů čísel, a je proto vhodná pro žáky 3.–5. ročníku, kteří je ovládají.

Hra nutí k přemýšlení, k přepočtům a převodům mezi zápisy, zábavnou formou kombinuje probírané učivo.

Jednotlivé karty jsou v levém spodním rohu opatřeny šedým puntíkem, který pomáhá se správnou orientací karty v případech, kdy to není zcela zřejmé.

3.3.3. Kupecké počty

Matematika byla v dějinách lidstva především nepostradatelným nástrojem pro evidenci úrody, majetku, výpočet daní, dědictví či válečné kořisti, dále sloužila stavitelům a dennodenně obchodníkům.

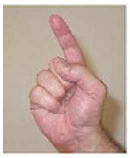
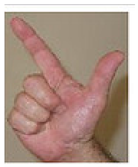
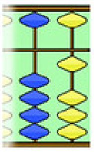
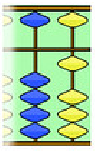
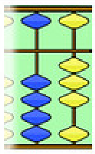
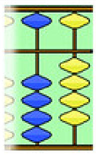
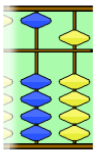
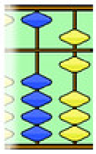
Ke každodennímu rychlému počítání lidé přirozeně využívali své prsty a později začali používat počítadlo – abakus. Tato chytrá pomůcka přetrvala a vyvíjela se celá staletí. Oba způsoby počítání se vyvinuly v promyšlené systémy, které měli svá zeměpisná specifika a také lokální odchylky. Rozlišujeme např. římský abakus, japonský soroban či ruský sčot.

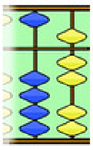
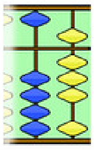
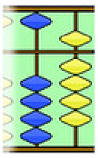
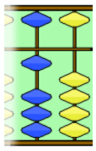
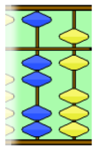
Podle odkazů na internetu lze usuzovat, že obliba používání japonského sorobanu ve světě dnes roste. I u nás jsou již soukromé vzdělávací společnosti, které svůj edukační program staví na počítání na sorobanu. Výhody používání sorobanu ve vzdělávání dětí stručně shrnuje Cusick (2010). Kučerová ve své diplomové práci (2008) popisuje vlastní experimentální zavedení počítání na sorobanu ve 3. ročníku ZŠ. Ve svém postupu zavádění prstového abaku, který imituje počítání na sorobanu, jsem proto vycházela z její metodiky.

Prstový „finger“ abakus

Ročník	1–2
Charakteristika	Žáci používají prsty k rychlému a efektivnímu řešení aditivních operací.
Cíle	Žáci znakují čísla 1–20 pomocí prstového abaku. Žáci provádí aditivní operace v oboru 1–20 dle svých schopností.
Úvod pro učitele	
V době, kdy písmem vládli jen kněží a vzdělaní písaři, kdy se písmo nepoužívalo v každodenním životě, používali lidé k počítání své prsty. Např. obchodníci byli jistě zruční počtáři. Počítání na prstech může být rychlé a efektivní, navíc podporuje jemnou motoriku.	

Prstový abakus, který je zde předkládán, imituje počítání na japonském sorobanu. Následující tabulka ukazuje postavení prstů pro čísla 1-10 a číslo 26. Zároveň je vyobrazeno postavení kamenů pro dané číslo na sorobanu.

					
					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

				
				
7	**8**	**9**	**10**	**26**

Tab. 9 Ukázka číslic na prstovém abaku a sorobanu (obrázky převzaty a upraveny z: https://naturalmath.com/2014/07/abacus-finger-math/).

Pravá ruka ukazuje jednotky, levá pak stejným způsobem, ale zrcadlově, desítky. Prsty ukazovák, prostředník, prsteník a malík mají každý hodnotu jedna, palec má hodnotu pět. Počítání je poměrně intuitivní, ale je třeba jej nacvičit. Obtížnými místy jsou přechody přes 5 a přes 10, kdy je nutné číslo rozkládat. V tomto případě je třeba mít osvojená tzv. doplňková čísla (Kučerová, 2008). Pro číslo 5 je to dvojice 2 a 3 a dvojice 1 a 4. Pro číslo 10 je to pět dvojic: 1 a 9; 2 a 8; 3 a 7; 4 a 6; 5 a 5. Je-li pak dán příklad např. 8+7, tak jej vypočítáme jako 8 + (10 - 3) = 15. Je-li dán příklad 8 + 6, tak je potřeba

dvojitého rozkladu: 8 + (10 - 4) = 8 + 10 - 5 + 1 = 14. Při odčítání se postupuje obdobně: 15 - 7 = 15 - 10 + 3 = 8 a 14 - 6 = 14 - 10 + 4 = 14 - 10 + 5 - 1 = 8. Vypadá to složitě, ale jakmile si to člověk vyzkouší, tak pochopí. Postup je potřeba mít osvojen a částečně zautomatizován, než bude prstový abakus zaváděn ve třídě. Při výuce učitel kombinuje zadávání příkladů ústně a vizuálně. Ústní zadání je bližší historickému počítání a vede k rychlým výpočtům. Psaná forma příkladů pomůže žákům s oslabeným sluchovým vnímáním a žákům s pomalejším tempem práce. Uváděný prstový abakus je vhodný pro počítání v oboru 1–99, což je jeho největší omezení a nevýhoda (znakování pro větší čísla existuje, ale pro jeho složitosti není podle mě vhodný k zařazení do výuky).	
Pomůcky	Příprava
Připravený seznam příkladů dané úrovně k procvičování.	Osvojení techniky prstového abaku učitelem.
Literatura pro učitele	
CUSICK, James, 2010. *The Japanese Soroban: A Brief History and Comments on its Educational Role.* Online, článek. Osaka Abacus Organization. [cit. 2024-02-26]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/259869088_The_Japanese_Soroban_A_Brief_History_and_Comments_on_its_Educational_Role. KUČEROVÁ, Eliška, 2008. *Budování číselných představ dětí ve věku 10–12 let pomocí sorobanu*. Online, diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. [cit. 2024-02-25]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/15470/DPTX_2007_2_11410_OSZD001_73556_0_58438.pdf?sequence=1&isAllowed=y.	
Aktivita	
1. Seznámení se systémem U: *„V dávných dobách, když číst a psát uměla jen hrstka lidí, většinou to byli vzdělaní a velice vážení kněží a písaři, tak lidé používali k počítání prsty.*	

Podobně jako je využívají někteří z vás. Způsobů, jak počítat na prstech bylo ale víc, a my si teď ukážeme, jak může takové počítání taky vypadat."

Učitel předvádí, jak se dá na jedné ruce napočítat do 9. Žáci po něm na prstech jedné ruky ukazují daná čísla, učitel je kontroluje. Učitel diktuje náhodná čísla 1–9 a všichni ukazují na prstech jedné ruky.

- ? Jak ukážeme číslo 2?
- ? Jak ukážeme číslo 5?
- ? Jak ukážeme čísla 6–9? ➜ 6 = palec + 1 prst; 7 = palec + 2 prsty; 8 = palec + 3 prsty; 9 = palec + 4 prsty;

Uvědomění, jak na prstech zobrazit jednotlivé počty je velice zásadní pro další práci. Učitel toto s dětmi procvičuje, dokud si to dobře neosvojí.

2. Jednoduché příklady v oboru 1–9 bez rozkladu 5

Jestliže žáci zvládli základní prstovou sestavu pro čísla 1-9 na jedné ruce, přistoupí učitel k jednoduchým příkladům. Učitel říká příklady, zároveň je ukazuje na prstech, žáci si to zkouší taky. Učitel zadává příklady tak, aby byly přičteny/odečteny hodnoty prstů, které jsou k dispozici, tedy aby nebylo nutné rozkládat 5, a zároveň pokračuje neustále dál. Př.:

- 1 + 2 = 3; 3 + 5 = 8; 8 + 1 = 9; 9 - 5 = 4 …

3. Příklady v oboru 1–9 s rozkladem 5

Učitel žáky nejprve navede k tomu, aby odhalili, že číslo 5 má dvě sady tzv. doplňkových čísel a to dvojici 2 a 3 a dvojici 1 a 4. Učitel to se žáky procvičí na jednoduchém odčítání těchto čísel od 5.

Doplňková čísla učitel/žáci zpracuje/zpracují do vizuální pomůcky.

Učitel zapíše na tabuli příklad 3 + 3 = (žáci doplní 6). Učitel ukáže žákům postup na prstech: zvedne 3 prsty (ukazovák, prostředník, prsteník = číslo 3); nyní může přidat buď jednu jednotku (malíček) nebo celou pětku (palec); použije tedy palec a protože ví, že doplňkovým číslem 3, kterou má přičíst, je 2, tak 2 prsty odečte; celá operace je tedy: 3 + (5 - 2) = 6.

Žáci s učitelem toto procvičují na prstech (zápis jen pro učitele):

2+3=2+(5-2)=5	4+1=4+(5-4)=5
2+4=2+(5-1)=6	4+2=4+(5-3)=6
3+2=3+(5-3)=5	4+3=4+(5-2)=7
3+4=3+(5-1)=7	4+4=4+(5-1)=8

Když si toto žáci procvičí, ukáží si to samé při odčítání.
Takto učitel se žáky procvičuje sčítání a odčítání v oboru 1–9 po nějakou dobu.

- Kdo si toto rychle osvojí, může si s někým dalším vzájemně ve dvojici/trojci dávat příklady o 3 případně více členech. Př.: Každý žák vymyslí svůj příklad, zapíše jej na papír a vypočítá (např. 3 + 6 - 4 = 5). Jeden zadá svůj příklad (bez výsledku) slovně druhému, který jej hned počítá pomocí prstového abaku a řekne výsledek. Pak si role prohodí.

4. Příklady v oboru 1–20 bez rozkladu 10

V další fázi seznámí učitel žáky se znakováním čísel až do 20. Společně procvičují příklady bez rozkladu čísla 10. Přes 10 se tedy žáci dostanou pouze přičtením 10 a zpátky opět jejím odečtením (např. 4 + 10 = 14; 14 + 3 = 17; 17 - 10 = 7).

- Jak byste počítali příklad 7 + 5 = ?

5. Příklady v oboru 1–20 s rozkladem 10

- ? Které dvojice doplňkových čísel čísla 5 máme?
- ? Jak budou vypadat dvojice doplňkových čísel čísla 10?
- → 10 má tyto dvojice doplňkových čísel: 1 a 9; 2 a 8; 3 a7; 4 a 6; 5 a 5;

Učitel/žáci doplňková čísla opět zpracuje/zpracují do vizuální pomůcky.

Učitel procvičuje sčítání a odčítání (obdobně jako u rozkladu čísla 5). Př.:

9 + 1 = 9 + (10 - 9) = 10	9 + 6 = 9 + (10 - 4) = 15
9 + 2 = 9 + (10 - 8) = 11	9 + 7 = 9 + (10 - 3) = 16
9 + 3 = 9 + (10 - 7) = 12	9 + 8 = 9 + (10 - 2) = 17

9 + 4 = 9 + (10 - 6) = 13

9 + 5 = 9 + (10 - 5) = 14

9 + 9 = 9 + (10 - 1) = 18

8 + 8 = 8 + (10 - 2) = 16

Pozor ❗ Prozatím se učitel vyhýbá příkladům, kdy je nutné počítat jak s rozkladem 10, tak s rozkladem 5. Jsou to následující příklady:

Sčítání s rozkladem 10 i 5	
6 + 6	5 + 6
7 + 7	5 + 7
6 + 7; 7 + 6	5 + 8
6 + 8; 8 + 6	5 + 9

Odčítání s rozkladem 10 i 5	
12 - 6	11 - 6
14 - 7	12 - 7
13 - 6; 13 - 7	13 - 8
14 - 6; 14 - 8	14 - 9

6. Příklady v oboru 1–20 s rozkladem 5 i 10

Příklady uvedené v tabulce výše, trénuje učitel se žáky nakonec.

⚡ Žáci zkouší počítat v oboru 1–99.

Tipy a doporučení

- Prstový abakus využívá učitel v rámci matematických rozcviček nebo při změně činnosti pro aktivizaci žáků. Je vhodné mít dopředu připravené příklady (jednodušší se dvěma členy, středně těžké se třemi až čtyřmi členy, obtížné s pěti a více členy).
- Hra na historické tržiště plné cizinců – Žáci si připraví historické peníze. Každá dvojice žáků si připraví jeden stánek se vzácným zbožím. Jeden z dvojice zůstane ve stánku jako prodavač, druhý se vydá nakupovat. Protože se na trhu sešli samí cizinci z dalekých končin, tak si nerozumí a používají pouze prstový abakus ke smlouvání o ceně zboží.
- Battle pro soutěživé žáky:
    - prstový abakus x pamětné počítání
    - ústní zadání x psané zadání

Výroba abaku

Ročník	1–3
Charakteristika	Žáci si vyrobí vlastní abakus a vyzkouší na něm principy počítání, které si osvojili při počítání na prstovém abaku.
Cíle	Každý žák si podle postupu vyrobí vlastní abakus.
Úvod pro učitele	

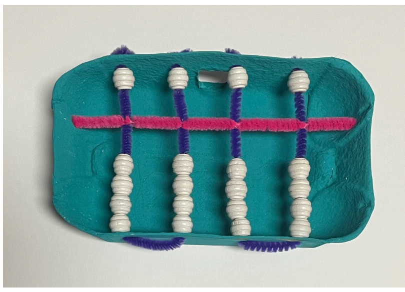
Následující činnost vede k vytvoření vlastního abaku, takového zkráceného sorobanu. Skutečný soroban mívá nejčastěji 21 svislých tyček s korálky, existují ale i větší (až 31 tyček) nebo menší (pouze 13 tyček). Pro účely žáků 1.–3. ročníku postačí vyrobit abakus s 4–5 řády. Výroba není složitá a žáci získají funkční výrobek. Je výhodou, pokud učitel navazuje na osvojený prstový abakus. V takovém případě, mohou žáci svůj výrobek ihned vyzkoušet v praxi. Navíc, pokud je to láká, si mohou vyzkoušet počítat i s vyššími řády.

Než se žáci do počítání na vlastním abaku pustí, je potřeba, aby si osvojili, jak abakus držet (jak ho orientovat) a jaké je postavení korálků před počítáním.

Postavení abaku. Abakus držíme korálky s hodnotou 1 směrem dolů nebo k sobě, s hodnotou 5 nahoru nebo od sebe.

Pozice korálků na začátku. Před každým novým počítáním je nutné mít korálky ve výchozí pozici. Pro korálky s hodnotou jedna je to spodní strana abaku, pro korálky s hodnotou 5 je to horní okraj abaku. Žádný korálek se tedy ve výchozí pozici nenachází u lišty/drátku dělícího tyto jednotky a pětky.

Další doporučení k počítání je možné vyčíst v práci Kučerové (2008).



Obr. 16 Ukázka vyrobeného abaku. Korálky jsou ve výchozí pozici (foto autor).

Pomůcky
- vhodná krabička (např. víko od krabice na 6 vajíček, krabička od malé bonboniery (Toffife apod.) - temperové barvy (nemusí být) - chlupaté nebo obyčejné drátky, niť - ostré nůžky nebo dírkovač - dostatek korálků (při používání chlupatých drátků by měly mít větší díru, aby po drátku snadno jezdily) – na jeden číselný řád je potřeba 5 korálků
Literatura
CUSICK, James, 2010. *The Japanese Soroban: A Brief History and Comments on its Educational Role.* Online, článek. Osaka Abacus Organization. [cit. 2024-02-26]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/259869088_The_Japanese_Soroban_A_Brief_History_and_Comments_on_its_Educational_Role. KUČEROVÁ, Eliška, 2008. *Budování číselných představ dětí ve věku 10-12 let pomocí sorobanu*. Online, diplomová práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. [cit. 2024-02-25]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/15470/DPTX_2007_2_11410_OSZD001_73556_0_58438.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
Postup
1. Do krabičky uděláme díry na provlečení drátků. 2. Krabičku nabarvíme dle libosti. 3. Když je krabička suchá, provlečeme dírkami drátky, na které navlečeme korálky, a drátky zvenku krabičky zajistíme. 4. Přidáme drátek rozdělující pětky od jednotek. Je lepší jej zafixovat (např. jej nití přivážeme k drátkům s korálky.
Tipy a doporučení
Žáci využívají svůj abakus ve výuce jako pomůcku.

3.3.4. Kde se vzala nula

<table>
<tr><td>Ročník</td><td>4–5</td></tr>
<tr><td>Charakteristika</td><td>Celodenní tematická výuka se širokým mezipředmětovým přesahem.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cíle</td></tr>
<tr><td colspan="2">Žáci vlastními slovy uvedou, čím je nula zajímavá a zvláštní - matematicky i historicky.
Žáci popíší, jak lze na nulu pohlížet z hlediska matematického, jazykového, historického, zeměpisného a uměleckého.
Žáci dramatizují rozšíření nuly přes arabský svět do Evropy.
Žáci reflektují své dojmy a prožitky z tematické výuky do podoby výtvarného či literárního díla.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úvod pro učitele</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z historického hlediska se budou žáci zamýšlet, jaký symbol pro nulu používali lidé ve starém Egyptě, v Mezopotámii či Římě. Je třeba zvážit všechny historické systémy zápisu čísla, se kterými se žáci doposud seznámili. Např. u klínového písma mohou uvést, že symbol pro nulu existoval (např. dva šikmé klíny), ale v tom případě je nutné uvést na pravou míru, že se jednalo pouze o symbol pro prázdnou pozici, aby se jim lépe četl číselný zápis, který byl již částečně poziční. Nulu jako číslo v této době lidé neznali.

V textu o putování nuly do Evropy jsou uvedeni “kamarádi” indické číslice. Jedná se o naše arabské (či přesně indo-arabské číslice). Učitel může žáky upzornit na vliv arabských učenců, kteří odhalili výhody používání těchto číslic a kteří je dále šířili. Díky tomu je nazýváme arabské číslice. Do Evropy se dostávaly pomalu z více směrů, zpočátku jim ale nula chyběla. Než se však ujaly v praxi, trvalo to velice dlouho. Evropa k nim byla velmi nedůvěřivá – římské číslice zde byly dobře zakořeněné a k tomu pak přibyla nula, kterou lidé neznali a vnímali ji jako něco podezřelého nebo dokonce nebezpečného.</td></tr>
</table>

K rozšíření arabských číslic včetně nuly v Evropě velmi pomohl na začátku 13. století Leonardo Pisánský, známý spíše jako Fibonacci. Ten se s arabskými číslicemi a nulou seznámil v mládí v severní Africe, kam doprovázel svého otce na obchodních cestách. Arabské číslice nadšeně přijali zejména obchodníci, neboť počty v arabském číselném systému byly výrazně jednodušší, než v dosavadním římském. I tak to trvalo dalších 100 let než začaly být arabské číslice společností akceptovány. Nula již byla součástí číselné řady, byla akceptována jako počet, ale teprve až v následujících staletích (od 16. století do současnosti) se stala předmětem zájmu mnoha matematiků, kteří se s ní učili postupně pracovat a objevovali její skryté možnosti.	
Pomůcky a příprava	
1. VH	Vytištěné PL (Příloha 9; jeden do dvojice stačí, lze oboustranně kromě poslední stránky, která je určena k rozstřižení – pětilístek pro každého), Příloha 10 - tabulky početních operací (do dvojice), model časové osy.
2. VH	Vytištěné texty (Příloha 10) na stanoviště Pythagora a Aristotela (každý v několika kopiích), čtvercová síť a kameny/fazole (několikrát na stanoviště P.), encyklopedické/výkladové slovníky (1–3 ks na stanoviště A.), model časové osy.
3. VH	Mapa/atlasy, model časové osy, vytištěná a rozstříhaná příloha šunja 1x (nebo vlastní větší verze), předmět/y, jenž představují spojitost s Indií (pro roli indického matematika). Vytištěné texty/zadání pro expertní skupiny (každé několikrát) a vytištěná skládanka o původu slova šifra (několikrát), etymologický slovník (nebo připravený lísteček o původu slova nula na lístečku), překladové slovníky z několika jazyků.
4.–5. VH	Různorodý výtvarný materiál a pomůcky na Vv.
Literatura pro žáky	

DEMLOVÁ, Zuzana, 2018. *Pohádky o kolečkách a nekonečnu*. Praha: Baobab. ISBN 978-80-7515-086-8.

KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Scénář dne

První vyučovací hodina

Evokace

Učitel přečte žákům následující báseň, název vynechá.

Báseň o nule *(Ludvík Středa)*

Jistý vědec z Istanbulu
napsal křídou na stůl nulu.

Co tvrdili ze vsi strejci?
Podobá se nejvíc vejci!

Co tvrdili učitelé?
Hm, hm … je to podezřelé!

Co tvrdili obchodníci?
Máte skvělou náušnici!

Co tvrdili nevzdělanci?
Je to půlnoc v bílém ranci!

Co tvrdili mudrci?
Je to kámen na srdci!

Když učenci s neučenci
pořádali konferenci,
přišel na ni naštěstí,
žák Ali z předměstí.

Bez velkého mudrování
řekl: Je to nula, páni!

Po tom, co jim sdělil Ali,
učenci se objímali,
neučenci tancovali,
ostatní se týden smáli.

A když se dost nasmáli,
nulu zase smazali.

? Jaký byste navrhli název pro tuto báseň a proč? – Zápis do PL.

? Zkuste rozvést, o čem báseň pojednává? – Ve dvojicích, pak sdílení se třídou.

Krátká řízená diskuse, učitel s žáky při tom vytvoří na tabuli myšlenkovou mapu básně. Žáci si zapisují svojí myšlenkovou mapu do PL.

U: *„My používáme pro zápis čísel arabské číslice. Pro nulu máme symbol 0. Známe ale i jiné systémy zápisu čísel např. římská čísla, egyptské symboly pro čísla, babylonská čísla. Měli staří Římané, Egypťané či Babyloňané symbol pro nulu? Známe ho?“*

➔ Symbol pro nulu v těchto starých kulturách chyběl. Nulu neznali.

Společnou prací se žáci pomocí modelu časové osy zorientují, o jaké době je v souvislosti s těmito kulturami řeč.

➔ Oni nulu neznali, my ji známe.

❓ Kde se vzala nula?

Uvědomění

❔ Co víme o nule? Jak se s nulou počítá?

Žáci pracují nejdříve ve dvojicích, své nápady zapisují do PL. Sdílení myšlenek ve třídě.

Žáci obdrží tabulky početních operací (Příloha 10), které rozstříhají. Společně s učitelem prochází jednotlivé početní operace a skládají tabulku do podoby viz níže.

⚡ Zájemci pracují samostatně.
⚡ Žáci tvoří konkrétní příklady k uvedeným situacím.

Početní operace bez nuly	Výsledek	Početní operace s nulou	Výsledek
číslo **a** + číslo **b**	**jiné číslo**	číslo **a** + nula	číslo **a**
číslo **a** - číslo **b**	**jiné číslo**	číslo **a** - nula	číslo **a**
číslo **a** + číslo **a**	**jiné číslo**	nula + nula	nula
číslo **a** - číslo **a**	**jiné číslo**	nula - nula	nula
číslo **a** · číslo **b**	**jiné číslo**	číslo **a** · nula	nula
číslo **a** : číslo **b**	**jiné číslo**	číslo **a** : nula	**nelze** ❌

➔ NULA SE CHOVÁ JINAK, než jakékoliv jiné číslo!

Druhá vyučovací hodina

Počátky civilizací

U: *„Odpradávna se lidé snažili hledat vysvětlení přírodních jevů, příčin různých událostí a také hledali odpovědi na základní lidské otázky, kde se vzal svět, život, člověk a jaký to má všechno smysl. Každá starodávná kultura měla svůj vlastní výklad o stvoření světa. Naše kultura (kultura západního světa) staví na poznání starých Řeků, kteří si vznik světa vysvětlovali takto:“*

„... na počátku věků panovala jen ***temnota, temná propast****. Neexistoval žádný vesmír ani rozměr: byl tu jen Chaos. V jistém okamžiku, nikdo neví kdy a proč, se zjevila Matka Země, Gaia. Opanovala většinu Chaosu a snažila se vnést pořádek do jeho prostoru tím, že stvořila Úranos – hvězdnou oblohu – a oddělila moře od světadílů, ze kterých pozvedla hory.“* (Andreani, 2017, s. 6)

Učitel zdůrazní počáteční temnotu a propast.

U Práce ve dvojicích na stanovištích „Pythagoras“ a „Aristoteles“. Pro větší plynulost práce lze mít každé stanoviště 2x.

Společná rekapitulace práce na stanovištích:

➔ Pythagoras viděl v číslech tvary.
? Mohly bychom nule přisoudit nějaký tvar?
➔ “Nic” pro ně (staré Řeky) nebylo číslo.
➔ Aristoteles nepřipouštěl, že by existovalo “nic”.
? Kdo je to filozof? (Žáci, kteří význam slova hledali, jej vysvětlí ostatním.)

Třetí vyučovací hodina

? Kde se tedy vzala nula?

Učitel si sedne s žáky na koberec do kroužku k rozprostřené časové ose, připravená je i mapa světa. Učitel bude představovat indického učence Brahmaguptu a bude žákům vyprávět o svém díle Brahmasputasiddhanta.

U: *„Milí žáci, mé jméno je Brahmagupta a přicházím za vámi ze země, kterou dnes znáte jako Indii. Žil jsem již dávno, ale nejsem tak starý, jako třeba Pythagoras nebo Aristoteles. Od dětství mě fascinuje nebe a vesmír. Noční obloha je tak krásná a zdá se, že vesmír nikde nekončí, že je nekonečný! Nebo je to jen vnitřní slupka nějaké koule, ve které je celá naše Země uzavřená, jak si to myslel onen slavný Řek Aristoteles? Nemyslím si. Naopak si myslím, že to byl tak trochu strašpytel. Vždyť on se vám, děti, bál ‘ničeho’! A taky si myslel, že nic nemůže pokračovat pořád dál a dál a dál. Ale jestliže podle něj všechno někde končí, tak co je za tím koncem, když tam podle něj nemůže být ‚nic‘? Na to už nepomyslel. Ale co, každý se něčeho bojí, že? Nechci, aby to vypadalo, že se mu vysmívám. Vlastně chápu, že to nic, ta prázdnota, my v Indii jí říkáme ‚šunja‘, může být vlastně docela strašidelná. Ale v naší zemi na to koukáme jinak. My věříme, že vesmír a nekonečno vznikly ze šunji a zároveň je šunja nejvyšším cílem lidského snažení. Když tělo zemře, náš duch se vznese a připojí se k nekonečnému vědomí, které je všude a nikde. A to je Nekonečno a to je Šunja. Možná se vám to zdá zvláštní, ale tak to máme. No ale já jsem vám tu vlastně chtěl povídat o svém díle. Protože mám rád vesmír, stal se ze mě astronom, a protože jsem chtěl popisovat dráhy planet, stal se ze mě matematik, protože bez matiky to nešlo. Ale matematika je krásná a myslím, že na mě budete v budoucnosti vzpomínat spíše jako na matematika, než jako na astronoma. Napsal jsem totiž knihu, ve které jsem popsal, jak své znalosti o vesmíru, tak své znalosti o matematice. Kousíček vám přečtu: ‘Dluh zmenšený o šunju je zase dluh. Zisk zmenšený o šunju je zase zisk. Šunja zmenšená o šunju je zase šunja. Součin zisku nebo dluhu se šunjou je šunja. Součin šunji se šunjou je šunja.’ Přijde vám to taky tak zajímavé, jako mě? Myslím, že na západě budou z naší šunji ještě dlouho úplně paf!“*

Učitel opustí roli Brahmagupty.

? Kde Brahmagupta žil? (Vybraní žáci vyhledají a ukáží na mapě.)

? O čem to Brahmagupta na konci mluvil. Rozuměli jste mu?

- Učitel dá krátký prostor žákům, aby mohli vyjádřit své myšlenky.

Učitel zopakuje domnělou citaci a ukazuje při tom jednotlivé fráze v kombinaci se současnými matematickými symboly na připravených lístečcích.

? Co myslí Brahmagupta dluhem?
? Co myslí Brahmagupta ziskem?
? Co je to tedy asi ta šunja?

➔ Jedná se o principy počítání s nulou (jako při aktivitě v první hodině).

U Žáci se dle vlastních preferencí rozdělí do 3 expertních skupin a pracují dle instrukcí. Není nutné, aby byly skupiny stejně velké. Spolupráce je vítána.

1. Dějepisně-dramatická skupina
   U Žáci si přečtou text o příchodu nuly do Evropy a nacvičí si jej jako scénku. Možné role k obsazení: vypravěč, nula, Brahmagupta, papež Silvestr II., Fibonacci a jeho otec, Fibonacciho současníci, … (záleží na počtu žáků ve skupině).

2. Historicko-matematická skupina
   U Žáci pomocí výpočtů odhalí rok vydání knihy Brahmasputasiddhanta. Při výpočtu vychází z letopočtů zapsaných římskými číslicemi, které se ve středověké Evropě běžně používaly.
   ⚡ Doplňující úkol, když ostatní ještě pracují: Najdi na mapě Indii a města Bagdád a Pisa. Spoj je pomyslnou čarou, která bude představovat cestu nuly a jejích přátel do Evropy.

3. Historicko-jazyková skupina
   U Žáci pracují se slovem nula po jazykové stránce a pátrají po jeho historii.

Je-li čas, žáci z každé expertní skupiny začnou ostatní seznamovat se svými výsledky své práce ve skupině, případně bude dokončeno další vyučovací hodinu.

Čtvrtá – pátá vyučovací hodina

U: *„Dnes jsme si povídali o nule z různých úhlů pohledu. Z matematického, historického, jazykového i zeměpisného. Zamysli se nad tím, co v tobě nyní nula vyvolává.“*

U Každý žák si zapíše svůj pětilístek na slovo nula.

U Kreativní úkol - možnost volby

a. výtvarný úkol:

Vyber si libovolnou dostupnou výtvarnou techniku a ztvárni nulu v umělecké výtvarné dílo.

- Žák své dílo při prezentaci uvede několika větami.

b. literární úkol:

Napiš příběh či báseň, ve kterém bude hrát nula významnou roli.

Jsou-li žáci rychle hotovi a jejich práce odpovídá mírou a kvalitou očekávaným výstupům, mohou pracovat na úkolech toho dne, které sami nezpracovávali. Další možností je nabídnout žákům knihy a články, kde se rozvíjí koncept nuly či nekonečna.

Reflexe

Učitel se s žáky vrátí k úvodní básni a k myšlenkové mapě o ní. Společně prochází jednotlivé skupiny obyvatel (strejci, učitelé, mudrci, …) a žáci vlastními slovy vysvětlují jednotlivé pasáže (Proč učitelé tvrdili, že je to podezřelé? Co znamená půlnoc v bílém ranci a co kámen na srdci? atd.).

H Žák se zamyslí a řekne, co ho ten den nejvíce oslovilo.

H Žáci zhodnotí výuku toho dne pomocí 3stupňové škály (semafor, palce, body 1–3 atp.).

Tipy a doporučení

V dalších hodinách se žáci mohou zamýšlet, jaké by to bylo, žít bez nuly, nebo k čemu byla nula vlastně užitečná (jak je zmíněno v textu k dramatizaci). V hodině informatiky lze navázat binární soustavou a využitím 0 a 1, v matematice úlohami na Fibonacciho posloupnost.

3.3.5. Vlastnosti čísel

Teorie čísel je nadmíru zajímavou, záhadnou a vzrušující disciplínou. Věděli to již staří Řekové v čele s velkým Pythagorem a nespočet dalších velikánů matematiky, stejně jako to věděli či tušili naši předci dávno před nimi, když vyrývali shluky zářezů do zvířecích kostí. Čísla měla vždy magickou moc nás očarovat a je na nás nechat žáky nahlédnout pod tuto kouzelnou pokličku a nechat je pocítit a zažít to tajemno, které nás spojuje s předky napříč dějinami lidstva.

Sudá x lichá a Pythagoras

Ročník	1–2
Charakteristika	Navrhovaná aktivita kombinuje dramatizaci historické postavy, manipulativní činnosti a vede žáky k abstraktnímu uvažování.
Cíle	Žáci vysvětlí, jaký je rozdíl mezi sudým a lichým číslem, a uvedou příklad každého z nich. Žáci zakreslí obraz sudého a lichého čísla. Žáci se seznámí s postavou Pythagora.
Úvod pro učitele	
Seznámení a uchopení pojmů sudá – lichá se může v hodinách matematiky proměnit ve vzrušující setkání s věhlasným Pythagorem, otcem matematiky a prvním filozofem. Motivace je tím zajištěna. Představme si, že se k uchu slavného matematika donesla zvěst o zajímavé úloze, kterou žáci řešili předchozí hodinu. Ta mohla být následující: Rozděl daný počet předmětů na dvě stejné části. Žáci při tom ale narazili na úlohu, kde to nebylo možné. Různí žáci si poradili různě, někomu jeden předmět zbyl, jiný jeden přidal, další chtěl jeden předmět půlit a žáci byli zapálení do hledání správného řešení. Cílem návštěvy Pythagora je seznámit žáky se sudostí a lichostí čísel. Více o Pythagorovi např. zde: https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1293/pythagoras	
Pomůcky	

- převlek Pythagora/loutka/maňásek
- mapa Evropy/světa
- model časové osy
- dostatek kamenů vhodné velikosti (přírodní nebo např. hrací kameny či jiná náhražka)
- čtvercová síť s čtverci 4 x 4 cm (dostupná např. zde: https://www.h-ucebnice.cz/predlohy)
- nůžky
- trhací lístečky v bloku ve dvou barvách.

Literatura pro učetele

Při vymýšlení této úlohy jsem se inspirovala v těchto publikacích:

GUILLEMOT, Louise, 2022. *Pythagoras a velký útěk čísel*. Ilustroval Anna GRIOT, přeložil Jolana KUBÍKOVÁ. Monáda (Pink Box). V Praze: Pink Box. ISBN 978-80-908532-1-8.

BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard (ed.), 1994. *Historie matematiky I: Seminář pro vyučující na středních školách*. Jevíčko, srpen 1993. Brno: JČMF.

Literatura pro žáky

LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. *Posvátná čísla: tajné kvality kvantit*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7.

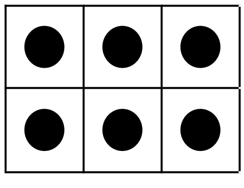
Scénář

Pythagoras (učitel/loutka/maňásek) žákům vypráví o svém pojetí světa skrze čísla. Své vyprávění doplňuje o interaktivní rozhovor se žáky u mapy, modelu číselné osy či svých kalkuli (kamínků).

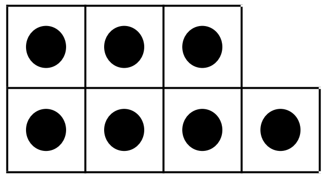
Osnova vyprávění s úkoly

1. Pythagoras se představí (odkud přichází, kdy žil a čemu se v životě věnoval)
    - žil v 6. století př. n. l. (cca 580–500 př. n. l.)
    - narodil se na ostrově Samos ⇨ cestoval ⇨ usídlil se v jihoitalském městě Kroton, kde založil svou školu
    - věnoval číslům, hudbě a hledání odpovědí na věčné lidské otázky

2. Pythagoras vypráví o magické moci čísel
   - jedna = představuje jednotu a celistvost
   - dva = obraz jinakosti, změny, odvahy a dobrodružství; ano i ne, rub a líc věcí, černá a bílá, dobro i zlo
   - tři = setkání jedničky a dvojky; představuje čas, všechno, co plyne a co má začátek, prostředek a konec
   - čtyři = hmota a čtyři živly: oheň, voda, země, vzduch
3. Pythagoras na kamenech (calculi) ukazuje sílu čísla deset (tetraktys)
   - *„Co se stane, když první čtyři čísla sečteme?“*
   - číslo deset = nejdokonalejší, je počátkem a průvodcem života božského i pozemského; má v sobě veškerou moc a vše z ní pochází; měli pro ně speciální jméno tetraktys
4. Pythagoras skládá modely sudých a lichých čísel
   - šest kamenů vyskládá do dvou řad proti sobě – každý kámen má svého „kamaráda“
   - sedm kamenů vyskládá do dvou řad proti sobě – jeden kámen nemá „kamaráda“ – je lichý ⇨ celé číslo je liché
   - sudá čísla – každý kámen má svého „kamaráda“
5. **U** Žáci skládají modely sudých a lichých čísel z kamenů
   - jednotlivě nebo ve dvojicích
   - vyskládaný model čísla zapíší číslicemi na lístečky - lístečky na sudá a lichá čísla jsou barevně odlišeny
   - všechny lístečky se zapsanými čísly žáci seřadí do vzestupné číselné řady; čísla, která chybí, žáci doplní
   - ➔ sudá a lichá čísla se střídají
6. **U** Žáci namalují každému číslu jeho obraz na papír a vystřihnou jej
   - př.:



obraz čísla 6



obraz čísla 7

7. Pythagoras klade žákům otázky a modeluje je pomocí obrazů čísel, které žáci vytvořili.

   U: *„Pozor, nyní si vyzkoušíme počítání s čísly bez čísel!“*

   - ? Jaké číslo mi vyjde, když sečtu dvě sudá čísla?
   - ? Jaké číslo mi vyjde, když sečtu dvě lichá čísla?
   - ? Jaké číslo mi vyjde, když sečtu sudé a liché číslo?
   - ? Jaké číslo mi vyjde, když sečtu sudé číslo a dvě lichá čísla?
   - ? Jaké číslo mi vyjde, když sečtu tři sudá čísla?
   - ? Platí to vždy? Proč?

- Pythagoras otázky přizpůsobuje žákům, obměňuje je podle potřeby (např. odčítání apod.)

8. Žáci si pokládají obdobné otázky ve dvojicích/trojicích, popř. modelují další čísla z kamenů a tvoří jejich obrazy
9. Pythagoras se loučí
   - P. žáky pochválí za příkladnou práci
   - P. se zeptá, zda a co se žáci naučili nového
   - P. žákům poděkuje, rozloučí se a bude se těšit na další shledání

Tipy a doporučení

Počítání se sudými a lichými čísly je vhodné se pravidelně vracet, např. formou krátkých rozcviček na začátku hodin nebo jako změnu činnosti k získání pozornosti žáků, jsou-li unavení či roztěkaní.

Obrazy čísel mohou být námětem do výtvarné výchovy.

Čísla, tvar a model

Látka o figurálních číslech se v některých učebnicích objevuje, avšak nebývá vždy zasazena do historického kontextu, což je podle mého názoru škoda. Touto látkou se dá navazovat na aktivitu Sudá x lichá a Pythagoras. Minimálně v nižších ročnících lze rozhodně zachovat manipulační charakter aktivity s využitím kamenů a tvorbou obrazů čísel při využití příběhu o Pythagorovi a jeho žácích.

Eratosthenovo síto

Ročník	2–3
Charakteristika	Žáci přímou aplikací historického pravidla objevují prvočísla.
Cíle	Žáci popíší, jak vzniká Eratosthenovo síto. Žáci použijí Eratosthenovo síto při hledání prvočísel. Žáci uvedou vlastnosti prvočísel.
Úvod pro učitele	

Eratosthenes (276–194 př. n l.) je další zajímavou osobností ze starého Řecka, se kterou stojí za to se v hodinách matematiky seznámit. Eratosthenes pocházel z řecké osady Kyréna v severní Africe, studoval v Athénách a v Alexandrii, kde se později stal i správcem tamní slavné knihovny. Eratosthenes se zabýval prvočísly a přišel s velice elegantním postupem, jak zjistit všechna prvočísla v daném oboru.

Více informací např. zde:
https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/vedec/1131/eratosthenes

Prvočíslo

- číslo větší než 1, které je dělitelné pouze jedničkou a sebou samým
- je první v řadě jeho násobků
- z výše uvedené podstaty nemůže být jednička prvočíslem (byla by jediným prvočíslem a celá oblast matematiky založená na práci s prvočísly by se zhroutila a nedávala by smysl)

Pro aktivitu, kdy žáci následují daný postup k nalezení prvočísel, je primárně zvolen číselný obor 1–30, aby nebyl příliš dlouhý (aby tabulku zvládl dokončit každý žák) a aby žáci alespoň u prvních prvočísel (2; 3; 5; 7) nalezli tři a více násobků (z toho u čísla 2 neskončí číslem 20 – žáci vidí, že řada násobků pokračuje dál za 10 · 2). Žáci si však mohou zvolit i tabulky s větším rozsahem

(1–60; 1–100) nebo tabulky zapsané římskými číslicemi podle toho, na co si troufnou. Pokud mají žáci potřebu, mohou si číselný obor a tedy horní hranici zkoumaných čísel nastavit sami.
Pomůcky
Kuchyňské síto (cedník), vytištěná Příloha 11 (tabulky v dostatečném množství), model časové osy.
Motivace
Učitel ukáže žákům kuchyňské síto. U: *„Co myslíte, k čemu to budeme dneska potřebovat?“* Žáci sdílí své nápady. U: *„Pojďme na to přijít v následujícím úkolu.“*
Aktivita

Žáci spolu s učitelem, samostatně nebo ve dvojicích pracují s tabulkou 1–30.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

Zájemci si mohou vzít tabulku s římskými číslicemi anebo prázdnou tabulku a čísla si nejprve sami doplní v libovolném systému zápisu.

U Postupujte podle následujících instrukcí:

1) Začerni číslo 1.
2) Zakroužkuj číslo 2 a škrtni všechny jeho násobky v tabulce.
3) Zakroužkuj další nejmenší číslo a škrtni všechny jeho dosud neškrtlé násobky.
4) Opakuj bod 3 dokud neprojdeš všechna čísla v tabulce.

Žákům vyjde následující tabulka:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

? Co jsou ta zakroužkovaná čísla?

? Co o nich můžeme říct?

Zpět k tabulce:

? Proč jsme začernili jedničku?

? Jak bychom čísla v kroužku mohli pojmenovat?

- Záleží na uvážení učitele, zda žákům hned řekne termín prvočíslo, nebo jestli budou dočasně užívat vlastní termín.

? Dokázali bychom najít i další čísla v kroužku?

Vyzkoušejte postup s tabulkou 1–60 nebo se stovkovou tabulkou.

Reflexe

Hra šibenice – žáci hádají jméno Eratosthenes.

U: *„Eratosthenes byl řecký matematik, který postup pro hledání ‚čísel v kroužku‘, který jsme si vyzkoušeli, vymyslel a jmenuje se po něm Eratosthenovo…* (učitel může ukázat na kuchyňskou pomůcku) *…síto. Žil před více jak 2200 lety.“*

Žáci na modelu časové osy ukáží, o kterou dobu se přibližně jedná.

Tipy a doporučení

Výslednou tabulku s čísly v kroužku mohou žáci zpracovat výtvarně ve velkém formátu a spolu s obrázkem Eratosthena ji vystavit ve třídě.

Fibonacciho posloupnost

Na Fibonacciho posloupnost jsem při listování současnými matematickými učebnicemi pro 1. stupeň základní školy narazila pouze jednou (Fraus, 2011, str. 96). Jednalo se o úlohu s krátkým zadáním: Urči součet prvních třiceti čísel Fibonacciho řady: 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + …

Domnívám se však, že Fibonacciho posloupnost nabízí mnohem více zajímavých námětů, které se prolínají s reálným světem, uměním a zároveň s historií matematiky.

a) *Italská králičí rodinka (Fibonacci – králíci)*

Ročník	3–5
Charakteristika	Žáci skrze historickou úlohu se zvířátky objevují pravidlo řady.
Cíle	Žáci využijí tabulku k řešení úlohy. Žáci se seznámí s historickou postavou Fibonacciho včetně zeměpisných souvislostí a dalších zajímavostí. Žáci procvičují sčítání.
Úvod pro učitele	
Leonardo Pisánský byl středověký matematik, který se významně zasloužil o rozšíření arabských číslic v Evropě (ty však již pronikaly i dříve) a byl prvním, kdo se naučil počítat s nulou jako s číslem a také se zápornými čísly. Naučil se to při svých cestách s otcem v severní Africe, kde byl jeho otec, přezdívaný Bonacci (neboli dobrák, odtud Fibonacci – syn dobráka), obchodníkem a také vysokým konzulárním úředníkem v nové pisánské kolonii v dnešním Alžíru. Úlohu s králíky zapsal Fibonacci do svého stěžejního díla *Liber Abaci* (r. 1202). Řešil ji úsudkem. Podobný postup je nastíněn v tabulce v PL pro žáky. Úloha je zajímavá tím, že odhaluje řadu čísel, kterou známe jako Fibonacciho posloupnost. Ta nejen úzce souvisí s mystickým zlatým řezem, ale čísla z této posloupnosti nalezneme přímo v některých biologických jevech (viz následující návrh využití Fibonacciho posloupnosti ve výuce).	
Pomůcky	

Mapa Evropy/světa/středozemí, model časové osy, vytištěné PL (Příloha 12) a obrázek Šikmé věže v Pise (např. též Příloha 12).
Literatura
ATALAY, Bülent, 2007. *Matematika a Mona Lisa: umění a věda Leonarda da Vinci*. V Praze: Slovart. ISBN 978-80-7209-919-1. OLSEN, Scott Anthony, 2013. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Petr HOLČÁK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-566-4.
Scénář
Motivace Učitel ukáže žákům plyšového králíka: *„Dnes budeme řešit jednu zajímavou úlohu o králících, ale nejdříve mě zajímá, zda-li někdo ví, copak je toto za stavbu a kde bychom ji našli?“* Učitel žákům ukáže obrázek Šikmé věže v Pise. - prostor pro odpovědi, upřesnění učitele - žáci hledají město Pisa na mapě Učitel napíše na tabuli číslo 1173. U: *„Toto číslo se nějakým způsobem pojí k této věži? Co by mohlo znamenat?“* Žáci tipují. U: *„Ano, v tomto roce začala výstavba Šikmé věže. Brzy se začala naklánět a tak její stavba trvala nakonec 200 let.“* S Práce s modelem časové osy. Žáci si ujasňují, o jaké době je řeč. U: *„Někdy kolem tohoto roku, nevíme to přesně, se v Pise narodil chlapec, kterému dali rodiče jméno Leonardo. Byl velice chytrý, v dětství se svým otcem hodně cestoval a my si o něm povídáme, protože se stal nejvýznamnějším evropským matematikem své doby a vůbec celého období, které nazýváme středověk. Protože se narodil v Pise, tak se mu říkalo Leonardo Pisánský, ale málokdo mu řekl jinak než Fibonacci. Fibonacci v překladu znamená ‚syn dobráka‘.“*

Aktivita

Učitel zadá žákům úlohu, kterou ve své době řešil Fibonacci:

> Jistý muž vlastnil jeden pár králíků. Tyto králíky umístil do uzavřené ohrady. Jeho přáním bylo zjistit, kolik párů králíků zplodí tento pár za jeden rok.

Podle: Jarošová, 2010, s. 31

Aby se úloha dobře počítala, stanovil si Fibonacci takovéto podmínky:

- každý nový pár se může rozmnožit až ve svém druhém měsíci života
- každý pár zplodí každý měsíc vždy jen jeden nový pár, tedy samečka a samičku
- králíci nestárnou, neumírají a mohou se neustále rozmnožovat

S Úlohu řeší žáci hromadně s učitelem, kdo chce řešit samostatně, jde stranou.

Učitel pomůže žákům úlohu uchopit pomocí tabulky a komentáře:

“Na začátku máme jeden pár králíků, kteří se mohou rozmnožovat. Na konci prvního měsíce bude mít tento pár mláďata - jeden nový pár, který se však bude moci rozmnožovat až za jeden měsíc. Tudíž na konci druhého měsíce přibude opět jeden nový pár od původních rodičů a mláďata z prvního měsíce se již budou moci rozmnožovat. Jak to bude dál?”

	Páry schopné rozmnožování		Mladé páry		Celkem párů
Začátek		1		0	1
Na konci 1. měsíce		1		1	2
Na konci 2. měsíce		2			
Na konci 3. měsíce					
Na konci 4. měsíce					

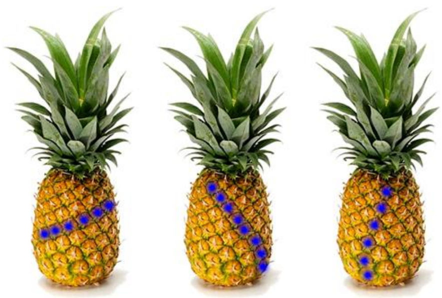
⋮

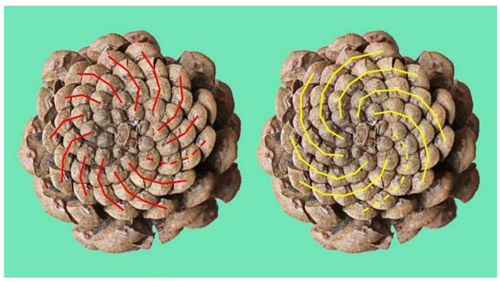
Učitel s žáky diskutuje průběžné výsledky. Žáci mají prostor říct své myšlenky. Jak by vypadala tabulka, kdyby každý pár zplodil každý měsíc dva páry?
Tipy a doporučení
V dalších hodinách může učitel navázat na problematiku příbuzenského křížení a přeneseně příbuzenských sňatků u lidí.

b) Co mají společného králíci, šišky, slunečnice a ananas? (Fibonacci – přírodniny)

<table>
<tr><td>Ročník</td><td>3–5</td></tr>
<tr><td>Charakteristika</td><td>Žáci badatelsky objevují spojitost mezi Fibonacciho posloupností a počtem spirál v přírodninách.</td></tr>
<tr><td>Cíle</td><td>Žáci hledají pravidlo pro výpočet Fibonacciho posloupnosti.
Žáci prokáží číselnou spojitost mezi danými přírodninami a čísly Fibonacciho posloupnosti.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úvod pro učitele</td></tr>
<tr><td colspan="2">Je zajímavé, že příroda jakoby se řídila „zákonem“ čísel Fibonacciho posloupnosti. Její stopy lze nalézt u mnoha živých organismů. V této hodině se zaměříme na rostlinnou říši. Jedním z projevů Fibonacciho posloupnosti, který lze v přírodě snadno ověřit, je počet spirál, ve kterých vyrůstají např. semena slunečnice, šupiny u šišky.

Jak počítat spirály na přírodninách:


Obr. 17


Obr. 18</td></tr>
</table>

Většinou se jedná o dvě spirály – pravotočivou a levotočivou. Ananas má dokonce tři spirály. Počet těchto spirál odpovídá sousedním číslům ve Fibonacciho posloupnosti.
Pomůcky
Přírodniny: dostatek šišek, ananas, případně květ slunečnice. Vytištěná Příloha 13 (dostatek nastříhaných tabulek) a plyšový králík.
Literatura
ATALAY, Bülent, 2007. *Matematika a Mona Lisa: umění a věda Leonarda da Vinci*. V Praze: Slovart. ISBN 978-80-7209-919-1. OLSEN, Scott Anthony, 2013. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Petr HOLČÁK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-566-4.
Scénář
Motivace Učitel žákům ukáže králíka, šišku, slunečnici a ananas (skutečné nebo obrázky). U: *„Dnes budeme hledat matematické spojení mezi těmito organismy.“*

Aktivita

Učitel si se žáky nejprve připomene úlohu s králíky a její výsledek. Původní tabulku převedou do následující podoby:

Měsíc	**0**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
K.D.	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
K.M.	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$\boldsymbol{\Sigma}$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

K.D. - králíci dospělci; K.M. - králíci mláďata

? Čeho si všímáte?

➔ V tabulce můžeme pozorovat jakousi pravidelnost. Řada čísel se v každém řádku opakuje, jen je posunutá.

⚡ Najdi pravidlo, podle kterého zjistíme další číslo v řadě.

➔ Ke zjištění následujícího čísla stačí znát pravidlo.

Pokud žáci pravidlo součtu dvou předchozích čísel v řadě neobjeví, nechá učitel tento problém prozatím otevřený.

Ⓐ Vypočítej, kolik králíků bychom měli na konci 13. měsíce?

⚡ Vypočítej, kolik králíků bychom měli po 2 letech?

Učitel zvýrazní nebo vypíše výslednou řadu čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Práce s přírodninami nebo jejich obrázky

Žáci si do dvojice vyberou přírodninu nebo její obrázek.

U Spočítejte spirály, ve kterých jsou uspořádaná semena v květenství slunečnice, šupiny u šišky, listy u netřesku a spirály u ananasu. Vždy lze spočítat dva údaje, spirálu levotočivou a pravotočivou (ananas má dokonce ještě třetí spirálu).

Tip: Počítání velmi usnadní možnost přímého značení spirál např. fixem na daný objekt. To lze snadno provést u šišek nebo u tištěných obrázků.

? Kolik spirál jste napočítali?

? Kde jsme se s těmito čísly setkali?

? Je to náhoda?

? Platí to i jinde?

Otázky mohou zůstat otevřené k další badatelské činnosti.

➔ Řada čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., kterou můžeme neustále prodlužovat, se nazývá Fibonacciho posloupnost.

? Co tedy spojuje králíky, šišky, slunečnice a ananas?

Tipy a doporučení
V rámci úloh kolem Fibonacciho mohou žáci ve třídě vytvořit myšlenkovou mapu jejímž centrálním pojmem bude Fibonacci. Tuto mapu budou postupně doplňovat a řízenou diskuzí se budou vracet k zajímavým souvislostem. Fibonacciho posloupnost lze dobře využít i v informatice při práci s tabulkovým procesorem. Pomocí jednoduchých vzorců lze “králičí tabulku” rozšířit a během chvíle zjistit počet králíků ve stém nebo tisícím měsíci. Žáci si mohou také vyzkoušet vyjádřit data v grafu. V 5. ročníku mohou zvídaví a motivovaní matematici zkusit vypočítat poměr dvou následujících čísel Fibonacciho posloupnosti (např. 3:2; 5:3; 8:5; 13:5 atd.).

c) Králíci na Mléčné dráze (Fibonacci – spirály)

Ročník	3–5
Charakteristika	Žáci navazují na dříve objevenou Fibonacciho posloupnost a využijí ji k vytvoření velkoformátové zlaté spirály.
Cíle	
Žáci objevují propojení mezi dříve objevenou číselnou řadou a přírodními jevy. Žáci pracují ve skupinách a s využitím svých dovedností z rýsování tvoří zlatou spirálu. Žáci uvedou zastoupení zlaté spirály v přírodě.	
Úvod pro učitele	
Fibonacciho spirála je jednou z aproximací zlaté logaritmické spirály, kterou můžeme pozorovat v mnoha přírodních jevech (stočení ulity měkkýšů, rozvíjejících se mladých listů, zatočení rohů u zvěře, tvaru tlakové níže nebo spirální galaxie) včetně chování zvířat (např. střemhlavý let sokola za kořistí opisuje zlatou spirálu). Při rýsování čtvrtkružnic do čtverců bude u velkých formátů potřeba	

improvizovat. Žáci si mohou pomoci provázkem nebo mohou použít proužek čtvrtky o malinko delší než požadovaný poloměr, jeden konec přichytí kružítkem ve vrcholu čtverce (středu budoucí čtvrtkružnice) a na opačném konci udělají malou dírku na hrot tužky v požadované vzdálenosti.
Pomůcky
Čtvrtky A4, A3, A2, A1, případně i větší, rýsovací potřeby, nůžky, fixy. Dále stočené ulity měkkýšů, případně další přírodniny, vytištěná Příloha 14 (případně jiné ukázky projekce zlaté spirály v přírodě) a plyšový králík.
Literatura
ATALAY, Bülent, 2007. *Matematika a Mona Lisa: umění a věda Leonarda da Vinci*. V Praze: Slovart. ISBN 978-80-7209-919-1. OLSEN, Scott Anthony, 2013. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Petr HOLČÁK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-566-4. Více o různých typech spirál např. zde: https://www.fa.cvut.cz/studium/predmety/deskriptivni-geometrie-i-ii/dg_elskripta/krivky/spiraly.pdf
Scénář
Motivace U: *„Téma hodiny je ‘králíci na Mléčné dráze’. Kdo ví, co je to Mléčná dráha? Čemu se budeme asi věnovat?“* Připomenutí: Co je to Fibonaccinho posloupnost? Kde se s ní žáci setkali? **Aktivita** Skupinová práce: 4–6 žáků na skupinu: U Pečlivě pracujte na následujících bodech podle zadání. Práci si rozdělte. 1. Na připravené čtvrtky naměřte následující čtverce (šetřete místem): 10 x 10 cm (dvakrát)

20 x 20 cm (na formát A4
30 x 30 cm (na formát A3)
50 x 50 cm (na formát A1)
(80 x 80 cm – na formát A0)

2. Do každého čtverce „narýsujte“ čtvrtkružnici.
    - Jeden vrchol čtverce představuje střed kružnice.
    - Poloměr kružnice se rovná délce strany čtverce.
    - Narýsovanou čtvrtkružnici zvýrazněte fixem.

3. Vystřihněte celé ČTVERCE!
4. Skládejte čtverce dle instrukcí:
    1) Vemte dva nejmenší čtverce a přiložte je k sobe tak, aby vznikla půlkružnice.
    2) Přiložte další nejmenší čtverec, aby vzniklo baculaté půlsrdíčko.
    3) Stejně přikládejte další, vždy nejmenší čtverec ze zbylých čtverců.

? Co vám vzniklo?
? Co vám to připomíná?
? Kde jste s tímto tvarem setkali?
? Všimli jste si při práci, kde je byla schovaná Fibonacciho posloupnost?

Hra šibenice ⇨ odhalení pojmu „zlatá spirála“

U: *„Pojem zlatá spirála se vžil pro její krásu zakódovanou v číslech. Setkat se s ní můžeme na mnoha místech. Příroda si jí velice oblíbila.“*

Učitel ukáže žákům stočené ulity měkkýšů, promítne obrázky výskytu zlaté spirály (Příloha Fibonacci III) včetně obrázků Mléčné dráhy, čímž se naplní téma hodiny „králíci na Mléčné dráze“.

Výzva pro žáky: Všímejte si svého okolí, objevíte kolem sebe další spirály?

Tipy a doporučení
Je-li čas, žák si narýsuje svou zlatou spirálu s využitím čtverečkovaného papíru.

Zlatou spirálu využijeme jako námět do výtvarné výchovy. Žáci mohou kreativně dotvořit velkoformátové zlaté spirály vyrobené při hodině (např. ve dvojicích jednotlivé části, které pak složí jako pestrou mozaiku). Tvorba zlaté spirály v makroprostoru, např. na hřišti nebo v tělocvičně. Žáci nejprve pomocí provázku a zvolené jednotky vyměří a vyznačí síť obdélníků a čtverců s rozměry Fibonacciho posloupnosti dle schématu pro zanesení zlaté spirály, kterou následně vytvoří z vlastních těl, přírodnin či jiných předmětů dle situace a dostupnosti. Jsou-li spirály pro žáky atraktivní, lze v dalších hodinách navázat dalšími druhy spirál.

3.3.6. Geometrie v praxi

Natahovači provazů v Egyptě

a) Natahovači provazů I. – zemědělství

Ročník	4–5
Charakteristika	Konstrukce soustavy trojúhelníků pomocí natahování provázku v makroprostoru – problémová úloha.
Cíle	Žáci řeší problémovou konstruktivní úlohu soustavy trojúhelníků v makroprostoru založenou na historických podkladech. Žáci aktivně spolupracují.
Úvod pro učitele	
Úlohu je vhodné zařadit dříve, než začnou žáci konstruovat rovinné obrazce na papír bez opory čtvercové sítě. Není to však podmínka. Egyptští natahovači provazů byli zeměměřiči, kteří spolupracovali s písaři. Jejich služeb bylo potřeba nejen při stavbě měst, ale každoročně také k novému vyměření zemědělské půdy v záplavových oblastech. Informace o množství obdělávané	

půdy a následně o velikosti úrody pak sloužila k vyměřování daní. Ve starém Egyptě byl správcem pokladny (jakýmsi ministrem financí) vezír - po faraonovi nejmocnější muž země. Jemu podřízení byli pak správci jednotlivých oblastí, kteří zajišťovali výběr daní na základě informací od písařů. K výpočtům daní sloužili propracované tabulky.

Základní délkovou jednotkou ve starověkém Egyptě byl královský loket „meh suteh“, délka od lokte až po konečky prstů. Dělil se na sedm dlaní, každá dlaň na 4 prsty. Délka královského lokte byla přibližně 52,3 cm. Základní pomůckou pro vyměřování byl speciálně upravený provaz (napuštěný směsí včelího vosku a pryskyřice), který byl 13 uzly rozdělen na 12 stejně velkých dílů (velkých či malých dle účelu).

V popisované aktivitě mají žáci vyměřovat území pomocí trojúhelníků, které je zakresleno v plánku a popsáno egyptskými číslicemi (žákům stačí znalost symbolů pouze pro jednotky | a desítky ∩). Jedná se o 4 trojúhelníky (rovnostranný, rovnoramenný, pravoúhlý a tupoúhlý). Pravoúhlý trojúhelník je zadán rozměry 10:8:6, aby vyměřovaná území byla větší. K vyměřování pravých úhlů však staří Egypťané používali výhradně 13uzlové lano (viz další aktivita).

Příprava

Učitel promyslí vhodné místo pro realizaci, připraví ukázku provazu s uzly k motivaci.

Pomůcky:

- dostatečně dlouhý provázek na každou skupinu (alespoň 20 m)
- křídy či jiné pomůcky k vyznačení vyměřených útvarů
- vytištěné PL (Příloha 15) a Příloha 16

Literatura pro žáky

CHRISTIE, Anne, 2005. *Tajemná magie starověkého Egypta*. Frýdek-Místek: Alpress. ISBN 80-7362-125-8.

KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

E-zdroj: https://www.starovekyegypt.net/ (stránky provozované Spolkem přátel starověkého Egypta zapsaném ve spolkovém rejstříku; stránky jsou archivované Národní knihovnou ČR).

Scénář

Motivace

Učitel postupně ukáže žákům obrázek fresky natahovačů provazů (Příloha 16), model trojúhelníku, lano či provázek s uzly (se stejnými rozestupy mezi uzly). Žáci odhadují, co mají tyto předměty společného.

U: *„Přeneseme se o 3 tisíce let zpátky, do povodí řeky Nil. Každý rok v červnu začala řeka stoupat o několik centimetrů každý den, v červenci a v srpnu se už vylévala z koryta a v září dosahovaly záplavy svého maxima. Do původního stavu se hladina řeky vrátila až v listopadu. V tu dobu bylo potřeba započít se zemědělskými pracemi. Jenže záplavy, stejně jako každý rok, poničily hranice, které vymezovaly jednotlivá pole zemědělské půdy.“*

➔ Je třeba pozemky znovu vyměřit a vyznačit.

❔ Jak se to dělalo? ⇨ obrázky z motivace napoví:

- ➔ tzv. natahovači provazů používali provazy s uzly
- ➔ pozemky se často rozměřovaly na trojúhelníky

Uvědomění

Učitel přečte žákům domnělou depeši od vezíra (Příloha 16). Žáci se učitelem preferovaným způsobem rozdělí do 3–4 přibližně stejně velkých skupin (kolem 6 žáků) – skupiny šen, anch a vedžet (názvy egyptských posvátných symbolů) a čtvrtá (třetí) skupina reportérů ze současnosti. Každá skupina natahovačů provazů dostane svůj PL se zadáním (Příloha 15).

Učitel rozdá žákům tabulky s přepočtem egyptských délkových měr.

? Jaký měřící systém staří Egypťané používali?
➔ Egypťané používali k vyměřování délku královského lokte.

U Žáci ve skupinách natahovačů provazů:
- vezmou délku lokte (od lokte až po konečky prstů) učitele = královský loket třídy;
- řeší týmovou problémovou úlohu vymezení hranic daných trojúhelníků.

U Žáci ze skupiny reportéři dokumentují průběh - pořizují fotodokumentaci, píší reportáž, ve vhodných zdrojích hledají význam symbolů použitých v názvech skupin natahovačů provazů, případně jaký byl jídelníček starých Egypťanů.

Učitel v roli královského písaře na vyměřování dohlíží.

Reflexe

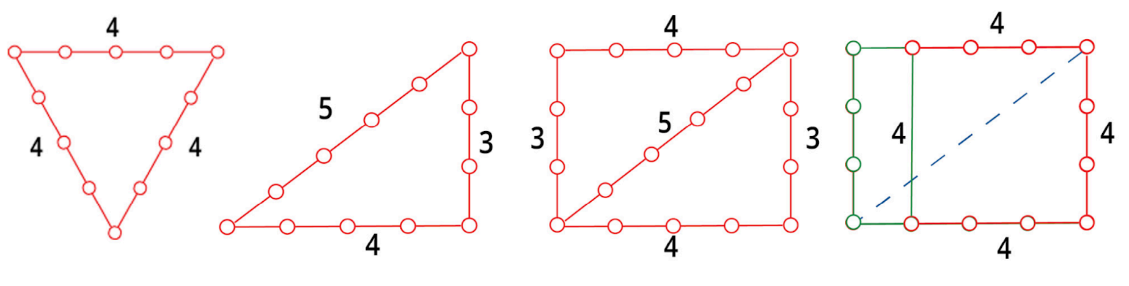
? Jak se vám pracovalo?
? Na jaké problémy jste při řešení narazili?
? Odpovídá výsledek zadání?
? Co umíme říct, o vyměřených trojúhelnících?
? Mohou naše úlohy velikostí odpovídat skutečnosti?
? Co vše jsme se ještě dozvěděli?

Tipy a doporučení

- Skupina reportérů zpracuje článek do školního časopisu/do městských novin.
- Žáci se k vyměřování pozemků vrátí, ale tentokrát budou dané území členit na trojúhelníky a zakreslovat je do plánu, podle kterého je další skupina bude při další příležitosti vyměřovat.
- Žáci řeší úlohy:
  - Ⓐ Kolik bychom nejméně potřebovali trojúhelníků k vyměření naší třídy?
  - ⚡ Dokážete ve škole najít takovou podlahu (třídu, chodbu, …), kde byste potřebovali nejméně 3 trojúhelníky k jejímu vymezení?

b) Natahovači provazů II. – architektura

<table>
<tr><td>Ročník</td><td>4–5</td></tr>
<tr><td>Charakteristika</td><td>Konstrukce rovinných geometrických útvarů pomocí natahování provázku v makroprostoru - problémová úloha.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cíle</td></tr>
<tr><td colspan="2">Žáci řeší problémovou konstruktivní úlohu soustavy trojúhelníků v makroprostoru založenou na historických podkladech.
Žáci rozvíjí konstruktivní koncepty založené v předchozí hodině.
Žáci aktivně spolupracují.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Úvod pro učitele</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pomocí 13uzlového lana (12 stejných dílů mezi uzly), které staří Egypťané využívali, se dají vyměřit základní rovinné geometrické obrazce. Obrázek níže naznačuje některé z nich.



Obr. 19 Naznačení konstrukce rovinných útvarů pomocí 13uzlového lana

Postupuje se způsobem, kdy se 1. a 13. uzel překrývají a počítají se jako jeden. Mohli bychom takto vyměřit i rovnoramenný trojúhelník 5:5:2. Fascinující je, že pokud bychom pomocí takového lana vyměřili kruh a délka každého dílu by odpovídala královskému loktu používaném ve starém Egyptě (tj. 52,36 cm – ačkoliv víme, že míra královského lokte byla skutečně proměnlivá a měnila se v závislosti na panovníkových mírách), byl by průměr takového kruhu přesně metr, tedy jednotka, která byla vyměřena a stanovena až na konci 18. století n. l.)!</td></tr>
</table>

Pro vyměřování pravých úhlů staveb byl využíván výhradně trojúhelník 5:4:3. Rovina stavby se ověřovala pomocí sítě vodních kanálů a vodní hladiny v nich, svislý směr byl dán olovnicí.

Pokud žáci vytvoří pravoúhlý trojúhelník rozdělením rovnostranného nebo rovnoramenného trojúhelníku spojením jeho vrcholu s protilehlou stranou/základnou, tak je to správně geometricky, ale ne historicky – Egypťané neznali jiný pravoúhlý trojúhelník než 5:4:3.

Příprava

Učitel promyslí vhodné místo pro realizaci.

Pomůcky:

- mapa, model časové osy
- dostatečně dlouhý provázek na každou skupinu (tj. na každé 3–4 žáky, délka 13x zvolená jednotka)
- křídy či jiné pomůcky k vyznačení vyměřených útvarů
- vytištěná Příloha 17
- modely trojúhelníku, obdélníku a čtverce
- provázek s uzly k motivaci

Literatura pro žáky

KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

E-zdroje:

- https://www.starovekyegypt.net/ (stránky provozované Spolkem přátel starověkého Egypta zapsaném ve spolkovém rejstříku; stránky jsou archivované Národní knihovnou ČR).
- https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/mereni/zakladni-jednotky/metr

Scénář

Motivace

Provázek s uzly, modely trojúhelníku, čtverce, obdélníku a obrázek egyptské architektury (Příloha 17).

➔ Opět se žáci „přenesou“ do Egypta před 3 tisíci lety.

Uvědomění

Žáci vytvoří skupiny po třech (nebo čtyřech, čtvrtý se podílí na řešení a zakresluje konstrukty do sešitu). Každá skupina dostane svůj provázek, na kterém udělají postupně 13 uzlů tak, aby vzdálenost mezi dvěma uzly byla vždy stejná (např. královský loket či jiná).

? Kolik je naměřených délek mezi těmito 13 uzly?

U Vytvořte ve své skupině s pomocí tohoto provazu rovnostranný trojúhelník.

- Výsledek vždy zakreslete do sešitu.

U Vytvořte rovnoramenný trojúhelník.

U Vyberte si z možností:

a) Vytvořte trojúhelník o stranách 3, 4 a 5 jednotek.
b) Vytvořte pravoúhlý trojúhelník.

U Jak byste vytvořili obdélník? (⇨ spolupráce 2 skupin)

U Lze vytvořit i čtverec?

Žáci jsou aktivní, diskutují, hledají řešení.

? Co je podmínkou pro vytvoření takového „rovinného“ obrazce?

- Učitel může názorně ukázat papíru A4 zvednutím jeho jednoho či dvou vrcholů.
- Žáci mohou názorně ukázat u obdélníku/čtverce držením jeho vrcholů v různé výšce.

? Jaké jsou obvody těchto obrazců?

? ⚡ Jaké jsou obsahy těchto obrazců?

? 🄰 Můžeme obdélník nebo čtverec vytvořit rovnou s provazem, který bude mít daný obvod? Proč je mezistupeň s trojúhelníkem důležitý?

Reflexe

? Jak mohla být dovednost, kterou jste si právě vyzkoušeli, užitečná starým Egypťanům? ? Jak může být tato dovednost užitečná tobě? H Třístupňová hodnotící škála (semafor, smajlíci apod.)
Tipy a doporučení
VV na školním dvoře – na vhodné dlážděné/asfaltové ploše žáci pomocí vyměřovacího provazu a barevných kříd konstruují mandaly s využitím základních rovinných geometrických útvarů.

Thales v Egyptě

Ročník	4–5
Charakteristika	Venkovní aktivita založená na využití věty ‚sus' o podobnosti trojúhelníků v praxi. Její zařazení má tedy smysl i v rámci propedeutiky budoucího učiva ve vyšších ročnících.
Cíle	Žáci aplikují historický postup výpočtu v reálné problémové situaci. Žáci řeší matematickou úlohu úvahou s využitím principu přímé úměrnosti.
Příprava	
Úloha vyžaduje správné načasování a slunečné počasí. Učitel by měl mít představu, jaký je poměr velikosti objektu a jeho stínu v daný čas, a načasovat řešení úlohy tak, aby ho bylo možné provést prostou úvahou (poměr 1:1; 1:0,5; 1:0,25; 1:0,1). Učitel také rozmyslí vhodnou lokalitu s dostatkem objektů k měření a co lze případně využít jako referenční délku pro měření. Vytištěná Příloha 18 s příběhem.	

Je-li to možné, tak učitel žáky při příznivé předpovědi počasí informuje den předem, že budou následující den provádět měření v terénu.
Literatura pro žáky
KOVAL, Václav, 1969. *Kamarádi čísla*. Matematická knižnice. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
Scénář
Učitel rozdělí žáky do skupin po 3 (lze i po 2 či 4). **Motivace** Učitel je se žáky v terénu v cílové lokaci. U: *“Když se rozhlédnete kolem, můžete vidět… (budovy, komín, kašna, socha, jiné stavby apod.). Dokázali byste odhadnout, jak jsou tyto objekty vysoké, např. tento… ?”* Učitel vybere konkrétní objekt nebo rovnou více vhodných objektů. Žáci mají čas na rozmyšlenou, následně udávají své odhady, případně s komentářem, jak k nim dospěli. Odhady jsou zapisovány (učitelem/žákem zapisovatelem). U: *“Dobře. Abychom zjistili, jak byly vaše odhady blízko či daleko pravdě, tak my si tyto objekty nyní změříme. Má někdo nápad, jak bychom to mohli udělat?”* Krátká řízená diskuse. U: *“Pro postup, jak na to, se vrátíme v čase o více jak 2500 let zpátky. Podíváme se do starověkého Egypta, kam při svých výpravách zavítal řecký matematik Thales z Milétu.”* Učitel přečte první část textu. *“Nacházíme se nyní tedy před podobným problémem, jako tehdy Thales. Nyní poslouchejte pozorně.”* Učitel přečte druhou část textu. Žáci diskutují nad nastíněným řešením, předvádí, jak je to asi myšlené.

U: *“Dobře, vypadá to smysluplně, že? Ale na konci byla zmínka o tom, že Egypťany čekalo ještě další překvapení. Poslechněme si, jaké.”* Učitel přečte třetí část přílohy.

Aktivita

- U S využitím příběhu o Thaletovi v Egyptě změřte ve skupině výšku daného objektu/daných objektů.
- A Najdi v encyklopedii informace o Thaletovi z Milétu a vyber 3, které si zapíšeš do sešitu.
- Podle označené polohy města Milét na mapě starověkého Řecka urči jeho přibližnou polohu na mapě světa. Ujasni si, kde leží Řecko, kde Egypt.

Podle aktuální situace a zapálení mohou žáci měřit více objektů.

Reflexe

- ? Jak jste postupovali?
- ? Kdo postupoval jinak?
- ? Narazili jste při řešení na nějaké problémy? Jak jste si s nimi poradili?
- ? Bavilo vás takové měření?

Žáci sdílejí informace, které si o Thaletovi zapsali do sešitu. Kdo pracoval s mapou, ukáže polohu města Milét, Řecka a Egypta. Společně si na modelu časové osy ukáží, kdy žil Thales z Milétu.

R Napište do sešitu 1-3 věty, které byste chtěli Thaletovi z Milétu říct.

Tipy a doporučení

K měření je vhodné se v budoucnu několikrát vrátit a zopakovat jej na jiných objektech. Žáci si mohou zkusit situaci během měření zakreslit do sešitu. Žákům nabídneme v některé z hodin matematiky slovní úlohu, která popisuje, délky stínů a referenční výšku, které mohl naměřit Thales z Milétu v Egyptě. Žáci podle výsledku rozhodnou, kterou z pyramid Thales měřil.

3.4. Ověřování didaktických materiálů v pedagogické praxi

Navržené scénáře a aktivity byly spolu s průvodním dopisem (Příloha 2) 7. a 8. 3. 2024 rozeslány studentům dr. Kaslové, kteří jsou zapsáni v kurzu Dítě a matematika II. v LS 2023/2024, aby si dle svého uvážení a svých možností vybrali scénář či aktivity, jenž ověří se žáky při výuce. Náměty do výuky byly zaslané po kapitolách:

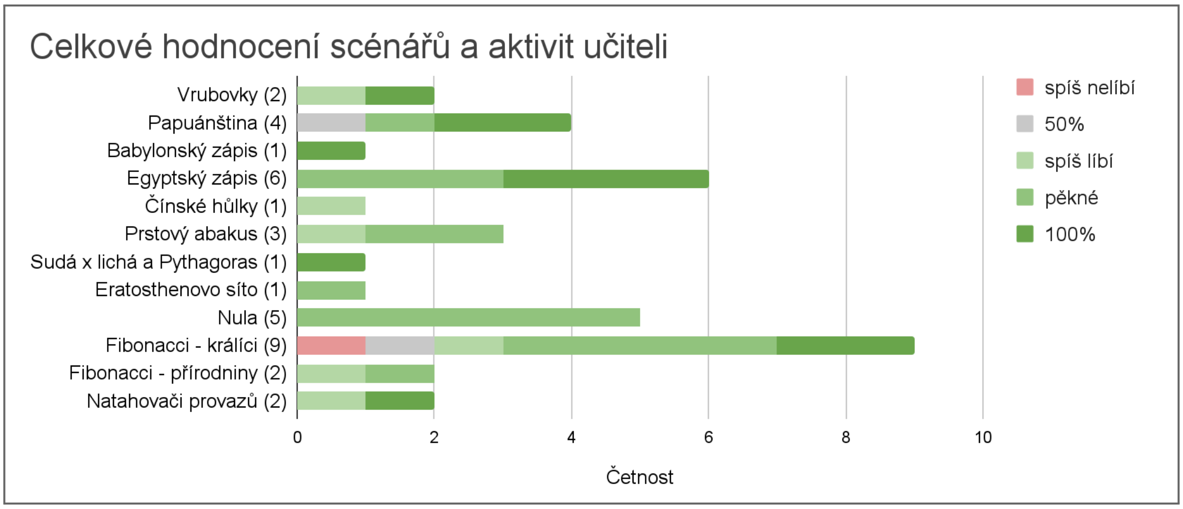
- studenti s praxí v 1.–2. ročníku ZŠ – Pravěké vyjádření počtu, Zápis čísla, Kupecké počty;
- studenti s praxí ve 3. ročníku ZŠ – Zápis čísla, Kupecké počty, Kde se vzala nula;
- studenti s praxí ve 4. ročníku ZŠ – Vlastnosti čísel;
- studenti s praxí v 5. ročníku ZŠ – Kde se vzala nula, Geometrie v praxi.

Cílem tohoto rozdělení materiálů bylo zajištění ověření co největšího množství scénářů. Vyzkoušení vybraného scénáře, jeho části či některé aktivity bylo pro studenty povinné. Na realizaci a zpětné zaslání reflexe měli pouhé dva týdny. Na začátku dubna, 2. 4. 2024, byli studenti (dále je označuji jako učitele) požádáni o dodatečné vyplnění tabulkového dotazníku (Příloha 3).

3.4.1. Výsledky ověřování scénářů a aktivit na základě reflexí

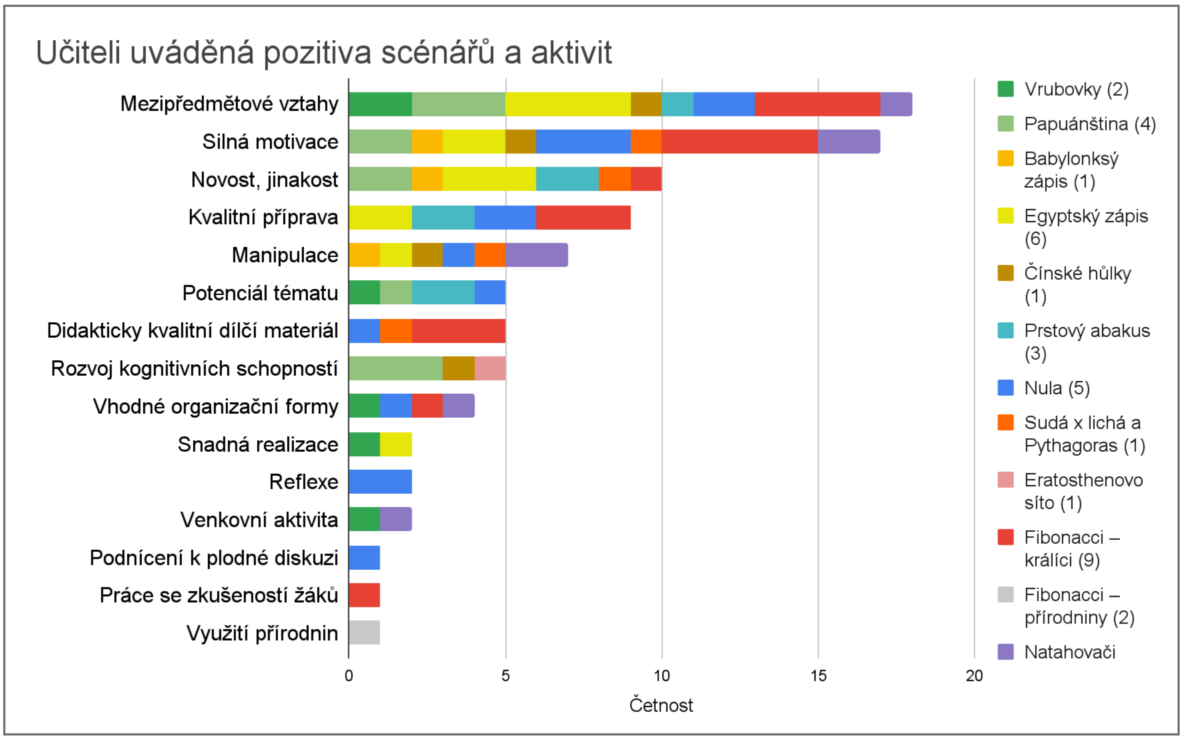
Z původních 40 zamýšlených ověřování didaktických materiálů byly do zpracování výsledků před odevzdáním práce získány reflexe od 34 učitelů (respondentů). Někteří učitelé ověřili a reflektovali více scénářů a aktivit. Vzhledem k charakteru obdržených reflexí ke scénářům 1x Natahovači provazů I. + II. a 1x Babylonský zápis čísla + Klínové násobkové tabulky jsem se rozhodla, hodnotit tyto na sebe navazující scénáře jako jeden celek. Celkem bylo tedy provedeno 37 (+2) ověření scénářů v pedagogické praxi. Témata mayské číslice, hra domino, výroba abaku, Fibonacci – spirály a Thales v Egyptě nebyla vůbec ověřena. Souhrn ověřených scénářů včetně údajů o ročníku a počtu žáků ve třídě (byl-li k dispozici) je uveden v tabulce v Příloze 19.

V průvodním dopise byli učitelé požádáni, aby na škále *0 % – špatné – spíš nelíbí – neutrální vztah – spíš líbí – pěkné – 100 %* provedli celkové hodnocení navrženého scénáře/aktivity, jenž ověřovali ve výuce. 11 scénářů (30 %) bylo ohodnoceno 100 %, 17 scénářů jako pěkný (46 %), v 6 případech uvedli respondenti spíš líbí (16 %), 2 respondenti uvedli neutrální vztah (5 %), 1 respondent ohodnotil materiál spíš nelíbí (3 %). Graf 1 zobrazuje hodnocení materiálů podle zvoleného tématu.

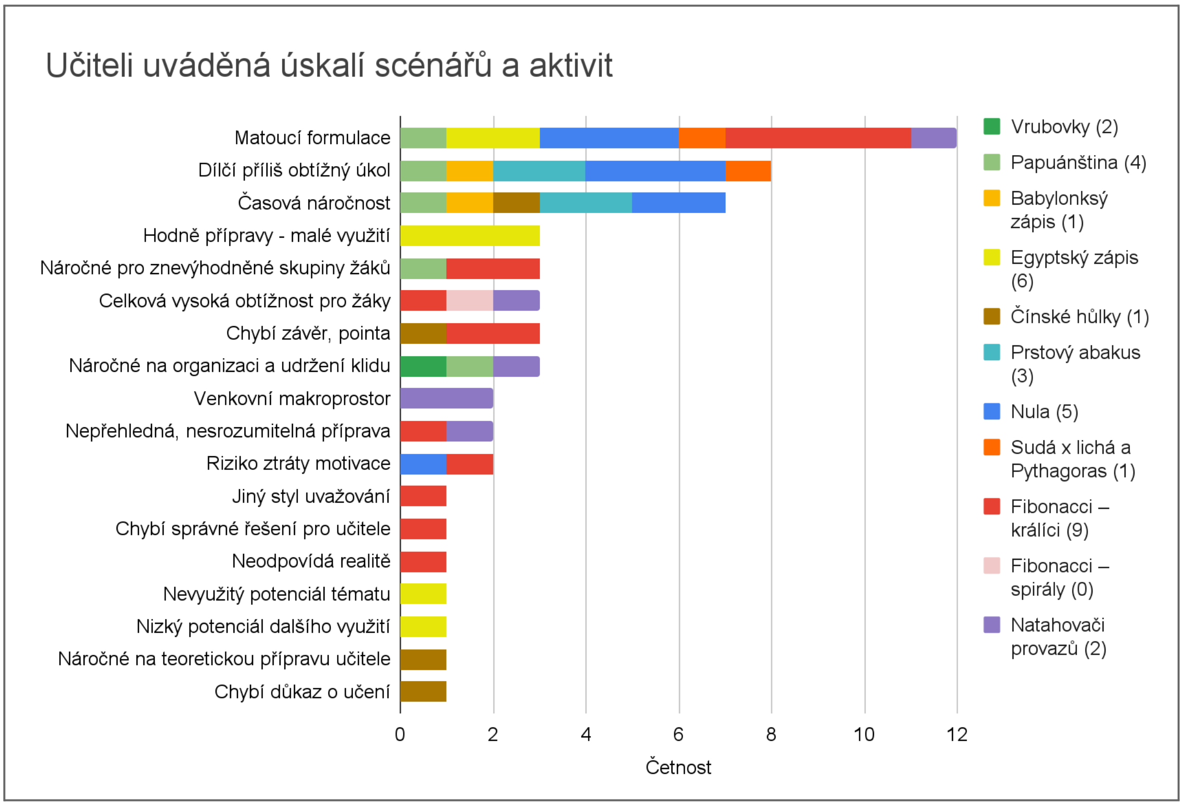


Graf 1 Celkové hodnocení historických témat vyzkoušených ve výuce. Číslo v závorce udává počet ověření.

Na základě své zkušenosti učitelé ve své reflexi uváděli pozitiva a úskalí, která jimi vybraný scénář či aktivita má. Tyto atributy popisovali vlastními slovy a záleželo pouze na nich, které aspekty a do jaké míry budou hodnotit (neměli možnosti, ze kterých by vybírali). Uváděná pozitiva jsou zobrazena v grafu 2. Mezi pěti nejvíce zmiňovanými pozitivy jsou mezipředmětové propojení, silná motivace atraktivním tématem a/nebo kvalitním zpracováním motivační části, novost/jinakost ve výuce matematiky, kvalitně zpracovaná příprava scénáře/aktivity pro výuku a zařazení manipulačních aktivit. Přínosům všech uvedených aspektů se věnuji v úvodních kapitolách teoretické části práce, z toho soudím, že se mi je podařilo úspěšně začlenit do navržených didaktických materiálů. Učitelé se kladně vyjádřili k zařazení venkovních a pohybových aktivit.



Graf 2 Pozitiva scénářů a aktivit podle učitelů. Číslo v závorce udává počet ověření.



Graf 3 Úskalí scénářů a aktivit podle učitelů. Číslo v závorce udává počet ověření.

Souhrn úskalí, které učitelé k daným scénářům a aktivitám na základě své zkušenosti uváděli, je zobrazen v grafu 3. Nejčastějšími problémy byly matoucí, nepřesné či zavádějící formulace určité části textu či úkolu. Tento nedostatek respondenti vesměs řešili vlastním návrhem formulace (dle výzvy v průvodním dopise). Příkladem matoucí formulace je navrhovaný komentář učitele k Fibonacciho úloze o králících (str. 95) nebo nevhodně zvolený příklad při objevování charakteristických rysů počítání s nulou, kde žáci při skládání tabulky správně přiřadili výsledek 0 k výrazu *a* - *a*, místo mnou zamýšleného „jiné číslo“ (str. 81). Také použití písmen jako proměnných bylo zdrojem častých otázek žáků a nepochopení úlohy, kterou pak tři učitelé označili za těžkou (celkově nebo pro žáky s oslabenými kognitivními funkcemi). Na druhou stranu byla tato tabulka hodnocena také velice pozitivně, neboť vyvolala v myslích žáků rozpor a podnítila jejich plodnou diskusi a potřebu daný jev ověřit.

Návrhy úprav a doplnění scénářů jsou podle témat shrnuty v Příloze 20. Rozdělila jsem je do čtyř hlavních kategorií: nápady na obohacení, didaktická doporučení, návrh vlastních úkolů a apel na korekci formulací, úpravu struktury scénáře (příklady v tab. 10).

Nápady na obohacení	Didaktická doporučení
- zařazení tématické pohádky (např. vrubovky: Mach a Šebestová – Člověk neandrtálský) - další rozšíření mezipředmětových vazeb - vytvořit projekt/poloprojekt	- doplnit o zápis na tabuli jako vizuální oporu - využít online nástroje (např. slovníky) - zařadit využití digitálních technologií - přesně a jasně vysvětlit určité body úkolu (např. barevné lístky – sudá x lichá)
Návrh vlastních úkolů	**Apel na korekci formulací, úpravu struktury scénáře**
- propustka z hodiny (např. zapsat datum svého narození historickým způsobem) - zařadit úkol k získání důkazu o učení - vyvození Fibonacciho posloupnosti bez králíků	- nejvíce ve scénáři Fibonacci – králíci (matoucí komentář k jasnému zadání) - natahovači provazů – jinou posloupnost aktivit - použít powerpointovou prezentaci

Tab. 10 Kategorie návrhů úprav a doplnění scénářů a aktivit s příklady.

Přehled aktivit, které se u žáků setkaly s pozitivním ohlasem, je uveden v Příloze 21. Všechny zařazené manipulativní a pohybové aktivity byly žáky přijímány kladně. Velice pozitivní ohlas u žáků i u učitele měla dramatická metoda ve scénáři celodenní výuky Kde se vzala nula. Ověřena ve výuce byla bohužel pouze jednou, což přikládám celkové náročnosti zařazení celodenní tematické výuky do vyučování v souvislosti s nedostatkem času na ověření.

Zájem projevovali žáci o veškeré zajímavé informace a souvislosti (matematické, historické, zeměpisné, kulturní) k daným tématům. Tomu odpovídají i otázky, které je během výuky napadaly (souhrnná tabulka viz Příloha 22).

Všechny obdržené reflexe jsou sumarizované v podobě poznámek ke každému tématu v Příloze 23.

3.4.2. Diskuse výsledků

Volba tématu

Při hodnocení důvodu volby výběru daného tématu je nutné vzít v potaz, že učitelé měli omezený soubor témat, ze kterého vybírali. Největší možnost výběru měli učitelé 1.–3. ročníků (množství historických zápisů čísla, dvě témata odkazující na pravěk, dvě možné formy zařazení abakových počtů). Dalšími faktory, které volbu tématu jistě ovlivnily, byla nutnost volby a krátký čas na přípravu a realizaci. Proto není překvapivé, že volba témat a konkrétních scénářů byla většinou výsledkem racionální úvahy (viz Příloha 23), ačkoliv důvod volby neuvedli všichni učitelé.

Žádný z učitelů si nevybral mayské číslice, sčítání pomocí čínských hůlek, domino, výrobu abaku, Fibonacciho spirály a Thaleta v Egyptě. Důvod pro „nevýběr“ sčítání pomocí čínských hůlek, domina, výroby abaku a Fibonacciho spirály je nasnadě – jedná se o navazující a rozšiřující aktivity, které přímo vyžadují práci s již osvojenou historickou látkou.

Thales v Egyptě je scénář, který je zamýšlen jako úvod do učiva o podobnosti trojúhelníků, které nejsou učivem 1. stupně ZŠ. Důvodem, proč jsem tuto látku přesto zařadila, byla myšlenka propedeutické aktivity, která by se svým prožitkovým charakterem uložila v myslích žáků. Domnívám se, že by se pak žákům mohla ve vhodný okamžik vybavit s pocitem „aha, vždyť my jsme takto měřili výšku přístřešku na školním pozemku“. Aktivita je navíc podle knihy (Koval, 1969) popsána velice elegantně a již pro žáka 5. ročníku srozumitelně. Vycházím také z předpokladu, že na 2. stupni ZŠ bývá méně prostoru pro úlohy tohoto typu.

Na druhou stranu si uvědomuji, že je aktivita náročná na správné načasování a v podstatě závislá na aktuálním stavu počasí, což ji za stanovených podmínek, které učitelé měli k ověření scénářů, velmi znevýhodnilo.

Systém mayských číslic je z nabízených číselných systémů naší soustavě nejvzdálenější. Podle vlastní zkušenosti soudím, že na učitele mohl působit cize, a proto dali za daných podmínek přednost jiným aktivitám.

Pozitiva scénářů a aktivit

Analýza reflexí ověřovaných scénářů potvrzuje předpoklady vyplývající z teoretické části práce. Vytvořené didaktické materiály odpovídají modulovému pojetí zařazování historie matematiky do výuky (podle Jankvista, 2009b in: Clark et al., 2019, viz kapitola 1.3.). Ověření didaktických materiálů potvrdilo, že samo předložení matematiky z perspektivy její historie žáky zaujalo a motivovalo k práci v hodině. Míra, s jakou se toto zdařilo, pak závisela na kvalitě použitého didaktického materiálu, přístupu učitele k dané látce a také na nastavení žáků (z hledisek osobních preferencí, převažujícího osvojeného stylu práce a aktuálního stavu/únavy).

Dalším motivačním prvkem, avšak ze stejné kategorie – mezipředmětové vztahy, bylo propojení se zeměpisem. Použití mapy uvádím v seznamu pomůcek téměř u všech scénářů/aktivit. Konkrétně její využití jako pozitivní prvek zmiňují pouze dvě reflexe (ke scénářům Čínské počítací hůlky, Kde se vzala nula), ale domnívám se, že v dalších případech je její kladný efekt (byla-li použita) obsažen v pozitivním hodnocení zařazení mezipředmětových vztahů. Mezipředmětové vztahy byly nejčastěji zmiňovaným pozitem navržených didaktických materiálů. Domnívám se tedy, že učitelé rádi využívají příležitosti k jejich zařazení do výuky a vnímají jejich důležitost a pozitivní efekt ve vzdělávání, jak popisují Starý a Rusek (2019, viz kapitola 1.1.1.). Vedle matematiky, historie a zeměpisu obsahují navržené didaktické materiály přesahy do českého jazyka, anglického jazyka, výtvarné a tělesné výchovy.

Z reflexí i ohlasů mimo reflexe vyplývá, že navržené didaktické materiály motivovaly i původně nepřesvědčené učitele a to buď přímo, nebo nepřímo –

jinými slovy *„postupně zjistili, že je to vlastně baví“* (rozhovor s dr. Kaslovou 8. 4. 2024).

Teoretické vybavení učitele

Je třeba mít však na paměti, že zařazení historie matematiky do výuky může pro učitele představovat větší či menší diskomfort, protože bude postrádat základní teoretickou výbavu. Při přípravě didaktických materiálů jsem to zohlednila zařazením úvodů pro učitele k jednotlivým tématům. Z reflexí vyplývá, a zpětně to hodnotím stejně, že tento úvod nebyl v mnoha případech dostačující (např. u témat Papuánštiny,Čínských počítacích hůlek, Fibonacciho posloupnosti či u egyptských úloh). Nedostatek informací mohl být v některých případech příčinou toho, že učitel neporozuměl některým mým myšlenkám, záměrům použití určitých pomůcek či zařazení konkrétních úkolů. Souvisejícím problémem, který z reflexí vyplývá, je také skutečnost, že někteří učitelé nemají dostatek argumentů k tomu, aby svým žákům vysvětlili (nebo je navedli k poznání), proč se matematici zabývali abstraktními úlohami a úlohami, které nejsou ve skutečnosti reálné (typicky Fibonacciho úloha s králíky).

Hodnocení didaktických materiálů

Celkově učitelé hodnotili ověřované scénáře a aktivity kladně. Jedna citace za všechny:

„Zařazení historických témat do hodin matematiky se mi zdá velmi funkční a na základě mé zkušenosti jej hodnotím velmi pozitivně, na žáky to působilo velmi motivačně. Jsem ráda, že mám k dispozici škálu materiálů, které mohu využít ve všech ročnících prvního stupně,“ (učitelka H. V., Egyptský zápis čísla).

Tři učitelé vyjádřili přímou poptávku po sborníku/nápadníku didaktických materiálů pracujících s historickými prvky ve výuce matematiky.

Výhrady učitelů, kteří byli ve svém hodnocení střídmí, se týkaly především zpracování scénářů, které hodnotili jako nepřehledné. Sami by volili jiné aktivity, v jiném pořadí, s využitím dalších pomůcek. Text byl pro ně nedostatečný, často s matoucími formulacemi. V několika případech jsem z reflexí vyčetla nepochopení úlohy či jejího záměru učitelem. Plně si uvědomuji, že pokud učitel během výuky používá materiál, se kterým nesouzní, odrazí se to přirozeně na výsledku.

Návrhy na úpravy didaktických materiálů, didaktická doporučení

Na základě analýzy reflexí hodnotím vybraná témata z historie matematiky jako nosná a atraktivní pro žáky i pro učitele. Přestože některé ze scénářů byly hodnoceny jako přehledné a bez výhrad, úpravy jsou nutné. Navrhuji proto:

- přehlednější strukturování navržených scénářů a aktivit včetně členění textu,
- zvážit formulace problémových míst (zejména u témat Kde se vzala nula, Fibonacci – králíci, Natahovači provazů),
- doplnit scénáře o další doporučené aktivity a jiné možné využití v hodinách (např. různé formy šifer, kódovaných úkolů, trasování),
- obohatit úvody pro učitele.

Důležitou součástí jsou také informace a doporučení, jak s didaktickými materiály pracovat, aby jako nedostatky nebyla vnímána místa, která jsou záměrně ponechána pro učitelovu invenci. I této části bych při úpravách věnovala pozornost.

4 Závěr

V diplomové práce jsem vyřešila všechny stanovené úkoly, a to mi umožnilo splnit vytčené cíle práce.

1. Vytvořila jsem škálu didaktických materiálů s přesahem do historie matematiky. Tyto materiály obsahují studijní část pro učitele a scénáře a aktivity vhodné k zařazení do hodin výuky matematiky na 1. stupni ZŠ. Tematicky se dělí do šesti hlavních skupin – Pravěké vyjádření počtu, Zápis čísla, Kupecké počty, Kde se vzala nula, Vlastnosti čísel a Geometrie v praxi. Jednotlivá témata mají vazbu na RVP ZV. Materiály byly vytvořeny s ohledem na vývojová specifika žáků 1. stupně ZŠ.
2. Většina (14/20) navrhovaných témat byla ověřena ve výuce na 1. stupni ZŠ učiteli současně studujících na Pedagogické fakultě UK nejméně ve 4. ročníku.
3. Na základě zpětné vazby od učitelů jsem provedla analýzu jejich reflexí a kriticky přistoupila k navrhovaným materiálů.
4. Z různých důvodů, nedostatek času učitelů, nezájem o daný problém nebo menší pochopení dané problematiky, nebyly ověřeny všechny navržené aktivity.

Z reflexí vyplývá, že samo zařazení historie matematiky do výuky bylo pro žáky silným motivačním impulsem, který vzbudil jejich zájem o danou problematiku, respektive o matematiku. V tomto smyslu materiál splnil jeden z cílů, a to motivační roli ve vyučování.

Z didaktického pohledu se ukazuje, že materiál poskytuje podněty pro mnohdy plodnou a zajímavou diskusi. Žáci reagovali pozitivně především na manipulační a pohybové aktivity. Práce ve skupinách byla přínosná z více úhlů pohledu, osvědčila se žákovská dramatizace.

Zvlášť pozitivních výsledků dosáhli učitelé, kteří sami projevili hlubší zájem o navržená témata. Někteří přiznali, že se v průběhu ověřování jejich postoj k zařazování prvků historie do matematiky změnil a chtějí v tom pokračovat. S jistými nesnázemi se potýkali učitelé, kteří měli ve třídě dva nebo více žáků se specifickými vzdělávacími potřebami. Učitelé vidí přínos didaktických materiálů jako celku pro rozvoj nadprůměrných žáků.

Můžeme tvrdit, že navržená témata jsou nosná a materiály je potřeba dále rozvíjet a ověřovat. Jsem si vědoma, že by ověřování mělo jít ve dvou etapách, přičemž druhé ověřování by mělo být ověřené na větším vzorku tříd v různých typech škol ve spolupráci s učiteli s odlišně dlouhou praxí.

Spolu s tím se vynořují otázky a úkoly, které by si zasloužily další pozornost. Nabízí se např. možnost rozpracování témat do projektů/poloprojektů s ještě širším přesahem do dalších předmětů (např. vlastivěda, český jazyk, výtvarná výchova). Zamýšlím se nad tím, která další témata z historie matematiky by byla vhodná ke zpracování, které publikace či internetové zdroje vázané na historii matematiky doporučit k oživení výuky, jak propojit výuku matematiky přímo s artefakty při návštěvě muzeí.

Propojení školní matematiky s historií matematiky může přinášet další pozitiva, která v krátkodobém horizontu není možné evidovat. To by bylo nutné zmapovat v rámci dlouhodobého šetření. Ve třídách, kde by byly použité všechny didaktické materiály, by bylo vhodné zjistit, zda nastaly změny postojů žáků k matematice a k vývoji lidského poznání.

Jsem přesvědčena, že zařazení historie matematiky do učiva matematiky na 1. stupni ZŠ má hluboký smysl. Domnívám se, že se v českých podmínkách jedná o oblast s velkým potenciálem pro rozvoj, zároveň si jsem vědoma, že se jedná o dlouhodobý proces. Mimojiné to klade další nároky na učitele, kteří potřebují být dostatečně teoreticky vybaveni. Řešením by mohla být dostupná nabídka kvalitních teoreticko–metodicky–didaktických materiálů v kombinaci s podporou motivace zájmu o danou problematiku na pedagogických fakultách.

Práce na tématu historie matematiky byla pro mě náročná, ale velmi obohacující. Poznala jsem, že vytvořit didakticky kvalitní přehledný materiál je náročná disciplína. Tvůrčí práce mě ale těšila. Uvědomila jsem si některé důležité a zajímavé souvislosti z historie matematiky, které stále budí mou zvědavost a můj zájem. Zájem a nadšení, které bych chtěla v budoucnu primárně šířit mezi své žáky, a zájem o problematiku jako takovou. Zájem o to, že má diplomová práce, přes veškeré chyby, zjevné i skryté, kterých si jsem vědoma, může být v pedagogické praxi užitečná.

Seznam použitých informačních zdrojů

Literatura

ATALAY, Bülent, 2007. *Matematika a Mona Lisa: umění a věda Leonarda da Vinci*. V Praze: Slovart. ISBN 978-80-7209-919-1.

BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard (ed.), 1994. *Historie matematiky I: Seminář pro vyučující na středních školách*. Jevíčko, srpen 1993. Brno: JČMF.

BEČVÁŘ, Jindřich, 2001. *Leonardo Pisánský – Fibonacci*. Online. In: BEČVÁŘ, Jindřich, 2001. *Matematika ve středověké Evropě*. Dějiny matematiky. Praha: Prometheus [cit. 2024-03-19]. ISBN 80-7196-232-5. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401789.

BUREŠOVÁ, Jana, 2013. *Poznatky z historie v učivu matematiky 1. stupně ZŠ*. Online, diplomová práce. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta [cit. 2024-01-25]. Dostupné z: https://theses.cz/id/2dtglk/?lang=en;keywords=info#panel_html.

BURIAN, Jan, 1973. *Cesty starověkých civizací*. Kotva (Práce). Praha: Práce.

CLARK, Kathleen, KJELDSEN, Tinne, SCHORCHT, Sebastian a TZANAKIS, Constantinos, 2019. *History of Mathematics in Mathematics Education - An Overview*. Online. *Mathematica didactica*. Vol. 42, No. 1, p. 1-26. [cit. 2024-04-07]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/334139082_History_of_Mathematics_in_Mathematics_Education_-_An_Overview

FONTANA, David, 2014. *Psychologie ve školní praxi: příručka pro učitele*. Vyd. 4. Přeložil Karel BALCAR. Praha: Portál. ISBN 978-80-262-0741-2.

GINNIS, Paul, 2017. *Efektivní výukové nástroje pro učitele: strategie pro zvýšení úspěšnosti každého žáka = The teacher's toolkit : raise classroom achievement with strategies for every learner*. Ilustroval Les EVANS. Praha: ve spolupráci s nakladatelstvím Martina Romana a projektem Čtení pomáhá vydala Edukační laboratoř. ISBN 978-80-906082-6-9.

HEJNÝ, Milan, 1990. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN 80-08-01344-3.

HENRICHOVÁ, Markéta, 2007. *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Online, diplomová práce. Brno: Masarykova Univerzita v Brně, Pedagogická fakulta [cit. 2024-01-25]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/gm8og/.

HORA-HOŘEJŠ, Petr, 1995. *Toulky českou minulostí*. 3., upr. vyd. Ilustroval Pavel BROM, ilustroval Dagmar BROMOVÁ. Praha: Baronet. ISBN 80-85890-47-X.

KRYKORKOVÁ, Hana, 2011. Inventář znaků rozvojetvorného učení – Příběh. *Metodický portál: Články* [online]. 13. 12. 2011, [cit. 2024-04-13]. Dostupný z: https://clanky.rvp.cz/clanek/14205/INVENTAR-ZNAKU-ROZVOJETVORNEHO-UCENI-PRIBEH.html. ISSN 1802-4785.

KUNCOVÁ, Vendula, 2008. *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Online, diplomová práce. Brno: Masarykova Univerzita v Brně, Pedagogická fakulta [cit. 2024-01-25]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/mpwti/.

LUNDY, Miranda; TETLOW, Adam a HENRY, Richard, 2016. *Posvátná čísla: tajné kvality kvantit*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložil Stanislav PAVLÍČEK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-789-7.

MAŇÁK, Josef a ŠVEC, Vlastimil, 2004. *Cesty pedagogického výzkumu*. Pedagogický výzkum v teorii a praxi. Brno: Paido. ISBN 80-7315-078-6.

MAREŠ, Milan, 2011. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd.* 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská. ISBN 978-80-87053-64-5.

MAZUR, Joseph, 2017. *Kde se vzaly symboly: stručná historie matematického zápisu od starověku k dnešku.* Přeložil Marek ČTRNÁCT. Praha: Knižní klub. Universum (Knižní klub). ISBN 978-80-242-5820-1.

OLSEN, Scott Anthony, 2013. *Záhadný zlatý řez: největší tajemství přírody*. 2. vyd. v českém jazyce. Přeložil Petr HOLČÁK. Pergamen. Praha: Dokořán. ISBN 978-80-7363-566-4.

PETTY, Geoffrey, 2008. *Moderní vyučování*. Vyd. 5. Přeložil Štěpán KOVAŘÍK. Praha: Portál. ISBN 978-80-7367-427-4.

PICKOVER, Clifford A., 2012. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky*. Praha: Argo. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-257-0705-0.

ROONEY, Anne, 2017. *Příběh matematiky: od projektování pyramid po objevení nekonečna.* Přeložil Renata ŠTULCOVÁ. Praha: Dobrovský. Knihy Omega. ISBN 978-80-7390-579-8.

SEIFE, Charles, 2019. *Nula: životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Druhé vydání v českém jazyce. Přeložila Jana HOUSEROVÁ, přeložil Pavel HOUSER. Praha: Dokořán. Aliter (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-969-3.

SMESTAD, Bjørn. 2015. *Uses of History of Mathematics in School (Pupils Aged 6–13)*. DOI: 10.1007/978-3-319-12688-3_67. [cit. 2024-04-07]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/299823067_Uses_of_History_of_Mathematics_in_School_Pupils_Aged_6-13

STARÝ, Karel a RUSEK, Martin, 2019. *Rozvoj mezipředmětových vztahů ve škole*. Metodický materiál pro učitele. Online. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, [cit. 2024-03-06]. ISBN 978-80-7603-100-5. Dostupné z: https://pages.pedf.cuni.cz/sc25/files/2020/02/Rozvoj_mezipredmetovych_vztahu_.pdf.

Jiné online zdroje

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2023 [cit. 2018-04-05]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

Online zdroje použitých obrázků

Obr. 2: [Babylonský zápis čísel 1-59]. *Wikimedia Commons* [online]. 25. prosinec 2004 [cit. 2024-03-06]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Babylonian_numerals.jpg

Obr. 6a: [Incké kipu]. *Wikimedia Commons* [online]. 23. října 2015 [cit. 2024-03-20]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quipu.png

Obr. 17: [Ananas - spirály]. *Encyklopedie fyziky* [online]. 8. května 2012 [cit. 2024-02-14]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1499-fibonacciho-posloupnost-v-prirode

Obr. 18: [Šiška - spirály]. *ueb.cas.cz* [online]. 16. červenec 2021 [cit. 2024-02-14]. Dostupné z: https://www.denik.cz/uzijte-si-prazdniny-pokusy/rostliny-jsou-matematici.html

Obr. 19: [Vyměřování geometrických obrazců]. *The American Surveyor* [online]. [cit. 2024-02-08]. Dostupné z: https://amerisurv.com/2021/08/15/whats-a-rope-stretcher/

Seznam použitých učebnic a pracovních sešitů

BALEJOVÁ, Renata; HUBKOVÁ, Martina; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana a ŠPAČKOVÁ, Ivona, 2021. *Hravá matematika 3: pro 3. ročník ZŠ*. 2. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-142-8.

BALEJOVÁ, Renata; HUBKOVÁ, Martina; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana a ŠPAČKOVÁ, Ivona, 2021. *Hravá matematika 3: pro 3. ročník ZŠ*. 2. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-045-2.

BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie; FALTINOVÁ, Magdaléna; RYBOVÁ, Jovanka; CZEREOVÁ, Lenka et al., 2017. *Hravá matematika 5: pro 5. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-051-3.

BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie; FALTINOVÁ, Magdaléna; JANEČKOVÁ, Miroslava; RYBOVÁ, Jovanka et al., 2023-. *Hravá matematika 5: pro 5. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. 2. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-527-3.

BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie; ZDRÁHAL, Tomáš; JANČAŘÍK, Antonín; HRUBČOVÁ, Eva et al., 2019. *Hravá matematika 5: pro 5. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. 2. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-188-6.

BLAŽKOVÁ, Jana, 2008. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Markéta VYDROVÁ. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-106-0.

BLAŽKOVÁ, Jana, 2011. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-178-7.

BLAŽKOVÁ, Jana, 2011. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-179-4.

BLAŽKOVÁ, Jana a CHRAMOSTOVÁ, Ivana, 2009. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Petr PALMA. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-138-1.

BLAŽKOVÁ, Jana a CHRAMOSTOVÁ, Ivana, 2009. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Petr PALMA. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-139-8.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena, 2010. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter. ISBN 978-80-7245-216-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena, 2010. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter. ISBN 978-80-7245-217-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena, 2010. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter. ISBN 978-80-7245-218-7.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena, 2013. *Zlomky pro 4. ročník: pracovní sešit*. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-288-0.

BLAŽKOVÁ, Růžena, 2014. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 3. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-305-4.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena, 2014. Desetinná čísla: pracovní sešit pro 5. ročník : vzdělávací obor Matematika a její aplikace. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-289-7.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2019. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. 2. přepracované vydání. Ilustroval Věra Ema TATARO, ilustroval Kamil TATAR. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-407-7.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2019. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. 2. přepracované vydání. Ilustroval Věra Ema TATARO, ilustroval Kamil TATAR. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-408-4.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2019. *Matematika*. Druhé vydání. Ilustroval Karel HEJKAL, ilustroval Věra Ema TATARO. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-457-2.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2019. *Matematika*. Druhé vydání. Ilustroval Karel HEJKAL, ilustroval Věra Ema TATARO. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-456-5.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2020. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Druhé vydání. Ilustroval Karel HEJKAL. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-569-2.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2021. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Druhé vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-664-4.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2021. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Druhé vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-665-1.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2021. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Druhé vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-666-8.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2022. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. Druhé vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-782-5.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2022. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. Druhé vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-779-5.

BOMEROVÁ, Eva a MICHNOVÁ, Jitka, 2022. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. Druhé vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-780-1.

BROŽOVÁ, Miroslava; RAJŠP, Martina a ŽIC, Jasna, 2015. *Lili a Vili ve světě matematiky 3*. Přeložil Šárka HROUDOVÁ. Praha: Klett. ISBN 9788073971526.

BULÍN, Jindřich a KORITYÁK, Stanislav, 2007. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Miroslav RŮŽEK. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-075-9.

BULÍN, Jindřich a KORITYÁK, Stanislav, 2007. *Matematika: pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Miroslav RŮŽEK. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-077-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2013. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-527-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2016. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-529-7.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2016. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-581-5.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2016. *Matematika pro 1. ročník základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-528-0.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2019. *Matematika pro 2. ročník Základní školy*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství. ISBN 978-80-7235-530-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2021. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Třetí, přepracované vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-657-7.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2021. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Třetí, přepracované vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-642-3.

ČÍŽKOVÁ, Miroslava, 2021-. *Matematika pro 3. ročník základní školy*. Třetí, přepracované vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-643-0.

DIVÍŠEK, Jiří; HOŠPESOVÁ, Alena a KUŘINA, František, 2017. *Svět čísel a tvarů*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-067-6.

DIVÍŠEK, Jiří; HOŠPESOVÁ, Alena a KUŘINA, František, 2018. *Svět čísel a tvarů*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-157-4.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2018. *Matýskova matematika*. Páté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-993-7.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2019. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Čtvrté vydání. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7600-082-7.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2019. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Třetí vydání. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7600-083-4.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2020. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Čtvrté vydání. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7600-156-5.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2020. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Páté vydání. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7600-152-7.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2021. *Procvičujeme s Matýskem: počítání do dvaceti s přechodem přes desítku : pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. Páté vydání. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7600-250-0.

EIBLOVÁ, Ladislava; MELICHAR, Jan; ŠESTÁKOVÁ, Miroslava a AUSBERGEROVÁ, Marie, 2016-. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 2., upravené vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-599-0.

EIBLOVÁ, Ladislava; MELICHAR, Jan; ŠESTÁKOVÁ, Miroslava a AUSBERGEROVÁ, Marie, 2016. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 2., upravené vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-646-1.

EIBLOVÁ, Ladislava; MELICHAR, Jan; ŠESTÁKOVÁ, Miroslava a AUSBERGEROVÁ, Marie, 2016. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. 2., upravené vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-573-0.

EICHLEROVÁ, Marie; STAUDKOVÁ, Hana a VLČEK, Ondřej, 2020. *Matematika*. Vydání desáté. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-383-2.

EICHLEROVÁ, Marie; STAUDKOVÁ, Hana a VLČEK, Ondřej, 2019. *Matematika*. Vydání jedenácté. Ilustroval Zdeněk MILER, ilustroval Kateřina MILER. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-367-2.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; OLŽBUTOVÁ, Jana a KUBÍČKOVÁ, Alena, 2019. *Hravá matematika 1*. Praha: Taktik. ISBN 978-80-87881-64-4.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; OLŽBUTOVÁ, Jana a KUBÍČKOVÁ, Alena, 2019. *Hravá matematika 1*. Praha: Taktik. ISBN 978-80-87881-65-1.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie et al., 2020. *Hravá matematika 4: pro 4. ročník ZŠ*. 3. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-310-1.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie et al., 2020. *Hravá matematika 4: pro 4. ročník ZŠ*. 3. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-311-8.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; BÁRTOVÁ, Marie; BEĎAČOVÁ, Marie et al., 2020. *Hravá matematika 4: pro 4. ročník ZŠ*. 3. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-333-0.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; KUBÍČKOVÁ, Alena a ŠPAČKOVÁ, Ivona, 2022. *Hravá matematika 1: pracovní učebnice pro 1. ročník ZŠ*. 3. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-447-4.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; ŠPAČKOVÁ, Ivona a OLŽBUTOVÁ, Jana, 2022. *Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. 4. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-462-7.

HALASOVÁ, Jitka; KOZLOVÁ, Marie; PĚCHOUČKOVÁ, Šárka a TOMŠÍKOVÁ, Jana, 2015-. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: pro 1. ročník základní školy*. Nové rozšířené vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-041-3.

HALASOVÁ, Jitka; KOZLOVÁ, Marie; PĚCHOUČKOVÁ, Šárka a TOMŠÍKOVÁ, Jana, 2015-. *Matematika 1 se Čtyřlístkem: pro 1. ročník základní školy*. Nové rozšířené vydání. Ilustroval Jaroslav NĚMEČEK. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-042-0.

HEJNÝ, Milan; JIROTKOVÁ, Darina a SLEZÁKOVÁ, Jana, 2007. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-626-0.

HEJNÝ, Milan; JIROTKOVÁ, Darina a SLEZÁKOVÁ, Jana, 2007. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-627-7.

HEJNÝ, Milan; JIROTKOVÁ, Darina a SLEZÁKOVÁ, Jana, 2008. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, Milan; JIROTKOVÁ, Darina; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana a MICHNOVÁ, Jitka, 2009. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-824-0.

HEJNÝ, Milan, 2010. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, Milan, 2010. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-941-4.

HEJNÝ, Milan, 2010. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK, ilustroval Dana RAUNEROVÁ. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-942-1.

HEJNÝ, Milan, 2011. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, Milan, 2011. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-967-4.

HEJNÝ, Milan, 2011. Matematika: pro 5. ročník základní školy. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-968-1.

HEJNÝ, Milan, 2018. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-01-2.

HEJNÝ, Milan, 2018. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-02-9.

HEJNÝ, Milan, 2018. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-03-6.

HEJNÝ, Milan, 2019. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-16-6.

HEJNÝ, Milan, 2019. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-17-3.

HEJNÝ, Milan, 2019. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-18-0.

HEJNÝ, Milan, 2020. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-21-0

HEJNÝ, Milan, 2020. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-22-7..

HEJNÝ, Milan, 2020. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-23-4.

HEJNÝ, Milan, 2021. *Matematika 4: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-26-5.

HEJNÝ, Milan, 2021. *Matematika 4: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-27-2.

HEJNÝ, Milan, 2021. *Matematika 4: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-28-9.

MILAN, Hejný, 2022. *Matematika 5: Hejného metoda*. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-30-2.

HEJNÝ, Milan, 2022. *Matematika 5: Hejného metoda*. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-31-9.

HEJNÝ, Milan, 2022. *Matematika 5: Hejného metoda*. Praha: H-mat. ISBN 978-80-88247-32-6.

HOŠPESOVÁ, Alena; DIVÍŠEK, Jiří a KUŘINA, František, 1996. *Svět čísel a tvarů: matematika pro 1. ročník : [učebnice je vhodná i pro výuku matematiky podle vzdělávacího programu obecná škola]*. Ilustroval Kateřina SUŠKOVÁ. Učebnice pro základní školy. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-015-2.

HOŠPESOVÁ, Alena; DIVÍŠEK, Jiří a KUŘINA, František, 1998. *Svět čísel a tvarů: matematika pro 3. ročník : [učebnice pro základní školy]*. Ilustroval Kateřina SUŠKOVÁ. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-117-5.

HOŠPESOVÁ, Alena; DIVÍŠEK, Jiří a KUŘINA, František, 2000. *Svět čísel a tvarů: matematika pro 5. ročník*. Učebnice pro základní školy. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-192-2.

HUBKOVÁ, Martina a RYLKOVÁ, Magdaléna, 2016. *Hravý početník 4: procvičovací sešit pro 4. ročník ZŠ*. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-042-1.

JUSTOVÁ, Jaroslava, 2014. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vydání 2. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-297-2.

KOPEČKOVÁ, Soňa; TARÁBEK, Pavol; TLUSŤÁKOVÁ, Ivana a VOJKŮVKA, Karel, 2022. *Matematika pro život 1: pro 1. ročník základních škol*. Učení pro život. Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-390-3.

KOZLOVÁ, Marie; PĚCHOUČKOVÁ, Šárka a RAKOUŠOVÁ, Alena, 2013. *Matematika 3 se Čtyřlístkem: pro 3. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7238-581-2.

LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra, 2019. *Matematika*. Vydání třinácté. Ilustroval Zdeněk MILER. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-363-4.

LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra, 2019. *Matematika*. Vydání dvanácté. Ilustroval Marie TICHÁ. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-364-1.

LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra, 2019. *Matematika*. Vydání dvanácté. Ilustroval Vlasta ŠVEJDOVÁ. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-365-8.

LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra, 2019. *Matematika*. Vydání třinácté. Ilustroval Olga PTÁČKOVÁ. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-370-2.

LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra, 2019. *Matematika*. Vydání třetí. Ilustroval Lenka PROCHÁZKOVÁ. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-372-6.

LANDOVÁ, Vlasta; STAUDKOVÁ, Hana a TŮMOVÁ, Věra, 2020. *Matematika*. Vydání jedenácté. Ilustroval Olga ČECHOVÁ. Všeň: Alter. ISBN 978-80-7245-381-8.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, c1996. *Zajímavá matematika pro 4. ročník*. Ilustroval Jindřich KANIA. Olomouc: Prodos. ISBN 80-85806-36-3.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, c1997. *Zajímavá matematika (nejen) pro páťáky: 5. ročník*. Ilustroval Jindřich KANIA. Olomouc: Prodos. ISBN 80-85806-68-1.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, [tisk 2008]. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník*. 2. vyd., aktualiz. dle RVP ZV. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-203-1.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, [tisk 2008]. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník*. 2. vyd., aktualiz. dle RVP ZV. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-204-8.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2018. *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Vydání druhé. Ilustroval Jindřich KANIA. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-430-1.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2018. *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Vydání druhé. Ilustroval Jindřich KANIA. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-431-8.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2018. *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Vydání druhé. Ilustroval Jindřich KANIA. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-432-5.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2021. *Matematika a její aplikace: 1. ročník*. 2. vydání. Ilustroval Jana KUDLIČKOVÁ. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-494-3.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2021. *Matematika a její aplikace: 2. ročník*. 2. vydání. Ilustroval Jitka TLÁSKALOVÁ. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-497-4.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2021. *Matematika a její aplikace: 2. ročník*. 2. vydání. Ilustroval Jitka TLÁSKALOVÁ. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-498-1.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2021. *Matematika a její aplikace: 2. ročník*. 2. vydání. Ilustroval Jitka TLÁSKALOVÁ. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-499-8.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2021. *Zajímavá matematika pro druháky*. 2. vydání. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-510-0.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2021. *Zajímavá matematika pro třeťáky*. 2. vydání. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-509-4.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2023. *Matematika a její aplikace: 3. ročník*. 2. vydání. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-500-1.

MOLNÁR, Josef a MIKULENKOVÁ, Hana, 2023. *Matematika a její aplikace: 3. ročník*. 2. vydání. Modrá řada (Prodos). Olomouc: Prodos. ISBN 978-80-7230-502-5.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2017. *Matýskova matematika: pro 4. ročník*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072899753.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2017. *Matýskova matematika: pro 4. ročník*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072899760.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2017. *Matýskova matematika: pro 4. ročník*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072899432.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2017. *Geometrie pro 5. ročník: Matýskova matematika*. Druhé vydání. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 9788072899487.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2018. *Geometrie: pro 5. ročník : Matýskova matematika*. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-855-8.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2018. *Matýskova matematika: pro 5. ročník*. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-856-5.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2018. *Matýskova matematika: pro 5. ročník*. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-854-1.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2018. *Matýskova matematika: pro 5. ročník*. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-879-4.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2018. *Matýskova matematika: pro 5. ročník*. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-873-2.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2020. *Geometrie: Matýskova matematika : pro 3. ročník základní školy*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072897452.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2020. *Matýskova matematika: pro 3. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072898695.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2020. *Matýskova matematika: pro 3. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072898213.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František, 2021. *Geometrie pro 4. ročník: Matýskova matematika*. Třetí vydání. Ilustroval Martin BAŠAR, ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7600-240-1.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2021. *Matýskova matematika*. Druhé vydání. Brno: Nová škola. ISBN 9788072898701.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2023. *Geometrie: Matýskova matematika : pro 3. ročník základní školy*. Třetí vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 9788076000728.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila, 2023. *Geometrie: pro 4. ročník : Matýskova matematika*. Druhé vydání. Ilustroval Martin BAŠAR. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 9788072898411.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KOZLOVÁ, Marie a RAKOUŠOVÁ, Alena, 2014. *Matematika 4: [pro 4. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-017-8.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KOZLOVÁ, Marie a RAKOUŠOVÁ, Alena, 2014. *Matematika 4: [pro 4. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-028-4.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KAŠPAROVÁ, Martina; RAKOUŠOVÁ, Alena a KOZLOVÁ, Marie, 2015. *Matematika 5*. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-062-8.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KAŠPAROVÁ, Martina a RAKOUŠOVÁ, Alena, 2021. *Matematika 5: hybridní pracovní sešit pro 5. ročník základní školy*. 2. vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-674-3.

PĚCHOUČKOVÁ, Šárka; KAŠPAROVÁ, Martina a RAKOUŠOVÁ, Alena, 2021. *Matematika 5: hybridní pracovní sešit pro 5. ročník základní školy*. 2. vydání. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus. ISBN 978-80-7489-675-0.

PLACÁK, Václav, 2017. *Barevné příklady 1: pracovní sešit pro 1. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. Ilustroval Hana VAVŘINOVÁ. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-085-8.

PLACÁK, Václav, 2017. *Barevné příklady 2: pracovní sešit pro 2. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. Ilustroval Hana VAVŘINOVÁ. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-086-5.

ROSECKÁ, Zdena, 2013. *Počtářské chvilky: pracovní sešit pro 5. ročník : (74 matematických rozcviček + číselné řetězce)*. 4. vyd. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-508-3.

ROSECKÁ, Zdena, [2012-2013]. *Matematika snadná, zajímavá i zábavná pro 3. ročník základní školy: počítáme s chutí a radostí*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-29-2.

ROSECKÁ, Zdena, [2012-2013]. *Matematika snadná, zajímavá i zábavná pro 3. ročník základní školy: počítáme s chutí a radostí*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-29-2.

ROSECKÁ, Zdena, [2012-2013]. *Matematika snadná, zajímavá i zábavná pro 3. ročník základní školy: počítáme s chutí a radostí*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-44-5.

ROSECKÁ, Zdena, [2011-2014]. *Veselé počítání: pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-01-8.

ROSECKÁ, Zdena, [2011-2014]. *Veselé počítání: pracovní sešit pro 2. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-08-7.

ROSECKÁ, Zdena, [2012-2014]. *Živé počítání: pracovní sešit pro 1. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-34-6.

ROSECKÁ, Zdena, [2012-2015]. *Bystré počítání: pracovní sešit pro 3. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-27-8.

ROSECKÁ, Zdena, [2012-2015]. *Bystré počítání: pracovní sešit pro 3. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-43-8.

ROSECKÁ, Zdena, [2013-2014]. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-48-3.

ROSECKÁ, Zdena, [2013-2014]. *Matematika pro 4. ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-60-5.

ROSECKÁ, Zdena, [2014-2015]. *Zajímavé počítání: pracovní sešit pro 4 ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-46-9.

ROSECKÁ, Zdena, [2014-2015]. *Zajímavé počítání: pracovní sešit pro 4 ročník základní školy*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-61-2.

ROSECKÁ, Zdena a PROCHÁZKOVÁ, Eva, c2010. *Matematika: snadné a zajímavé učení pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola. ISBN 978-80-7289-200-6.

ROSECKÁ, Zdena a PROCHÁZKOVÁ, Eva, [2011-2014]. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-00-1.

ROSECKÁ, Zdena a PROCHÁZKOVÁ, Eva, [2011-2014]. *Matematika snadná a zajímavá pro 2. ročník základní školy: počítejte s Vítkem a Amálkou*. Duhová řada. Brno: Nová škola Brno. ISBN 978-80-87565-07-0.

SEDLÁČKOVÁ, Jaroslava Jiro; RAJŠP, Martina a ŽIC, Jasna, 2013. *Lili a Vili ve světě matematiky 1: [učebnice pro 1. ročník ZŠ]*. Ilustroval Matej DE CECCO. Praha: Klett. ISBN 978-80-7397-112-0.

TARÁBEK, Pavol a KOPEČKOVÁ, Soňa, 2005. *Matematika 1: pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Aleš ČUMA. Brno: Didaktis. ISBN 80-7358-034-9.

TARÁBEK, Pavol; KOPEČKOVÁ, Soňa a VOJKŮVKA, Karel, 2005. *Matematika 2: pro 1. ročník základní školy*. Brno: Didaktis. ISBN 9788073580353.

TARÁBEK, Pavol, 2005. *Matematika 3: pro 1. ročník základní školy*. Brno: Didaktis. ISBN 9788073580360.

TLÁSKALOVÁ, Andrea, 2016. *Hravý početník 3: procvičovací sešit pro 3. ročník ZŠ*. Praha: Taktik.

VACKOVÁ, Ivana; FAJFRLÍKOVÁ, Ludmila a UZLOVÁ, Zdeňka, 2016. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 2., rozšířené vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-575-4.

VACKOVÁ, Ivana; FAJFRLÍKOVÁ, Ludmila a UZLOVÁ, Zdeňka, 2016. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 2., rozšířené vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-666-9.

VACKOVÁ, Ivana; FAJFRLÍKOVÁ, Ludmila a UZLOVÁ, Zdeňka, 2016. *Matematika pro 5. ročník základní školy*. 2., rozšířené vydání. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, akciová společnost. ISBN 978-80-7235-578-5.

VONDRÁŠKOVÁ, Štěpánka; HUBKOVÁ, Martina; FALTINOVÁ, Magdaléna; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; ŠPAČKOVÁ, Ivona et al., 2022. *Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV*. 4. vydání. Praha: Taktik. ISBN 978-80-7563-461-0.

Seznam příloh

Příloha 1 – Tabulky výsledků analýzy učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ

Příloha 2 – Průvodní dopis

Příloha 3 – Dodatečný dotazník

Příloha 4 – Vrubovky

Příloha 5 – Babylonský zápis čísla

Příloha 6 – Egyptský zápis čísla

Příloha 7 – Čínské počítací hůlky

Příloha 8 – Domino

Příloha 9 – Kde se vzala nula – PL

Příloha 10 – Kde se vzala nula

Příloha 11 – Eratosthenovo síto

Příloha 12 – Fibonacci – králíci

Příloha 13 – Fibonacci – přírodniny

Příloha 14 – Fibonacci – spirály

Příloha 15 – Natahovači provazů I. – PL

Příloha 16 – Natahovači provazů I.

Příloha 17 – Natahovači provazů II.

Příloha 18 – Thales v Egyptě

Příloha 19 – Tabulka četnosti ověřených témat

Příloha 20 – Tabulka navrhovaných úprav a doporučení

Příloha 21 – Tabulka aktivit s pozitivním ohlasem u žáků

Příloha 22 – Tabulka nejčastějších otázek žáků k danému tématu

Příloha 23 – Tabulky sumarizující veškeré obdržené reflexe podle tématu