Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Porozumění myšlence rovnic ve 4. a 5. ročníku na ZŠ

Understanding the idea of equations in the 4th and 5th grade of elementary school

Jaromír Bednařík

Vedoucí práce: PhDr. Jana Slezáková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1.stupeň základní školy

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma Porozumění myšlence rovnic ve 4. a 5. ročníku ZŠ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 09.04.2024

Tímto bych rád poděkoval vedoucí diplomové práce PhDr. Janě Slezákové, Ph.D. za cenné rady, odborný komentář, trpělivost a za všechen věnovaný čas. Dále bych chtěl poděkovat účastníkům výzkumu a v neposlední řadě rodině a přátelům za jejich podporu.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá tím, jak žáci 4. a 5. ročníku rovnice chápou a řeší. Zkoumá chyby v jejich řešení a navrhuje možnosti reedukace.

V teoretické části vysvětluje hlavní pojmy jako rovnost a rovnice. Vyhledává ukotvení problematiky rovnic v RVP a vyhledává úlohy vhodné pro propedeutiku rovnic v učebnicích ze tří nakladatelství pro 1. stupeň základní školy.

Experimentální část obsahuje metodologii tvorby před-experimentu a shrnuje důvodu pro vytvoření finálního experimentu. Popisuje žákovská řešení vybraných úloh, vyhledává chyby a snaží se stanovit vhodnou formu reedukace.

Klíčová slova: rovnost, rovnice, reedukace, propedeutika, experiment, učebnicové řady

Abstract

The diploma thesis deals with how 4th and 5th grade students understand and solve equations. It examines errors in their solutions and suggests possibilities for reeducation.

In the theoretical part, it explains main concepts such as equality and equation. It seeks to anchor the issue of equations in the RVP and searches for tasks suitable for the propaedeutics of equations in textbooks from three publishers for the 1st stage of primary school.

The experimental part contains the methodology of creating a pre-experiment and summarizes the reasons for creating the final experiment. It describes students solutions to selected tasks, searches for errors, and tries to determine a suitable form of reeducation.

Key words: equality, equation, reeducation, propaedeutics, experiment, textbook series

Obsah

Úvod 1
Teoretická část 2
1 Pojmy 2
1.2 Rovnost 2
1.3 Rovnice 3
1.4 Rovnice a slovní úlohy 7
1.5 Rovnice a jejich propedeutika v RVP 8
1.6 Práce s chybou 8
2 Porovnání učebnicových řad 11
2.1 Propedeutika rovnosti/nerovnosti 13
2.2 Práce s rovnicovými situacemi 14
2.2.1 Hadi 14
2.2.2. Šipkový graf 15
2.2.3 Sčítací trojúhelníky/pyramidy 16
2.2.4. Váhy 17
2.2.5. Pavučiny 18
2.2.6. Myslím si číslo 18
2.3. Práce s rovnicí 19
2.3.1. Rovnice s rámečkem/podtržítkem 19
2.3.2. Vláčky, Krokování, Zvířátka dědy Lesoně, Algebrogramy 20
2.3.3. Rovnice s obrázkem/symbolem 22
2.4. Soustava rovnic 23
2.5. Slovní úlohy 25
2.6. Úlohy obsahující myšlenku izomorfismu 25
Praktická část 27
3 Metodologie 27
3.1. Cíle experimentů 27
3.2. Tvorba před-experimentu 28
3.3. Tvorba experimentu 31
3.3.1. Výběr a sestavení úloh 32
3.3.2. Výběr žáků 33
3.3.3. Průběh experimentu 34
3.3.4. Zpracování dat 35
3.4. Úlohy a jejich řešení 35
3.4.1. Rozdělení zkoumaných řešení úloh 36

3.4.2. Úlohy na práci s rovností a nerovností 36
3.4.3. Úlohy na práci s rovnicí 40
3.4.3.1. Úlohy s neznámou vyjádřenou podtržítkem 40
3.4.3.2. Úlohy s neznámou vyjádřenou písmenem 52
3.4.3.3 Úloha typu „Myslím si číslo…“ 59
3.4.3.4. Slovní úloha s rovnicí jako jednou z možných strategií řešení 60
3.4.3.5. Slovní úloha s kuličkami – rovnice jako jedno z možných řešení 61
4 Shrnutí 68
4.1 Úlohy na práci s rovností/nerovností 68
4.2 Úlohy na práci s rovnicí 69
4.2.1 Neznámá součástí operace 69
4.2.2 Znázornění neznámé a její další využití ve výpočtu 69
4.3. Slovně zadané úlohy – rovnice jako jedno z možných řešení 70
4.4. Kalkulativní chyby 72
4.5. Myšlenka izomorfizmu 72
5 Závěr 74
6 Seznam literatury 76
6.1 Knihy a články 76
6.2 Elektronické zdroje 77
6.3 Učebnice 77
6.3.1 Alter 77
6.3.2 Nová škola 79
6.3.3 H-mat 80
7 Přílohy 82
7.1 Zadání před-experimentu 82
7.2 Zadání experimentu 83
7.3 Vybraná žákovská řešení 86
Experiment 5 – 23.3.2022 – Jára a Sváťa – 4.A 86
Experiment 10 – 11.5.2022 –Natálka a Dominika – 4.B 92
7.4 Vybrané přepisy rozhovorů 97
Experiment 5 – 23.3.2022 – Jára a Sváťa – 4.A 97
Experiment 10 – 11.5.2022 –Natálka a Dominika – 4.B 112

Úvod

Poté, co jsem došel do finálního ročníku studia na Pedagogické fakultě, vyvstala otázka, z jakého předmětu budu psát svou diplomovou práci.

Vzhledem k mé studijní specializaci, kterou byla tělesná výchova, se nabízela nejjednodušší cesta psát diplomovou práci na tělovýchovné téma. Když jsem o jejím smyslu přemýšlel hlouběji, uvědomil jsem si, že patrně neobjevím nic převratného, co by mohlo změnit daný předmět. Rozhodl jsem se tedy pro diplomovou práci z předmětu matematika, protože tam jsem cítil potřebu se více rozvíjet. V mém rozhodnutí mě podpořila i paní doktorka Slezáková, která mi dokonce nabídla několik témat ke zpracování.

Rozhodl jsem se pro téma věnující se rovnicovému myšlení, protože osobně jsou pro mě rovnice univerzální matematický nástroj, ale zároveň vnímám i obavy některých kolegů (učitelů 1.stupně) a dospělých, pro které jsou rovince náročnou oblastí. Na prvním stupni jsou rovnice pro žáky velmi těžkou oblastí, ke které je propedeuticky připravujeme.

Zároveň jsem také slýchal nářky kolegů z druhého stupně, kteří si stěžovali, jak ti žáci nic nechápou a že nedokážou stvořit rovnici ze slovní úlohy, natož s ní pracovat.

Chtěl jsem tedy proniknout hlouběji do tématu. V hlavě mi zněly tyto otázky: Máme učit na prvním stupni rovnice? Jaká je propedeutika rovnic? Co je stěžejní prvek pochopení v oblasti rovnic? Jak budou děti ve čtvrtých a pátých ročnících rovnice řešit? Jaké budou komplikace jejich řešení? Počítají nejpoužívanější učebnice s propedeutikou rovnic? Je propedeutika rovnic zakotvena v RVP?

Na základě uvedených otázek jsem si pro sebe zformuloval tři základní cíle, kterých bych se chtěl věnovat:

- Jaké máme možnosti realizovat propedeutiku rovnic na prvním stupni.
- Porovnat zpracování a zařazení propedeutiky rovnic ve vybraných řadách učebnic.
- Vybrat takové úlohy do experimentu se žáky, které mi umožní odhalit obtíže žáků při jejich řešení.
- Realizovat s vybranými úlohami experiment a popsat příčiny žákovských chyb.

Teoretická část

V teoretické části své práce se budu věnovat vysvětlení termínů, které se váží k tématu a cíli mé práce. Dále se zaměřím na porovnání tří učebnicových řad a zmíním i práci s chybou.

1 Pojmy

1.2 Rovnost

Rovnost je relace, se kterou se žák přirozeně setkává od první třídy (Budínová,2018). Její správné pochopení je velmi důležité pro pozdější pochopení rovnic a je tedy důležitou součástí propedeutiky rovnic, kterou můžeme na prvním stupni žákům zprostředkovat. Pochopení rovnosti v učebnicích prvního stupně vychází přirozeně z řešení úloh a situací a žádná její definice se v učebnicích prvního stupně nevyskytuje. Pouze někteří autoři uvádějí definici rovnosti v učebnicích druhého stupně. Konkrétně jsem našel definici rovnosti v učebnici z nakladatelství SPN pro 8.ročník:

Rovnost je jeden z nejdůležitějších pojmů školské matematiky. Rovnost a = b vyjadřuje, že proměnné a, b nahrazují stejná čísla, např. $a = \frac{3}{4}$, $b = 0{,}75$. *Obě tato čísla mají týž obraz na číselné ose. Zápis 15 + 8 = 25 - 2 je rovností dvou číselných výrazů stejné hodnoty (23)* (Půlpán, 2009).

Autory patrně vedla k uvedení této definice snaha zdůraznit žákům význam symbolu rovnítka. Pochopení rovnosti u žáků totiž prochází proměnou, jak je popsáno: *Zatímco u aritmetických úloh představuje znak = pokyn k výpočtu, jehož výsledkem je získání konkrétní hodnoty, u algebraických úloh jde většinou o znak ukazující zachování rovnosti (výrazů, popř. stran rovnice). Tento znak má tedy pro úpravu algebraických výrazů zásadní roli.* (Vondrová, Rendl, 2015)

Dále k problematice pochopení rovnosti na prvním stupni Budínová (2018) uvádí: *Zápis 2 + 3 = ___ čte žák 1. stupně zleva doprava a vnímá ho implikačně: Jestliže ke dvěma přičtu tři, musím dostat pět. Někteří autoři soudí, že pokud se žáci při výuce sčítání setkávají pouze s tímto způsobem zadávání, vzniká implikační způsob myšlení a rovněž si osvojují nedostatečnou interpretaci symbolu rovná se. Booker (1987) nebo Booth (1988) například* *zastávají názor, že tímto způsobem žák nabývá přesvědčení, že symbol „rovná se“ znamená „spočítej“, spíše, než aby chápal, že se jedná o relaci ekvivalence.* (Budínová, 2018)

Tento názor o implikačním pochopení symbolu rovnítka se potvrzuje Vondrové (2015): *To, že tento význam není žákům zřejmý dokumentuje studie A.Dembyové (1997) . Autorka položila žákům ve věku 13 až 15 let, kteří úspěšně provedli algebraickou úpravu výrazu, otázku, zda jsou si původní a konečný výraz rovny. Většina žáků nedokázala odpovědět nebo odpověděla záporně* (Vondrová, Rendl 2015).

Studie (Herscovics, Linchevski, 1994), kterou uvádí Vondrová (2015) dále potvrdila, že žáci vnímají rovnítko jako pokyn „vypočítej“, což potvrzuje hypotézu, že návyky a představy z oblasti aritmetiky souvisí s obtížemi v algebraických úlohách.

Jak vyplývá z uvedených citací, formování správného pochopení rovnítka jako relace ekvivalence je nutné podpořit již od prvního ročníku. Nástrojem k vymodelování správného pochopení jsou rozmanité úlohy, zaměřené na vyobrazení rovnítka ve významu relace ekvivalence. Zaměřím svoji pozornost na vyhledávání úloh, které budou nabourávat pochopení rovnítka jako symbolu vypočítej.

1.3 Rovnice

Podle mého názoru rovnice hrají významnou roli v oblasti matematického vzdělání. Potvrzuje to i Vondrová, Kuřina (2022): *Rovnice jsou důležitou složkou matematického vzdělávání na základní i střední škole, a to nejen pro jejich vzdělávací hodnotu (práce s proměnnými, úprava algebraických výrazů, výpočetní technika…), ale hlavně proto, že hrají důležitou roli v nejrůznějších aplikacích matematiky.*

Pokud budeme chtít vymezit pojem rovnice, najdeme těchto vymezení celou řadu[1]. Já jsem zvolil pohled, který uvádí Hejný (1989). Charakterizuje rovnice z didaktického hlediska a vychází z jejích charakteristických prvků:

---

[1] Existuje i matematické vymezení rovnice pomocí pojmů funkce, kterému se ale nevěnuji, protože mým zájmem je vyučování matematice na prvním stupni základní školy.

Rovnicí o jedné neznámé rozumíme úlohu rozhodnout, zda existují taková čísla z určitého číselného oboru **Ω***, pro něž dvě dané funkce f, g jedné proměnné x, definované nad oborem* **Ω** *nabývají týchž hodnot, a v případě, že taková čísla existují, nelézt je všechna. Tuto úlohu zpravidla zapisujeme f (x) = g (x) a také tento zápis samotný někdy označujeme názvem rovnice.* (Hruša, Vyšín, 1964, s. 147) *a) Rovnítko*

b) Neznáme (označené x, y, ...) a známe číslo navzájom viazané rovnítkom

c) Zmysluplnosť príkazu „riešte rovnicu".

Riešenie rovnice je istý myšlienkový proces postupnej transformácie danej rovnice na rovnosť typu neznáma = známe číslo. (Hejný a kol., 1989)

Jinými slovy to stejně vyjádřili také Kuřina, Vondrová (2022): *Snaha všechny matematické pojmy explicitně definovat by však v případě školské matematiky byla kontraproduktivní a v učebnicích se zpravidla neuplatňuje. Např. v učebnici (Charvát et al.1999 s .9) je rovnice s jednou neznámou charakterizována jako „ zápis rovnosti dvou výrazů, v nichž se může vyskytovat nějaké písmeno (x,y,t apod.) označující tzv. neznámou." Následně je podán konkrétní příklad a na něm je ukázáno, že řešení rovnice (neboli kořen rovnice) je každé číslo, jehož dosazením do rovnice dostaneme platnou rovnost. Tento „implicitní" přístup k matematickým poznatkům považujeme v mnoha případech za vhodný.* (Kuřina, Vondrová 2022, s.99)

Jak z citací vyplývá, odborníci v oblasti matematiky se shodují v tom, že porozumění rovnicím není možné žákům zprostředkovat skrze definice a různá vysvětlení. Rovnice by měly začít řešením propedeutických úloh, které také vedou k rozvíjení vlastních řešitelských strategií žáků, vycházejících z dříve založených vědomostí.

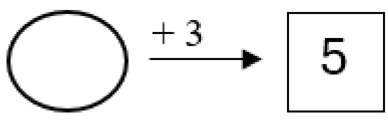
Obtíže žáků při řešení rovnic popisuje Kuřina, Vondrová (2022) takto: *Jednak nerozumí podstatě ekvivalentních úprav (včetně toho, že mají představu rovnítka jako znaku oddělujícího výpočet od výsledku, a ne jako znaku pro ekvivalenci dvou stran rovnice) a jednak nedostatečně zvládli algebraické techniky. Jedno bez druhého tvoří neúplné poznání.*

Po vytyčení obtíží, se kterými se v žákovských řešeních setkávají, pokračuje Kuřina, Vondrová (2022) s návrhem, jak změnit výuku, aby žáci rovnice chápali lépe: *Žákům je třeba nechat dostatek času k tomu, aby si osvojili podstatu pojmu rovnice a jejích ekvivalentních úprav. Pojem rovnice je propedeuticky připravován už na 1. stupni základní školy. Žáci řeší různé úlohy, v nichž doplňují rovnost, kde je místo neznámého čísla vynechané místo, prázdný obdélník, otazník či písmeno x. Tyto rovnice však není třeba řešit pomocí pravidel, neměli bychom vynechávat stádium pokusu – omylu, v němž žáci získávají mnohé zkušenosti a může vést k systematickému uvědomělému pokusu evidovanému např. pomocí tabulky.*

Rovnice je tedy třeba zakládat v co nejranějším věku, aby žáci měli dostatek času jim porozumět. Tuto myšlenku rozvádí Kvasz (2013): *Na co bychom chtěli při zápisu a řešení rovnic obzvláště upozornit, je poměrně dlouhá doba, během níž se rovnice zapisovaly slovně a jejich řešení se uváděla v podobě regulí, tedy postupů zapsaných v přirozeném jazyce. (…)Zdá se, že v tomto bodě se vyučování zcela rozchází s historií. Namísto kultivace algebraického myšlení, tedy řešení slovních úloh pomocí operací jako al-džabr a al-rad, zapsaných prostřednictvím přirozeného jazyka se vyučování zpravidla zaměřuje na nácvik formálních pravidel symbolické manipulace s algebraickými výrazy. (…) Tím odvádí pozornost od obsahu, tj. algebraického myšlení, k formě, tj. symbolice, která, zdá se, rozvoji algebraického myšlení spíše brání, než napomáhá.*

Myšlenka o propojení vývoje myšlení u lidského druhu a lidského jedince, pochází z prací psychologa Piageta (1972) o vývoji lidského poznání. Hejný (1989) tuto myšlenku zpracovává do teorie tzv. Genetické paralely. V teorii nastiňuje, že v případě vědy se nejedná pouze o hromadění poznatků, ale spíše o jejich propojování, zpřesňování, strukturalizaci. Jak se teorie Genetické paralely podle Hejného (1989) odráží ve školním prostředí, můžeme vysledovat například zde: *Babylonský postup je možné označit jako fylogenetickou propedeutiku rovnic a aritmetiky vůbec. Toto období trvalo přinejmenším jedno tisíciletí. Podobně i dítě potřebuje určitý čas, ve kterém k rovnicím přistupuje jako k hádankám, a ne jako k problémům spadajícím do sféry přesného výpočtu. Učitele tato skutečnost mnohdy překvapí. Nedokáží pochopit, proč při řešení rovnic děti zkouší uhádnout výsledek a nepostupují systematickými metodami, které jim oni názorně ukázali. Podstatou nedorozumění je skutečnost, že učitel si neuvědomuje zákonitosti geneze.*

Další myšlenkou, kterou je třeba v rámci propedeutiky rovnic třeba zdůraznit je, že není vhodné rovnice oddělovat od ostatních matematických témat, ale je důležité jejich propedeutiku vyučovat jako součást jiných matematických oblastí a prostředí (viz. Hejného metoda). Rovnice totiž jsou přirozenou součástí procvičování základních operací například v úlohách ___ + 3 = 5; 3 . ____ = 12; 27 : ___ = 9; 6 = 12 - ____. Nebo se objevují v úlohách, které Hejný nazývá Hadi. V jiných učebnicích je můžeme najít třeba jako řetězce:



Dále může být součástí úloh „Myslím si číslo“ např. *Myslím si číslo, když k němu přičtu 3, vyjde mi 5. Jaké číslo jsem si myslel?* Tento názor podporuje citace z Budínové (2018), která komentuje propedeutiku rovnic, navrženou Vondrovou: *Jako propedeutiku oblasti řešení lineárních rovnic uvádí Vondrová úlohy typu „myslím si číslo", ale také jednoduché lineární rovnice (zapsané nejdříve pomocí čísel a např. prázdného obdélníku, posléze písmena x). Poznamenává, že tyto úlohy mohou řešit již žáci na 1.stupni, přičemž využívají metodu pokusu a omylu, později také systematický experiment.* (Budínová, 2018)

Kombinováním matematických témat získají děti vhled do souvislostí různých oblastí matematiky, budou vnímat matematiku jako živoucí organismus. Bude zde menší pravděpodobnost, že látku zapomenou, jako se tomu stává v případě, když učíme matematiku v oddělených tematických blocích.

O vývoji žákovského pochopení rovnic na prvním stupni ZŠ hovoří i Slezáková, Jirotková (2021) ve svém webináři. Vytyčují zde několik etap, kterými by propedeutika rovnic měla projít:

1) Sémantické období – období rovnicových úloh řešených pomocí sehrávek s důrazem na žákovský prožitek z řešení (např. úlohy krokování z HMVM).
2) Manipulace – období přechodu od sehrávek k manipulaci (například figurky na krokovacím pásku – modelování situace)
3) Ikonický zápis – tvorba zápisu pomocí ikon (značek), umožňující dětem uchopení rovnicové situace (šipkový zápis krokovací úlohy, úlohy s váhami).
4) Matematický zápis - tvorba zápisu v jazyce matematiky, jako vyvrcholení celého procesu. (Žák má nicméně vždy možnost vrátit se o krok zpět, pokud tvorbě matematického zápisu neporozumí).

Propedeutiku rovnic u žáků na prvním stupni vysvětluje i Keiran (2004). Směřuje svá doporučení hlavně k propedeutice algebry. Nicméně toto téma s rovnicemi velmi úzce souvisí: *Jak naznačuji výše, studenti, kteří pracují v rámci aritmetického referenčního rámce, často nevidí relační aspekty operací; jejich zaměření je na výpočet. Proto je vyžadována značná úprava postupu při rozvíjení algebraického způsobu myšlení, která zahrnuje, ale není omezena na:*

1. *Zaměření na vztahy, a ne pouze na výpočet číselné odpovědi;*
2. *Zaměření na operace i jejich inverze a na související myšlenku dělání / rušení;*
3. *Zaměření jak na reprezentaci, tak na řešení problému, nikoli pouze na jeho řešení;*
4. *Zaměření jak na čísla, tak na písmena, nikoli pouze na čísla. To zahrnuje:*

- *(I) práci s písmeny, která mohou být někdy neznámé, proměnné nebo parametry;*
- *(II) přijímání neuzavřených literárních výrazů jako odpovědí;*
- *(III) porovnávání výrazů pro ekvivalenci na základě vlastností, nikoli na základě číselného hodnocení;*

5. *Přeorientování významu znaménka rovná se.*[2]

Je tedy patrné, že domácí i zahraniční odborníci na didaktiku matematiky se shodnou v tom, že je nutné pracovat s propedeutikou rovnic již na prvním stupni, shodují se také v principech, které by se měly na této cestě dodržovat, přičemž důraz kladou na pochopení smyslu operací a symbolu rovnítka, jako relaci ekvivalence.

1.4 Rovnice a slovní úlohy

Zkoumáním řešení slovních úloh se v této práci nezabývám, zabývám se především schopností žáků řešit rovnice. Proto se více tématem slovních úloh nezabývám. Na poli české didaktiky matematiky se slovními úlohami nejvíce zabývá Vondrová (2019).

Do experimentu jsem nicméně použil dvě slovní úlohy, u kterých jsem byl zvědav, zda žáci během matematizace slovní úlohy – viz. Vondrová, Rendl (2015)[3], použijí rovnici, jako

---

[2] *As the above suggests, students operating in an arithmetic frame of reference tend not to see the relational aspects of operations; their focus is on calculating. Thus, considerable adjustment is required in developing an algebraic way of thinking, which includes, but is not restricted to: 1. A focus on relations and not merely on the calculation of a numerical answer; 2. A focus on operations as well as their inverses, and on the related idea of doing / undoing; 3. A focus on both representing and solving a problem rather than on merely solving it; 4. A focus on both numbers and letters, rather than on numbers alone. This includes: (i) working with letters that may at times be unknowns, variables, or parameters; (ii) accepting unclosed literal expressions as responses; (iii) comparing expressions for equivalence based on properties rather than on numerical evaluation; 5. A refocusing of the meaning of the equal sign.*(Kieran, 2004)

[3] *Žák úlohu nejdříve vnitřně přijme (tedy je ochoten ji řešit) a snaží se jí porozumět (např. si uvědomuje, co je dáno a co hledáme), přičemž je učitelem veden k tomu, aby si udělal zápis zadání. Domníváme se, že v této fázi vzniká mentální reprezentace úlohy, ve které jsou údaje a vztahy v dané úloze nejprve simultánně uchopeny ve formě schématu řešení a následně se opět „rozvinují", nyní však již v matematickém jazyce. Další fáze je tedy matematizace, kdy žák formuluje úlohu v jazyce matematiky. Ten může být aritmetický (pomocí výpočtů), algebraický (např. rovnicemi), či pomocí různých obrázků a diagramů. Následně žák provede řešení matematicky formulované úlohy a získaný výsledek ověří pomocí sémantické zkoušky v kontextu úlohy a reality.* (Vondrová, Rendl, 2015)

jednu z možných řešitelských strategií, nebo se uchýlí ke způsobům řešení, ve kterých jsou si jistější.

1.5 Rovnice a jejich propedeutika v RVP

Pokud bychom si pro tématiku rovnic vzali k ruce doporučení zapsaná v RVP, zjistili bychom, že se na prvním stupni s tématem rovnic nesetkáme. Nenajdeme zde ani žádnou cílenou zmínku o propedeutice.

Nicméně při pozornějším hledání najdeme několik odstavců, které se k propedeutice rovnic dají využít:

***M-3-1-02** - čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti*

***M-3-1-05** řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace*

***M-5-1-04** řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel* (RVP ZV, 2021)

Přestože v RVP nenajdeme přímo téma rovnice, je patrné, že žák se s rovnicemi setkává již od prvního ročníku (viz. kapitola 1.3). Na druhém stupni už je v RVP jasně formulována problematika rovnic:

***M-9-1-08** formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav*

***M-9-2-03** určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti*

***M-9-2-04** vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem* (RVP ZV, 2021)

1.6 Práce s chybou

V kapitole 1.3, jsem ukázal, jakým směrem by asi měla postupovat propedeutika rovnic na prvním stupni. Součástí tohoto procesu musí být i práce s chybou, která může výuku a rozvoj žáka velmi obohatit.

Chybu jsme dlouho v našem sociokulturním prostředí vnímali jako něco negativního po čem následuje trest – například v Bibli (2023). Konkrétně ve Starém zákoně najdeme mnoho příběhů na toto téma. Vzpomeňme alespoň na Adama a Evu a jejich vyhnání z Ráje, Noa a jeho syny, Zmatení jazyků, Jonáše apod. Díky tomuto pohledu jsme se naučili chyb bát nejen jako děti, ale i jako dospělí.

Naopak Nový zákon, přináší změnu, například v Lukášově evangeliu (L 6:37) se dočteme: *„Nesuďte, a nebudete souzeni; nezavrhujte, a nebudete zavrženi; odpouštějte, a bude vám odpuštěno.“* Jak vidíme, Nový zákon, na rozdíl od Starého, přináší naději chybujícím a porozumění tomu, že mýlit se je lidské. Z didaktického hlediska je novozákonní přístup v žákovském prostředí daleko účinnější, jak potvrzuje Hejný (2004): *Učitel, který vede žáka ke strachu z chyby, zpomaluje jeho kognitivní rozvoj, protože strach odebírá intelektuální energii. Dlužno dodat, že takové konání učitele není v důsledkem zlé vůle, ale toho, že i on byl vychován v prostředí, které chybu vnímalo jako jev, jehož je nutno se bát. Učitel, který vede žáka k tomu, aby se chyb nebál a poučil se z nich, urychluje žákův matematický i osobnostní růst.*

Hejný (2004) shrnuje postup žáka při práci s chybou takto:

1. poznání přítomnosti chyby,

2. lokalizace chyby,

3. věcná analýza chyby (proč je daná myšlenka chybná, případně i s čím chybná představa souvisí a jaké případné chybné představy jsou s ní propojeny),

4. odstranění chyby,

5. procesní analýza chyby (jak k chybě došlo),

6. vyvození poučení

Vliv chyby v procesu učení uvádí i Boaler (2018), která ve svém článku hovoří o zkoumání chyby a jejího významu ve vzdělávání a jejích dopadech na činnost mozku z pohledu neurovědy. Boaler zde uvádí studii z roku 2011, která dokazuje, že pokud člověk udělá chybu, jeho synaptická aktivita v mozku se zvýší: *To, co je tak důležité na studii týmu Mosera (2011),* *je to, že ukázala, že dochází k většímu růstu mozku, když lidé dělají chyby, než když odpovídají správně na otázky.*[4]

Práce je součástí všech oborů lidského vzdělávání, nejen oblasti rovnic. Je ale jisté, že žáci budou během cesty za porozuměním rovnicím chybovat a jak vidíme na citacích odborníků, může správná práce s chybou žákovský rozvoj značně urychlit.

Tato práce bude chybu, objevující se v žákovských řešeních, využívat jako diagnostický nástroj a na jejím základě navrhnu vhodnou reedukaci, podobně jako Slezákova, Jirotková (2022).

[4] *What is so important about Moser's team's (2011) study is that it showed that there is more brain growth when people make mistakes than when they get questions correct.* (Boaler, 2018)

2 Porovnání učebnicových řad

Pro porovnání jsem vybral učebnice z nakladatelství Alter, Nová škola a H-mat. Při porovnání jsem se soustředil na úlohy, které se využívají k propedeutice rovnic. Výsledky zastoupení úloh v jednotlivých učebnicích jsem shrnul do tabulky.

Je třeba poznamenat, že údaje v tabulce ukazují počet souborů úloh, ve kterých je zastoupen daný typ úlohy, nikoli počet úloh samotných. Tím může vzniknout nepřesný dojem například o množství úloh typu Myslím si číslo v učebnicích nakladatelství H-mat, kdy vidíme v tabulce, že v pátém ročníku eviduji pouze čtyři soubory s úlohami tohoto typu. V nakladatelství Nová škola ve stejném ročníku nalezneme jedenáct souborů. Ovšem v nakladatelství Nová škola obsahují soubory vždy pouze jednu úlohu, oproti nakladatelství H-mat, kde soubor obsahuje hned několik úloh typu Myslím si číslo.

Při evidenci jsem se snažil postupovat podle pořadí v jakém se žáci s propedeutickými úlohami setkávají. Vytvořil jsem si tedy tři fáze:

1) Propedeutika rovnosti/nerovnosti – úlohy, které neobsahují neznámou, ale jsou založeny na práci s porovnáváním rovnosti a nerovnosti.
2) Práce s rovnicovou situací - úlohy s neznámou, v nichž není přítomen znak =, ale úlohu lze přepsat tak, že tam ten znak bude.[5]
3) Práce s rovnicí - úlohy, v nichž je znak = (resp. nerovnítka) a v zápise je přítomna neznámá.[6]

Tyto oblasti jsem pak dále rozvedl na jednotlivé druhy konkrétních propedeutických úloh. V tabulce jsem se snažil také zachytit pestrost prostředí v učebnicích nakladatelství H-mat, proto i když jsou úlohy typově podobné, odděluji je do zvláštních kategorií.

Celkový souhrn zastoupení propedeutických úloh k rovnicím v jednotlivých učebnicích pak uvádím zde:

Celkový počet úloh		
Alter	Nová škola	H-mat
257	278	326

[5] *MAT - Jak připravit žáky 1. stupně ZŠ na porozumění rovnicím - Darina Jirotková, Jana Slezáková. In: Youtube.com [online]. Praha: Projekt SYPO, 2021 [cit. 2023-06-27]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=dVD-2sPJqeY&t=1s*

[6] *Viz poznámka 5*

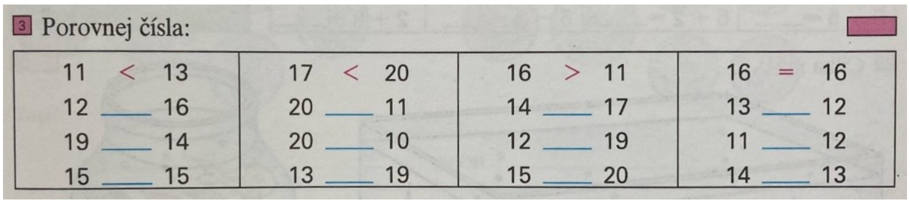
	upřesnění		1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
			A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Propedeutika rovnosti/nerovnosti	Porovnávání čísel		23	14	10	25	10	1	9	3	0	14	11	0	13	8	0
	Porovnávání - přítomnost operace		0	1	1	4	5	2	1	0	0	2	0	0	4	0	0
	Vláčky		0	0	10	0	0	2	0	0	4	0	0	0	0	0	0
	Zvířátka dědy Lesoně		0	0	0	0	0	14	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	Krokování		0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Práce s rovnicovými situacemi	Hadi		0	0	8	0	0	11	0	0	1	1	0	5	0	0	1
	Šipkový graf		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	Sčítací pyramidy/trojúhelníky		0	25	11	0	9	10	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	Násobilkové čtverce		0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	0	1	0	0	0
	Váhy		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	11
	Pavučiny		0	0	0	0	0	17	0	0	3	0	0	3	0	0	1
	Myslím si číslo		0	0	2	0	0	5	5	0	8	2	0	8	5	11	4
Práce s rovnicí	Rovnice	s rámečkem/podtržítkem	37	21	12	33	12	8	14	41	1	9	23	0	8	14	0
		vláčky	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0	0	4
		krokování	0	0	11	0	0	11	0	0	0	0	0	4	0	0	0
		zvířátka dědy Lesoně	0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	0	2	0	0	3
		algebrogram	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	2	0	0	0
		s obrázkem	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	4
		s písmenem	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	14	0	23	13	2
	Soustava rovnic	s rámečkem/podtržítkem	0	0	0	0	22	17	0	0	3	0	4	3	0	0	1
		Vláčky	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
		zvířátka dědy Lesoně	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
		sčítací pyramidy/trojúhelníky	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
		Hadi	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		s obrázkem	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
	Slovní úlohy (rovnice - jedna z možných strategií)		0	0	0	0	1	2	2	5	7	6	1	4	4	7	10
	Úlohy obsahující myšlenku izomorfismu		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
	Celkem		60	61	68	62	59	120	31	49	40	46	55	39	58	54	59

2.1 Propedeutika rovnosti/nerovnosti

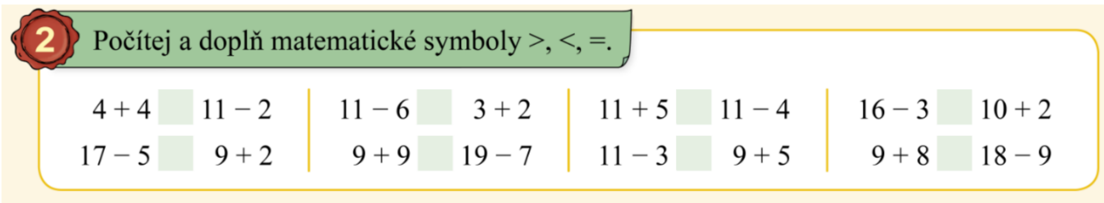
Prvními úlohami, které jsem si při prověřování učebnic zaznamenal, byly úlohy porovnávací. Žák se s nimi setkává velmi brzy a má tak možnost vnímat vztah mezi pravou a levou stranou rovnosti či nerovnosti. Ve svých učebnicích mají tyto úlohy zpracována všechna nakladatelství.

upřesnění	1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Porovnávání čísel	23	14	10	25	10	1	9	3	0	14	11	0	13	8	0
Porovnávání - přítomnost operace	0	1	1	4	5	2	1	0	0	2	0	0	4	0	0
Vláčky	0	0	10	0	0	2	0	0	4	0	0	0	0	0	0
Zvířátka dědy Lesoně	0	0	0	0	0	14	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Krokování	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
celkem	23	15	21	29	15	22	10	3	5	16	11	0	17	8	0

Žák se setkává převážně s úlohami na porovnání čísel, méně často pak s porovnáním výsledků dvou operací, které musí žáci nejdříve vypočítat. Zatímco v učebnicích Alter a Nová škola se žáci setkají převážně s matematickým zápisem, v nakladatelství H-mat se navíc propedeutika rovnosti objevuje ještě v dalších prostředích. Konkrétně se jedná o prostředí Vláčky, Krokování a Zvířátka dědy Lesoně. Jednotlivá prostředí dokládám ilustrací.

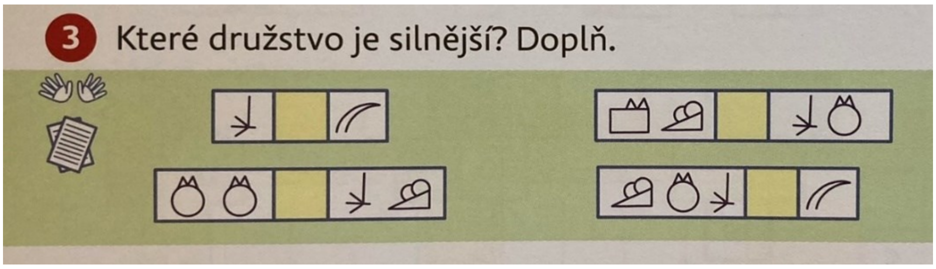


Obrázek 1 - učebnice Alter

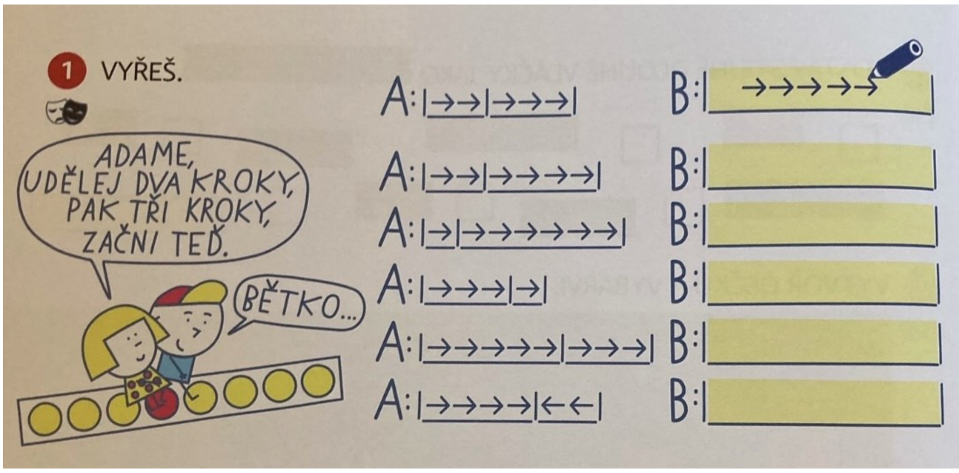


Obrázek 2 - učebnice Nová škola

Obrázek 3 - H-mat - Vláčky



Obrázek 4 - H-mat - Zvířátka dědy Lesoně



Obrázek 5 - H-mat - Krokování

2.2 Práce s rovnicovými situacemi

V těchto úlohách žáci pracují s úlohami, ve kterých není přítomno rovná se, ale dají se přepsat do zápisu, ve kterém již obsaženo bude. Zastoupení jednotlivých typů úloh ve zkoumaných učebnicových řadách je shrnuto zde:

upřesnění	1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Hadi	0	0	8	0	0	11	0	0	1	1	0	5	0	0	1
Šipkový graf	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Sčítací pyramidy/trojúhelníky	0	25	11	0	9	10	0	0	0	0	0	0	1	1	0
Násobilkové čtverce	0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	0	1	0	0	0
Váhy	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	11
Pavučiny	0	0	0	0	0	17	0	0	3	0	0	3	0	0	1
Myslím si číslo	0	0	2	0	0	5	5	0	8	2	0	8	5	11	4
celkem	0	25	21	0	9	47	5	0	15	3	2	17	6	12	19

2.2.1 Hadi

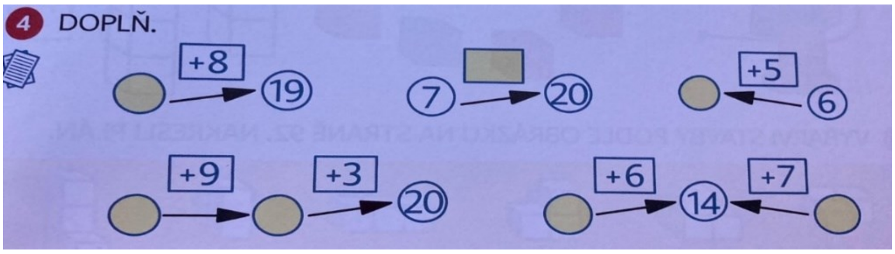
Dalšími úlohami, které v učebnicích plní funkci propedeutiky rovnic, jsou úlohy typu hadi. Tento typ úloh je podle Budínové (2018) nazýván například šipkovým diagramem (Vergnaud), nebo operačním schématem (Kuřina), nicméně oba zmínění autoři se shodují na tom, že je velmi výhodné seznamovat děti s tímto řešením aritmetických úloh. Jak píše

Vergnaud, *vidí na nich inverzní charakter operací sčítání a odčítání, násobení a dělení*. (Vergnaud 2019 v Budínová 2018)

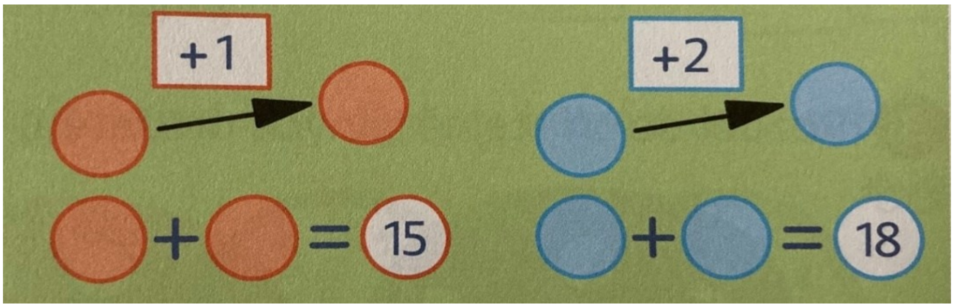
Také dále uvádí Budínová (2018): *Využívání šipkového diagramu v určitém typu úloh kultivuje u žáků jednu ze sofistikovaných aritmetických metod řešení – metodu řešení od konce.*

Jak vychází z údajů v tabulce, úlohy typu hadi jsou zastoupeny převážně v učebnicích nakladatelství H-mat kde je najdeme ve 26 souborech úloh. Naproti tomu v nakladatelství Alter a Nová škola najdeme pouze jednu úlohu typu hadi, která se dá využít jako propedeutika rovnic.

Z výše uvedených důvodů tedy uvádím úlohu typu hadi z nakladatelství H-mat. Uvádím také zástupce úloh z prostředí Hadi, kterou je možné řešit pomocí soustavy rovnic (viz. obrázek 7).



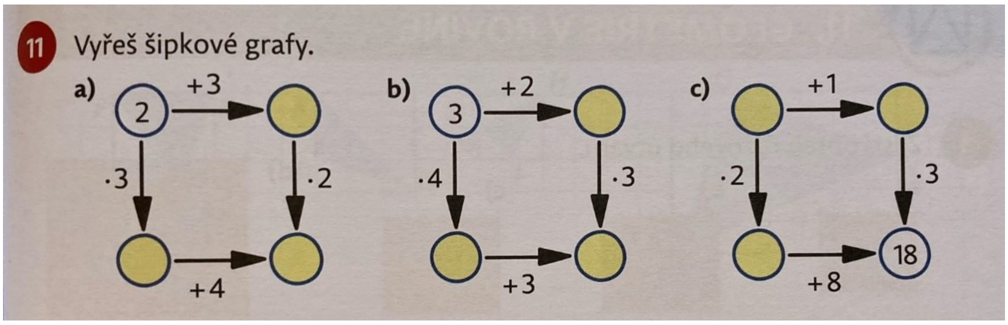
Obrázek 6 - učebnice H-mat



Obrázek 7 - učebnice H-mat – Hadi soustava rovnic

2.2.2. Šipkový graf

V nakladatelství H-mat se v pátém ročníku zavádí úlohy typu šipkový graf. Jde o rozvinutí úloh z prostředí Hadi, u ostatních nakladatelství se tento typ úloh nevyskytuje. Rozvinutí spočívá ve spojení dvou hadů se stejným začátkem a koncem.

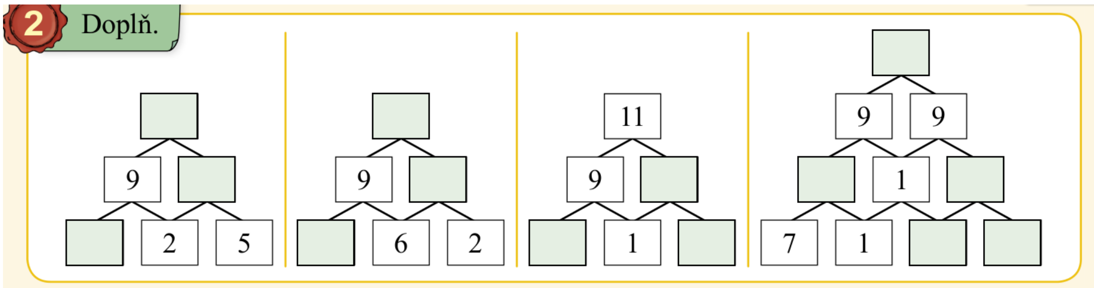


Obrázek 8 - H-mat - Šipkový graf

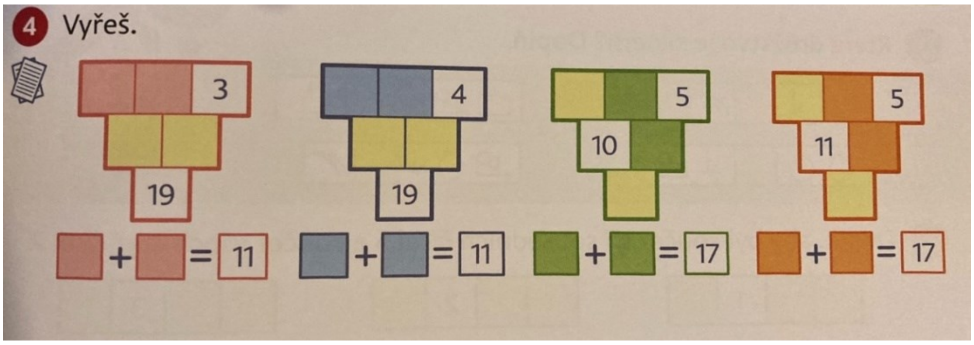
2.2.3 Sčítací trojúhelníky/pyramidy

Tyto úlohy jsem dále rozdělil na sčítací trojúhelníky využívající aditivních operací, ve kterých platí pravidlo, že součet dvou sousedních dílků odhalí hodnotu dílku pod/nad nimi. Děti při řešení úloh tohoto typu pracují s inverzními operacemi sčítání a odčítání.

Dále se v učebnicích používají sčítací trojúhelníky s podmínkou, ve kterých jsou barevně určena políčka, jejichž součet musí odpovídat zadané hodnotě. Tyto úlohy jsem označil v tabulce jako sčítací pyramidy/trojúhelníky, při jejich řešení je použita soustava rovnic. Jak je vidět v tabulce, klasické sčítací trojúhelníky můžeme nalézt v nakladatelství Nová škola a H-mat, v nakladatelství Alter se s tímto typem úlohy téměř nesetkáme. Sčítací trojúhelníky s podmínkou pak má ve své výbavě pouze nakladatelství H-mat.



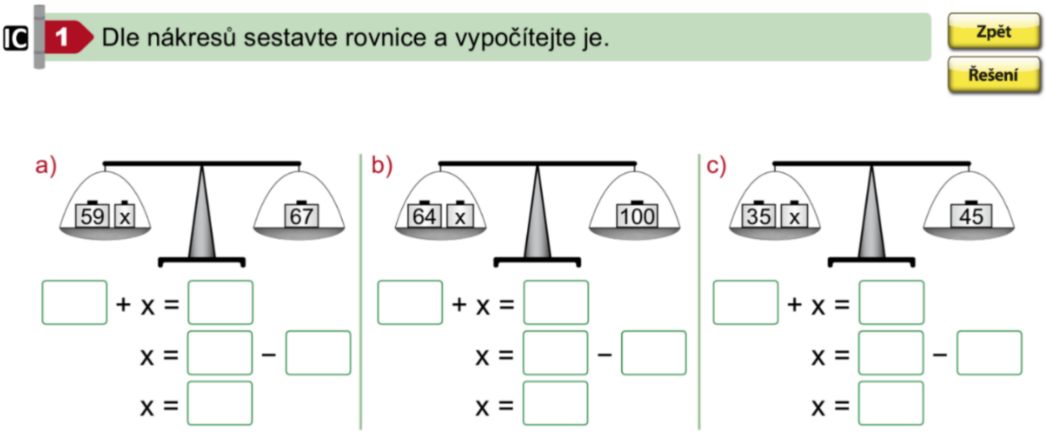
Obrázek 10 - Nová škola - sčítací pyramida



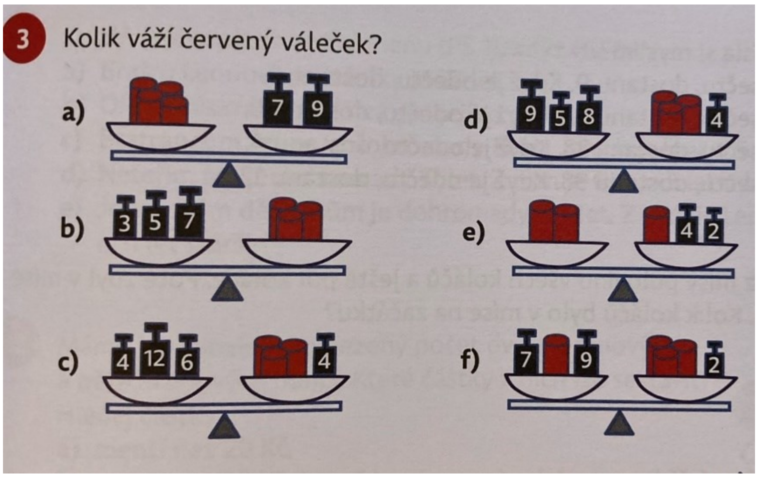
Obrázek 9 - nakladatelství H-mat

2.2.4. Váhy

Samostatnou oblastí jsou úlohy s modelem vah. V nakladatelství Alter vyobrazení vah nenajdeme. Nakladatelství Nová škola váhy pro modelování rovnic využívá v jedné úloze, a to spíše jako ilustraci. V nakladatelství H-mat využívají celého prostředí vah jako další možnosti pro vhled do problematiky rovnic, jak poznamenává Vondrová: *„…v řadě učebnic autorského kolektivu Hejného jsou váhy nabízeny žákům jako nástroj pro uchopení ekvivalentních úprav, kdy žáci nejdříve vyřeší úlohu pomocí modelu a postupně přejdou k algebraickému zápisu rovnice a jejích úprav."* (Kuřina, Vondrová 2022).



Obrázek 11 - učebnice Nová škola

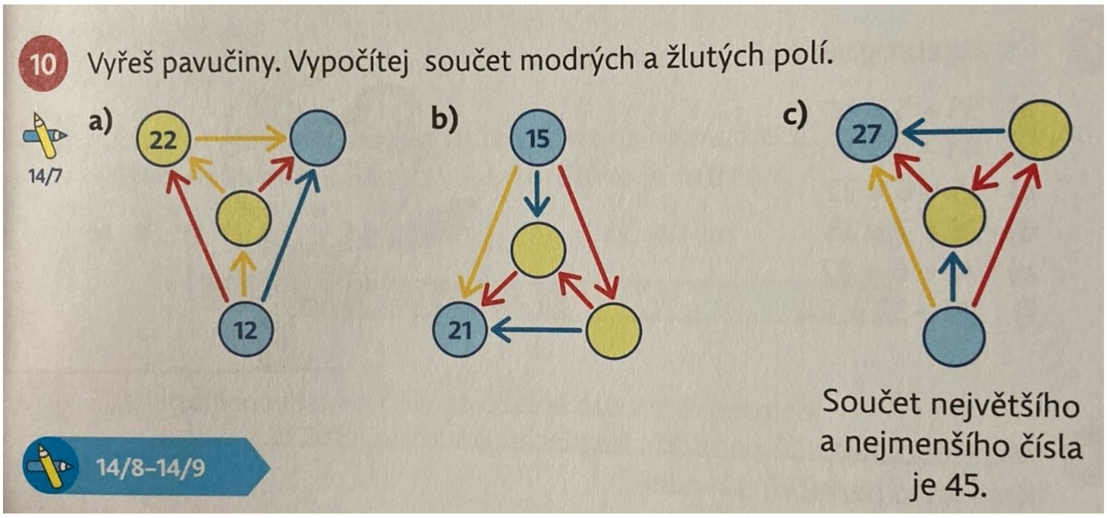


Obrázek 12 – učebnice H-mat

2.2.5. Pavučiny

Toto prostředí je opět prostředí z učebnic nakladatelství H-mat. V jiných učebnicích se nevyskytuje. Jedná se o prostředí, ve kterém děti dopočítávají neznámá čísla, která jsou spojena barevně odlišenými šipkami. Každá barva šipky pak znamená jiné číslo, které se ve směru šipky přičítá a proti směru odečítá.

Žáci díky tomuto prostředí získávají zkušenosti s objevováním zákonitostí, které v pavučinách fungují.

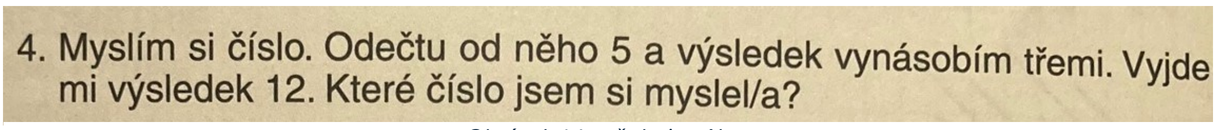


Obrázek 13 - učebnice H-mat

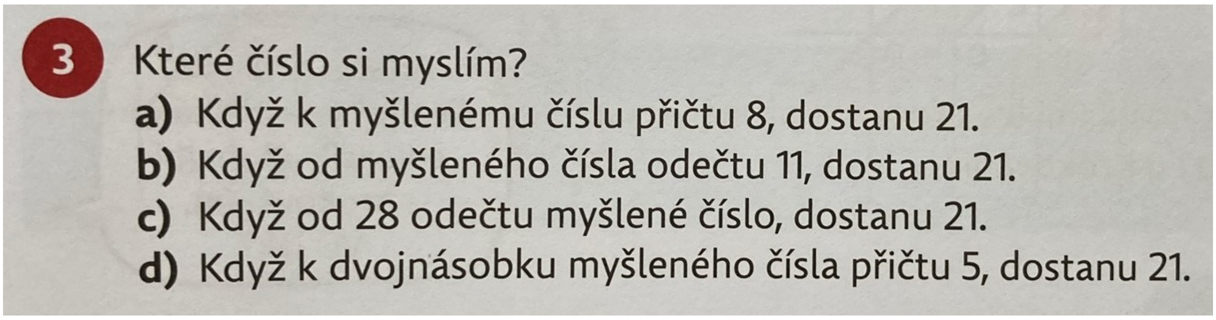
2.2.6. Myslím si číslo

V těchto úlohách se žáci setkávají se slovně zadanou rovnicovou situací. Žák si vymýšlí strategie, jak úlohu řešit a zadání úlohy ho přirozeně vede k jejímu zápisu, ve kterém si volí způsoby, jak zapsat číslo, které ještě nezná. Úlohy tohoto typu jsou u dětí často velmi oblíbené a rády je řeší.

Úlohy typu Myslím si číslo využívají všechna nakladatelství. Jako jediné pracuje s těmito úlohami od prvního ročníků ZŠ pouze nakladatelství H-mat. Ve třetím ročníku můžeme tento typ úloh nalézt i v učebnicích od Alteru a v pátém ročníku se s nimi žáci setkají i v nakladatelství Nová škola.


4. Myslím si číslo. Odečtu od něho 5 a výsledek vynásobím třemi. Vyjde mi výsledek 12. Které číslo jsem si myslel/a?

Obrázek 14 - učebnice Alter



3 Které číslo si myslím?
a) Když k myšlenému číslu přičtu 8, dostanu 21.
b) Když od myšleného čísla odečtu 11, dostanu 21.
c) Když od 28 odečtu myšlené číslo, dostanu 21.
d) Když k dvojnásobku myšleného čísla přičtu 5, dostanu 21.

Obrázek 15 – učebnice Nová škola

a) Když od neznámého čísla odečteme 50, dostaneme číslo 1 000. O které číslo se jedná? *Nápověda:* Neznámé číslo označíme jako x.
b) Když koupíme dárek za 60 Kč, zbude nám 250 Kč. Kolik korun jsme měli před nákupem? *Nápověda:* Částku před nákupem označíme jako y.
c) Když neznámé číslo zvětšíme o 51, dostaneme číslo 200. O které číslo se jedná? *Nápověda:* Neznámé číslo označíme z.

Obrázek 16 - učebnice H-mat

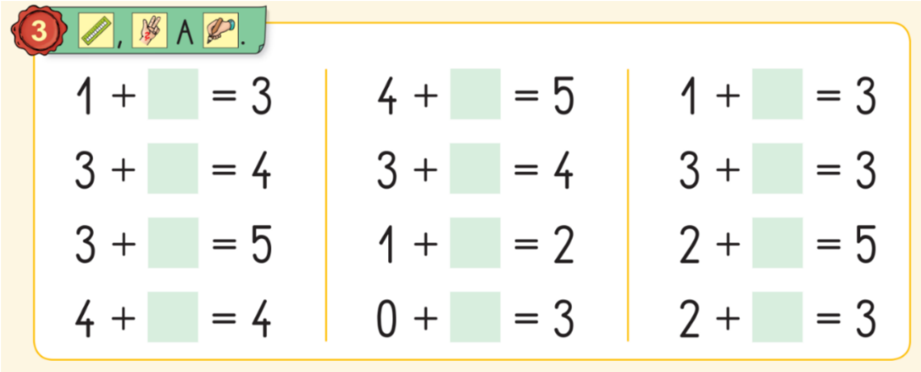
2.3. Práce s rovnicí

Rovnicí rozumím úlohu, kde vystupuje neznámá ve formě symbolu, písmene, podtržítka, nebo volného rámečku a zároveň je v úloze obsaženo rovnítko. Zastoupení jednotlivých úloh v učebnicových řadách shrnuje tabulka:

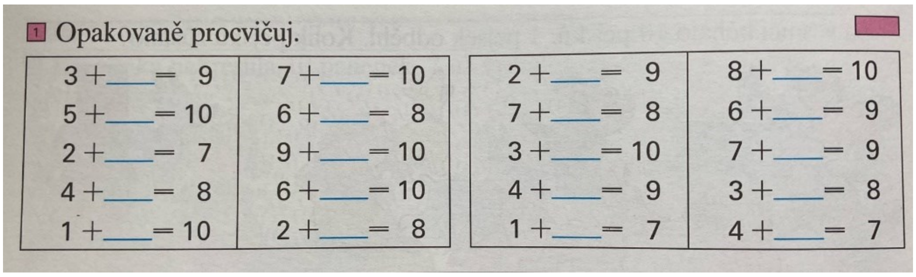
upřesnění		1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
		A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Rovnice	s rámečkem/podtržítkem	37	21	12	33	12	8	14	41	1	9	23	0	8	14	0
	vláčky	0	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	3	0	0	4
	krokování	0	0	11	0	0	11	0	0	0	0	0	4	0	0	0
	zvířátka dědy Lesoně	0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	0	2	0	0	3
	algebrogram	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	2	0	0	0
	s obrázkem	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	4
	s písmenem	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	14	0	23	13	2
	celkem	37	21	26	33	12	24	14	41	10	21	37	13	31	27	13

2.3.1. Rovnice s rámečkem/podtržítkem

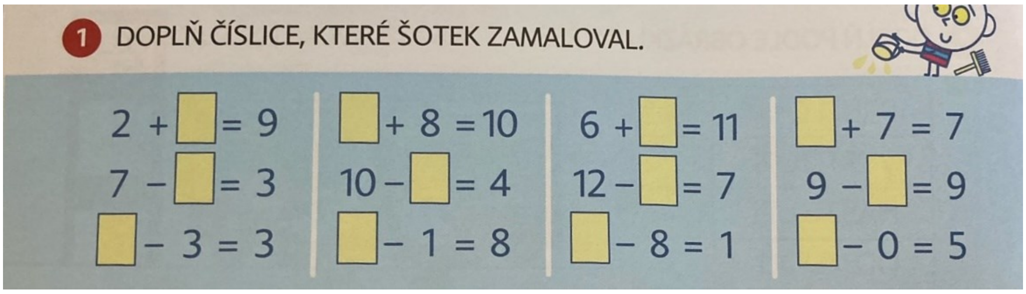
Tento typ úloh je hlavním prostředkem využívaným k propedeutice rovnic v nakladatelstvích Alter a Nová škola. U nakladatelství H-mat se k propedeutice rovnic využívá i jiných prostředí, proto zde tento typ úloh není převažující.



Obrázek 17 - Nová škola - rovnice s rámečkem



Obrázek 18 - Alter - rovnice s podtržítkem



Obrázek 19 - H-mat - rovnice s rámečkem

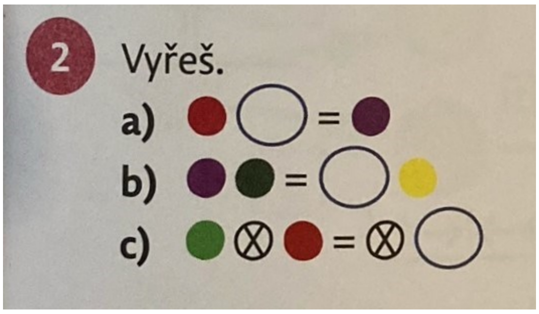
2.3.2. Vláčky, Krokování, Zvířátka dědy Lesoně, Algebrogramy

Jak je vidět v tabulce, zatímco nakladatelství Alter a Nová škola, pracují pouze s typem rovnic s rámečkem/podtržítkem, nakladatelství H-mat má k procvičení tohoto tématu hned několik

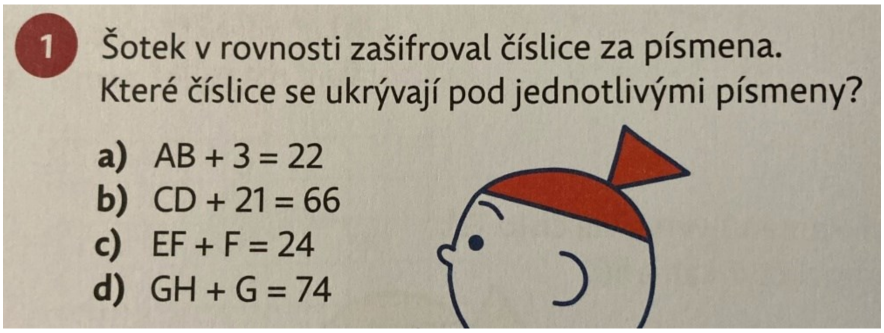
prostředí, která otevírají další možnosti.

V učebnicích H-mat se tedy dítě setká například s prostředími Vláčků, Krokováním a Zvířátky dědy Lesoně, která pestře zakládají porozumění tématu rovnic. Jednou z výhod prostředí z oblasti Hejného matematiky je snadná možnost sehrávky. Jako další výhodu můžeme jistě označit záměrný rozvoj žáka v cestě ke tvorbě matematického zápisu rovnice, který v jiných učebnicích ze zkoumaných nakladatelstvích nenajdeme. Úlohy zapsané v jednotlivých prostředích jsou také pro děti snadněji představitelné a umožňují jim tak proniknout hlouběji do postupu, který povede k řešení daného problému.

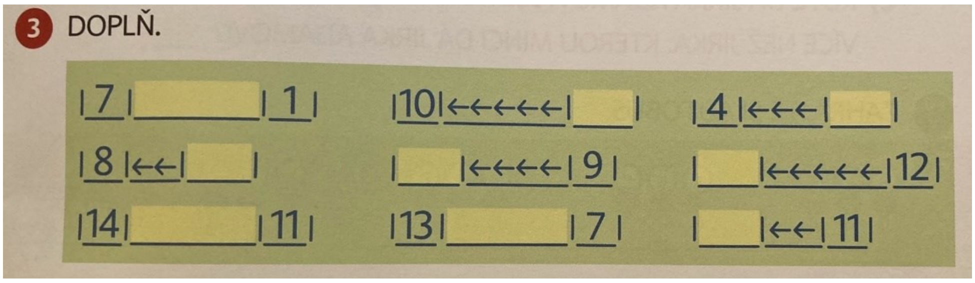
Dále se žáci mohou v těchto učebnicích setkat s jednoduchými algebrogramy, které v nakladatelství Nová škola a Alter nejsou zastoupeny.



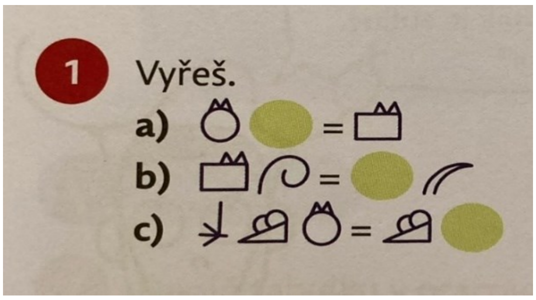
Obrázek 20 - H-mat - rovnice Vláčky



Obrázek 22 - učebnice H-mat - alegbrogram



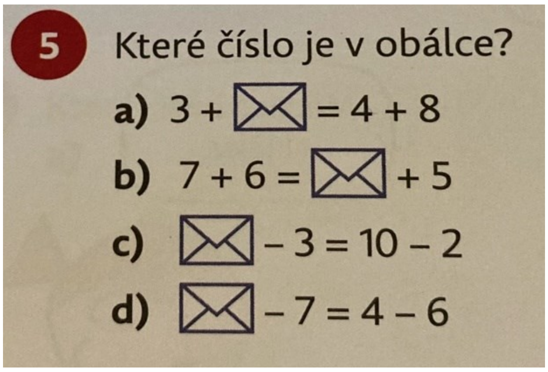
Obrázek 23 - H-mat - rovnice Krokování



Obrázek 24 - H-mat - rovnice Zvířátka dědy Lesoně

2.3.3. Rovnice s obrázkem/symbolem

Úlohy se symbolem jsou zastoupeny v každém ze zkoumaných nakladatelství. Nakladatelství H-mat využívá například symbol obálky, což je velmi výhodné vzhledem k podobnosti obálky s písmenem x, obvykle užívaným pro neznámou. Zároveň umožňuje obálka dětem lépe si spojit představu skrytého čísla s reálnou situací – skryté číslo je schované jako dopis v obálce.


5 Které číslo je v obálce?

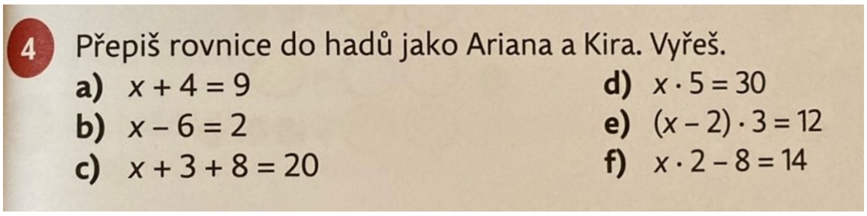
a) 3 + ✉ = 4 + 8

b) 7 + 6 = ✉ + 5

c) ✉ − 3 = 10 − 2

d) ✉ − 7 = 4 − 6

Obrázek 25 - učebnice H-mat


4 Přepiš rovnice do hadů jako Ariana a Kira. Vyřeš.

a) $x + 4 = 9$

b) $x - 6 = 2$

c) $x + 3 + 8 = 20$

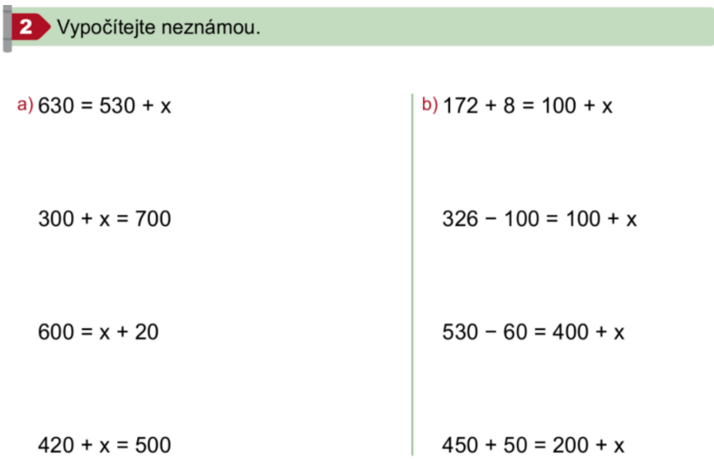
d) $x \cdot 5 = 30$

e) $(x - 2) \cdot 3 = 12$

f) $x \cdot 2 - 8 = 14$

Obrázek 26 - učebnice H-mat

Jak je možné nalézt v tabulce, v nakladatelstvích Alter a Nová škola se můžeme setkat pouze s rovnicemi s písmenem. Ty zavádí tyto řady učebnic ve čtvrtém a pátém ročníku.


2 Vypočítejte neznámou.

a) $630 = 530 + x$

$300 + x = 700$

$600 = x + 20$

$420 + x = 500$

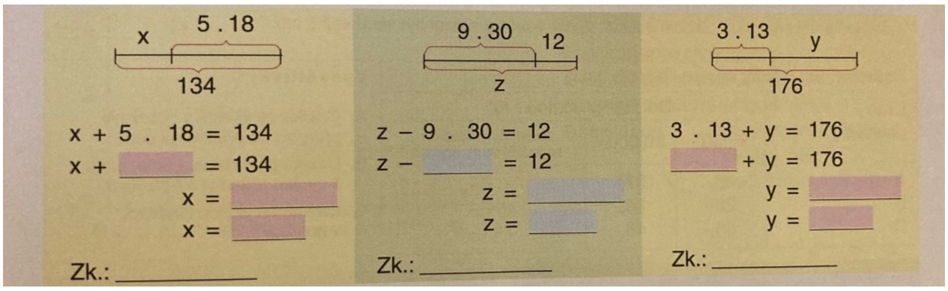
b) $172 + 8 = 100 + x$

$326 - 100 = 100 + x$

$530 - 60 = 400 + x$

$450 + 50 = 200 + x$

Obrázek 27 - Nová škola - rovnice s písmenem



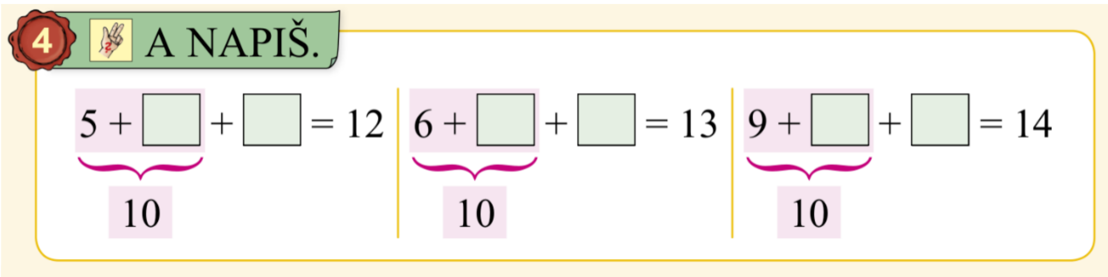
Obrázek 28 - učebnice Alter

2.4. Soustava rovnic

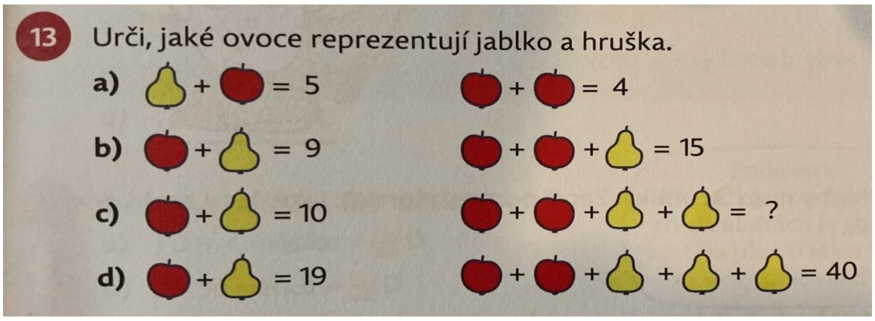
V učebnicích se vyskytují jednoduché úlohy na soustavu rovnic. Tyto úlohy můžeme najít v učebnicích z nakladatelství Nová škola a H-mat.

upřesnění		1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
		A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Soustava rovnic	s rámečkem/podtržítkem	0	0	0	0	22	17	0	0	3	0	4	3	0	0	1
	Vláčky	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	zvířátka dědy Lesoně	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	sčítací pyramidy/trojúhelníky	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	Hadi	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	s obrázkem	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
	celkem	0	0	0	0	22	25	0	0	3	0	4	5	0	0	7

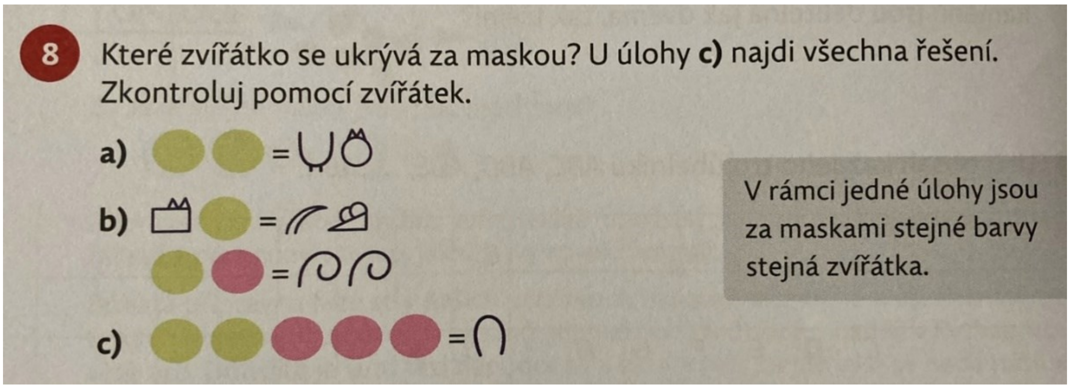
Nová škola používá soustav rovnic v úlohách s podtržítkem, které doplňuje podmínkou. H-mat využívá soustavy rovnic v prostředích Vláčky a Zvířátka dědy Lesoně, kde je druhá neznámá vyznačena kartou s jinou barvou, která zakrývá neznámé zvířátko/vláček. Dále v úlohách s neznámými reprezentovanými jinými druhy ovoce.



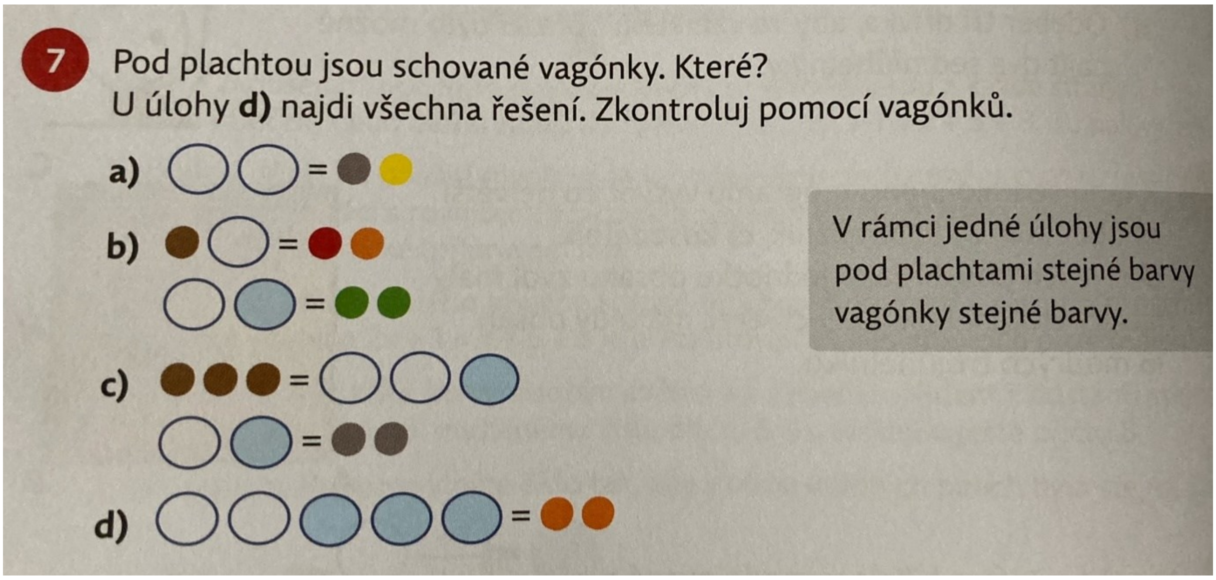
Obrázek 29 - učebnice Nová škola



Obrázek 30 - učebnice H-mat



Obrázek 31 - učebnice H-mat



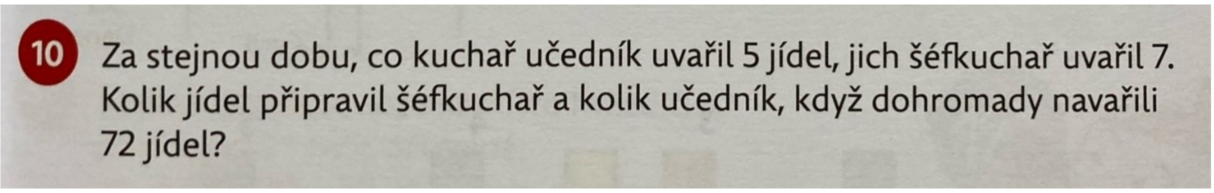
Obrázek 32 - učebnice H-mat

2.5. Slovní úlohy

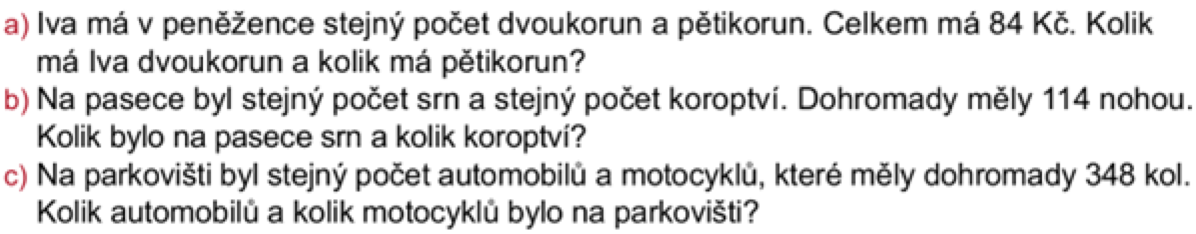
Jedná se o slovně zadané úlohy k jejichž řešení je možné použít rovnici, jako jednu z možných strategií a děti úlohy motivují k použití neznámé.

upřesnění	1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Slovní úlohy (rovnice - jedna z možných strategií)	0	0	0	0	1	2	2	5	7	6	1	4	4	7	10

Tento typ úloh je zastoupen ve všech učebnicích ze zkoumaných nakladatelství. Ve větší míře se s těmito úlohami setkáváme od 3. ročníku.


10 Za stejnou dobu, co kuchař učedník uvařil 5 jídel, jich šéfkuchař uvařil 7. Kolik jídel připravil šéfkuchař a kolik učedník, když dohromady navařili 72 jídel?

Obrázek 34 - učebnice H-mat


a) Iva má v peněžence stejný počet dvoukorun a pětikorun. Celkem má 84 Kč. Kolik má Iva dvoukorun a kolik má pětikorun?
b) Na pasece byl stejný počet srn a stejný počet koroptví. Dohromady měly 114 nohou. Kolik bylo na pasece srn a kolik koroptví?
c) Na parkovišti byl stejný počet automobilů a motocyklů, které měly dohromady 348 kol. Kolik automobilů a kolik motocyklů bylo na parkovišti?

Obrázek 33 - učebnice Nová škola

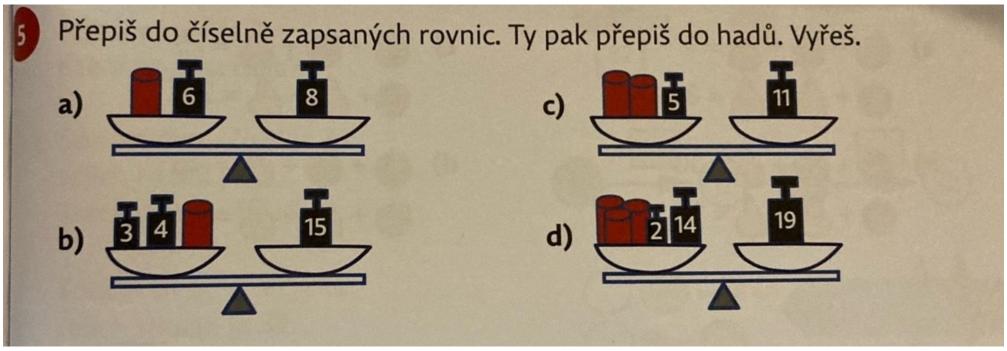
2.6. Úlohy obsahující myšlenku izomorfismu

Díky porovnávání učebnic jsem pochopil jeden z výrazných rozdílů mezi učebnicemi H-mat a Nová škola nebo Alter. Spatřuji ho v tom, že nakladatelství H-mat využívá možnosti přepisovat rovnice do různých prostředí/modelů. Tím žákům dává možnost řešit i úlohy, které by pro ně mohly být v zadaném prostředí náročné. Žák prostě úlohu uchopí pomocí jiného prostředí a může pokračovat v řešení. Jak ostatně poznamenává i Vondrová, Kuřina (2022): *K důkladnému pochopení úprav rovnic vede tato řada učebnic promyšleným zaváděním nejen v prostředí rovnic váhových, ale také rovnic šipkových, mincových a algebraických. V nich žáci řeší různé úlohy a uvědomují si, že jeden matematický objekt, rovnice, dokáže vyjádřit mnoho situací. K tomu slouží i úlohy, které k tomuto porovnání přímo vyzývají.*

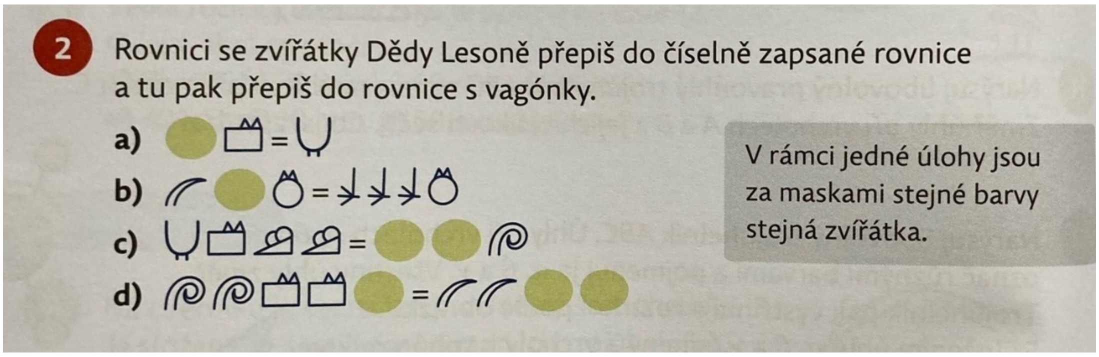
Hejný (2014) myšlenku izomorfismu vyzdvihuje a poznamenává: *Jednou z nejdůležitějších schopností matematického orgánu je nacházet ve zdánlivě odlišných situacích společné jádro, tedy vidět to, co je v daných situacích stejné, vidět, že jsou v jistém smyslu izomorfní.*

Úlohy s tímto zaměřením tedy najdeme pouze v nakladatelství H-mat. Jak vidíme ve shrnutí, úlohy přímo vyzývající k přepisu do jiných prostředí najdeme v pátém ročníku. Založeno je toto pochopení už v prvním ročníku.

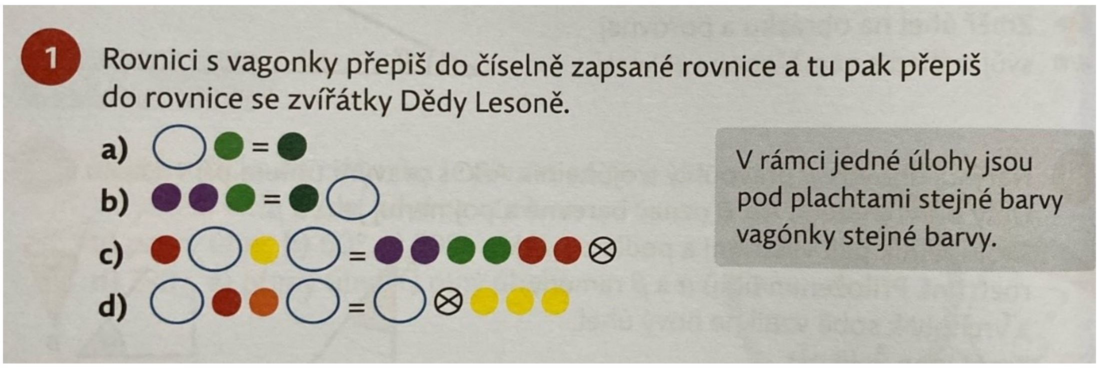
upřesnění	1. ročník			2. ročník			3. ročník			4. ročník			5. ročník		
	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM	A	NŠ	HM
Úlohy obsahující myšlenku izomorfismu	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10



Obrázek 35 - učebnice H-mat



Obrázek 36 - učebnice H-mat



Obrázek 37 - učebnice H-mat

Praktická část

V této části práce se budu věnovat přípravě a vyhodnocení před-experimentu. Dále se budu věnovat analýze zjištění z před-experimentu a následně tvorbě nového experimentu, který jsem žáky nechal vypracovat. Nejprve se zaměřím na metodologii provedeného před-experimentu a následujícího experimentu. Dále předložím přehled jednotlivých úloh a zjištění, která jsem objevil v žákovských řešeních. Pojem „experiment" používám ve smyslu Gavory (2000).

3 Metodologie

3.1. Cíle experimentů

Od experimentální části své práce si slibuji lepší nahlédnutí do způsobů, jakými žáci úlohy se zaměřením na rovnice řeší, jak s nimi pracují. Také bych rád vysledoval, které z úloh žákům budou působit větší obtíže a jaké jsou jejich příčiny. Rád bych díky zjištěným informacím vyhledal možnosti reedukace těchto žákovských obtíží.

Od experimentů bych tedy rád získal odpovědi na tyto otázky:

- Jak děti chápou rovnost/nerovnost?
- Překvapí děti úloha s neznámou jako podtržítkem/písmenem?
- Jaké strategie zvolí k řešení rovnicových úloh?
- Budou mít snahu při zápisu řešení úloh použít neznámou?
- Vyskytnou se nějaké opakující se obtíže?
- Jaké jsou příčiny obtíží?

3.2. Tvorba před-experimentu

Experimenty jsem se rozhodl provést s dětmi ze ZŠ Sázavská na Praze 2, kde již sedmým rokem vyučuji. Testovací baterii úloh před-experimentu jsem tvořil se záměrem předložit žákům úlohy, jejichž řešení pro ně bude výzvou a zároveň díky nim budu schopen v žákovských řešeních nalézt odpovědi na otázky, které jsem si položil výše.

Pro inspiraci, abych vybral úlohy do před-experimentu, jsem prostudoval učebnice a pracovní sešity, které se věnovaly Hejného metodě vyučování matematiky a vybral z nich několik úloh. Později jsem si ale uvědomil, že žáci ze ZŠ Sázavská nejsou vyučováni Hejného metodou, proto by bylo lepší pro před-experiment použít úlohy, se kterými mají žáci nějakou zkušenost. Vzhledem k tomu, že se na ZŠ Sázavská k výuce využívají učebnice z nakladatelství Alter a Nová škola, prošel jsem učebnice z těchto nakladatelství a použil jsem buď přímo úlohy v nich uvedené, nebo vytvořil úlohy, které jimi byly inspirovány. Nakonec jsem vytvořil zadání, které se skládalo z pěti souborů úloh:

První část pěti úloh tvořila slovní úloha, která byla zaměřena na to, aby žáci k jejímu řešení použili rovnici.

Sestry Eva a Jana mají dohromady 27 roků. Eva je dvakrát starší než Jana. Kolik roků je každé z nich?

Druhá pracuje s neznámou ve formě obrázku. Prověřuje schopnost žáků použít vztahy vyplývající z rovnosti k řešení rovnice.

☺ + ☺ + ☺ = 27

★+ ☺ + ☺ = 36

★ + ☺ + ■ = 40

■ = ?

Třetí úloha měla podobu úlohy z prostředí, které Hejného metoda nazývá Hadi.

$\square \xrightarrow{+9} \square \xrightarrow{+18} \boxed{40}$

Čtvrtá byla úlohou typu „Myslím si číslo“. Od této úlohy jsem si sliboval, že žáci použijí zápis úlohy pomocí neznámé. Zároveň se jednalo o úlohu izomorfní k úloze jedna.

Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a přičtu 9, vyjde mi 27. Jaké číslo jsem si myslel?

A poslední úloha byla opět slovní. Zajímalo mě, jaké řešení žáci zvolí a zda použijí neznámou ve výpočtu.

Karel si koupil hamburger, tyčinku a nanuk. Tyčinka stála 9 Kč. Kolik korun stál nanuk, když víš, že hamburger stál jako dvě tyčinky a Karel platil 40 Kč za celý nákup?

Celé zadání před-experimentu je možné shlédnout v příloze.

Tuto zkušební testovací baterii úloh jsem zadal žákům 4. a 5. ročníku (4.ročník = 43 žáků; 5. ročník = 41 žáků). V před-experimentu jsem měl záměr postupně shromáždit co nejvíce řešení, které bych později mohl analyzovat.

Samotný před-experiment probíhal během dopoledního vyučování, kdy jsem byl domluven s pedagogy, že hodinu povedu sám. Každý žák dostal své zadání a pracoval samostatně. Časová dotace před-experimentu byla 45 min. Po celou dobu, kdy žáci řešili úlohy, jsem si jejich komentáře nahrával na diktafon. Žákovská řešení jsem následně podrobil rozboru, který jsem shrnul v následujících tabulkách.

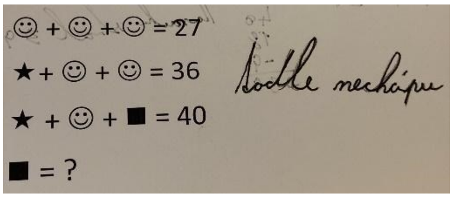
Třída: 4.A	20 žáků		Procenta	
Úloha	Vyřešil/a	Nevyřešil/a	Vyřešil/a	Nevyřešil/a
1.	5	15	25 %	75 %
2.	8	12	40 %	60 %
3.	16	4	80 %	20 %
4.	13	7	65 %	35 %
5.	7	13	35 %	65 %
Celkem	49	51	49 %	51 %

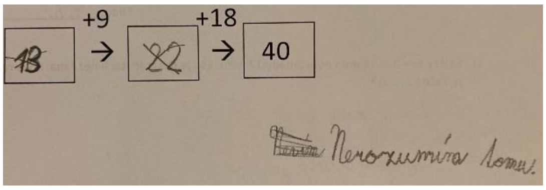
Třída: 4.B	23 žáků		Procenta	
Úloha	Vyřešil/a	Nevyřešil/a	Vyřešil/a	Nevyřešil/a
1.	12	11	52,2 %	47,8 %
2.	11	12	47,8 %	52,2 %
3.	19	4	82,6 %	17,4 %
4.	21	2	91,3 %	8,6 %
5.	16	7	69,6 %	30,4 %
Celkem	79	36	68,7 %	31,3 %

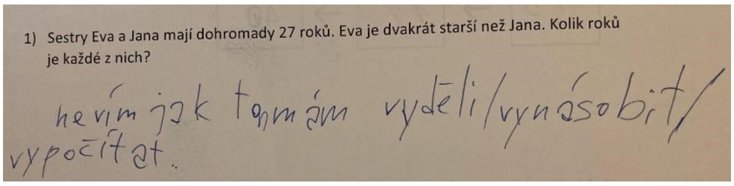
Třída: 5.A	32 žáků		Procenta	
Úloha	Vyřešil/a	Nevyřešil/a	Vyřešil/a	Nevyřešil/a
1.	13	9	59,1 %	40,9 %
2.	17	5	77,3 %	22,7 %
3.	19	3	86,4 %	13,6 %
4.	17	5	77,3 %	22,7 %
5.	15	7	68,2 %	31,8 %
Celkem	81	29	73,6 %	26,4 %

Třída: 5.B	19 žáků		Procenta	
Úloha	Vyřešil/a	Nevyřešil/a	Vyřešil/a	Nevyřešil/a
1.	5	14	26,3 %	73,7 %
2.	17	2	89,5 %	10,5 %
3.	15	4	78,9 %	21,1 %
4.	15	4	78,9 %	21,1 %
5.	15	4	78,9 %	21,1 %
Celkem	67	28	70,5 %	29,5 %

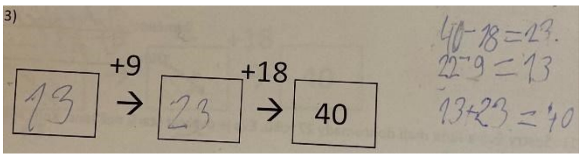
Díky analýze výsledků jsem zjistil, že nejnáročnější pro žáky bez ohledu na ročník, byly slovní úlohy, hlavně úloha první a pátá. Dále jsem zjistil, že žáci čtvrtého ročníku měli výrazně větší obtíže s řešením druhé úlohy než žáci z ročníku pátého. Žáci si také často stěžovali na nesrozumitelnost zadání a na náročnost úloh, jak dokládají ilustrace žákovských řešení.

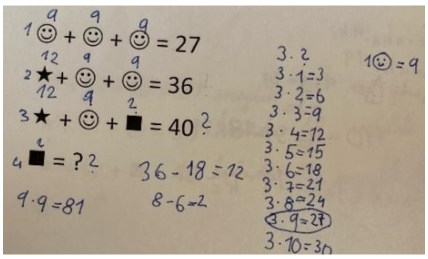




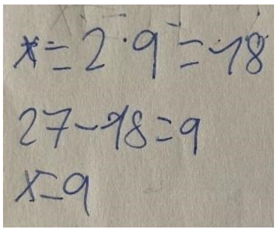


V žákovských řešeních jsem také pozoroval časté numerické chyby a nejistotu v násobení a dělení.





Při řešení slovních úloh se pouze několik žáků pokoušelo použít neznámou „*x*“. Neznámou žáci využívali spíše jako prostředek k označení výpočtu než jako jeho součást.



Došel jsem také k názoru, že úloh, které by žákům dávaly možnost ukázat své schopnosti při práci s neznámou, jsem do zadání před-experimentu zařadil příliš málo.

Nejdůležitějším zjištěním, které mi před-experiment přinesl, bylo ale to, že kvůli práci celé třídy, jsem se nemohl plně věnovat myšlenkovým pochodům žáků. Nemohl jsem se přímo při práci pozorovat zajímavé řešitelské postupy a zpětně z žákovských řešení, jsem se mohl jen domýšlet, jak žáci svá řešení mysleli. Proto jsem se rozhodl tento první experiment nazývat před-experimentem a promyslel jsem nový experiment, který by lépe vyhovoval mým záměrům, a to z těchto již uvedených důvodů:

1) V zadání před-experimentu jsem použil příliš náročné úlohy.
2) Větší část zadání před-experimentu jsem formuloval slovně a úlohy byly po žáky často nesrozumitelné.
3) Zvolil jsem do zadání před-experimentu příliš málo úloh na práci s rovnicí.
4) Způsob provedení před-experimentu mi neumožňoval sledovat žáky při řešení jednotlivých úloh a vnímat jejich myšlenkové postupy.

3.3. Tvorba experimentu

Po zkušenostech z před-experimentu jsem se tedy rozhodl pro novou metodu sběru, a to pro individuální rozhovory. Metodu, díky které získám možnost lépe nahlédnout do myšlenkových procesů dětí.

3.3.1. Výběr a sestavení úloh

Vzhledem k tomu, že jsem zjistil, že úlohy, které jsem použil v před-experimentu, byly příliš náročné a málo srozumitelné, začal jsem pro samotný experiment hledat úlohy, které by mi umožnily poněkud lépe zodpovědět otázky, které jsem si položil (viz. kap. 3.1).

Jako první jsem zvolil úlohy, ve kterých není neznámá, ale žáci pracují s rovností a nerovností různých početních operací. Těmito úlohami jsem si chtěl ověřit, jak děti rovnosti a nerovnosti rozumí, jak umí pracovat s pravou a levou stranou rovnost/nerovnosti a zda symbol rovnítka chápou jako relaci ekvivalence. Tento druh úloh jsem v před-experimentu neměl.

Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.	
a) 3 + 5 = 9 – 4	c) 23 – 17 < 54 – 45
b) 16 . 3 > 7 + 20	d) 6 + 56 = 72 – 10

Ve druhé úloze jsem využil myšlenky rovnic s neznámou prezentovanou podtržítkem. Jedná se o úlohy, které jsou dětem známé. Neznámá je zde na různých pozicích v jednotlivých úlohách a také umístění rovnítka se mění. Záměrem bylo jednak zjistit, jak si žáci s neznámou poradí a zároveň jak budou reagovat na neobvyklý způsob umístění rovnítka (viz. Teoretická část, kap.1.2). V před-experimentu jsem tento typ úloh nepoužil.

Ve druhé úloze jsem také uvedl několik podúloh, které se s odlišným zápisem zadání objeví i v dalších úlohách. Chtěl jsem zjistit, jestli si žáci úlohy spojí. Ani tento typ úloh zadání před-experimentu neobsahovalo.

Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.	
a) ____ . 3 = 12	e) 57: 3 = ___ - 1
b) 2 .(____ + 7) = 24	f) 32 = 27 + ___ - 2
c) (17 – 7) . 2 = 5 + ____	g) ____ . 9 = 117
d) 45 : ___ = 9	h) 49 = ____ - 16

Třetí úloha se skládá z rovnic s neznámou vyjádřenou pomocí písmene. Tyto úlohy mají za úkol ověřit, jak žáci budou s písmenem v zápise pracovat. Zda pro ně bude zacházení s písemným vyjádřením neznámé náročnější než vyjádření formou podtržítka.

Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.	
a) 1000 – x = 943	e) 2 . (x + 7) = 24
b) x : 6 = 4	f) 19 = x : 3
c) 45 : x = 9	g) 32 = 27 + x - 2
d) x + 90 = 114	h) x . 3 = 12

Čtvrtá je úloha typu „myslím si číslo“. Tato úloha jistým způsobem figuruje i ve druhé a třetí úloze, neboť jsou spolu izomorfní. Zároveň mě zajímalo, zda žáci okomentují, že v předchozích úlohách řešili stejné úlohy.

Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

Pátá úloha je rovněž zadána slovně, v jejím řešení je možné použít rovnici. Chtěl jsem zjistit, zda žáci budou mít potřebu ve výpočtu neznámou použít, proto jsem volil snadnější úlohu. Úloha je opět izomorfní s úlohami obsaženými v souboru dvě a tři.

Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?

Zatímco v páté úloze jsem chtěl vidět, zda si žáci použití neznámé sami zvolí, v poslední úloze experimentu jsem vybral slovní úlohu, která patří k náročnějším. Měl jsem za to, že použití neznámé by žákům výpočet úlohy mohlo usnadnit, a proto by neznámou ve výpočtu mohli použít. Stejně jako u páté slovní úlohy se i u šesté úlohy jedná o izomorfní úlohu.

Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?

3.3.2. Výběr žáků

Vzhledem k tomu, že cílem mé práce je proniknout do rovnicového myšlení žáků, analyzovat obtížné oblasti a zkusit najít vhodnou nápravu, rozhodl jsem se pro takový výběr respondentů[7], kteří budou mít v matematice spíše průměrné výsledky. U těchto žáků jsem také doufal, že bude možné s nimi řešení více probírat a sledovat lépe jejich myšlenkové postupy,

[7] Protože testová baterie experimentu obsahuje i slovní úlohy, volil jsem žáky s českým mateřským jazykem, nebo s velmi dobře zvládnutou češtinou jako OMJ. Znalost jazyka byla potřebná i k účinnosti rozhovoru, který jsem se rozhodl v průzkumu použít.

než by tomu bylo u žáků, kterým se v matematice více daří a kteří by o svých krocích neměli pochybnosti. Ve druhém experimentu s touto baterií úloh jsem také zjistil, že pro svůj experiment potřebuji vybrat žáky komunikativní.

Rozhovory jsem prováděl vždy po dvojicích. Zajímala mě interakce mezi žáky a jejich schopnost navzájem si pomoci během řešení. Ve výběru s mými požadavky na žáky mi pomohli třídní učitelé.

Nakonec jsem experiment provedl s 26 dětmi. Pro analýzu dat jsem ale vybral pouze 20 z nich z důvodu vhodnosti a názornosti zjištěných jevů. Z 20 respondentů bylo 8 dívek a 11 chlapců. Deset žáků bylo ze čtvrtého ročníku a deset žáků z pátého ročníku. Podrobnější rozpis, obsahující i řešení jednotlivých úloh, najdete v dalších kapitolách.

	4.A	4.B	5.A	5.B	celkem
Počet žáků	2	8	6	4	20
dívky	0	4	3	2	9
chlapci	2	4	3	2	11

Rozhovory probíhaly během vyučování na domovské škole vybraných žáků. Žáci byli uvolněni z hodiny během dopoledního vyučování. Experiment probíhal ve volných třídách, případně v kabinetu, pokud byl prázdný. Délka rozhovoru nepřesáhla 45 min.

3.3.3. Průběh experimentu

Na začátek rozhovoru jsem se snažil vytvořit dobrou atmosféru, ptal jsem se žáků, jak se cítí a co bych od nich potřeboval. Informoval jsem je také, že si budu experiment nahrávat na kameru, ale že nebudu zabírat jejich obličeje. Žáci také věděli, že v práci nepoužiji jejich pravá jména, ale pseudonymy. Sdělil jsem jim také, že se nejedná o žádný test, naopak jsem se je snažil motivovat, že jejich spolupráci potřebuji k tomu, abych zjistil, jak dané úlohy budou řešit a že mě zajímá vše, co žáky k daným úlohám napadne. Žákům jsem řekl, že jejich řešení neuvidí jejich paní učitelky.

Po těchto úvodních informacích byli žáci ještě instruováni, že dostanou několik úloh, které se mají pokusit vyřešit. Vysvětlil jsem jim také, že si mají pozorně přečíst zadání a znovu jsem opakoval, že pokud něčemu nebudou rozumět, nemusí se bát mi to sdělit. Také jsem jim řekl, že budu moc rád, když si pomocné výpočty a další matematické postupy budou zapisovat do testových papírů, protože pro mě budou důležité pro vyhodnocování. Pak již žáci začali úlohy řešit.

3.3.4. Zpracování dat

K dispozici pro zpracování dat jsem měl své stručné zápisky vytvořené při tom, kdy žáci řešili úlohy, jejich video i audio nahrávku a pracovní listy s vypracovaným řešením.

Nahrávky rozhovorů jsem doslovně přepsal a analyzoval. Výběr přepisů uvádím v příloze. Nejprve jsem se snažil v rozhovorech hledat zajímavé oblasti, poté jsem se zaměřil na správnosti řešení a vyhledání obtíží v jednotlivých úlohách (viz. tabulka kap. 3.4.1.). U každé dvojice bylo třeba vypracovat statistiku úspěšnosti v jednotlivých úlohách.

3.4. Úlohy a jejich řešení

Úlohy, které jsem představil v kapitole 3.3.1. zde uvádím i se správnými řešeními v přehledné tabulce. V tabulce naleznete i stručnou charakteristiku úlohy.

cvičení	zadání		řešení	
1	Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.			
	a) 3 + 5 = 9 – 4	c) 23 – 17 < 54 – 45	a) N	c) A
	b) 16 . 3 > 7 + 20	d) 6 + 56 = 72 – 10	b) A	d) A
	rovnost a nerovnost dvou výrazů, rovnítko jako ekvivalence - patrně obtížná část			
2	Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.			
	a) ____ . 3 = 12	e) 57: 3 = ___ - 1	a) 4	e) 20
	b) 2 .(____ + 7) = 24	f) 32 = 27 + ___ - 2	b) 5	f) 7
	c) (17 – 7) . 2 = 5 + ____	g) ____ . 9 = 117	c) 15	g) 13
	d) 45 : ___ = 9	h) 49 = ____ - 16	d) 5	h) 65
	cvičení s mnoha operacemi, práce s pravou a levou stranou rovnice, závorky, posloupnost operací			
3	Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.			
	a) 1000 – x = 943	e) 2 . (x + 7) = 24	a) 57	e) 5
	b) x : 6 = 4	f) 19 = x : 3	b) 24	f) 57
	c) 45 : x = 9	g) 32 = 27 + x - 2	c) 5	g) 7
	d) x + 90 = 114	h) x . 3 = 12	d) 24	h) 4
	různé početní operace, neznámá ve formě písmene, závorky, posloupnost operací, práce s pravou a levou stranou rovnice			
4	Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?			
	úloha typu "myslím si číslo", řetězení početních operací, kombinace několika operací, možných několik strategií řešení		x - 2 + 27 = 32 x = **7**	32 - 27 + 2 = x **7** = x
5	Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?		12 : 3 = **4**	x . 3 = 12 x = **4**
	Jednoduchá slovní úloha na dělení, jedno číslo zadáno slovně			
6	Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?		24 : 2 = 12 12 - 7 = **5**	2(x + 7) = 24 x = **5**
	Složitá úloha, zadán operátor změny, dětem bude asi chybět počáteční stav, více časových pásem v úloze, více možností řešení			

3.4.1. Rozdělení zkoumaných řešení úloh

Úlohy chybně vyřešené (ch) jsou takové úlohy, které žáci chybně vyřešili a chybu neodhalili.

Úlohy s chybným řešením - vyřešené s dopomocí (ch vd), jsou takové úlohy, při jejichž řešení se žáci dopustili chyby, kterou ovšem buď s pomocí spolužáka, nebo experimentátora odhalili a opravili.

Úloha způsobující obtíže (ou), je úloha při jejímž řešení se žáci nad úlohou pozastavili, případně při jejím řešení tápali, ale nedopustili se chybného řešení.

Úlohy s odhalenou myšlenkou izomorfismu (iz), jsou takové úlohy, ve kterých během řešení žáci upozornili na shodné prvky, kterých později využili ke správnému řešení.

		4.B		5.A		5.A		5.A		4.A		4.B		5.B		5.B		4.B		4.B	
		Eda + Adam		Petr + Adina		Láďa a Jenda		Anežka + Bětka		Jára + Sváťa		Jana + Nina		Aleš + Slávek		Pavla + Lenka		Michal + Vilém		Natálka + Dominika	
		E	A	P	A	L	J	A	B	J	S	J	N	A	S	P	L	M	V	N	D
1	a	ou	ou	v	v	ouv	ouv	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
	b	v	v	ch	v	ch vd	v	v	v	v	ou	v	v	v	v	v	v	v	v	ou	ou
	c	v	v	ch	v	v	v	v	v	v	ou	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
	d	v	ouv	v	v	v	v	ch	v	v	v	v	v	v	v	v	v	ch vd	v	ch	v
2	a	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
	b	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
	c	ch	ch	v	v	ou	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	ou	v	v	v
	d	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
	e	ou	ou	v	ch	ch	ch	v	v	ch vd	ch vd	v	v	v	v	v	v	ch vd	v	ch vd	ch vd
	f	ch vd	ch vd	v	v	ou	v	v	v	v	v	ch	v	v	v	ou	ou	v	v	v	ch vd
	g	ou	v	v	v	ou	ou	v	v	v	ch vd	v	ch	v	v	v	v	ou	v	v	v
	h	ch vd	ou	v	v	ch vd	v	v	v	ch	ch	v	ch	v	v	v	v	v	v	v	v
3	a	v	v	v	ch	v	v	v	v	v	v	v	ch	v	v	v	v	v	v	ou	ou
	b	iz	iz	v	v	v	v	v	v	ch	ch	v	v	v	v	ou	ou	v	v	v	v
	c	iz	iz	v	v	iz	iz	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	iz	iz	v	v
	d	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	ch	v
	e	iz	iz	v	v	v	v	v	v	iz	iz	v	v	v	v	v	v	iz	iz	iz	iz
	f	iz	iz	ch	v	iz	iz	ch	ch	v	ou	v	v	v	v	ou	ou	v	v	iz	iz
	g	v	v	v	v	v	v	v	v	iz	iz	v	v	v	v	iz	iz	v	v	ch	iz
	h	v	v	v	v	v	v	v	v	iz	iz	v	v	v	v	v	v	iz	iz	v	v
4		v	v	v	v	v	iz	v	v	v	ou	v	ch	v	v	v	v	ch	iz	iz	iz
5		v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	v	iz	iz	v	v
6		ou	v	v	ch	ou	ch	ch vd	ch vd	ch vd	ch vd	v	ch vd	ch vd	ch vd	v	v	iz	v	ch vd	ch vd

3.4.2. Úlohy na práci s rovností a nerovností

Zadání: *Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.*

a) 3 + 5 = 9 – 4

	ch	ch vd	ou
4.ročník			Adam, Eda
5. ročník			Jenda, Láďa

Chybu v této úloze neudělal žádný z testovaných žáků, přesto se tato úloha ukázala pro některé žáky jako obtížná.

Pro všechny žáky, kterým první úloha způsobila potíže, bylo společné, že se jim zdál podezřelý zápis v pravé části úlohy. Často si žáci stěžovali na odčítání -4 v pravé části úlohy. S úlohou se vyrovnávali žáci hned z první testované dvojice – Eda a Adam ze 4. ročníku, jak dokládá doslovný záznam jejich rozhovoru:

A: No jo, ale tak proč je tam to -4? Jsem úplně nepochopil. Jako že je tam = 9 – 4, to máme jako vypočítat?

E: Asi jo…

A: Jenže to není pravda…

U: A proč? Co není pravda?

E: Protože 3 + 5 je 8

A: No a -4 jsou 4

E: No, jsou 4 a ne 9

A: Ano, 8 – 4 jsou 4 … no, právě to je úplně divný.

U: Je to divný?

A: No, protože 3 + 5 je 8 rovná se 9 – 4.

U: Aha, takže oni říkají, že 3 + 5 se rovná 9 – 4…

A: Jo takhle…ne, nechápu to…

E: To je složitý…

U žáků je vidět zažité pochopení rovnítka, jako symbolu implikace – tedy „proveď předchozí operaci“. Toto pochopení je pro ně přirozené a odkazuje k citaci z knihy Vondrové a Kuřiny (2022), kterou uvádím v teoretické části. Pravou stranu rovnosti tedy chápou jako výsledek operace zapsané na levé straně úlohy. Problém je ovšem v tom, že jsou žáci zvyklí, že po rovnítku následuje pouze jedno číslo a nikoli další operace. První úlohu se nakonec žáci rozhodli odložit a věnovat se dalším úlohám[8] z prvního cvičení. K úloze se později vrátili a úspěšně ji vyřešili.

[8] Návod na řešení této úlohy žákům poskytla druhá úloha z prvního cvičení (16 . 3 > 7 + 20). Žáci vedeni symbolem nerovnosti začali přirozeně porovnávat pravou a levou stranu úlohy. Je zřejmé, že znaménko nerovnosti u dětí podporuje vnímání vztahů mezi pravou a levou stranou úlohu, které si ovšem se znaménkem rovná se, neumí spojit.

Obdobné obtíže jsem pozoroval i u třetí testované dvojice Jendy a Luďka (5.ročník). První úlohu žáci řešili správně, zajímavé je ale jejich chybné zdůvodnění, proč je zápis nepravdivý.

J: Ten příklad je špatně.

U: Jak to, že je špatně?

J: Protože 3 + 5 je 8 a ne devět.

Žáci pracují pouze s levou částí zápisu a pravou vnímají pouze jako výsledek. Levá část úlohy se ale nerovná pravé části, kde žáci vnímají pouze číslici devět. Vnímají tedy rovnítko opět jako implikaci.

b) 16 . 3 > 7 + 20

	ch	ch vd	ou
4.ročník			Sváťa, Natálka, Dominika
5. ročník	Petr, Láďa	Láďa	

Druhou úlohu tohoto souboru vyřešili chybně žáci Petr a Láďa z pátého ročníku. V obou případech ale šlo patrně o chybu z nepozornosti. Žáci si pod dojmem první úlohy ve cvičení nevšimli, že mezi stranami úlohy je znak nerovnosti a nikoli rovnítko. Proto zápis úlohy označili za nepravdivý.

Jako obtížná se tato úloha ukázala být pro tři žáky: Sváťu, Natálku a Dominiku, všichni ze čtvrtého ročníku. Tito žáci nejvíce zápolili s násobením mimo okruh násobilky. Úlohu nicméně vyřešili správně. Jednalo se tedy hlavně o kalkulativní chyby.

c) 23 – 17 < 54 – 45

	ch	ch vd	ou
4.ročník			Sváťa
5. ročník	Petr		

Ve třetí úloze chyboval Petr z pátého ročníku. Zápis úlohy označil za nepravdivý. Patrně došlo ve výpočtu ke kalkulativní chybě.

Obtížná se úloha ukázala pro Sváťu ze čtvrtého ročníku. Je těžké určit, zda náročnost pro Sváťu vyplývala z nepochopení úlohy, nebo z operací v úloze obsažených. Říkal nicméně, že úloze nerozumí. S vysvětlením mu ochotně pomohl spolužák ze dvojice, Jára, který ukázal, že se v úloze dobře orientuje.

S: Já to nechápu.

U: A co myslíš, že nechápeš?

S: Tohle…Járo, můžeš mi poradit?

J: No, jasně, nejdřív bych si vypočítal obojí dvojí, pak bych si pod to napsal výsledky a pak na základě toho bych zjistil, jestli je to pravdivé, nebo nepravdivé. Což si myslím, že zrovna…já bych si to rád přepočítal…

S: šest…a …. devět

J: A je to správně, takhle

Jára svým vysvětlením dokazuje, že v úloze vidí porovnání dvou stran. Sváťa po jeho vysvětlení úlohu zdárně vyřešil.

d) 6 + 56 = 72 – 10

	ch	ch vd	ou
4.ročník	Natálka	Michal	Adam
5. ročník	Anežka		

Ve čtvrté úloze cvičení se vyskytly chyby u Natálky ze čtvrtého ročníku a u Anežky z pátého ročníku. Michal nejprve úlohu vyřešil chybně, ke správnému řešení se dostal s dopomocí.

Michal označil zápis úlohy jako nepravdivý. Zajímavé je jeho vysvětlení. Myslel si, že úloha je 6 +56 = 72. V tom případě by skutečně byl zápis úlohy nepravdivý. Vysvětlení tak ukazuje, že Michal v úloze přirozeně vnímal pouze tři prvky operace a vztah mezi levou a pravou stranou úlohy nevnímal. Opět se tu tedy objevuje pochopení rovnítka jako symbolu „vypočítej".

U: Tak a máme tu kolizi. Ty máš Míšo ten čtvrtý příklad jako nepravdivý a ty, Viléme, jako pravdivý. Tak mi to vysvětlete. Viléme, jaký je tvůj argument pro to, že je to správně?

V: No, protože 6 + 56 je 62 a 72 – 10 je taky 62 a tady mezi těmi příklady je rovná se, takže by to mělo být stejný.

U: Takže by to mělo být v pořádku?

M: Ahá!

V: Ty sis asi nevšimnul toho rovná se…

M: Ne,všimnul. Já jsem to pochopil akorát jinak.

U: A jak? Jak si to pochopil?

M: No, že 6 + 56 se rovná 72 a pak mínus deset.

U: Jako že to – 10 už tam nebylo důležité?

M: Asi tak.

U: Dobře.

Stejný druh chyby můžeme evidovat i u Natálky a Anežky. Obě děvčata postupovala stejně jako Michal. Anežka dokonce upozorňovala na to, že úloha se nerovná 72 a tedy že zápis úlohy není pravdivý. Obě děvčata ale svou chybu v řešení později neopravila.

Jako obtížnou můžeme úlohu označit pro Adama ze čtvrtého ročníku. Chlapec si spletl rovnítko s označením pro nerovnost. Svou nepozornost ale napravil. V rozhovoru říká, že si je vědom rovnosti obou stran, ale byl přesvědčený, že stále pracuje s nerovností.

3.4.3. Úlohy na práci s rovnicí

V této části experimentu budou žáci pracovat s úlohami, které obsahují rovnítko a neznámou vyjádřenou podtržítkem, nebo písmenem.

3.4.3.1. Úlohy s neznámou vyjádřenou podtržítkem

Zadání: *Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.*

Tato série úloh měla za úkol zjistit, jak se žáci vypořádají s rovnicemi, ve kterých je neznámá vyjádřena podtržítkem. Jedná se o způsob vyobrazení, který je hojně používaný v učebnicích Alter již od prvního ročníku. Ve většině úloh se nicméně objevuje zápis, ve kterém je neznámá zapsána na pozici v levé části před rovná se. Zvláště mě tedy zajímalo, jak žáci budou řešit úlohy, ve kterých byla neznámá na pravé straně úlohy, navíc jako součást další operace, jako je tomu v úlohách c, e, f v tomto cvičení.

a) ____ . 3 = 12
b) 2 .(____ + 7) = 24

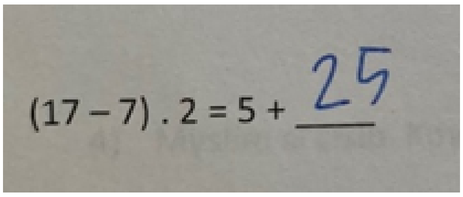
První dvě úlohy pro žáky nebyly obtížné. Vyřešili je poměrně rychle a bez chyb.

c) (17 – 7) . 2 = 5 + ____

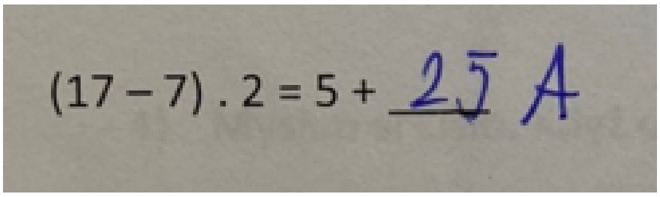
	ch	ch vd	ou
4.ročník	Adam, Eda		Michal
5. ročník			Láďa

Ve třetí úloze se chyb dopustila jedna testovaná dvojice – Eda a Adam. Pro dva další žáky se pak jednalo o obtížnou úlohu.

Dvojice Eda a Adam přistoupili k úloze rozdílně. Zatímco Adam chtěl výpočet úlohy s kolegou probrat, Eda ji považoval za jednoduchou s tím, že ji již vypočítal. Adam tedy důvěřoval kolegovi a zapsal stejný výsledek.



Obrázek 39 - řešení úlohy c - Adam



Obrázek 38 - řešení úlohy c - Eda

Když jsem přemýšlel, co Edu k takovému řešení vedlo, došel jsem k závěru, že nevnímal rovnítko a pouze provedl operace s čísly, které má v úloze uvedené. Vypočítal závorku, vynásobil dvěma a pak přičetl pět. Mám za to, že chápání rovnítka, jako vyjádření ekvivalence, které by Edu dovedlo ke správnému řešení, bylo pro žáka stále něčím novým a náročným.

Obtíže v této úloze zaznamenali žáci Láďa z pátého ročníku a Michal ze čtvrtého ročníku. Láďa v úloze zaváhal hned v počátku. Bez bližšího zkoumání ho napadlo, že do úlohy asi může doplnit libovolné číslo. Pak se ale opravuje a ukazuje, že zápis úlohy chápe dobře.

L: A jaký číslo tu má být? Tady asi může být úplně náhodný číslo, ne?

U: Myslíš? Tak to vyzkoušej.

L: Ne, to bude něco, plus 5 rovná se výsledek tohohle předtím.

Michal ze čtvrtého ročníku byl zmatený zápisem úlohy. Dokázal vypočítat levou stranu úlohy, ale nerozuměl pravé straně. Jeho kolega mu ale poradil odkazem na první cvičení, kde bylo třeba pracovat s rovností. Mám pocit, že Michalovo zmatení bylo způsobeno tím, že zápis dvou operací spojených rovnítkem je pro něho stále ještě nový a pochopení rovnítka jako implikace stále převládá nad ekvivalencí.

M: Jsem zmatenej teď tady u tohohle.

U: Jo? A co tě zmátlo?

M: Počkej, já jsem to nepochopil…17 – 7 je 10krát 2 je 20…

V: Akorát že tady je tady (první cvičení) je to porovnávání. Takže tady se to musí rovnat stejně.

M: Ahá

V: Takže…

M: Jo, jasně!

V: Takže asi chápeš už, ne?

M: Jo!

e) 57: 3 = ___ - 1

	ch	ch vd	ou
4.ročník		Jára, Sváťa, Michal, Natálka, Dominika	Adam, Eda
5. ročník	Adina, Láďa, Jenda		

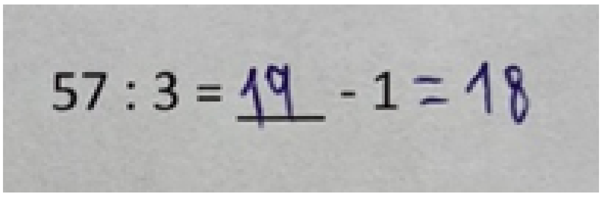
V úloze *e* udělali chybu tři žáci. Chybné řešení, které vyřešili s dopomocí, předložilo pět žáků a u dvou žáků jsem zaznamenal, že jim úloha činila obtíže.

Chybu v této úloze udělala Adina, která do úlohy doplnila číslo 19. Z jejího řešení je vidět, že si příliš nevěděla rady s -1 na pravé straně od rovná se. Rozhodla se tedy vypočítat to, co dokázala, a to byla levá strana. Do pravé pak zapsala výsledek dělení a dál ji nechala bez úpravy.

Láďa s Jendou v této úloze také chybovali. Opět zápis -1 na pravé straně úlohy oba žáky silně dráždil. Láďa dokonce navrhuje, že by bylo třeba k úloze na pravou stranu ještě *„dopsat nějaký výsledek“*.

Láďa se nakonec spokojil s tím, že ve svém řešení vyřešil operaci na pravé straně a její výsledek zapsal za rovnítko, jak je zvyklý. Zbytek zápisu úlohy ho nijak neupozornil na to, že by v řešení bylo třeba ještě něco podniknout.

Jenda procházel podobnými obtížemi, jako Láďa. Levá strana úlohy pro něho byla podezřelá a vypořádal se s ní tak, že si k zápisu úlohy dopsal rovnítko, za které dopsal číslo 18. Opět se tu tedy objevuje pochopení rovnítka, jako symbolu vybízejícího k výpočtu, bez nějakého hlubšího pochopení vztahů v úloze.



Obrázek 40 - řešení Jenda

I když jsem se oba chlapce snažil k úloze vrátit a přivést je k ověření jejich výpočtu, chlapci další ověřování vzdali a pustili se do následujících příkladů.

Další žáci s úlohou také zápolili, ale podařilo se jim přes počáteční chybu úlohu vyřešit s dopomocí. Jára a Sváťa, také upozorňovali na -1 na levé straně. Podle jejich názoru by tam neměla být. Jára říkal, že takhle neví, jestli se má do výsledku jedna přidat, nebo jestli se jedná o úlohu typu had, kde na sebe výpočty navazují. Chlapci se nakonec rozhodli, že úlohu zkusí vypočítat, a to jim pomůže do ní lépe proniknout.

Během výpočtů se ukázaly menší problémy s písemným dělením, zvláště u Sváti. Kluci nicméně došli k hodnotě 19, kterou také zapsali do svých řešení. Když to provedli, přečetl jsem jim, co vlastně zapsali. V tu chvíli bylo vidět, že si Jára uvědomil, kde udělali chybu a tu také opravil. V Járově přístupu k chybě se mi potvrdila zjištění od Hejného (2004), která jsem zapsal v teoretické části (kap. 1.6) Sváťa jeho opravu pouze přepsal.

U: 57 děleno třemi je to samé, jako devatenáct, mínus jedna…

J: Aháááá! Mohl byste to ještě jednou zopakovat?

U: 57 děleno třemi je to samé, jako devatenáct mínus jedna.

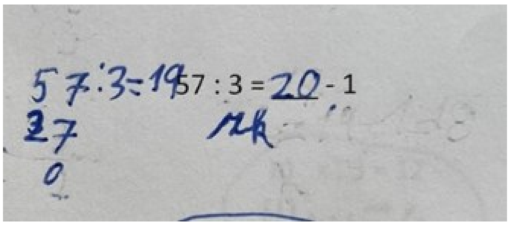
J: Není to tak! Já vím!

S: Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý…

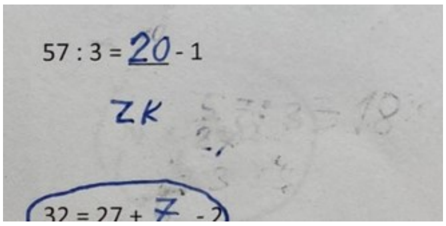
J: Já už vím, to bude 20

U: Jak si na to přišel?

J: Protože -1 je 19, která se rovná 57 : 3, to je taky 19.



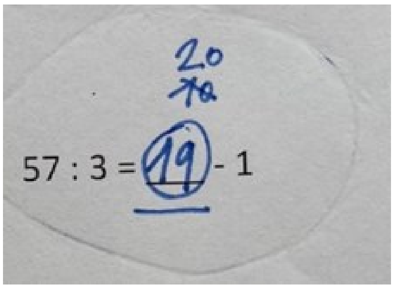
Obrázek 42 - řešení Jára



Obrázek 41 - řešení Sváťa

Mám pocit, že chlapci byli při řešení úlohy natolik zaměstnáni dělením, ve kterém si nebyli příliš jistí, a nezvyklou formou zápisu, že v první chvíli úplně přehlédli vztahy, které vyplývaly ze zápisu úlohu.

U Michala řešíme stejný problém. Opět pracoval jen s levou stranou úlohy, úpravy, ke kterým vyzývala pravá strana vynechal. Opravu provedl až po mém upozornění.



Obrázek 43 - řešení Michal

Dominika s Natálkou okamžitě úlohu označily za divnou. Povedlo se jim správně vydělit levou stranu úlohy. Při řešení pravé strany si ale nevěděly rady s -1. Natálka říkala, že výsledek pravé strany by takhle byl 18. Dominika sice upozorňovala, že mezi operacemi je rovnítko, ale protože žákyně na vztah mezi stranami úlohy nepřišly, rozhodly se úlohu odložit a vrátit se k jejímu řešení později.

N: No, jakože, kdybych si dala 19 – 1, tak je to 18, ale já nevím, jakou to má souvislost s tím příkladem…

D: No, tam je to rovná se…

N: Jo, takhle…

Po návratu k úloze Natálka přichází s teorií, že pokud by na vynechaném řádku bylo číslo 19, pak by obě strany nebyly stejné. Navrhla, že by na vynechaný řádek zapsala 20, pak ale znejistěla z vědomí, že výsledek levé strany úlohy vyšel 19. Opět jako by zapomínala na část s -1.

V tuto chvíli jsem nevydržel v pozici experimentátora, probudil se ve mně učitel a do jejího řešení jsem vstoupil. Ujistil jsem ji, že postupuje správně.

N: Já si nejsem jistá, ale mně tak přijde, že když se ten příklad rovná 19, tak tady se odečítá, takže to není stejný…

U: Jasně…a co s tím?

N: No, já bych tam zkusila dát 20…ale nevím.

U: Tak ji tam zkus dát a uvidíš, jestli to bude fungovat. Tak, teď máš 20 – 1, to je kolik?

N: 19

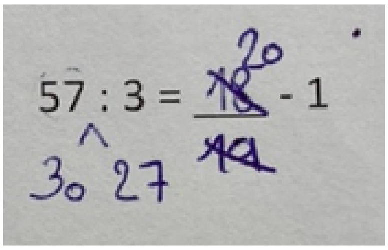
U: A 57 : 3 je kolik?

N: 19 ? Takže to nejde…

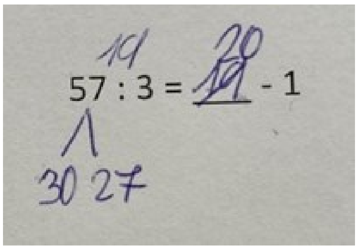
U: Proč ne? Tady je devatenáct a tady je taky devatenáct?

N: Tak to jde! Aha, já myslela totiž, že tady je ten výsledek, a tak mě to zmátlo…že se to musí ještě odčítat.

Po Natálčině řešení si děvčata přepsala výsledky ve svých záznamových arších.



Obrázek 45 - řešení Natálka



Obrázek 44 - řešení Dominika

Značné obtíže při řešení této úlohy zaznamenali Adam s Edou. Jejich řešení jsem nakonec nezařadil mezi chybná řešení, protože se dokázali k opravě propracovat sami bez pomoci. Nejprve ale postupovali jako ostatní spolužáci. Podivili se nad zápisem pravé strany úlohy, vyřešili její levou stranu, zapsali číslo 19 a pokračovali k dalším úlohám.

Během řešení ale chlapci získali nové zkušenosti, které je pak přivedli k revizi řešení této úlohy. Hybatelem změny byl v tomto případě Adam, který se nevzdal přesvědčení, že číslo 19 hraje v celé úloze svou roli, přestože není řešením úlohy.

A: Je 19 prostě, ta devatenáctka tam někde musí hrát roli…

E: Ale jakou?

A: No právě! Není to zase to plusko? Že by se tam doplnilo těch 57…Ne! Tohle se musí rovnat 19…takže 20, ne?

E: No…

A: Možná, když sem napíšeme 20 – 1 je 19…a tohle se taky rovná 19!

E: Nojo…

A: Takže 20!

E: Jojo

E: Jasně, 57 : 3 je 20 bez jedný…hmm tak to jo…teď už by to taky mělo bejt správně…

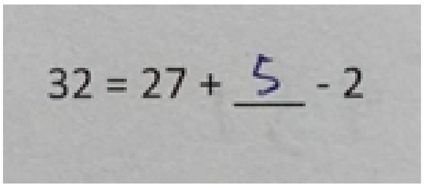
A: Takže všechno už bychom měli mít správně…panebože, proč nám to nedošlo dřív?

f) 32 = 27 + ___ - 2

	ch	ch vd	ou
4.ročník	Jana	Adam, Eda, Dominika	
5. ročník			Láďa, Pavla, Lenka

V úloze *f* ze druhého cvičení chybu udělala Jana. Eda, Adam a Dominika si původně chybné řešení dokázali s dopomocí opravit a pro tři žáky byla úloha obtížná.

Jana v této úloze zapsala jako hledanou hodnotu číslo 5. Bohužel jsem k úloze od Jany nezískal komentář. Původně jsem se domníval, že Jana vynechala -2 z nepozornosti, po prostudování řešení ostatních žáků jsem ale zjistil, že se jednalo o častou chybu, patrně vyplývající z neobvyklého zápisu úlohy. Její spolužačka Nina úlohu vyřešila správně.

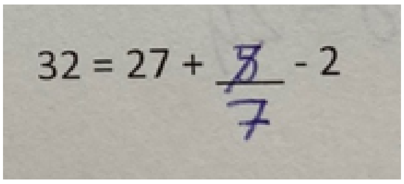


Obrázek 46 - řešení Jana

Dominika zapsala do úlohy také číslo 5. Ji i její kolegyni jsem na nesrovnalost v řešení upozornil. Dominika si pak se svou spolužačkou vysvětlila, jaké řešení by mělo být správné. Natálka svou úlohu vyřešila napoprvé.

D: Tak, 27 + 5 je…těch 32 mínus…aha no…tak tam bude ta 7.

N: Když tam odebereme -2, tak tam musí být sedmička.



Obrázek 47 - řešení Dominika

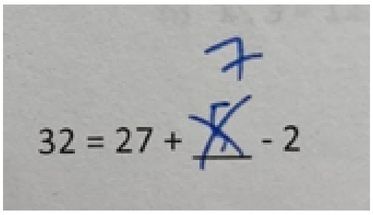
Adam a Eda nejprve také úlohu vyřešili zápisem čísla 5. Opět, stejně jako jejich spolužáci ignorovali zbytek zápisu úlohy. V jejich diskusi je nicméně vidět, že si v úloze nejsou jistí.

A: A zase tam je -2…

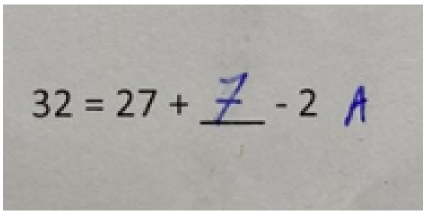
E: Počkej…

A: Jo, nebude to zase? To bude zase…ne…já fakt nevím…

K úloze *f* se chlapci vrátili později, po vyřešení úlohy *h*, ve které přišli na způsob, jak ji správně vyřešit. Teprve potom došlo k nápravě.



Obrázek 49 - řešení Adam



Obrázek 48 - řešení Eda (oprava původního výsledku)

Ve dvojici Láďa a Jenda byl Jenda s úlohou hned hotový. Láďovi ale přišla úloha podivná a vyslovil přání, zda by nemohla být ta úloha zapsána obráceně. Tento „*obrácený*“

způsob zápisu pro něho byl nezvyklý a je zde vidět, jak je důležité, aby se děti seznamovaly častěji i s jiným způsobem uspořádáním úloh, než jen „*operace=výsledek*“, jak popisuji v teoretické části viz. kapitola 1.3.

Láďa také mluví o tom, že je na levé straně hned napsaný „*výsledek*“ , utvrzuje mě to v přesvědčení, že vzor vnímat rovnítko implikačně je mezi dětmi silně zakořeněn.

L: Nemohlo by tohle to být naopak ten příklad?

U: Proč?

L: No já nevím, protože tady je hned výsledek a pak je tu 2 mínus. Počkej…

U: Možná to je obráceně…

L: Když to je divný!

U: Je to jinak, než jsi zvyklý?

L: Jo.

Pavla s Lenkou se s úlohou vypořádaly docela dobře, ale i ony se potřebovaly v úloze zorientovat. Díky spolupráci se dostaly ke správnému řešení.

P: Rovná se to 32…

L: Takže to bude jako 2 – něco plus 27 se rovná 32

P: Jo, takže 32 – 27?

L: Hmm a to je 5, počkej, ale 2 – 5…

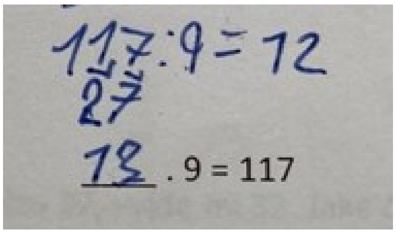
P: Ne, počkej…7 – 2 je 5 + 27, no, takže 7

g) ____ . 9 = 117

	ch	ch vd	ou
4.ročník	Nina	Sváťa	Eda, Michal
5. ročník			Láďa, Jenda

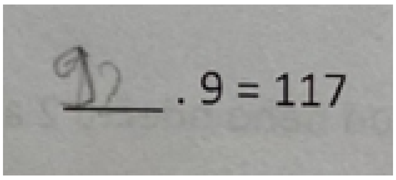
V úloze *g* udělala chybu Nina a Sváťa. Sváťa si ale chybné řešení později opravil. Čtyři žáci se nad úlohou pozastavili nebo s jejím řešením měli obtíže.

Sváťova chyba vycházela z jeho nejistoty při dělení. Naštěstí jeho spolužák Jára mu přišel na pomoc a Sváťa tak nakonec úlohu správně vyřešil.



Obrázek 50 - řešení Sváťa

Zřejmě stejný problém jako Sváťa měla i Nina v jejím řešení. Ta se ovšem o pomoc kamarádky opřít nemohla, její řešení tedy zůstalo chybné.



Obrázek 51 - řešení Nina

Ze dvojice Eda a Adam měl s touto úlohou obtíže Eda, který tvrdil, že úlohou nejde vypočítat. Spolužák Adam mu ale s úlohou poradil a Eda pomoc přijal. U Edy můžeme kromě obtíží s písemným dělením patrně pozorovat i neschopnost vidět souvislost mezi dělením a nálezem hledaného čísla figurujícího v operaci násobení.

Láďa a Jenda vznesli otázku, že neví, čím mají devítku vynásobit. Vztah mezi levou a pravou stranou úlohy a možnost použít dělení kluky vůbec nenapadla a zvolili strategii dosazování – pokus/omyl. Je možné, že nepracovali se vztahy uvnitř úlohy z důvodu velkého čísla, které je v úloze zarazilo.

Stejný způsob řešení zvolil v této úloze i Michal, který se rozhodl také dosazovat místo písemného dělení. Opět postupoval pomocí strategie pokus/omyl.

M: Počkej…15 . 9… ne ne 12 . 9….

V: Aha, tak já půjdu na další stranu?

M: 12 . 9 zkusím…to je 90 a 18…tak 13…3 . 9 je 27…áááá! 13!

V: No!

h) 49 = ____ - 16

	ch	ch vd	ou
4.ročník	Jára, Nina, Sváťa	Eda	Adam
5. ročník		Láďa	

Závěrečnou úlohu druhého souboru úloh vyřešili chybně tři žáci. Dva žáci chybné řešení s dopomocí opravili. Pro jednoho z žáků byla úloha přes správné řešení obtížná.

První dvojice Eda a Adam s úlohou trochu bojovala. Eda si věřil a jako své řešení zapsal číslo 33. S tím se ale Adam nechtěl smířit a začal o úloze přemýšlet. Po dosazení Edova výsledku do úlohy kluci přišli na to, že zápis úlohy tak nedává smysl. V následné diskusi pak chlapci rozkryli správné řešení tak, že vyšli ze vztahu pravé a levé strany úlohy. Bylo vidět, jak je možnost společně úlohu prodiskutovat, oba obohacuje a zprostředkovává jim badatelské zážitky vedoucí k hlubšímu pochopení problematiky.

Po společném objevu si žáci svá řešení v experimentu opravili.

A: A teď ještě tohle…a zase tam je to mínus.

E: To už mám…

A: Co? A jak si zjistil, že se to rovná 33? 49 se rovná 33 – 16? To není 49 – 16…

E: Tak ne…

A: To je divný hrozně, jako tam to číslo nemůžeme nijak doplnit…

U: A proč to nemůže být těch 33, když to tam nejde doplnit?

A: No, protože 49 = 33 – 16?

E: Ne, že 49…ne, tak to musí bejt o 16 větší, ne? Tím pádem?

A: No, ale to není, nebo je?

E: No, podle mě to bude jako o 16 větší než to 49…

A: Jako že by to bylo plusko mínus mínus?

E: No, to znamená…59

A: No, počkej…no, vono to tak fakt je!

E: No…

A: Že je to o 16 větší…

E: No, aby se to pak vešlo…ten výsledek…

A: Ta 33…33 je o 16 větší…

E: Ne, 49 je o 16 větší…

A: No, 49 je o 16 větší…než 33

E: Jo…ne! Než 65…

A: A jak si přišel na těch 65?

E: No, 49 + 16…jako že ten příklad vychází…koukej…49 je jako 65 bez 16

Chyba v řešení Láďi byla patrně způsobena nepozorností než tím, že by úloze neporozuměl. V řešení uvedl číslo 67. Po mém upozornění ale chybu opravil.

Chybné řešení Járy se Sváťou se mi zdá zajímavé tím, že jeden z chlapců správně popíše, jaké číslo chlapci hledají, aby zápis úlohy dával smysl, následně se ale oba vrhnou do odčítání jediných dvou čísel, které mají k dispozici naprosto bez zamyšlení. Oba dojdou k číslu 33 a i přes mé upozornění jsou s výsledky spokojeni. Z tohoto řešení mi vychází, že i když se objeví pochopení o vztahu pravé a levé strany úlohy, tak může být zmateno nejistotou v používání nástrojů, které ke správnému výsledku mohou vést. Přijde mi také zajímavé, že se zde potvrzuje, že odčítání v kombinaci s neznámou dětem dělá větší potíže, než když je spojené se sčtáním.

S: Jo, počkej…49…to musíme udělat nějakej ten…a jak to bude?

J: Já vím, jak to uděláme…

S: My tam musíme mít nějaké to číslo, od kterého odečteme tu šestnáctku a vyjde nám 49…

J: Sakra, to je pravda, to je pravda…

S: takže šestka a do devíti se rovnají…

J: Třicet tři…jdu dále…

S: Počkej… ajo…

U: Jste s těmi příklady spokojení?

S + J: Jojo, myslíme si, ale nevíme to jako jistě…

U: Takže 49 je stejné, jako 33 – 16?

J: Jojo

Poslední chybné řešení patřilo Nině, která jako hledanou hodnotu uvedla shodně s Láďou z předchozích dvojic číslo 67. Věřím, že se opět jednalo o chybu z nepozornosti.

3.4.3.2. Úlohy s neznámou vyjádřenou písmenem

Zadání: *Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.*

Třetí soubor úloh obsahuje úlohy s neznámou vyjádřenou písmenem. Mým záměrem bylo zjistit, zda použití písmene nějak ovlivní pochopení úloh a jejich řešení. Také je ve třetím souboru zakomponováno několik úloh, které se objevily již v předchozím cvičení. Rozdíl je pouze ve způsobu zápisu neznámé. Žáci budou opět prokazovat schopnosti řešit úlohy v rámci operací do 1000, řešení úloh se závorkami apod. Navíc jsem od tohoto cvičení začal sledovat, zda si žáci všimnou shodných úloh z předchozího cvičení pouze s jinak vyjádřenou neznámou.

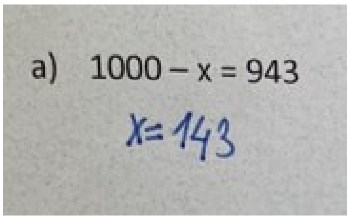
a) 1000 – x = 943

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník	Nina		Natálka, Dominika	
5. ročník	Adina			

Hlavní výzvou první úlohy byla vyšší čísla, nicméně jsem ji pokládal za jednodušší. Přesto se u dvou žáků objevila chyba v řešení a u dalších dvou jsem zaznamenal obtíže s řešením.

Chybu v řešení jsem zaznamenal u Ádi, která jinak úlohami procházela téměř bez chyb. Jednalo se nejspíše o chybu pramenící z nejistoty v písemném odčítání.

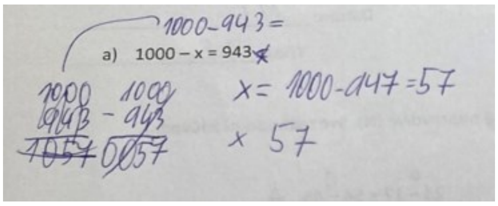
Za zmínku stojí, že se Áďa pokoušela použít symbolu *x* pro vyjádření hodnoty neznámé. Je to potřeba, která se u dětí přirozeně objevovala až s příchodem ke třetímu cvičení.



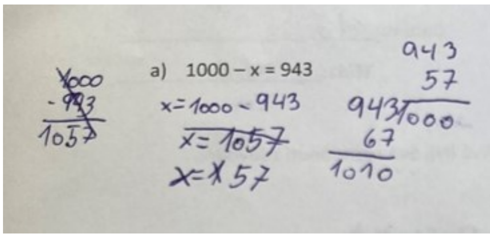
Obrázek 52 - řešení Áďa

Další chybné řešení nacházíme u Niny. Opět se zde jedná o chybu vycházející z písemného odčítání. Stejně jako u Ádi zde můžeme vidět tendenci využívat *x* k vyjádření výsledku.

U Natálky s Dominikou došlo v řešení této úlohy k obtížím, také vycházejícím z písemného odčítání. Nakonec ale děvčata správné řešení objevila.



Obrázek 53 - řešení Dominika



Obrázek 54 - řešení Natálka

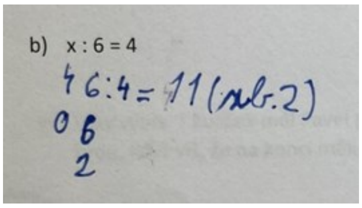
Z řešení děvčat je vidět, že písemné sčítání a odčítání větších čísel je jejich slabinou. Zároveň ale vidíme, že se skutečně snažila vytvořit zápis řešení rovnice. Ostatní žáci se spokojili s tím, že hodnotu *x* zapsali nad neznámou.

b) x : 6 = 4

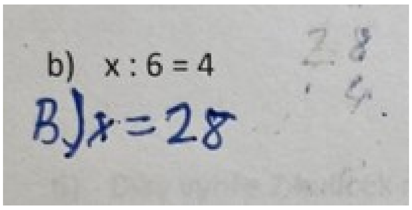
	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník	Jára, Sváťa			Adam, Eda
5. ročník			Pavla, Lenka	

Mezi řešeními této úlohy se objevily dvě chyby a dva žáci měli s řešením úloh obtíže. To, že se jedná o podobnou úlohu jako v předchozím cvičení, si všimli Eda a Adam.

U Járy a Sváti narážíme opět na problém s dělením a násobením. Oba chlapci řeší tuto úlohu chybně z důvodu nesprávně provedeného dělení, případně chybně zapamatovaných násobků. Sváťa dokonce řeší úlohu tak, že neznámá bude mít zbytek.



Obrázek 55 - řešení Sváťa



Obrázek 56 - řešení Jára

Oba chlapci se nicméně pokouší pracovat se zápisem pomocí symbolu *x*, který ale využili pouze k označení výsledku.

Pavla s Lenkou měly obtíže při odhalování, jak se dostat k hledané hodnotě. Děvčata si neuměla zvolit operaci, která by je k řešení přivedla. Nejdříve obě začala dělit 6 : 4. Najít smysl vycházející ze zápisu úlohy se jim podařilo až s mojí pomocí.

Věřím, že tato nejistota vychází z toho, že se žákyně ještě nesetkaly s větším množstvím podobných úloh, aby se zápisem uměly efektivněji pracovat.

L: No, protože třeba do šesti se 4 vejde jednou a zbytek je 2

U: A my dělíme 6 : 4?

P: No…

L: Nebo…něco, děleno 6 je 4…jo ahááá!

P: ahá!

U: Takže vlastně hledám?

P: 6 . 4…

L: 24

c) 45 : x = 9

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník				Adam, Eda, Michal, Vilém
5. ročník				Láďa, Jenda

S touto úlohou se žáci vypořádali dobře. Zaznamenal jsem zde tři dvojice, které si všimly shodnosti zadání s úlohou v předchozím cvičení. Uvádím ještě poznatek Ládi, který mi přijde zajímavý.

Láďovy obtíže nepocházely ze samotné úlohy, ale spíše z použití písmene *x* k vyjádření neznámé. Láďova třída se učila z učebnic od nakladatelství Alter, které využívají v nižších ročnících k označení neznámé v jednotlivých úlohách různá písmena abecedy. Záměr to patrně není špatný, chtějí tím patrně zdůraznit, že hodnota jednotlivých skrytých čísel je různá. Nicméně, jak je vidět na Láďově příkladu, může dojít i ke zmatení v pozdějších ročnících, kdy už tento zápis není využíván.

L: Tam je to x-ko pokaždý jinak?

U: No jasně, každý příklad je jiný…ty si přemýšlel, že by tam bylo jen jedno řešení?

L: Jo, protože tam jsou stejná písmena…

U: Nene, každé x je jiné.

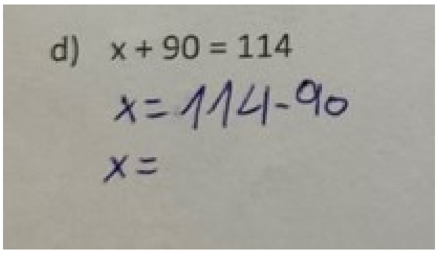
L: Aha

Tři dvojice odhalily, že se se stejnou úlohou setkaly již v předchozím souboru úloh. Byly si schopny propojit zápisy se symbolem *x* a podtržítkem. Tito žáci byli Eda a Adam, Láďa s Jendou a Michal s Vilémem. Ostatním propojení prozatím zůstalo skryté.

d) x + 90 = 114

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník	Natálka			
5. ročník				

S touto úlohou žáci neměli problémy. Chyba se vyskytla jen u Natálky, která správně zapsala způsob, jak se k neznámé dostat, ale již výpočet nestihla dokončit. Na jejím řešení je vidět, že si je vědoma zjednodušených ekvivalentních úprav.



Obrázek 57 - řešení Natálka

e) 2 . (x + 7) = 24

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník				Eda, Adam, Jára, Sváťa, Michal, Vilém, Natálka, Dominika
5. ročník				

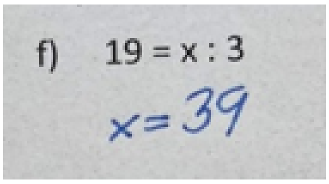
V řešení této úlohy se nevyskytly žádné chyby, ani obtíže. U čtyř ze zkoumaných dvojic jsem zaznamenal propojení s úlohami z předchozího souboru úloh. To jim také ulehčilo řešení. Jednalo se o Edu s Adamem, Járu se Sváťou, Michala s Vilémem a Natálku s Dominikou.

f) 19 = x : 3

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník			Sváťa	Eda, Adam, Natálka, Dominika
5. ročník	Petr, Anežka, Bětka		Pavel, Lenka	Láďa, Jenda

Chyby v této úloze jsem zaznamenal u tří žáků. Obtíže s úlohou měli tři žáci a shodný zápis s částí úlohy z předchozího souboru využilo šest žáků.

Chybu v řešení měl Petr, který místo *x* dopsal číslo 39. Myslím, že problematická část byla v násobení, kde si Petr patrně ještě není zcela jistý.



Obrázek 58 - řešení Petr

Anežka s Bětkou tuto úlohu řešily také chybně. Rozhodly se číslo 19 dělit třemi. K tomuto rozhodnutí je podle mého názoru vedl nezvyk ze zápisu úlohy („*výsledek*“ je v úloze jako první), dále nepochopení smyslu zápisu úlohy, tj. že obě strany zápisu si jsou rovny.

Do řešení tak dopisovaly + 1 a ani po mém pokusu, aby si úlohu prošly znovu, se jim chybu nepodařilo odhalit a opravit.

A: To bude… 6 a zbytek…nebo to by muselo být 6 : 3 a plus 1…Dej tam 6 a sem takhle vedle toho + 1

U: A co jste teď napsaly?

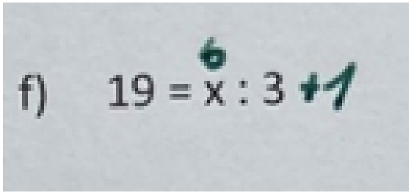
A: 19 = 6 : 3 + 1

U: A takhle to funguje tedy?

A: My jsme to takhle počítaly. 6 děleno 3 je osmnáct a musí tam být ten zbytek 1.

U: 6 : 3 je 18?

A + B: No



Obrázek 59 - řešení Anežka + Bětka

Obtíže jsem zaznamenal u Sváti. Ty vyplývaly ze stejného problému, jako u děvčat. Sváťa ovšem měl velmi pozorného spolužáka, který si jeho chyby všiml a vysvětlil mu, jak dojít ke správnému řešení.

Pavla s Lenkou se rovněž pozastavily nad řešením této úlohy. Smysl zápisu byl děvčatům jasný, ale to, že mohou použít opačnou operaci, si neuvědomily. Nakonec ale ke správnému výsledku došly díky tomu, že si úlohu zkusily převést do slov.

P: Já asi chápu, že to je 19 a to x děleno 3 tak má taky vyjít 19, ale já vůbec nevím, jak to mám spočítat…aby to vyšlo…

L: Jo, aby to vyšlo…

U: Aha…co se s tím x dělá?

L: Je to neznámá…

P: To musíme zjistit…

L: Že to potřebujeme zjistit a že se za ním skrývá nějaké číslo…já vydělím nějaký číslo 3, tak mi vyjde 19…takže jen potřebuju zjistit, jaké je to číslo…

P: Takže 19 . 3?

L: To půjde…

P: 57

Propojit tuto úlohu s částí úlohy z předchozího cvičení zvládli Natálka s Dominikou a Eda s Adamem.

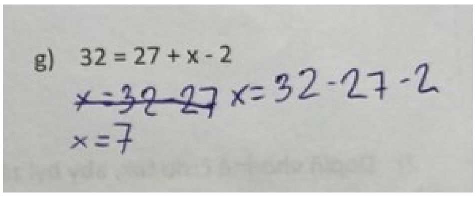
g) 32 = 27 + x - 2

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník	Natálka			Jára, Sváťa, Dominika
5. ročník				Pavla, Lenka

V této úloze chybovala pouze Natálka. Pět žáků došlo k odhalení, že tato úloha je zapsána i v předchozím souboru úloh.

Natálka provedla chybu ve výpočtu. V rozhovoru mi výpočet vysvětlila správně, ale při zápisu napsala špatné znaménko. Výsledek ale zapsala správně.

N: No, já jsem napsala, že 32 – 27 = 5 a ještě k tomu si musím dát to 2, aby nám ten výsledek vyšel stejně, i když to ubereme…může být v tom zápisu tady ty tři čísla?



Obrázek 60 - řešení Natálka

Propojení s předchozím cvičením zaregistrovali Jára a Sváťa, Michal a Vilém a Dominika.

h) x . 3 = 12

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník				Jára, Sváťa, Michal, Vilém
5. ročník				

Poslední úloha žákům nečinila obtíže. Zaznamenal jsem pouze, že si žáci všimli propojení s předchozím souborem úloh u Járy a Sváti a Michala s Vilémem.

3.4.3.3 Úloha typu „Myslím si číslo…“

Tuto konkrétní slovní úlohu jsem zvolil záměrně. Její numerický zápis se totiž objevil již ve dvou cvičeních, které děti vypočítaly. Zajímalo mě tedy, zda si toho všimnou a projeví tak schopnost propojit různé způsoby téhož zadání úlohy.

Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník	Nina, Michal		Sváťa	Natálka, Dominika,Vilém
5. ročník	Petr			Jenda

Řešení této slovní úlohy skončilo chybou pouze u Niny, Michala a Petra. Sváťa měl s úlohou obtíže. Jenda, Natálka, Dominika a Vilém odhalili, že úloha již byla zpracována v předchozích souborech úloh pomocí matematického zápisu.

Nina zřejmě neprošla celým zadáním příkladu. Odečetla pouze 32 – 27 a výsledek této operace považovala za hledané číslo. Michal zapsal stejné číslo jako Nina. Bude se patrně jednat o stejnou chybu. Zajímavé je, že právě Michal upozorňoval na podobnost úlohy s úlohou *g* ze třetího cvičení. Přesto zapsal špatný výsledek. Sváťa úloze vůbec nerozuměl. Járu mu ji ale trpělivě vysvětloval a přitom odhalil strategii řešení „*pozpátku*“, kterou využívalo více dvojic.

S: Já to nechápu…

J: Takže musíme pozpátku…

S: Takže 32 – 2…

J: X se rovná 32 – 27 + 2…takže x =

S: Jak to?

J: Protože to všechno musíš obrátit…takže místo přičítání odečítáš, jdeš jako by pozpátku…takže 32 – 27

S: To je 5…

J: Ano…takže 5 + 2 je 7

S: Ano, je to sedm…

3.4.3.4. Slovní úloha s rovnicí jako jednou z možných strategií řešení

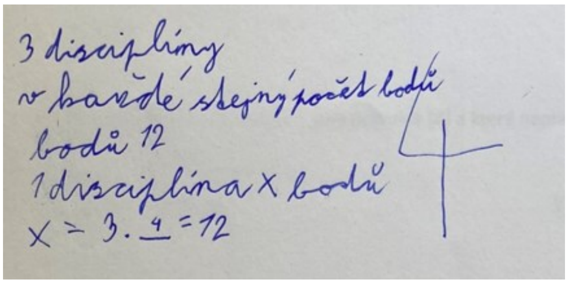
Páté cvičení obsahovalo slovní úlohu, u které bylo použití rovnice jako jedna z možných strategií řešení. Jedná se o jednoduchou úlohu zobrazující rovnici, se kterou již žáci přišli do kontaktu ve cvičení dvě a tři.

Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?

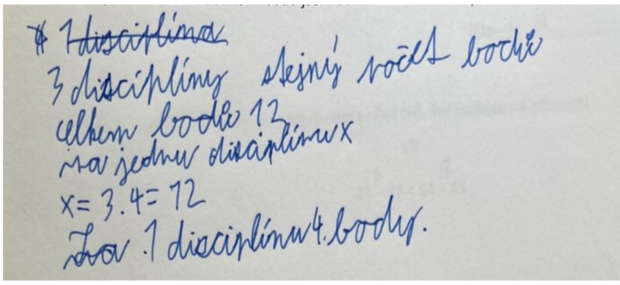
	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník				Michal, Vilém
5. ročník				

Vyřešení slovní úlohy žákům nečinilo potíže. Překvapilo mě ale, že pouze tři žáci dokázali propojit slovní úlohu s předchozími úlohami. Byli to pouze Michal a Vilém. Připisuji to tomu, že úloha se mnoha žáků zdála natolik jednoduchá, že se jí více nezabývali.

Zajímavé na řešeních žáků byly pokusy o zápis výpočtu. Někteří se pokoušeli provést zápis, pak výpočet i s pomocí neznámé ve formě *x*. Někteří se spokojili pouze s holým výpočtem. Jiní pouze zaznamenali výsledek. Použití neznámé *x* jako nástroje k uchopení matematické situace je pro žáky stále hodně náročné a není to pro ně přirozené. Jak je vidět v zápisech Edy a Adama, označili jako *x* hodnotu, která vyjadřovala počet bodů získaných za jednu disciplínu. V zápise výpočtu úlohy poté ale žáci použili již konkrétní hodnoty, protože číslo 4 pro ně bylo tak snadné získat. Označení *x* tak pro ně spíše znamená něco jako fázi výpočtu, než že by ji chlapci v tomto případě chápali jako neznámou hodnotu, kterou je třeba získat a zařadit jako neznámou do výpočtu.



Obrázek 62- cvičení 5 - řešení Eda



Obrázek 61 - cvičení 5 - řešení Adam

Většina žáků neměla potřebu neznámou x v zápise a výpočtu této úlohy využít vůbec. Jako nejpoužívanější způsob řešení žáci volili dělení. Tedy vlastně strategii „odzadu“, oproti zadání.

3.4.3.5. Slovní úloha s kuličkami – rovnice jako jedno z možných řešení

Poslední slovní úloha je náročná. Zadání je nutné přečíst pečlivě a zorientovat se v časové posloupnosti informací, které jsou v úloze uvedeny. Je třeba si uvědomit, že 24 je společný počet kuliček a dále, že uvedené číslo 7 označuje počet kuliček, které Pavlovi přibyly po vítězné hře. Úloha by se dala zapsat rovnicí $2(x+7) = 24$.

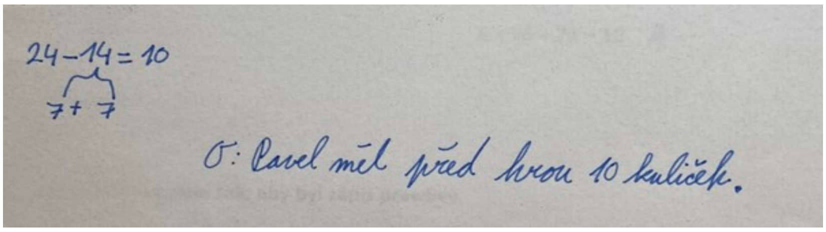
Zajímalo mě, jestli se žáci nenechají splést zadáním. Stejné zadání úlohy se vyskytlo i ve druhém a třetím souboru úloh testovacího listu.

Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?

	ch	ch vd	ou	iz
4.ročník		Jára, Sváťa, Nina, Natálka, Dominika	Eda	Michal
5. ročník	Jenda, Adina	Anežka, Bětka, Aleš, Slávek	Láďa	

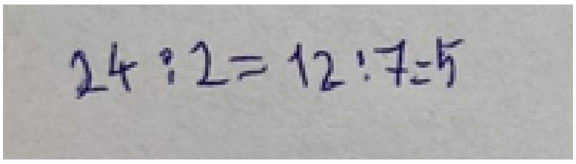
Úlohu chybně vyřešili dva žáci. Dalších devět úlohu nejdříve vyřešilo chybně, pak byli ale úspěšní s dopomocí. Dvěma žákům se podařilo úlohu vyřešit s obtížemi a jeden žák si všiml podobností s numerickým zadáním z předchozích souborů úloh.

Chybu v řešení udělala Adina. Díky nepozornosti považovala údaj sedmi kuliček za počet, který měli Pavel i Jirka po hře. Tato úvaha jí zavedla k domněnce, že Pavel měl před hrou 10 kuliček. Když se nad jejím řešením zamyslím, je možné, že si Áďa uvědomila, že počet sedmi kuliček musí být obsažen v neznámém počtu kuliček jak u Pavla, tak u Jirky. Když tedy odečetla 24 – 14, získala číslo 10, které stačilo ještě vydělit počtem chlapců, aby se dopočítala ke správnému řešení. To už ale Áďa bohužel neudělala a byla má chyba, že jsem se jí na hlubší vysvětlení jejího postupu nezeptal.



Obrázek 63 - úloha 6 - řešení Áďa

Další chybné řešení najdeme u Jendy. V jeho zápisu řešení se ukazuje nesprávné použití rovnítka. Je zde krásně vidět, že žák nevnímá rovnítko jako symbol ekvivalence, tedy rovnosti, ale jako symbol implikace, tedy procesuální značku. Způsob, jakým Jenda rovnítko použil, se občas objeví i na tabuli při zápisu v hodně. Je důležité na nesmyslnost tohoto zápisu upozornit, ať již se ho dopustil žák, nebo učitel. Zároveň Jenda použil ve druhém kroku nesprávné znaménko, místo minus použil děleno.



Obrázek 64 - řešení Jenda

Anežka a Bětka se na čtení zápisu příliš nesoustředily. Z toho patrně pramenilo chybné řešení. Rozhodly se pracovat s čísly, která jsou explicitně vyjádřena v úloze. Protože hodně odbíhaly od správného řešení úlohy, nevydržel jsem opět svou roli experimentátora a několika otázkami je uvedl zpět k zápisu úlohy. V jejich řešení je patrné neporozumění situaci, kterou slovní úloha popisuje a nepropojení s realitou. Jinak si neumím vysvětlit, že mohly hodnotu *8 zbytek 1* považovat za řešení.

A: Počkej, první 24 to musíme odečíst…musíme odečíst tu sedmičku, protože to je dohromady.

B: hmm.

A: Pak to vynásobíme dvěma.

B: Jo…

A: Takže teď 17 : 2 to je… 8 zb.1…

B: jojo

U: Takže?

A: Každý měl 8 kuliček…ne, předtím měl 8 kuliček. Dohromady měli předtím 17 a teďka má 8.

U: Sedí to, jo? Co tam dělá ten zbytek 1?

B: Tu vyřadili ze hry…když to nevycházelo…

A: Tak jo. Ptají se, kolik měl před hrou ten Pavel…takže odečteme těch sedm kuliček, protože to získal při tadytý hře…

U: A čí bylo teda těch 24 kuliček?

A: Pavla a…Jirky…nebo to vydělíme dvěma těch 24…

U: A v čem to bude jiný?

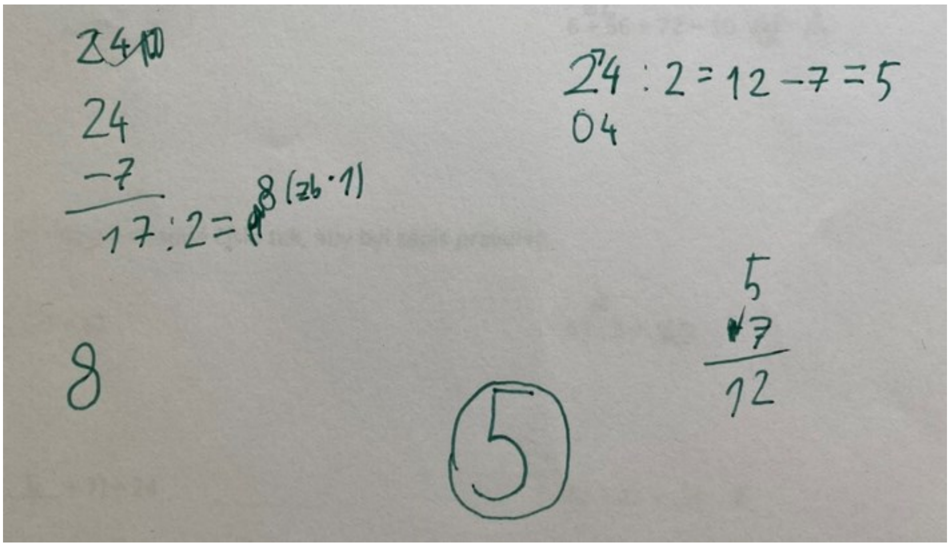
A: asi to bude lehčí…12 – 7…to je 5

B: není to 14?

A: Ne, to je 5…

U: A jak to ověříte, že je to pravda?

A: 5 + 7 je 12 a tohle krát 2 je 24.



Obrázek 65 - řešení Anežka + Bětka

Stejné potíže, jako Anežka s Bětkou měli i Jára se Sváťou. Než se stačili zamyslet, už Jára zapisoval výsledek úlohy jako číslo 17. Pokusil jsem se je několika otázkami uvést zpět k zadání úlohy. Sváťu to nijak nezviklalo, ale Jára si chybu uvědomil a následně si žáci svá řešení opravili.

U: Takže odpověď by byla…

J: Že měl 17 kuliček…

U: Takže Pavel měl 17 kuliček, než začal hrát. Pak vyhrál 7 kuliček a po hře měli společně s Jirkou 24 kuliček…

J + S: Jo

J: Počkej…plus 7 je to ano, 24

S: Takže to x bude 7…

J: To je úplně špatně!

U: Negumuj to, jen to třeba zakroužkuj, ať vím, že to bylo to první…

J: Bylo to dohromady! Takže oba dva mají 24 kuliček, když oba ty svoje kuličky sečtou…takže 24 : 2…to je 12…já to napíšu někam trošku bokem…12 – 7…je 5.

S: No…

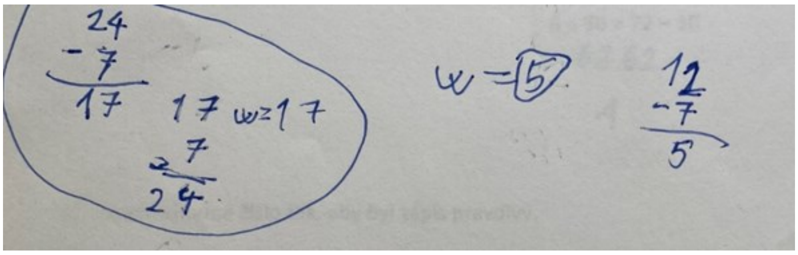
J: Takže 5 + 7 je to!

U: Takže jak to s ním bylo?

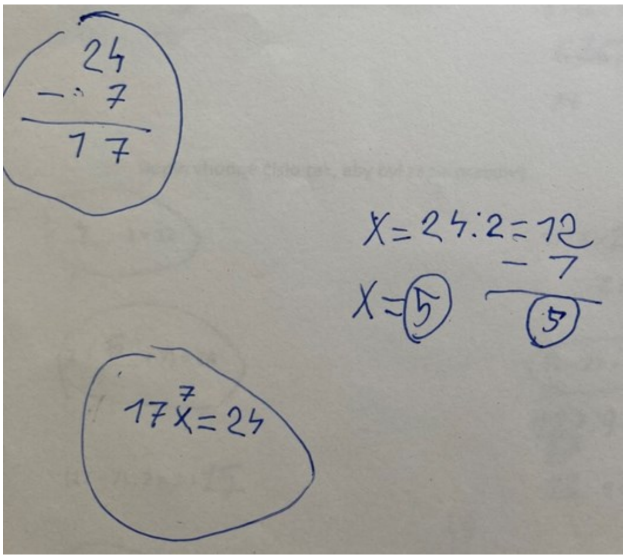
J: Na začátku měl…

S: 5

J: A potom získal 7 a když to s Jirkou spojili dohromady, tak měli 24



Obrázek 66 - řešení Jára



Obrázek 67 - řešení Sváťa

Stejné obtíže jako předchozí žáci, měla s řešením této slovní úlohy i Nina. Pouze díky spolužačce byla Nina schopná označit správný výsledek.

Na Aleši a Slávkovi, kteří jinak úlohami procházeli téměř bez chyb, je vidět, že se jim do hlubšího zkoumání slovní úlohy příliš nechtělo. Oba se na začátku shodnou na výsledku 12, protože chlapci mají dohromady 24 kuliček. Nakonec se ale ještě ujišťují opětovným čtením úlohy. V tu chvíli zjišťují, že jejich původní úvaha byla chybná a výsledek si opravují. Zde se ukazuje, jak je důležité slovní úlohu opravdu projít, někdy i opakovaně. A zároveň se také ukazuje, jak náročné slovní úlohy pro žáky jsou.

A: Kolik kuliček měl Pavel před hrou…12?

S: Jo

U: Fakt?

A: Já to ještě zkusím...protože Pavel a Jirka měli 24 a měli stejně, takže…je to polovina a to je 12.

U: No a co se tam ptají?

A: Kolik kuliček měl Pavel před…aáááá.

S: 5

A: 5? nene

S: Jo, dívej, dyť oni měli potom dohromady 24 a on, polovina to je 12 to je po výhře a mínus těch 7 je 5.

Nechuť procházet pozorně zadání úlohy je vidět i u poslední chybující dvojice – Natálky s Dominikou. Žákyně začínají automaticky dělit *24 : 7*. Na otázku, proč to dělají, odpovídají, že tu není jiná možnost. Teprve, když si uvědomily bezvýchodnost jejich výpočtů, kdy jim začnou vycházet čísla se zbytkem, prostudují úlohu pečlivěji. Natálka si všimne slova „*dohromady*“. Je patrně důležité, aby byli žáci vystavováni takovým druhům slovních úloh, které od nich budou vyžadovat větší soustředění, aby si zvykli, že je nutné zadání pečlivě studovat. Pokud si děti zvyknou, že ve slovních úlohách obvykle stačí umístit uvedená čísla do nějakého vztahu (odčítání, sčítání, násobení a dělení), nebudou motivovány k tomu, aby slovní úlohu detailněji studovaly.

U: Tak, obě jste začaly dělit 24 sedmi, proč?

D: No, mě to přišlo, jako jediná možnost…

U: A proč je to jediná možnost?

N: Kdybych si dala 7 . 24, tak mi to vyjde úplně nějaký…číslo, který nemůže…

U: A musím použít jen tu 7 a 24?

N: No, já nevím, kde bych jiný číslo vzala…

D: No, tady je, že ten Pavel a Jirka, že jsou dva…takže bych mohla ještě 24 . 2…totiž 24 : 2

N: Hm…dohromady 24, to znamená, že měli oba dva 24 dohromady…takže to nemůžeš dělit, protože…no, nevím, prostě to nejde…a…

D: 24 : 2 to je taky jedna z těch možností…

U: Tak to zkuste…

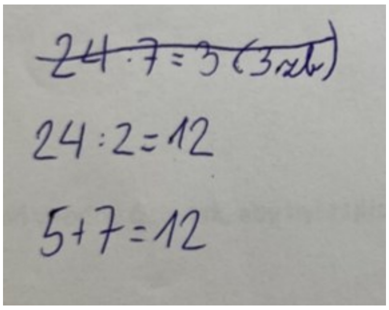
N: Kde bych ale tu dvojku vzala…

D: No, protože jsou dva, ten Pavel a Jirka…

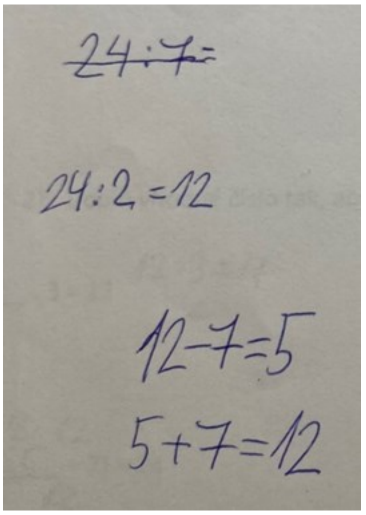
N: Takže 12 měl každej jeden a ten Pavel vyhrál sedm…a 12 – 7… takže měl 5 kuliček...vlastně, 5 + 7 je 12 a s tím Jirkou je to 24.

U: Tak kolik měl teda na začátku?

N: 5



Obrázek 69 - řešení Natálka



Obrázek 68 - řešení Dominika

Obtíže v této úloze měl Eda, který trochu tápal při pochopení významu slova „*dohromady*“. Adam mu ale smysl vysvětlil a Eda se ke správnému řešení dobral. Stejně i Láďa se nechal zmást zápisem a prostě odečetl 24 – 7. Brzy si ale svou chybu uvědomil a dostal se ke správnému výsledku. Poslední, kdo měl potíže s výpočtem, byl Michal, který ze začátku tápal. Pak ale výpočet spojil s úlohou z předchozího cvičení, což mu pomohlo najít správné řešení bez nutnosti více porozumět zápisu úlohy.

4 Shrnutí

Výstupy praktické části mé práce jsem shrnul do šesti hlavních bodů, ve kterých jsem se věnoval hlavním obtížím, které jsem v žákovských řešeních odhalil. Zde se budu také věnovat reedukačním strategiím, jak s jednotlivými obtížemi pracovat.

4.1 Úlohy na práci s rovností/nerovností

Žáci měli za úkol rozhodnout, zda je zápis rovnosti/nerovnosti pravdivý. Bylo zajímavé sledovat, že zatímco úlohy obsahující znaménko nerovnosti, pro ně byly většinou snadné, rozhodnout o pravdivosti/nepravdivosti zápisu úlohy se znaménkem rovnosti působilo značné problémy. Například první úloha **3 + 5 = 9 – 4** žáky mátla odčítáním napravo od symbolu rovná se. Bylo zřejmé, že mají tendence odčítání ignorovat a **3 + 5** porovnávat pouze s číslem **9** a nikoli s výsledkem odčítání **9 – 4**. Zaznamenal jsem tedy první známky chápání rovnítka jako implikačního symbolu místo relace ekvivalence. Na tento bod upozorňuje mnoho odborníků, které jsem citoval v teoretické části. Reedukace, která se mi zde jeví jako vhodná, je včasný důraz na budování představy o vztazích mezi levou a pravou stranou zápisu rovnosti.

Návrhy reedukace a propedeutiky:

a) Jako prostředek bych volil kartičky (v nižších ročnících s obrázky počtu, později s čísly a operacemi), které by děti mohly skládat do rovností, abychom do procesu zasadili více smyslů.

b) Dále bych do výuky v těchto ročnících zařadil více gradovaných úloh směřujících na problematické pochopení rovnosti, aby děti měly dostatek možností si ověřit, že rovnost jako ekvivalence opravdu platí. Například:
Rozhodni, zda je zápis pravdivý:
3 + 2 = 4
8 = 2 + 6 (parametr gradace spočívá v nezvyklém zápise rovnítka)
2 + 3 = 8 – 2 (parametr gradace je zde porovnání dvou operací, z nichž jedna je odčítání, které je považováno pro děti jako náročnější)

c) Z Hejného metody vyučování matematice bych využil prostředí Zvířátka dědy Lesoně, Krokování a Vláčky, které se propedeutice rovnosti jako relace ekvivalence věnují a dají se dále využívat i při propedeutice rovnic.

4.2 Úlohy na práci s rovnicí

4.2.1 Neznámá součástí operace

V oblasti operací s neznámou jsem viděl, že většina dětí znejistěla, když se neznámá objevila v pravé části zápisu úlohy a ještě více, pokud byla součástí dalšího výpočtu. Mluvím například o úloze ***57 : 3 = ____ - 1***. Tento zápis ve spojení s odčítáním byl pro žáky velmi náročný. Mnoho z nich si stěžovalo, že část ***– 1*** by v zápisu vůbec neměla být. Někteří žáci úlohu řešili dopsáním čísla ***19*** a ***– 1*** ignorovali. Jiní měli tendence dopsat do úlohy další rovnítko a za něj číslo ***18***. Stejné obtíže se objevily i v dalších úlohách podobného typu – cv.2/c,f.

Je třeba, aby žáci byli podobným úlohám vystavováni. To souvisí s vnímáním rovnítka jako relace ekvivalence, jak jsem zmiňoval výše. Je nutné žákům předkládat pestrou nabídku úloh a důsledně dbát na to, aby se mezi nimi neobjevovaly jen klasické triadické zápisy operací (a + b = c). Z tohoto důvodu bych se rád vrátil k porovnávání učebnicových řad, kde jsem zjistil, že nakladatelství Alter i Nová škola ve svých učebnicích převážně využívají triadického zápisu s rovnítkem následujícím po početní operaci. Přirozeně tak podporují vnímání rovnítka jako implikace.

Návrhy reedukace:

- **a)** Od prvního ročníku bych zařazoval do výuky více úloh nabourávajících triadickou strukturu zápisu:
  5 = ____ + ____; 8 = 3 + ___; 6 + 2 = 9 - ___
- **b)** Zapojil bych úlohy s váhami, které vedou u žáků k lepšímu pochopení povahy symbolu rovná se.

4.2.2 Znázornění neznámé a její další využití ve výpočtu

V experimentu mě překvapilo, že se nepotvrdila má domněnka, že neznámá vyjádřená písmenem bude pro žáky náročná a spojená s určitým stresem. Žáci pracovali s neznámou ve formě podtržítka stejně, jako s písmenem. Jediná potíž nastala u žáka, který pod dojmem úloh z učebnic nakladatelství Alter myslel, že pro různé hodnoty neznámé je třeba užívat více písmen – tedy že neznámá *x* v jedné úloze bude mít stejnou hodnotu jako v jiné.

Pokud bych měl hodnotit schopnost žáků používat neznámou jako součást dalších výpočtů, experiment ukázal, že necítí potřebu ji použít a raději volí známější metody, jako počítání odzadu a pokus omyl. Pro reedukaci práce s neznámou v rovnici a zavádění neznámé bych volil následující kroky.

Návrhy reedukace:

a) Snažil bych se co nejdříve zařadit úlohy s podtržítkem. Později bych nahrazoval podtržítko symbolem a po dostatečném upevnění znalosti bych symbol nahradil písmenem.

b) Využil bych prostředí z Hejného metody vyučování matematice. K procvičování a objevování vztahů, které se vyskytují v rovnicích, bych volil prostředí Vláčky, Zvířátka dědy Lesoně, Krokování, Schody, Algebrogramy, Hadi a Šipkový graf což je modifikovaná úloha typu Hadi, ještě více rozvíjející rovnicové myšlení. Dále bych volil Sčítací trojúhelníky a Sčítací trojúhelníky s podmínkou. Velmi často bych se také snažil pracovat s úlohami typu Myslím si číslo. Věřím, že v těchto prostředích najdou žáci zajímavé úlohy, které je budou motivovat a bude pro ně zábavné je řešit.

c) Pokud bych se zaměřil na propedeutiku a reedukaci rovnic mimo Hejného metodu vyučování matematice, mohl bych v nakladatelstvích Alter a Nová škola nalézt úlohy s podtržítkem, symbolem a písmenem. Tyto úlohy mají v těchto nakladatelstvích největší zastoupení. Dále najdeme v těchto učebnicích velmi skromné množství sčítacích trojúhelníků a jednotky úloh typu Myslím si číslo. Obávám se, že pokud bych se při reedukaci spolehl pouze na materiály z Alteru a Nové školy, žáky by brzy úlohy přestaly bavit. Navíc by žáci neměli tolik možností, jak úlohám porozumět, jako když mohou na úlohu nahlédnout z různých prostředí.

4.3. Slovně zadané úlohy – rovnice jako jedno z možných řešení

V úlohách z experimentu s tímto zaměřením jsem se soustředil na to, zda žáci použijí rovnici jako prostředek řešení.

Úloha typu „Myslím si číslo“ byla pro žáky většinou známá, přestože žáci tvrdili, že těchto úloh mnoho neřešili. Zvoleným způsobem většiny žáků bylo řešení „odzadu“. Tento způsob řešení i zapisovali bez potřeby použití neznámé.

Druhá úloha byla pro žáky velice jednoduchá. Sliboval jsem si od ní, že žáci díky jistotě přistoupí na experiment s výpočtem za použití neznámé. Většina řešení ale byla prostým zápisem výpočtu (např.: 12 : 3 = 4; 4 . 3 = 12). Pouze dva žáci se pokusili neznámou zapojit, ale jak je vidět z jejich řešení, měla pro ně neznámá spíše význam otazníku, nebo části zápisu, ve které se provádí výpočet.[9] *Např.: řešení Eda a Adam: x= 3 . 4 = 12; řešení Jára: x=4, 4+4+4 = 12*

Poslední úloha byla nejnáročnější. Nejčastější chyba byla způsobena tím, že žáci začali pro řešení úlohy využívat pouze přímo uvedených hodnot bez toho, aby se pokusili úloze hlouběji porozumět. Žáci tedy začali úlohu řešit jako *24 – 7*, což byla jediná dvě čísla, zapsaná v zadání slovní úlohy číslicí.

Další častou chybou bylo nesprávné použití rovnítka v zápisech výpočtu viz. vysvětlení ve shrnutí 4.1

Neznámou v zápise výpočtu v této úloze použili po tři žáci z dvaceti. Jára použil neznámou pouze k označení výsledku (*x=5*). Sváťa s Janou se pokusili o sestavení rovnice, která se jim ale příliš nevydařila a *x* tedy použili spíše jako označení výsledku než jako samotnou součást výpočtu (*viz. řešení Sváta a Jana*). Vzhledem ke složitosti úlohy se většina žáků uchýlila k použití prostých výpočtů.

Návrhy reedukace:

a) Zařadil bych do výuky dostatečné množství úloh s anti-signálem. Pro slovní úlohy bych využíval metody sehrávky a dával bych žákům k dispozici manipulativa pro řešení úloh. Také bych se snažil s žáky diskutovat o zadání úlohy a vyjasňoval slova, která by neznali.

b) Žáky bych pravidelně vystavoval úlohám, pro jejichž řešení bude nutné řetězení aditivních a multiplikativních operací.

c) Snažil bych se žákům umožnit sdílet navzájem své postupy řešení, aby měl každý žák možnost zvolit takový zápis, který právě jemu umožní úloze lépe porozumět. Zároveň bych se snažil využívat takové slovní úlohy, které budou žáky k tvorbě

[9] Viz.: Experimentální část 2.3.2.4. – obr. 24,25

zápisu přirozeně vést. Příklad si beru ze zkoumaných nakladatelství, z učebnic H-mat, kde se při zavádění prostředí Autobus vyskytují úlohy, které žáky přirozeně vedou k potřebě si informace ze sehrávky úlohy zapsat. Rád bych tedy volil takové úlohy, které žáky k této potřebě dovedou také.

4.4. Kalkulativní chyby

Během experimentu jsem zjistil, že žáci tápou v některých základních matematických operacích. Konkrétně se jednalo o písemné dělení, v některých případech i písemné násobení víceciferným činitelem.

Návrhy reedukace:

a) Abych vytvořil atmosféru, ve které se žáci budou moci lépe soustředit na algoritmus úloh, které pomáhají s reedukací, dal bych jim k dispozici např.: tabulku s násobilkou. Tímto bych se pokusil odstranit stres z nedokonalého ovládnutí násobilky.

b) Volil bych také návrat zpět k jednodušším úlohám (*písemné dělení – dělení se zbytkem, písemné násobení s dvojciferným činitelem – s jednociferným činitelem, úloha s řetězením operací – bez řetězení, úloha s většími čísly – s menšími čísly apod.*) a věnoval bych delší čas těmto úlohám, aby došlo k automatizaci. Hledal bych takové motivační úlohy, které žáky budou motivovat a bavit. Mám dobré zkušenosti s násobilkovými čtverci, hrou abaku nebo desítkou. (*Žáci mají zadány čtyři číslice od 0 do 10, pomocí jim známých operací se mají pokusit o výpočet, který povede k výsledku 10. Každou zadanou číslici mohou použít pouze jednou*).

c) Pokud bych ale viděl, že žáci jsou stále bezradní, bylo by nutné vrátit se ve výuce ještě dál a pracovat na porozumění operací skrze úlohy, ve kterých bude redukovaná operace přítomna. U žáků, které jsem měl v experimentu, ale věřím, že by stačily pouze kroky, které navrhuji výše.

4.5. Myšlenka izomorfizmu

Když jsem žáky pozoroval během řešení jednotlivých úloh, všiml jsem si, že žákům často pomáhalo úlohu uchopit jiným jazykem (*viz. řešení úlohy „myslím si číslo" u Dominiky,* *pomocí přepisu slovního zadání do numerické podoby*). Žákům také často pomáhalo uvědomit si podstatu operace v numerickém zápise pomocí převedení do mluvené řeči (*např. u řešení úlohy 49 = ___ - 16, Sváťovi a Járovi pomohlo toto vysvětlení: My tam musíme mít nějaké to číslo, od kterého odečteme tu šestnáctku a vyjde nám 49...)*. U slovních úloh žákům pomohlo, když byli schopni si situaci v ní představit (*např.: V závěrečné úloze o kuličkách jsme naráželi na to, že hra kuličky pro současné děti není příliš známá, a tedy hůře představitelná. Naopak úloha o olympiádě byla jasná hned.*). Myslím si tedy, že schopnost převodu do prostředí, kde mi řešení úlohy bude jasnější, je pro žáky velmi důležitá, jak potvrzuje Hejný (2004), kterého cituji v teoretické části.

Návrhy reedukace:

a) Při nácviku řešení úloh bych se žáky realizoval sehrávky u co největšího množství úloh, ve kterých to bude možné.
b) Podpořil bych žáky ve vytváření matematického modelu ze situačního, k jeho porozumění a přečtení. Dále bych rád u žáků rozvinul schopnost rozpoznat, že dvě úlohy zpracovávají stejný matematický model (*např. rovnice a hadi*).
c) Zapojoval bych do výuky více takových úloh a jejich zpracování, ve kterých bych žákům umožnil tuto získanou schopnost dále rozvíjet (*např. úlohy zpracovávající stejný matematický model dostatečně blízko u sebe, aby je žáci měli možnost odhalit*).

5 Závěr

Ve své diplomové práci jsem se věnoval třem cílům zaměřeným na oblast rovnicového myšlení ve čtvrtém a pátém ročníku na prvním stupni základní školy.

První cíl, směřovaný na prozkoumání propedeutiky rovnic na prvním stupni, jsem splnil v teoretické části, kde jsem popsal pojem rovnice a přemýšlel nad tím, jak by měl být tento pojem didakticky uchopen a jaká propedeutika k němu vede. Dále jsem se v literatuře zabýval možnostmi, jak propedeutiku rovnic zapojit do výuky od prvního ročníku a zaznamenal jsem doporučení významných odborníků týkající se problematických částí, jako například pochopení symbolu rovná se. Prostudoval jsem také teorii genetické paralely, která mi pomohla lépe pochopit vývoj porozumění rovnicím v myšlení žáků. Vyhledal jsem také význam pojmu izomorfizmus ve vztahu k pochopení rovnicím a zapracoval i doporučení pro práci s chybou.

Druhému cíli jsem se věnoval ve druhé polovině teoretické části, kde jsem procházel sady učebnic tří nejpoužívanějších nakladatelství a hledal jsem v nich úlohy, které vedou k rozvoji rovnicového myšlení žáků. Učebnice jsem procházel od prvního do pátého ročníku. Zjistil jsem, kolik úloh je na propedeutiku rovnic zaměřeno v jednotlivých ročnících a nakladatelských sadách. Zároveň jsem porovnával, jak pestré jednotlivé úlohy jsou. Své objevy jsem utřídil do přehledných tabulek. Je ovšem pravda, že téma propedeutiky rovnic zahrnuje velké množství úloh, proto jsem se úlohy snažil roztřídit do tří hlavních skupin, které jsem dále dělil. I tento cíl tedy považuji za splněný.

Třetímu cíli jsem věnoval největší úsilí. Podrobně ho rozpracovávám v experimentální části práce. Můj první návrh úloh a způsobu práce s řešeními dětí se ukázal jako nepříliš průkazný, což mě vedlo k vytvoření finálního experimentu, jehož výsledky jsem pak detailněji zpracoval. Již toto zjištění mě velmi obohatilo. S dvojicemi žáků jsem provedl 13 rozhovorů, ze kterých jsem se rozhodl použít 10 nejprůkaznějších. Všechny rozhovory jsem zpracoval formou nahrávek a jejich přepisů. V řešeních a přepisech rozhovorů jsem pak hledal hlavní prvky rovnicového myšlení dětí, jejich zacházení s rovnicovými úlohami a chyby, které se vyskytly. Ve shrnutí jsem se také k obtížím dětí vyjádřil, spojil je s teoretickou částí mé práce a potvrdil tak názory odborníků. Zároveň jsem se snažil navrhnout vhodné možnosti reedukace.

Osobně pro mě zpracování diplomové práce bylo velmi náročné, zvláště z hlediska doby, ve které jsem ji zpracovával – období covidu, následné války na Ukrajině a vedení mé první třídy od prvního ročníku. Přesto ale vydané námahy nelituji, protože vedla k rozšíření mého povědomí o podstatě výuky rovnic na prvním stupni. Principy, které jsem díky této práci objevil se dají přenést i na jiné oblasti výuky matematiky, ať už je to myšlenka izomorfizmu, nebo genetické paralely.

Téma mě po hlubším proniknutí velmi zaujalo, jsem si vědom toho, že je před mnou stále hodně skrytého, velmi by mě zajímalo pojetí rovnicového myšlení z hlediska učitelů prvního stupně, protože jsem se při zpracovávání práce hojně setkával s reakcemi, které mi ukazovaly, že pro mnoho mých kolegů jsou rovnice čímsi, v čem si nejsou jistí. Domnívám se, že jsem si ze své práce vzal pro mou budoucí praxi mnoho použitelného.

6 Seznam literatury

6.1 Knihy a články

Bible: Písmo svaté Starého a Nového zákona (včetně deuterokanonických knih) : český ekumenický překlad. 28. (19. opravené) vydání. Praha: Česká biblická společnost, 2023. ISBN 978-80-7545-132-3.

BOALER, Jo a ANDERSON, Robin. Considering the Rights of Learners in Classrooms The Importance of Mistakes and Growth Assessment Practices. *Democracy&Education*. 2018, roč. 26, č. 2, s. 5.

BUDÍNOVÁ, Irena. *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice*. Matematika a didaktika matematiky. Brno: Masarykova univerzita, 2018. ISBN 9788021092150.

GAVORA, Peter. *Úvod do pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2000. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-85931-79-6.

HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Pedagogická praxe (Portál). Praha: Portál, 2009. ISBN 9788073673970.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1989.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 9788072907762.

HEJNÝ, Milan; NOVOTNÁ, Jarmila a VONDROVÁ, Naďa (ed.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HRUŠA, Karel. *Přehled elementární matematiky*. 4., nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964.

KIERAN, Carolyn. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics educator*. 2004, roč. 2004, č. 8, s. 14.

KUŘINA, František a VONDROVÁ, Naďa. *15 pohledů na školskou matematiku: jak to vidíme*. [Praha]: Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, 2022. ISBN 9788076033436.

PIAGET, Jean (William Fritz) a WELLS, P. A. *Psychology and epistemology: towards a theory of knowledge*. Harmondsworth: Penguin Books, 1972.

PŮLPÁN, Zdeněk; ČIHÁK, Michal; TREJBAL, Josef a BOUŠKOVÁ, Jitka. *Matematika 8: pro základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2009. ISBN 978-80-7235-419-1.

RENDL, Miroslav a VONDROVÁ, Naďa. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 9788072907236.

SLEZÁKOVÁ, Jana a JIROTKOVÁ, Darina. Kalkulativní úlohy jako nástroj diagnostiky. *Učitel matematiky*. 2022, roč. 30, č. 4, s. 25.

VONDROVÁ, Naďa a RENDL, Miroslav. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 9788024632346.

VONDROVÁ, Naďa. *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2019. ISBN 978-80-246-4516-2.

6.2 Elektronické zdroje

MAT - Jak připravit žáky 1. stupně ZŠ na porozumění rovnicím - Darina Jirotková, Jana Slezáková. In: *Youtube.com* [online]. Praha: Projekt SYPO, 2021 [cit. 2023-06-27]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=dVD-2sPJqeY&t=1s

6.3 Učebnice

6.3.1 Alter

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 9788072452323.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 9788072452330.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 9788072452347.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 9788072452163.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 9788072452170.

BLAŽKOVÁ, Růžena; MATOUŠKOVÁ, Květoslava a VAŇUROVÁ, Milena. *Matematika pro 4. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 9788072452187.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 6. Všeň: Alter, 2014. ISBN 9788072452941.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 6. Všeň: Alter, 2014. ISBN 9788072452958.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 6. Všeň: Alter, 2014. ISBN 9788072452965.

STAUDKOVÁ, Hana Matematika pro 1. ročník základních škol: Sešit č. 4. Ilustrovala Olga PTÁČKOVÁ. Všeň: Alter, 1993. Učebnice 1. cyklus 10 – 092727. ISBN 80-85775-17-4.

STAUDKOVÁ, Hana. Matematika pro 1. ročník základních škol: Sešit č. 1. Ilustroval Zdeněk MILER. Všeň: Alter, 1993. Učebnice 1. cyklus 10 – 092717. ISBN 80-85775-14-X.

STAUDKOVÁ, Hana. Matematika pro 1. ročník základních škol: Sešit č. 2. Ilustrovala Marie TICHÁ. Všeň: Alter, 1993. Učebnice 1. cyklus 10 – 092717. ISBN 80-85775-15-8.

STAUDKOVÁ, Hana. Matematika pro 1. ročník základních škol: Sešit č. 3. Ilustrovala Vlasta ŠVEJDOVÁ. Všeň: Alter, 1993. Učebnice 1. cyklus 10 – 092727. ISBN 80-85775-16-6.

STAUDKOVÁ, Hana. Matematika pro 2. ročník základních škol: Sešit č. 5. Ilustrovala Olga ČECHOVÁ. Všeň: Alter, 1994. Učebnice 1. cyklus 10 – 092728.

STAUDKOVÁ, Hana. Matematika pro 2. ročník základních škol: Sešit č. 6. Ilustrovali Kateřina LOVIS-MILER a Zdeněk MILER. Všeň: Alter, 1994. Učebnice 1. cyklus 10 – 092729.

STAUDKOVÁ, Hana. Matematika pro 2. ročník základních škol: Sešit č. 7. Ilustrovali Kateřina LOVIS-MILER a Zdeněk MILER. Všeň: Alter, 1994. Učebnice 1. cyklus 10 – 092729.

6.3.2 Nová škola

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Šesté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-048-3.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Šesté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-053-7.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Šesté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-054-4.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Šesté vydání. Brno: Nová škola, 2021-. ISBN 9788076002265.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Čtvrté vydání. Brno: Nová škola, 2020-. ISBN 9788076001565.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Šesté vydání. Brno: Nová škola, 2020-. ISBN 9788076002074.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika*. Třetí vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019-. ISBN 978-80-7600-071-1.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 4. ročník*. Třetí vydání. Brno: Nová škola, 2021-. ISBN 978-80-7600-238-8.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 4. ročník*. Třetí vydání. Brno: Nová škola, 2021-. ISBN 9788076002395.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 5. ročník*. Druhé vydání. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2017. ISBN 9788072899562.

NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. *Matýskova matematika: pro 5. ročník*. Třetí vydání. Brno: Nová škola, 2022. ISBN 9788076000155.

NOVOTNÝ, Miloš; NOVÁK, František a HRDINOVÁ, Jarmila. *Matýskova matematika: pro 3. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV*. Třetí vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Brno: Nová škola, 2023. ISBN 978-80-7600-070-4.

6.3.3 H-mat

HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 978-80-88247-01-2.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 9788088247029.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 1*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 9788088247036.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 9788088247166.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 9788088247173.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 2*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 9788088247180.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 3: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2020]. ISBN 978-80-88247-21-0.

HEJNÝ, Milan. *Matematika 4: Hejného metoda*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, [2021]. ISBN 978-80-88247-26-5.

HEJNÝ, Milan. *Matematika učebnice pro 5. ročník ZŠ*. Praha: H-mat, 2022. ISBN 9788088247302.

7 Přílohy

7.1 Zadání před-experimentu

Jméno: ____________________

Třída: ____________________

1) Sestry Eva a Jana mají dohromady 27 roků. Eva je dvakrát starší než Jana. Kolik roků je každé z nich?

(alter-3tř.3-str.60)

2)

☺ + ☺ + ☺ = 27

★ + ☺ + ☺ = 36

★ + ☺ + ■ = 40

■ = ?

3)

$\boxed{} \xrightarrow{+9} \boxed{} \xrightarrow{+18} \boxed{40}$

4) Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a přičtu 9, vyjde mi 27. Jaké číslo jsem si myslel?

5) Karel si koupil hamburger, tyčinku a nanuk. Tyčinka stála 9 Kč. Kolik korun stál nanuk, když víš, že hamburger stál jako dvě tyčinky a Karel platil 40 Kč za celý nákup?

7.2 Zadání experimentu

Jméno: ______________________

Datum: ______________________

Třída: __________________

1) Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.

a) $3 + 5 = 9 - 4$

c) $23 - 17 < 54 - 45$

b) $16 . 3 > 7 + 20$

d) $6 + 56 = 72 - 10$

2) Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.

a) ____ . 3 = 12

b) 2 .(____ + 7) = 24

c) (17 – 7) . 2 = 5 + ____

d) 45 : ___ = 9

e) 57: 3 = ___ - 1

f) 32 = 27 + ___ - 2

g) ____ . 9 = 117

h) 49 = ____ - 16

3) Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.

a) 1000 – x = 943

b) x : 6 = 4

c) 45 : x = 9

e) 2 . (x + 7) = 24

f) 19 = x : 3

g) 32 = 27 + x - 2

d) $x + 90 = 114$

h) $x \cdot 3 = 12$

4) Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

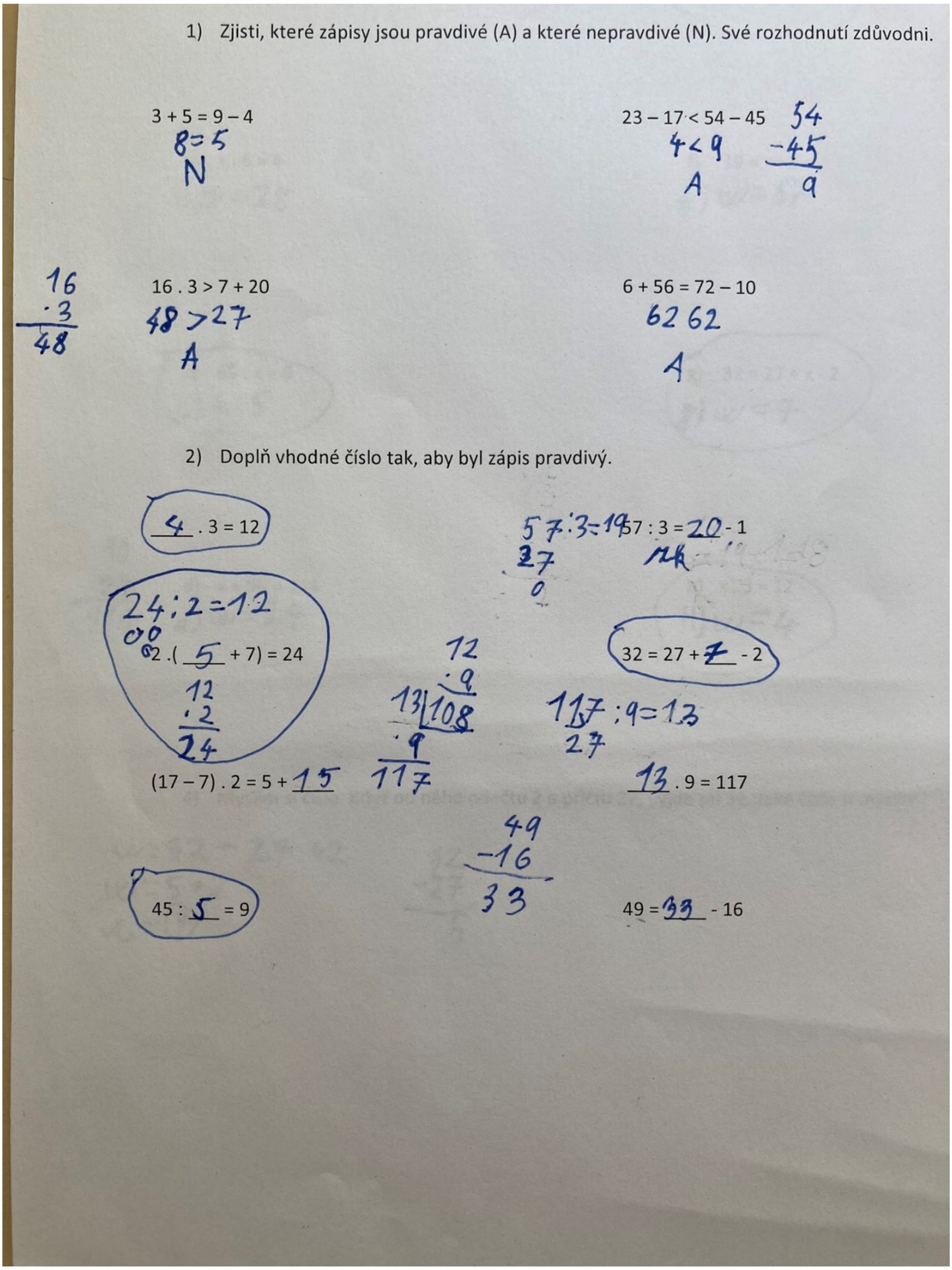
5) Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?

6) Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?

7.3 Vybraná žákovská řešení

Experiment 5 – 23.3.2022 – Jára a Sváťa – 4.A

Řešení Jára



1) Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.

3 + 5 = 9 – 4
8=5
N

23 – 17 < 54 – 45
4<9
A

54
−45
9

16 . 3 > 7 + 20
48 > 27
A

16
·3
48

6 + 56 = 72 – 10
62 62
A

2) Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.

4 . 3 = 12

57 : 3 = 20 - 1

57:3=19
27
0

24:2=12
00
2 .(5 + 7) = 24

12
·2
24

32 = 27 + 7 - 2

(17 – 7) . 2 = 5 + 15

12
·9
108

13
·9
117

117:9=13
27

13 . 9 = 117

45 : 5 = 9

49
−16
33

49 = 33 - 16

3) Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.

a) 1000 – x = 943

A) x = 57

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -943 \\ \hline 057 \end{array}$$

b) x : 6 = 4

B) x = 28

c) 45 : x = 9

C) x = 5

d) x + 90 = 114

d) x = 24

$$\begin{array}{r} 90 \\ 24 \\ \hline 114 \end{array}$$

e) 2 . (x + 7) = 24

e) x = 5

f) 19 = x : 3

f) x = 57

g) 32 = 27 + x - 2

g) x = 7

h) x . 3 = 12

H) x = 4

4) Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

x = 32 − 27 + 2
x = 5 + 2
x = 7

$$\begin{array}{r} 32 \\ -27 \\ \hline 5 \end{array}$$

5) Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?

$x = \boxed{4}$

$4+4+4=12$

$4 \cdot 3 = 12$

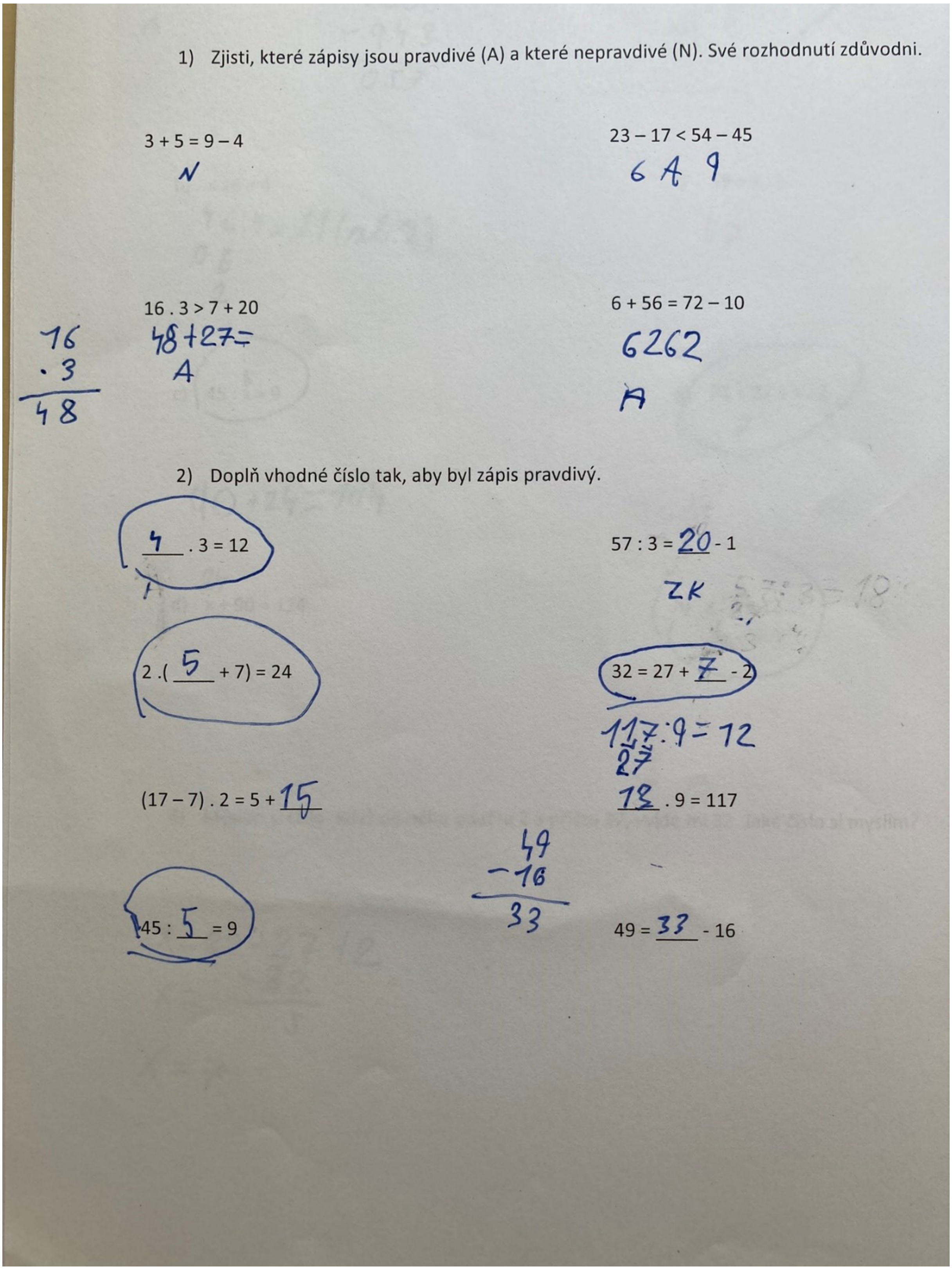
6) Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 7 \\ \hline 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ +\ 7 \\ \hline 24 \end{array} \qquad x = 17$$

$x = \boxed{5}$

$$\begin{array}{r} 12 \\ -\ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

Řešení Sváťa



1) Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.

3 + 5 = 9 – 4

N

23 – 17 < 54 – 45

6 A 9

16 . 3 > 7 + 20

48 + 27 =

A

16
· 3
48

6 + 56 = 72 – 10

62 62

A

2) Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.

4 . 3 = 12

57 : 3 = 20 - 1

ZK

2 .(5 + 7) = 24

32 = 27 + 7 - 2

117 : 9 = 12
27

(17 – 7) . 2 = 5 + 15

13 . 9 = 117

49
− 16
33

45 : 5 = 9

49 = 33 - 16

3) Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.

a) 1000 – x = 943

57

A

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -943 \\ \hline 057 \end{array}$$

e) 2 . (x + 7) = 24

12

57

b) x : 6 = 4

46:4 = 11 (zb.2)

06

2

f) 19 = x : 3

57

c) 45 : x = 9

5

g) 32 = 27 + x - 2

7

90 + 24 = 114

d) x + 90 = 114

24

h) x . 3 = 12

4

4) Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

X = 32 – 27 + 2

$$X = \begin{array}{r} -32 \\ \hline 5 \end{array}$$

X = 7

5) Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?

$4 \cdot 3 = 12$

6) Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 7 \\ \hline 17 \end{array}$$

$X = 24 : 2 = 12$

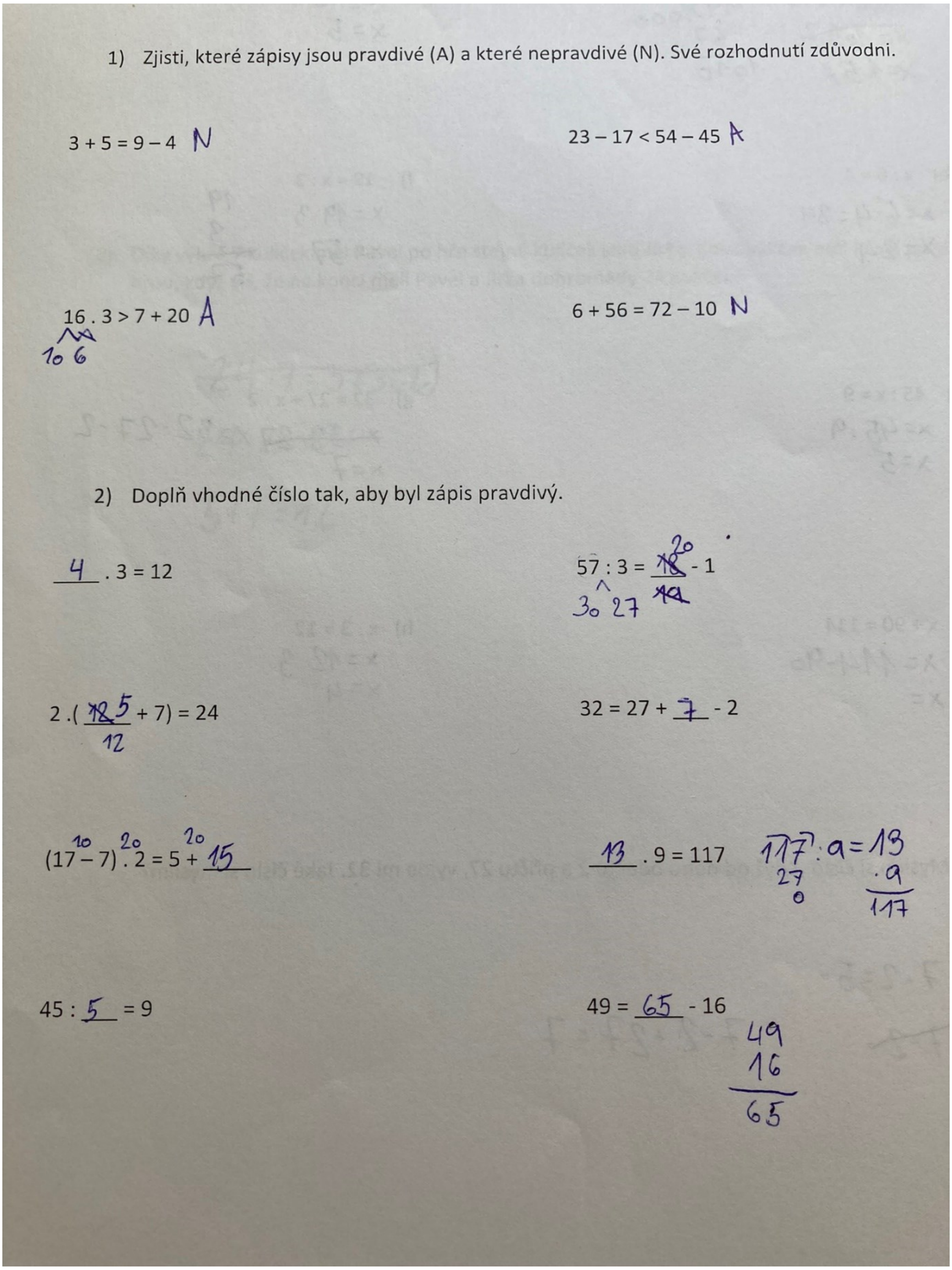
$$\begin{array}{r} 12 \\ -\ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

$X = 5$

$17 \overset{7}{X} = 24$

Experiment 10 – 11.5.2022 –Natálka a Dominika – 4.B

Řešení Natálka



1) Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.

3 + 5 = 9 – 4 N

23 – 17 < 54 – 45 A

16 . 3 > 7 + 20 A

10 6

6 + 56 = 72 – 10 N

2) Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.

4 . 3 = 12

57 : 3 = ~~18~~ 20 - 1

30 27 ~~19~~

2 .(~~18~~ 5 + 7) = 24

12

32 = 27 + 7 - 2

(17 – 7) . 2 = 5 + 15

10 20 20

13 . 9 = 117

117 : a = 13

27

0

. 9

117

45 : 5 = 9

49 = 65 - 16

49

16

65

3) Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.

$\cancel{1}000$
$-\cancel{9}43$
1057

a) 1000 – x = 943

$x = 1000 - 943$

$\cancel{x = 1057}$

$x = \cancel{1}57$

943
57
$943\overline{)1000}$
67
1010

e) 2 . (x + 7) = 24

$x = 12 - 7$

$x = 5$

b) x : 6 = 4

$\cancel{2}4$
$\cdot \cancel{4}$
$9\cancel{6}$

$x = 6 \cdot 4 = 24$

$x = 24$

f) 19 = x : 3

$x = 19 \cdot 3$

$x = 57$

19
$\cdot$ 3
57

c) 45 : x = 9

$x = 45 : 9$

$x = 5$

g) 32 = 27 + x - 2

$\cancel{x = 32 - 27}$ $x = 32 - 27 - 2$

$x = 7$

d) x + 90 = 114

$\cancel{1}14$
$-\cancel{9}0$
$22\cancel{4}$

$x = 114 - 90$

$x =$

h) x . 3 = 12

$x = 12 : 3$

$x = 4$

4) Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

$7 - 2 = 5 -$

$\cancel{7 - 2}$

$7 - 2 + 27 = 7$

5) Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?

12 : 3 = 4

6) Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?

~~24 : 7 = 3 (3 zb)~~

24 : 2 = 12

5 + 7 = 12

Řešení Dominika

1) Zjisti, které zápisy jsou pravdivé (A) a které nepravdivé (N). Své rozhodnutí zdůvodni.

3 + 5 = 9 – 4 N

6 9
23 – 17 < 54 – 45 A

48 27
16 . 3 > 7 + 20 A
10 6
30

6 + 56 = 72 – 10 A

2) Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý.

4 . 3 = 12 12 : 3 = 4

19 20
57 : 3 = ~~19~~ - 1
30 27

2 . 12
2 .(5 + 7) = 24
12

32 = 27 + ~~8~~ - 2
7

~~20+5~~
10 . 2 = 20
(17 – 7) . 2 = 5 + 15
20 – 15 = 5

13 . 9 = 117
117 : 9 = 13
10 6 27
49 + 16 = 0z6
. 9
117
0
117

45 : 5 = 9
9 . 5 = 45

49 = 65 - 16

3) Písmena v zápisech nahraď čísly, aby byly zápisy pravdivé.

$1000-943=$

a) $1000 - x = 943$

$x = 1000 - 947 = 57$

$x\ 57$

e) $2 \cdot (x + 7) = 24$

$5+7=12$

$x = 24 : 2 = 12$

$x = 12 - 7 = 5$

$x = 5$

b) $x : 6 = 4$

$x\ 4 \cdot 6 = 24$

$x = 24$

f) $19 = x : 3$

$3 \cdot 19 = 33$

$x = 19 \cdot 3 = 57$

$x = 57$

$19 \cdot 3 = 57$

12

$9 : 45 = 5$

c) $45 : x = 9$

$x = 9 : 45 = 5$

$x = 5$

g) $32 = 27 + x - 2$

$7 - 2$

$x = 7$

$12 : 3 = 4$

h) $x \cdot 3 = 12$

$x = 4$

d) $x + 90 = 114$

$x = 114 - 90 = 24$

$x = 24$

$zk = 24 + 90 = 114$

4) Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?

$7 - 2 + 27 = 32$

Myslím číslo 7

7.4 Vybrané přepisy rozhovorů

Experiment 5 – 23.3.2022 – Jára a Sváťa – 4.A

Experiment	5	**Podoba**	Písemné zadání ve dvojici
Třída	4.A	**Čas vyřešení**	42:18
Žáci	Jára a Sváťa	**Záznam**	Písemné řešení + Videozáznam

Přepis průběhu experimentu	**Komentář a pozorované jevy**
U: Můžete si pomáhat, povídat si, zajímá mě všechno, co vás napadne. S: Takže si můžeme pomáhat? U: Přesně tak. J: Chápeš to? S: Hmmm..Tak zjisti, které zápisy jsou pravdivé a které nepravdivé. U: Co to asi znamená teda? J: Máme rozhodnout, jestli todlencto, jestli tenhleten příklad je pravdivej v matematice, nebo ne. S: Kam to můžeme dát jako? U: To písmenko? S: No... U: Kam chceš. J: Já bych si to chtěl udělat trošku, aby mi to bylo jako jednodušší... U: Klidně, udělej si to jednodušší, máš tam spoustu místa.	
cv. 1/a: 3 + 5 = 9 - 4	

U: Hmm, ty ses do toho vrhnul Járo J: Mě tohle baví. U: A v čem je teda ta pravdivost, nebo nepravdivost? J: Tady třeba je to nepravdivé, protože 8 není stejné, jako 5, protože je to větší, takže z toho důvodu je ten příklad špatně. U: No výborně Járo! J: to druhé je pravdivé U: Sváťo, ty už děláš to druhé cvičení? S: Já to dělám tak nějak na přeskáčku. U: jenom, že tam už nemusíš psát to Ano, nebo Ne, tam už zase doplňuješ něco trošku jiného. S: Ahá	Jára prokázal hned u prvních úloh, že chápe rovnítko jako vztah rovnosti mezi oběma stranami zápisu. Svůj postup byl i schopný popsat a obhájit. **Jev:** *Žák vnímá rovnítko jako vyjádření vztahu rovnosti už od prvních úloh.*
cv.1/c: 23 – 17 > 54 - 45	
U:Tak Sváťo, koukáš na to nedůvěřivě, na ten příklad, co tě na něm zaujalo? Zdá se ti na něm něco zvláštní? S: Já to nechápu. U: A co myslíš, že nechápeš? S: Tohle...Járo, můžeš mi poradit? J: No, jasně, nejdřív bych si vypočítal obojí dvojí, pak bych si pod to napsal výsledky a pak na základě toho bych zjistil, jestli je to pravdivé, nebo nepravdivé. Což si myslím, že zrovna...já bych si to rád přepočítal... S: šest...a .... Devět	Sváťa se s řešením úloh trápí. Je vidět, že úroveň úloh je na něho poměrně vysoká. Nebojí se ale zeptat a spolužák Jára mu princip úlohy krásně vysvětluje. Pochopení úlohy pak Sváťu dovede k jejímu výsledku. **Jev:** *Diskuse vede k lepšímu pochopení úlohy.*

<table>
<tr><td>J: A je to správně, takhle
S: Takže 54 – 45 je 9
J: Hm a takhle je to A pravdivé
U: Výborně!</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.1/b:
16 . 3 > 7 + 20</td></tr>
<tr><td>U: Sváťo, klidně si to můžeš napsat stranou, ten výpočet, to vůbec nevadí, naopak.
J: Další příklad vypočítán
S: Takže 16 . 3 je 48...
U: Co ti to říká, že to je 48...
S: Eeee...
J: Můžu už dělat druhý cvičení?
U: Můžeš, klidně...a kdyby ses potřeboval na cokoli zeptat, tak se zeptej.
J: jo
U: Hele a Sváťo, je mezi těmi čísly napsané plus? Co je to za znaménko?
S: Že je to 48, když si to vypočítám, větší jak 27...
U: A je to pravda, nebo ne?
S: Jo...
U: No super, tak tam napiš A a je to hotovo.</td><td>Sváťu uklidňuje možnost zápisu výpočtu. Druhou úlohu Sváťa řeší trochu zmateným zápisem, mezi výsledky pravé a levé strany píše znaménko +, místo znaménka >, které je v zadání úlohy. Po upozornění ale nepřesnost odhaluje.
V Járově řešení můžeme zase vidět numerické chyby. Princip úloh je mu ale jasný.

<u>Jev:</u> Chyby z nepozornosti.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/e:
57 : 3 = ____ - 1</td></tr>
</table>

J: Sváťo? Tenhle ten příklad trochu nechápu. S: No? J: 57 : 3 = ____ - 1 ... S: Přesně s takovým příkladem mi pomáhal Štěpán... J: Jak to vypočítat? U: Co je tam nezvyklé? J: Mě mate ta mínus jednička... U: Jo? A co by se ti líbilo, kdyby tam bylo, místo té mínus jedničky? J: Že by tam neměla být, protože já teď nevím, jestli do toho výsledku mám jednu přidat, aby se to pak jako rovnalo, nebo jestli je to jako normální příklad, kterej...jako je to had. U: A jestli je to had, nebo normální příklad...a dá se to nějak vyzkoušet? J: Myslím, že jo...když si to vypočítáme. S: Jo, podle mě to budeme muset odečíst! Hele, když vypočítáme to děleno, tak z toho výsledku odečteme tu jednu... J: Jo, tak to je dobrý. U: Určitě to vyzkoušejte, jestli to bude fungovat. S: Tak to tady napíšeme...udělej si jako zkoušku, než to napíšeme. Pomůžeš mi s těma většíma číslama? J: Hmm... S: Tak trojka do pětky se vejde...jednou...a zbytek jsou dva, tady napíšeme dva a	Zápis páté úlohy Járu i Sváťu zmátl. Sice pro ně byla obtížná i velká čísla, ale hlavní zmatení přinesl zápis -1 na pravé straně úlohy. Jára říká, že by tam -1 neměla být. Pak říká, že neví, zda má do výsledku (neznámé), jedničku přidat, nebo je úloha jako had, kde operace dále pokračují. Jára tedy navrhuje funkční postup tím, že tvrdí, že přičte jedničku k hledané neznámé. Do jeho uvažování se ale vmísí Sváťa, který říká, že od neznámé jedničku odečtou. Jára se nechá strhnout a Sváťovu teorii chce vyzkoušet. Během výpočtu se ukazuje nejistota kluků při písemném dělení. Nakonec ale opět svou chybu odhalují a napravují. Vychází jim číslo 19. Oba se zaradují a na vynechaný řádek zapisují číslo 18. Já jim výsledný zápis úlohy opakuji, abych zjistil, jestli zaregistrují chybu. Jára mě prosí, abych komentář zopakoval a pak správně vysvětluje, proč v úloze má být na vynechaném řádku číslo 20. **<u>Jev:</u>** *Záporné znaménko ve spojení s neznámou je na řešení obtížné.* **<u>Jev:</u>** *Společné odhalení principu úlohy je pro oba žáky motivující a obohacující.*

přičtěme sedm…a trojka do dvaceti sedmi se vejde… J: To nevychází, nebo…počkat, tohle jsme se neučili…27 : 3 je… S: Osmkrát…a to je 24…a do 27 je to 3… U: A může ti zbýt tři, když dělíš třemi? J: Nemůže se ti to stát! U: Tak si to vynásob, zkus si to, normálně 3 . 8 J: Je to tak, vyšlo to takhle… U: Taky to vyšlo 18 Járo? J: Ne, to mi vyšlo, jako 19, ale mínus jedna je 18 U: takže co tam doplnit na to chybějící místo? J + S: Osmnáct, dobrá spolupráce. U: 57 děleno třemi je to samé, jako devatenáct, mínus jedna.. J: Aháááá! Mohl byste to ještě jednou zopakovat? U: 57 děleno třemi je to samé, jako devatenáct mínus jedna. J: Není to tak! Já vím! S: Doplň vhodné číslo tak, aby byl zápis pravdivý… J: Já už vím, to bude 20 U: Jak si na to přišel? J: Protože -1 je 19, která se rovná 57 : 3, to je taky 19. U: Jasně.	**Jev:** *Pochopení vztahu mezi pravou a levou stranou rovnice je jednodušší v úlohách kde se objevují i znaménka <,>.*
cv.2/f:	

$32 = 27 + \_\_\_ -2$	
S: Jasně, aby 27 aby výsledek bylo 32 U: A to je taky nějaký zvláštní příklad? S: Plus šest...počkat, to není možný... A 6 tady je 27 + 6... J: Počkej, kde si? S: Tady, do 32...ale počkej, sedm! Tam bude sedm. J: Počkej...nojo! Sedm my tady potřebujeme! Ano, je to tak.	Společné úsilí, které kluci vynaložili při řešení úlohy výše se úročí v následující úloze. Začínají hledat taková čísla, která splňují podmínky zadání úlohy – jak říká Jára „my to tam potřebujeme“. **<u>Jev:</u>** *Důkaz o učení a aplikace nové znalosti.*
cv.2/b: $2 .(\_\_\_ + 7) = 24$	
J: dvanáct! Dvakrát dva jsou 4... J: Jo! Je to pět! S: Kde? J: Tady S: Aha, tak jo, to tě poslechnu...	Jára v této úloze postupuje tak, že dělí pravou stranu úlohy dvěma. Pak chápe, že zbytek levé strany se musí rovnat 12. Proto přichází na číslo 5, které dopisuje na řádek. Sváťa využívá možnosti spolupracovat a výsledek opisuje. **<u>Jev:</u>** *Intuitivní použití základních pravidel pro úpravu rovnic.*
cv.2/c: $(17 – 7) . 2 = 5 + \_\_\_$	
J: Deset krát dva je dvacet, plus pět... S: Jak si na to přišel? J: Tak to je špatně...pět plus patnáct!	Jára diskutuje se Sváťou. Jára vypracoval levou stranu úlohy, která mu ukázala číslo 20. Ví, že pokud má platit rovnost, musí

<table>
<tr><td>S: Je třicet pět..
J: Pět, plus patnáct je dvacet, která se rovná dvaceti tady na té straně...
S: Dobře...</td><td>mít i pravá strana stejnou hodnotu. Na volný řádek tedy dopisuje číslo 15. Při vysvětlení postupu Sváťovi zdůrazňuje, že se strany úlohy musí rovnat.

<u>Jev:</u> Diskuse přirozeně odhaluje základní vztahy mezi levou a pravou stranou rovnice.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/d:
45 : ___ = 9</td></tr>
<tr><td>J: A tohle je 5
S: Jakto?
J: Protože 45 děleno 9 je 5
S: Skvělá spolupráce podruhé.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/g:
___ . 9 = 117</td></tr>
<tr><td>J: Tohle jde vypočítat...117 : 9...
S: Zkusíme to vypočítat, jak mě to učil děda, hele, 9 se do 1 nevejde, takže si dáme 11...No a bude to dvanáct
J: Takže 1...2...7...3...takže 13
S: Tady bude dvanáct, protože hele!
J: Já si to sám vyzkouším!
S: To mě baví!
U: To mám radost.
S: 49, aby to bylo mínus 16...</td><td>Jára během výpočtu ještě stíhá kontrolovat postup Sváti, který není přesný ve výpočtu písemného dělení.

<u>Jev:</u> Odhalení chyby a práce s ní.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>J: Počkej...to máš špatně!
S: A co?
J: Tam nemá být 12, tam má být o jedno číslo větší. Protože, když si tady zkusíme tu tvojí 12, tak je to 8 a pak je to tady deset...
S: Hmm, to je pravda...ale hele...
J: Jo, moje je správně, 13 je správně...
S: Třináctka?
J: Ano
S: Dobře.
J: Ono, když k tomuhle tomu tvému výsledku přičteme devítku, tak to budeme mít tohle to....takže to tam hraje roli, takže je to správně...</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/e:
49 = ___ - 16</td></tr>
<tr><td>S: Jo, počkej...49...to musíme udělat nějakej ten...a jak to bude?
J: Já vím, jak to uděláme...
S: My tam musíme mít nějaké to číslo, od kterého odečteme tu šestnáctku a vyjde nám 49...
J: Sakra, to je pravda, to je pravda...
S: takže šestka a do devíti se rovnají...
J: Třicet tři...jdu dále...</td><td>Tato úloha kluky zmátla záporným znaménkem. Sváťa sice správně popsal, jaké číslo hledají. Pak ale začali oba kluci svorně odečítat 16 od 49. S výsledkem 33 pak byli oba spokojeni.

<u>Jev:</u> Záporné číslo ve spojené s neznámou je na řešení náročné a matoucí.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>S: Počkej... ajo...
U: Jste s těmi příklady spokojení?
S + J: Jojo, myslíme si, ale nevíme to jako jistě...
U: Takže 49 je stejné, jako 33 – 16?
J: Jojo</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.3/a:
1000 – x = 943</td></tr>
<tr><td>S: Tyhle příklady mi přesně jdou...
U: A o co tam jde?
S: Takže, počkej...
J: Vypočítat x
S: No, nejdřív si to musíme přečíst, žejo?
J: Takže mínus to číslo, které mi vyjde....
S: Ano, ten výsledek, to ti vyjde, tak bude tady to x...
J: A jooo
S: Jak ti tady vyšlo sedm?
J: Tak se podívej schválně...tady máme desítku a 7 + 3 je kolik?
S: sedm plus tři je...
J: Je těch 10...takže je to 57
S: 57?
J: Ano, i když to vyzkouším...
S: Takže sem napíšeme 57? Napíšeme to nad to x?
J: 57 je tady u áčka...bé...
S: Jdeme takhle?</td><td>Oba žáci se rozhodli řešit tuto úlohu písemným odčítáním. Oba žáci si zjednodušují řešení pomocí verbalizace postupu.

<u>Jev:</u> Verbalizace jednodušších úloh pomáhá žákům v řešení.

Zajímavý je také pohled na zápis řešení této úlohy. Zatímco Jára se snaží využít písmenko x, Sváťa používá zápis nad nebo pod zápis úlohy.

<u>Jev:</u> Použití neznámé k zápisu řešení úlohy.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.3/b:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">x : 6 = 4</td></tr>
<tr><td>J: Ne…b, c, d…takhle je abeceda…x : 6 = 4 jééé, to je ízy…to vím z hlavy… 28
U: Tak 28, nebo 46?
J: Tak počkat, pokud bysme to měli vydělit…tak dostaneme 6…e…ách jo…
S: 5…děleno pěti…
J: Já si to tu zatím zkouším, to je 5, je to tak…
U: Takže 28 : 6 = 4
J: Jo…
U: A proč tam máš ty 46, Sváťo?
J: to jako kdybychom to vydělili 4, tak je to 11…
S: Ale když to uděláme pomalu, tak to děláme …
J: Ale ty si někde jinde…podívej…my jsme u béčka…tohle, kdyby si udělal, tak by tam mělo být 11 zb.2 a mělo by vyjít 6…
S: Mě se těžko přemýšlí…ale tady jsem to měl správně…</td><td>Jára plete písemné dělení. Věřím, že jde o chybu z nepozornosti. Na Sváťovi už je vidět zřetelná únava. Je pro něho obtížné se soustředit tak dlouhou dobu.

<u>Jev:</u> Chyby z nepozornosti.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.3/c:
45 : x = 9</td></tr>
<tr><td>J: Tady jsi měl pětku správně…
S: Díky</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.3/d:
x + 90 = 114</td></tr>
<tr><td>S: Tak teďka jdeme na déčko…20 + 24….
J: 24</td><td></td></tr>
</table>

S: Takže jsem to řekl správně poprvé? J: Ano, 24... S: Jsem dobrej!	
cv.3/e: $2 . (x + 7) = 24$	
J: 2 . (x + 7) = 24...nestrkej do mě prosím... počkat, počkat! Papír, otočíme...tady hledáme dvacet čtyřku...jo, je to tady! S: Nojo! J: Dyť to je úplně stejný tady! Takže x = 5...je to úplně stejný příklad. S: Jen je jinak proházenej... J: ne, je to úplně stejná stavba příkladu, jen tady je řádka, kam můžeš napsat to číslo... U: Tak to vám ulehčilo práci... J: Ano, velice...	Jára zbystřil, úloha mu už byla známá a rozhodl se ji vyhledat na předcházejícím listě. Našel ji a o svůj objev se podělil se Sváťou. Sváťa byl nejdříve trochu nedůvěřivý, ale Jára mu dokázal, že jde o stejné příklady, jen jinak vyjádřenou neznámou. Zároveň tak ukazuje své argumentační schopnosti. **Jev:** *Propojení stejných úloh s různě vyjádřenou neznámou.*
cv.3/f: $19 = x : 3$	
S: 19 = x : 3.... J: počkej... S: 6... J: Špatně... S: Jakto? J: Protože je to dělení... S: Ahá!	Jára stihl kontrolovat postup Sváti. Ten si spletl dělení s násobením, jedná se o další chybu z nepozornosti. Jára úlohu řeší pomocí reverzní operace, rozkládá si číslo 19 a pak rozklad násobí. Svědčí to o tom, že chápe vztah mezi dělením a násobením a dokáže znalost

<table>
<tr><td>J: Bude to...57...když si to rozdělíme na čísla, aby se nám to líp počítalo, tak 10 . 3 je 30 a 9 . 3 je 27 a to je 57...
S: Ajo...
S + J: Dobrá spolupráce potřetí.</td><td>tohoto vztahu použít ke zlehčení řešení úlohy.

<u>Jev:</u> Přemýšlení nad možností řešení úlohy.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.3/g:
32 = 27 + x - 2</td></tr>
<tr><td>J: Já tady zatím budu pokračovat na géčko...
S:Já už jdu taky...
J: Ehm...otoč papír...tady má být 7, protože mínus dva je 5 a tu my potřebujeme...
U: A je to určitě stejný příklad?
J: Ano
S: Podíváme se ještě pro jistotu...ajo!
J: Jen je tady řádka, na kterou to můžete napsat...</td><td>Jára úlohu opět propojuje s předchozím cvičením. Dokonce ji komentuje stejnými slovy „tu my potřebujeme“.

<u>Jev:</u> Propojení stejných úloh s různě vyjádřenou neznámou.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.3/h:
x . 3 = 12</td></tr>
<tr><td>J: A teď poslední...no! To je zase úplně stejnej příklad, jako tady!
U: No vidíte, jak jste si to ukrátili...</td><td>Podobnost úloh kluci opět využívají ke zjednodušení práce.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.4 slovní úloha k rovnici 32 = 27 + x - 2:
Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>J: Tak, myslím si číslo, když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?
J: Takže…
S: Já to nechápu…
J: Takže musíme pozpátku…
S: Takže 32 – 2…
J: X se rovná 32 – 27 + 2…takže x =
S: Jakto?
J: Protože to všechno musíš obrátit…takže místo přičítání odečítáš, jdeš jako by pozpátku…takže 32 – 27
S: To je 5…
J: Ano…takže 5 + 2 je 7
S: Ano, je to sedm…</td><td>Slovní úloha „Myslím si číslo“ kluky zjevně zaujala. I unavený Sváťa zbystřil.
Jára se pustil do řešení a zvolil strategii „pozpátku“, kterou patrně má již zažitou. Svůj postup krásně vysvětluje Sváťovi, který má možnost prohlubovat své poznání.

<u>Jev:</u> Diskuse vede k lepšímu pochopení.

Jára navíc formuluje rovnici, která povede k řešení. Krom toho, že si jí je vědom, dokáže ji i zapsat se správně použitým symbolem neznámé.[10]
<u>Jev:</u> Vytvoření rovnice a správný zápis s využitím neznámé x.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.5 slovní úloha k rovnici x . 3 = 12:
Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?</td></tr>
<tr><td>S: Tři! To jsou tři body!
U: Jak to víš?
S: Si to můžeme vypočítat…
J: Čtyři! 3 . 3 by bylo devět
S: Ajo!
U: A jak je to tedy možné?
S: Protože 3 . 4 je 12</td><td>Přes veliké porozumění v předchozí úloze, v této úloze nedošlo k využití neznámé při zápisu řešení. Respektive, Jára zapsal x = 4, ale neznámou nepoužil v samotném výpočtu.</td></tr>
</table>

[10] Viz. Příloha – řešení Jára

<table>
<tr><td>J: Takže za každou disciplínu získal 4 body...</td><td><u>Jev:</u> Použití neznámé ve výpočtu slovní úlohy je náročné.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.6 slovní úloha k rovnici 2 . (x + 7) = 24:
Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?</td></tr>
<tr><td>J: A tohle je úplně jednoduchý...stejný počet kuliček...takže by to mělo být 7...jo...sedmnáct...
S: 17? Ajo...7 a kolik je do 14...
J: 17, dokončeno...
U: Takže odpověď by byla...
J: Že měl 17 kuliček...
U: Takže Pavel měl 17 kuliček, než začal hrát. Pak vyhrál 7 kuliček a po hře měli společně s Jirkou 24 kuliček...
J + S: Jo
J: Počkej...plus 7 je to ano, 24
S: Takže to x bude 7...
J: To je úplně špatně!
U: Negumuj to, jen to třeba zakroužkuj, ať vím, že to bylo to první...
J: Bylo to dohromady! Takže oba dva mají 24 kuliček, když oba ty svoje kuličky sečtou...takže 24 : 2...to je 12...já to napíšu někam trošku bokem...12 – 7...je 5.
S: No...</td><td>Závěrečná úloha žáky nachytala. Jára se vrhl do výpočtu bez pořádného prozkoumání zadání a okamžitě vykřikl výsledek 17.
Když jsem klukům zopakoval, co tedy podle jejich výpočtu zjistili, uvědomili si chybu a začali pracovat na nápravě. Během napravení chyb spolupracovali. Tentokrát se o použití neznámé x ve výpočtu pokusil Sváťa, jeho výpočet ale není zapsaný správně.

<u>Jev:</u> Použití neznámé ve výpočtu složitějších úlohy je náročné – využití známějších forem výpočtu.

<u>Jev:</u> Složitější slovní zadání zvyšuje náročnost úlohy.

Během řešení slovních úloh kluci neodhalili, že úlohy již řešili v předchozích cvičeních.</td></tr>
</table>

J: Takže 5 + 7 je to! U: Takže jak to s ním bylo? J: Na začátku měl… S: 5 J: A potom získal 7 a když to s Jirkou spojili dohromady, tak měli 24	**<u>Jev:</u>** *Nedošlo k propojení numerických a slovně zadaných úloh.*
Závěrečné hodnocení obtížnosti	
U: Dobře a kdybyste chtěli srovnat to cvičení s řádkou a s písmenkem x, která pro vás byla těžší? S: Cvičení 3 J: Vlastně je to stejný… S: Většina byla stejná, byl to takovej chyták…a byla tam nápověda…takže bylo důležitý si pamatovat ty příklady…já to zakroužkuji… J: Pak tam byl ještě tenhle…49…pak tam bylo 45… U: Takže jste zjistili, že se tam 4 příklady opakovaly…a co to první cvičení? J: To bylo tak polotěžký… U: A přišlo Vám na těch příkladech něco zajímavého? S: Mě baví se o těch příkladech bavit, je to větší zábava… J: Než normální testy… S: Mě se to moc líbilo… U: A vadilo vám něco při tom počítání?	V závěrečném hodnocení Sváťa označil cvičení 3, jako náročnější, než cvičení 2. **<u>Jev:</u>** *Pro slabší žáky je použití neznámé vyjádřené písmenem, méně srozumitelné než vyjádřené vynechaným řádkem.* Kluci také zmínili, že je bavila možnost o příkladech diskutovat. Ocenili by takovou možnost i během hodin matematiky. **<u>Jev:</u>** *Přání řešit podobné příklady v podobné atmosféře i v hodinách matematiky.* Když jsem položil otázku, zda jim něco na příkladech vadilo, Jára okamžitě zmínil úlohu e ve cvičení 2[11]. Byla to úloha, kde došlo u Járy k prvnímu pochopení principu úloh. Nejvíce matoucí pak pro něho byla právě ta -1.

[11] 57 : 3 = ___ - 1

J: Mě tam zarazil příklad u té dvojky…ta mínus jednička, ale pak jsme na to přišli oba… U: Skvěle, moc vám děkuji za spolupráci.	<u>**Jev:**</u> *Záporná znaménka se ukazují jako obtížnější.*

Experiment 10 – 11.5.2022 –Natálka a Dominika – 4.B

Experiment	10	**Podoba**	Písemné zadání ve dvojici
Třída	4.B	**Čas vyřešení**	46:00
Žáci	Natálka a Dominika	**Záznam**	Písemné řešení + Videozáznam

Přepis průběhu experimentu	**Komentář a pozorované jevy**
cv.1/a: $3 + 5 = 9 - 4$	
U: Tak, Natálko, ty si hned napsala, že to není pravda, jak si na to přišla? N: No, 3 + 5 je 8 a 9 – 4 je 5, takže to není pravda. U: Paráda.	Natálka hned v úvodu ukazuje, že vztah rovnosti mezi pravou a levou stranou úlohy chápe. <u>**Jev:**</u> *Žák chápe rovnítko jako vyjádření vztahu rovnosti už od prvních úloh.*
cv.1/b: $16 . 3 > 7 + 20$	
U: Vidím, že nad něčím přemýšlíte. Co Vás zbrzdilo u tohohle příkladu? N: 16 . 3 si to rozložím… U: Dobře, zkus mi říct, co mi ta úloha říká, aniž bys jí počítala. Co po tobě chce? N: No, když vypočítám ty strany, tak mám říct, co je větší a co je menší. U: Aha	Natálka se chvilku pozastavila u druhé úlohy. Zastavila jí vyšší čísla. Vyjádření nerovnosti ale chápala správně. <u>**Jev:**</u> *Obtíže dělají vyšší čísla v zadání úlohy, ne pochopení zadání.*

<table>
<tr><td>N: A 7 + 20 má být větší než 16.3
U: Opravdu?
N: Jé, 16 . 3 je větší, než 7+20.
U: Výborně.
N: Takže tohle je pravdivé.
U: A Domča nám zatím utíká do druhého cvičení. Domčo, co ty dvě úlohy v prvním cvičení? Víš si s nimi rady?
D: No, ani ne.
U: Tak se klidně poraď s Natálkou.
N: No, tak si to rozlož na desítku a šestku a pak to vypočítej a porovnej.
U: Bylo to to násobení, co tě zastavilo?
D: No, jo.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/a:
______ . 3 = 12</td></tr>
<tr><td>U: Co máte dělat ve druhém cvičení?
D: Najít číslo, aby ten zápis byl správně.
U: Výborně.</td><td>Se zadáním druhého cvičení děvčata nemají problém. Dominika používá k řešení obráceného zápisu 12 : 3 = ___.

<u>Jev:</u> Intuitivní použité pravidel na úpravu rovnic.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/b:
2 . (___ + 7) = 24</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/c:
(17 – 7) . 2 = 5 + ___</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/d:
45 : ___ = 9</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/e:
57 : 3 = ___ - 1</td></tr>
<tr><td>D: Mně moc nejde tenhle...
U: A čím tě trápí?
D: Je divnej...
U: A v čem?
D: To dělní je divný...
U: Aha, to si klidně napiš na volné místo a v klidu si to vyděl.
D: Aha, tak to je 19
U: Aha a co tam dělá ta -1?
D: No, dělá z toho 18.
U: A je to pravda, že 57 : 3 je 18?
D: Asi jo...
U: Opravdu? Tak počkáme, co nám k tomu řekne Natálka, už bude taky u tohohle příkladu.
N: No, já jsem nejdřív chtěla dělat tenhle příklad, ale mně to nešlo, tak jsem dělala další...
U: Aha, tak na to můžete mrknout spolu a zkusit tomu přijít na kloub.</td><td>Dominika se zastavila u této úlohy. Ostatními úlohami prošla bez otázek a zaváhání. Tady ji nejdříve zastavilo vyšší číslo v zadání úlohy. Když jsem jí ale řekl, že si může dělení rozepsat, zvládla najít výsledek dělaní.

<u>Jev:</u> Obtížnost znamenají vyšší čísla v zadání, ne pochopení úlohy.

Pak ale přišla otázka na -1 na pravé straně úlohy. Dominika chápe, že kdyby od 19 odečetla 1, tak bude mít na pravé straně číslo 18. Dominika si není jistá, jestli by pak úloha byla správně. Čekáme tedy na radu Natálky. Ovšem ani ta si není jistá. Děvčata se tedy rozhodnou pokračovat k dalším úlohám a tuto úlohu nechají nedořešenou.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>D: Mě to vyšlo 19
N: Aha, takže to bude 19?
U: No, co teď tam ta -1?
N: No, jakože, kdybych si dala 19 – 1, tak je to 18, ale já nevím, jakou to má souvislost s tím příkladem...
D: No, tam je to rovná se...
N: Jo, takhle...
D: No, takhle by to bylo 18...
N: A kdybych tam dala 18?
U: Tak Ti to vyjde 17.
N: Já nevím.
U: Tak zkusíme nějaký jiný a třeba se vrátíme.</td><td><u>Jev:</u> Přemýšlení nad možnostmi řešení.

<u>Jev:</u> Záporná znaménka ve spojení s neznámou jsou pro žáky složitější.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.2/f:
32 = 27 + ___ -2</td></tr>
<tr><td>U: A hele, zase tu máme nějakou nesrovnalost. Natálka tam má sedmičku a Domča tam má pětku, tak jak to teda je?
D: Tak, 27 + 5 je...těch 32 mínus...aha no...tak tam bude ta 7.
N: Když tam odebereme -2, tak tam musí být sedmička.
U: Skvělé.</td><td>Hned u další úlohy se dívky setkávají s obdobnou výzvou, každé z děvčat zapsalo jako hledanou hodnotu jiné číslo. Když si úlohu společně znovu prošli, Dominika odhalila chybu.

<u>Jev:</u> Diskuse vede k lepšímu pochopení.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">cv.2/g:
___ . 9 = 117</td></tr>
<tr><td>U: Klidně si ten další příklad vyděl v řádku, ať to nemusíš počítat z hlavy.
N: Takže tady bude 13?</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>U: Co myslíš?
N: Jo
U: Správně. A teď ten zbytek.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/h:
49 = ___ - 16</td></tr>
<tr><td>U: Tak, Natálko, jdeš na to, že si řekneš 49 + 16, jak tě to napadlo?
N: No, protože tady jiný čísla nemám, tak nemám, co jinýho udělat…můžu, ale mě to takhle přišlo lepší…a že si to sečtu a když mi vyjde výsledek, tak když od toho odečtu 16, tak by mi to mělo vyjít.
U: Dobře, super.</td><td>Natálka u této úlohu ukazuje, jak pěkně chápe vztahy mezi jednotlivými částmi úlohy.

<u>Jev:</u> Intuitivní použití základních pravidel pro úpravu rovnic.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.2/b:
2 . (___ + 7) = 24</td></tr>
<tr><td>U: Tak, teď než půjdeme na další stránku, tak doladíme to druhé cvičení, ať se do toho můžete pustit obě. Klidně si navzájem pomozte.
N: Domčo, chceš pomoct?
D: Asi jo…
N: Takže, (2.(___+7) = 24) když si, jakože…já jsem to nějak ani nepočítala, mě to došlo, že si dáš</td><td>Natálka se nabízí, že Dominice pomůže. Dominika evidentně vysvětlení od Natálky chápe a je ráda, že s ní může spolupracovat.

<u>Jev:</u> Společné odhalení řešení je pro oba motivující a obohacující.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>24 : 2 je 12, takže ty si tady dáš 12, abys měla jakože 2 . 12 je 24...ne, tady v té závorce ti musí vyjít dvanáct.
D: Takže to bude 5.
U: Tak.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Návrat ke cv.2/e:
57 : 3 = ___ - 1</td></tr>
<tr><td>N: A já jdu přemýšlet nad tímhle. (57 : 3 = ___ -1)
U: Určitě to zkus, třeba na to teď přijdeš.
N: Já si nejsem jistá, ale mně tak přijde, že když se ten příklad rovná 19, tak tady se odečítá, takže to není stejný...
U: Jasně...a co s tím?
N: No, já bych tam zkusila dát 20...ale nevím.
U: Tak jí tam zkus dát a uvidíš, jestli to bude fungovat. Tak, teď máš 20 – 1, to je kolik?
N: 19
U: A 57 : 3 je kolik?
N: 19 ? Takže to nejde...
U: Proč ne? Tady je devatenáct a tady je taky devatenáct?</td><td>Natálka se na konce vrátila k řešení úlohy e, kterou děvčata vynechala, protože si nebyla jistá, jak pracovat s -1 na pravé straně.
Natálka si je vědomá toho, že pokud by na pravou stranu dopsala 19, nebude mezi oběma stranami platit rovnost. Navrhuje zkusit číslo 20, pak by pravá strana byla 19. Je k řešení trochu nedůvěřivá, ale když ji to shrnu, tak má radost, že se jí úloha podařila vyřešit.

<u>Jev:</u> Diskuse vede k lepšímu pochopení úlohy.

<u>Jev:</u> Setkávání s podobným typem úloh dělá jejich řešení snadnějším.

<u>Jev:</u> Snaha najít řešení i přes neúspěch.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>N: Tak to jde! Aha, já myslela totiž, že tady je ten výsledek, a tak mě to zmátlo…že se to musí ještě odčítat.
U: Bezva, tak to máme první stranu hotovou.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.3/a:
$1000 - x = 943$</td></tr>
<tr><td>N: Počkat, to nedává smysl, to jsem špatně spočítala…
U: Domčo, je to možný?
D: Jé, není…
N: To bude 67?
U: Zkus to…
N: Hm, tak ne…to musíme zmenšit…
D: Padesát?
U: Kolik?
D: Padesát…sedm?
U: Zkuste to…
D + N: Jo, to je 57.</td><td>Velice zajímavé u třetího cvičení je fakt, že obě děvčata se rozhodla zkusit využívat neznámé x i v zápisu výpočtu. Nespokojily se pouze u zápisu hodnoty neznámé nad její symbol, ale skutečně se snaží o zápis výpočtu. Ne vždy se to daří, ale i takový pokus je překvapivý[12].

<u>Jev:</u> Použití neznámé v zápisu řešení úlohy.

<u>Jev:</u> Písmena v zadání nečiní žákyním obtíže.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.3/b:
$x : 6 = 4$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.3/c:
$45 : x = 9$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.3/d:</td></tr>
</table>

[12] Viz. příloha – řešení Natálka, řešení Dominika

$x + 90 = 114$	
cv.3/e: $2 . (x + 7) = 24$	
U: Tak, pojďte na druhý sloupeček... N: To už tady bylo! U: Jo? N: Bylo... U: A kde? N: V tom příkladu 2... U: Tak se koukněte, jestli to tam opravdu je... N: Je to tam... U: A je to stejný? N: Je to stejný, jen místo toho čísla, té pětky je tam to x-ko..takže bych to nemusela počítat, i když to teď vím, ale já to udělám, protože si to aspoň zkontroluju...Já nevím, jak to vypočítat teďka... U: A nechceš se kouknout na nápovědu na ten předchozí příklad? N: No, tam jsem si udělala 2 . 12, protože to bylo 24...takže...bych tam mohla dát tu 5 a bylo by to hotový, ale kdybych ten příklad, co tam byl minule, neměla, tak bych to musela udělat...takže já... U: Chceš si to zkusit. N: Jo...a ...12, ale x-ko není 12...ach jo... U: Tak co je 12?	Natálka tuto úlohu prokoukla, objevila, že úloha už byla v předchozím cvičení, jen neznámá byla vyjádřená jinou formou. Odmítla ale využít nápovědu a rozhodla se o příkladu znovu přemýšlet, aby ho správně odhalila. V řešení rozepisuje výpočet do několika kroků. Neznámá x ji ale nejde vyjádřit správně. Celkový zápis je stále příliš složitý. **Jev:** *Propojení dvou stejných úloh s různým vyjádřením neznámé.* **Jev:** *Použité neznámé x ve výpočtu složitější úlohy je stále obtížné.*

<table>
<tr>
<td>N: Dvanáct je vlastně ten výsledek...
U: Kterej?
N: Vlastně těch 5 + 7...jenže, není to přímo to x-ko...protože potom bych měla 12 + 7...možná ještě mínus těch sedm?
U: Zkus to...
N: To se rovná 5...takže x se rovná 5.
U: Takže je to stejný, jako ten předchozí příklad?
N: Jo.
U: Super.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">cv.3/f:
$19 = x : 3$</td>
</tr>
<tr>
<td>N: Tady zase musím vypočítat 19, aby to bylo stejně, protože...nevím...
U: Takže něco, děleno 3 je devatenáct...a hele, Domča něco objevila určitě. Domčo, co si objevila?
D: Že ten příklad je na druhý straně...
U: Tohle F?
D: Je to trošku jinak napsáno...
U: A mohlo by nám to pomoct?
D: Vlastně, tohle si myslím, že je ten výsledek tady...57 : 3 je tady 19
U: Tak to by mohlo pomoct, možná...takže Domča si myslí, že to x by mohlo být 57...
N: Tak já zkusím 3 . 19...si to rozložím...ne já nevím... Tak to je 57, ale proč mi to tady vycházelo 33?</td>
<td>U této úlohy Dominika upozornila na podobnost úlohy s úlohou e z předchozího cvičení. Ví ale, že úlohy nejsou úplně totožné, chce ale využít část úlohy na ulehčení řešení úlohy stávající.

<u>Jev:</u> Schopnost využít část jiné úlohy, která se hodí k ulehčení úlohy aktuálně řešené.

Během zkoumání řešení Natálka odhalila svou chybu v násobení, kterou pak opravila.

<u>Jev:</u> Odhalení chyby a práce s ní.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>U: Tak to nevím...nemůže to být proto, že si jedno číslo násobila a druhé dělila? (19 . 3)
N: Jo, asi.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.3/g:
32 = 27 + x - 2</td></tr>
<tr><td>U: Naty, jak Ti vyšlo to G? Máš tam napsáno, že x = 7, jak si na to přišla?
N: No, já jsem napsala, že 32 – 27 = 5 a ještě k tomu si musím dát to 2, aby nám ten výsledek vyšel stejně, i když to ubereme...může být v tom zápisu tady ty tři čísla?
U: Klidně. Tak, Naty ti může pomoct s tím G, kdybys chtěla, Domčo.
N: Chceš s tím pomoct?
D: Ne, v pohodě, já na to asi přijdu. Pět mínus dva je tři...no tak ale! To sem už taky někde viděla...Takže tam bude 7 – 2, to je 5 a 5 + 27 je 32. Takže x je 5...ne! Nene! 7.
U: Tak jdeme na slovní úlohy!</td><td>U této úlohy se Natálka opět rozhodla zkusit zapsat výpočet pomocí neznámé x. Nesprávně ale v zápisu změnila znaménko u čísla 2, její řešení tedy vypadalo takhle: x = 32 – 27 – 2. Když jsem se Dominiky ale doptával na její řešení, odpověděla, že tam musí 2 přidat. Šlo tedy o chybu v zápisu řešení[13].

<u>Jev:</u> Použité neznámé x ve výpočtu složitější úlohy je stále obtížné.

Natálka zatím odhalila, že úlohu již počítala.

<u>Jev:</u> Propojení dvou stejných úloh s různým vyjádřením neznámé.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.4 slovní úloha k rovnici 32 = 27 + x - 2:</td></tr>
</table>

[13] Viz. příloha – řešení Dominika

<table>
<tr><td colspan="2">Myslím si číslo. Když od něho odečtu 2 a přičtu 27, vyjde mi 32. Jaké číslo si myslím?</td></tr>
<tr><td>N: To už tady taky někde bylo! Tady!
U: Jo? Tak to zkuste, jestli to není ta odpověď?
N: Takže 7 – 2 + 27 je 32. Takže se to rovná 32, takže tím číslem je 7.
U: Jo? Funguje to podle zadání?
N: Jo!
U: A tys na to přišla podle toho, že?
N: Podle toho příkladu, že už tam byl a kdybych ten příklad tady neměla, tak bych to spočítala, že bych si vzala…já nevím, jak bych to vypočítala bez něj…
D: Já tomu vůbec nerozumím…
N: Koukej, na té minulé stránce byl tenhle příklad…a když vypočteš tyhle příklady, tak ti vyjde 5 a když přičteš 27, tak máš 32 a tady ti vyjde ten příklad, že ho odečteš a pak přičteš.
D: Aha…</td><td>V úloze „myslím si číslo“ Natálce v řešení pomohla znalost úlohy z předchozích cvičení. Dominika byla k řešení nedůvěřivá, protože Natálka úlohu vyřešila opravdu rychle.

<u>Jev:</u> Propojení numerických úloh se slovním zadáním.</td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.5 slovní úloha k rovnici x . 3 = 12:
Na školní olympiádě jsem získal ve třech disciplínách stejný počet bodů. Dohromady jsem za tři disciplíny obdržel 12 bodů. Kolik bodů jsem získal za každou disciplínu?</td></tr>
<tr><td>N: Tak za mě je to čtyřka.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>U: Domčo, souhlasíš?
D: Jo.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">cv.6 slovní úloha k rovnici 2 . (x + 7) = 24:
Díky výhře 7 kuliček měl Pavel po hře stejně kuliček jako Jirka. Kolik kuliček měl Pavel před hrou, když víš, že na konci měli Pavel a Jirka dohromady 24 kuliček?</td></tr>
<tr><td>U: Tak, teď to poslední...
N: Takže...
U: Tak, obě jste začaly dělit 24 sedmi, proč?
D: No, mě to přišlo, jako jediná možnost...
U: A proč je to jediná možnost?
N: Kdybych si dala 7 . 24, tak mi to vyjde úplně nějaký...číslo, který nemůže...
U: A musím použít jen tu 7 a 24?
N: No, já nevím, kde bych jiný číslo vzala...
D: No, tady je, že ten Pavel a Jirka, že jsou dva...takže bych mohla ještě 24 . 2...totiž 24 : 2
U: A k čemu by mi to bylo?
N: Vlastně...3 . 7 je 21, ne 24
D: No, právě...tady mi vyjdou 3 zbytky (24:7)
U: A myslíte, že to může vyjít se zbytkem?
D: To nedává smysl...
U: Tak co s tím?
N: Hm...dohromady 24, to znamená, že měli oba dva 24 dohromady...takže to</td><td>Poslední úloha odhalila, že děvčata šla důsledně pouze po číslech uvedených v zadání a nesnažila se zadání nejdříve pochopit. Je možné, že je odradila délka slovního zadání.

<u>Jev:</u> Složitější slovní zadání zvyšuje náročnost úlohy.

Pokoušel jsem se je tedy pomocí dotazování dostat k pochopení toho, co vlastně počítají. Dominika pak navrhla, že by bylo možné dělit 24 : 2. Tuto myšlenku přijaly, protože předchozí cesta vedla k výsledku se zbytkem. A to obě věděly, že není možné.

<u>Jev:</u> Diskuse vede k lepšímu pochopení úlohy.

Děvčata začala řešení probírat, a nakonec došly k výsledku. Bylo vidět, že z úspěchu mají velkou radost.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>nemůžeš dělit, protože…no, nevím, prostě to nejde…a…
D: 24 : 2 to je taky jedna z těch možností…
U: Tak to zkuste…
N: Kde bych ale tu dvojku vzala…
D: No, protože jsou dva, ten Pavel a Jirka…
N: Takže 12 měl každej jeden a ten Pavel vyhrál sedm…a 12 – 7… takže měl 5 kuliček..vlastně, 5 + 7 je 12 a s tím Jirkou je to 24.
U: Tak kolik měl teda na začátku?
N: 5
U: Super!</td><td><u>Jev:</u> Společné odhalení řešení je pro obě žačky motivující a obohacující.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Závěrečné hodnocení obtížnosti</td></tr>
<tr><td>U: Ještě se Vás rychle zeptám, které cvičení se vám zdálo nejtěžší?
N: Já nevím, ony byly všechny stejný…museli jsme přemýšlet…asi ta dvojka. Anebo ty rovnice.
D: Já bych dala dvojku a trojku…
U: Dobře a kdybyste si měly vybrat mezi druhým a třetím cvičením, co bylo náročnější?
N: Ty rovnice…třeba ten první příklad tady jsem musela hodně počítat…
D: Pro mě dvojka…
N: Ale bavilo mě to…
D: Jo.
U: Tak skvěle, děkuju vám.</td><td>Během závěrečného hodnocení Natálka nejprve za nejtěžší cvičení označí dvojku, pak „rovnice“. Opět tedy použije slovo rovnice pro označení úloh s neznámou x.

<u>Jev:</u> Termín „rovnice“ je pro žáka spojen s neznámou x, ne se vztahem rovnosti.

Na obtížnosti druhého a třetího cvičení se děvčata neshodla. Natálka označila za náročnější cvičení 3, Dominika cvičení 2.

<u>Jev:</u> Obtížnější jsou úlohy z prvních cvičení.</td></tr>
</table>