Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metody řešení soustav lineárních rovnic

Methods of solving systems of linear equations

Petra Šotolová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání (B0114A170007)

Studijní obor: B M 20 (0114RA170007)

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Metody řešení soustav lineárních rovnic potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 15. 4. 2024

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce, docentovi Antonínovi Jančaříkovi, za jeho cenný čas, který mi věnoval při vedení mé práce, za poskytnuté zdroje a upřímné jednání. Mé rodině děkuji za jejich neocenitelnou podporu v mém životě a studiu. Neméně díků si zaslouží má kamarádka Martina H. za korekturu práce. Závěrem chci poděkovat svým přátelům, kolegům a příteli za to, že jsou tu pro mě, když je to nejvíce potřeba.

ABSTRAKT

Má bakalářská práce je zaměřena na metody řešení soustav lineárních rovnic. Cílem je vysvětlit aplikaci daných metod řešení soustav lineárních rovnic a pro každou metodu přiřazení výhod a typ soustavy, pro kterou je tato metoda výhodná.

Práce by měla být vhodná pro žáky základní i střední školy, pro studenty vysoké školy i osoby matematiku nestudující.

Je zde popsána metoda dosazovací, sčítací, srovnávací, grafická, Gaussova eliminace, Gauss-Jordanova eliminace, inverzní matice a Cramerovo pravidlo a jejich využití při řešení soustav dvou a více lineárních rovnic o dvou a více neznámých. Obsahuje obecné vysvětlení a uvedení konkrétního postupu na příkladech, výhody a nevýhody dané metody a typy soustav, u kterých bychom tuto metodu použili.

Práce se zabývá počtem řešení soustav rovnic v závislosti na podobě soustavy. Zároveň vysvětluje základní pojmy a uvádí zjednodušeně definice pojmů, se kterými pracuje.

KLÍČOVÁ SLOVA

soustava rovnic, výpočetní metody, 2 a více neznámých, grafické řešení, matice, eliminace, Cramerovo pravidlo, lineární algebra

ABSTRACT

My bachelor’s thesis is focused on methods for solving systems of linear equations. Its aim is to explain the application of these methods for solving systems of linear equations and to assign advantages and the type of system for which each method is advantageous.

The thesis should be suitable for elementary and secondary school students, university students, as well as individuals not studying mathematics. It describes substitution method, addition method, comparison method, graphical method, Gaussian elimination, Gauss-Jordan elimination, inverse matrix and Cramer's rule and their application in solving systems of two or more linear equations with two or more unknowns. It includes a general explanation and a specific procedure with examples, advantages and disadvantages of each method, and types of systems for which the method would be used.

The thesis examines the number of solutions of systems of equations depending on the form of the system. It also explains basic concepts and provides simplified definitions of the terms used.

KEYWORDS

system of equations, computational methods, 2 and more unknowns, graphical solution, matrix, elimination, Cramer’s rule, linear algebra

Obsah

Úvod

Pro psaní své bakalářské práce jsem si vybrala své nejbližší téma, metody řešení soustav lineárních rovnic.

V učebnicích a na internetu se nachází spousta návodů, jak dané metody použít, ale nenašla jsem porovnání metod mezi sebou a doporučení jakou metodu použít na dané soustavy. Myšlenku porovnávat metody mezi sebou ve mně vyvolal středoškolský úkol, ve kterém se řešila jedna soustava tří rovnic o třech neznámých pomocí metody dosazovací, sčítací, grafické, Gauss-Jordanovy eliminace, inverzní matice a Cramerova pravidla. Práce je kromě těchto metod rozšířena o metodu srovnávací a Gaussovu eliminaci.

Zároveň mi chybí elektronický zdroj, který by jednoduše a pochopitelně popsal metody vyučované na základní, střední i vysoké škole bez složitých informací navíc.

Cílem mé práce je vysvětlit aplikaci daných metod řešení soustav lineárních rovnic a přiřadit ke každé metodě její výhody a typ soustavy, pro kterou je tato metoda výhodná.

Sama se učím chápat matematiku na příkladech, a proto jsem se rozhodla tímto způsobem zpracovat celou bakalářskou práci.

Práce je psaná tak, aby byla srozumitelná pro žáky základní i střední školy, pro studenty vysoké školy i osoby matematiku nestudující. Dělí se na dvě kapitoly, přičemž v první kapitole je obecně vysvětleno, co jsou to soustavy lineárních rovnic a jaké jsou úpravy, které můžeme při řešení rovnic použít. V druhé kapitole jsou popsány a vysvětleny jednotlivé metody řešení soustav rovnic, jsou zde uvedeny příklady řešení různých soustav, výhody dané metody a typy soustav, u kterých bychom danou metodu použili.

1 Lineární rovnice a jejich soustavy

1.1 Lineární rovnice

Rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, v nichž se může vyskytovat jedno a více písmen (x, y, z, t apod.) označujících tzv. neznámou. Rovnice lze dělit dle počtu neznámých na rovnice s jednou neznámou, například:

$$3x - 2 = 2x + 5, \tag{1.1.1}$$

rovnice se dvěma neznámými, například:

$$12x - 7y = 2y + 4. \tag{1.1.2}$$

Analogicky se třemi, čtyřmi, pěti neznámými atd. (Zhouf, 2019)

Dosazováním čísel z daného definičního oboru (např. reálná čísla nebo komplexní čísla) za neznámou tak, aby po jejich dosazení byly výrazy na pravé i levé straně definovány (v daném definičním oboru), získáme platné nebo neplatné rovnosti. Například pokud za x v rovnici (2.1.8) dosadíme číslo 7, získáme platnou rovnost:

$$3 \cdot 7 - 2 = 2 \cdot 7 + 5$$

$$19 = 19.$$

Naopak pokud v rovnici (1.1.2) dosadíme za x číslo 2 a za y číslo 3, získáme neplatnou rovnost:

$$12 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \neq 2 \cdot 3 + 4$$

$$3 \neq 10.$$

Čísla, jejichž dosazením do rovnice za neznámé získáme platnou rovnost, se nazývají řešením rovnice, nebo taktéž kořeny rovnice. V jiných matematických textech se můžeme setkat s označením kořenu rovnice jako čísla, které danou rovnici *splňuje* nebo jí *vyhovuje*. Číslo $x = 7$ je tím pádem řešením rovnice (2.1.8) a čísla $x = 2$ a $y = 3$ nejsou řešením rovnice (1.1.2).

Vyřešení rovnice je nalezení *všech* jejích řešení neboli nalezení množiny jejích řešení. Množina řešení rovnice je obvykle označována písmenem K, P nebo M apod. Například řešení rovnice (2.1.8) můžeme zapsat jako $K = \{7\}$. (Charvát et al., 2009)

Pro všechny nalezené kořeny rovnice je vhodné provést zkoušku. Tu provedeme dosazením nalezené hodnoty za danou neznámou. Pokud po dosazení získáme platnou rovnost, je dané řešení správné. Pomocí zkoušky ověříme, zda je naše řešení správné, nezjistíme však, zda jsme nalezli všechna řešení.

Lineární rovnice s jednou neznámou jsou rovnice ve tvaru $ax + b = 0$ kde $a, b \in$ R. Výraz $ax + b = 0,$ kde $a \neq 0,\ a, b \in R$ nazýváme lineární dvojčlen. Lineárními rovnicemi nazýváme všechny rovnice, které lze převést do tvaru $ax + b = 0$ pomocí tzv. *ekvivalentních úprav*. Číslo a nazveme *lineární koeficient* a číslo b *absolutní koeficient* (*absolutní člen*). Lineární rovnice se dvěma neznámými můžeme převést do tvaru $ax + by + c = 0$ kde $a, b, c \in R.$ Podobně pro rovnice s více neznámými. (Cizlerová et al., 2013)

1.2 Ekvivalentní úpravy rovnic

Při postupu hledání řešení rovnice píšeme postupně další rovnice, které vznikají z předchozí rovnice. Cílem úprav původní rovnice je získat rovnici u níž známe kořeny nebo je dokážeme snadno určit. Tedy nejlépe do rovnice ve formě $x = a$, kde x je neznámá a a je číslo z definičního oboru. Použité úpravy musí zachovat kořeny původní rovnice, tedy rovnice vzniklé danými úpravami musí mít stejné kořeny. Tyto úpravy nazýváme *důsledkové*, taktéž *implikační*. V případě důsledkových úprav můžeme získat rovnici, která má stejné kořeny jako původní rovnice, ale zároveň získáme kořeny navíc, které jsou řešením pouze druhé rovnice, ale nejsou řešením první rovnice. Takovou úpravou je například umocnění obou stran rovnice.

Mezi důsledkové úpravy patří tzv. *ekvivalentní* úpravy. Těmito úpravami převedeme původní rovnici na rovnici se shodnou množinou všech kořenů, tedy všechny kořeny jedné rovnice jsou i kořeny druhé rovnice a naopak. Ekvivalentními úpravami lze převést získanou rovnici opět na rovnici původní. Tyto rovnice se nazývají navzájem ekvivalentní. Ekvivalentní rovnice mají společný definiční obor. (Polák, 2008)

Zde jsou nejdůležitější ekvivalentní úpravy, se kterými se setkáme při řešení lineárních rovnic:

Záměna levé a pravé strany rovnice

Platí-li $x + 3 = 2x - 12$, pak zároveň platí i $2x - 12 = x + 3$.

Přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice

Například pokud máme rovnici

$$x - 3 = 7, \tag{1.2.1}$$

můžeme k oběma stranám rovnice přičíst číslo 3 a tím nalézt řešení rovnice:

$$x - 3 + 3 = 7 + 3$$
$$x = 10.$$

Lze přidat číslo kladné i záporné neboli stejné číslo můžeme k oběma stranám rovnice přičíst nebo od obou stran rovnice odečíst.

Přičtení stejného násobku neznámé k oběma stranám rovnice

Například pokud máme rovnici

$$3x = 7 + 2x, \tag{1.2.2}$$

můžeme od obou stran rovnice odečíst $2x$ a tím nalézt řešení rovnice:

$$3x - 2x = 7 + 2x - 2x$$
$$x = 7.$$

Nahrazení libovolné strany rovnice výrazem, který se jí rovná

Máme-li rovnici $y = x$ a zároveň platí rovnice $x = 25$, můžeme pravou stranu první rovnice nahradit pravou stranou druhé rovnice, protože jsou si rovny, a získat tak kořen y: $y = 25$.

Vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem

Rovnici můžeme vynásobit nebo vydělit kterýmkoliv číslem různým od nuly. Rozumíme tím vynásobení/vydělení obou stran rovnice. Například rovnici

$$2x = 8$$

vydělíme číslem 2 (neboli vynásobíme číslem $\frac{1}{2}$) a získáme řešení:

$$x = 4.$$

Výše uvedené úpravy rovnic můžeme kombinovat a zároveň nezáleží na jejich pořadí, množina řešení se nemění. Jednotlivé členy na obou stranách rovnice můžeme mezi sebou sčítat. (Charvát et al., 2009)

Nikdy nedělíme strany rovnice stejným výrazem s neznámou, protože tato úprava vede ke ztrátě některých kořenů. Například pokud rovnici $x^2 = 4x$ vydělíme neznámou x, získáme jedno řešení $x = 4$. Existuje však ještě jeden kořen ($x = 0$), který jsme ztratili použitím nepovolené úpravy. Tato úprava není ekvivalentní a zároveň ani důsledková. (Cizlerová et al., 2013)

1.3 Soustavy rovnic

Soustava m rovnic je soubor m rovnic o n společných neznámých $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Řešením soustavy rovnic je uspořádaná n-tice, která vyhovuje všem rovnicím v soustavě současně.

Začněme úlohou:

$$3x - 4y = 12. \tag{1.3.1}$$

Není náročné uhodnout, že například dvojice čísel $x = 4$ a $y = 0$ této rovnici vyhovují. Jedním z řešení rovnice (1.3.1) je tzv. *uspořádaná dvojice* $(x;\ y) = (4;\ 0)$. Dalšími řešeními jsou uspořádané dvojice $(0; -3)(8;\ 3), \left(6;\ \frac{3}{2}\right), \left(-2;\ -\frac{9}{2}\right)$ atd. Takových řešení je nekonečně mnoho. Lze je zapsat pomocí parametru, například t. Parametr může nabývat libovolných hodnot, což vede k nekonečně mnoha řešením soustavy. K parametru zapisujeme číselný obor, ze kterého můžeme za parametr dosadit. Například v rovnici (1.3.1) můžeme zavést parametr $y = t\ (\ t \in R)$ a řešením bude $\left(4 + \frac{4}{3}t;\ t\right)$, případně zavedeme parametr $x = t\ (\ t \in R)$ a řešením bude $(t; \frac{3}{4}t - 3)$. Množinu K všech řešení můžeme například zapsat jako:

$$K = \left\{\left(4 + \frac{4}{3}t;\ t\right), t \in R\right\}.$$

Parametr můžeme zvolit libovolně. Lze se tak například zbavit zlomků v zápisu určením parametru $y = 3t$ ($t \in R$):

$$K = \{(4 + 4t;\ 3t), t \in R\}.$$

Parametr nemusíme označovat jiným písmenem, ale můžeme ponechat danou neznámou. Například pokud zvolíme parametr y ($y \in R$), pak množinou řešení rovnice (2.1.8) bude:

$$K = \left\{\left(4 + \frac{4}{3}y;\ y\right), y \in R\right\}.$$

Zápis pomocí parametru využijeme při řešení soustavy rovnic, kde je více neznámých než rovnic. V rovnici, kde jsou dvě a více neznámých, bude vždy jedna záviset na druhé. Každé řešení, pro které je potřeba zavést parametr, je možné zapsat vícero způsoby.

Uvedená rovnice byla se dvěma neznámými. Můžeme mít rovnici se třemi neznámými, čtyřmi, pěti, šesti a více. Jejich řešením je pak uspořádaná trojice, čtveřice, pětice a tak dále. Obecně toto řešení nazýváme uspořádanou *n-ticí*. Ekvivalentní úpravy pro rovnice s více neznámými jsou shodné s ekvivalentními úpravami pro jednu neznámou.

K rovnici (1.3.1) přidáme druhou rovnici (1.3.2):

$$3x - 8y = 0. \tag{1.3.2}$$

Řešením této rovnice při dosazení parametru $y = 3t$ ($t \in R$) je $K = \{(8t; 3t), t \in R\}$.

Rovnice (1.3.1) a (1.3.2) lze nazvat *soustavou rovnic* a jejím řešením je uspořádaná dvojice $(8; 3)$. V následující kapitole si ukážeme, jak toto řešení nalézt.

Přidáním druhé rovnice jsme získali *soustavu dvou rovnic o dvou neznámých*. Tato soustava rovnic má jedno řešení. Když jsme měli jednu rovnici a dvě neznámé, získali jsme nekonečně mnoho řešení. Mohli bychom předpokládat, že pokud je počet rovnic roven počtu neznámých, získáme jedno řešení. Počet řešení se ale odvíjí nejen dle počtu neznámých a počtu rovnic, ale závisí i na konkrétních rovnicích.

Rovnice soustavy totiž mohou být tzv. *lineárně závislé*. Rovnice v soustavě jsou lineárně závislé, pokud lze jednu rovnici vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních rovnic v soustavě. To znamená, že jednu z rovnic lze získat přičtením nebo odečtením n-násobku ostatních rovnic v soustavě. Pokud ani jednu z rovnic nelze získat lineární kombinací ostatních, nazýváme rovnice *lineárně nezávislé*.

Například u soustavy rovnic (1.3.3) získáme třetí rovnici, pokud sečteme členy první a druhé rovnice.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 3x - 4y + z &= 9 \\ 4x - 3y + 2z &= 11 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Třetí rovnice je lineární kombinací první a druhé rovnice a soustava rovnic je v důsledku toho lineárně závislá. Tato soustava by měla nekonečně mnoho řešení.

Zároveň soustava nesmí obsahovat ekvivalentní a duplicitní rovnice a žádná z rovnic nesmí být ekvivalentními úpravami převedena na rovnici $0 = 0$. Například $x = x$, nebo $0x + 0y + 0z = 0$. Tyto rovnice nám v řešení nepomohou. Dále je budeme označovat jako rovnice typu $0 = 0$.

Zároveň můžeme mít soustavu rovnic, která nemá žádné řešení. V tomto případě neexistuje žádná uspořádaná n-tice, která by vyhovovala všem rovnicím současně. Například:

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Tyto rovnice jsou rozporuplné čili se úplně vyvracejí. Můžeme se setkat s označením *nekonzistentní* rovnice. Soustava nemá žádné řešení, protože neexistuje žádná dvojice $(x;\ y)$, která by vyhovovala oběma rovnicím současně. Domněnka, že všechny soustavy n rovnic o n neznámých mají jedno řešení, je mylná. (Charvát et al., 2009)

Máme-li tedy méně rovnic než neznámých, obvykle získáme nekonečný počet řešení, které lze elegantně zapsat pomocí parametru. Výjimkou by byly například soustavy obsahující nekonzistentní rovnice (viz (1.3.4)). Máme-li shodný počet rovnic a neznámých, získáváme jedno řešení v případě, že rovnice jsou lineárně nezávislé, nejsou vzájemně rozporuplné, nejsou ekvivalentní a soustava neobsahuje duplicitní rovnice a rovnice, které lze ekvivalentními úpravami změnit na rovnici $0 = 0$.

Máme-li více rovnic než neznámých, opět můžeme mít nekonečně mnoho řešení i žádné řešení. Všechny případy si uvedeme v následující kapitole.

Získáme právě jedno řešení v případě, že dané řešení splňují všechny rovnice. V tomto případě musí být rovnice „navíc“ (soustava tří rovnic o dvou neznámých obsahuje právě jednu rovnici navíc, soustava čtyř rovnic o dvou neznámých obsahuje právě dvě rovnice navíc atd.) lineárně závislá nebo násobkem jedné z rovnic, případně musí být ekvivalentními úpravami možné změnit ji na rovnici typu $0 = 0$. Více si o tomto případě řekneme u grafického řešení (viz kapitola 2.4 Grafické řešení). Nyní si to ukážeme na příkladech:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ 3x + y &= 11. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Třetí rovnice je součtem dvojnásobku první rovnice a druhé rovnice. Soustava je tedy lineárně závislá. Každé dvě rovnice jsou však vzájemně nezávislé a lze z nich určit kořeny, které platí i pro třetí rovnici. Soustava (1.3.5) má jedno řešení $(3;\ 2)$.

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ 2x + 2y &= 10 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

V soustavě (1.3.6) je třetí rovnice dvojnásobkem první. K určení řešení nám však stačí dvě rovnice, v tomto případě první a druhá nebo druhá a třetí. Zbylou rovnici můžeme vyškrtnout. Tato soustava má jedno řešení (3; 2).

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \\ -\frac{1}{2}x + 5 &= y \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

U soustavy (1.3.7) jsou všechny tři rovnice lineárně nezávislé. Řešení soustavy prvních dvou rovnic je (3; 2), řešení soustavy druhé a třetí rovnice je (4; 3) a řešení soustavy první a třetí rovnice je (0; 5). Celkově soustava nemá žádné řešení. U soustav, které nemají žádné řešení, často při řešení získáme neplatnou rovnost, např. $0 = 4$ apod. (Liška et al., 2018)

Zkouškou správnosti je, stejně jako u jedné rovnice, dosazení hodnot za neznámé. Pokud u *všech* rovnic soustavy získáme po dosazení platnou rovnost, jedná se o kořeny soustavy rovnic.

2 Metody řešení soustav rovnic

Při řešení soustavy rovnic můžeme na každou z rovnic použít libovolné ekvivalentní úpravy. Zároveň na soustavy rovnic můžeme použít ekvivalentní úpravy soustav rovnic. Dvě soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní, pokud jednu z nich lze získat z druhé ekvivalentními úpravami. Jestliže jsou dvě soustavy rovnic ekvivalentní, potom mají stejné řešení. Například můžeme zaměňovat pořadí rovnic v soustavě. S dalšími ekvivalentními úpravami se setkáme v rámci metod řešení soustav rovnic.

Neexistuje nejlepší metoda pro všechny soustavy rovnic. Některé metody jsou vhodné pro soustavy méně rovnic, zatímco jiné jsou efektivní pro soustavy o více rovnicích s větším množstvím neznámých. Výběr správné metody závisí na konkrétní soustavě rovnic, kterou se snažíme vyřešit. Výsledek nezáleží na volbě metody, každá soustava má stejné řešení, nezávisle na metodě, kterou použijeme.

V této kapitole si vysvětlíme nejpoužívanější metody obecně i na příkladu. Uvedeme si výhody a nevýhody dané metody a typy soustav, u kterých bychom tuto metodu použili.

2.1 Dosazovací metoda

Při dosazovací metodě *vyjádříme* z jedné rovnice jednu z neznámých, tedy osamostatníme ji pomocí ekvivalentních úprav na jednu stranu rovnice. Zde je příklad dvou rovnic, kde osamostatníme x:

$$x + 2 - 3y = 0 \tag{2.1.1}$$

$$x = 3y - 2$$

$$2x - 3y + z = 5 \tag{2.1.2}$$

$$x = \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{5}{2}.$$

V rovnici (2.1.1) jsme pouze odečetli $2 - 3y$, ale v rovnici (2.1.8) jsme celou rovnici dělili dvěma a vznikl nám zápis se zlomky. V případě této rovnice by bylo přehlednější zvolit na vyjádření neznámou z. Obecně je nejlepší si vybrat k vyjádření neznámou, kterou lze osvobodit v co nejmenším počtu kroků. Zároveň si můžeme vybrat, ze které rovnice neznámou vyjádříme. Můžeme volit tu rovnici, ve které se některá z neznámých vyskytuje v co nejjednodušší formě.

V případě soustavy dvou rovnic takto vyjádřenou neznámou *dosadíme* do druhé rovnice. Konkrétně pokud by první rovnice soustavy v soustavě dvou rovnic byla (2.1.1), do druhé rovnice dosadíme $3y - 2$ za každé x v dané rovnici. V případě soustavy dvou rovnic o dvou neznámých x a y vyjádřením x z první rovnice a dosazením daného mnohočlenu získáme rovnici o jedné neznámé, ze které lze vypočítat y. Pojďme si to ukázat na konkrétní soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 3x - y &= 10. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Z první rovnice si vyjádříme x:

$$x = -y + 6.$$

Dosadíme jej do druhé rovnice a dopočítáme y:

$$\begin{aligned} 3(-y + 6) - y &= 10 \\ -3y + 18 - y &= 10 \\ -4y &= -8 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Známý kořen můžeme dosadit do jakékoliv rovnice vzniklé ekvivalentními úpravami z té původní. Dosazením získáme rovnici o jedné neznámé a můžeme tak dopočítat druhý kořen. V soustavě rovnic (2.1.8) po dosazení čísla 2 za y v obou rovnicích vyjde $x = 4$. Kontrolou nám může být fakt, že získáme v obou rovnicích stejný výsledek.

Nyní si vyřešíme stejnou soustavu rovnic znovu, ale tentokrát vyjádříme y z druhé rovnice:

$$y = 3x - 10.$$

Dosadíme jej do první rovnice a dopočítáme x:

$$\begin{aligned} x + (3x - 10) &= 6 \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Neznámou x můžeme dosadit do první rovnice a dopočítat y:

$$\begin{aligned} 4 + y &= 6 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Stejně tak můžeme x dosadit i do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 - y &= 10 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

V obou případech získáme stejný výsledek.

Máme-li soustavu tří rovnic se třemi neznámými, z jakékoliv rovnice vyjádříme jednu z neznámých a dosadíme ji do zbylých dvou rovnic. Takto získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou už umíme vyřešit. Zpětným dosazením známých kořenů do jakékoliv z rovnic získáme i třetí kořen soustavy.

Obdobně je to u soustav s více rovnicemi. Z jedné rovnice si vyjádříme neznámou a dosadíme ji do zbylých rovnic soustavy. Tím nám vznikne nová soustava, která má o jednu rovnici a jednu neznámou méně. Původní rovnice, kterou jsme využili k vyjádření neznámé, si už nevšímáme. Můžeme ji použít, až budeme znát ostatní kořeny k výpočtu neznámé, kterou jsme vyjádřili. Dále znovu z jedné z rovnic vyjádříme libovolnou neznámou a dosadíme za ní v ostatních rovnicích. Takto se nám soustava bude zmenšovat až na jednu rovnici s jednou neznámou, kterou už dopočítáme jednoduše. Poté se vracíme zpět a dosazováním známých kořenů do předchozích rovnic získáme zbylé kořeny.

Pojďme si tento postup ukázat na soustavě čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 10 \\ 2a + 4b + c + 3d &= 10 \\ 3a + 2b + 3c + 4d &= 10 \\ a + 2b + c + d &= 10. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Z první rovnice si vyjádříme a a dosadíme ho do zbylých rovnic. Abychom neztratili přehlednost, budeme u soustav rovnic používat vodorovné čáry na rozdělení poslední a první rovnice:

$$\begin{aligned} a &= 10 - b - c - d \\ 2(10 - b - c - d) + 4b + c + 3d &= 10 \\ 3(10 - b - c - d) + 2b + 3c + 4d &= 10 \\ (10 - b - c - d) + 2b + c + d &= 10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2\,b - c + \ d \ &= -10 \\
-b \ + \ d \ &= -20 \\
b &= 0.
\end{aligned}
$$

Nyní nám vznikla soustava tří rovnic o třech neznámých (b, c, d). Můžeme si všimnout, že ze třetí rovnice naší nové soustavy nám vyšlo $b = 0$. Toho můžeme využít, protože takto nemusíme žádnou neznámou osamostatňovat. Dosadíme číslo 0 za b v první a druhé rovnici:

$$
\begin{aligned}
-c + d &= -10 \\
d &= -20.
\end{aligned}
$$

Nyní jsme získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, přičemž z druhé rovnice lze určit neznámou d. Opět nemusíme ani jednu z neznámých osamostatňovat, stačí, když $d \ = -20$ dosadíme do první rovnice a dopočítáme c:

$$
\begin{aligned}
-c + (-20) &= -10 \\
c &= -10.
\end{aligned}
$$

Získali jsme kořeny b, c, d a pomocí kterékoliv z rovnic teď můžeme dopočítat a. Nejjednodušší bude dosadit b, c, d do první rovnice původní soustavy, u níž jsme si osamostatnili a:

$$
\begin{aligned}
a &= 10 - b - c - d \\
a &= 10 - 0 - (-10) - (-20) \\
a &= 40.
\end{aligned}
$$

Řešení soustavy rovnic (2.1.8) je $K = \{(40; 0;\ -10;\ -20)\}$.

Tento příklad byl poněkud jednoduchý, protože jsme nemuseli vytýkat více než jednu neznámou a nemuseli jsme dělit. Zároveň, pokud porovnáme první a čtvrtou rovnici, můžeme vyvodit, že $b = 0$, protože jsou rovnice až na násobek b shodné. Pojďme si dosazovací metodu ukázat na těžší úloze:

$$
\begin{aligned}
4x - 3y + z &= 6 \\
8x - 7y + 4z &= -12 \\
5x - 6y + 6z &= 3.
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

Z první rovnice si vyjádříme $z = 6 - 4x + 3y$ a dosadíme do druhé a třetí rovnice:

$$8x - 7y + 4(6 - 4x + 3y) = -12$$
$$5x - 6y + 6(6 - 4x + 3y) = 3$$

$$-8x - 7y + 24 - 16x + 12y = -12$$
$$5x - 6y + 36 - 24x + 18y = 3$$

$$-8x + 5y = -36$$
$$-19x + 12y = -33 \;\rightarrow y = \frac{-33 + 19x}{12}$$

$$-8x + 5\left(\frac{-33 + 19x}{12}\right) = -36$$

$$-96x - 165 + 95x = -432$$

$$x = 267.$$

Známe jeden kořen, vybereme si jednu z rovnic, kde se vyskytuje pouze x a y a dosadíme číslo 267 za x, čímž získáme y:

$$-8 \cdot 267 + 5 \cdot y = -36$$
$$y = 420.$$

Nyní x a y dosadíme do jedné z původních rovnic soustavy a nalezneme z:

$$4 \cdot 267 - 3 \cdot 420 + z = 6$$
$$z = 198.$$

Řešení soustavy rovnic (2.1.8) je $K = \{(267;\ 420;\ 198)\}$.

Dosazovat získaný kořen budeme i u ostatních metod řešení soustav rovnic, nejen u metody dosazovací. Dopočítáme-li jakoukoliv metodou jeden z kořenů, můžeme ho dosadit do rovnic a zjednodušit si tak výpočet dalších kořenů. Nemusíme začínat znovu s danou metodou. Konkrétně u metody dosazovací se nemusíme po výpočtu jednoho kořene vracet zpět k původním rovnicím a osamostatňovat, tentokrát jinou, neznámou. Stačí kořen dosadit do původních rovnic, a tak si rovnice zjednodušíme tím, že v nich bude o jednu neznámou méně.

Nemusíme dosazovat pouze za neznámou, ale můžeme dosadit i za mnohočlen v rovnici. V praxi se to ve velké míře nepoužívá, ale určitě to ve specifických případech můžeme aplikovat. Například v soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} x + 6 - 2y &= 0 \\ x + 6 + y &= 3. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Můžeme vyjádřit $x + 6$ z první rovnice a dosadit jej do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} x + 6 &= 2y \\ 2y + y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= -4. \end{aligned}$$

Máme-li více rovnic než neznámých, můžeme pomocí několika z nich (pro soustavu o n neznámých použijeme n rovnic) dosazovací metodou určit řešení. Toto řešení ale musíme ověřit dosazením do nepoužitých rovnic. Pokud po dosazení řešení do zbylých rovnic nezískáme platnou rovnost, soustava nemá řešení. Tento způsob řešení je nejjednodušší, ale máme ještě další možnosti. Druhou možností je si rovnice rozdělit na více soustav a porovnat jejich řešení. Pokud mají dvě soustavy společné řešení, je toto řešení také řešením soustavy, která by vznikla spojením těchto soustav. Třetí možností je vypočítat všechny neznámé až na jednu a neznámé poté dosadit do všech zbylých rovnic. Poslední neznámá by pak měla vyjít ze všech rovnic stejně.

Například soustava (2.1.7) se skládá ze čtyř rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x - y &= -3 \\ 2x + 5y &= 4 \\ x + y &= -1 \\ -\frac{1}{2}x + 2y &= \frac{11}{2}. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

K určení řešení nám postačí dvě rovnice. Můžeme si libovolně vybrat dvě rovnice, určit řešení, a to ověřit dosazením do ostatních rovnic. Vybereme si například třetí rovnici, kde osamostatníme x a dosadíme ho do druhé rovnice:

$$x = -1 - y$$
$$2(-1 - y) + 5y = 4$$

$$3y = 6$$
$$y = 2.$$

Dosazením čísla 2 za y například v rovnici $x = -1 - y$ získáme kořen $x = -3$.

Řešení $(-3; 2)$ dosadíme do zbylých rovnic, měli bychom získat platnou rovnost:

$$\frac{1}{3} \cdot (-3) - 2 = -3$$
$$-\frac{1}{2} \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = \frac{11}{2}$$

$$-3 = -3$$
$$\frac{11}{2} = \frac{11}{2}.$$

Řešení $K = \{(-3; 2)\}$ je společné pro všechny čtyři rovnice, je tedy řešením soustavy (2.1.8).

Máme-li více neznámých než rovnic, postupně se dosazováním dostaneme až k jedné rovnici o dvou a více neznámých, ze které určíme jeden kořen tak, že z ostatních uděláme parametry. Poté zpětným dosazováním získáme zbylé kořeny rovnice, závislé na stejných parametrech.

Například soustava rovnic (2.1.8) obsahuje dvě rovnice o čtyřech neznámých.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 10 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 &= 9 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Z druhé rovnice vytkneme $x_1 = 9 + 4x_2 - 2x_3 + x_4$ a dosadíme do první rovnice:

$$2(9 + 4x_2 - 2x_3 + x_4) + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 10.$$

Vzniklou rovnici upravíme:

$$11x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -8.$$

Získali jsme jednu rovnici o třech neznámých. Zavedeme tedy dva parametry, například $x_3 = \frac{11}{5}p$ a $x_4 = -\frac{11}{4}q$ $(p, q \in R)$ a pomocí nich vypočítáme kořen x_2:

$$11x_2 = 5x_3 - 4x_4 - 8$$

$$x_2 = \frac{5}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_4 - \frac{8}{11}$$

$$x_2 = \frac{5}{11} \cdot \frac{11}{5}p - \frac{4}{11}\left(-\frac{11}{4}q\right) - \frac{8}{11}$$

$$x_2 = p + q - \frac{8}{11}.$$

Pomocí získaných kořenů nalezneme kořen x_1:

$$x_1 = 9 + 4\left(p + q - \frac{8}{11}\right) - 2\left(\frac{11}{5}p\right) - \frac{11}{4}q$$

$$x_1 = 9 + 4p + 4q - \frac{32}{11} - \frac{22}{5}p - \frac{11}{4}q$$

$$x_1 = \frac{20}{5}p - \frac{22}{5}p + \frac{16}{4}q - \frac{11}{4}q + \frac{99}{11} - \frac{32}{11}$$

$$x_1 = -\frac{2}{5}p + \frac{5}{4}q + \frac{67}{11}.$$

Řešením soustavy (2.1.8) je uspořádaná čtveřice. Výsledek zapíšeme jako

$$K = \left\{\left(-\frac{2}{5}p + \frac{5}{4}q + \frac{67}{11}; p + q - \frac{8}{11}; \frac{11}{5}p; -\frac{11}{4}q\right), p, q \in R\right\}.$$

Dosazovací metoda je vhodná na použití u soustav rovnic, kde lze jednoduše osamostatnit jednu z neznámých, nebo je jedna z nich již osamocena nebo vyřešena. Tato metoda může být časově náročná, pokud je třeba každou z rovnic upravovat.

Metodu je vhodné použít u menších soustav rovnic. Pro soustavy s více než dvěmi rovnicemi nebo neznámými může být vhodná, pokud je co nejvíce neznámých v rovnicích s koeficientem 1 nebo -1 (ve formě ax, kde x je neznámá a konstanta a je rovna číslu 1 nebo -1), nebo pokud se nám neznámé po dosazení vzájemně odečtou (jako tomu bylo v soustavě rovnic (2.1.5)(2.1.4)).

2.2 Sčítací metoda

Sčítací metoda je také jedna z metod vyučovaných na základní škole. Jak už název napovídá, budeme rovnice soustavy sčítat. Dvě rovnice sečteme tak, že sečteme jejich levé strany (součet umístíme na levou stranu nově vzniklé rovnice) a pravé strany (součet umístíme na pravou stranu). Sečtení rovnic tímto způsobem je ekvivalentní úpravou soustavy rovnic. Například:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 10 \\
2x - 3y &= 4 \\
\hline
3x - 2y &= 14.
\end{aligned}
$$

Našim cílem při sčítání bude eliminovat jednu z neznámých neboli ji odečíst, abychom získali rovnici, kde bude o jednu neznámou méně. Aby se nám člen s neznámou odečetl, musí druhá rovnice obsahovat člen opačný. Obsahuje-li jedna z rovnic člen ax, kde x je neznámá a a je konstanta, musí druhá rovnice obsahovat člen $-ax$. Konkrétně, pokud chceme eliminovat neznámou x a první rovnice obsahuje $4x$, druhá rovnice musí obsahovat $-4x$. Členy obou rovnic musíme pomocí ekvivalentních úprav převést do tohoto tvaru. Obecně stačí první rovnici vynásobit koeficientem u neznámé, kterou chceme eliminovat, z druhé rovnice a druhou rovnici vynásobit koeficientem u neznámé z první rovnice. Poté je třeba zkontrolovat, zda je znamínko u koeficientu u jedné rovnice kladné a u druhé záporné, případně jednu z rovnic vynásobit -1 (zaměnit znaménka u každého členu). Abychom nenásobili zbytečně velkými čísly, můžeme si pro koeficienty u neznámé, kterou chceme eliminovat, najít nejmenší společný násobek a rovnice vynásobit tak, abychom ho získali.

Je výhodné vždy volit k eliminaci ty členy, které se již ve formě ax a $-ax$ nachází, případně se nachází ve formě ax a ax (jednu z rovnic vynásobíme -1), nebo pokud opačné členy získáme vynásobením jedné rovnice (tedy nemusím násobit obě rovnice).

Ukážeme si na příkladu (2.2.1):

$$
\begin{aligned}
5x + 2y &= 8 \\
6x + 4y &= 4.
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Pokud bychom chtěli eliminovat x, museli bychom první rovnici vynásobit číslem -6 a druhou rovnici číslem 5 (také 6 a -5). Výhodnější pro nás bude, pokud první rovnici vynásobíme číslem -2 (nejmenší společný násobek koeficientů 2 a 4 je 4) a rovnice poté sečteme:

$$\begin{array}{c} -10x - 4y = -16 \\ 6x + 4y = 4 \\ \hline -4x = -12. \end{array}$$

Z této upravené rovnice už můžeme dopočítat $x = 3$. Nyní jen dosadíme číslo 3 za x v libovolné rovnici a získáme $y = -\frac{7}{2}$. Řešení soustavy je $K = \{(3;\ -\frac{7}{2}\}$.

U soustavy tří a více rovnic je tato metoda ve smyslu časové náročnosti obtížnější. Musíme totiž postupně sečíst jednu rovnici se všemi zbylými rovnicemi soustavy tak, abychom každým součtem eliminovali tu stejnou neznámou. Poté získáme soustavu, kde je o jednu rovnici a jednu neznámou méně. Dále postup opakujeme. Vybereme si jednu z rovnic nově vzniklé soustavy a vhodně ji sečteme s ostatními rovnicemi v soustavě a znovu získáme novou soustavu rovnic. Takto pokračujeme, dokud nezískáme jednu rovnici, z níž lze získat řešení jedné neznámé. Tu pak dosadíme do jedné z rovnic, kterou jsme použili při součtu pro získání poslední rovnice. Tímto způsobem získáme další neznámou. Získané neznámé postupně dosazujeme do rovnic, dokud nenalezneme všechny. Ukážeme si to na soustavě rovnic (2.1.5) z předchozí kapitoly:

$$4x - 3y + z = 6$$
$$8x - 7y + 4z = -12$$
$$5x - 6y + 6z = 3.$$

Budeme eliminovat proměnnou z. Nejmenší společný násobek čísel 1, 4 a 6 je 12. První a druhou rovnici upravíme tak, abychom získali $12z$ a třetí rovnici tak, abychom získali $-12z$:

$$48x - 36y + 12z = 72$$
$$24x - 21y + 12z = -36$$
$$-10x + 12y - 12z = -6.$$

Sečteme první a třetí rovnici a druhou a třetí rovnici:

$$48x - 36y + 12z = 72$$
$$-10x + 12y - 12z = -6$$

$$38x - 24y = 66$$

$$24x - 21y + 12z = -36$$
$$-10x + 12y - 12z = -6$$

$$14x - 9y = -42.$$

Získáme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$38x - 24y = 66$$
$$14x - 9y = -42.$$

Vynásobíme obě rovnice tak, abychom mohli eliminovat y a dopočítáme x:

$$114x - 72y = 198$$
$$-112x + 72y = 336$$

$$2x = 534$$
$$x = 267.$$

Dosazením do jedné z rovnic poslední soustavy získáme y:

$$14 \cdot 267 - 9y = -42$$
$$y = 420.$$

Dosazením x a y do původní soustavy získáme kořen z:

$$5 \cdot 267 - 6 \cdot 420 + 6z = 6$$
$$z = 198.$$

Řešení soustavy je K={(267; 420; 198)}, tedy stejné řešení, jako jsme získali dosazovací metodou.

Tento postup si ukážeme na soustavě rovnic (2.1.4):

$$a + b + c + d = 10$$
$$2a + 4b + c + 3d = 10$$
$$3a + 2b + 3c + 4d = 10$$
$$a + 2b + c + d = 10.$$

Poslední rovnici vynásobíme číslem -1 a sečteme ji s první rovnicí, vynásobíme ji číslem -2 a sečteme ji s druhou rovnicí a číslem -3 a sečteme ji s třetí rovnicí. Eliminujeme tak ve všech rovnicích neznámou a a spolu s ní v některých rovnicích další neznámé:

$$-a - 2b - c - d = -10$$
$$a + b + c + d = 10$$

$$-b = 0$$
$$b = 0$$

$$-2a - 4b - 2c - 2d = -20$$
$$2a + 4b + c + 3d = 10$$

$$-c + d = -10$$

$$-3a - 6b - 3c - 3d = -30$$
$$3a + 2b + 3c + 4d = 10$$

$$-4b + d = -20.$$

Tímto postupem získáme 3 rovnice o třech neznámých:

$$b = 0$$
$$-c + d = -10$$
$$-4b + d = -20.$$

Z první rovnice nové soustavy známe kořen b, můžeme ho tedy dosadit do zbylých dvou rovnic a získáme tak soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými:

$$-c + d = -10$$

$$d = -20.$$

Opět známe kořen d, dosadíme ho tedy do první rovnice a získáme kořen c:

$$c = -10.$$

Zpětným dosazením do jedné z původních rovnic získáme i kořen $a = 40$. Řešením soustavy je $K = \{(40; 0;\ -10;\ -20)\}$.

Jelikož se nám podařilo při některých rovnicích eliminovat více neznámých, postup byl kromě prvního kroku stejný jako u metody dosazovací.

Máme-li více neznámých než rovnic, v poslední rovnici získáme neznámou s parametrem.

Například v soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 8 \\ 5x - y - 7z &= 11 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

vynásobíme druhou rovnici číslem 2 a rovnice sečteme:

$$\begin{array}{c} 2x + 2y + z = 8 \\ 10x - 2y - 14z = 22 \\ \hline 12x - 13z = 30. \end{array}$$

Určíme si parametr z ($z = z,\ z \in R$) a x vyjádříme pomocí parametru:

$$x = \frac{13z + 30}{12}$$

a získané kořeny dosadíme do jedné z původních rovnic a vyjádříme y:

$$2\left(\frac{13z + 30}{12}\right) + 2y + z = 8$$

$$13z + 30 + 12y + 6z = 40$$

$$y = \frac{-19z + 10}{12}.$$

Řešením soustavy rovnic (2.1.8) je uspořádaná trojice: $K = \left\{\left(\frac{13z+30}{12}; \frac{-19z+10}{12}; z\right), z \in R\right\}$.

Máme-li naopak více rovnic než neznámých, můžeme řešení určit jen z potřebného počtu rovnic (tedy pro *n* neznámých *n* rovnic) a pro zbylé rovnice řešení ověříme.

Tato metoda je podstatně zdlouhavější pro soustavy tří a více rovnic a je proto výhodná zejména pro soustavu dvou rovnic. Pokud nejprve musíme rovnice vynásobit, aby se koeficienty u jedné z neznámých shodovaly, může sčítací metoda vyžadovat více kroků než metoda dosazovací. Oproti metodě dosazovací bychom ji volili tam, kde je složité vytknout jednu z neznámých.

Tuto metodu je vhodné použít u soustav, kde lze bez úprav jejich sečtením eliminovat jednu z neznámých, tedy když jsou koeficienty u jedné neznámé opačné nebo se rovnají (v tom případě jednu z rovnic od druhé odečteme). Využijeme ji také v případě, pokud lze rovnice jednoduše vynásobit tak, aby byly koeficienty u jedné neznámé opačná čísla.

2.3 Srovnávací metoda

Metoda srovnávací, taktéž *porovnávací*, je ve většině učebních materiálů zahrnuta pod metodu dosazovací. Může nám pomoci ulehčit si výpočty v soustavě dvou rovnic. Postupujeme tak, že z obou rovnic soustavy vyjádříme stejnou neznámou a obě vyjádření porovnáme. Tímto způsobem získáme novou rovnici pouze s jednou neznámou, kterou následně vyřešíme. Zpětným dosazením získáme i druhou neznámou. Například v soustavě rovnic:

$$3x - y = 1$$
$$5x + 3y = 11.$$

Osamostatníme u obou rovnic y (protože v první rovnici nemusíme dělit):

$$y = 3x - 1$$
$$y = \frac{11 - 5x}{3}.$$

Oba výrazy porovnáme a dopočítáme x:

$$3x - 1 = \frac{11 - 5x}{3}$$
$$9x - 3 = 11 - 5x$$
$$14x = 14$$

$$x = 1.$$

Zpětným dosazením do jedné z původních rovnic dopočítáme y:

$$y = 3 \cdot 1 - 1$$
$$y = 2.$$

Srovnávací metoda má smysl zejména pro soustavu dvou rovnic, u soustavy tří a více rovnic je oproti předešlým metodám zbytečně složitá. Ukážeme si to na soustavě rovnic (2.1.5):

$$4x - 3y + z = 6$$
$$8x - 7y + 4z = -12$$
$$5x - 6y + 6z = 3.$$

Ze všech tří rovnic vytkneme z:

$$z = 6 - 4x + 3y$$
$$z = \frac{-12 - 8x + 7y}{4}$$
$$z = \frac{3 - 5x + 6y}{6}.$$

Nyní jednu rovnici porovnáme s ostatními:

$$\frac{-12 - 8x + 7y}{4} = 6 - 4x + 3y$$
$$6 - 4x + 3y = \frac{3 - 5x + 6y}{6}.$$

Získali jsme dvě rovnice o dvou neznámých, nicméně musíme je upravit a znovu vytknout jednu z neznámých:

$$-12 - 8x + 7y = 24 - 16x + 12y$$
$$36 - 24x + 18y = 3 - 5x + 6y$$

$$8x - 5y - 36 = 0$$
$$-19x + 12y + 33 = 0$$

$$y = \frac{8x - 36}{5}$$

$$y = \frac{19x - 33}{12}.$$

Oba výrazy porovnáme a dopočítáme x:

$$\frac{8x - 36}{5} = \frac{19x - 33}{12}$$

$$96x - 432 = 95x - 165$$

$$x = 267.$$

Zpětným dosazením nalezneme y a z. Vyjde nám řešení K={(267; 420; 198)}.

Ukážeme si tuto metodu na soustavě rovnic (2.1.4):

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 10 \\ 2a + 4b + c + 3d &= 10 \\ 3a + 2b + 3c + 4d &= 10 \\ a + 2b + c + d &= 10. \end{aligned}$$

Z každé rovnice si vyjádříme c (všude kromě třetí rovnice není potřeba dělit):

$$c = -a - b - d + 10$$

$$c = -2a - 4b - 3d + 10$$

$$c = \frac{-3a - 2b - 4d + 10}{3}$$

$$c = -a - 2b - d + 10.$$

Jednu rovnici porovnáme se třemi zbylými, vybereme si např. první rovnici. Získáme tak tři rovnice o třech neznámých, které upravíme:

$$-a - b - d + 10 = -2a - 4b - 3d + 10$$

$$-a - b - d + 10 = \frac{-3a - 2b - 4d + 10}{3}$$

$$-a - b - d + 10 = -a - 2b - d + 10$$

$$a + 3b + 2d = 0$$

$$-b + d - 20 = 0$$

$$b = 0.$$

Nyní už můžeme získat řešení bez srovnávání. Kořen $b = 0$ dosadíme do rovnice $-b + d - 20 = 0$ a dopočítáme neznámou d. Dále neznámé b a d dosadíme do rovnice $a + 3b + 2d = 0$ a dopočítáme neznámou a. Pro zisk neznámé c už stačí jen dosadit všechny získané neznámé do jedné z původních rovnic.

Oproti metodám dosazovací a sčítací jsme provedli více úprav, proto jsou tyto metody pro soustavy tří a více rovnic vhodnější. Tato metoda je v tomto případě oproti druhým dvěma výrazně složitější. Proto bych doporučila využít pouze klasickou dosazovací metodu. Jediný případ, kdy bychom srovnávací metodu využili, je pokud máme na jedné straně všech rovnic v soustavě vyjádřenou stejnou neznámou, případně pokud máme ve všech rovnicích stejný mnohočlen na jedné straně rovnice a porovnáním druhých stran rovnice bychom eliminovali jednu z neznámých.

Ze základních metod je pro řešení soustavy rovnic nejvhodnější sčítací nebo dosazovací metoda. Metodu vždy volíme podle koeficientů u neznámých. Použitím metody na soustavu rovnic vždy získáme novou soustavu rovnic, kde je o jednu rovnici a jednu neznámou méně. Novou soustavu rovnic nemusíme řešit stejnou metodou, pokud je to vhodné, můžeme použít jinou metodu. U některých soustav rovnic je vhodné použít více metod.

2.4 Grafické řešení

Lineární rovnice se dvěma neznámými je předpisem přímky nacházející se v kartézské soustavě souřadnic v rovině. Množinu všech řešení jedné rovnice o dvou neznámých lze znázornit jako přímku. Z analytické geometrie známe obecnou rovnici přímky: $ax + by + c = 0$, například $-3x + 4y + 1 = 0$, kterou lze převést do směrnicového tvaru osamostatněním *y*: $y = \frac{-ax-c}{b}$, pro náš příklad: $y = \frac{3x-1}{4}$. Tento tvar je shodný s analytickým zadáním předpisu lineární funkce, jejíž graf je přímka. Zároveň známe i tzv. *parametrický* tvar rovnice. Vraťme se k rovnici (1.3.1), kde jsme rovnici v obecném tvaru $3x - 4y = 12$ přiřadili řešení s parametrem: $K = \{(4 + 4t;\ 3t), t \in R\}$. Tuto přímku bychom zapsali parametricky jako:

$$x = 4 + 4t$$

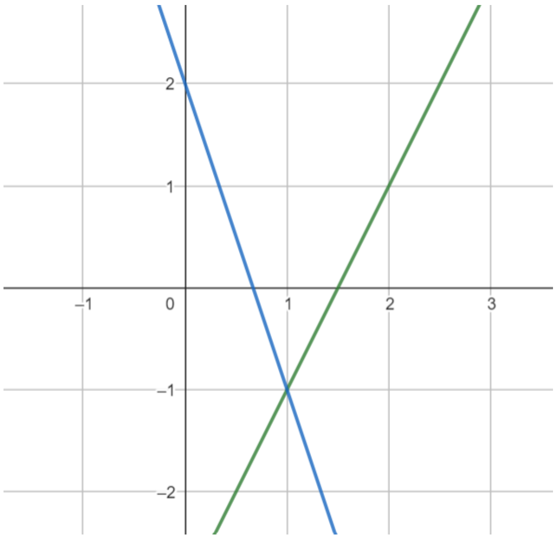
$$y = 3t, t \in R.$$

Soustavu rovnic graficky vyřešíme tak, že všechny zadané přímky (rovnice) zaneseme do kartézské soustavy souřadnic. Získáme bod, případně body, o souřadnicích $(x; y)$, které jsou pro všechny přímky společné, tedy přímky se v nich protínají. Souřadnice bodů průniku jsou rovny uspořádané dvojici, která je řešením dané soustavy. (Zhouf, 2019)

Například soustavu rovnic (2.4.1) zaneseme do kartézské soustavy souřadnic viz obrázek 1 (první rovnice modře, druhá rovnice zeleně):

$$3x + y - 2 = 0 \tag{2.4.1}$$

$$2\,x - y - 3 = 0.$$



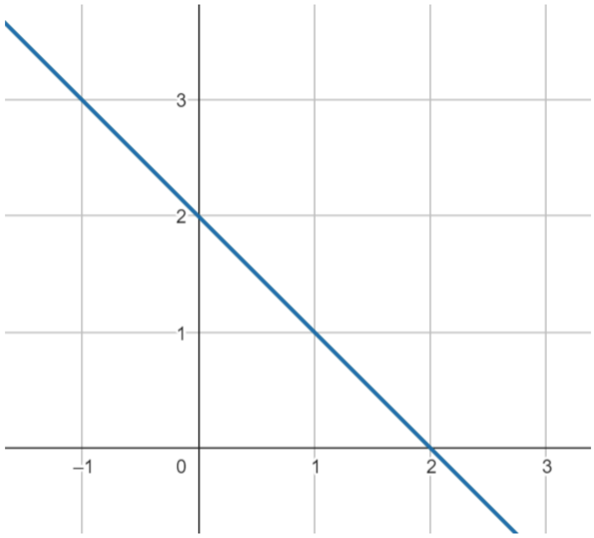
Obrázek 1: Grafické řešení soustavy rovnic

Řešením soustavy rovnic je bod, ve kterém se přímky protínají, tedy $(1;\ -1)$.

Můžeme se setkat s případy, kdy přímky nemají jeden průsečík. Přímky mohou být totožné, tedy jedna rovnice je násobkem druhé. Například rovnice:

$$x + y = 2$$
$$2x + 2y = 4$$

po zanesení do kartézské soustavy souřadnic splynou v jednu přímku (viz obrázek 2). Získáme tak nekonečně mnoho řešení (nekonečně mnoho průsečíků), které lze zapsat parametricky například takto: $(2 - y; y), y \in R$.



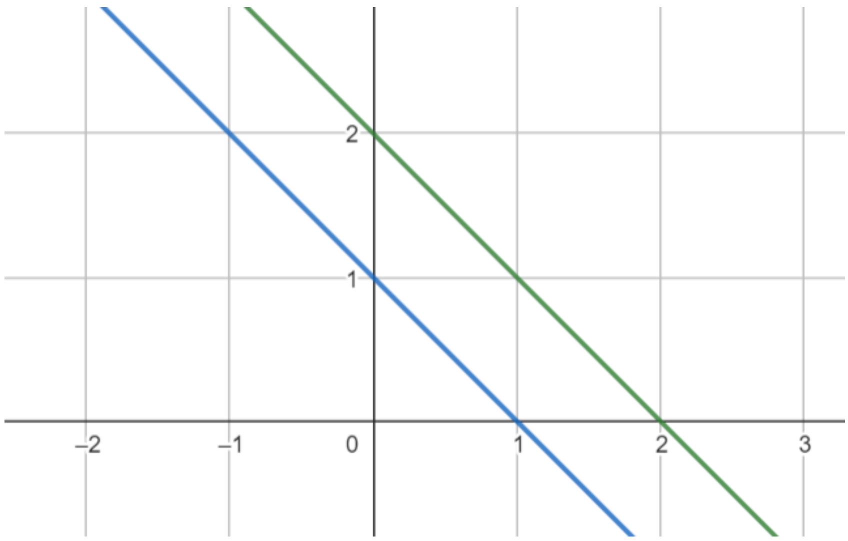
Obrázek. 2 Grafické znázornění soustavy dvou rovnic, kde je jedna n-násobkem druhé

Přímky mohou být zároveň rovnoběžné, tedy lineárně nezávislé, ale rozporuplné. Například rovnice:

$$x + y = 1$$

$$x + y = 2,$$

které znázorníme v kartézské soustavě souřadnic nemají žádný průsečík (viz obrázek 3, první rovnice modře, druhá rovnice zeleně). Tato soustava rovnic nemá žádné řešení.



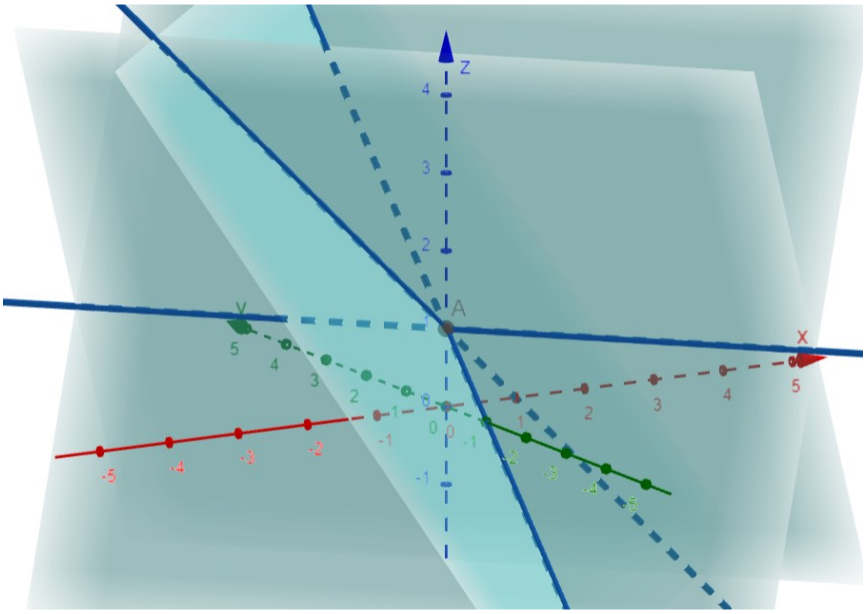
Obrázek 3: Grafické znázornění rozporuplných rovnic

V analytické geometrii se využívají soustavy rovnic pro určení vzájemné polohy přímek. Abychom zakreslili přímku do kartézské soustavy souřadnic, musíme znát alespoň dva body ležící na přímce. Souřadnice bodu, kterým přímka prochází, získáme dosazením libovolného čísla za x nebo y v rovnici a dopočítáme hodnotu druhé neznámé. Dosazené a získané číslo tvoří souřadnice bodu. Pro zisk druhého bodu volíme jiné číslo. Body poté zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic a spojíme.

Toto je nejjednodušší způsob zakreslení přímky ve tvaru $ax + by + c = 0$. Přímku do kartézské soustavy souřadnic můžeme zakreslit také jinými způsoby, například pomocí jednoho bodu a směrového vektoru přímky. Tento postup bychom použili například pro přímku danou parametricky. (Liška et al., 2018)

Lineární rovnice se třemi neznámými je předpisem roviny nacházející se v kartézské soustavě souřadnic v prostoru. Grafické řešení soustavy rovnic o třech neznámých vyžaduje vynesení tří rovin do trojrozměrného prostoru, což je nemožné udělat s potřebnou přesností na papíře. Můžeme však využít různé počítačové programy, které nám znázorní roviny a jejich průnik/y ve 3D modelu. Známým programem využívaným pro analytickou geometrii je Geogebra. Pro znázornění si ukážeme řešení (viz obrázek 4) jednoduché soustavy tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$



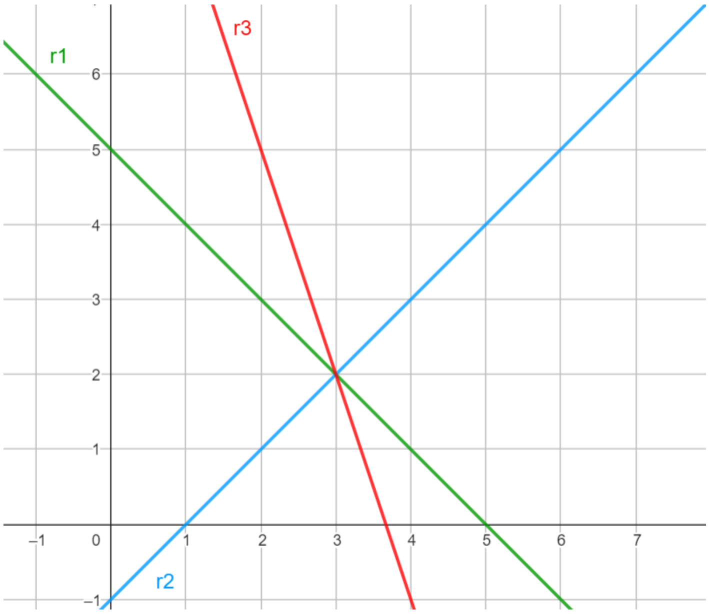
Obrázek 4: Řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých v programu Geogebra

Každá rovnice soustavy představuje rovinu v prostoru. Roviny mají jeden společný bod A, který je zároveň řešením soustavy rovnic $A = (0;\ 0;\ 1)$. Přestože obrázek není přehledný, Geogebra nám zobrazí souřadnice průsečíku.

Každé dvě roviny mají jednu společnou přímku (tato přímka by byla řešením soustavy těchto dvou rovnic). Přímky se rovněž scházejí v bodě $(0;\ 0;\ 1)$. Pokud by byly tyto přímky rovnoběžné nebo mimoběžné, soustava by neměla řešení.

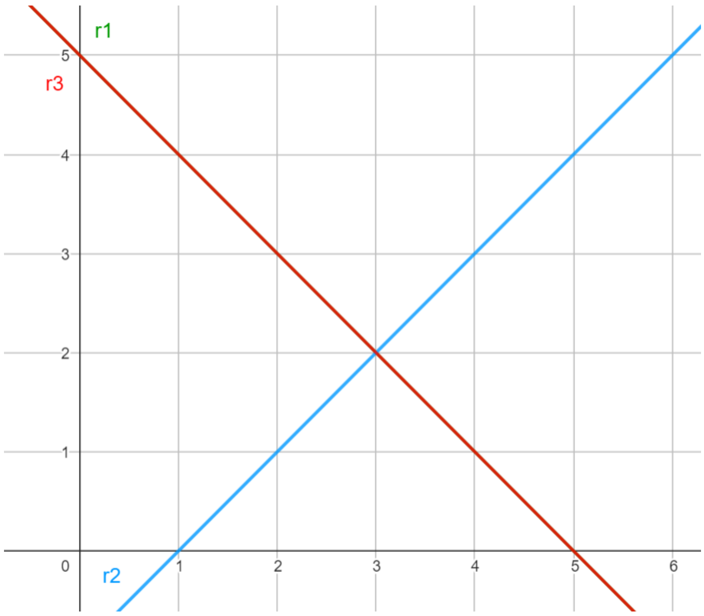
Soustavy se čtyřmi a více neznámými nezakreslí už ani počítač, protože by se vyskytovaly ve čtyř a vícedimenzionálním prostoru, který neumíme vizualizovat.

Nyní si znázorníme případy, kdy máme více rovnic než neznámých, o kterých jsme mluvili v první kapitole. Pro přehlednost si je znázorníme ve dvourozměrném prostoru, ve třírozměrném prostoru by to bylo obdobné. Vrátíme-li se k soustavě rovnic (1.3.5), v kartézské soustavě souřadnic ji znázorníme tak, jak to vidíme na obrázku 5 (r1: $x + y = 5$ zeleně, r2: $x - y = 1$ modře, r3: $3x + y = 11$ červeně). Jelikož jsou přímky lineárně závislé, setkávají se v jednom bodě, a proto má soustava rovnic (1.3.5) jedno řešení $(3;\ 2)$.



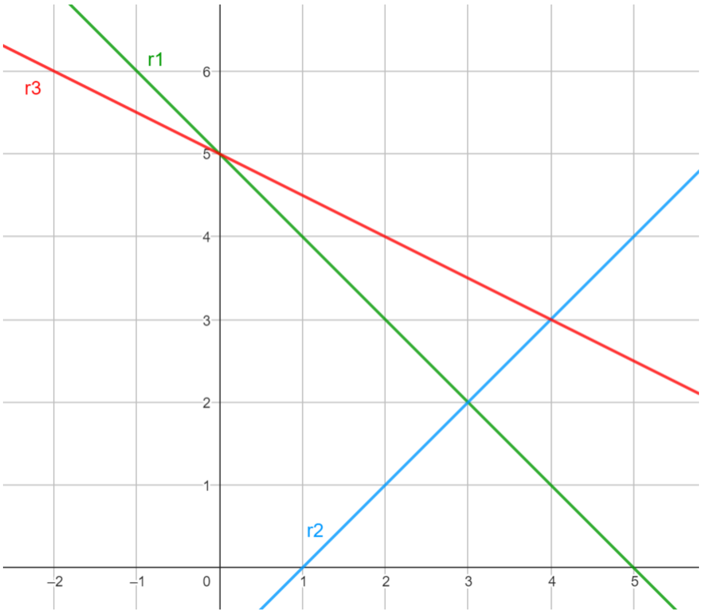
Obrázek 5: Grafické řešení soustavy 3 rovnic o dvou neznámých, které jsou lineárně závislé

Soustavu rovnic (1.3.6) do kartézské soustavy souřadnic přeneseme tak, jako je to na obrázku 6 (r1: $x + y = 5$ zeleně, r2: $x - y = 1$ modře, r3: $2y + 2y = 10$ červeně). Rovnice r3 je dvojnásobkem rovnice r1 a zobrazí se na totožnou přímku. Program ji zobrazuje červeně. Tato soustava rovnic má jedno řešení (3; 2), protože obsahuje 2 rozdílné rovnice a jednu rovnici navíc, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na jednu z rovnic.



Obrázek 6: Grafické řešení soustavy tří rovnic o dvou neznámých, kde je jedna rovnice n-násobkem druhé

Soustavu rovnic (1.3.7) přeneseme (viz obrázek 7) do kartézské soustavy souřadnic jako (r1: $x + y = 5$ zeleně, r2: $x - y = 1$ modře, r3: $-\frac{1}{2}x + 5 = y$ červeně). Rovnice jsou lineárně nezávislé, jedna není násobkem druhé a ani jednu z rovnic nelze upravit do tvaru $0 = 0$. Každé dvě přímky mají jeden průsečík (tedy řešení soustavy těchto dvou rovnic), tomu však nevyhovuje třetí rovnice. Tato soustava tedy nemá řešení.



Obrázek 7: grafické řešení soustavy 3 rovnic o dvou neznámých, které jsou lineárně nezávislé

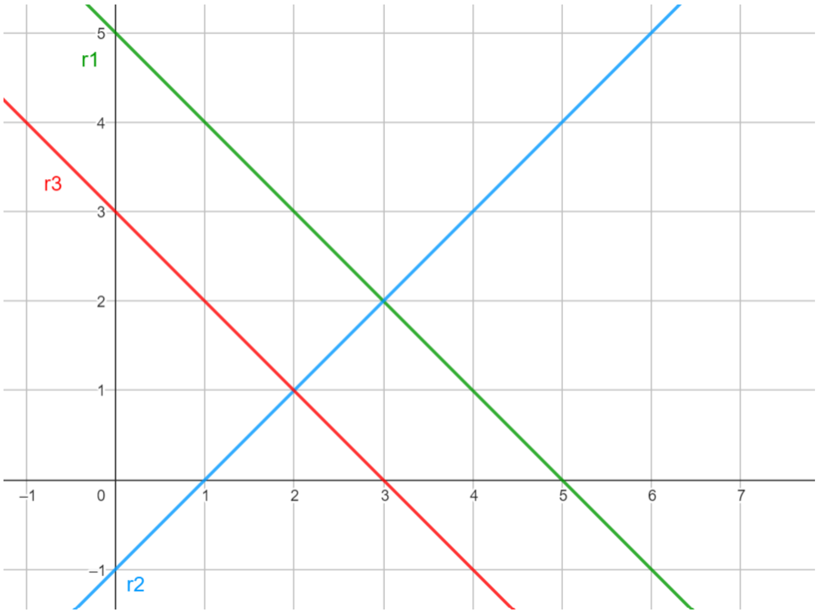
Mohli bychom se setkat i s následující soustavou rovnic:

$$x + y = 5 \tag{2.4.3}$$

$$x - y = 2$$

$$x + y = 3.$$

Na první pohled vidíme, že první a třetí rovnice jsou nekonzistentní. Do kartézské soustavy souřadnic zaneseme soustavu jako obrázek 8 (r1: $x + y = 5$ zeleně, r2: $x - y = 1$ modře, r3: $x + y = 3$ červeně). Druhá rovnice, tedy přímka označená modře, má s první a třetí rovnicí, tedy s jejich znázorněním přímkou, dva rozdílné průsečíky. Je tomu tak z důvodu rozporuplnosti rovnic. Soustava těchto tří rovnic by tedy neměla řešení.



Obrázek 8: grafické řešení soustavy 3 rovnic o dvou neznámých obsahující nekonzistentní rovnice

V první kapitole jsme se setkali s rovnicí, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na rovnici $0 = 0$. Tyto rovnice nelze zakreslit do kartézské soustavy souřadnic.

Zároveň se můžeme setkat s případem, kdy jsou všechny tři rovnice nekonzistentní.

Například soustavu rovnic (2.4.4) bychom zobrazili do kartézské soustavy souřadnic (viz obrázek 9) jako tři rovnoběžky (r1: $x + y = 3$ zeleně, r2: $x + y = 4$ modře, r3: $x + y = 6$ červeně). Tato soustava opět nemá žádné řešení.

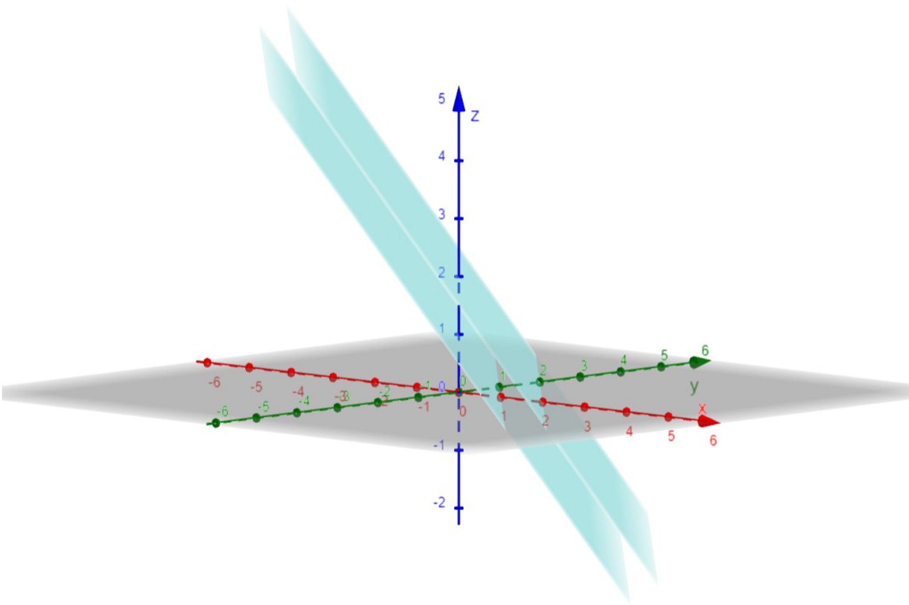
$$x + y = 3 \qquad (2.4.4)$$

$$x + y = 4$$

$$x + y = 6$$

Obrázek 9: grafické řešení tří nekonzistentních rovnic o dvou neznámých

Soustava dvou rovnic o třech neznámých má téměř vždy nekonečno řešení, protože dvě roviny mají téměř vždy nekonečno průsečíků (přímku nebo rovinu). Výjimkou jsou nekonzistentní rovnice, které se zobrazí na rovnoběžné roviny (viz obrázek 10). Tato soustava by neměla žádné řešení.



Obrázek 10:grafické znázornění rovnic $x + y + z = 1$ *a* $x + y + z = 2$ *v rovině*

Grafická metoda řešení je ve všech ohledech pro výpočet řešení složitější než předchozí metody. Využili bychom ji samozřejmě v případech, kdy nám to přikazuje zadání, případně pokud neznáme rovnice, ale pouze jejich podobu v kartézské soustavě souřadnic. Grafická metoda je vizuální a intuitivní, což můžeme využít pro pochopení soustav rovnic. Lze na ní demonstrovat počet řešení jednotlivých soustav, a to je její nespornou výhodou.

2.5 Gaussova eliminace

V následujících metodách řešení soustav rovnic budeme využívat *matice*. Bečvář (2019, s. 32) ji definuje následovně:

> **Definice**. Nechť X je neprázdná množina a m, n přirozená čísla. *Maticí typu $m \times n$ nad množinou X* budeme rozumět obdélníkové schéma
>
> $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
>
> kde $a_{ij} \in X$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a každé $j = 1, \dots, m$.

Zjednodušeně řečeno, matice je množina čísel uspořádaná do m řádků a n sloupců. Matice budeme značit velkými písmeny $(A, B, C, \dots)$ a jejich prvky (reálná čísla) malými písmeny $(a, b, c, \dots)$.

I-tý řádek matice značíme: $a_i = (a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3}, \dots ,\ a_{in})$. J-tý sloupec matice značíme:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Pokud platí $m = n$, hovoříme o čtvercové matici *řádu* n, pokud $m \neq n$, hovoříme o obdélníkové matici.

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kde a_{ij} jsou reálné koeficienty u neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ a b_j jsou pravé strany rovnic, můžeme zapsat do *matice soustavy* následovně:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Řešením soustavy je sloupcová matice

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Máme-li v soustavě rovnic například neznámé x, y, z, je řešením soustavy sloupcová matice

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Matici vzniklou spojením dvou matic $(A|B)$ budeme také nazývat *rozšířená matice*. (Bican, 2000)

Před zapsáním soustavy do rozšířené matice musíme rovnice soustavy upravit tak, aby na levé straně byly neznámé a na pravé straně absolutní členy. Koeficienty u neznámých pak vepisujeme do levé strany rozšířené matice ve stejném pořadí pro všechny rovnice.

Například soustavu rovnic

$$2x + 2 - 3y = 12 \tag{2.5.1}$$

$$z - x = y$$

$$y - z = 4z + 1$$

upravíme následovně (neznámé si seřadíme podle abecedy):

$$2x - 3y = 10$$

$$-x - y + z = 0$$

$$y - 5z = 1.$$

Pokud rovnice neobsahuje danou neznámou, při přepisu soustavy do rozšířené matice zapisujeme na dané místo nulu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Zároveň soustavu můžeme zapsat součinem matic $A \cdot x = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Při Gaussově eliminaci, taktéž Gaussově eliminační metodě, budeme levou stranu rozšířené matice soustavy převádět do tzv. *odstupňovaného tvaru*, z něhož můžeme určit řešení soustavy.

V odstupňovaném tvaru matice každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než ten předchozí (pokud předchozí řádek existuje). Příklady odstupňovaného tvaru matice jsou:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Druhý řádek (pokud existuje) začíná alespoň jednou nulou, třetí řádek dvěma nulami, čtvrtý řádek třemi nulami a obecně i-tý řádek začíná minimálně $(i - 1)$ nulami. Matice soustavy lineárních rovnic je v řádkově odstupňovaném tvaru, pokud je její matice koeficientů v řádkově odstupňovaném tvaru. (Bečvář, 2019)

Matice budeme převádět na odstupňovaný tvar pomocí *elementárních řádkových transformací*. Pokud lze jednu matici získat z druhé pomocí elementárních řádkových transformací, označujeme je jako *řádkově ekvivalentní* matice, zapisujeme $A \sim B$. Platí, že pokud je matice A řádkově ekvivalentní s maticí B, pak je i matice B řádkově ekvivalentní s maticí A. (Anthony & Harvey 2012)

Elementární úpravy řádků vychází z ekvivalentních úprav rovnic, tedy nemění množinu řešení soustavy rovnic. Při řešení soustavy využijeme tyto transformace: prohození dvou řádků, vynásobení řádku nenulovým číslem, přičtení n-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Prohození dvou řádků

Tato transformace je podobná zaměnění dvou rovnic v soustavě. Soustava rovnic

$$20x + 3y = 3$$

$$12x - 8y = 11$$

má stejné řešení jako soustava rovnic

$$12x - 8y = 11$$

$$20x + 3y = 3.$$

Matice těchto dvou soustav budou řádkově ekvivalentní:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 20 & 3 & 3 \\ 12 & -8 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -8 & 11 \\ 20 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Vynásobení řádku nenulovým číslem

Stejně jako můžeme rovnici vynásobit jakýmkoliv číslem různým od nuly, můžeme totéž učinit i s jakýmkoliv řádkem matice, příklad uvedeme na řádkové matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

Přičtení n-násobku jednoho řádku k jinému řádku

Stejně jako při řešení soustavy rovnic metodou sčítací můžeme n-násobek jedné rovnice přičíst k n-násobku druhé, můžeme n-násobek jednoho řádku přičíst k n-násobku druhého. Pokud sečteme dva řádky, součet umístíme namísto jednoho z řádků a druhý ponecháme. Například v následující matici přičteme první řádek k druhému a součet zapíšeme místo druhého řádku:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{array}\right).$$

Vhodnou volbou elementárních úprav lze každou matici soustavy převést na odstupňovaný tvar, ze kterého lze zpětným převedením na soustavu rovnic určit množinu všech řešení. (Friedberg et al., 2014)

Lze si to ukázat na soustavě (2.1.3). Tu převedeme na matici soustavy následovně:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

Matice po libovolném počtu úprav zapisujeme do řádku, rozdělujeme je znakem $\sim$, který značí řádkovou ekvivalenci matic. První řádek vynásobíme číslem -3 a přičteme ho k druhému řádku:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right).$$

Nyní jsme dokončili Gaussovu eliminaci a matice levé strany je v odstupňovaném tvaru. Můžeme tak určit množinu řešení soustavy. Druhý řádek můžeme převést zpětně na rovnici $-4y = -8$ a určit kořen y: $y = 2$. První řádek můžeme převést zpět na rovnici $x + y = 6$ a dosazením y získáme x: $x = 4$.

Tento postup se podobá sčítací metodě, ale navíc při něm převádíme soustavu na matici a zpět. Oproti sčítací metodě je tato metoda vhodná pro soustavu tří a více rovnic. Ukážeme si tuto metodu na soustavě rovnic (2.1.5). Soustavu si převedeme na rozšířenou matici a převedeme ji do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 6 \\ 8 & -7 & 4 & -12 \\ 5 & -6 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -24 \\ 0 & -9 & 19 & -18 \end{array}\right).$$

Od druhého řádku odečteme dvakrát první řádek. Třetí řádek vynásobíme čtyřmi a odečteme pětinásobek prvního řádku. Získáme tak v prvním sloupci všude nuly až na první řádek.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -24 \\ 0 & -9 & 19 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & -198 \end{array}\right)$$

Od třetího řádku odečteme devítinásobek druhého řádku. Získáme tak odstupňovaný tvar. Převedeme-li poslední matici zpět na soustavu rovnic, bude vypadat následovně:

$$4x - 3y + z = 6$$

$$-y + 2z = -24$$

$$-z = -198.$$

Z poslední rovnice můžeme určit $z = 198$, dosadit jej do předchozí rovnice a určit y:

$$-y + 2 \cdot 198 = -24$$

$$y = 420.$$

Nyní dosadíme y a z do první rovnice a určíme x:

$$4x - 3 \cdot 420 + 198 = 6$$

$$4x = 1068$$

$$x = 267.$$

Řešení nám vyjde stejně jako u předchozích metod: $K = \{(267;\ 420;\ 198)\}$.

Řešení si rovněž ukážeme na soustavě (2.1.4):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Od druhého řádku odečteme dvakrát první řádek, od třetího řádku třikrát první řádek a od čtvrtého jednou. Získáme tak v prvním sloupci všude nuly až na první řádek.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right)$$

Druhý řádek vyměníme se čtvrtým řádkem, ke třetímu řádku přičteme (nový) druhý řádek, od čtvrtého řádku odečteme dvakrát druhý řádek. Vyměníme třetí a čtvrtý řádek. Získáme tak odstupňovaný tvar matice a můžeme ji převést zpět na soustavu rovnic:

$$d = -20$$

$$-c + d = -20$$

$$b = 0$$

$$a + b + c + d = 10.$$

Dosazením známých kořenů do ostatních rovnic získáme řešení $K = \{(40; 0;\ -10;\ -20)\}$. Řešení je, stejně jako předchozí, pouze ilustrační a je to jedno z mnoha různých řešení, například není potřeba vyměňovat řádky. Je výhodné si řádky seřadit už na začátku tak, aby se co nejvíce podobaly odstupňovanému tvaru.

Řešení soustavy pěti a více rovnic by vypadalo obdobně.

U soustavy, kde je větší počet neznámých než rovnic, v posledním řádku matice obvykle získáme více než jeden nenulový prvek. Po převedení matice zpět na soustavu v poslední rovnici určíme parametr a pomocí něj získáme řešení zbylých kořenů. Například pokud Gaussovou eliminací získáme následující matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

převedeme ji na soustavu rovnic následovně:

$$x + y + z = 8$$

$$2y + z = 4.$$

Určíme si parametr, například $z = z$ ($z \in R$) a pomocí něj určíme kořen y:

$$2y = 4 - z$$

$$y = 2 - \frac{1}{2}z.$$

Pomocí kořenů y a z určíme kořen x:

$$x = 8 - y - z$$

$$x = 8 - 2 + \frac{1}{2}z - z$$

$$x = 6 - \frac{1}{2}z.$$

Řešení soustavy je $K = \left\{\left(6 - \frac{1}{2}z;\ 2 - \frac{1}{2}z;\ z\ \right), z \in R\right\}$.

V předchozích příkladech jsme po Gaussově eliminaci vždy získali odstupňovaný tvar, kde měl každý řádek (kromě prvního) vždy o právě o jednu nulu více než předchozí řádek. Získali jsme tak vždy tzv. *horní trojúhelníkovou matici*, tedy matici, která má pod *hlavní diagonálou* samé nuly. Hlavní diagonála je tvořena prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$. U čtvercových matic začíná „v levém horním rohu“ matice a končí „v pravém dolním rohu“ matice. Termín *hlavní diagonála* se využívá i u obdélníkových matic, začíná „v levém horním rohu“, ale nekončí „v pravém dolním rohu“. (Bečvář, 2019)

Můžeme se ale setkat s maticí soustavy, která má nuly i na diagonále a musíme tak pro vyřešení soustavy určit parametr. Například u soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \tag{2.5.2}$$

můžeme pomocí druhého, třetího a čtvrtého řádku určit řešení kořenů x_5, x_4, x_3:

$$3x_5 = 3$$

$$x_5 = 1$$

$$2x_4 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$x_4 = 2$$

$$x_3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$$

$$x_3 = 3.$$

Pro získání kořenů x_1 a x_2 ale musíme v rovnici

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 34$$

$$1x_1 + 2x_2 = 12$$

zavést parametr. Zavedeme například parametr $x_2 = t; t \in R$ a neznámou x_1 určíme pomocí parametru: $x_1 = 12 - 2t$. Řešení soustavy zapíšeme jako $K = \{(12 - 2t; t; 3;\ 2;\ 1), t \in R\}$. (Bečvář, 2019)

Záměna sloupců matice není ekvivalentní úpravou, protože vede ke změně pořadí proměnných v rovnicích, tedy mění množinu řešení soustavy. Samozřejmě je možné sloupce zaměnit, pokud při přepisu zpět na soustavu zapíšeme neznámé ke správným koeficientům. Obecně je doporučeno měnit pouze řádky, nikoli sloupce, aby nedošlo k chybě při interpretaci řešení.

Abychom určili počet řešení u různých soustav, musíme se nejprve seznámit s pojmem *hodnost matice.* Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků po Gaussově eliminaci. Hodnost značíme $hod(A)$, taktéž $h(A)$ nebo $rank(A)$. Například:

$$hod\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2, hod\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, hod\begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Platí, že pokud lze jednu matici získat pomocí elementárních řádkových úprav z druhé, matice mají stejnou hodnost, tedy $A \sim B \ \Rightarrow hod(A) = hod(B)$. (Goode & Annin, 2007)

Hodnost závisí na počtu lineárně nezávislých řádků matice. Jsou-li totiž řádky matice lineárně závislé, tedy jeden z řádků je součtem n-násobků ostatních řádků, při Gaussově eliminaci získáme nulový řádek (řádek samých nul). Například:

$$hod\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = hod\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & -7 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} = hod\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = hod\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

K druhému řádku přičteme dvojnásobek prvního řádku, od třetího řádku odečteme čtyřnásobek prvního řádku, od čtvrtého řádku odečteme sedminásobek prvního řádku. Druhý řádek můžeme vydělit číslem 6, třetí řádek můžeme vydělit číslem -7 a čtvrtý řádek můžeme vydělit číslem -24. Od třetího a čtvrtého řádku odečteme druhý řádek, získáme tak v obou řádcích nuly. Matice po Gaussově eliminaci obsahuje dva nenulové řádky, má tedy hodnost 2.

Počet sloupců matice, případně počet neznámých, určuje rozměr prostoru. Ve dvourozměrném prostoru můžeme mít maximálně dva lineárně nezávislé řádky, ve třírozměrném tři, ve čtyřrozměrném čtyři a analogicky pro další prostory. Tedy hodnost matice nikdy není větší než počet jejích sloupců.

Jak jsme si uvedli v předchozích kapitolách, u soustavy, kde je větší počet neznámých než rovnic, je pro nás žádoucí, aby byly rovnice navíc n-násobky předchozích rovnic nebo lineárně závislé s předchozími rovnicemi. Při Gaussově eliminaci se v tomto případě řádky, které jsou nad počet neznámých, vynulují. Řešení získáme převedením zbylých řádků na rovnice. Naopak, pokud rovnice nejsou lineárně závislé nebo jedna není násobkem druhé, získáme rozporuplné rovnice, případně rovnici ve tvaru $0z = 4$. V tomto případě nemá soustava řešení.

Počty řešení v jednotlivých soustavách můžeme určit pomocí Frobeniovy věty. Bican (2000, s. 35) ji uvádí následovně:

> Nehomogenní[1] soustava lineárních rovnic je řešitelná, právě když hodnost matice soustavy $h(A)$ je rovna hodnosti matice rozšířené $h\big((A, b)\big)$[2].

Důsledkem této věty je, že soustava má:

1. 1 řešení $\Leftrightarrow hod\ (A) = hod\ (A, B), hod(A) = n$,
2. 0 řešení $\Leftrightarrow hod\ (A) < hod\ (A, B)$,
3. nekonečně mnoho řešení $\Leftrightarrow hod\ (A) = hod\ (A, B), hod(A) < n$

kde A je matice levých stran a B matice pravých stran.

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 30 \end{array}\right), hod(A) = 3, hod(A, B) = 3, \mathrm{n} = 3 \Rightarrow$ 1 řešení ($x_3 = 6, \dots$),
2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right), hod(A) = 2, hod(A, B) = 3 \Rightarrow$ 0 řešení ($0 \cdot x_3 \neq 30$),
3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), hod(A) = 2, hod(A, B) = 2, \mathrm{n} = 3 \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení ($0 \cdot x_3 = 0$).

Gaussova eliminace je vhodná pro soustavy tří a více rovnic. U dvou rovnic bychom volili spíše metodu sčítací. Metoda je vhodná u soustav, kde si nejsme jisti počtem řešení a je pro nás vhodné využít Frobeniovu větu. Zároveň je vhodné tuto metodu použít u rozsáhlých soustav rovnic, kde všechny rovnice neobsahují všechny neznámé. Srovnáním rovnic do rozšířené matice a zaměněním řádků tak, aby byla matice co nejblíže odstupňovanému

[1] Pozn. Autorky: V lineární algebře rozlišujeme homogenní a nehomogenní soustavu rovnic. Homogenní soustava rovnic obsahuje při převedení do rozšířené matice na pravé straně pouze nuly, tedy absolutní člen je v každé rovnici soustavy roven nule.

[2] V této práci označujeme matice velkými písmeny, v citované literatuře je sloupec pravých stran v matici soustavy označen malým písmenem b.

tvaru, zachováme přehlednost. Je výhodné použít tuto metodu u soustav, kde je více rovnic než neznámých. Řádky se nám zde vynulují nebo budou rozporuplné, a proto snadněji určíme řešení.

U této metody musíme soustavu rovnic převést na rozšířenou matici a po eliminaci zpět na soustavu a postupným dosazováním hledat kořeny. Tomuto kroku se můžeme vyhnout využitím *Gauss-Jordanovy eliminace* (viz následující kapitola).

2.6 Gauss-Jordanova eliminace

Při Gauss-Jordanově eliminaci postupujeme na začátku stejně jako při Gaussově eliminaci. Matici ale nepřevádíme pouze do řádkově odstupňovaného tvaru, nýbrž do *redukovaného (řádkově) odstupňovaného tvaru*.

Nejprve provedeme Gaussovu eliminaci a u každého nenulového řádku určíme *pivoty*. Pivoty jsou první nenulové prvky v každém řádku. Například u matic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 8 \\ 0 & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{13} & 6 \\ 0 & \mathbf{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 6 & 12 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 9 & 11 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou pivoty označeny tučně. Poté pomocí elementárních úprav řádků upravíme matici tak, aby byly pivoty rovny číslu 1 a ostatní prvky ve sloupcích, kde se nachází pivot, byly nulové.

Řádky vydělíme koeficientem pivotu, abychom na jeho místě získali číslo 1 a přičítáním/odčítáním n-násobků řádků eliminujeme ostatní prvky. Pořadí těchto úprav můžeme zaměnit, tedy nejprve eliminovat zbylé prvky a posléze vydělit každý řádek tak, aby byl pivot roven číslu 1. Zde je příklad matic v redukovaném odstupňovaném tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro matice v redukovaném odstupňovaném tvaru platí, že každý nenulový řádek začíná pivotem, každý pivot je vždy více napravo, než pivot v předchozím řádku, nulové řádky jsou v matici pod nenulovými řádky a každý sloupec, kde se nachází pivot má mimo pivot nuly. Nemusí platit, že každý řádek, kde se nachází pivot je mimo pivot nulový. (Anthony & Harvey 2012)

U čtvercových matic získáme tzv. *jednotkovou matici*. Jednotková matice je čtvercová matice, která má na hlavní diagonále jedničky, mimo diagonálu nuly. Značíme ji E, můžeme se setkat i s označením I.

$$E = (1);\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordanovou eliminací u čtvercových matic získáme na levé straně rozšířené matice jednotkovou matici a na pravé straně získáme řešení soustavy.

Ukážeme si postup na soustavě dvou rovnic o dvou neznámých. Soustavu si převedeme do rozšířené matice:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 121 \\ 3 & -2 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 121 \\ 0 & 18 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 8 & 121 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Druhý řádek vynásobíme -5 a přičteme k němu první řádek. Druhý řádek rovnou vydělíme číslem 18. Tato část postupu je shodná s Gaussovou eliminací, získali jsme odstupňovaný tvar matice.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & 105 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Dále od prvního řádku odečteme osminásobek druhého řádku, Získáme tak diagonální matici (tedy matici, která má mimo diagonálu nuly). Vydělením prvního řádku číslem 15 získáme jednotkovou matici a v pravé části matice získáme řešení soustavy rovnic $K = \{(7; 2)\}$.

Ukážeme si postup u soustavy tří rovnic o třech neznámých, konkrétně na soustavě rovnic (2.1.5). Navážeme na poslední získanou úpravu matice, kterou jsme získali v předchozí kapitole:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & -198 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 0 & -192 \\ 0 & -1 & 0 & -420 \\ 0 & 0 & -1 & -198 \end{array}\right).$$

K druhému řádku přičteme dvojnásobek třetího řádku a k prvnímu řádku přičteme třetí řádek. Získáme tak ve třetím sloupci všude nuly, kromě pivotu.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 1068 \\ 0 & -1 & 0 & -420 \\ 0 & 0 & -1 & -198 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 267 \\ 0 & 1 & 0 & 420 \\ 0 & 0 & 1 & 198 \end{array}\right)$$

Od prvního řádku odečteme trojnásobek druhého řádku, čímž získáme diagonální matici. Druhý a třetí řádek vydělíme číslem -1 a první řádek vydělíme číslem 4. Získáme tak na levé straně jednotkovou matici a na pravé straně řešení soustavy rovnic $K = \{(267; 420; 198)\}$.

Ukážeme si postup u soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých, opět navážeme na řešení soustavy (2.1.4) v předchozí kapitole.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right)$$

Od třetího a prvního řádku odečteme čtvrtý řádek. K prvnímu řádku přičteme třetí řádek a odečteme od něj druhý řádek. Třetí řádek vydělíme číslem -1. Získáme řešení $K = \{(40; 0; -10; -20)\}$. Řešení soustavy pěti a více rovnic by vypadalo obdobně.

Máme-li více rovnic než neznámých a soustava má jedno řešení, po Gaussově eliminaci se nám řádky navíc vynulují a můžeme pokračovat v Gauss-Jordanově eliminaci. Například soustavu (2.1.8) převedeme na matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{11}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -9 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

První řádek vynásobíme třemi a čtvrtý řádek dvěmi. Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku, od třetího řádku odečteme první řádek, ke čtvrtému řádku přičteme první řádek. Od druhého řádku odečteme jedenáctinásobek čtvrtého řádku a od třetího řádku odečteme čtyřnásobek čtvrtého řádku, druhý a čtvrtý řádek prohodíme. Dokončili jsme tak Gaussovu eliminaci a získali jsme dva nenulové řádky. K prvnímu řádku přičteme trojnásobek druhého řádku. Získáme tak matici v redukovaném odstupňovaném tvaru. Tato matice není jednotková, protože není čtvercová, nicméně splňuje podmínku, že na hlavní diagonále má 1 a mimo diagonálu 0. Z této matice lze vyčíst řešení $(-3; 2)$.

Obdobně je to u soustavy, kde je více neznámých než rovnic, případně u soustavy, kde je po Gaussově eliminaci méně nenulových řádků než neznámých. U těchto soustav nezískáme jednotkovou matici a nelze tedy jednoduše vyčíst řešení, nicméně nám převedení matice do redukovaného odstupňovaného tvaru usnadní řešení. Ukážeme si řešení na soustavě rovnic (2.1.8). Tu převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru následovně:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Čtvrtý řádek vydělíme třemi, od třetího a druhého řádku odečteme trojnásobek čtvrtého řádku a od prvního řádku pětinásobek čtvrtého řádku. Od druhého řádku odečteme třetí řádek a od prvního řádku odečteme dvojnásobek třetího řádku, třetí řádek vydělíme dvěma.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Od prvního řádku odečteme trojnásobek druhého řádku. Všechny pivoty jsou rovny číslu 1 a čísla ve sloupcích, kde se pivoty nachází, jsou rovny číslu 0 (mimo pivoty). Získali jsme tak redukovaný odstupňovaný tvar. Řešení kořenů x_3, x_4, x_5 lze vyčíst z matice, ale řešení kořenů x_1, x_2 musíme určit pomocí parametru převedením prvního řádku na rovnici stejně jako u Gaussovy eliminace. U rovnice $x_1 + 2\,x_2 = 12$ zavedeme parametr, například $x_1 = t\ (t \in R)$ a kořen x_2 určíme pomocí parametru: $x_2 = 6 - \frac{t}{2}$. Řešením soustavy je $K = \left\{\left(t;\ 6 - \frac{t}{2}; 3; 2; 1\right), t \in R\right\}$.

Uvedeme si ještě jeden příklad matice soustavy, kde máme po Gaussově eliminaci méně nenulových řádků než neznámých:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 3 & 20 \\ 0 & 3 & 4 & 18 \end{array}\right).$$

Soustavu převedeme na redukovaný odstupňovaný tvar následovně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 3 & 20 \\ 0 & 3 & 4 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -23 & -84 \\ 0 & 3 & 4 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{23}{6} & -14 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 6 \end{array}\right).$$

Od trojnásobku prvního řádku odečteme osminásobek druhého řádku. Druhý řádek vydělíme třemi a první šesti. Získáme tak matici v redukovaném odstupňovaném tvaru. Žádný z kořenů nelze na první pohled vyčíst a budeme je muset určit pomocí parametru z následujících rovnic:

$$x - \frac{23}{6}z = -14$$

$$y + \frac{4}{3}z = 6.$$

Určíme si například parametr $z = t, t \in R$ a pomocí parametru z první rovnice vyjádříme x: $x = -14 + \frac{23}{6}t$ a z druhé rovnice y: $y = 6 - \frac{4}{3}t$. Řešením soustavy je $K = \left\{\left(-14 + \frac{23}{6}t; 6 - \frac{4}{3}t; t\right)\right\}$.

Množinu řešení z matice soustavy získáme dvěmi způsoby, a to Gaussovou eliminací a zpětným dosazením získaných kořenů nebo Gauss-Jordanovou eliminací. S počtem řešení u jednotlivých soustav je to stejně jako u Gaussovy eliminace.

Výhody této metody jsou shodné s výhodami Gaussovy eliminace. Gaussovu eliminaci bychom volili zejména u koeficientů ve tvaru zlomku, vysokých čísel a obecně tam, kde by bylo dokončit řešení Gauss-Jordanovou metodou náročnější kvůli tvaru koeficientů. Jelikož obě metody začínáme stejně, můžeme si vybrat, jak budeme pokračovat až po dokončení Gaussovy eliminace. Zároveň můžeme kdykoliv v průběhu řešení matici převést zpět na soustavu rovnic a dořešit ji jinými metodami.

Je vhodné Gauss-Jordanovu metodu použít u úloh, kde u soustavy uvažujeme více pravých stran. V tomto případě si můžeme zjednodušit řešení a nemusíme řešit každou soustavu s odlišnou pravou stranou zvlášť, ale soustavu vyřešíme jednou pro všechny pravé strany. V rozšířené matici si na levou stranu umístíme matici levých stran rovnic a na pravou stranu sloupcové matice pravých stran:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 & c_1 & d_1 & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 & c_2 & d_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m & c_m & d_m & \cdots \end{array}\right).$$

2.7 Inverzní matice

Inverzní matice A^{-1} $(n \times n)$ k matici A $(n \times n)$ je taková matice, pro kterou platí:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot \mathrm{A} = E, \text{ kde } E \text{ je jednotková matice řádu } n.$$

Inverzní matici mají pouze regulární čtvercové matice. Čtvercové matice (matice typu $(n \times n)$ můžeme označit jako *regulární* právě tehdy, když je jejich hodnost rovna jejich řádu (tedy počtu řádků matice). Pokud je hodnost matice menší než počet jejích řádků, hovoříme o *singulární* matici. (Friedberg et al., 2014)

Vynásobíme-li matici její inverzní maticí, získáme jednotkovou matici. Zároveň platí, že pokud vynásobíme matici jednotkovou maticí, získáme shodnou matici:

$$A \cdot \mathrm{E} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}.$$

Pro násobení matic platí $A \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, tedy není komutativní. Proto budeme hovořit o vynásobení matice *zleva* a vynásobení matice *zprava*.

Při této metodě soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

převedeme na rovnici $A \cdot x = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Rovnici vynásobíme zleva maticí A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot x = A^{-1} \cdot B$$

$$x = A^{-1} \cdot B.$$

Sloupcovou matici řešení tedy získáme vynásobením inverzní matice levých stran a matice pravých stran.

Pro řešení soustavy rovnic pomocí *inverzní matice* se musíme nejprve seznámit s násobením matic.

Násobení matic závisí na počtu jejich řádků a sloupců. Dvě matice $A \cdot B$ můžeme vynásobit pouze v případě, že je A typu $m \times n$ a B typu $n \times p$, tedy počet sloupců první matice je roven počtu sloupců druhé matice. Součinem získáme matici C typu $m \times p$. Prvek c_{ij} získáme skalárním součinem i-tého řádku první matice a j-tého sloupce druhé matice. (Goode & Annin, 2007)

Ukážeme si to na příkladu:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Abychom získali řešení soustavy rovnic, budeme vždy násobit čtvercovou matici typu $n \times n$ a sloupcovou matici typu $n \times 1$. Získáme sloupcovou matici typu $n \times 1$, kterou lze *transformovat* na uspořádanou n-tici.

Inverzní matici získáme pomocí Gauss-Jordanovy eliminace. Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme levou stranu rozšířené matice $(A|E)$ na jednotkovou matici a na pravé straně nové matice získáme matici inverzní $(E|A^{-1})$.

Ukážeme si řešení soustavy rovnic (2.1.3), kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou matici $(A|E)$ upravíme Gauss-Jordanovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Od druhé rovnice odečteme trojnásobek první rovnice, druhý řádek vydělíme číslem -4, od první rovnice odečteme druhou rovnici. Získali jsme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Můžeme provést zkoušku tak, že vynásobíme A a A^{-1}. Měli bychom získat jednotkovou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} & 1 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} \\ 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} & 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní vynásobíme $A^{-1} \cdot B$ pro zisk x:

$$x = A^{-1} \cdot B$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{1}{4} \cdot 10 \\ \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1}{4} \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{4} \\ \frac{8}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy je uspořádaná rovnice $(4;\ 2)$.

Pro soustavu tří a více rovnic je řešení obdobné. Například soustavu (2.1.5) bychom pomocí inverzní matice vyřešili následovně:

$$A^{-1}\colon \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 19 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -9 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 0 & -12 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 28 & -19 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 72 & -48 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 28 & -19 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 28 & -19 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & -9 & 4 \end{array}\right).$$

Od dvojnásobku prvního řádku odečteme druhý řádek, součet zapíšeme do druhého řádku. Do třetího řádku zapíšeme rozdíl čtyřnásobku třetího řádku a pětinásobku prvního řádku. Ke třetímu řádku přičteme devítinásobek druhého řádku. K druhému řádku přičteme dvojnásobek třetího řádku a od prvního řádku odečteme třetí řádek. K prvnímu řádku přičteme trojnásobek druhého řádku. První řádek vydělíme číslem 4. Získáme tak inverzní matici:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -12 & 5 \\ 28 & -19 & 8 \\ 13 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy rovnic (2.1.5) získáme součinem inverzní matice A^{-1} a matice pravých stran:

$$\begin{pmatrix} 18 & -12 & 5 \\ 28 & -19 & 8 \\ 13 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108 + 144 + 15 \\ 168 + 228 + 24 \\ 78 + 108 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 267 \\ 420 \\ 198 \end{pmatrix}.$$

Řešení vychází stejně jako u předchozích metod $K = \{(267; 420; 198)\}$.

Uvedeme si řešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých, konkrétně soustavy (2.1.4).

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku, od třetího řádku odečteme trojnásobek prvního řádku a od čtvrtého řádku odečteme první řádek.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

I při hledání inverzní matice můžeme řádky prohazovat. Vyměníme tedy druhý a čtvrtý řádek. Ke třetímu řádku přičteme druhý řádek a od čtvrtého řádku odečteme dvojnásobek druhého řádku. Zároveň můžeme rovnou odečíst druhý řádek i od prvního řádku. Získáme tak v druhém sloupci všude nuly, kromě pivotu, který je číslo 1.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dále prohodíme třetí a čtvrtý řádek. Tímto jsme dokončili Gaussovu eliminaci. Třetí řádek vynásobíme číslem -1 a přičteme k němu čtvrtý řádek. Od prvního řádku odečteme třetí a čtvrtý řádek. Získáme tak inverzní matici:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici vynásobíme sloupcem pravých stran:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy rovnic (2.1.8) je, stejně jako u předchozích metod, $K = \{(40; 0;\ -10;\ -20)\}$.

V této kapitole bylo vysvětleno násobení matic, které můžeme využít pro ověření získaných kořenů. Platí $A \cdot x = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme tedy matici levých stran soustavy sloupcovou maticí získaného řešení. Pokud získáme sloupcovou matici pravých stran soustavy, je naše řešení správné.

Například chceme-li ověřit řešení $K = \{(267;\ 420;\ 198)\}$ u soustavy rovnic (2.1.5), budeme postupovat následovně:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & -7 & 4 \\ 5 & -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 267 \\ 420 \\ 198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 267 - 3 \cdot 420 + 1 \cdot 198 \\ 8 \cdot 267 - 7 \cdot 420 + 4 \cdot 198 \\ 5 \cdot 267 - 6 \cdot 420 + 6 \cdot 198 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Získali jsme sloupec pravých stran ze zadání, naše řešení je tedy správné. Provedení zkoušky tímto způsobem není jednodušší než klasické dosazení kořenů do rovnic a ověření rovností, jsou to shodné úkony. Zkouška pomocí násobení matic je vhodná pro soustavy, které se nacházejí v maticovém tvaru.

Jak bylo uvedeno, inverzní matici mají pouze čtvercové regulární matice. Tuto metodu lze použít pouze na soustavu n rovnic o n neznámých, zároveň matice levých stran musí být regulérní, u singulárních matic nelze najít inverzní matici. (Bečvář, 2019)

Touto metodou nelze řešit většinu soustav, což je její velkou nevýhodou. Lze ji použít pouze u rovnic, které mají jedno řešení. Abychom našli inverzní matici, je potřeba provést Gauss-Jordanovu eliminaci. Pokud provádíme Gauss-Jordanovu eliminaci, můžeme soustavu rovnic rovnou vyřešit. Řešení pomocí Gauss-Jordanovy eliminace by tedy bylo časově jednodušší.

Jednou získaná inverzní matice může být použita k řešení soustav rovnic s různými pravými stranami bez nutnosti opakovat celý výpočet. Takto získáme univerzální inverzní matici, kterou můžeme použít k řešení jakékoliv soustavy rovnic s danou maticí koeficientů, což je výhodou této metody.

2.8 Cramerovo pravidlo

V této kapitole budeme pracovat s *determinantem* matice. Pro účely této práce se zaměříme na výpočet determinantu, nikoli na jeho teoretické pochopení a definici.

Determinant je jedna číselná hodnota. Pokud jsou prvky matice reálná čísla, determinant bude také reálné číslo. Determinant lze vypočítat pouze pro čtvercové matice. Pro determinant matice A používáme značení det(A) nebo |A|. Každá čtvercová matice má právě jeden determinant. U singulárních matic je determinant roven nule, pro regulární matice je determinant nenulový, může nabývat kladných i záporných hodnot.

Pro matici prvního řádu je determinant roven prvku matice:

$$|a| = a.$$

Pro determinanty vyššího řádu platí, že při výpočtu sčítáme součiny prvků matice. V každém součinu se vyskytuje právě jediný prvek z každého sloupce a právě jediný prvek z každého řádku matice.

Pro $n = 2$ lze vypočítat determinant pomocí vzorce:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

tedy vynásobíme prvky na hlavní diagonále a od součinu odečteme součin prvků na *vedlejší diagonále*. Vedlejší diagonála se skládá z prvků $a_{n1}, a_{n-1,2}, a_{n-2,3}, \dots\ a_{1n}$. (Bečvář, 2019)

Například determinant řádu 2 matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ vypočítáme následovně:

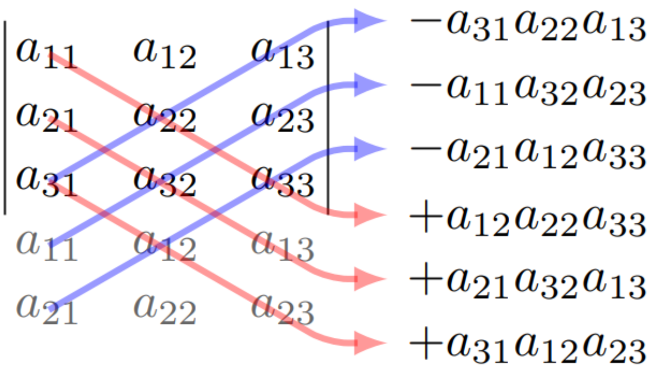
$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu by vypadal následovně:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

K výpočtu determinantu lze využít *Sarrusovo pravidlo*. Pod matici opíšeme znovu první a druhý řádek. Determinant uvažované matice je roven součtu šesti součinů (viz obrázek 11). Jak bylo uvedeno výše, každý součin obsahuje právě jeden prvek z každého řádku a z každého sloupce.



Obrázek 11: Sarrusovo pravidlo (Barto & Tůma, 2022, s. 231)

Vypočítáme determinant matice levých stran soustavy rovnic (2.1.5):

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 8 & -7 & 4 \\ 5 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) \cdot 6 + 8 \cdot (-6) \cdot 1 + 5 \cdot (-3) \cdot 4 -$$

$$-5 \cdot (-7) \cdot 1 - 4 \cdot (-6) \cdot 4 - 8 \cdot (-3) \cdot 6 = -1.$$

Pro všechny čtvercové horní trojúhelníkové matice libovolného řádu platí, že jejich determinant je součinem prvků na hlavní diagonále. Například:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

Zároveň to platí i pro dolní trojúhelníkovou matici (tedy matici, která má nad hlavní diagonálou samé nuly):

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

Platí, že determinant matice A je roven determinantu matice *transponované* A^T.

$$|A| = |A^T|$$

Transponovaná matice k matici $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ je matice $A^T = (b_{ij})$ typu $n \times m$, kterou získáme z matice vzájemnou výměnou řádků za sloupce a naopak, tedy $b_{ij} = a_{ji}$ pro všechny $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Například horní trojúhelníková matice a dolní trojúhelníková matice z předchozího příkladu jsou vzájemně transponované, zároveň je jejich determinant shodný. Matice tedy můžeme transponovat, aniž by se změnil jejich determinant. (Bican, 2000)

Matici můžeme převést na horní (dolní) trojúhelníkovou pomocí následujících úprav.

Přičtení t-násobku jednoho řádku/sloupce k jinému řádku/sloupci

Například u matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ odečteme od druhého řádku trojnásobek prvního řádku. Determinant výsledné matice bude roven determinantu původní matice.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 = -2$$

Jak si můžeme všimnout, u druhé matice se druhý součin vynuluje, tedy determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále, jak je uvedeno výše.

Tato úprava je ekvivalentní, tedy nemění výsledný determinant. Ostatní úpravy determinant mění.

Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem

Vynásobíme-li řádek nebo sloupec libovolným nenulovým koeficientem t, determinant se změní t-krát. Například pokud u matice $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ vynásobíme například první řádek číslem 2, výsledný determinant bude dvojnásobek prvního determinantu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 = -4 \left(= 2 \cdot (-2)\right).$$

Pokud provedeme tuto úpravu, musíme výsledný determinant vynásobit $\frac{1}{t}$.

Záměna řádků/sloupců

Vyměníme-li mezi sebou libovolné dva řádky/sloupce, výsledný determinant se změní na opačný. Tedy za každou výměnu dvou řádků/sloupců musíme výsledek vynásobit číslem -1. Například:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -1 \cdot (cb - ad) = ad - cb.$$

Pomocí těchto úprav můžeme matici upravit do na horní/dolní trojúhelníkovou a určit její determinant vynásobením prvků na hlavní diagonále, případně můžeme matici upravit na jakýkoliv tvar, který nám usnadní výpočet determinantu pomocí jiné metody. (Anthony & Harvey 2012)

Pro výpočet determinantu čtvrtého a vyššího řádu nelze použít Sarrusovo ani podobné pravidlo. Je proto vhodné matici upravit na horní/dolní trojúhelníkovou a vynásobit prvky na hlavní diagonále. Například determinant matice pravých stran soustavy rovnic (2.1.4) vypočteme následovně:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$$

Postupně odečteme n-násobky řádků tak, jako jsme to udělali u předchozích tří metod. Zároveň zaměníme druhý a třetí řádek a posléze třetí a čtvrtý řádek. Výsledné znaménko se tedy nezmění.

Další možnost je vypočítat determinant pomocí *Laplaceova rozvoje* (také rozvoje podle řádku/sloupce).

Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

se determinant pomocí Laplaceova rozvoje vypočítá následovně:

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Tedy všechny prvky a_{ij} jednoho řádku/sloupce (můžeme si vybrat kterýkoliv řádek/sloupec) vynásobíme postupně determinanty matic typu $(n-1) \times (n-1)$, které vzniknou z původní matice vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce (platí pro matici řádu n).

Například pro prvek a_{32} vynecháme třetí řádek a druhý sloupec, tedy výsledná matice se skládá z tučně zvýrazněných prvků:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{a_{24}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Tyto součiny postupně sečteme nebo odečteme, v závislosti na poloze prvku v matici. Je-li pro prvek součet $i + j$ lichý (například pro prvky $a_{14}, a_{32}, a_{43}, \dots$), součin odečteme. Pokud je součet $i + j$ sudý (například pro prvky $a_{13}, a_{42}, a_{11}, \dots$), součin přičteme. Ve vzorci je to znázorněno umocněním čísla $-1^{(i+j)}$. Platí, že pokud umocňujeme číslo -1 na lichou mocninu, získáme číslo -1 a pokud umocňujeme číslo -1 na sudou mocninu, získáme $+1$. Kontrolou nám může být, že se znamínka střídají. Ve výše uvedené rovnici budou znaménka vypadat následovně:

$$|A| = +\,a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+\,a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Determinant matice druhého řádu získáme sečtením součinů dvou prvků v řádku/sloupci a dvou matic prvního řádu. Determinant matice třetího řádu získáme sečtením součinů tří prvků z řádku/sloupce a tří matic druhého řádu. Determinant matice čtvrtého řádu získáme sečtením součinů čtyř prvků v řádku/sloupci a tří matic třetího řádu. Obdobně pro matice pátého a vyššího řádu. Uvedeme si příklad výpočtu determinantu matice čtvrtého řádu pomocí Laplaceova rozvoje. Rozvoj provedeme například podle třetího sloupce.

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 4 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(10\cdot 2\cdot 1 + 10\cdot 2\cdot 3 + 10\cdot 4\cdot 4 - 10\cdot 2\cdot 3 - 10\cdot 4\cdot 1 - 10\cdot 2\cdot 4)$$

$$-1\cdot(10\cdot 2\cdot 1 + 10\cdot 2\cdot 1 + 10\cdot 1\cdot 4 - 10\cdot 2\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 1 - 10\cdot 2\cdot 4)$$

$$+3\cdot(10\cdot 4\cdot 1 + 10\cdot 2\cdot 1 + 10\cdot 1\cdot 3 - 10\cdot 4\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 1 - 10\cdot 2\cdot 3)$$

$$-1\cdot(10\cdot 4\cdot 4 + 10\cdot 2\cdot 1 + 10\cdot 1\cdot 3 - 10\cdot 4\cdot 1 - 10\cdot 1\cdot 4 - 10\cdot 2\cdot 3) =$$

$$= 60 + 30 - 60 - 70 = -40$$

Pro výpočet determinantu je vhodné vybrat řádek, kde se vyskytuje co nejvíce nul. Vyhneme se tak počítání determinantů matic $(n-1)$, protože je budeme násobit nulou, tedy se vynulují a nemusíme znát jejich konkrétní hodnotu. Matici si můžeme upravit pomocí výše uvedených úprav. Opět si musíme dávat pozor na ty, které determinant mění. Například u matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

můžeme od čtvrtého řádku odečíst první řádek. Ve čtvrtém řádku tak získáme až na jeden prvek samé nuly. Determinant vypočítáme následovně:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 3 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 10.$$

Pokud bychom pomocí jedné z úprav získali řádek nebo sloupec obsahující samé nuly, znamená to, že matice je singulární a determinant je roven nule. Například:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zde odečtením prvního řádku od čtvrtého řádku získáme nulový řádek, $D = 0$. (Goode & Annin, 2007)

Výše je uvedeno několik způsobů, jak vypočítat determinant čtvercové matice. Nyní si ukážeme, jak ho využít pro řešení soustav rovnic.

Při řešení soustavy rovnic Cramerovým pravidlem řešíme všechny kořeny soustavy zvlášť. Pro všechny kořeny x_j platí $x_j = \frac{D_j}{D}$, kde x_j jsou jednotlivé kořeny $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, D je determinant matice levých stran a D_j je determinant matice levých stran, kde j-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran. Obecně pro dvě rovnice o dvou neznámých (tedy matice levých stran bude mít řád $n = 2$) najdeme kořeny následovně:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = b_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Například soustavu rovnic (2.1.3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

vyřešíme pomocí Cramerova pravidla následovně:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

Řešení soustavy je $K = \{(4; 2)\}$.

Uvedeme si řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých, konkrétně soustavy (2.1.5).

Determinant matice levých stran jsme si vypočítali výše ($D = -1$). Stačí nám vypočítat determinanty matic se zaměněným j-tým sloupcem za sloupec pravých stran $\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$ a obě hodnoty dosadit do vzorce pro výpočet jednotlivých kořenů.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -12 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -267, \qquad x = \frac{D_1}{D} = \frac{-267}{-1} = 267$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 8 & -12 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -420, \qquad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-420}{-1} = 420$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & -7 & -12 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -198, \qquad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-198}{-1} = 198$$

Řešení soustavy rovnic (2.1.8) je $K = \{(267;\ 420;\ 198)\}$.

Uvedeme si řešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých, konkrétně soustavy (2.1.4). Při vysvětlování výpočtu determinantu řádu 4 jsme si výše vypočítali determinant matice levých stran $D = -1$ a zároveň determinanty matic $D_1 = -40, D_2 = 0, D_3 = 10$. Determinant matice $D_4 = 20$ lze určit jakýmkoliv z výše uvedených způsobů. Kořeny vypočítáme následovně:

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{-40}{-1} = 40$$

$$b = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$c = \frac{D_3}{D} = \frac{10}{-1} = -10$$

$$d = \frac{D_4}{D} = \frac{20}{-1} = -20.$$

Řešení soustavy rovnic (2.1.4) i pomocí Cramerova pravidla vychází $K = \{(40; 0;\ -10;\ -20)\}$. (Bican, 2019)

Nevýhodou Cramerova pravidla je, stejně jako u inverzní matice, že ho můžeme aplikovat pouze na n rovnic o n neznámých, zároveň pouze na soustavy, které mají právě jedno řešení (jinak bychom ve vzorci museli dělit nulou). Metoda je vhodná pro soustavy dvou nebo tří rovnic (o dvou a třech neznámých). Pro soustavy se čtyřmi a více neznámými není příliš výhodná, protože metoda vyžaduje pro každé řešení výpočet $n + 1$ determinantů řádu n. Tato metoda se hodí pro úlohy, kde u soustavy nehledáme množinu všech řešení, ale pouze jeden nebo několik málo kořenů.

Závěr

V práci je shrnut postup metod řešení lineárních rovnic, konkrétně metody dosazovací, srovnávací, sčítací, grafické, Gaussovy eliminace, Gauss-Jordanovy eliminace, řešení pomocí inverzní matice a Cramerova pravidla. Jsou zde uvedeny příklady pro soustavy n rovnic o n neznámých a je zmíněno, jak by vypadal postup, pokud bychom měli méně rovnic než neznámých nebo obráceně. U každé metody je uvedeno, pro jaké soustavy rovnic je vhodná, podobné metody jsou mezi sebou porovnány. Cílem mé práce bylo vysvětlit aplikaci daných metod řešení soustav lineárních rovnic a přiřadit ke každé metodě její výhody a typ soustavy, pro kterou je tato metoda výhodná. Dle mého názoru byl cíl práce splněn.

Jednodušší metody jsou v práci rozebrány detailně i s vysvětlením pojmů zmíněných či potřebných k řešení soustavy. U složitějších metod jsou informace uvedeny v takové míře, v jaké jsou potřeba k řešení soustav rovnic. V práci není vysvětlena teorie z oblasti analytické geometrie ani lineární algebry.

Práce byla napsána s úmyslem umístit ji veřejně na internet, aby pomohla co nejvíce čtenářům s efektivním řešením soustav rovnic. Obsahuje konkrétní příklady řešení.

Na tuto práci by se dalo navázat popsáním metod, které tato práce neobsahuje, zaměřením se na soustavy rovnic, které nejsou lineární nebo na soustavy nerovnic.

Osobně si myslím, že práce bude užitečná, zejména pro žáky základní a střední školy. Můj vlastní přínos je zejména diskuse nad počtem řešení soustav rovnic v závislosti na podobě soustavy a přiblížení výhod jednotlivých metod.

Seznam použitých informačních zdrojů

Anthony, M., & Harvey, M. (2012). *Linear Algebra: Concepts and Methods*. Cambridge: Cambridge University Press.

Barto, L., & Tůma, J. (2022). *Lineární algebra*. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto /LinAlg/skripta_la7.pdf

Bečvář, J. (2019). *Lineární algebra* (Vydání páté). Matfyzpress.

Bican, L. (2000). *Lineární algebra a geometrie*. Academia.

Cizlerová, M., Krupka, P., Polický, Z., & Škaroupková, B. (2013). *Matematika pro střední školy*. Didaktis.

Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (2014). *Linear Algebra*. Pearson Higher Ed.

Goode, S. W., & Annin, S. A. (2007). *Differential Equations and Linear Algebra*. Pearson Higher Ed.

Charvát, J., Zhouf, J., & Boček, L. (2009). *Matematika pro gymnázia - Rovnice a nerovnice* (4. vydání). Prometheus, spol.

Liška, M., Valenta, T., & Král, L. (2018). *Matika pro spolužáky* (3. vydání). ProSpolužáky.cz.

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky* (9., přeprac. vyd). Prometheus.

Zhouf, J. (2019). *Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě*. Fraus.