



PEDAGOGICKÁ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Vnímání pravidelností v aritmetice u žáků 2. a 3. ročníku ZŠ**

**Pupils' perception of regularities in arithmetic in the 2nd and 3rd  
grade of primary school**

Lucie Kohutová

Vedoucí práce: PhDr. Jana Slezáková, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Praha 2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma Vnímání pravidelností v aritmetice u žáků 2. a 3. ročníku ZŠ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, 6. 10. 2023

Tímto bych ráda poděkovala paní PhDr. Janě Slezákové, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce. Poděkování patří také rodině a přátelům, kteří mi byli oporou v průběhu celého studia.

## **ABSTRAKT**

Tato diplomová práce zkoumá vnímání pravidelností v aritmetice u žáků 2. a 3. ročníku ZŠ. Teoretická část se zaměřuje především na žákovské prekoncepty (dříve získané zkušenosti s vybraným tématem). Uvádí ukázky úloh z různých řad učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ, které umožňují žákům setkat se s tématem pravidelností a rytmu v průběhu studia. Tato část také vysvětluje pojmy související s tématem – zabývá se chybou, chybnými strategiemi a v návaznosti na prekoncepty také s možnými způsoby reedukace. Výzkumná část cílí na analýzu žákovských řešení získaných v rámci fakulního projektu *Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí*, realizovaného PedF UK za finanční podpory z programu OPVV MŠMT. Cílovou skupinu testování představují žáci 2. a 3. ročníku ZŠ. V této části práce jsou zahrnuty příprava a realizace vlastního experimentu s úlohou, analýza a porovnání výsledků z experimentu s daty získanými v projektu. Ty jsou doplněny o písemné záznamy rozhovorů se žáky a vyučujícími. Porovnání výsledků výzkumu ukazuje, že u žáků dochází ke kognitivnímu posunu, který se projevuje zlepšeným vnímáním pravidelností a hledáním zákonitostí. Dle výsledků vlastního experimentu lze pozorovat také závislost na způsobu zadávání úlohy v různých podmínkách.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

číselné řady, chyba, násobky, porozumění zadání úlohy, pravidelnost a rytmus, reedukace chyby, tabulka, vnímání pravidelnosti, závislosti

## **ABSTRACT**

This thesis investigates the perception of regularity in arithmetic of pupils in 2nd and 3rd grade of primary school. The theoretical part focuses mainly on pupils' preconceptions (previously acquired experience with the chosen topic). It presents examples of problems from various series of mathematics textbooks for primary school, which allow pupils to encounter the topic of regularities and rhythm in the course of their studies. This section also explains the concepts related to the topic - dealing with error, error strategies and, following the preconcepts, with possible ways of re-teaching. The research part aims to analyse the pupils' solutions obtained within the faculty project *Teachers' understanding of the causes of school failure and the effectiveness of pedagogical interventions*, implemented by the Pedagogical Faculty of Charles University with financial support from the OPVV programme of the Ministry of Education. The target group of the testing are pupils of the 2nd and 3rd year of primary school. This part of the work includes the preparation and implementation of the actual experiment with the task, analysis and comparison of the results from the experiment with the data obtained in the project. These are supplemented by written records of interviews with pupils and teachers. Comparison of the research results shows that there is a cognitive shift in the pupils, which is manifested in improved perception of regularities and pattern finding. According to the results of the actual experiment, a dependence on the way the task is given can also be observed.

## **KEYWORDS**

number series, mistake, multiples, understanding the task, regularity and rhythm, re-education of mistake, table, perception of regularity, dependencies

## Obsah

Úvod .....	8
1 Teoretická východiska .....	10
1.1 Matematika v systému vzdělávání ČR .....	10
1.1.1 Matematika v RVP ZV .....	10
1.1.2 Rytmus, pravidelnost, číselné řady .....	11
1.2 Chyba a její místo v učení .....	12
1.3 Reeducace.....	13
2 Prekoncepty žáků vycházející z předkládaných matematických úloh.....	15
2.1 Typy úloh v různých řadách učebnic.....	16
2.2 Rytmus.....	18
2.2.1 Krychlové stavby .....	18
2.2.2 Pokračuji v rytmu .....	19
2.2.3 Vybarvím v rytmu .....	20
2.3 Číselné řady .....	22
2.3.1 Doplním čísla na číselnou osu .....	22
2.3.2 Číslo předcházející a následující .....	23
2.3.3 Doplním chybějící čísla v řadě .....	24
2.3.4 Postupně přičítám/odčítám .....	25
2.3.5 Doplním tabulku závislostí.....	26
2.4 Shrnutí .....	28
3 Charakteristika projektu .....	29
4 Zpracování výzkumných dat – úloha pro 2. ročník 1. stupně ZŠ.....	31
4.1 Očekávání .....	32
4.2 Procentuální úspěšnost a chybovost žáků při řešení úlohy .....	34

4.3	Zkoumání žákovských řešení .....	35
4.3.1	Řešení v poli 3a .....	36
4.3.2	Řešení v poli 3b .....	38
4.3.3	Řešení v poli 3c .....	42
4.3.4	Řešení v poli 3d .....	45
4.3.5	Řešení v poli 3e .....	50
4.3.6	Řešení v poli 3f.....	54
4.3.7	Řešení v poli 3g .....	58
4.3.8	Řešení v poli 3h .....	63
4.3.9	Řešení v poli 3i.....	67
4.3.10	Řešení v poli 3j.....	71
4.3.11	Řešení v poli 3k .....	73
4.3.12	Řešení v poli 3l.....	75
5	Zpracování výzkumných dat – úloha pro 3. ročník 1. stupně ZŠ.....	79
5.1	Očekávání .....	80
5.2	Procentuální úspěšnost a chybovost žáků při řešení úlohy .....	81
5.3	Zkoumání žákovských řešení .....	82
5.3.1	Řešení v poli 3a .....	83
5.3.2	Řešení v poli 3b .....	86
5.3.3	Řešení v poli 3c .....	91
5.3.4	Řešení v poli 3d .....	94
5.3.5	Řešení v poli 3e .....	99
5.3.6	Řešení v poli 3f.....	102
5.3.7	Řešení v poli 3g .....	104
5.3.8	Řešení v poli 3h .....	107

5.3.9	Řešení v poli 3i.....	113
5.3.10	Řešení v poli 3j.....	116
5.3.11	Řešení v poli 3k.....	120
5.3.12	Řešení v poli 3l.....	123
6	Srovnání úspěšnosti řešení úlohy žáků 2. a 3. ročníku.....	127
7	Vlastní výzkumné šetření s využitím reformulovaných úloh.....	129
7.1	Příprava vlastního výzkumného šetření.....	129
7.1.1	Reformulace a) – změna rozmístění útržků.....	129
7.1.2	Reformulace b) – manipulace s útržky.....	130
7.2	Realizace vlastního výzkumného šetření.....	131
7.2.1	Řešení žáků 2. ročníku: změna rozmístění útržků.....	131
7.2.2	Řešení žáků 2. ročníku: manipulace s útržky.....	133
7.2.3	Řešení žáků 3. ročníku: změna rozmístění útržků.....	136
7.2.4	Řešení žáků 3. ročníku: manipulace s útržky.....	139
7.3	Vyhodnocení vlastního výzkumného šetření.....	143
	Závěr.....	146
	Seznam použitých informačních zdrojů.....	148



## Úvod

### Volba zaměření a tématu diplomové práce

Rozhodla jsem se psát diplomovou práci na matematické téma. Vedla mě k tomu úzká spolupráce s Katedrou matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. V průběhu celého studia jsem se věnovala pomocným vědeckým pracím, pomáhala jsem s organizací konferencí i realizací dalších projektů. V rámci projektu *Inovace v pedagogice – Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí* jsem prováděla analýzu jedné úlohy ze zadaných testů. Na základě toho mi byla nabídnuta možnost zabývat se úlohou v širším rozsahu a napsat o ní diplomovou práci. Tuto nabídku jsem přijala. Ve své diplomové práci se věnuji tématu vnímání pravidelností v aritmetice u žáků 2. a 3. ročníku ZŠ.

### Cíle diplomové práce

Cílem teoretické části bylo prozkoumat učebnice matematiky pro 1. stupeň ZŠ a shromáždit úlohy, skrze které mohou žáci získat zkušenosti s tématem rytmu, číselných řad a pravidelností. Tento cíl je stanoven za účelem zjištění, zda se žáci před testovou úlohou mohli setkat s podobným typem úloh. To by umožňovalo její úspěšné řešení. Struktura analýzy úloh je zvolena tak, aby napomohla učení předvídat možné chyby. Kromě toho je realizována snaha zamýšlet se nad podobami gradací, které úzce souvisejí s reedukací. Tyto úvahy byly posléze uplatňovány při rozboru úlohy ve výzkumné části práce.

Cílem výzkumné části diplomové práce bylo analyzovat žákovská řešení úloh zaměřených na pravidelnost v číselných řadách, zamyslet se nad příčinami chyb a možnostmi jejich reedukace. Důležitou součástí představovala realizace vlastního experimentu. V rámci něho byly úlohy s jinou strukturou zadání zadány malému vzorku žáků a posuzoval se vliv formy zadání a spolupráce na volbu řešitelských strategií, případně úspěšnost v řešení úlohy.

### Obsah kapitol diplomové práce

První kapitola diplomové práce objasňuje pojmy provázané s tématem diplomové práce: zabývá se zařazením matematiky do Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání a konkrétněji zakotvuje témata rytmu, číselných řad a pravidelností. Kromě toho

objasňuje s oporou o odbornou literaturu pojmy spjaté s výzkumnou částí – chyba, reedukace.

Druhá kapitola představuje ukázky úloh z různých řad učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Tyto úlohy se vztahují k tématu rytmu, číselných řad a pravidelností. Vzhledem k jejich zařazení do učebnic měli žáci možnost se s nimi setkat před absolvováním diagnostického testu. Úlohy jsou rozděleny do dvou hlavních kategorií – rytmus a číselné řady. Ke každé oblasti jsou přiřazena další témata, v rámci nichž jsou prezentovány konkrétní ukázky úloh. U úlohy je uveden její popis, jakých chyb se žák nejspíše dopustí při jejich řešení a jaké jsou možné parametry gradace.

Třetí kapitola charakterizuje projekt *Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí*, realizovaný PedF UK za finanční podpory z programu OPVV MŠMT. Uvádí předmět a cíl projektu, jeho organizaci a zapojené instituce.

Ve čtvrté kapitole jsou evidována data z výzkumu ve třídách 2. ročníku, která jsou klasifikována a komentována. Jsou popisovány pravděpodobné příčiny vzniku chyb a návrhy reedukace, aby další žákovské strategie byly úspěšné.

Pátá kapitola provádí totožnou analýzu pro 3. ročník. Její struktura kopíruje kapitolu čtvrtou.

V šesté kapitole jsou srovnány výstupy žáků 2. a 3. ročníku, a to jak z hlediska celkové úspěšnosti v úloze, tak z hlediska úspěšnosti v jednotlivých polích. Je komentována variabilita žakovských řešení a podstata chyb. Připojen je taktéž posun ve vnímání žakovské chyby v těchto úlohách.

Sedmá kapitola popisuje přípravu a provedení vlastního výzkumného šetření, v rámci něhož byly stejné úlohy reformulovány a zadány malému vzorku žáků 2. a 3. ročníků. Ve vyhodnocení je pak přihlíženo k možnému ovlivnění výsledků formulací zadání a odlišnou formou práce. Doplněny jsou také záznamy rozhovorů žáků během řešení úlohy.

V závěru práce jsou srovnána data získaná od žáků 2. a 3. ročníků, z nichž je pak možné usuzovat jejich kognitivní posun. Nachází se zde také srovnání s výsledky získanými ve vlastním výzkumném šetření. Je komentována závislost žakovských výsledků na formách zadání. Nabízí se další možnosti zpracování tohoto tématu, případně jak na něj navázat v dalších odborných pracích.

## **1 Teoretická východiska**

Tato kapitola charakterizuje teoretická východiska diplomové práce. Zabývá se zvoleným tématem obecněji, z širšího hlediska. Vysvětluje pojmy, které se buď nacházejí přímo v názvu diplomové práce, nebo úzce souvisí s jejím obsahem. Jsou klíčové pro pochopení problematiky a provázanosti teoretické části práce s výzkumnou.

### **1.1 Matematika v systému vzdělávání ČR**

Protože je diplomová práce zaměřena na matematickou úlohu, je v tomto oddílu rozebráno zařazení matematiky do systému vzdělávání v ČR. Mimo to je oddíl věnován také zakotvení stěžejního tématu pravidelnosti do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace.

Podklad pro soustavu vzdělávání v ČR tvoří systém školských dokumentů, které mají klíčový význam v organizaci a realizaci vzdělávání.

Z Národního programu rozvoje vzdělávání v ČR (Bílá kniha) vychází Rámcový vzdělávací program (RVP). Jedná se o dokument, který stanovuje vzdělávací cíle, obsah a organizaci vzdělávání v jednotlivých stupních a typech škol. Pro potřeby této diplomové práce zaměřené na základní stupeň vzdělávání je důležitý RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.

Standardy pro základní vzdělávání vycházející právě z RVP následně stanovují minimální výstupy pro žáky 5. a 9. ročníku ZŠ. Toho je dosaženo konkretizací očekávaných výstupů RVP společně s doplněním o ilustrativní úlohy, které by žáci měli být schopni vyřešit.

Na základě RVP školy vypracovávají dokument upřesňující vzdělávací cíle a obsah pro ně samotné – dle potřeb žáků a podmínek školy. Tento dokument je označován jako Školní vzdělávací program (ŠVP) a obsahuje plán výuky, který stanovuje způsoby vyučování učiva, výukové metody nebo formy hodnocení. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021)

#### **1.1.1 Matematika v RVP ZV**

Součástí RVP ZV je vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Mezi její cíle patří rozvíjet matematickou gramotnost a poskytovat znalosti a dovednosti potřebné v praktickém každodenním životě. Mimo to se snaží skrze svůj obsah rozvíjet klíčové kompetence. Důraz

se klade zejména na porozumění myšlenkovým postupům, matematickým pojmům a vztahům mezi nimi. Vzdělávací obsah rozdělujeme do čtyř tematických okruhů: *Číslo a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a prostoru a Nestandardní aplikační úlohy a problémy*. V dnešní době se běžnou součástí stává zapojení výpočetní techniky a pomůcek. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021).

### 1.1.2 Rytmus, pravidelnost, číselné řady

Konkrétní očekávané výstupy vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace umožňují vyzorovat, zda je pro témata rytmu, číselných řad a pravidelností v RVP vyhrazeno místo. To by také mělo znamenat, že se s nimi žáci v průběhu svého vzdělávání na základní škole setkají a získají tak zkušenost v práci s nimi.

Žák:

M-3-1-03 „užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose“ (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021, s. 31)

M-3-2-03 „doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel“ (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021, s. 32)

M-5-4-01 „řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky“ (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021, s. 34)

Pro 1. stupeň lze poukázat na uvedené očekávané výstupy. Už při pouhém zobrazení čísel na číselné ose v okruhu *Číslo a početní operace* pozorujeme určitou pravidelnost, závislost. Od běžné číselné osy postoupíme ke vzdálenostem jiným než 1 mezi jednotlivými body, čímž vznikají nové číselné řady.

Tematický okruh *Závislosti, vztah a práce s daty* nese pro tuto práci kýžené téma v samotném názvu. V očekávaném výstupu se objevuje pojem posloupnost. Z popisu učiva vyplývá, že oblast vede žáky k objevování závislostí mezi jevy a jejich vlastností a patří sem veškerá schematická a grafická znázornění situací (diagramy, grafy, tabulky), ve kterých se závislosti snáze pozorují. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021)

Do učiva tematického okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy spadají mimo jiné číselné a obrázkové řady nebo magické čtverce (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021), které rovněž úzce souvisejí se zkoumanými tématy.

## **1.2 Chyba a její místo v učení**

Tento pojem není součástí názvu diplomové práce, nicméně pro její zpracování představuje stěžejní podklad.

V rámci teoretické části se objevuje ve spojení s úlohami utvářejícími žákovské prekoncepty. Jsou uvedena možná úskalí zmíněných úloh a pravděpodobné chyby, kterých se žáci mohou dopouštět a z nichž mají příležitost se poučit.

Výzkumná část je založená na analýze testové úlohy tematicky zaměřené na pravidelnost v číselných řadách. Data získaná z úlohy jsou zpracována, výsledky tříděny na správné a chybné a v případě chybných probíhá zamyšlení nad příčinou jejich vzniku.

Problém současného školství představuje přetrvávající neschopnost přijmout chybu jako nástroj učení. Stále je na ní nahlíženo jako na překážku, která žáky frustruje až přivádí ke strachu. V mnohém přitom záleží na vyučujícím, jak na chybu žáka reaguje. Pokud mu dopřeje čas, aby chybu sám objevil a napravil, případně mu poskytne návod k jejímu odhalení, pak napomáhá zjištění příčiny jejího vzniku. Neomezuje se pouze na vkládání orámovaného poznatku do paměti, kterýžto proces nevede k trvalému poznání. (Hejný, Novotná & Stehlíková, 2004)

Když se hlouběji zamyslíme nad tím, z jakých důvodů se učitel k takovému přecházení chyby uchyluje, můžeme dojít také k závěru, že se cítí být zodpovědný za žákovu chybu. Považuje se totiž za pedagoga zprostředkovávajícího vědění a žákova chyba představuje znak jeho selhání. K potlačení učitelova strachu z chyby nepřispívají ani rodiče, kteří ji stále ještě nejsou schopni přijmout jako prostředek učení svých potomků. (Hejný, 2014)

Nahlížení učitele na chybu jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky představuje jeden z principů účinného vyučování matematice. Pro učitele směřujícího ze zásady ke správnému výsledku úlohy může být náročné umět pochválit žáka za jeho uvažování o problému, které vedlo do hloubky, byť ne ke správnému řešení. Pokud žákovu

úvahu učitel pouze rychle opraví, žák přejímá jeho poznatek bez nutnosti přemýšlení. (Hošpesová, Stehlíková & Tichá, 2007)

„Proces poznání a odstraňování chyby žákem lze rozčlenit na 6 dílčích činností:

1. poznání přítomnosti chyby,
2. lokalizace chyby,
3. věcná analýza chyby (proč je daná myšlenka chybná, případně i s čím chybná představa souvisí a jaké případné chybné představy jsou s ní propojeny),
4. odstranění chyby,
5. procesní analýza chyby (jak k chybě došlo)
6. vyvození poučení.“ (Hejný, Novotná & Stehlíková, 2004, s. 71)

Výše popsany teoretický základ je důležitým podkladem pro zpracování výzkumných dat. Ve výzkumné části totiž neprobíhá pouhé statistické třídění správných a chybných řešení. Naopak dochází k pozastavení se u chybných řešení a přemýšlení, proč jej asi žáci uvedli. Jsou analyzovány chyby, které se objevují opakovaně, a navrhovány možné způsoby reedukace. Při realizaci vlastního výzkumného šetření je pak vyčleněn čas k rozhovoru se žáky, kdy o řešeních mluví oni sami a s případným poskytnutím návodu objevují a napravují vlastní chyby.

### **1.3 Reedukace**

Pojem reedukace velmi úzce souvisí s prací s chybou. Člověk dělá chyby v průběhu celého svého života, při učení se každé nové činnosti. Jeho posun spočívá v uvědomění si toho, že nějaká chyba nastala, a v pátrání po jejích příčinách. Na základě zjištění pak dokáže činnost při dalším pokusu provést kvalitněji, eliminuje své dosavadní chyby. Ve třídě je žádoucí, aby učitel k reedukačnímu procesu využíval celé třídy. Prezentuje chybné řešení a nechává ostatní žáky, aby jej komentovali. Ti objevují chybu a snaží se chybujícím žákovi vysvětlit, proč nastala a jak ji napravit. Tímto procesem může provádět i samotný učitel, nicméně tím připravuje žáky o krásu a efektivitu vrstevnického učení. (Hejný, 2014)

Iniciování a moderování diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů ostatně patří mezi principy účinného vyučování matematice. Pro učitele se nejedná o jednoduchý úkol, musí totiž v rámci svého návodu volit otázky tak, aby byly srozumitelné a

směřovaly žáky na správnou cestu k pochopení. Zároveň však nesmí prozradit příliš, aby problém stále zůstal problémem, výzvou k pochopení, objevení, vyřešení. Učitel v této roli se pak stává vzorem pro žáky, kteří poslouchají jeho moderování diskuse a jsou schopni následně podobné otázky a způsoby přemýšlení implementovat do vlastních rozhovorů. (Hošpesová, Stehlíková & Tichá, 2007)

Efektivní reedukace úzce souvisí také s typem přístupu učitele. Pokud je jeho přístup transmisivní, pak dochází pouze k přenosu hotových informací bez postupného budování představ. Pro žáka následně není snadné zpracovat poznání hlouběji do své vědomostní sítě, jelikož nedostal prostor se zabývat izolovanými a později generickými modely, aby se propracoval k abstraktnímu poznatku. Konstruktivistický přístup toto nabízí a zabraňuje vzniku formálního poznání. (Hejný, Novotná & Stehlíková, 2004)

## 2 Prekoncepty žáků vycházející z předkládaných matematických úloh

V rámci výzkumu jsem se věnovala studiu různých řad učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ. Hledala jsem úlohy, které se svou strukturou podobají úloze testové. Pokud by se v učebnicích nacházely, žáci by měli možnost získat s nimi zkušenost a mohli by se o ni opřít při řešení úlohy testové. Nalezené úlohy jsem rozdělila do dvou skupin: úlohy zaměřené na rytmus a úlohy zaměřené na číselné řady a jejich doplňování.

Své výstupy jsem kvantifikovala v tabulce níže. Tabulka shrnuje nakladatelství a řadu učebnic, kterou jsem prozkoumala. Ukazuje, kolik úloh popsaneho typu se v dané řadě objevuje. Typy úloh jsem definovala sama. Prostřednictvím ukázek z učebnic ukazuji, co si pod každým typem představuji, jaké úlohy mezi ně zařazuji.

Za typové skupiny úloh jsem vybrala jednu až dvě ukázky. Každou ukázkou úlohy doprovázím komentářem rozděleným na tři části: jak souvisí s testovou úlohou, předpokládané chyby v žákovských řešeních a parametry gradace.

Tuto strukturu jsem zvolila, protože mi připadalo, že podobným směrem se budou ubírat mé úvahy při rozboru žákovských řešení úlohy ve výzkumné části.

Nejprve tedy popisuji princip zvolené úlohy. Odhaduji, jaká je její funkce a kterou oblast žákovských dovedností potřebných k řešení testové úlohy rozvíjí.

Poté zvažuji, jakých chyb se žáci nejspíše mohou dopustit při jejím řešení. Tohle je ve srovnání s výzkumnou částí náročnější, protože nemám k dispozici žádná řešení. Zároveň mi ale takové zamyšlení pomohlo při zpracování očekávání před nahlédnutím na žákovská řešení výzkumné úlohy. Jsem si jistá, že můj výčet předpokládaných chyb rozhodně není úplný. Žáci by mě překvapili mnohými dalšími, na které jsem dosud sama nepřišla.

Nakonec uvádím gradační parametry. Snažím se o pojmenování konkrétního parametru. Následně uvádím gradace, které by bylo možné připravit. Toto zamyšlení mi výrazně usnadnilo práci při hledání reedukačních strategií ve výzkumné části práce. V teoretické části se snažím popsat gradaci ve formě zjednodušení i ztížení úlohy, abych plně vystihla její didaktický potenciál. Ve výzkumné části (s ohledem na rozbor chyb) se většinou uchyluji pouze k vymýšlení zjednodušených variant, aby žáci sami dokázali svou chybu napravit.



## 2.1 Typy úloh v různých řadách učebnic

Řádek tabulky odkazuje na nakladatelství a konkrétní řadu učebnic matematiky pro 1. stupeň ZŠ, která byla prozkoumána.

Sloupec tabulky udává téma, které nějakým způsobem souvisí s číselnými řadami, posloupnostmi a rytmem.

Každé téma je pak reprezentováno různými typy úloh (které se liší například strukturou nebo kontextem). Četnost těchto typů je jako číselný údaj zaznamenána v tabulce. Každý z těchto typů se pak mohl v učebnici vyskytovat vícekrát, tento údaj již tabulka nezobrazuje, protože by statistika nebyla přehledná.

Příklad: Doplním čísla na číselnou osu pro nakladatelství H-mat má četnost 3, protože v učebnicích byly nalezeny 3 typy úloh zaměřených na toto téma v kontextu číselných řad: 1) osa, ze které šotek vymazal některá čísla; 2) osa, ze které šotek vymazal některá čísla a některé rysky; 3) 2x zalomená osa, ze které šotek vymazal některá čísla.

Četnost výskytu zástupných typů úloh z dané oblasti	H-mat	Nová škola: Matýskova matematika	Taktik: Hravá matematika
Krychlové stavby	5	-	-
Pokračuji v rytmu	7	3	1
Vybarvím v rytmu	11	2	1
Doplním čísla na číselnou osu	3	2	3
Číslo předcházející a následující	1	-	4
Doplním chybějící čísla v řadě	<sup>-1</sup>	1	4
Postupně přičítám/odčítám	1	2	1
Doplním tabulku závislostí	5	-	-

Tabulka 2-1: Variabilita typů úloh v učebnicích matematiky

<sup>1</sup> Úlohy na doplňování čísel se nevyskytují jako samostatná struktura. Jsou zakomponovány do strukturálních a sémantických prostředí (Sousedé, Součtové trojúhelníky, Schody). Často je doprovází podmínka.

Průzkum ukázal, že nejpestřejší škála úloh (typem i množstvím) se nachází v učebnicích nakladatelství H-mat. Jako jediná tato řada učebnic nabízí úlohy na práci s krychlovými stavbami a doplňování tabulek závislostí.

Stavba krychlových staveb podporuje rozvoj vizuálních rytmického cítění (stavba v barevném rytmu, za dodržení podmínek), ale i způsob evidence do tabulky. Tabulky závislostí jsou svou strukturou a obsahem nejpodobnější testové úloze z výzkumné části diplomové práce, se kterou se žáci museli vypořádat. To znamená, že s řadou učebnic nakladatelství H-mat měli žáci nejlepší příležitost se na ni připravit.

Doplňování chybějících čísel v řadě se v těchto učebnicích neobjevuje jako samostatná úloha, ale je zakomponováno do četných strukturálních i sémantických prostředí. Mezi ně patří Součtové trojúhelníky, Sousedé, Schody a mnohá další. Je třeba podotknout, že žáky takové úlohy kognitivně rozvíjejí více i s ohledem na podmínky, které se v úlohách často objevují. Typicky prostředí Sousedé vyžaduje, aby byl součet tří sousedních čísel roven nějakému číslu.

Úlohy zaměřené na doplňování číselných řad se objevují v učebnicích H-mat pro vyšší ročníky. Žáci objevují pravidlo mezi zadanými čísly, na základě kterého doplní čísla další. Právě tento typ úloh (několik řad s různými zákonitostmi, které žáci musí objevit) jsem naopak postrádala v učebnicích ostatních nakladatelství.

Z tabulky je zřetelný odskok v počtu úloh typu Vybarvím v rytmu. Učebnice nabízí mnoho odlišných struktur a kontextů (začátek rytmu vlevo – uprostřed – vpravo; kombinace barev, symbolů, písmen; různé obrazce – terče, korále, postavy, auta).

Matýskova matematika nakladatelství Nová škola disponuje velkým množstvím úloh na vnímání pravidelností a číselných řad, které však nejsou variabilní. To znamená, že se velmi často opakuje stejný typ úlohy, akorát se obmění čísla v zadání. Je to charakteristické zejména pro úlohy typu Doplním chybějící čísla v řadě. Na začátku 1. ročníku se objevují řady v číselném rozsahu 1-5, později se rozsah rozšiřuje.

Taktik zařazuje malé množství úloh, které by budovaly prekoncepty v oblasti vnímání rytmu a číselných řad. Naproti tomu každá z úloh je jiná a přivádí žáka do různorodých kontextů a prostředí. Oceňuji, že se objevují tabulkové struktury, ve kterých jsou žáci nuceni se zorientovat. To je patrné zejména při typu úloh Číslo předcházející a následující.

## 2.2 Rytmus

### 2.2.1 Krychlové stavby



Obrázek 2-1: H-mat – 1. ročník (1. díl), str. 53

#### Co rozvíjí

- Krychlové stavby nabízejí žákovi možnost manipulace a barevné uspořádání krychlí rozvíjí haptické a vizuální vnímání rytmu.
- Žák vnímá rytmus procesuálně, když konstruuje stavbu v zadaném barevném rytmu.
- Podporuje se evidence v tabulce. Pracuje se se zadanými proměnnými či parametry, které žák musí sledovat a evidovat.

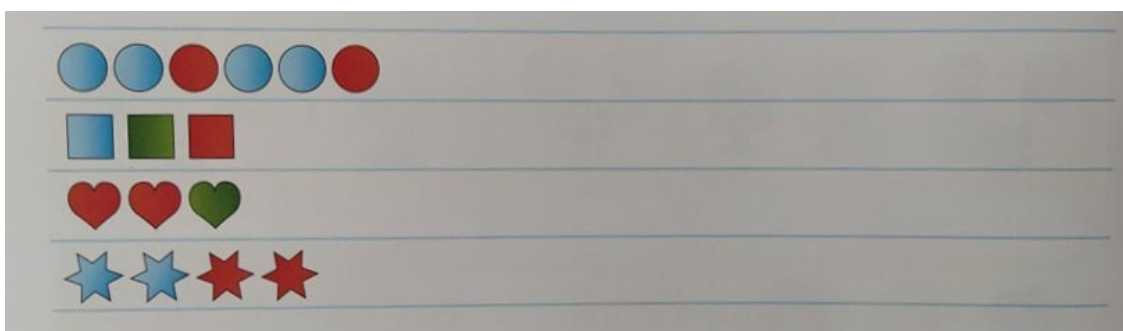
#### Možné chyby

- Žák chybně rekonstruuje prezentovaný model stavby.
- Žák se neorientuje v parametrech daných tabulkou: neporozumí významu šipek směřujících do polí tabulky, nepochopí písmeno D jako znak pro celkový počet krychlí v daném podlaží.
- Žák chybně zanese údaje do tabulky (např. počet modrých krychlí zapíše do záhlaví tabulky do modrého pole).
- Žák se dopustí kalkulační chyby při sčítání krychlí v podlažích.

#### Gradační parametry

- Počet krychlí. S větším počtem krychlí bude náročnější rekonstrukce stavby a evidence počtu krychlí v jednotlivých podlažích.
- Počet barev krychlí. V zadání jsou použity 2 barvy krychlí. Je možné stavět jednobarevnou stavbu (nižší počet barev) nebo přidat další barvu krychlí (3, 4, ...).

## 2.2.2 Pokračuji v rytmu



Obrázek 2-2: Taktik – 1. ročník (1. díl), str. 6

### Co rozvíjí

- Úloha nabízí možnost evidence počtu jinou formou než číslem.
- Dochází k propojení na geometrii. Žák vnímá různé geometrické tvary.
- Žák synchronizuje rytmus. Pojmenovává pravidelnost, hledá cesty k jejímu zápisu.
- Žák tvoří další členy řady úplně sám. Na rozdíl od předchozí úlohy pouze nevybarvuje předpřipravený vzor. Rozvíjí se jemná motorika při kreslení tvarů.

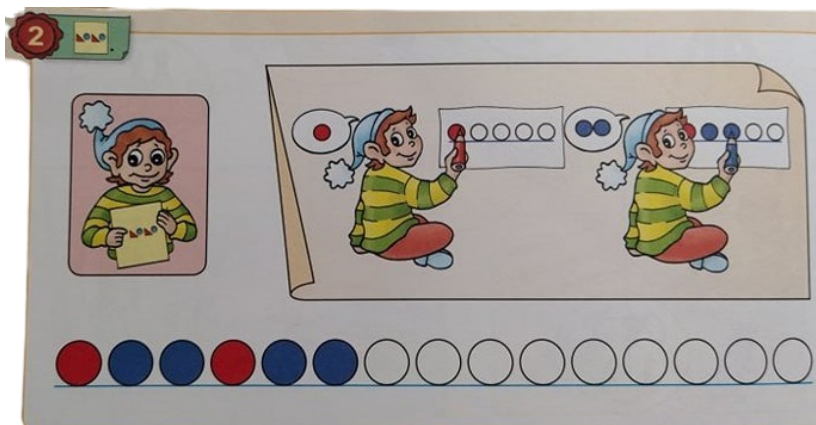
### Možné chyby

- U vzorů, které mají ukázán jen jeden cyklus, může žák mít tendenci jej nějak dokončit. Např. u srdcí doplní ještě jedno zelené srdce a teprve poté začne rytmus opakovat od začátku.
- Žák se dopustí chyb z nepozornosti, protože cvičení bude považovat za příliš jednoduché, dlouhé a stereotypní. Proto nějaký objekt může vynechat, čímž naruší pravidelnost.

### Gradační parametry

- Počet barev. Snížení nebo zvýšení počtu barev v jedné pravidelné řadě.
- Počet tvarů. V této úloze pracuje každá samostatná řada pouze s jedním tvarem. Uvedené tvary pak lze kombinovat do jedné řady v různých barevných provedeních.
- Rozměrovost řady. Řada pokračuje jedním směrem zleva doprava. Bylo by možné další vzory přidávat nahoru, dolů, případně převést 2D obraz do modelu 3D.

### 2.2.3 Vybarvím v rytmu



Obrázek 2-3: Nová škola – 1. ročník (1. díl), str. 4

#### Co rozvíjí

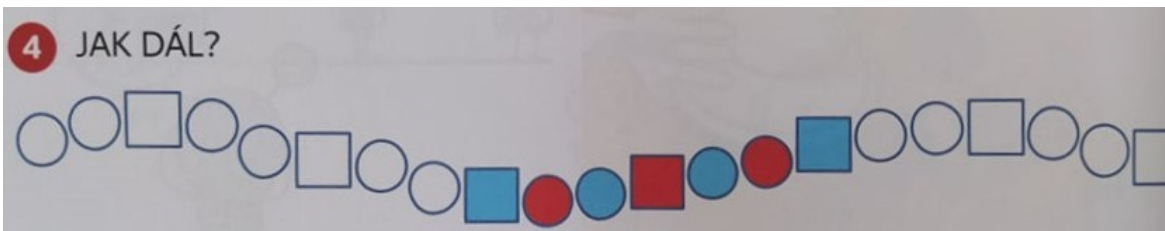
- Úloha učí žáka pracovat s instrukcí v zadání. V tomto případě se jedná o úlohu pro 1. ročník, kde není ještě tak rozvinuta čtenářská dovednost. Autoři pracovního sešitu si s tím poradili formou obrázkové instrukce včetně ilustrativní ukázky.
- Úloha žákovi prezentuje z hlediska percepce vizuální model čísla. Žák nepracuje s číslem v jeho abstraktní podobě, ale se zástupným symbolem představujícím konkrétní množství.

#### Možné chyby

- Žák zamění počty prvků. Místo jednoho červeného a dvou modrých kruhů začne vybarvovat jeden modrý a dva červené.
- Žák provede zakončení jednoho rytmického cyklu, čímž obmění celou strukturu. Vidí jeden červený, dva modré, jeden červený a začne opakovat tento rytmus. Tím se mu ve vzoru začnou objevovat dva červené kruhy vedle sebe.

#### Gradační parametry

- Počet barev. V úloze žák používá dvě barvy. Náročnost se sníží, když bude mít za úkol vybarvit modře každý druhý kruh. Naopak úloha bude náročnější s přidáním dalších barev do struktury.
- Variabilita tvarů. V úloze je pouze tvar kruhu. Přidáním například čtverce, obdélníku, trojúhelníku, ... se obtížnost zvýší v kombinaci s novými barvami.



Obrázek 2-4: H-mat – 1. ročník (2. díl), str. 70

### Co rozvíjí

- Žák se učí pokračovat v řadě v různých směrech. Zde není uveden začátek řady. Žák musí postupovat zprava doleva. To pro něj představuje nepřírozený směr.
- Žák musí vynaložit velkou pozornost. Pracuje sice s malým počtem tvarů a barev, ty jsou ale mezi sebou kombinovány a v rytmu se střídají.

### Možné chyby

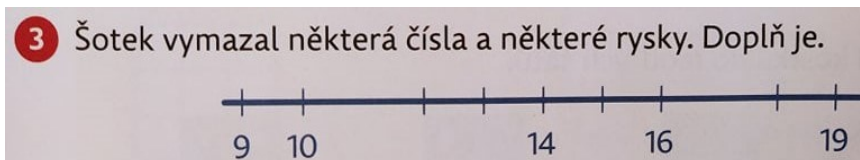
- Žák bude chtít začít řadu řešit od začátku, úplně vlevo. Ne zvolí správnou kombinaci barev pro první dva kruhy. Poté se naruší rytmus.
- Žáka splete střídání tvarů. Musí si všimnout, že po dvou kruzích následuje čtverec. Ten není vždy modrý, ale střídá se s čtvercem červeným. Zároveň se mění barevné uspořádání kruhů. V úloze je mnoho proměnných, které žák musí sledovat a v nichž se může splést.

### Gradační parametry

- Náročnost samotného rytmu. Jeden rytmický cyklus je zde velmi dlouhý, čítá šest prvků. Když cyklus zkrátíme, dojde ke zjednodušení úlohy.
- Počet tvarů. Zvyšující se počet geometrických tvarů v jednom cyklu vede ke zvýšení náročnosti úlohy.
- Počet barev. V úloze se pracuje se dvěma barvami. Kdyby se přidala barva třetí, prodloužil by se jeden rytmický cyklus, což by ještě zvýšilo náročnost úlohy. Naopak bylo by možné každou barvu přiřadit jednomu tvaru, čímž se úloha zjednoduší.
- Začátek rytmu. Nejjednodušší je pro žáka řešení zleva doprava. Poté lze začít úplně vpravo a postupovat doleva. Nejnáročnější je uvedená varianta. Žák musí doplňovat řadu v obou směrech.

## 2.3 Číselné řady

### 2.3.1 Doplním čísla na číselnou osu



Obrázek 2-5: H-mat – 2. ročník (2. díl), str. 58

#### Co rozvíjí

- Žák se učí orientovat se na číselné ose.
- Nedoplňuje pouze chybějící čísla, ale i rysky. Vnímá jistou geometričnost osy.
- Žák pracuje s číselnou řadou s počátkem jiným než 1.
- Žák na základě orientačních bodů doplní čísla v obou směrech: zleva doprava i zprava doleva (je si vědom, že nalevo od čísla 14 se nachází číslo 13).

#### Možné chyby

- Žák nepřesně vyznačí na číselnou osu rysku. Tím pádem mu vznikne prostor pro dvě rysky místo jedné. Chybně pak doplní dvě čísla a řada mu ve svých opěrných bodech nebude navazovat.
- Žák neuvažuje prostor pro doplnění rysky. Pokračuje v řadě u další dostupné rysky, kterou má k dispozici. Tím pádem některá čísla vynechá a řada mu opět nenavazuje.
- Žák nedopíše čísla ke všem ryskám. Například vidí čísla 14, 16. Pokračuje rovnou číslem 18 (které je také vzdáleno o 2).

#### Gradační parametry

- Charakter číselné řady. Zde se na číselné ose nacházejí čísla s rozdílem 1 čili klasická číselná řada. Bylo by možné na ni umístit řadu s jinými závislostmi, například násobky 2, 3.
- Obor čísel. Zde se pracuje s čísly 9-20. Bylo by možné rozšířit obor na čísla do 100, nad 100, ...
- Počet os. Jednu osu by bylo možné rozdělit na menší úseky, případně nechat některý úsek „zmizet“ podobně jako u testové úlohy. Další možností je přidat pod první osu druhou, ve které bude jiná závislost mezi čísly.

### 2.3.2 Číslo předcházející a následující

3. Doplň čísla do tabulky. Nezapomeň sledovat směr šipek.

	15	48	79	22	64	46	91	50	99	37
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Obrázek 2-6: Taktik – 2. ročník (1. díl), str. 7

#### Co rozvíjí

- Takto zadaná úloha umožňuje sledovat závislosti čísel pod/nad sebou podobně jako testová úloha.
- Žák si uvědomí, které číslo předchází a které následuje v číselné řadě.
- Žák se orientuje ve směru řešení pomocí šipek.
- Na základě zkušenosti s touto úlohou je žák schopen posléze doplnit středové číslo se znalostí čísla horního nebo spodního.

#### Možné chyby

- Žák se neřídí směrem šipek. Splete si, na kterou stranu se přidává menší číslo a na kterou větší. Jako přirozenější se jeví postupovat shora dolů. Do prvního sloupce tak doplní čísla 14, 15, 16. To neodpovídá zadání.
- Žák se snaží objevit závislosti mezi čísly na řádcích, které v tomto případě neexistují. Na základě toho vykonstruuje nové pravidlo, které uplatňuje v dalších polích.

#### Gradační parametry

- Zadané číslo. V tomto případě žák zná středové číslo. Provádí vždy jednu operaci sčítání a jednu odčítání od zadaného čísla. Pokud by měl zadáno číslo ve spodním řádku s informací, že se jedná o číslo +1, musel by odečíst 1, aby získal číslo středové (antisignál).
- Rozdíl mezi čísly. V této úloze žák přičítá a odčítá číslo 1. Bylo by možné zaměnit číslo 1 za 2, 3, ... případně víceciferná čísla.
- Propojenost. Zde jsou do střední řady vybraná náhodná čísla. Lze vybrat jiná (např. pouze násobky 2) a nechat žáka hledat další souvislosti a závislosti.



### 2.3.3 Doplním chybějící čísla v řadě



Obrázek 2-7: Nová škola – 1. ročník, str. 20

#### Co rozvíjí

- Úloha rozvíjí žákovu představivost posloupnosti se závislostmi zachovanými mezi členy, čímž přímo buduje zkušenost potřebnou k řešení testové úlohy.
- Úloha odpoutává žáka od běžné podoby kompletní řady, ve které by pouze doplňoval následující člen.
- Chybí opora v podobě počátečního členu řady, žák si musí poradit bez ní.

#### Možné chyby

- Žák začíná řadu číslem 1, opomíjí nulu. To vede k ponechání některých polí (určených pro nulu) volných.
- Žák vynechá poslední prázdné pole, za konec řady považuje poslední vyplněné pole ze zadání.
- Žák se neorientuje, zda je daná řada stoupající, nebo klesající. Po čísle 5 pokračuje s číslem 6 (místo 4) a podobně.

#### Gradační parametry

- Umístění prázdného pole. Pro žáka je náročnější, když doplňuje prázdná pole na začátku řady, než když má začátek řady zadán a čísla chybí na konci.
- Počet zadaných čísel. Pokud je zadán menší počet čísel a čísla jsou dále od sebe, žák nemá takovou oporu a může pro něj být náročnější poznat typ posloupnosti.

### 2.3.4 Postupně přičítám/odčítám

The diagram shows a table with two columns: 'počet rukou' (number of hands) and 'počet prstů' (number of fingers). To the left of the table are icons: a hand, a green pentagon, and a coin with the number 5. To the right of the table are multiplication equations showing the expansion of multiplication into addition of 5s.

·	počet rukou	počet prstů
	1	5
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	

$1 \cdot 5 = 5 = \underline{\quad}$   
 $2 \cdot 5 = 5 + 5 = \underline{\quad}$   
 $3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = \underline{\quad}$   
 $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\quad}$   
 $5 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\quad}$   
 $6 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \underline{\quad}$

Obrázek 2-8: H-mat – 2. ročník (2. díl), str. 68

#### Co rozvíjí

- Úloha představuje žákovi násobení pěti v různých rovinách: sémanticky – žák má 5 prstů na ruce, vidí dvě ruce, spočítá na nich prsty. Metodou postupného přičítání – žák chápe princip násobení, rozumí podstatě operace 1, 2, 3, ... krát 5. Formální zápis operace násobení – jak vypadá zapsaná úloha na násobení.
- Uspořádání úlohy umožňuje žákovi sledovat pravidelnosti a závislosti. Např. u postupného přičítání jsou čísla 5 pod sebou, stranou je jedno přebývající číslo 5, o které se zvětšuje výsledek.

#### Možné chyby


- Žák se dopustí chyby kalkulativního charakteru při počítání prstů po jednom. Vynechá prst, kterým ukazuje na ostatní.
- Žák zapíše špatný výsledek v důsledku chybně zafixovaného spoje. Dozvěděl se, že  $3 \cdot 5$  je 14, nezabýval se porozuměním a zapamatoval si tento vztah.

#### Gradační parametry

- Izomorfismus ve formě zadání. Žákovi předložíme další prostředí, v nichž jsou tyto vztahy a závislosti viditelné. Například násobilkovou tabulku.
- Obor čísel. Je rozšířen. Žák překonává hranici malé násobilky. Chápe, že např. číslo 55 je rovněž násobkem 5 (násobky 5 nekončí číslem 50).

### 2.3.5 Doplním tabulku závislostí

2 NA PARKOVIŠTI JE  AUT,  
 VOLANTŮ,  
 PŘEDNÍCH SVĚTEL.



AUT	5	4				8	9				
VOLANTŮ	5		1	2	7						
SVĚTEL	10							12	20		

Obrázek 2-9: H-mat – 1. ročník (3. díl), str. 115

#### Co rozvíjí

- Úloha podporuje orientaci v tabulce a v textovém zadání. Na základě tabulky žák vyvodí chybějící informace v textu, doplní správné číselné hodnoty.
- Žák pozoruje závislosti mezi daty v tabulce.
- Úloha vychází ze sémantické zkušenosti. Žák ví, jak vypadá auto, že každé má jeden volant a dvě přední světla. Dokáže si situaci představit, vizualizovat (i prostřednictvím modelu).

#### Možné chyby


- Žák považuje čísla 5, 4 (aut) za počátek číselné řady. V prvním řádku pak automaticky pokračuje čísla 3, 2, 1.
- Žák považuje čísla 8, 9 (aut) za pokračování číselné řady. Pokračuje čísla 10, 11, 12. Neuvědomí si, že číslo musí vyvodit z hodnot zadaných ve druhém (třetím) řádku.
- Žák se dopustí chyby kalkulativního charakteru, chybně násobí/dělí dvěma.

#### Gradační parametry

- Počet parametrů v tabulce. V tuto chvíli žáci vyvozují počet volantů a světel. Bylo by možné přidat další příslušenství auta s jinými závislostmi (např. počet sedadel).
- Velikost čísel. Bylo by možné pracovat v číselném oboru 0-20, případně provést přesah do velké násobilky.

**3** Dnes slaví narozeniny Matěj i jeho sestra Naďa.

Když se Naďa narodila, byly Matějovi  roky.  
Doplň čísla do tabulky.



Naďa	0	1	2	3	4	5	9				
Matěj				6			13				
dohromady							25				

Obrázek 2-10: H-mat – 2. ročník (3.díl), str. 89

**Co rozvíjí**

- Tato úloha je přímou průpravou na úlohu testovou. Podoba zadání (dvě části lístku odtržené od sebe, některá data mezi nimi chybí) je totožná s analyzovanou úlohou.
- Úloha spojuje reálnou situaci s evidencí dat do tabulky.
- Žák objevuje závislost jedné číselné řady na řadě druhé. Zároveň pozoruje posloupnost čísel, která vzniká součtem věku obou osob.
- Žák nemá zadaná data ze začátku tabulky, musí uchopit úlohu ze zadané struktury.

**Možné chyby**

- Žák si neuvědomí, že některá data chybí, a pokračuje v číselné řadě bez přerušení.
- Žák chybně interpretuje vztah mezi věkem Nadi a Matěje. Vidí čísla 3 a 6, vyvodí mezi nimi vztah krát 2 a ten uplatní i pro další čísla.
- Žák rozloží číslo 25 (součet let obou dětí) na dvě čísla, jejichž rozdíl nebude 3. Jeho pokračování pak bude chybné.

**Gradační parametry**

- Počet útržků. Pokud by žák dostal jeden lístek v kuse, bylo by pro něj řešení nejjednodušší. Naopak přidáním dalšího útržku se náročnost zvyšuje.
- Počátek číselné řady. Horní řádek (věk Nadi) by nemusel začít jejím narozením, ale později. Pokud by první člen nebyl znám, žák by jej musel objevit.
- Čísla v zadání. Druhý útržek začíná číslem 9 v prvním řádku. Pro řešení úlohy by stačilo mít zadané číslo 25 ve třetím řádku, což by bylo náročnější.

## 2.4 Shrnutí

Ze zjištěných údajů vyplývá, že s přesným typem úlohy, jako je testová, se žáci během studia v prvních dvou letech na ZŠ spíše nesetkají. Ve všech řadách učebnic lze v nějaké podobě objevit úlohy zaměřené na číselné řady, do kterých mají žáci doplnit chybějící číslo. V testové úloze však přibývá důležitý prvek závislosti (čísel ze spodního řádku na číslech z horního řádku), což pro většinu žáků představovalo nepřekonatelnou překážku.

K vybudování představ potřebných k úspěšnému vyřešení úlohy bych se zaměřila na práci se statistickými daty a tabulkou. Vzhledem k tomu, že ve 2. ročníku ZŠ se žáci učí násobilku, bylo by určitě možné (minimálně v rámci gradace různých slovních úloh) vést evidenci s využitím tabulky, kde by pak žáci určité závislosti objevovali. V neposlední řadě se podobné typy úloh objevují u přijímacích zkoušek na osmiletá gymnázia (typicky poslední úloha celého testu, ve které mají žáci za úkol s využitím zadané struktury zapsat  $n$ -tý člen posloupnosti). Tedy mimo povinný rozvoj matematické gramotnosti může být řešení takových úloh žákům nápomocné při snaze uspět v tomto snažení.

### 3 Charakteristika projektu

Projekt, v rámci něhož byla získána výzkumná data pro tuto diplomovou práci, nesl název *Inovace v pedagogice – Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí*.

Mezi řešitele patřila koordinátorka doc. PhDr. Irena Smetáčková, Ph.D. z katedry psychologie PedF UK a společně s ní pak cca 20 výzkumníků z kateder českého jazyka, psychologie a matematiky a didaktiky matematiky.

Cílem výzkumu bylo zjistit, jaké pedagogické intervence proti školní neúspěšnosti v matematice a českém jazyce na začátku 1. stupně ZŠ jsou účinné, a to v závislosti na učitelském pochopení příčin neúspěšnosti, na charakteristikách jednotlivých dětí a na podmínkách ve školní třídě.

Výzkum proběhl ve 30 třídách 1. stupně ZŠ po celých Čechách v období podzimu 2020 ve druhých ročnících až po červen 2022 ve třetích ročnících. Zapojeno bylo téměř 700 žáků na 22 školách. Testovaly se schopnosti, znalosti, dovednosti a postoje jednotlivých žáků. Prováděly se rozhovory s vyučujícími, pozorovala se výuka a byl sestaven dotazník pro rodiče.

„Kvůli covidové situaci bylo možné test zadat až v březnu daného školního roku; žáci tak byli tedy o půl roku starší, než projekt původně předpokládal. Žáci nicméně prožili více než půl roku v onlinové výuce, což vyvolalo větší důraz na kalkulační úlohy.“ (Slezáková & Jírotková, 2023, s. 1)

Děti vyplňovaly následující nástroje:

- dotazník hodnocení distanční výuky,
- dotazník postojů ve škole,
- didaktický test z českého jazyka,
- didaktický test z matematiky (ze kterého vychází téma této diplomové práce),
- kognitivní testy (zaměřené na logické myšlení, pozornost, paměť aj.).

Žáci většinou hodnotili aktivity jako zajímavé a zábavné.

Podle Slezákové & Jirotkové (2023) byly k jednotlivým úlohám zvoleny příslušné gradační parametry. V oblasti kalkulativních úloh se v článku zabývají jejich charakteristikou, diagnostickým potenciálem, sběrem a analýzou dat. Komentují vybrané výsledky, zkoumají chyby, jejich možné příčiny a uvádějí návrhy na reedukaci.

Dále uvádějí, že je možné využívat kalkulativní úlohy jako diagnostický nástroj numerických dovedností, které pak lze dále prohlubovat skrze řešení slovních úloh.

Ze závěru článku usuzuji, že matematické oblasti a různé typy úloh se prolínají. Pro učitele i žáka může být efektivní pracovat s příčinami chyb spíše než jen poukázat na jejich počet v testu. Pozitivně oceňuji, že autorky článku vyjadřují pochopení nad časovou náročností takových úkonů. Podporují učitele, aby se o ně pokoušeli alespoň jednou za čas, protože není možné je dělat neustále.

„Důležitá je také učitelem moderovaná diskuse žáků o různých postupech řešení. Učitel při ní zviditelní všechny zmíněné strategie, a tím ukáže, že neexistuje jediný postup, který vede ke správnému výsledku. Žáci pak mají příležitost si zvolit takový postup, který jim je kognitivně blízký, i když je z pohledu učitele „neohrabaný“. Tím dochází k hlubšímu porozumění vazbám mezi čísly.“ (Slezáková & Jirotková, 2023, s. 21)

## 4 Zpracování výzkumných dat – úloha pro 2. ročník 1. stupně ZŠ

Test pro 2. ročník zahrnoval 6 úloh, které byly dohromady ohodnoceny 100 body. Autoři úlohy nehodnotili bodově rovnoměrně, ale více bodů přidělovali za základní úlohy, jejichž zvládnutí žákem je považováno za elementární a nutné pro řešení dalších složitějších úloh. Bez zvládnutí kalkulativních úloh se nepředpokládalo bezchybné splnění např. slovních úloh. Ty tak byly hodnoceny nižším počtem bodů, aby žák za kalkulativní chyby, kterých by se mohl v obou případech dopustit, neztrácel body duplikovaně. Stejně tak se méně bodů udělovalo za náročnější úlohy vyžadující žákovu invenci a volbu vlastní strategie řešení, které často nejsou běžnou součástí učebnic matematiky na 1. stupni ZŠ. Takové bodové hodnocení autoři testu zvolili z důvodu předcházející online výuky během pandemie Covid-19. Očekávalo se, že kalkulativní úlohy byly předmětem častého procvičování i za domácí podpory rodičů, proto byla bodová škála přizpůsobena těmto vnějším okolnostem.

Znění úlohy podrobně analyzované v rámci této diplomové práce je následující:

### Úloha 3.

Petr si napsal na papír dvě řady čísel. Bratr mu některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.

1	2	3	4	5					11							17
1	3	5		9						23						

Obrázek 4-1: Zadání úlohy – 2. ročník

Za celou úlohu bylo možné získat maximálně 20 bodů. Jednotlivá pole nebyla hodnocena stejným počtem bodů. Více bodů přidělili autoři testu dle zvoleného obecného přístupu těm polím, která byla matematicky jednodušší na doplnění.

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-2: Zadání úlohy pro hodnotitele – 2. ročník



Pole	Správný výsledek	Počet bodů
3a	6	4
3b	10	2
3c	12	1
3d	15	1
3e	16	2
3f	7	3
3g	11	2
3h	19	1
3i	21	1
3j	29	1
3k	31	1
3l	33	1

Tabulka 4-1: Správné výsledky a bodování úlohy pro 2. ročník

Kromě polí určených k zápisu výsledků jsou ještě patrné prostory označené velkými tiskacími písmeny (3A, 3B, 3C, 3D). Při přepisu dat do tabulek sloužily k tomu, aby zapisovatelé mohli zaznamenat, zda si žák zapisoval nějaké mezivýpočty nebo si pomáhal doplňováním chybějících částí řad. Evidovány byly jakékoliv korekce (škrtání, gumování) a komentáře. Zvláštní poznámku obdržely nečitelné nebo nejasné zápisy výsledků.

V testech vyučující uváděli, zda daný žák pracoval s podporou asistenta pedagoga, jak byla podána instrukce k zadání testu a čas vypracování celého testu.

#### 4.1 Očekávání

Před prostudováním žákovských prací jsem se zamýšlela nad tím, jak by žáci mohli být úspěšní při řešení této úlohy, jaká skrývá úskalí a jakých chyb se žáci nejspíše budou dopouštět. K tomu mi dopomohl také rozbor úloh z různých řad učebnic matematiky v kapitole 2 této diplomové práce. V ní jsem uvažovala podobným způsobem s tím rozdílem, že jsem chybná řešení musela odhadovat sama.

Ze zkušenosti z praxí ve škole jsem soudila, že část žáků si nepřčetla zadání a pustila se rovnou do řešení úlohy. Sama jsem to touto cestou vyzkoušela a zjistila jsem, že to nevedlo k úspěchu. Do nevyplněné struktury jsem doplnila čísla, která jsem si myslela, že tam budou patřit. U třetí části jsem se pozastavila a přinutila se přečíst zadání, z něhož vyplývalo, že jsem své dosavadní pokusy založila na chybné úvaze.

Otevřeně přiznávám, že jsem si zadání musela přečíst 3x, než jsem pochopila, jak bude úloha fungovat. Ocenila bych, kdyby byl u úlohy k dispozici příklad, který by ukazoval, jak ji řešit

(čili dvě řady založené na jiné pravidelnosti, než která je předmětem řešení úlohy). Tento typ úloh je k nalezení pouze v některých řadách učebnic (H-mat, Fraus), které jsem před prvním pokusem o řešení této úlohy neměla příležitost si prostudovat natolik podrobně, abych v nich takové úlohy našla.

Z výše uvedené zkušenosti jsem soudila, že úloha může být žáky chybně vyřešena už jen z toho důvodu, že nesprávně interpretují její zadání (popřípadě si jej vůbec nepřečtou). To by ale spíše odkazovalo na nedostatečnou podporu čtenářské gramotnosti a rozboru slovních zadání než na sníženou úroveň matematických dovedností.

Když se nyní zaměřím pouze na chyby kalkulativního charakteru, které mohly nastat, očekávala jsem, že v polí 3a bude chybovost minimální. Jednalo se o pokračování základní rytmické číselné řady, se kterou by žáci 2. ročníku neměli mít problém. Obecně vyřešení celé první řady považuji za jednoduché pro žáky, myslela jsem, že větší úskalí nastane spíše při doplňování druhé řady. Ne nutně u polí 3f a 3g, ale spíše u polí 3h a 3i. Sama jsem totiž úlohu nepřijala jako dvě číselné řady, ale soustředila jsem se na jednotlivé útržky. Tedy soudím, že v polích 3h a 3i se budou objevovat řešení 21 a 22, která kopírují rytmus (již dříve doplněných) polí 3b a 3c s rozdílem čísel 1. Já osobně jsem měla tendenci pokračovat v nahore započaté řadě, tedy do polí 3h a 3i doplnit čísla 13 a 14 (jako pokračování 10, 11, 12). Posléze mě zarazilo číslo 23 a hledala jsem, kde nastala chyba (jeden z prvních faktorů, který mě přivedl k podrobnému prostudování zadání).

Největší chybovost jsem předpokládala u polí 3j, 3k a 3l. Osobně si myslím, že pro žáky 2. ročníku je tato část úlohy téměř neřešitelná, a to zejména v období po distanční výuce, která nutně negativně ovlivnila kvalitu výuky. Pro žáky musí být velmi náročné nejen si představit, zhruba v jakém rozsahu čísel se mají nacházet (čili kolik čísel bylo roztržením lístku přeskočeno), ale zároveň udržet v hlavě nutnost zachování rytmu číselné řady obsahující lichá čísla. Hádala jsem, že budou navazovat na první řadu a budou se objevovat řešení 18, 19, 20.

## 4.2 Procentuální úspěšnost a chybovost žáků při řešení úlohy

Počet žáků, kteří psali test	Počet žáků, kteří chyběli	Účast
632	41	93,91 %

Tabulka 4-2: Účast při testu pro 2. ročník

Žáci, kteří všechna pole vyplnili správně	Žáci, kteří chybovali v některém z polí nebo některá pole nevyplnili	Žáci, kteří úlohu neřešili
25	581	24
3,96 %	91,93 %	3,80 %

Tabulka 4-3: Celková úspěšnost v úloze pro 2. ročník

Pole	Počet žáků, kteří pole vyplnili správně	Procentuální úspěšnost
3a	582	92,09 %
3b	444	70,25 %
3c	457	72,31 %
3d	418	66,14 %
3e	435	68,83 %
3f	281	44,46 %
3g	343	54,27 %
3h	145	22,94 %
3i	148	23,42 %
3j	36	5,70 %
3k	37	5,85 %
3l	38	6,01 %

Tabulka 4-4: Úspěšnost v jednotlivých polích v úloze pro 2. ročník

### 4.3 Zkoumání žákovských řešení

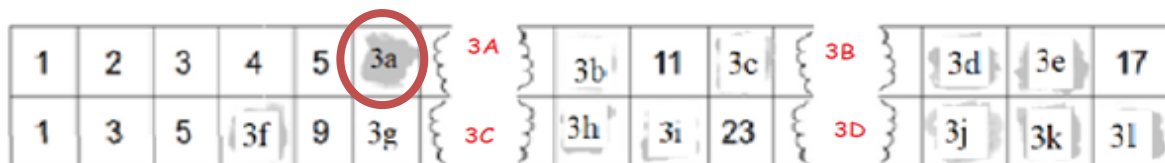
V tomto oddílu se zabývám typologií chyb v jednotlivých polích úlohy. Uvádím, kolik celkem žáků při vyplňování pole chybovalo, kolik jich pole nevyplnilo a která chybná řešení se objevovala nejčastěji. V samostatné tabulce se nacházejí i řídce se vyskytující chybná řešení, která jsou ze statistického hlediska méně významná, aby byl soubor žákovských chyb kompletní.

Komentář rozboru je rozdělen na část *Interpretace* (proč asi nastala daná chyba) a *Reedukace* (jak předejít tomu, aby se podobná chyba opakovala).

#### **Příklad**

*Interpretace 7a* znamená první možné odůvodnění chybně uvedeného čísla 7 v poli, *7b* pak druhé možné odůvodnění; *Reedukace 7a* odkazuje na možnou nápravu k *Interpretaci 7a*, *Reedukace 7b* pak na možnou nápravu k *Interpretaci 7b*.

### 4.3.1 Řešení v poli 3a



Obrázek 4-3: 3a – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
20	28
3,17 %	4,43 %

Tabulka 4-5: Podíl chybných řešení 3a – 2. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
7	10x	50 %

Tabulka 4-6: Nejčastější chybná řešení 3a – 2. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
8; 9	3x	15 %
10	2x	10 %
3; 4	1x	5 %

Tabulka 4-7: Ostatní chybná řešení 3a – 2. ročník

### Interpretace: 7

3a						3b			3c		
1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	17	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	

*Handwritten notes: In 3a, the number 7 in the top row is circled in red. In 3b, there are blue handwritten numbers 125 and 7927 below the grid. In 3c, there are blue handwritten numbers 20 and 24 below the grid.*

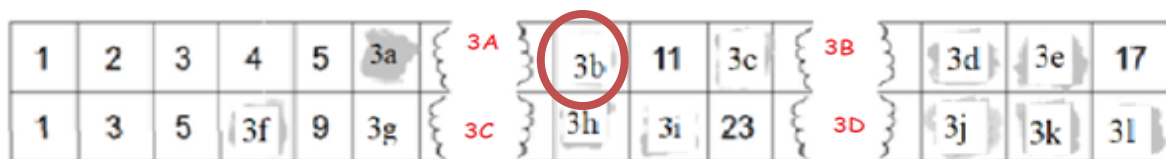
Obrázek 4-4: 3a, chyba „7“ – 2. r.

V poli 3a se téměř nechybovalo. 10x výskyt čísla 7 připisují tomu, že děti vycházely z druhé řady lichých čísel, mezi kterými je rozdíl 2. Tento rozdíl zapsaly také do první řady (po 5 následuje 7), dále s ním v mnohých případech pokračovaly i v polích 3b a 3c (9, 13).

### Reedukace: 7

Chybu bych ošetřila tím způsobem, že bych žákům prezentovala pouze horní číselnou řadu – čili provedla bych simplifikaci celé úlohy. Bez napojení na spodní řadu, ve které platí odlišná pravidla, by se pak podobná chyba nejspíše vůbec nevyskytla.

### 4.3.2 Řešení v poli 3b



Obrázek 4-5: 3b – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
133	53
21,04 %	8,39 %

Tabulka 4-8: Podíl chybných řešení 3b – 2. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
8	42x	31,58 %
9	41x	30,83 %
7	20x	15,04 %
12	8x	6,02 %
13	6x	4,51 %

Tabulka 4-9: Nejčastější chybná řešení 3b – 2. ročník

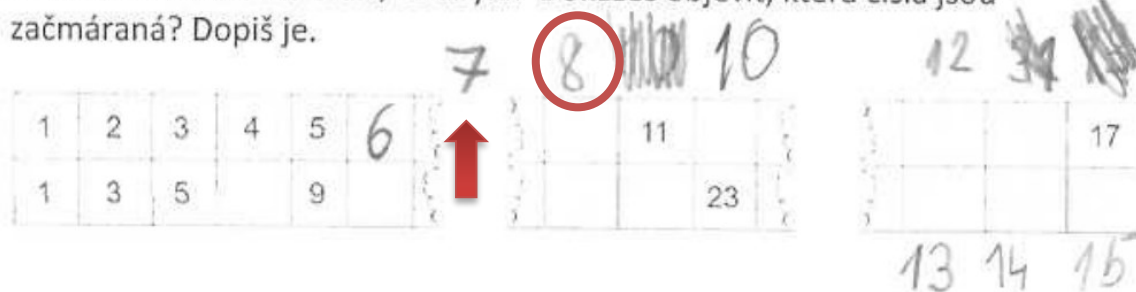
#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
1	4x	3,01 %
5; 11; 16; 21	2x	1,50 %
0; 2; 3; 25	1x	0,75 %

Tabulka 4-10: Ostatní chybná řešení 3b – 2. ročník

### Interpretace: 8

Petr si napsal na papír dvě řady čísel. Bratr mu některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.



Obrázek 4-6: 3b, chyba „8“ – 2. r.

Číslo 8 se vyskytuje, jelikož dítě považuje mezeru mezi lístky za jedno chybějící číslo (7) a dále pokračuje v řadě číslem 8.

Tento typ chyb nepřisuzuji tomu, že by měl žák potíže s vnímáním pravidelností v číselných řadách. Podle mého názoru má spíše formální charakter a zmizí s jinou prezentací zadání. Naopak je třeba ocenit, že žáci, kteří se podobné chyby dopustili, jistým způsobem dokázali pracovat se zadáním „komplexně“ – vnímali jeho umístění v prostoru, který využili jako součást řešení.

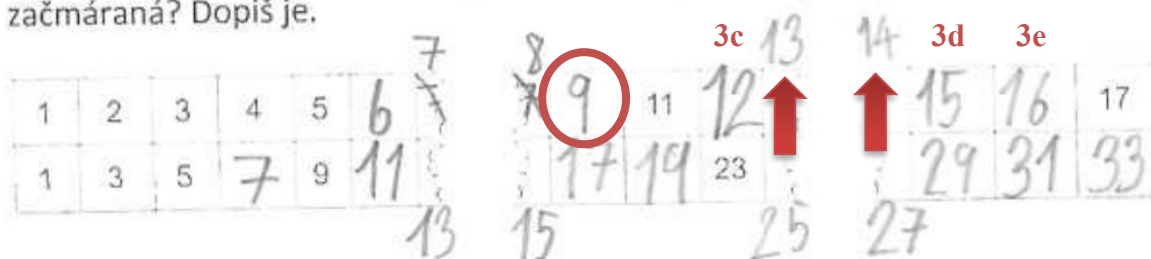
### Reedukace: 8

Chybě založené na tomto mechanismu by bylo možné předejít, pokud by žák obdržel lístky vystřižené (případně se zarovnanými okraji). V tu chvíli se mezeru upravuje jen prostou manipulací s lístkem a žák ji možná nepoužije jako vodítko pro doplnění pole.



### Interpretace: 9

Petr si napsal na papír dvě řady čísel. Bratr mu některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.



Obrázek 4-7: 3b, chyba „9“ – 2. r.

Z uvedeného řešení vyplývá, že číslo 9 vznikne jako pokračování řady 6, 7, 8, 9, kdy žák považuje otrhané okraje za prostor pro vložení čísel. V žákovi poté nenastává rozpor. Číslo 12 v poli 3c je pokračováním číselné řady (následuje po 11). Žákovi se ale zároveň objevuje nový vztah:  $9 - 11$  (s rozdílem 2). Nevšímá si jej a pokračuje v číselné řadě s rozdílem 1.

V tomto řešení je možné si povšimnout, že pro doplnění polí 3d a 3e funguje strategie zapsání čísel na otrhané okraje (žák si zapsal 13 a 14). Ta pak může ovlivnit řešení zbývajících částí úlohy.

### Reedukace: 9

Podobně jako při předchozí reedukaci bych vyzkoušela předložit žákům jinou formu zadání (vystřižené lístky, zarovnané okraje nebo tabulku). Chybu zde považuji za formální – nesouvisí s žakovou kalkulativní dovedností.

**Interpretace: 7**

1	2	3	4	5	6
1	3	5	7	9	11

7	11	15
13	15	23

11	15	17
31	39	47

Obrázek 4-8 3b, chyba „7“ – 2. r.

Číslo 7 se vyskytuje jako pokračování řady z prvního útržku (1, 2, 3, 4, 5, 6  $\rightarrow$  7).

**Reedukace: 7**

Žákům vysvětlíme, že kus řady chybí, jelikož byl odtržen. Při dalším doplňování se musíme řídit čísly, která jsou na daném útržku zadána. Další čísla kolem doplníme na základě znalosti pravidla, které vyvodíme ze začátku číselné řady.

### 4.3.3 Řešení v poli 3c

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-9: 3c – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
116	57
18,35 %	9,02 %

Tabulka 4-11: Podíl chybných řešení 3c – 2. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
13	41x	35,35 %
14	32x	27,59 %
15	8x	6,90 %

Tabulka 4-12: Nejčastější chybná řešení 3c – 2. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
8	4x	3,45 %
1; 10; 16; 22	3x	2,59 %
2; 6; 9; 17; 20; 21	2x	1,72 %
3; 4; 23; 24; 25; 26; 32	1x	0,86 %

Tabulka 4-13: Ostatní chybná řešení 3c – 2. ročník

### Interpretace: 13

**3b**

1	2	3	4	5	7	
1	3	5	7	9	11	13

9	11	13
13	15	17

~~125 17~~  
79 27

13	15	17
25	27	29

Obrázek 4-10: 3c, chyba „13“ – 2. r.

Číslo 13 pokračuje v logické návaznosti na číslo 9 v poli 3b (9, 11, 13 v první řadě druhého útržku).

### Reedukace: 13

Reedukaci musíme spojit s nápravou chyby v poli 3b. Je třeba žákům vysvětlit, že řadu doplňujeme dle pravidla, které vyčteme z jejích prvních pěti členů (1, 2, 3, 4, 5). Dbáme na to, aby pravidlo bylo zachováno po celou řadu. Kontrolujeme jej u každých dvou členů.

**Interpretace: 14**

1	2	3	4	5	6
1	3	5	7	9	11

**3b**

8	11	14
15	19	23

7	72	17
12	78	24

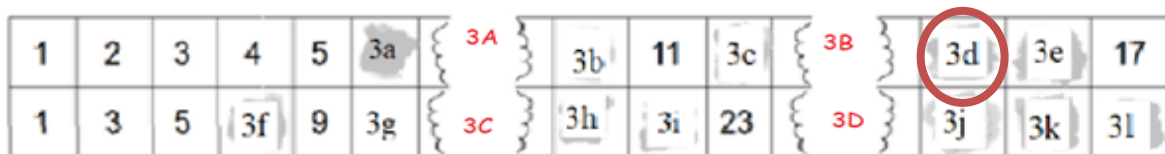
*Obrázek 4-11: 3c, chyba „14“ – 2. r.*

Číslo 14 navazuje na číslo 8 v poli 3b. Dítě doplní číslo 8 a vidí, že následuje číslo 11. Rozdíl mezi těmito čísly je 3, tím pádem vytvoří stejný rozdíl mezi 11 a následujícím číslem – tedy zapíše 14.

**Reedukace: 14**

Podobně jako v případě doplňování pole 3b žáky upozorníme, že neřeší útržky lístků jako samostatné celky, nýbrž se musí zaměřit na pravidelnost ve dvou řadách, které jsou ale nějakým způsobem fyzicky oddělené. To znamená, že umístění čísel do polí 3b a 3c musí nějak navazovat na charakter řady 1, 2, 3, 4, 5.

#### 4.3.4 Řešení v poli 3d



Obrázek 4-12: 3d – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
131	81
20,73 %	12,82 %

Tabulka 4-14: Podíl chybných řešení 3d – 2. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
13	33x	25,19 %
14	18x	13,74 %
11	12x	9,16 %
16	10x	7,63 %
19	10x	7,63 %
12	8x	6,11 %
9	6x	4,58 %
21	6x	4,58 %

Tabulka 4-15: Nejčastější chybná řešení 3d – 2. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
5	4x	3,05 %
1; 2; 8; 20	3x	2,29 %
3; 7; 10; 17	2x	1,53 %
14,15; 18; 23; 24	1x	0,76 %

Tabulka 4-16: Ostatní chybná řešení 3d – 2. ročník

Chybná řešení v tomto poli ve velké míře závisí na strategii, kterou žáci použili při vyplňování předchozích polí.

**Interpretace: 13a**

The image shows a handwritten number sequence grid with two rows and 13 columns. The numbers are written in blue ink. A red circle highlights the number '13' in the second row, and a red arrow points to it from the right. The grid contains the following numbers:

1	2	3	4	5	6		10	11	12		13	14	17
1	3	5	7	9	11	13	17	19	23		29	27	28

Obrázek 4-13: 3d, chyba „13a“ – 2. r.

Číslo 13 navazuje v řadě na číslo 12 z předchozího útržku.

**Reedukace: 13a**

Dítě si neuvědomí, že se z řady některá čísla ztratila ani že na čísla 13, 14 nenavazuje zadané číslo 17. Na toto je potřeba při nápravě poukázat. Pokud to učitel udělá, lze očekávat, že žák se opraví a bude postupovat „odzadu“ (doplní čísla předcházející číslu 17).

### Interpretace: 13b

1	2	3	4	5	7
1	3	5	7	9	17

13

9	11	13
13	15	23

13 15  
12 5 17  
19 27

13	15	17
25	27	29

13 15 17  
25 27 29

Obrázek 4-14: 3d, chyba „13b“ – 2. r.

Jiným důvodem, proč dítě doplňuje kombinaci čísel 13, 15 do polí 3d, 3e, je, že má stále fixována lichá čísla z druhé řady, resp. z předchozího chybného doplnění polí 3b a 3c. Na tato čísla (13, 15) mu navíc správně navazuje zadané číslo 17, takže žákovo řešení se na první pohled jeví bezchybně.

### Reedukace: 13b

Při reedukaci je potřeba se znovu podívat na celou řadu od začátku jako na celek. Žák nahlas popíše objevenou pravidelnost mezi čísly a dohlédne na to, aby tato pravidelnost byla zachována mezi všemi členy číselné řady. Je zjevné, že chyba zde souvisí už s předchozími vyplněnými poli, nelze tedy v tuto chvíli řešit nápravu jednoho pole samostatně.



**Interpretace: 14**

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	6	9	10	

8	11	12	
12	13	23	

3B

14	15	17
25	26	27

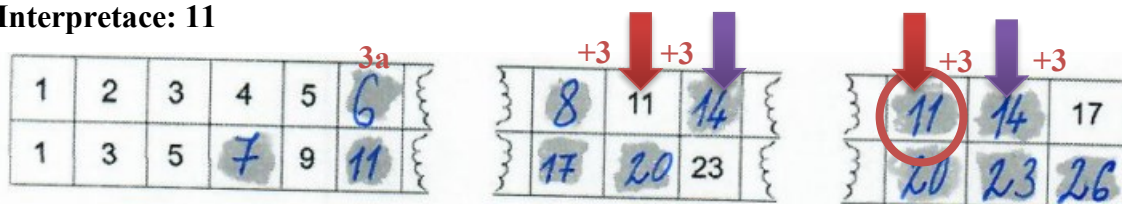
Obrázek 4-15: 3d, chyba „14“ – 2. r.

Číslo 14 navazuje v řadě na číslo 12 s tím, že si dítě uvědomuje, že některá čísla v řadě chybí, ale nevyužívá informace z pole s číslem 17 o tom, kolik těch chybějících čísel je (jsou dvě, ne pouze jedno).

**Reedukace: 14**

Tato chyba opět může souviset se způsobem zadání, kdy prostor 3B navádí žáka myslet si, že zde chybí právě jedno číslo.

### Interpretace: 11



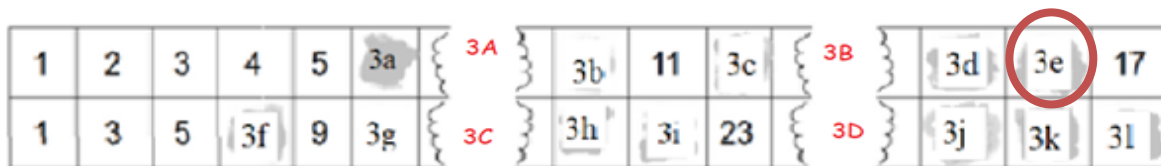
Obrázek 4-16: 3d, chyba „11“ – 2. r.

S číslem 11 žák využívá informace ze sekvence 8, 11, 14. Stejný rozdíl 3 se snaží uplatnit i v dalším útržku a tvoří řadu 11, 14, 17.

### Reedukace: 11

Upozorníme žáky, že zde už výsledná řada ztrácí jakoukoliv návaznost na předchozí útržky. Najednou využívá opakovaných čísel (11, 14), což je v rozporu s jejím dosavadním průběhem. Soustředíme se na znovuobjevení pravidla, na základě kterého je řada vytvořena. Odkážeme se na pole 3a a najdeme chyby v následujících polích.

### 4.3.5 Řešení v poli 3e



Obrázek 4-17: 3e – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
113	82
17,88 %	12,98 %

Tabulka 4-17: Podíl chybných řešení 3e – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>15</b>	<b>38x</b>	<b>33,63 %</b>
<b>14</b>	<b>17x</b>	<b>15,04 %</b>
<b>18</b>	<b>11x</b>	<b>9,74 %</b>
13	7x	6,20 %

Tabulka 4-18: Nejčastější chybná řešení 3d – 2. ročník

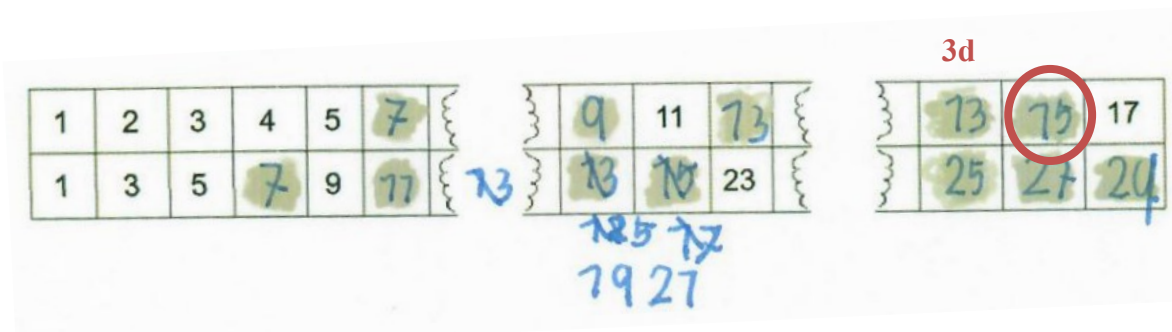
### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
1; 10; 12	4x	3,54 %
6; 22	3x	2,66 %
0; 2; 9; 19; 20; 23; 26	2x	1,77 %
3; 4; 5; 11; 16,5; 17; 24; 25	1x	0,89 %

Tabulka 4-19: Ostatní chybná řešení 3d – 2. ročník

Řešení doplněná v poli 3e navazovala na myšlenku či strategii aplikovanou v poli 3d. Neuvádím tedy reedukační strategie k jednotlivým polím, ty by totiž kopírovaly již výše zmíněné.

**Interpretace: 15a**



Obrázek 4-18: 3e, chyba „15a“ – 2. r.

Číslo 15 navazuje na číslo 13 z pole 3d. Žák vytváří řadu 13, 15, 17.

**Interpretace: 15b**



Obrázek 4-19: 3e, chyba „15b“ – 2. r.

Občas navazuje číslo 15 na číslo 14, čímž žák pokračuje v klasické číselné řadě.

**Interpretace: 14a**

1	2	3	4	5	6			10	11	12		13	14	17
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	23		25	27	28

Obrázek 4-20: 3e, chyba „14a“ – 2. r.

Číslo 14 navazuje na číslo 13 z pole 3d a žák pokračuje v číselné řadě.

**Interpretace: 14b**

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	7	9	11	

+3    +3

8	11	14	
17	20	23	

3d

11	14	17
20	23	26

Obrázek 4-21: 3e, chyba „14b“ – 2. r.

Číslo 14 navazuje na číslo 11 z pole 3d (žák uplatňuje stejný rozdíl mezi čísly, jako je mezi 8, 11, 14).

## Interpretace: 18

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	7	9	11	

10	11	12	
14	23	23	

19	18	17
14	15	16

Obrázek 4-22: 3e, chyba „18“ – 2. r.

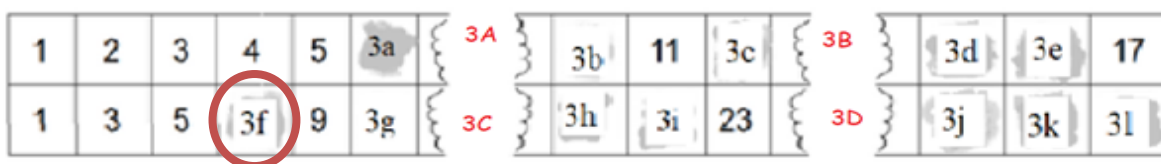
Číslo 18 se objevuje v různých kontextech. Někde žák vytváří vlastní symetrii (17, 18, 17), jinde číselnou řadu od větších čísel k menším (19, 18, 17).

Právě u polí 3d a 3e je zajímavé pozorovat, že se žáci v některých případech zcela odpoutávají od předchozích řad a zákonitostí. Je to patrné na příkladech 17, 18, 17, což je část řady nepochybně rytmicky založená (střídání dvou čísel).

Řada 19, 18, 17 je zase sestupná, nicméně dodržuje alespoň rozdíl čísel 1 z prvního útržku.

Žáci mohli vnímat jednotlivé útržky jako samostatné celky. Pro ty, kteří tak učinili, se situace s posledním útržkem stala rádo by bezvýhodnou, protože s jediným zadaným číslem 17 nemohli objevit žádnou zákonitost, žádný vztah mezi dvěma čísly (na rozdíl od druhého útržku, kde se nachází dvě čísla 11 a 23). To je právě mohlo vést k vytváření vlastních struktur.

### 4.3.6 Řešení v poli 3f



Obrázek 4-23: 3f – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
210	39
33,23 %	6,17 %

Tabulka 4-20: Podíl chybných řešení 3f – 2. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
6	102x	48,57 %
8	55x	26,19 %
4	29x	13,81 %
2	17x	8,10 %

Tabulka 4-21: Nejčastější chybná řešení 3f – 2. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
5	4x	1,91 %
27; 78; 678	1x	0,48 %

Tabulka 4-22: Ostatní chybná řešení 3f – 2. ročník

### Interpretace: 6

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	6	9	10	

+1

10	11	12	
21	22	23	

15	16	17	
18	19	20	

Obrázek 4-24: 3f. chyba „6“ – 2. r.

Číslo 6 žák doplňuje, jelikož si neuvědomuje zákonitost po sobě jdoucích lichých čísel. Podívá se na poslední číslo před prázdným polem (5) a pokračuje v řadě.

### Reedukace: 6

V rámci reedukace bych se pokusila žákům představit několik číselných řad založených na podobném principu (rozdíly čísel různé od 1). Ve chvíli, kdy je odpoutáme od prvního řádku zadání, uvědomí si, že mezi čísly mohou existovat různé vztahy. Když se vrátíme k naší původní řadě, budou moci vypořádat, že řada začíná čísly 1, 3, 5, čili potřebná zákonitost je rozdíl o 2 ve vzestupné řadě.



### Interpretace: 8

1	2	3	4	5	6
1	3	5	<del>8</del>	9	<del>4</del>

8      10

10	11	12
21	22	23

15	18	17
24	25	26

Obrázek 4-25: 3f. chyba „8“ – 2. r.

Číslo 8 žák doplňuje s podobnou logikou jako číslo 6, v tomto případě ale pozoruje číslo 9 a doplňuje číslo předcházející, což je právě 8.

### Reedukace: 8

Při analýze tohoto pole mě napadá, že může být velmi poučné zjistit, kteří žáci se orientují dle čísel předcházejících a kteří dle čísel následujících. Strategie se mohou lišit, což vede k pestřejší škále (chybných) výsledků. Při zjištění žákem zvolené strategie mu nabídneme strategii opačnou, aby získal komplexní pohled na úlohu. Obecně se pak volba tohoto typu strategií může uplatňovat i napříč předměty nebo ve schopnosti učit se, číst text a porozumět jeho obsahu.

### Interpretace: 4

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	4	9	2	

10	11	12	
21	22	23	

15	16	17	
18	19	20	

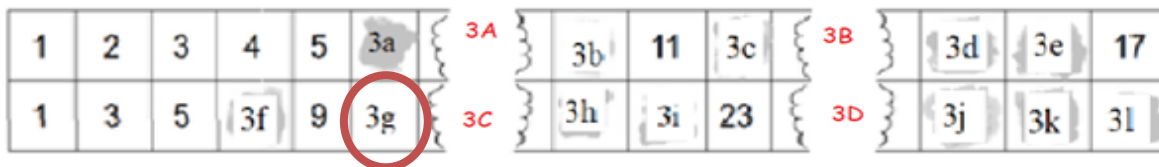
Obrázek 4-26: 3f. chyba „4“ – 2. r.

Číslo 4 se vyskytlo častěji než číslo 2, ale s obdobnou logikou. Žákovi v řadě lichých čísel některá „chybí“ (právě sudá), tím pádem je doplní do nejbližšího volného pole (2, 4 se objevovalo i v kombinaci).

### Reedukace: 4

Nabídneme žákovi různé číselné řady a vybědneme jej k pokračování. Žádáme objevení pravidla, podle kterého jsou řady vytvořeny. Zdůrazníme, že řada z této úlohy funguje stejně – již je vytvořena a existuje pravidlo, jak po sobě čísla následují. Pravidlo objevíme, když se podíváme na začátek zadané řady. Pravidelnost, která platí mezi jejími prvními členy, musí platit i mezi členy dalšími.

### 4.3.7 Řešení v poli 3g



Obrázek 4-27: 3g – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
245	42
38,77 %	6,65 %

Tabulka 4-23: Podíl chybných řešení 3g – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>10</b>	<b>162x</b>	<b>66,12 %</b>
<b>12</b>	<b>23x</b>	<b>9,39 %</b>
<b>8</b>	<b>18x</b>	<b>7,35 %</b>
4	12x	4,90 %
7	10x	4,08 %

Tabulka 4-24: Nejčastější chybná řešení 3g – 2. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
2	5x	2,04 %
6	4x	1,63 %
13	3x	1,22 %
9; 14	2x	0,81 %
1; 5; 17; 26	1x	0,41 %

Tabulka 4-25: Ostatní chybná řešení 3g – 2. ročník

### Interpretace: 10

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	6	9	10	
		+1		+1		

10	11	12	
21	22	23	

15	16	17	
18	19	20	

Obrázek 4-28: 3g, chyba „10“ – 2. r.

Číslo 10 se objevuje se stejnou logikou jako číslo 6 v poli 3f. Žák vidí číslo 9 a pokračuje v řadě.

### Reedukace: 10

Můžeme se žákem provést simplifikaci a zadat mu pouze spodní řádek úlohy. Bez návaznosti na horní řádek objeví samostatné pravidlo pro doplňování členů posloupnosti. Vychází totiž z čísel 1, 3, 5 – řada lichých čísel.

### Interpretace: 12

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	6	9	12	

+3 +3

	8	11	10	
	15	18	23	

12	14	17
26	29	32

Obrázek 4-29: 3g, chyba „12“ – 2. r.

Číslo 12 žák doplní, když do pole 3f vložil číslo 6 a uvědomil si rozdíl, který se tím vytvořil mezi poli s čísly 6 a 9 – rozdíl 3. Tento rozdíl uplatní také u dalších polí – 9 a 12.

### Reedukace: 12

Při této použité strategii by bylo vhodné se žáky rozebrat, jaká je v řadě pravidelnost. Následně pak ověřit, že zákonitost platí pro všechny členy uvedené posloupnosti. Při takové kontrole by žák sám měl dojít k závěru, že tato řada není pravidelná a mění se vztahy mezi jejími členy.

### Interpretace: 8a

1	2	3	4	5	6	
1	3	5	4	9	8	

3f

10	11	12	
21	22	23	

15	16	17
18	19	20

Obrázek 4-30: 3g, chyba „8a“ – 2. r.

Číslo 8 se objevuje v kombinaci s číslem 4 v poli 3f – žák doplňuje chybějící sudá čísla v řadě a uvědomuje si, že už jednou udělal „krok zpět“ (5, 4), tak ho nyní dělá znovu (9, 8).

### Reedukace: 8a

Pokud by některý z mých žáků doplňoval tímto způsobem do řady sudá čísla, zkusila bych se vrátit k úplnému základu. Nechala bych žáka pracovat s rytmickými řadami barev/obrázků, než by se opětovně vrátil k abstraktním číslům. Připadá mi totiž, že v tomto případě chybí elementární porozumění principu této úlohy. Žáci, kteří doplňovali čísla 6 a 10, respektive 6 a 12, naproti tomu vnímají, že mezi dosavadními členy řady existovaly nějaké vztahy. Snaží se je v řadě ponechat/aplikovat na její další členy, byť právě v těchto případech chybně.

### Interpretace: 8b

1	2	3	4	5	6
1	3	5	7	9	8

**3f**                      **3g**

10	11	12
		23

15	16	17
18	19	20

Obrázek 4-31: 3g, chyba „8b“ – 2. r.

Číslo 8 se často objevovalo ve spojení s číslem 7 v poli 3f. Je možné, že žák má zde fixovanou „triádu“ 7, 8, 9 z číselné řady. Zde vidí pouze dvě z těchto tří čísel (7, 9) a doplňuje číslo třetí (8).

Žákovy spoje jsou podobné jako v případě doplnění dvojice čísel 4, 2 do polí 3f a 3g. Zná nějakou podobu číselné řady a snaží se ji za každou cenu implementovat do úlohy.

### Reedukace: 8b

V tomto případě vnímám malou zkušenosti žáka s číselnými posloupnostmi. Vypadá to, jako by byl fixován na základní číselnou řadu. Přitom u žáků může docházet k rozvoji cítění pro pravidla posloupností již od 1. ročníku, kdy jsou schopni odříkat např. číselnou řadu po dvou (čili násobky 2).

Žákovi bych zadala začátky různých číselných řad, požádala jej o objevení pravidel a doplnění dalších členů. Poté bychom se vrátili k této úloze a aplikovali bychom získané zkušenosti.

### 4.3.8 Řešení v poli 3h

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-32: 3h – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
412	73
65,19 %	11,55 %

Tabulka 4-26: Podíl chybných řešení 3h – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
21	215x	52,18 %
13	42x	10,19 %
17	39x	9,47 %
15	24x	5,83 %
12	14x	3,40 %
20	12x	2,91 %
14	11x	2,67 %
11	9x	2,18 %
9	8x	1,94 %
25	6x	1,46 %

Tabulka 4-27: Nejčastější chybná řešení 3h – 2. ročník



1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-33: 3h – 2. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
10	5x	1,21 %
2; 16; 18	4x	0,97 %
1; 6	3x	0,73 %
5; 22	2x	0,49 %
3; 4; 8; 23; 24	1x	0,24 %

Tabulka 4-28: Ostatní chybná řešení 3h – 2. ročník

### Interpretace: 21

1	2	3	4	5	6
1	3	5	4	9	2

10	11	12
21	22	23

15	16	17
18	19	20

Obrázek 4-34: 3h, chyba „21“ – 2. r.

Žák si neuvědomuje, že druhý řádek je pokračující řadou lichých čísel a doplňuje klasickou číselnou řadu – 21, 22, 23. Na to může mít vliv řešení útržků jako celku – žák se inspirovuje čísly 10, 11, 12, která vyřešil v předchozím kroku.

### Interpretace: 13

1	2	3	4	5	6
1	3	5	6	9	2

10	11	12
13	14	23

21	16	17
18	19	20

3h 3i

Obrázek 4-35: 3h, chyba „13“ – 2. r.

S číslem 13 žák řeší útržek jako celek. Pokračuje v řadě 10, 11, 12 → 13, 14 v polích 3h a 3i.

### Interpretace: 17

1	2	3	4	5	6
1	3	5	7	9	11

8	11	14
17	20	23

13	15	17
19	21	23

Obrázek 4-36: 3h, chyba „17“ – 2. r.

Číslo 17 doplňují nejčastěji žáci, kteří mají v prvním řádku na druhém útržku sekvenci 8, 11, 14. Uvědomují si rozdíl 3 mezi těmito čísly a uplatňují jej i o řádek níže – 17, 20, 23.

### **Reedukace: 21, 13 a 17**

Důvodem pro tyto chyby mohlo být špatné (nebo žádné) přečtení zadání, na které žáky upozorníme. Sama jsem při řešení úlohy nejprve zadání nečetla a měla jsem tendenci také řešit útržky samostatně.

Chápaní vztahů mezi čísly na jisté úrovni u těchto žáků funguje, nicméně je tentokrát neaplikovali správně. Vysvětlíme, že útržky netvoří samostatné celky, ale patřily původně k sobě, jednalo se o dvě číselné řady. Může pomoci jiná forma zadání (např. tabulka na tabuli).

### 4.3.9 Řešení v poli 3i

Obrázek 4-37: 3i – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
404	78
63,92 %	12,34 %

Tabulka 4-29: Podíl chybných řešení 3i – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
22	228x	56,44 %
20	40x	9,90 %
14	19x	4,70 %
15	15x	3,71 %
19	14x	3,47 %
18	13x	3,22 %
12	12x	2,97 %
13	12x	2,97 %
17	11x	2,72 %
24	8x	1,98 %
1	6x	1,49 %

Tabulka 4-30: Nejčastější chybná řešení 3i – 2. ročník

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-38: 3i – 2. ročník

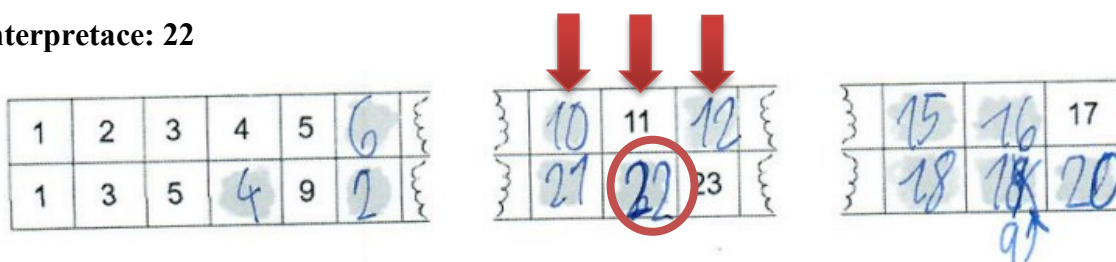
### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
10; 16	4x	0,99 %
5; 7	3x	0,74 %
4; 11	2x	0,50 %
2; 3; 8; 23; 26; 32; 75; 1921	1x	0,25 %

Tabulka 4-31: Ostatní chybná řešení 3i – 2. ročník

Stejně jako v případě předchozích útržků i zde výsledek v poli 3i úzce souvisí s číslem v poli 3h. Sledujeme, že žáci mají cit pro zákonitost mezi čísly, umí je vytvářet, i když zde právě nejsou správným řešením. Myslím si, že minimálně toto je dobrý základ a ukázka toho, že žáci provedli nějaké zamyšlení.

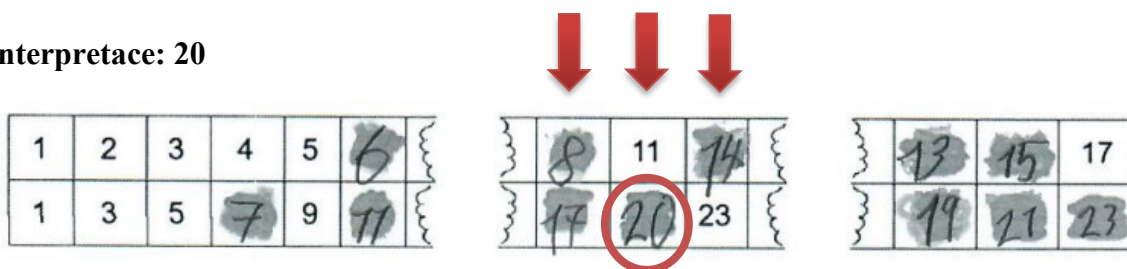
**Interpretace: 22**



Obrázek 4-39: 3i, chyba „22“ – 2. r.

Číslo 22 navazuje na číslo 21 a vytváří řadu 21, 22, 23.

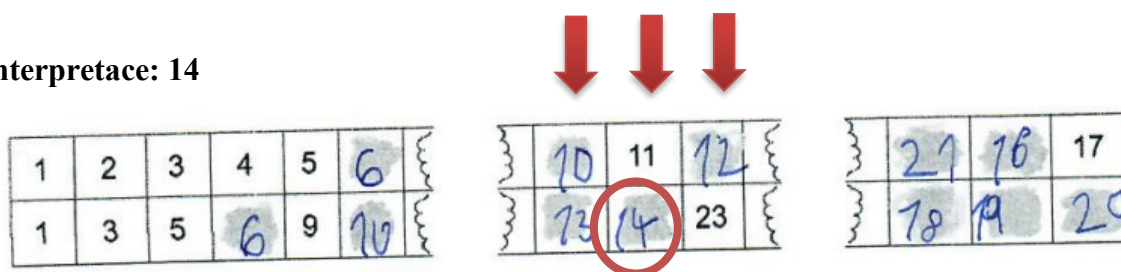
**Interpretace: 20**



Obrázek 4-40: 3i, chyba „20“ – 2. r.

Číslo 20 navazuje na číslo 17 a vytváří řadu 17, 20, 23.

**Interpretace: 14**



Obrázek 4-41: 3i, chyba „14“ – 2. r.

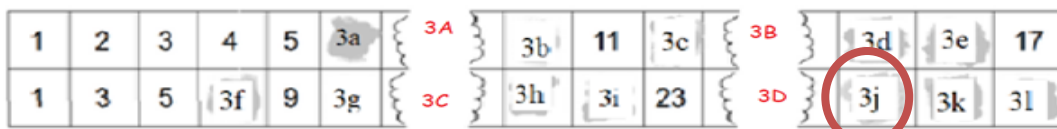
Číslo 14 navazuje na číslo 13 a vytváří řadu v rámci jednoho útržku 10, 11, 12, 13, 14.

**Reedukace: 22, 20 a 14**

Reedukace je v tomto případě stejná jako u předchozího pole, a to z důvodu, že žáci pokračovali ve zvolené strategii.

Upozorníme žáka na nutnost pečlivého přečtení zadání. Zdůrazníme, že úloha je tvořena dvěma řadami, ve kterých platí dvě různá pravidla pro doplnění. Je tedy třeba doplňovat čísla tak, aby tato pravidla zůstala zachována.

### 4.3.10 Řešení v poli 3j



Obrázek 4-42: 3j – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
490	106
77,53 %	16,78 %

Tabulka 4-32: Podíl chybných řešení 3j – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>18</b>	<b>143x</b>	<b>29,18 %</b>
<b>25</b>	<b>79x</b>	<b>16,12 %</b>
<b>24</b>	<b>49x</b>	<b>10,00 %</b>
31	35x	7,14 %
27	21x	4,29 %
26	20x	4,08 %
20	19x	3,88 %
19	15x	3,06 %
14	11x	2,25 %
16	11x	2,25 %
30	10x	2,04 %
15	9x	1,84 %
1	8x	1,63 %
13	7x	1,43 %
12	6x	1,22 %
17	6x	1,22 %
21	6x	1,22 %

Tabulka 4-33: Nejčastější chybná řešení 3j – 2. ročník



1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g		3C	3h	3i		23	3D	3j

Obrázek 4-43: 3j – 2. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

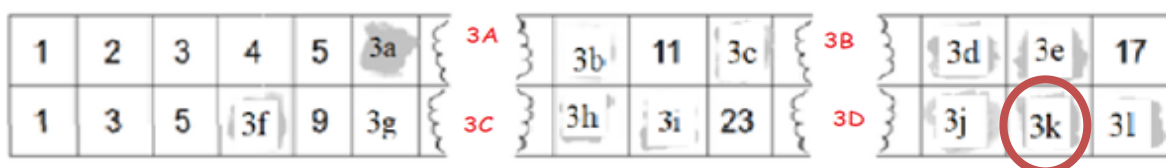
Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
7	5x	1,02 %
3	4x	0,82 %
8; 10; 28; 32; 35	3x	0,61 %
4; 11	2x	0,41 %
0; 2; 6; 22,21; 23; 33; 36	1x	0,20 %

Tabulka 4-34: Ostatní chybná řešení 3j – 2. ročník

Pole 3j, 3k a 3l vykazovala zcela s přehledem největší chybovost z celé úlohy. Také se stala nejčastěji nevyplněnými, protože si s nimi žáci zkrátka nevěděli rady. Bylo nutné využít první řady a umístění jejích čísel k tomu, aby žák zjistil čísla z řady druhé.

Interpretace a reedukační strategie budou souhrnné, jelikož žáci zvolili jednu určitou logiku, na základě které vyplnili tato tři spolu související pole.

### 4.3.11 Řešení v poli 3k



Obrázek 4-44: 3k – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
486	107
76,90 %	16,93 %

Tabulka 4-35: Podíl chybných řešení 3k – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>19</b>	<b>150x</b>	<b>30,86 %</b>
<b>27</b>	<b>61x</b>	<b>12,55 %</b>
<b>25</b>	<b>50x</b>	<b>10,29 %</b>
33	32x	6,58 %
26	24x	4,93 %
29	21x	4,32 %
21	16x	3,30 %
18	14x	2,88 %
15	10x	2,06 %
28	10x	2,06 %
32	9x	1,85 %
2	8x	1,65 %
13	8x	1,65 %
17	8x	1,65 %
14	6x	1,24 %
29	6x	1,24 %

Tabulka 4-36: Nejčastější chybná řešení 3k – 2. ročník

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-45: 3k – 2. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
20; 23; 39	5x	1,03 %
31	4x	0,82 %
4; 5; 8; 10; 16; 30; 38	3x	0,62 %
24	2x	0,41 %
1; 3; 6; 7; 9; 11; 12; 20,19; 22; 43; 48	1x	0,21 %

Tabulka 4-37: Ostatní chybná řešení 3k – 2. ročník

### 4.3.12 Řešení v poli 3l

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-46: 3l – 2. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
488	104
77,22 %	16,46 %

Tabulka 4-38: Podíl chybných řešení 3l – 2. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>20</b>	<b>143x</b>	<b>29,30 %</b>
<b>29</b>	<b>55x</b>	<b>11,27 %</b>
<b>26</b>	<b>47x</b>	<b>9,63 %</b>
35	32x	6,56 %
27	24x	4,92 %
18	17x	3,48 %
19	17x	3,48 %
31	15x	3,07 %
28	14x	2,87 %
32	12x	2,46 %
16	11x	2,25 %
30	10x	2,05 %
23	8x	1,64 %
34	8x	1,64 %
12	7x	1,43 %
21	6x	1,23 %
22	6x	1,23 %

Tabulka 4-39: Nejčastější chybná řešení 3l – 2. ročník

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-47: 3l – 2. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
3; 9; 14; 17	5x	1,03 %
2; 33; 47	4x	0,82 %
5; 15; 25	3x	0,62 %
7; 8; 24; 43	2x	0,41 %
1; 4; 11; 40; 41; 45; 52	1x	0,21 %

Tabulka 4-40: Ostatní chybná řešení 3l – 2. ročník

**Interpretace: 18, 19, 20**

1	2	3	4	5	8
1	3	5	6	9	7

10	11	12
13	14	23

15	16	17
18	19	20

*Obrázek 4-48: 3j-3k-3l, chyba 18-19-20 – 2. r.*

Žák si neuvědomí, že třetí útržek navazuje na předchozí dva útržky a vychází z jediného opěrného bodu, který v rámci útržku má – čísla 17. Pokračuje v „radě“ 18, 19, 20. V některých případech pak dochází k záměně čísel 18 a 20 (žáci čísla píšou sestupně – v pořadí 20, 19, 18).

**Interpretace: 25, 27, 29**

1	2	3	4	5	6
1	3	5	7	9	<del>10</del> <sup>10</sup>

12	11	13
13	15	23

14	16	17
25	27	29

*Obrázek 4-49: 3j-3k-3l, chyba 25-27-29 – 2. r.*

Ve druhém případě si žák uvědomuje rozdělení na první a druhou řadu, ale nevnímá, že v řadě lichých čísel nějaké chybí, tím pádem pokračuje číslem 25 a dále doplňuje 27 a 29.

**Interpretace: 24, 25, 26**

1	2	3	4	5	6
1	3	5	6	9	10

10	11	12
21	22	23

15	16	17
<del>18</del>	25	26
24		

*Obrázek 4-50: 3j-3k-3l, chyba 24-25-26 – 2. r.*

Ve třetím případě si žák uvědomuje rozdělení na první a druhou řadu. Nevnímá však, že nějaké číslo chybí a nejčastěji pokračuje v obyčejné řadě doplněním čísel navazujících na číslo 23 z předchozího pole (24, 25, 26).

### Reedukace: pole 3j, 3k, 3l

1	2	3	4	5	3a	3A	3b	11	3c	3B	3d	3e	17
1	3	5	3f	9	3g	3C	3h	3i	23	3D	3j	3k	3l

Obrázek 4-51: 3j-3k-3l – 2. ročník

Na závěr této analýzy se nabízí otázka: jak vysvětlit žákům, která čísla správně doplnit do polí 3j, 3k a 3l?

Navrhla bych následující postup.

- Nejprve bychom si se žáky vyjasnili, že základem úlohy jsou dvě číselné řady, v každé z nich platí jedna odlišná zákonitost pro všechny její členy.
- Následně si kompletní řady zapíšeme na tabuli tak, aby odpovídající čísla byla pod sebou dle zadání.
- Tímto způsobem bychom měli být schopni se dopracovat ke správnému řešení – první řadu zakončíme číslem 17. Protože druhá řada musí končit pod číslem 17, přivede nás to k zápisu čísel 29, 31, 33.

Pokud by některý žák objevil přímou závislost čísel pod sebou (číslo z první řady krát dva mínus jedna rovná se číslu z druhé řady pod ním), byla by to v jeho podání úvaha na velmi vyspělé kognitivní úrovni.

## 5 Zpracování výzkumných dat – úloha pro 3. ročník 1. stupně ZŠ

Test pro 3. ročník se od testu pro 2. ročník mírně lišil svou strukturou a bodovým ohodnocením. Obsahoval 7 úloh, za které bylo možné získat dohromady 100 bodů (body nebyly jednotlivým úlohám přidělovány rovnoměrně). Opět bylo více bodů uděleno za správně vyřešené základní úlohy, zatímco náročnější úlohy byly hodnoceny nižším počtem bodů.

Znění úlohy podrobně analyzované v rámci této diplomové práce je následující:

### Úloha 3.

Petra si napsala na papír dvě řady čísel pod sebe podle nějakého pravidla. Bratr jí některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.

2	4	6	8	10					22						34
3	6	9		15						36					

Obrázek 5-1: Zadání úlohy – 3. ročník

Za celou úlohu bylo možné získat maximálně 22 bodů. Jednotlivá pole nebyla hodnocena stejným počtem bodů. Více bodů přidělili autoři testu dle zvoleného obecného přístupu těm polím, která byla matematicky jednodušší na doplnění.

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-2: Zadání úlohy pro hodnotitele – 3. ročník



Pole	Správný výsledek	Počet bodů
3a	12	4
3b	20	2
3c	24	2
3d	30	1
3e	32	2
3f	12	3
3g	18	3
3h	30	1
3i	33	1
3j	45	1
3k	48	1
3l	51	1

Tabulka 5-1: Správné výsledky a bodování úlohy pro 3. ročník

Kromě polí určených k zápisu výsledků jsou ještě patrné prostory označené velkými tiskacími písmeny (3A, 3B, 3C, 3D). Při přepisu dat do tabulek sloužily k tomu, aby zapisovatelé mohli zaznamenat, zda si žák zapisoval nějaké mezivýpočty nebo si pomáhal doplňováním chybějících částí řad. Evidovány byly jakékoliv korekce (škrtání, gumování) a komentáře. Zvláštní poznámku obdržely nečitelné nebo nejasné zápisy výsledků.

V testech vyučující uváděli, zda daný žák pracoval s podporou asistenta pedagoga, jak byla podána instrukce k zadání testu a čas vypracování celého testu.

## 5.1 Očekávání

Moje očekávání od žakovských výsledků této úlohy byla ovlivněna tím, že jsem již prostudovala úlohu vypracovanou žáky 2. ročníku. Vzhledem k tomu, že se jedná o totožnou úlohu, akorát s jinými zadanými čísly, přemýšlela jsem ve dvou rovinách:

- chyby se budou nejspíše objevovat ve stejných polích jako v úlohách pro 2. ročník, chyby budou obdobného charakteru;
- poměrná chybovost by mohla být nižší ze dvou důvodů: 1) žáci jsou starší, zkušenější, jejich matematická gramotnost byla mezi 2. a 3. třídou rok podporována; 2) vzhledem k tomu, že testy byly ve 3. ročníku zadávány ve většině případů stejným žákům jako ve 2. ročníku, měli již minimálně tuto jednu zkušenost s tímto typem úlohy, ze které mohli čerpat o rok později.

## 5.2 Procentuální úspěšnost a chybovost žáků při řešení úlohy

Počet žáků, kteří psali test	Počet žáků, kteří chyběli	Účast
612	72	89,47 %

Tabulka 5-2: Účast při testu pro 3. ročník

Žáci, kteří všechna pole vyplnili správně	Žáci, kteří chybovali v některém z polí nebo některá pole nevyplnili	Žáci, kteří úlohu neřešili
55	549	8
8,99 %	89,71 %	1,31 %

Tabulka 5-3: Celková úspěšnost v úloze pro 3. ročník

Pole	Počet žáků, kteří pole vyplnili správně	Procentuální úspěšnost
3a	567	92,65 %
3b	433	70,75 %
3c	449	73,37 %
3d	395	64,54 %
3e	397	64,87 %
3f	557	91,01 %
3g	544	88,89 %
3h	347	56,70 %
3i	345	56,37 %
3j	66	10,78 %
3k	70	11,44 %
3l	62	10,13 %

Tabulka 5-4: Úspěšnost v jednotlivých polích v úloze pro 3. ročník

### 5.3 Zkoumání žákovských řešení

Struktura analýzy úlohy 3. ročníku je totožná jako v případě 2. ročníku. Nejprve uvádím obecné informace čili kolik žáků pole vyplnilo chybně/nevyplnilo vůbec. Poté přichází na řadu výčet chybných řešení a četnost jejich výskytu.

Analytický komentář má opět dvě části: *Interpretaci* žákovských výsledků a jejich postupu řešení a *Reedukaci*, která má nabídnout možnost nápravy a předcházení dalším chybám obdobného charakteru.

Detailně označuji analyzované pole pro větší přehlednost, aby se čtenář při analýze lépe orientoval.

### 5.3.1 Řešení v poli 3a

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-3: 3a – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
34	11
5,56 %	1,80 %

Tabulka 5-5: Podíl chybných řešení 3a – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
11	8x	23,53 %
15	6x	17,65 %
1	5x	14,71 %

Tabulka 5-6: Nejčastější chybná řešení 3a – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
5	3x	8,82 %
2; 13	2x	5,88 %
3; 4; 6; 7; 10; 16; 20; 25	1x	2,94 %

Tabulka 5-7: Ostatní chybná řešení 3a – 3. ročník

### Interpretace: 11

**3a**

2	4	6	8	10	11
3	6	9	<del>7</del>	15	<del>14</del>

21	22	23
24	35	36

<del>30</del>	38	34
20	27	28

Obrázek 5-4: 3a, chyba „11“ – 3. r.

Správné doplnění pole 3a s sebou i v úloze 3. ročníku nese nejvyšší procenta úspěšnosti. Přesto i zde byl prostor k chybě. Jednalo se o řadu násobků 2 a nejčtenější chyba byla podle mého názoru poměrně očekávaná. Pro žáky je mnohem přirozenější klasická číselná řada s rozdílem 1 mezi jednotlivými čísly, takže není divu, že se objevovalo „pokračování“ takové číselné řady a žáci doplňovali číslo 11.

### Reedukace: 11

V rámci reedukace by, myslím, stačilo předložit žákům různé číselné řady a nechat je nejprve nahlas objevit pravidlo, na základě kterého jsou čísla naskládána za sebou. Pokud by žáci byli zvyklí nejprve pravidlo objevit a uvědomit si jej „nahlas“, dokázali by se oprostit od přirozeného pokračování s jedničkovým rozdílem.

### Interpretace: 15

Nad dalšími chybnými řešeními visí celá řada otazníků, nedokázala jsem bezpečně určit jejich příčinu.

2	4	6	8	10	15
3	6	9	10	15	17

20	22	34
22	24	36

28	32	34
30	34	36

Obrázek 5-5: 3a, chyba „15“ – 3. r.

Číslo 15 mohlo být ovlivněno stejným „osamoceným“ číslem o řádek níže. Číslo 1 bych dokonce přičetla jakési nepozornosti, kvůli které žák sice měl v úmyslu zapsat dvojciferné číslo, ale „zapomněl“ na to a omylem zapsal pouze první cifru svého výsledku.

### Reedukace: 15

Výše uvedeným chybám by bylo možné předejít, pokud by žáci prováděli důslednou kontrolu své práce, což – soudím ze zkušenosti z asistentských i souvislých praxí na základních školách – ve velké míře nečiní.

### 5.3.2 Řešení v poli 3b

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-6: 3b – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
136	43
22,22 %	7,03 %

Tabulka 5-8: Podíl chybných řešení 3b – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
11	29x	21,32 %
21	29x	21,32 %
18	26x	19,12 %
14	15x	11,03 %
19	11x	8,09 %
16	6x	4,41 %

Tabulka 5-9: Nejčastější chybná řešení 3b – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
23	4x	2,94 %
24	3x	2,21 %
10; 13; 15; 17	2x	1,47 %
0; 2; 5; 7; 26	1x	0,74 %

Tabulka 5-10: Ostatní chybná řešení 3b – 3. ročník

Při doplňování pole 3b jsme se již přehoupali přes hranici jedné pětiny chybných odpovědí (22,22 %), k tomu dalších 7,03 % žáků pole ponechalo prázdné. Mezi chybnými řešeními se objevili dva „vítězové“.

### Interpretace: 11

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	17

11	22	33
12	24	36

32	33	34
5	10	15

Obrázek 5-7: 3b, chyba „11“ – 3. r.

Žáky ovlivňuje „estetičnost“ čísla 22 uvedeného ve struktuře. Pak uvádějí číslo 11 před něj a číslo 33 za něj. V tuto chvíli žádnou návaznost na předchozí útržek nevnímají a řeší tento útržek jako samostatný, aniž by si uvědomovali, že musí pokračovat stále podle stejného pravidla. Vidíme, že pravidelnost vnímají, dokonce si svou vlastní vytvářejí, tento postup však bohužel není v souladu s instrukcí úlohy.

### Reedukace: 11a

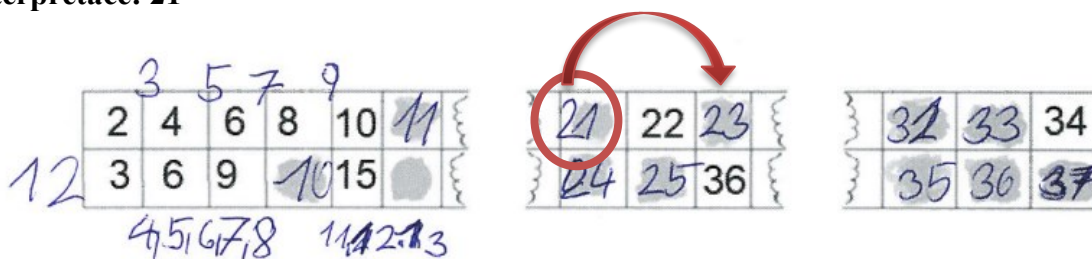
Abychom předešli takovému řešení, museli bychom žáky opakovaně upozornit na přečtení instrukcí k úloze.

### Reedukace: 11b

Další možností je přidat příklad, ukázkou, z které by princip samostatně dokázali pochopit (třeba i bez toho, aniž by si museli nutně sami přečíst zadání).



### Interpretace: 21



Obrázek 5-8: 3b, chyba „21“ – 3. r.

Číslo 21 má zjevný původ, žáci potlačili pravidlo násobků dvou a přešli zpět do klasické číselné řady, což se projevilo nejen v tomto poli, ale i v tom následujícím, kde se v kombinaci s 21 objevuje číslo 23.

### Reedukace: 21a

Zde lze při reedukaci nabídnout podobná řešení, jako jsem popisovala výše (čili přečíst si zadání, uvědomit si princip).

### Reedukace: 21b

Dalšími možnými cestami by bylo například předložení pouze jedné (v tomto případě horní) řady, kterou by žáci měli vyplnit (gradace úlohy ve formě simplifikace). Mohli by obdržet lístky, na které by si zapsali nalezené pravidlo a ke každému útržku by si tento lístek položili, aby pravidlo měli stále na očích.

### Reedukace: 21c

Dále mě napadá, že by bylo možné celou situaci s Petrou a bratrem simulovat – vytvořila bych velkoformátovou kompletní číselnou řadu, kterou bych žákům ukázala, poté bych ji roztrhala a ukázala žákům pouze uvedené útržky.

### Interpretace: 18a

2	4	6	8	10	12	14
3	6	9	12	15	18	

18	22	26				
12	16	20	24	28	32	36

28	31	34
30	35	40

Obrázek 5-9: 3b, chyba „18“ – 3. r.

Číslo 18 v poli 3b pro mě představovalo nejpřekvapivější řešení. Podle mého názoru k němu žáci došli, protože se soustředili na vzezření roztrhaných lístků v zadání úlohy. Do pole 3a doplnili 12, otrhaný okraj vlevo byl pro jedno následující číslo (14) a otrhaný okraj vpravo pro další (16). To je vedlo k zapsání čísla 18 do pole 3b. Posléze se podívali na vztah k dalšímu zadanému číslu (22), viděli, že se liší o 4, stejný rozdíl pak aplikovali i v poli 3c (a doplňovali číslo 26).

### Reedukace: 18a

Zde vnímám jako problém to, že žák řeší úlohu „správně“ zleva doprava, ale nekontroluje, zda mu pravidlo koresponduje s již zadanými čísly. Naopak se uchyluje k úpravě pravidla (rozdíl 2 se najednou navýší na rozdíl 4). Požádala bych žáka, aby zkontroloval, zda stejné pravidlo platí pro všechny členy posloupnosti. Přišel by na to, že ne. Poté by pátral po příčinách, jak je to možné. Snažil by se o nápravu, aby pravidlo fungovalo všude stejně.

### Interpretace: 18b

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

18	22	26
28	32	36

28	32	34
40	44	48

Obrázek 5-10: 3b, chyba „18“ – 3. r.

K tomu mě napadá ještě jeden způsob, jak číslo 18 v tomto poli získat. A to, když se žáci zabývají opět pouze tímto útržkem bez návaznosti na předchozí. Pokud nevnímají návaznost, pak hledají nějakou pravidelnost v útržku se zadanými čísly 22 a 36. Do pole 3c doplní 26 (aby číslo bylo „symetrické“ s 36). Tím jim vzniká kombinace čísel 22 a 26, mezi kterými je rozdíl 4. Tento rozdíl se pak objeví i v předcházejícím čísle v poli 3b ( $22 - 4 = 18$ ). K tomuto způsobu uvažování přispívá i fakt, že se v polích 3h a 3i (jak bude možné pozorovat v tabulkách níže určených k posouzení těchto polí) objevovala právě v kombinaci s čísly 18, 22, 26 čísla 28, 32, 36. Žáci totiž rozdíl o velikosti 4 posléze zaváděli i do řady čísel o řádek níže.

### Reedukace: 18b

Upozorníme žáky na zadání, které výslovně říká, že na začátku byly dvě číselné řady. Není tedy možné pracovat pouze se samostatným útržkem. Je třeba dodržovat pravidlo v horizontálně položeném řádku, takže hledat návaznost na řadu 2, 4, 6, 8, ...

### 5.3.3 Řešení v poli 3c

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-11: 3c – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
118	45
19,28 %	7,35 %

Tabulka 5-11: Podíl chybných řešení 3c – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
23	28x	23,73 %
33	25x	21,19 %
26	19x	16,10 %
25	9x	7,63 %

Tabulka 5-12: Nejčastější chybná řešení 3c – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
27	5x	4,24 %
4	4x	3,39 %
21; 28; 30	3x	2,54 %
8; 9; 20; 32; 34	2x	1,69 %
1; 12; 13; 14; 18; 22; 29; 44; nečitelné	1x	0,85 %

Tabulka 5-13: Ostatní chybná řešení 3c – 3. ročník

Podstatu chyb v poli 3c už jsem objasňovala ve spojení s polem 3b. Většina chybujících žáků nepracuje s útržky jako se dvěma propojenými číselnými řadami, nýbrž jako se separátními úlohami. U pole 3c již tedy neuvádím dílčí reedukace, které by byly totožné se strategiemi pro pole 3b.

**Interpretace: 23**

	3	5	7	9	
2	4	6	8	10	11
3	6	9	10	15	

12  
4, 5, 6, 7, 8    11, 12, 13

	3b	3c	
21	22	23	
24	25	36	

32	33	34
35	36	37

Obrázek 5-12: 3c, chyba „23“ – 3. r.

Číslem 23 žáci prodlužují klasickou číselnou řadu (21, 22, 23).

**Interpretace: 33**

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	17

	3b	3c	
11	22	33	
12	24	36	

32	33	34
5	40	15

Obrázek 5-13: 3c, chyba „33“ – 3. r.

Číslo 33 navazuje na číslo 11 v poli 3b (řada 11, 22, 33).

**Interpretace: 26**

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

	3b	3c	
18	22	26	
28	32	36	

<del>28</del>	<del>28</del>	34
40	44	48

30  
30-32

Obrázek 5-14: 3c, chyba „26“ – 3. r.

Důvody zadání čísla 26 do pole 3c jsem již rovněž uváděla v souvislosti s číslem 18 v poli 3b. Žáci opíšou do pole 3c číslo se stejným počtem jednotek, jako má číslo 36. Poté jim vzniká rozdíl 4 mezi čísly, který zpětně uplatňují do pole 3b. Je třeba říci, že žáci byli ve své podstatě velmi kreativní, když z pro ně tak „omezeného“ zadání (čísla 22, 36) dokázali vykresat řešení, které v jistém kontextu dává smysl.

### 5.3.4 Řešení v poli 3d

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-15: 3d – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
147	70
24,02 %	11,44 %

Tabulka 5-14: Podíl chybných řešení 3d – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
32	46x	31,29 %
26	27x	18,37 %
28	20x	13,61 %
22	6x	4,08 %

Tabulka 5-15: Nejčastější chybná řešení 3d – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
12; 18; 20; 24	5x	3,40 %
4; 29; 31	3x	2,04 %
19; 33; 37	2x	1,36 %
0; 5; 14; 16; 17; 21; 25; 27; 35; 36; 39; 44; nečitelné	1x	0,68 %

Tabulka 5-16: Ostatní chybná řešení 3d – 3. ročník

Výrazně nejčastějším chybným řešením v poli 3d bylo číslo 32. Opět budu komentovat primárně souvislost s dalším polem 3e, jelikož žáci volili strategii, která obě pole propojovala. Neopominu však ani návaznost na již předchozí vyplněná pole, ze kterých žáci mohli přirozeně také vycházet.

### Interpretace: 32

Obrázek 5-16: 3d, chyba „32“ – 3. r.

Jako vysvětlení doplnění čísla 32 se nabízí pokračování v obyčejné číselné řadě, i s ohledem na číslo 33 v poli 3e. Četnost výskytu odpovídá – 46x číslo 32 v poli 3d, 47x číslo 33 v poli 3e.

Žáky však k číslu 32 nemusela nutně dovést pouze návaznost na předchozí řadu 21, 22, 23. Napadá mě, že žáci mohli správně doplnit pole 3b a 3c (přece jen počet chybných řešení typu 21, 22, 23 byl nižší), ale posléze si mohli jeden okraj útržku představit jako prostor pro číslo 26, mezeru mezi lístky jako 28 a další otrhaný okraj jako 30. V dalším poli pak doplnili stále v kontextu násobků 2 číslo 32, nicméně do pole 3e jim nezbývalo než doplnit číslo 33, protože jinak by museli některé z čísel zopakovat.

### Reedukace: 32

Reedukace je podobná jako v případě polí 3b a 3c. Je potřeba provést se žáky rozbor dosavadního průběhu úlohy. Znovuobjevíme pravidlo, že řada se navyšuje o 2. Tím pádem stejné pravidlo zachováme pro všechna pole, včetně polí 3d a 3e.



### Interpretace: 26a

2	4	6	8	10	12						
3	6	9	12	15	18						


Obrázek 5-17: 3d, chyba „26a“ – 3. r.

Číslo 26 navazuje většinou na správně vyplněná pole 3b a 3c (20, 22, 24) jako pokračování řady násobků 2. Žáci si neuvědomí, že některá čísla budou nejspíš vynechána (a že by se v tomto ohledu měli řídit dalším zadaným číslem, což je číslo 34). Neostýchají se tak po čísle 26 pokračovat s číslem 28 v poli 3e. Číslo 34 pak sice do schématu nezapadá, ale protože je poslední v řadě a už na něj ničím nenavazujeme, tak to žákům nepřipadá nepřirozené.

### Reedukace: 26a

V případě interpretace 26a žák zarytě pokračuje v řadě násobků 2. Opomíjí však zadané číslo 34. Náprava je provedena upozorněním žáka na potřebu zkontrolovat celou řadu jako celek.

Tato struktura není v učebnicích matematiky tak běžná (ekvivalentně jsou žáci zvyklí na schéma  $x + y = ?$  při běžné kalkulačnické úloze; jakákoliv jiná forma jim pak působí při řešení potíže). Proto je třeba podporovat různé formy zadání úloh, kdy některé z nich neřešíme jednoduše zleva doprava.

Efektivně žákovo komplexní smýšlení nad úlohou podporují úlohy typu Zebra, které vyžadují práci s instrukcemi. Tyto instrukce však není možné plnit postupně, žák je nucen přeskokovat a uvažovat je paralelně.

**Interpretace: 26b**

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
21	23	36

26	30	34
20	30	40

The image shows three 2x6 grids. The first grid contains the numbers 2, 4, 6, 8, 10, 12 in the top row and 3, 6, 9, 12, 15, 18 in the bottom row. The second grid contains 20, 22, 24 in the top row and 21, 23, 36 in the bottom row. The third grid contains 26, 30, 34 in the top row and 20, 30, 40 in the bottom row. The number 26 in the top-left cell of the third grid is circled in red. Above the circled 26 is the label '3d' and above the 30 in the top-middle cell is the label '3e'.

Obrázek 5-18: 3d, chyba „26b“ – 3. r.

Nesmím ale zapomenout na další pokračování, které žáci volili v poli 3e v návaznosti na číslo 26 v poli 3d. Mezi chybnými řešeními se objevovalo číslo 30 a vznikala řada 26, 30, 34. Zde je patrné, že žák sice pokračuje v řadě sudých čísel, nicméně aby zachoval pravidelnost (a zde bere v úvahu zadané číslo 34), tak musí změnit rozdíly mezi čísly ze 2 na 4.

**Reedukace: 26b**

Žák, který uvedl v návaznosti na pole 3d do pole 3e číslo 30, umí lépe posuzovat strukturu zadání. Všiml si zadaného čísla 34 a přizpůsobil svou řadu tak, aby mezi čísly existovala závislost. Upozorníme ho, aby zpětně zkontroloval celou řadu a zachování jednoho pravidla. Myslím, že by žák velmi snadno odhalil odchýlení od pravidla a provedl by nápravu, když ho upozorníme, že některá čísla z řady jsou vynechána.

**Interpretace: 28**

2	4	6	8	10	12	14	16	22	24	26	28	30	34
3	6	9	12	15	18	21	24	27	36	39	42	45	48

Obrázek 5-19: 3d, chyba „28“ – 3. r.

Třetí nejčtenější chybné řešení bylo číslo 28. Zde žáci opět pokračovali správně v řadě násobků 2, uvažují dokonce nad chybějícími čísly v řadě, nicméně podle nich chybí v řadě pouze jedno číslo (které by bylo umístěno v prostoru mezi útržky). Následně se jim rytmus řady rozpadá. Mají čísla 28 \_ 34, mezi ně musí doplnit jedno číslo.

Pokud by chtěli zachovat totožné rozdíly, měli by uvažovat číslo 31 do pole 3e (aby byl rozdíl 3). Je zajímavé, že takové řešení se poměrově neobjevilo dostatečně často vzhledem k počtu zadání čísla 28 v poli. V tomto ohledu žáci zůstávali u myšlenky sudých čísel v horní řadě.

#### **Reedukace: 28a**

Je stejná jako v předchozím případě, kdy uvádím doplnění polí 3d, 3e čísly 26 a 28. Zde žák prokázal zamýšlení ještě o stupeň dále, když si uvědomil, že některé číslo v řadě je vynecháno. Upozorním jej na nesoulad mezi vztahem čísel 30 a 34.

#### **Reedukace: 28b**

Zde by mohlo ještě pomoci upravit formu zadání (např. aby byly útržky skutečnými útržky, se kterými žák může zacházet manipulativně). Je to z toho důvodu, že žák vidí jedno chybějící číslo mezi prvním a druhým útržkem. Na základě uspořádání útržků (se stejnou mezerou mezi nimi) očekává, že jedno číslo chybí i mezi druhým a třetím útržkem, což jej přivádí k formální chybě, která ovlivňuje jeho další řešení.

### 5.3.5 Řešení v poli 3e

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-20: 3e – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
139	78
22,71 %	12,75 %

Tabulka 5-17: Podíl chybných řešení 3e – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
33	47x	33,81 %
28	19x	13,67 %
30	15x	10,79 %
31	11x	7,91 %
24	6x	4,32 %

Tabulka 5-18: Nejčastější chybná řešení 3e – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
4; 20; 29	4x	2,89 %
17	3x	2,16 %
15; 23; 25; 26; 27; 34; 35; 38	2x	1,44 %
18; 19; 22; 37; 40; 43; 46; 55; 69; 30 vygumováno	1x	0,72 %

Tabulka 5-19: Ostatní chybná řešení 3e – 3. ročník

Pro pole 3e neuvádím reedukační strategie, které jsou totožné s polem 3d.

### Interpretace: 33

2	4	6	8	10	11
3	6	9	10	15	

Handwritten annotations: 3, 5, 7, 9 above the first row; 12 to the left of the second row; 4, 5, 6, 7, 8 below the first row; 11, 12, 13 below the second row.

21	22	23
24	25	36

32	33	34
35	36	37

Labels: 3d above the first column, 3e above the second column (circled).

Obrázek 5-21: 3e, chyba „33“ – 3. r.

Číslo 33 pokračuje v číselné řadě s rozdílem 1 (32, 33, 34).

### Interpretace: 28

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
21	24	36

26	28	34
27	30	33

Labels: 3d above the first column, 3e above the second column (circled).

Obrázek 5-22: 3e, chyba „28“ – 3. r.

Číslo 28 navazuje nejčastěji na číslo 26. Jedná se o dodržení pravidla a pokračování v řadě násobků 2, nicméně žák následně neuvažuje, že mu do schématu nezapadá další číslo 34.

### Interpretace: 30

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
21	23	36

26	30	34
20	30	40

Labels: 3d above the first column, 3e above the second column (circled).

Obrázek 5-23: 3e, chyba „30“ – 3. r.

Číslo 30 navazuje na číslo 26 v odlišném kontextu, kdy žák zachovává řadu sudých čísel, ale obměňuje rozdíl mezi nimi.

Zatímco u úlohy určené pro 2. ročník se v této fázi úlohy žáci odpoutávali od předchozích pravidel a zákonitostí a vytvářeli vlastní struktury, v tomto případě u úlohy pro 3. ročník tomu tak nebylo. Řada čísel zůstávala při řešeních žáků stále vzestupná, zadávali do ní sudá čísla a pro mě překvapivě si u tohoto třetího útržku uvědomovali návaznost minimálně na útržek druhý, takže se nestávalo, že by třetí útržek vnímali jako samostatný celek a doplňovali by jej zcela dle sebe.

### 5.3.6 Řešení v poli 3f

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-24: 3f – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
41	14
6,70 %	2,29 %

Tabulka 5-20: Podíl chybných řešení 3f – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
1	9x	21,95 %

Tabulka 5-21: Nejčastější chybná řešení 3f – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
7; 11; 14	4x	9,76 %
4; 10	3x	7,32 %
9; 15; 16	2x	4,88 %
2; 3; 5; 6; 8; 13; 18; nečitelné 6 nebo 7	1x	2,44 %

Tabulka 5-22: Ostatní chybná řešení 3f – 3. ročník

### Interpretace: 1

2	4	6	8	10	5
3	6	9	1	15	7

3f

24	22	21
25	22	36

19	20	34
18	23	21

Obrázek 5-25: 3f, chyba „1“ – 3. r.

V poli 3f chybovalo celkem 41 žáků. Chybná řešení byla skutečně různorodá, ale ze statistického hlediska (aby četnost řešení měla nějakou výpovědní hodnotu) hodnotím jako zajímavé pouze řešení v podobě čísla 1. To se objevilo v devíti případech, což pro mě bylo poměrně překvapivé (častěji než 1 bych čekala například číslo 10).

### Reedukace: 1

Mohlo by se jednat o nepozornost žáka, který zapomene zapsat druhou cifru výsledku. Nicméně myslím, že ve většině případů šlo spíše o nepochopení principu úlohy. Žák nebyl schopen se zorientovat v zadání ani v uvedené struktuře a zkrátka doplnil první chybějící číslo jemu důvěrně známé číselné řady (1, 2, 3, ...).

V rámci reedukace bych žákovi uvedla příklad. Čili zvolila bych odlišnou číselnou řadu s nějakou vybranou závislostí, kterou bych mu odprezentovala. Posléze bych jej provedla kroky a dílčími úkony, které je třeba splnit: odhalit pravidlo; doplnit následující členy řady; doplnit další členy řady, které nenavazují; provést kontrolu, že pro všechny členy řady platí zadaná závislost. Nakonec by se žák mohl vrátit k této úloze a na základě již získaného povědomí o dílčích krocích ji vyřešit.



### 5.3.7 Řešení v poli 3g

Obrázek 5-26: 3g – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
49	19
8,01 %	3,10 %

Tabulka 5-23: Podíl chybných řešení 3g – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
17	12x	24,49 %
14	6x	12,24 %

Tabulka 5-24: Nejčastější chybná řešení 3g – 3. ročník

#### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
16	5x	10,20 %
5	4x	8,16 %
7; 10; 13	3x	6,12 %
12; 15; 19; 20; 21	2x	4,08 %
8; 11; 22	1x	2,04 %

Tabulka 5-25: Ostatní chybná řešení 3g – 3. ročník

V poli 3g se nenaplnil můj odhad, že nejčastějším chybným řešením bude číslo 16, čili pokračování v řadě 15, 16, ..., byť i toto řešení se v pěti případech objevilo.

### Interpretace: 17

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	17

Obrázek 5-27: 3g, chyba „17“ – 3. r.

Nejčastěji žáci chybně vpisovali číslo 17, což má jednoduché vysvětlení – aplikovali pravidlo z horního řádku i do spodního řádku a zachovávali rozdíl 2 mezi čísly. Mohlo je k tomu motivovat i to, že uvedené násobky 3 představovala z větší části lichá čísla (s přehlédnutím čísla 6), tím pádem možná pokračovali v řadě lichých čísel a zapsali následující liché číslo po 15, čili 17.

### Reedukace: 17

Žákům by opět mohlo pomoci uvědomit si pravidlo, pojmenovat ho nahlas a kontrolovat, zda je dodržováno v každém poli spodního řádku. Bylo by vhodné upozornit, že pro každý řádek může platit jiné pravidlo, což ze zadání úplně nevyplývá (Petra si napsala na papír DVĚ ŘADY ČÍSEL POD SEBE PODLE NĚJAKÉHO PRAVIDLA.), bylo by možné jej interpretovat tak, že jsou to dvě řady podle stejného pravidla.

### Interpretace: 14

The image shows three 2x3 grids of numbers. The first grid contains the numbers 2, 4, 6, 8, 10, 12 in the top row and 3, 6, 9, 11, 15, 14 in the bottom row. The number 14 is circled in red, and a red arrow points from it to the right. The second grid contains 21, 22, 23 in the top row and 24, 25, 36 in the bottom row. The third grid contains 37, 40, 34 in the top row and 50, 60, 47 in the bottom row. Some numbers in the second and third grids are shaded grey.

2	4	6	8	10	12
3	6	9	11	15	14

21	22	23
24	25	36

37	40	34
50	60	47

Obrázek 5-28: 3g, chyba „14“ – 3. r.

Výskyt čísla 14 přisuzuji tomu, že žáci se snažili tento útržek vyřešit jako samostatný celek. Pokračovali z horní řady a doplňovali čísla, která jim ve struktuře chyběla.

### Reedukace: 14

Žáky bychom mohli upozornit, že se jedná o dvě samostatné řady a že pravidlo dodržujeme vždy v příslušném řádku.

### 5.3.8 Řešení v poli 3h

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-29: 3h – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
210	56
34,31 %	9,15 %

Tabulka 5-26: Podíl chybných řešení 3h – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
28	38x	18,10 %
24	37x	17,62 %
21	29x	13,81 %
34	22x	10,48 %
32	21x	10,00 %
12	15x	7,14 %
26	8x	3,81 %
27	6x	2,86 %

Tabulka 5-27: Nejčastější chybná řešení 3h – 3. ročník

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-30: 3h – 3. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
20; 25	4x	1,90 %
9; 14; 18	3x	1,43 %
22; 29; 31; 33	2x	0,95 %
5; 8; 15; 19; 23; 35; 40; 44; 55	1x	0,48 %

Tabulka 5-28: Ostatní chybná řešení 3h – 3. ročník

Zde už se chybovost významně zvyšuje a je přímo ovlivněna buď strategií zvolenou pro doplnění polí 3b a 3c, nebo návazností na první útržek a pole 3g.

Zhruba totožně se „umístila“ chybná řešení 28 (ve 38 případech) a 24 (ve 37 případech).

### Interpretace: 28

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

	20	22	24	
	28	30	36	

	32	33	34
	35	36	37

The image shows three hand-drawn number grids. The first grid is a 2x6 grid with numbers 2, 4, 6, 8, 10, 12 in the top row and 3, 6, 9, 12, 15, 18 in the bottom row. The second grid is a 2x4 grid with numbers 20, 22, 24 in the top row and 28, 30, 36 in the bottom row; the number 28 is circled in red. The third grid is a 2x3 grid with numbers 32, 33, 34 in the top row and 35, 36, 37 in the bottom row. Above the second grid, the labels '3b' and '3c' are written in red.

Obrázek 5-31: 3h, chyba „28“ – 3. r.

Číslo 28 je zjevně ovlivněno strategií z polí 3b a 3c. Tito žáci nevnímají návaznost útržků na sebe a řeší je jako samostatné celky. Zachovávají posloupnost sudých čísel se stejnými rozdíly na řádcích.

### Reedukace: 28

Provedu gradaci úlohy – simplifikaci. Pracuji se žáky pouze se spodní řadou násobků 3. Abychom zachovali pravidlo řady, můžeme do ní doplňovat pouze další násobky 3. Číslo 28 ani 32 nejsou násobky 3.

### Interpretace: 24a

2	4	6	8	10	<del>13</del>
3	6	9	<del>11</del>	15	<del>14</del>

↑

21	22	23
24	25	36

37	40	34
50	60	47

Obrázek 5-32: 3h, chyba „24a“ – 3. r.

Číslo 24 může mít dvojí původ. Jednou z možností, proč žáci toto řešení zapisují, je opět pokračování horního řádku útržku. Pokud se rozhodnou zapsat výsek číselné řady 21, 22, 23, pak je tato pravidelnost vede k pokračování v řadě číslem 24 ve druhém řádku.

### Reedukace: 24a

Žákovi chybí porozumění základnímu principu úlohy. Za tímto účelem je možné řady od sebe oddělit a prezentovat je žákovi samostatně. Teprve až porozumí uplatnění pravidla v řádku, řady propojíme a například prostřednictvím tabulky pozorujeme vzájemné závislosti čísel nad sebou.

### Interpretace: 24b

2	4	6	8	10	12	14	16	22	24	26	28	30	34
3	6	9	12	15	18	21	24	27	36	39	42	45	48

3g →

Obrázek 5-33: 3h, chyba „24b“ – 3. r.

Druhá strategie počítá s návazností na předchozí útržek. Žáci mají představu, že do pole 3g doplní číslo 18, v prostoru mezi útržky by se nacházelo číslo 21 a dalším násobkem 3 v poli 3h je právě kýžené číslo 24.

### Reedukace: 24b

To je, dle mého názoru, dáno opět strukturou zadání, pokud by např. útržky byly umístěny dále od sebe nebo nakřivo, žáci by se uchýlili k odlišnému řešení.



### Interpretace: 21

2	4	6	8	10	<del>12</del>
3	6	9	<del>12</del>	15	<del>18</del>

<del>14</del>	?	<del>24</del>
<del>21</del>	<del>24</del>	36

<del> </del>	<del> </del>	34
<del> </del>	<del> </del>	<del> </del>

Handwritten annotations: '3b' above the first cell of the second table, '3c' above the third cell of the second table, a red circle around the cell containing '21', and a red question mark below the cell containing '36'.

Obrázek 5-34: 3h, chyba „21“ – 3. r.

Žáci přirozeně pokračují v řadě násobků 3 (15, 18, ... 21) a neuvědomují si možnost, že některé byly vynechány.

### Reedukace: 21

Pro žáka bych doporučila zápis číselných řad do tabulky. Jeho chyba totiž pramení z toho, že si neuvědomí odtržená chybějící čísla. Z uvedeného řešení je zjevné, že se měnily jeho myšlenkové pochody. Nejprve v polích 3b a 3c doplňoval klasickou číselnou řadu (21, 22, 23). Poté si vzpomněl na pravidlo násobků 2 a výsledky upravil. Nicméně opomíjí nutnost některé členy vynechat a zkontrolovat závislosti pozdějších členů (14 a následuje 22; 24 a následuje 36).

### 5.3.9 Řešení v poli 3i

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-35: 3i – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
209	58
34,15 %	9,48 %

Tabulka 5-29: Podíl chybných řešení 3i – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
24	39x	18,66 %
30	37x	17,70 %
32	35x	16,75 %
35	26x	12,44 %
34	22x	10,53 %
27	7x	3,35 %
23	6x	2,87 %
31	6x	2,87 %

Tabulka 5-30: Nejčastější chybná řešení 3i – 3. ročník

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-36: 3i – 3. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
18; 25; 28	3x	1,44 %
9; 22; 29; 38	2x	0,97 %
3; 6; 10; 11; 13; 14; 15; 19; 20; 26; 36; 44; 66; 83	1x	0,48 %

Tabulka 5-31: Ostatní chybná řešení 3i – 3. ročník

V poli 3i je chybovost stále na úrovni necelých 35 %. Objevila se tři chybná řešení, jejichž četnost výskytu byla v zásadě na téže úrovni. Všechna tato řešení navazují na chyby v poli 3h s totožnými reedukačními strategiemi, takže zde připomínám pouze jejich interpretace.

**Interpretace: 24**

2	4	6	8	10	<del>12</del>
3	6	9	<del>12</del>	15	<del>18</del>

<del>14</del>	22	<del>24</del>
<del>21</del>	24	36

		34

3h                      ?

*Obrázek 5-37: 3i, chyba „24“ – 3. r.*

Číslo 24 navazuje na číslo 21 z pole 3h. Žák, který takové řešení uvede, pokračuje v řadě násobků 3. Navazuje tedy na pravidlo objevené na prvním útržku a vnímá, že spodní řada se řídí vlastním pravidlem a čísla jsou spolu provázaná. Neuvědomí si však dostatečně brzy, že mu do struktury nezapadá následující číslo 36.

**Interpretace: 30**

2	4	6	8	10	<del>12</del>
3	6	9	<del>12</del>	15	<del>18</del>

<del>20</del>	22	<del>24</del>
<del>24</del>	30	36

<del>32</del>	<del>33</del>	34
<del>35</del>	<del>36</del>	<del>37</del>

3h +6                      +6

*Obrázek 5-38: 3i, chyba „30“ – 3. r.*

Žáci, kteří zadali do pole 3i číslo 30, podle mě prokázali dobré rytmické čtení. Pokračovali v řadě násobků 3 číslem 24 v poli 3h. Posléze uvažovali, že jim chybí jedno číslo a pak následuje číslo 36. Rozdíl mezi těmito dvěma čísly je 12, tudíž aby byl zachován rytmus a pravidelnost, musí být doplněné číslo „na půli cesty mezi nimi“. Této charakteristice odpovídá číslo 30.

**Interpretace: 32**

2	4	6	8	10	<del>12</del>
3	6	9	<del>12</del>	15	<del>18</del>

<del>20</del>	22	<del>24</del>
<del>28</del>	32	36

<del>32</del>	<del>33</del>	34
<del>35</del>	<del>36</del>	<del>37</del>

+4                      +4

*Obrázek 5-39: 3i, chyba „32“ – 3. r.*

Číslo 32 pak navazuje na 28 z pole 3h. Opět je zachován rozdíl mezi čísly ve spodní řadě.

### 5.3.10 Řešení v poli 3j

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-40: 3j – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
456	90
74,51 %	14,71 %

Tabulka 5-32: Podíl chybných řešení 3j – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>39</b>	<b>130x</b>	<b>28,95 %</b>
<b>40</b>	<b>67x</b>	<b>14,69 %</b>
<b>42</b>	<b>44x</b>	<b>9,65 %</b>
35	24x	5,26 %
38	22x	4,82 %
36	18x	3,95 %
48	17x	3,73 %
30	13x	2,85 %
20	8x	1,75 %
44	8x	1,75 %
37	7x	1,54 %
43	7x	1,54 %
46	7x	1,54 %
31	6x	1,32 %
41	6x	1,32 %

Tabulka 5-33: Nejčastější chybná řešení 3j – 3. ročník

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-41: 3j – 3. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
1; 5; 18	5x	1,10 %
3; 10; 25; 34; 49; 54	4x	0,88 %
28	3x	0,66 %
15; 24; 27; 32; 47; 50; 58	2x	0,44 %
4; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 17; 22; 23; 26; 33; 53; 60; 64; 93; 100; nečitelné 29 nebo 39	1x	0,22 %

Tabulka 5-34: Ostatní chybná řešení 3j – 3. ročník

Statistiky polí 3j, 3k a 3l v zásadě kopírovaly situaci úloh z 2. ročníku. Chybovost zůstala nejvyšší z celé úlohy. Tato pole žáci v porovnání s ostatními nejčastěji nechávali prázdná, protože si s nimi opět neuměli poradit.

Jelikož chybná řešení v těchto polích spolu souvisí, uchýlila jsem se k jednomu společnému popisu reedukační strategie, který se nachází v závěru po všech statistických údajích a interpretacích jednotlivých polí.

### Interpretace: 39

2	4	6	8	10	12						
3	6	9	12	15	18						

20	22	24									
<del>24</del>	<del>27</del>	36									

30 33

+3

30	32	34									
39	42	45									

3k 3l

Obrázek 5-42: 3j, chyba „39“ – 3. r.

Výrazně nejčastěji (ve 132 případech, což tvořilo 28,95 % všech chybných řešení v tomto poli) se objevovalo jako řešení číslo 39. Původ této chyby není těžké objasnit. Žáci mají pocit, že nemají žádnou číselnou oporu v tom, jakým číslem by měli navázat. Pokračují tedy v řadě násobků 3. Protože poslední uvedené číslo je číslo 36, navazují číslem 39 (a s tím pak souvisí i chybná řešení v polích 3k a 3l).

### Interpretace: 42

2	4	6	8	10	12	14	16	22	24	26	28	30	34
3	6	9	12	15	18	21	24	27	36	39	42	45	48

Obrázek 5-43: 3j, chyba „42“ – 3. r.

Žák předpokládá, že chybí jeden násobek 3 (39) a pokračuje pak dalším, což je 42.

### Interpretace: 40a



Obrázek 5-44: 3j, chyba „40a“ – 3. r.

Číslo 40 rovněž navazuje na 36 z předchozího útržku, ale poněkud odlišným způsobem. Výše jsem uváděla, že mnoho žáků doplnilo do polí 3h a 3i čísla 28 a 32, čímž vytvořili řadu s rozdílem 4 mezi čísly (28, 32, 36). Na posledním útržku pak pokračovali v této řadě (bez toho, že by považovali nějaké číslo za chybějící) a doplňovali číslo 40 (36+4).

### Interpretace: 40b



Obrázek 5-45: 3j, chyba „40b“ – 3. r.

Velmi časté bylo zapsání čísla 40 do pole 3j ve spojení s řadou 40, 43, 46. Žák chce zachovat rozdíl mezi členy posloupnosti 3, ale neuvědomuje si, že opouští řadu násobků 3. Téměř prázdný útržek mu neposkytuje svým zadáním oporu, proto vkládá čísla symetrická útržku předchozímu: 30, 33, 36 → 40, 43, 46.



### 5.3.11 Řešení v poli 3k

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-46: 3k – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
450	92
73,53 %	15,03

Tabulka 5-35: Podíl chybných řešení 3k – 3. ročník

### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
42	138x	30,67 %
43	50x	11,11 %
45	35x	7,78 %
36	26x	5,78 %
38	26x	5,78 %
44	16x	3,56 %
51	15x	3,33 %
40	13x	2,89 %
46	13x	2,89 %
30	8x	1,78 %
34	6x	1,33 %
39	6x	1,33 %
49	6x	1,33 %

Tabulka 5-36: Nejčastější chybná řešení 3k – 3. ročník

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-47: 3k – 3. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
2; 10; 23; 35; 41	5x	1,11 %
25; 26; 47; 52; 57	4x	0,89 %
16; 20; 29; 37; 50	3x	0,67 %
11; 21; 32; 33; 54; 56; 60; 61	2x	0,44 %
6; 8; 13; 14; 18; 19; 27; 31; 53; 55; 63; 72; 78; 96; 103; nečitelné 32 nebo 42	1x	0,22 %

Tabulka 5-37: Ostatní chybná řešení 3k – 3. ročník

### Interpretace: 42

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
<del>24</del>	<del>26</del>	36

30	32	34
39	42	45

30 33

Obrázek 5-48: 3k, chyba „42“ – 3. r.

Nejčastější chyba – číslo 42 – navazuje na plynulou řadu násobků 3, které ale žádný člen nechybí (36, ... 39, 42).

### Interpretace: 43

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
30	33	36

30	32	34
40	43	46

6

Obrázek 5-49: 3k, chyba „43“ – 3. r.

Číslo 43 žáci doplňují v kontextu řady 40, 43, 46.

### Interpretace: 45

2	4	6	8	10	12	14
3	6	9	12	15	18	21

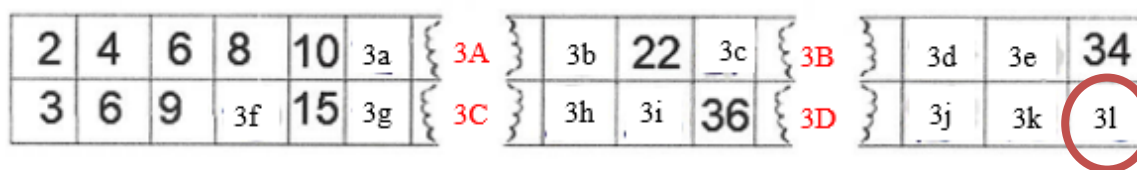
16	22	24	26
24	27	36	39

28	30	34
42	45	48

Obrázek 5-50: 3k, chyba „45“ – 3. r.

A konečně komentář k číslu 45 – zde žáci navazují na 42 z pole 3j, takže zachovávají pravidlo o násobcích 3.

### 5.3.12 Řešení v poli 3l



Obrázek 5-51: 3l – 3. ročník

Žáci, kteří uvedli v poli chybné řešení	Žáci, kteří pole nevyplnili
458	92
74,84 %	15,03 %

Tabulka 5-38: Podíl chybných řešení 3l – 3. ročník

#### Nejčastěji se vyskytující chybná řešení

Chybné řešení	Četnost výskytu	Podíl ze všech chybných řešení v tomto poli
<b>45</b>	<b>128x</b>	<b>27,95 %</b>
<b>46</b>	<b>58x</b>	<b>12,66 %</b>
<b>48</b>	<b>46x</b>	<b>10,04 %</b>
37	24x	5,24 %
42	23x	5,02 %
40	22x	4,80 %
54	22x	4,80 %
52	9x	1,97 %
26	8x	1,75 %
44	8x	1,75 %
49	7x	1,53 %
36	6x	1,31 %
39	6x	1,31 %
47	6x	1,31 %
50	6x	1,31 %

Tabulka 5-39: Nejčastější chybná řešení 3l – 3. ročník

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 5-52: 3l – 3. ročník

### Řídce se vyskytující chybná řešení

Chybná řešení	Četnost výskytu každého z chybných řešení	Podíl ze všech chybných řešení každého z nich
3; 15; 30; 33; 55	5x	1,09 %
27; 41	4x	0,87 %
28; 35; 38; 60; 64	3x	0,66 %
12; 17; 21; 24; 29; 53; 66	2x	0,44 %
4; 6; 9; 11; 20; 32; 56; 57; 59; 63; 67; 68; 80; 81; 99; 106; nečitelné 35 nebo 45	1x	0,22 %

Tabulka 5-40: Ostatní chybná řešení 3l – 3. ročník

### Interpretace: 45

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
<del>24</del>	<del>27</del>	36

30	32	34
39	42	45

3j    3k    3l

30 33

Obrázek 5-53: 3l, chyba „45“ – 3. r.

Žák navazuje s číslem 45 na číslo 42 z pole 3k (tvoří se kombinace 39, 42, 45.)

### Interpretace: 46

2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18

20	22	24
30	33	36

30	32	34
40	43	46

3j    3k    3l

Obrázek 5-54: 3l, chyba „46“ – 3. r.

Žák navazuje s číslem 46 na číslo 43. Opustil pravidlo násobků 3, nicméně stále udržuje rozdíl mezi čísly 3.

### Interpretace: 48

2	4	6	8	10	12	14
3	6	9	12	15	18	21

16	22	24	26
24	27	36	39

28	30	34
42	45	48

3j    3k    3l

Obrázek 5-55: 3l, chyba „48“ – 3. r.

Žák navazuje s číslem 48 na číslo 45 – pokračuje v řadě 42, 45 → 48.

### **Reedukace: pole 3j, 3k, 3l**

Postup vyplňování polí 3j, 3k, 3l by bylo možné žákům vysvětlit stejným způsobem, jako jsem popisovala u úlohy pro 2. ročník.

Vycházeli bychom tedy z toho, že bychom si vyřešili horní řadu. Zapsali bychom ji na tabuli a pod její členy zapsali členy spodní řady.

Doporučila bych zaměřit se se žáky na to, zda některé členy posloupnosti chybí v prvním řádku. Pokud žáci odpoví, že ano, pak je potřeba jim vysvětlit, případně názorně ukázat, že musí chybět členy i v řádku druhém. Rozumím, že pro žáky může být náročné vnímat tolik faktorů zároveň – musí se soustředit na odlišná pravidla horního a spodního řádku, na jejich dodržení na každém útržku, na chybějící členy v jednotlivých řadách, a ještě vnímat vztah mezi horním a spodním řádkem. Toto množství operací přirozeně vedlo k tomu, že si žáci ve valné většině případů s poli 3j, 3k a 3l neporadili.

Paradoxně si myslím, že vyřešit pole 3j, 3k a 3l na základě závislosti na horní řadě bylo v tomto případě pro žáky mnohem jednodušší než v úloze pro 2. ročník. Zde si stačilo uvědomit, kolikátý násobek v řadě je číslo 34 (17.). Stejně pořadí musí mít v řadě násobků 3 i číslo v poli 3l ( $17 \cdot 3 = 51$ ). Zbylá čísla do polí 3j a 3k posléze doplníme postupným odčítáním.

Důvodem, proč žáci takovou cestu neobjeví, může být mimo jiné i jejich fixace na postup řešení „zleva doprava“. Neorientují se v úloze jako celku, ale mají potřebu řešit ji postupně. Rozvíjet komplexní pohled na úlohu umožňují například úlohy typu zebra. V nich mají žáci zapsány instrukce, které ale musí různě přeskakovat, nemohou se zabývat jednou po druhé.

## **6 Srovnání úspěšnosti řešení úlohy žáků 2. a 3. ročníku**

### **Celkové srovnání žáků 2. a 3. ročníku**

Ze statistických údajů výzkumu vyplývá, že testování 2. ročníku se zúčastnilo 632 žáků a 41 chybělo (účast 93,91 %), zatímco testování 3. ročníku se zúčastnilo 612 žáků a 72 chybělo (účast 89,47 %). Od 2. do 3. ročníku se zvýšilo procento žáků, kteří celou úlohu vyplnili správně (z 3,96 % na 8,99 %). Zároveň se snížilo procento žáků, kteří úlohu vůbec neřešili (z 3,80 % na 1,31 %).

### **Srovnání žákovských řešení v jednotlivých polích**

Co se týče chybovosti v jednotlivých polích, z tabulkových záznamů vyplývá, že žáci 2. ročníku si lépe poradili s chybějícími čísly z horního řádku. Rozdíl v procentuální úspěšnosti je znatelný zejména u polí 3d a 3e. Naopak ve spodním řádku dosahují citelně vyšší úspěšnosti žáci 3. ročníku. Marginální rozdíl lze pozorovat u pole 3f, ve kterém žáci musí začít aplikovat nové pravidlo. Zatímco ve 2. ročníku jej správně vyplnilo 44,46 % žáků, ve 3. ročníku to pak bylo 91,01 % žáků. Velký rozdíl sledujeme i v úspěšnosti vyplnění pole 3g (54,27 % ve 2. ročníku vs. 88,89 % ve 3. ročníku), 3h a 3i (cca 23 % vs. cca 56 %). V nejnáročnějších polích j, k, l se úspěšnost zvýšila zhruba 2x z cca 5,5 % na cca 10,5 %.

### **Variabilita žákovských řešení**

Když srovnáme variabilitu chybných řešení, je možné konstatovat, že rozložení chybných výsledků je v případě 3. ročníku u většiny polí vyrovnanější, tzn. žáci 2. ročníku se spíše uchýlovali k jedné chybné strategii (typicky v poli 3h, kde nejčastější chybné číslo má 52,18% podíl ze všech chybných řešení v tomto poli, zatímco tři nejčastější chyby v poli 3h u 3. ročníku mají rovnoměrné rozložení 18,18 %, 17,70 % a 13,88 %). Z toho lze vyvodit, že žáci 3. ročníku již uvažovali ve více rovinách a byli otevřeni širšímu spektru možností, jak se s úlohou vypořádat.

### **Podstata žákovských chyb**

Chyby, kterých se žáci dopouštěli, nebyly ve většině případů kalkulativního charakteru, ale spíše v neschopnosti žáků kontrolovat všechny ovlivňující faktory. Museli se zabývat dvěma různými pravidly ve dvou řádcích. Potřebovali sledovat návaznost na daném řádku mezi všemi třemi útržky. Kromě toho ještě navíc bylo třeba hlídat závislosti čísel spodního řádku



na číslech z řádku horního. Na základě prostudování žákovských řešení a popisu charakteru jednotlivých chyb soudím, že zásadním problémem bylo pochopení slovního zadání společně se strukturou, v níž byla úloha zadána. Mnoho žáků očividně řešilo útržky jako separované samostatné úlohy, tím pádem uváděli chybná řešení. To ale nutně neznamená, že by nedokázali rozpoznat pravidlo naznačující konkrétní rytmus, či v tomto případě posloupnost čísel. Naopak často dokázali tvořit posloupnosti nové, zcela originální. Bylo jen několik málo jedinců, z jejichž odevzdané práce vyplývalo, že absolutně nepochopili princip, hlavní myšlenku úlohy.

### **Moje vnímání žákovských chyb a jeho vývoj**

Než jsem začala psát diplomovou práci, předpokládala jsem, že výzkumná část se bude zakládat na posuzování chyb žáků a snaze o jejich nápravu. Proto jsem se podrobně zaměřila na pojmy „chyba“ a „reedukace“ také v teoretické části.

Během zkoumání žákovských řešení jsem však zjistila, že nemohu hovořit o „chybách“ v pravém slova smyslu. Již výše jsem popisovala podstatu chyb, kterých se žáci dopouštěli. Nejednalo se o matematické chyby v takové podobě, v jaké se s nimi setkáváme ve školní praxi. Čím více řešení jsem prozkoumala, tím více mě fascinovaly způsoby, jakými bylo možné řešení úlohy uchopit. Mnohé z nich byly originální, v zásadě dekonstruovaly úlohu a pojímaly ji z úplně jiného úhlu pohledu. Vznikaly nové rytmy, posloupnosti i závislosti. Některé z nich mě před nahlédnutím na žákovská řešení vůbec nenapadly.

Tento nový pohled mě přinutil ke změně struktury, názvu a obsahu komentářů v některých kapitolách. Pojmenovat úlohu řešenou žákem, který po svém interpretoval zadání, jako chybnou, mi nepřipadalo přesné. Proto jsem přestala hovořit o „chybovosti“ v jednotlivých polích úlohy, ale začala jsem přemýšlet v rovině „variability řešení“.

## 7 Vlastní výzkumné šetření s využitím reformulovaných úloh

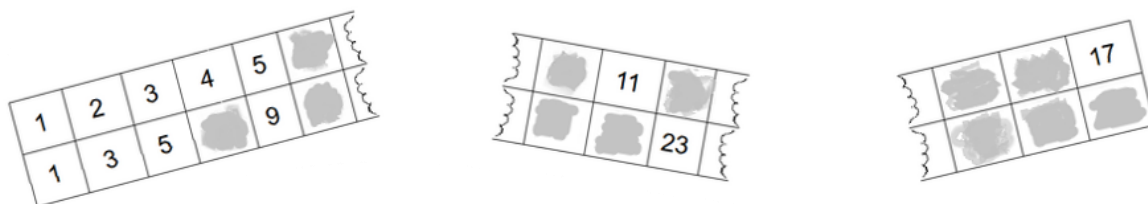
Pro vlastní výzkumné šetření na malém vzorku žáků jsem se rozhodla z následujícího důvodu: připadalo mi, že způsob zadání úlohy naváděl žáky k určitým způsobům řešení. Pokud by zadání bylo prezentováno v jiné formě, některým interpretacím (vedoucím k jiným než očekávaným výsledkům v jednotlivých polích) by se žáci vyhnuli. Úlohu pro 2. i 3. ročník jsem tedy dvakrát reformulovala.

### 7.1 Příprava vlastního výzkumného šetření

#### 7.1.1 Reformulace a) – změna rozmístění útržků

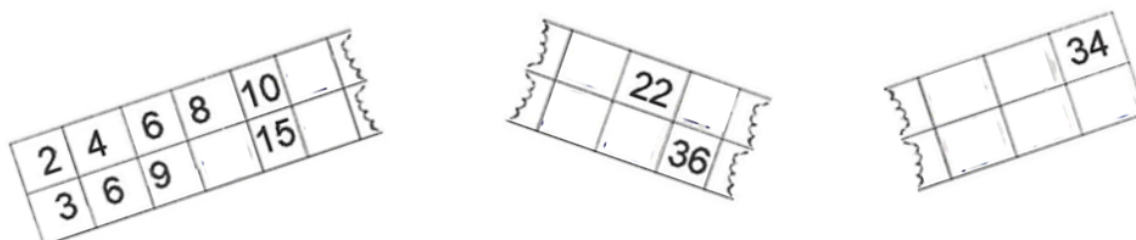
V prvním případě jsem změnila rozmístění jednotlivých útržků. Doufala jsem, že se pak žáci nebudou fixovat na velikost mezery mezi nimi, která je vedla k vepisování jednoho chybějícího čísla do první i druhé řady.

Petr si napsal na papír dvě řady čísel. Bratr mu některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.



Obrázek 7-1: Reformulace úlohy pro 2. ročník – změna rozmístění útržků

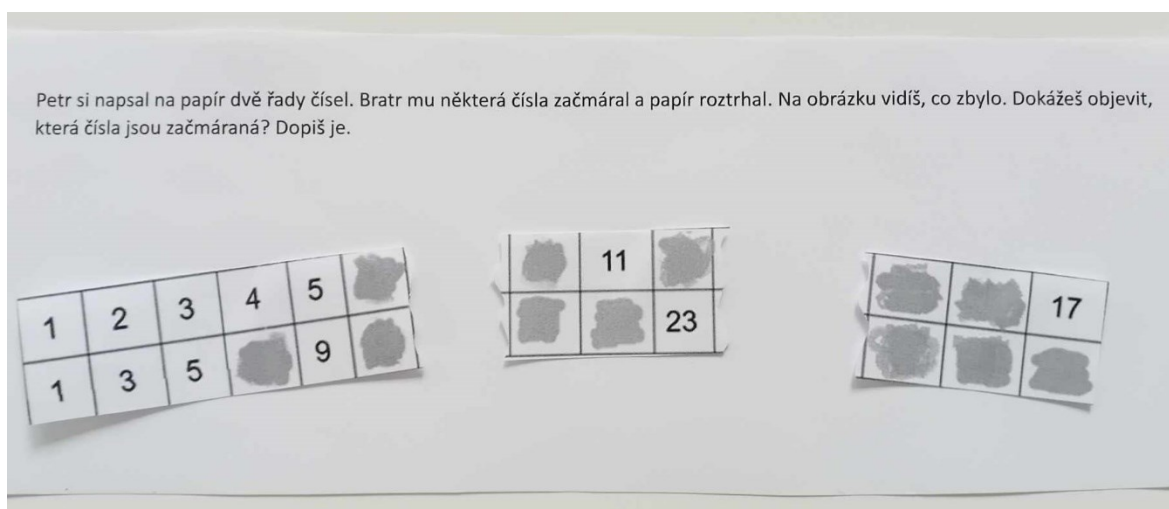
Petra si napsala na papír dvě řady čísel pod sebe podle nějakého pravidla. Bratr jí některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.



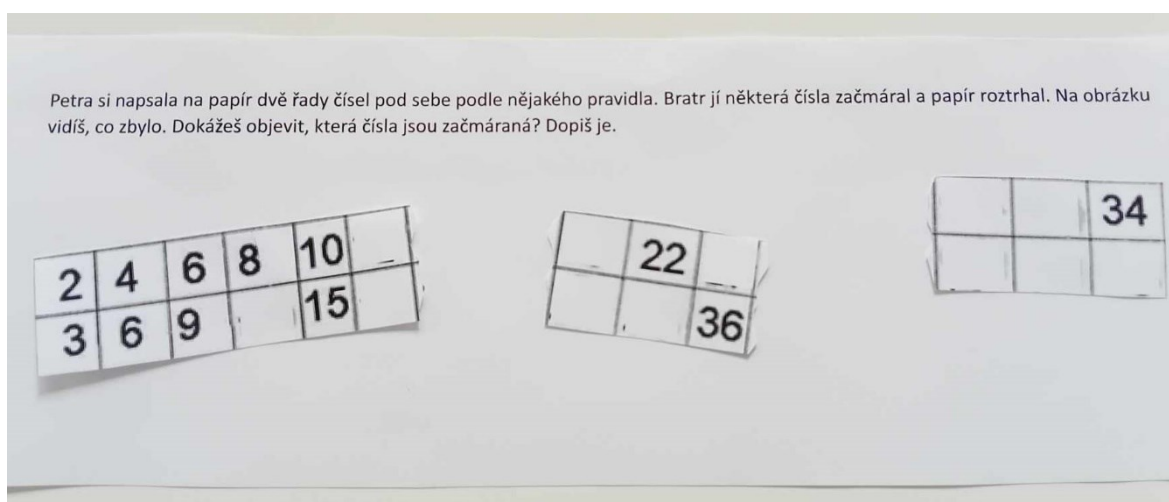
Obrázek 7-2: Reformulace úlohy pro 3. ročník – změna rozmístění útržků

### 7.1.2 Reformulace b) – manipulace s útržky

Ve druhém případě jsem připravila skutečné útržky, se kterými žáci mohli manipulovat. Na zadní straně měli popsánu lokalizaci (zda se daný útržek nachází vlevo, uprostřed, či vpravo). Zmenšila jsem otrhané okraje, aby žáky nenaváděly ke vpisování čísel. Při tomto způsobu řešení obdrželi žáci dlouhý prázdný pruh papíru se zadáním. Pod něj mohli skládat útržky dle svého uvážení. Sami si tak vytvářeli prostor pro případné dopisování chybějících čísel řady.



Obrázek 7-3: Reformulace úlohy pro 2. ročník – manipulace



Obrázek 7-4: Reformulace úlohy pro 3. ročník – manipulace

## 7.2 Realizace vlastního výzkumného šetření

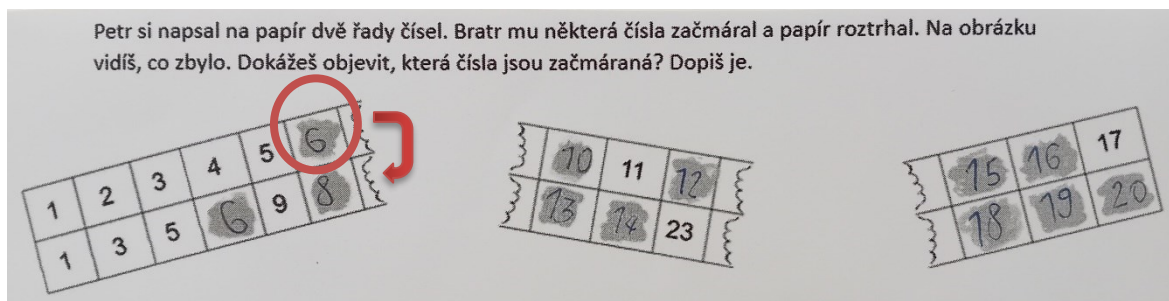
Pro výzkumné šetření jsem vybrala dvě náhodné dvojice žáků ze 2. ročníku a dvě náhodné dvojice žáků ze 3. ročníku. Každé dvojici z daného ročníku jsem zadala jiný typ reformulované úlohy. Žáky jsem pozorovala od začátku do konce řešení úlohy a jejich komentáře zaznamenala kurzívou. Textem typu Times New Roman (vel. 12) zapisuji své vlastní komentáře, které mě posléze napadaly ke konkrétním situacím.

### 7.2.1 Řešení žáků 2. ročníku: změna rozmístění útržků

Úlohu řešily dvě žákyně 2. ročníku v lavici. K dispozici měly lístek se zadáním (každá svůj vlastní) a dvě tužky. Zadání si četly samy. Řešení úlohy trvalo žákyním 2 minuty.

#### Průběh řešení

Komentář: Žákyně se neradily, každá pracovala samostatně. Po doplnění všech polí mi odevzdaly své lístky. Přiložila jsem pouze řešení Žákyně 1, protože se v něm objevovala nesprávná řešení, která ve výzkumu patřila k méně početným. Žákyně jsem se zpětně doptala na její úvahy, jelikož v průběhu nebyly komentovány.



Obrázek 7-5: Řešení úlohy pro 2. ročník – změna rozmístění

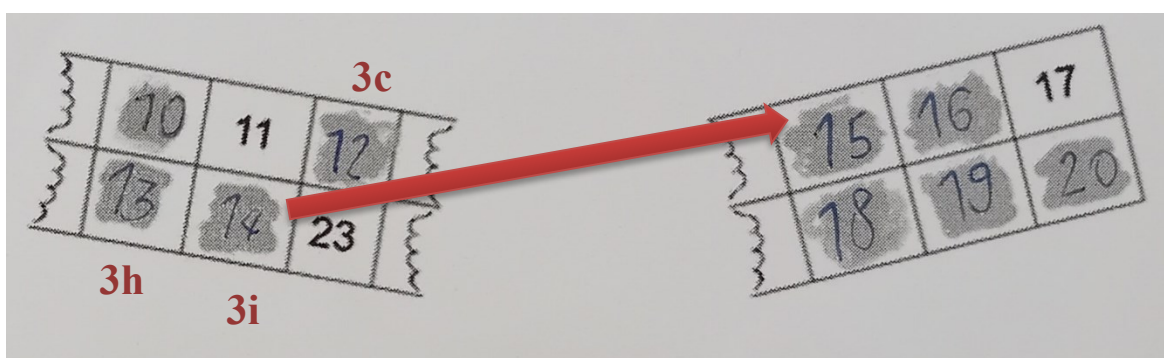
Zadavatel: „Zkus mi teď vysvětlit, proč jsi do polí napsala zrovna tato čísla. Co ta šestka?“

Žákyně 1: „Protože po pětce jde šestka.“

Zadavatel: „Viděla jsem, že po doplnění čísla 6 jsi pokračovala číslem 8 v dolní řadě. Proč zrovna 8?“

Žákyně 1: „No, tady jakože nebylo místo na 7, jak je to roztrhnuté. Pak je 8 a pak 9. A tady po pětce jde šestka.“ (ukazuje na číslo 6 v dolní řadě na prvním útržku)

Komentář: Žákyně 1 mi vysvětlila úvahu, která mě v průběhu rozboru žákovských řešení vůbec nenapadla. Vnímala, že lístek s úlohou byl nějak poškozen a chybí čísla, ale v úplně jiném směru, než původně bylo zamýšleno. Předpokládala, že chybějící číslo v řadě je 7 (v prostoru mezi dvěma útržky). Protože však chtěla vyřešit útržek jako samostatný celek, nepokračovala v řadě směrem doprava, ale dolů a doleva. Doplnila číslo 8, na které jí následně navazovalo zadané číslo 9.



Obrázek 7-6: Žákovské pojetí návaznosti mezi druhým a třetím útržkem

Zadavatel: „A co tato čísla?“ (ukazuje na prostřední útržek)

Žákyně 1: „Nejdřív jde 10, pak je 11 a pak jde 12.“

Zadavatel: „A ta spodní řada?“ (ukazuje na dolní řadu prostředního útržku)

Žákyně: „To je jakože 12 (pole 3c), 13 (pole h), 14 (pole 3i). A pak že jakože to pokračuje tady 15, 16, 17, 18, 19, 20.“ (ukazuje na třetí útržek)

### Shrnutí

Samostatná práce obou žákyň bez komentářů způsobila, že měly úlohu hotovou velmi rychle.

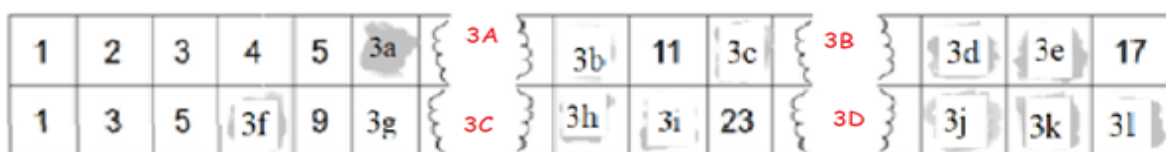
Díky pozorování Žákyně 1 jsem získala nová odůvodnění čísel v některých polích na prvním útržku. Klíčové pro její řešení bylo uchopení struktury úlohy. Každý útržek řešila zvlášť, chyběly úvahy nad provázaností číselných řad v horním a dolním řádku.

Žákyně 1 byla velice introvertní, mluvila tiše a nevýrazně. Zdráhala se odůvodňovat řešení, která se lišila od spolužačky.

## 7.2.2 Řešení žáků 2. ročníku: manipulace s útržky

Úlohu řešili dva žáci 2. ročníku v lavici. K dispozici měli lístek se zadáním (každý svůj vlastní) a dvě tužky. Zadání si četli sami. Řešení úlohy trvalo žákům 4 minuty.

### Průběh řešení



Obrázek 7-7: Identifikace polí v úloze pro 2. ročník

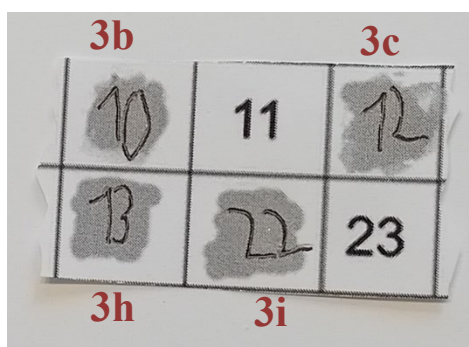
Žák 1: „Tady bude 6.“ (ukazuje na pole 3a)

Žák 2: „Dobře, máme tady pětku a po ní je šestka.“

Žák 1: „Mě napadlo, že bysme sem dali šestku (ukazuje na pole 3f) a sem osmičku (ukazuje na pole 3g).“

Žák 2: „Jakože to je taky dobrý nápad, protože 5, 6... a pak by to jako pokračovalo...a před devítkou je osmička...“

Komentář: I tito žáci provedli úvahu s vynechaným číslem 7 a pokračováním číselné řady ve druhém řádku ve směru zprava doleva.



Obrázek 7-8: Propojení horní a dolní řady

Žák 1: „Já už možná vím, pokud tady je 11 (ukazuje na zadané číslo na druhém útržku), tak tady bude desítka (pole 3b), pak 11, 12 (pole 3c), 13 (pole 3h)...“

Žák 2: „14...“

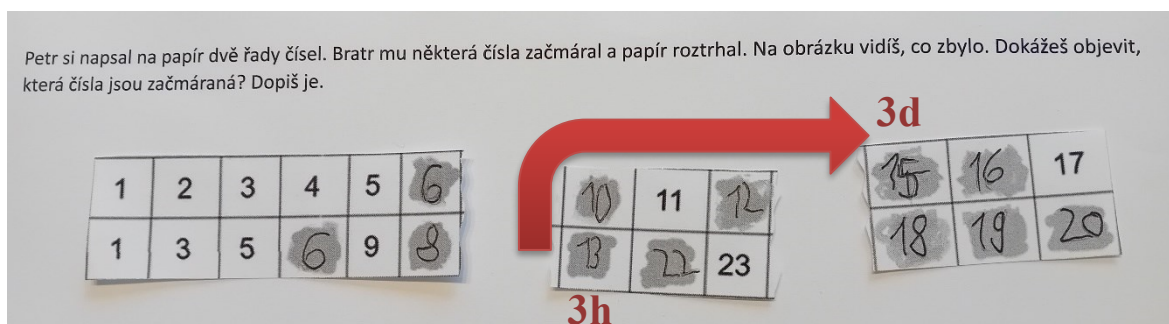
Žák 1: „A tady dáme 22 prostě (ukazuje na pole 3i), tam už není jiná šance.“

Komentář: Druhý útržek se žáci snažili řešit samostatně. Z horního řádku (10, 11, 12) pokračovali na dolní řádek. Žák 2 chtěl doplnit čísla 13, 14, ale pak oba narazili na zadané číslo 23. Aby to nevypadalo, že se zde toto číslo objevilo bez jakékoliv návaznosti, doplnili před něj nakonec číslo 22.

Žák 2: „Počkej, musíme nejdřív pospojovat tady ty věci.“ (bere do ruky útržky a snaží se je přiložit k sobě)

Žák 1: „Ale nám to nepasuje. Tak to nevím. To je tak těžký.“ (dopisuje čísla na poslední útržek).

Žák 2: „Pojď si to zkontrolovat. Jdem od konce?“



Obrázek 7-9: Řešení úlohy pro 2. ročník – manipulace

Komentář: V tuto chvíli začali žáci střídavě říkat čísla, která doplnili do polí, od posledního útržku. 20, 19, 18, 16, až se dostali k poli 3d. Žák 1 zde měl doplněné číslo 14, Žák 2 číslo 15.

Žák 1: „Já tady mám čtrnáctku.“

Žák 2: „15, ne? 15, 16.“

Žák 1: „Dobře, ale tady máme tu třináctku (ukazuje na pole 3h). Tady zas nemáme žádné číslo, ke kterému bychom mohli připojit tu patnáctku. To by tady musela být přece...“

Žák 2: „Ne, tak počkej, takže s tímhle souhlasíme, že tady bude 15, 16, 17...18, 19, 20. Souhlasíš?“

Žák 1: „Jo.“

Žák 2: „Dobře, takže přepiš si to a dáváme to pryč.“

Komentář: Žáci zkontrolovali zbylé útržky, kde již měli uvedená totožná čísla.

## Shrnutí

Žáci zabývající se úlohou s možností manipulace zvolili obdobné strategie pro doplnění polí jako žákyně, které řešily úlohu bez manipulace. Důvodem mohla být frekventovaná práce s prostředím Výstaviště v jejich třídě. Každý útržek považovali za dílčí samostatnou úlohu, proto se objevovaly nové posloupnosti propojující čísla horní a dolní řady. Byť ne zcela správně, přesto uvažovali o číslech již zadaných ve struktuře úlohy. Snažili se je propojit s vlastními vloženými čísly.

Na rozdíl od žákyň zde žáci velmi úzce spolupracovali a komentovali doplňovaná řešení. Oba byli velice otevření, reagovali na sebe, oceňovali své návrhy a argumentovali, když s nimi nesouhlasili. Připisují to jejich dosavadním zkušenostem s prací ve skupině, kterou často zažívají během výuky ve své třídě.

Úskalím práce s útržky byly opakované pokusy chlapců „lepit“ samostatné útržky dohromady. Viděli, že okraje neodpovídají, pokoušeli se dokonce o změnu pořadí útržků a o výměnu útržků mezi sebou (každý měl k dispozici své zadání).

Některá pole vyplnili samostatně, u těch provedli kontrolu. Zde byla patrná jistá komunikační neobratnost. Žák 1 se snažil argumentovat o správnosti svého řešení v poli 3d. Žák 2 ho však nenechal dokončit myšlenku a „vnutil“ mu své řešení, byť to doprovodil v tomto kontextu spíše řečnickou otázkou o odsouhlasení.

Žáci se opakovaně vyjadřovali k úloze jako celku. Připadala jim náročná, nepochopitelná. Měli pocit, že jim neustále něco neodpovídá, ať už se jednalo o čísla nebo o přikládání útržků.



### 7.2.3 Řešení žáků 3. ročníku: změna rozmístění útržků

Úlohu řešily dvě žákyně 3. ročníku v lavici. K dispozici měly lístek se zadáním (každá svůj vlastní) a dvě tužky. Zadání si četly samy. Řešení úlohy trvalo žákyním 4 minuty.

#### Průběh řešení

2	4	6	8	10	3a	3b	22	3c	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3h	3i	36	3j	3k	3l

Obrázek 7-10: Identifikace polí v úloze pro 3. ročník

Žákyně 1: „Jak to, počkej, jak to máme jakoby doplnit?“

Žákyně 2: „Takhle, koukej, už to mám. Dva, tři, čtyři... a kde je pětka ale?“

Komentář: Žákyně 2 nejprve našla úsek číselné řady 2, 3, 4 tak, že přecházela z jednoho řádku do druhého, jak naznačuje směr šipek u prvního útržku. Viděla pokračování číslem 6, ale 5 jí scházela. V tu chvíli zareagovala její spolužačka:

Žákyně 1: „2, 4, 6, 8, 10, 12.“ (doplňuje 12 do pole 3a)

Žákyně 2: „Jo. 3, 6, 9... tady bude 12 (ukazuje na pole 3f) a 17 (ukazuje na pole 3g).

Žákyně 1: „Nee, 18. 12 + 3 je 15 + 3 je 18.“

Komentář: Zde je patrný důsledek přecházení z jedné řady (od jednoho pravidla) do druhé (k druhému pravidlu). Žákyně 2 zůstala fixována na rozdíl čísel 2, který se snažila uplatnit ve druhém řádku. Spolužačkou byla upozorněna a než stačila zapsat chybný výsledek, opravila se.

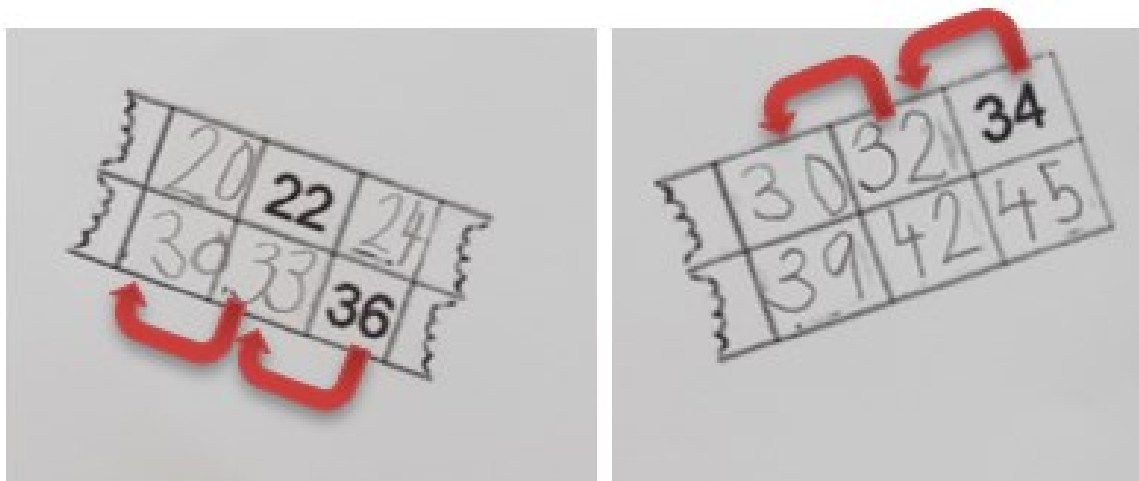
Žákyně 1: „2, 4, 6, 8, 10, 12...“

Žákyně 2: „20.“ (ukazuje na pole 3b)

Žákyně 1: „Počkej...12...16...Tady nemusí být 20 (ukazuje na pole 3b), protože dívej, 12, pak by mělo být 14.“

Žákyně 2: „Ale co když to třeba nepasuje k sobě?“ (dopisuje do polí 3b a 3c čísla 20 a 24)

Komentář: Žákyně 1 má potřebu pokračovat v řadě bez přerušení. Žákyně 2 si naproti tomu uvědomuje, že některá čísla v řadě chybí, řada není úplná.



Obrázek 7-11: Doplnování řady odzadu

Žákyně 1: „3, 6, 9, 12, 18, 21...ne...počkat... (klepe na číslo 36) ...33 (doplňuje do pole 3i), 30, tady bude 30, myslím.“ (doplňuje do pole 3h)

Žákyně 2: „34, 32 (doplňuje do pole 3e), 30 (doplňuje do pole 3d).“

Komentář: Při doplňování polí 3d, 3e, 3h, 3i je patrné, že žákyně postupovaly odzadu. Jako záchytný bod využily zadaná čísla ve struktuře. Od těchto čísel se vracely v řadě zpět a doplňovaly prázdná pole.

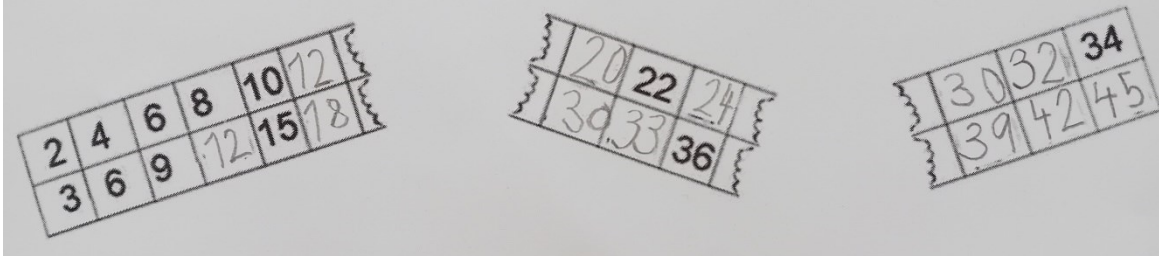
Žákyně 1: „A tohle je násobilka kolika?“ (ukazuje na pravý útržek, dolní řadu)

Žákyně 2: „Tohle je tři (ukazuje na dolní řadu) a tohle dvou (ukazuje na horní řadu).“

Žákyně 1: „Tak tady v podstatě můžeme dát co chceme, ne?“ (ukazuje na pravý útržek, dolní řadu)

Žákyně 2: „Ne, 36 (ukazuje na zadané číslo 36 na prostředním útržku),  $36 + 3$  je 39,  $39 + 3$  je 42,  $42 + 3$  je 45.“ (doplňuje pole 3j, 3k, 3l)

Petra si napsala na papír dvě řady čísel pod sebe podle nějakého pravidla. Bratr jí některá čísla začmáral a papír roztrhal. Na obrázku vidíš, co zbylo. Dokážeš objevit, která čísla jsou začmáraná? Dopiš je.



Obrázek 7-12: Řešení úlohy pro 3. ročník – změna rozmístění

### Shrnutí

Žákyně v průběhu řešení komunikovaly na dobré úrovni. Reagovaly na sebe, doplňovaly se, kladly si navzájem otázky.

Snažily se o „čisté“ řešení úlohy, nechtěly přepisovat, raději gumovaly.

Jejich spolupráce zde byla klíčová pro úspěšné řešení úlohy. Zatímco Žákyně 2 více působila dojmem, že vnímá správně celý kontext úlohy (dvě řady čísel s různými závislostmi, některá chybějící čísla), Žákyně 1 si naproti tomu všímala detailů a objevovala efektivní strategie řešení (doplňování čísel odzadu, oprava spolužačky, která zaměnila závislost v horním a dolním řádku).

Jejich řešení by patřilo do skupiny úspěšnějších. Chybně vyplnily pouze tři poslední pole. Ocenila jsem celkový náhled na úlohu a pojmenování pravidel, která v jednotlivých řádcích platí (násobky 2 v horní řadě, násobky 3 v dolní řadě).

## 7.2.4 Řešení žáků 3. ročníku: manipulace s útržky

Úlohu řešily dvě žákyně 3. ročníku na zemi. K dispozici měly lístek se zadáním, tři útržky a dvě tužky. Zadání si četly samy. Po přečtení jsem zdůraznila pozici útržků a žádoucí komentáře k jejich úvahám. Řešení úlohy trvalo žákyním 10 minut.

### Průběh řešení

Komentář: Žákyně si vzaly první útržek. Nejprve se zaměřily na druhou řadu.

2	4	6	8	10	3a	3A	3b	22	3c	3B	3d	3e	34
3	6	9	3f	15	3g	3C	3h	3i	36	3D	3j	3k	3l

Obrázek 7-13: Identifikace polí v úloze pro 3. ročník

Žákyně 1: „Tady bude 12.“ (ukazuje na pole 3f)

Žákyně 2: „Jo? Ne, počkej, není tam 11?“

Komentář: Žákyně 2 nejprve pozorovala první řadu, zatímco její spolužačka se rovnou dívala na druhou. Proto chtěla pokračovat s rozdílem 2 mezi čísly, který platí v první řadě, a po čísle 9 zapsat číslo 11. Spolužačka ji však přesvědčila.

Žákyně 1: „12, protože koukej: 3, 6, 9, 12... jde to po třech.“

Žákyně 2: „No jo! A tím pádem tady by muselo být 18.“

Žákyně 1: „Já to tam dopíšu.“

Žákyně 2: „A tady (ukazuje na pole 3a), když je to násobilka 2, tak tady by měla být 12.“

Žákyně 1: „Když je tady 36, tak tady (ukazuje na pole 3i) je možná 34...“

Komentář: Zde je patrný důsledek přeskokování z jedné řady do druhé, tuto potíž jsem odhadovala i při rozboru v předchozích kapitolách. Žákyně 1 o chvíli dříve doplnila číslo 12 do pole 3a. Stále myslela na řadu násobků 2. Při řešení druhé řady druhého útržku se od této

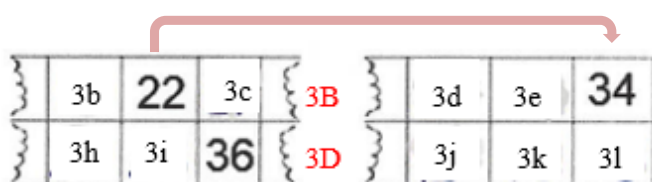
řady stále neoprostila a chtěla zachovat rozdíl 2 mezi čísly. Zajímavé bylo také pozorovat, že žákyně postupovaly od zadaných hodnot čili v tomto případě odzadu (36, 34...).

Žákyně 2: „Ne, tady bude 33 (ukazuje na pole 3i) a tady 30 (ukazuje na pole 3h), hele...“

Žákyně 1: „Možná, nevím...“

Žákyně 2: „Tak zkus tam dát 33...“

Žákyně 1: „Počkej, počkej, počkej...“ (bere do ruky druhý a třetí útržek)

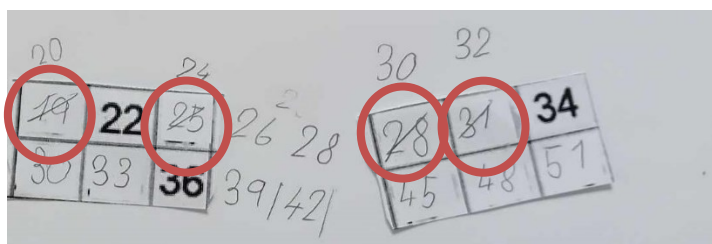


Obrázek 7-14: Propojení čísel 22 a 34 ze dvou různých útržků

Žákyně 1: „22, tady 24 (doplňuje do pole 3c), 26 (doplňuje do pole 3d), 28 (doplňuje do pole 3e), 34... hmm...“ (gumuje všechna zapsaná čísla)

Komentář: V této chvíli si žákyně všimla, že takto doplněná řada nefunguje, protože do ní nezapadá zadané číslo 34. Mnoho žáků, jejichž řešení jsem analyzovala, si tuto spojitost neuvědomilo. Čísla tam ponechali v této podobě.

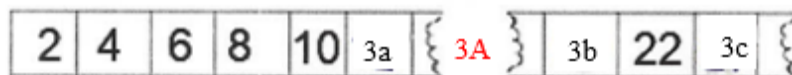
Žákyně 1: „Jo, tady, 3: 22, 25 (doplňuje do pole 3c), 28 (doplňuje do pole 3d), 31 (doplňuje do pole 3l), 34. Šlo by to? ... A tady by bylo 19.“ (doplňuje do pole 3b)



Obrázek 7-15: Vlastní posloupnost daná 2 čísly a počtem členů

Komentář: Po předchozím nezdaru žákyně vnímala nutnost propojit čísla 22 a 34 tak, aby řada plynule navazovala. Objevila, že může doplňovat čísla po třech a vytvořila řadu 22, 25, 28, 31, 34. Na základě této zákonitosti pak zpětně doplnila pole 3b, kam zapsala číslo 19.

Žákyně 2: „Mně ta 19 tam neseď (ukazuje na pole 3b). To je najednou tady liché číslo. Já bych to možná změnila. Ta 19 a pak 22 mi tam neseď.“

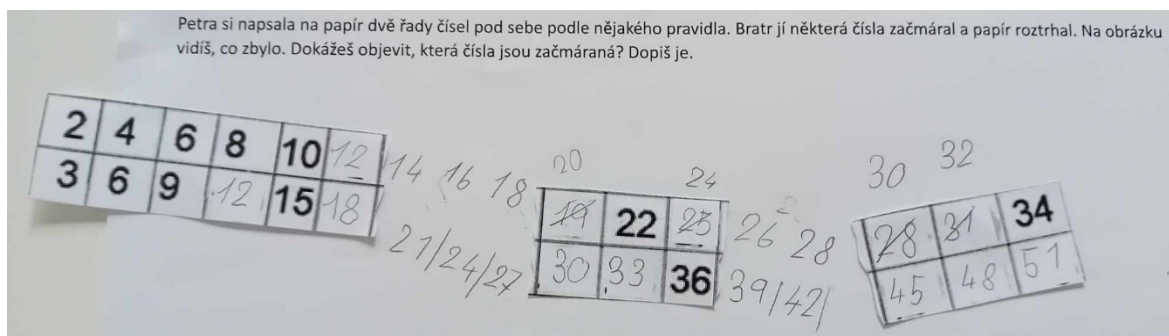


Obrázek 7-16: Horní řada, první a druhý útržek

Žákyně 1: „Aa, tam ale může ještě něco být (odsunuje od sebe druhý a třetí útržek a vytváří mezi nimi prostor). 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22.“ (klepe tužkou na pole a prostor mezi nimi)

Komentář: Žákyně 1 si po chvíli uvědomila, že některá čísla v řadě mohou chybět. Proto přijala argument od spolužačky (žákyně 2) a podívala se na řadu ještě jednou od začátku.

Doporučila jsem žákyni, aby si to, co říká (kam si poklepává), zároveň zapsala. Žákyně se chystala gumovat pole na druhém útržku, od čehož jsem ji odradila a poprosila ji, aby čísla pouze škrtnla a opravu napsala nad pole.



Obrázek 7-17: Řešení úlohy pro 3. ročník – manipulace

Komentář: Posléze žákyně doplnila s touto strategií horní řadu. Poté přešly na spodní řadu a říkaly si nahlas: „ $15 + 3 = 18$ ,  $18 + 3 = 21$ ,  $21 + 3 = 27$ , ...“ až do posledního čísla 51. Řešení mi odevzdaly s tím, že s ním jsou již spokojené.

### Shrnutí

Žákyně se snažily o pečlivé vypracování úlohy. Chybná čísla měly tendenci gumovat. Zdráhaly se zapisovat mezivýpočty. Čísla mezi útržky držely v paměti, než jsem je vyzvala k jejich zápisu na papír s tím, že je to žádoucí.

Bylo vidět, jak je náročné pro žákyně myslet na všechny faktory a podmínky úlohy. V první fázi řešení opomíjely fakt, že některá čísla v řadě chybí. Při přeskokování z jedné řady do druhé se opravovaly a upozorňovaly na správné závislosti mezi čísly.

Ukázalo se, že žákyně měly tendenci řešit nejprve první útržek, pak druhý, nakonec třetí. Nejvíce mě překvapilo vyplňování polí mezi čísly 22 a 34. Žákyně 1 tam objevila, že pokud bude postupovat po třech, zaplní pole rovnoměrně až do čísla 34. Potěšil mě AHA moment, kdy se žákyně 1 zamýšlela nad pochybností spolužačky nad číslem 19 v poli 3b a vzpomněla si, že mezi útržky nějaká čísla mohou chybět.

Kromě samotného přemýšlení žákyň nad řešením úlohy bylo zajímavé pozorovat jejich zapojení. Žákyně 1 byla evidentně extrovertní typ, prováděla veškerý zápis, vše nahlas komentovala. Žákyně 2 naproti tomu nebyla tak průbojná, přesto měla dobré postřehy, které obě dívky zavedly na správnou cestu.

Spolupráce ve dvojici zde byla efektivní, každá z dívek přinesla do řešení úlohy něco užitečného. Přes množství úvah, které je zaváděly jiným směrem, se díky svému přemýšlení a vzájemným komentářům dobraly výsledků, které byly v úloze vyžadovány.

## 7.3 Vyhodnocení vlastního výzkumného šetření

### Srovnání úspěšnosti s výzkumnými daty

Žáci 3. ročníku byli v porovnání s průměrem úspěšnější. Jedné dvojici se podařilo úlohu vyřešit zcela správně. Druhá dvojice se dopustila jedné z nejčastějších chybných úvah, když pokračovala ve druhé řadě tak, jako by mezi útržky nechybělo žádné číslo.

Oproti tomu žáci 2. ročníku nedosáhli takové úspěšnosti. Dostatečně se neorientovali v zadání a nepochopili úlohu jako celek tak, jak autoři zamýšleli. Kromě nejčastějších chyb v druhém řádku třetího útržku se dopouštěli chyb i na začátku druhé číselné posloupnosti, což nebylo ve výzkumu tak časté.

### Pochopení zadání a řešitelské strategie

Úskalím úlohy bylo pochopení zadání.

Malá část žáků si skutečně uvědomovala, že se jedná o roztržený lístek se zadáním, kde některé jeho části chybí. Případně si toto uvědomili až v pozdější fázi řešení. Z toho pramenily některé chyby, které se objevovaly. Žáci měli tendenci pokračovat v nepřerušené řadě na dalším útržku.

Ve všech případech se žáci rozhodli použít strategii vyřešení nejprve prvního útržku, poté druhého a nakonec třetího. U druháků to vedlo k tomu, že vůbec neuvažovali separátní závislost ve spodní řadě čísel. Třetíci se zase dopouštěli chyb z nepozornosti. Přenášeli rozdíl 2 mezi čísly do spodního řádku nebo rozdíl 3 mezi čísly do horního řádku.

Objevovaly se zcela nové úvahy nad řešeními v jednotlivých polích, na které jsem v průběhu analýzy dat žakovských řešení nepřišla. Nejprekvapivější pro mě byly způsoby propojování druhého a třetího útržku. Kromě toho jsem díky žákům 2. ročníku objevila odůvodnění chybných řešení z prvního útržku. Chyby mohly být ovlivněny prostředím Výstaviště, se kterým třída frekventovaně pracuje.

### Mezivýpočty v polích i v prostoru mezi nimi

Pozorování žáků ukázalo, že mají tendence k „čistému“ řešení úlohy. Nepsali si žádné poznámky nebo mezivýpočty kolem.



Dvojice žákyň 3. ročníku, která se jako jediná pokoušela jmenovat chybějící členy posloupností, to nejprve dělala pamětně s pomocí klepání tužky na papíře. Teprve po oznámení, že je žádoucí všechny úvahy nějak zaznamenat na papír, zapsala chybějící čísla mezi útržky.

Kromě toho žáci mnohem raději gumovali, než aby nesprávný výsledek škrtili a zapsali opravu nad něj nebo pod něj.

Zde vnímám přetrvávající obavu žáků z toho, aby učitel nebo rodič neviděl jejich neúspěšné pokusy o řešení. Učitel by měl žáky podpořit v tom, aby žákovské úvahy zůstaly viditelné. Může mu to pomoci při pátrání po příčině chyby, případně při hodnocení.

### **Spolupráce žáků ve dvojicích**

Ve třech ze čtyř případů dokázali žáci aktivně spolupracovat ve dvojicích. Otevřeně diskutovali nad řešeními. Reagovali na sebe, pokládali si otázky. Argumentovali své úvahy. Všechny dvojice byly tvořeny spolužáky, kteří si byli blízcí a kamarádili spolu. Míru komunikace tak mohla ovlivnit povaha žáků a míra extroverze, popř. introverze.

Hloubka a kvalita komentářů úzce souvisely s celkovým časem řešení úlohy. Zatímco žákyním 2. ročníku, které úlohu vyřešily samostatně, trvalo řešení necelé 2 minuty, u ostatních dvojic se čas řešení pohyboval od 4 do 10 minut. Více času stráveného řešením úlohy vedlo k úspěšnějšímu řešení. Žákyně, které jako jediné vyplnily celou úlohu bezchybně, totiž vyslovily největší počet úvah. Jejich řešení se vyvíjelo, až nakonec objevily to správné, se kterým byly spokojeny.

Z pozorování žáků soudím, že práce ve dvojicích přispěla k úspěšnějšímu řešení úlohy. V mnoha případech nastala situace, kdy jeden žák vyslovil dobrou úvahu, která posunula řešení úlohy. Vzápětí se však spletl při doplňování dalšího čísla, na což byl upozorněn druhým žákem. Myslím, že pokud by členové jediné zcela úspěšné dvojice pracovali samostatně, nedosáhli by 100% správného řešení.

### **Vliv formy zadání úlohy na výběr řešitelských strategií a úspěšnost řešení**

Z pozorování žáků nevyplývalo, že by forma zadání úlohy výrazně ovlivnila výběr řešitelských strategií či úspěšnost řešení žáků.

Manipulace s útržky způsobovala úskalí, když se je žáci pokoušeli spojovat nebo měnili jejich pořadí. Změna rozmístění útržků mohla částečně pomoci v tom, že žáci neměli tendenci považovat rovnoměrnou mezeru mezi nimi za prostor pro jedno chybějící číslo. V případě žáků 2. ročníku však usuzuji, že čísla mezi útržky nepsali z důvodu jiného pojetí úlohy jako celku.

Úlohu pro 2. ročník hodnotím jako velmi obtížnou.

Žáci se velmi fixovali na klasickou číselnou řadu, jejíž závislosti pak uplatňovali i ve spodním řádku. Řada lichých čísel je pro žáky navíc nepřirozená, nesetkávají se s ní často. Proto se jim jen velice těžko dařilo vnímat číselné řady odděleně, tím spíše, když řešili útržky samostatně jeden po druhém. Bylo by zajímavé pozorovat, jak by se úspěšnost řešení změnila, pokud by v dolním řádku byla řada sudých čísel (násobky 2).

Pro žáky 3. ročníku už byla úloha, myslím, na vhodné úrovni.

Za jeden z důvodů považuji velký kognitivní skok, kterého žáci dosáhnou za rok mezi 2. a 3. ročníkem. Vnímala jsem opravdu značný rozdíl mezi uvažováním druháků a třet'áků, když jsem pozorovala jejich spolupráci.

Dalším důvodem je práce s posloupností, která je žákům známá. Ve 2. a 3. ročníku se intenzivně věnují násobilce. Tím pádem na první pohled rozpoznají, že horní řada představuje násobky 2 a dolní řada násobky 3. Pak je pro ně jednodušší vnímat tyto řady samostatně a neuchylují se k hledání číselných pravidelností mezi nimi, jako se tomu stávalo u žáků 2. ročníku.

## Závěr

### Naplnění stanovených cílů

Cíl shromáždit úlohy zaměřené na témata rytmu, číselných řad a pravidelností byl naplněn, prozkoumala jsem tři řady učebnic tří různých nakladatelství. Shrnujícím výstupem je tabulka s přehledem typů úloh a jejich zastoupením v učebnicích. Lze konstatovat, že s podobným komplexním typem úlohy se žáci v učebnicích nesetkají. Největší podobnost vykazaly úlohy z kapitoly [2.2.9](#) zaměřené na tabulky závislostí z učebnic nakladatelství H-mat.

Podařilo se mi propojit teoretickou a výzkumnou část práce. Toho jsem dosáhla skrze stanovení cílů teoretických i výzkumných a jejich zhodnocení v závěru. Kapitulu o nabývání prekonceptů v teoretické části jsem strukturovala tak, aby mi pomohla s rozбором úloh v části výzkumné. Očekávání od žákovských řešení ve výzkumné části jsem zakládala na průzkumu učebnic v části teoretické.

Za cíl jsem si stanovila také přemýšlet nad gradacemi úloh a reedukačními strategiemi. S postupujícím psaním se mi dařilo stále lépe nacházet nové možnosti. Naplnění cíle pozoruji i ve své pedagogické praxi. Daří se mi efektivněji individualizovat a diferenciovat výuku. Kromě toho hlouběji pátrám po příčinách žákovských chyb a pokouším se o takovou nápravu, aby byla pro žáky do budoucnosti přínosná.

Cílem výzkumné části bylo analyzovat žákovská řešení úloh z diagnostických testů. Provedla jsem statistické vyhodnocení dat. Každé pole úlohy jsem následně rozebrala z hlediska možné interpretace výsledku a následné reedukace.

Realizovala jsem také vlastní výzkumné šetření na malém vzorku žáků, jehož cílem bylo posoudit vliv formy zadání na žáky zvolené řešitelské strategie a úspěšnost řešení. Připravila jsem upravenou strukturu zadání, kterou jsem zadala žákům 2. a 3. ročníku. Závěrem bylo, že úloha je sama o sobě náročná a forma jejího zadání neovlivňuje ve významné míře volbu strategie a úspěšnost řešení žáků. Toto šetření bylo prospěšné i z toho důvodu, že se objevily dosud nepopsané interpretace některých číselných hodnot, které žáci použili. Z šetření vyplynulo, že žáci 3. ročníku jsou kognitivně daleko vyspělejší a na úlohu dokázali nahlížet jako na celek. Žáci 2. ročníku se naproti tomu fixovali na dílčí útržky.

### **Přínos diplomové práce**

Tato diplomová práce měla svůj významný podíl při zpracování výzkumných dat z projektu *Učitelské porozumění příčinám školní neúspěšnosti a efektivita pedagogických intervencí*. Díky ní získali řešitelé projektu podrobné statistické údaje o žákovských řešeních jedné z úloh. Kromě toho se práce velice podrobně zabývala procesem pochopení příčin neúspěšnosti. Interpretace a reedukační strategie jednotlivých chyb mohou sloužit jako podklad pro další odborné příspěvky.

Současně byla diplomová práce velmi užitečná i pro mou budoucí praxi. Naučila jsem se zpracovávat velký vzorek výzkumných dat, což mi může pomoci při případné akademické práci. Seznámila jsem se s různými řadami učebnic matematiky, které jsem dosud neznala. Jejich porovnání mi udalo preferenci, z jakého typu učebnic bych ráda učila své žáky.

Práce mě ale především naučila přemýšlet nad různými interpretacemi chybných řešení. Ne každé řešení, které považuji za chybné, musí být skutečně chybou. Kromě toho jsem se zamýšlela nad různými reedukačními strategiemi, které mohu v praxi využít.

### **Další možnosti zpracování tématu – návaznost na diplomovou práci**

V rámci dalšího zkoumání by bylo možné se zaměřit na diagnostické testy jako celek a posoudit, jak souvisí úspěšnost řešení této úlohy s úspěšností ve zbylých úlohách. Další možností je provést výzkumné šetření v příslušných ročnících základních škol a zadat jim totožnou úlohou a) bez jakéhokoliv komentáře, b) s učitelovým komentářem k zadání. Alternativou je pak reformulace slovních instrukcí k úloze. Za pokus by stálo i dodat žákům ukázkový příklad před samotnou strukturou, do které vpisují vlastní řešení. Kromě výše uvedených možností se nabízí provést podrobný rozbor všech (i statisticky méně významnějších) chybných řešení. Dále bych doporučila analýzu žákovských korektur – zaměřit se na testy, ve kterých žáci gumovali, škrtili, přepisovali nebo vpisovali čísla navíc jako pomůcku k vyřešení úlohy. Bylo by možné mnou připravené výzkumné šetření realizovat na větším vzorku žáků a výsledky kvantifikovat.

## Seznam použitých informačních zdrojů

### Zdroje odborné literatury

HEJNÝ, Milan. Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, Milan; NOVOTNÁ, Jarmila a VONDROVÁ, Naďa (ed.). Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HOŠPESOVÁ, Alena; VONDROVÁ, Naďa a TICHÁ, Marie (ed.). Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007. ISBN 978-80-7394-052-2.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [Online]. (2021). Praha: MŠMT. Retrieved from <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>

RENDL, Miroslav a VONDROVÁ, Naďa. Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

VALIŠOVÁ, Alena; KASÍKOVÁ, Hana a BUREŠ, Miroslav. Pedagogika pro učitele. 2., rozš. a aktualiz. vyd. Pedagogika (Grada). Praha: Grada, 2011. ISBN 978-80-247-3357-9.

VALIŠOVÁ, Alena a KOVAŘÍKOVÁ, Miroslava. Obecná didaktika a její širší pedagogické souvislosti v úkolech a cvičeních. Pedagogika (Grada). Praha: Grada, 2021. ISBN 978-80-271-3249-2.

## **Učebnice matematiky pro 1.-2. ročník ZŠ**

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. Šesté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-048-3.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. Šesté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-053-7.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: učebnice pro 1. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. Šesté vydání. Ilustroval Andrea SCHINDLEROVÁ. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-054-4.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Procvičujeme s Matýskem: počítání do pěti a do deseti : pracovní sešit pro 1. ročník základní školy. Čtvrté vydání. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-051-3.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. Čtvrté vydání. Duhová řada. Brno: Nová škola, 2019. ISBN 978-80-7600-082-7.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. Třetí vydání. Brno: Nová škola, 2019-. ISBN 978-80-7600-083-4.

DOLEŽALOVÁ, Alena Bára; NOVOTNÝ, Miloš a NOVÁK, František. Matýskova matematika: pro 2. ročník základní školy vytvořená v souladu s RVP ZV. Čtvrté vydání. Brno: Nová škola, 2019-. ISBN 978-80-7600-084-1.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; KUBÍČKOVÁ, Alena a ŠPAČKOVÁ, Ivona. Hravá matematika 1: pracovní učebnice pro 1. ročník ZŠ. 2. vydání. Praha: Taktik, 2019. ISBN 978-80-7563-182-4.

FALTINOVÁ, Magdaléna; PÍTOVÁ, Lenka; ŠVIHLOVÁ, Zuzana; ŠPAČKOVÁ, Ivona a OLŽBUTOVÁ, Jana. Hravá matematika 2: pracovní učebnice pro 2. ročník ZŠ : v souladu s RVP ZV. 3. vydání. Praha: Taktik, 2020. ISBN 978-80-7563-282-1.

HEJNÝ, Milan. Matematika 1. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 9788088247012.

HEJNÝ, Milan. Matematika 1. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 9788088247029.

HEJNÝ, Milan. Matematika 1. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2018. ISBN 9788088247036.

HEJNÝ, Milan. Matematika 2. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 9788088247166.

HEJNÝ, Milan. Matematika 2. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 9788088247173.

HEJNÝ, Milan. Matematika 2. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 9788088247180.