

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analytická reprezentace afinních zobrazení v rovině

Analytic representation of affine transformations in the plane

Blanka Horáčková

Vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Analytická reprezentace afinních zobrazení v rovině potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 14. dubna 2024

Velké poděkování patří mému vedoucímu bakalářské práce JUDr. Mgr. Filipovi Beranovi za cenné rady a inspirativně vedené semináře. Také děkuji rodině a kamarádům. Dále také Vojtovi za to, že jeho láska ke mně je větší než jeho nenávisť k MS Word.

ABSTRAKT

Práce se věnuje třem hlavním tématům – shodným, podobným a afinním zobrazením roviny z pohledu analytické geometrie. V první kapitole jsou připomenuty nejzákladnější pojmy, se kterými se bude v celé práci následně pracovat. Druhá kapitola je zaměřená na shodnosti. Nalezneme zde analytickou reprezentaci této transformace jak v maticové, tak i komplexní podobě. Třetí kapitola je zaměřená na podobnosti. Stěžejní je pak rozklad podobnosti na shodnost a stejnoolehlost, kde se spojují znalosti jak podobností, tak shodností. Poslední kapitola se věnuje afinitám. Tato kapitola již není tak teoreticky zaměřená, ale orientuje se zejména na charakteristické prvky afinních transformací a dále také na příklady. Důležitým a přínosným faktorem této práce jsou řešené příklady, které jsou doplněny o množství obrázků. Práce je určena zejména pro studenty matematiky, jako studijní text. ale využití může najít i u středoškolských učitelů, k doplnění středoškolského učiva.

KLÍČOVÁ SLOVA

shodné zobrazení, podobné zobrazení, afinní zobrazení, geometrické zobrazení, matice

ABSTRACT

The thesis deals with three main topics – isometric, similar, and affine transformations of the plane from the point of view of analytic geometry. In the first chapter, the most basic concepts are recalled, which will be subsequently dealt with throughout the thesis. The second chapter focuses on identical transformations. Here, we find an analytic representation of this transformation in matrix and complex forms. The third chapter focuses on similar transformations. The central point is then the decomposition of similarity into identity and identicalness, where knowledge of both similarities and identities are combined. The last chapter focuses on affinities. This chapter is not so theoretical anymore but focuses mainly on the characteristic elements of affine transformations and examples. This work's important and beneficial factor is the solved examples, supplemented by several figures. The work is intended primarily for mathematics students as a study material. However, it may also be used by secondary school teachers to supplement the secondary school curriculum.

KEYWORDS

isometric transformation, similarity transformation, affine transformation, geometric transformation, matrix

Obsah

Úvod	8
1 Základní pojmy.....	10
2 Shodná zobrazení.....	14
2.1 Shodnosti zachovávající počátek.....	15
2.1.1 Otočení okolo počátku.....	15
Odvození matice otočení okolo počátku pomocí polárních souřadnic.....	17
Odvození matice otočení okolo počátku rozkladem do báze	19
Komplexní reprezentace otočení se středem v počátku.....	23
Skládání otočení zachovávající počátek	29
2.1.2 Zrcadlení s osou procházející počátkem.....	32
Odvození matice zrcadlení pomocí polárních souřadnic.....	34
Odvození matice zrcadlení rozkladem do báze	35
Odvození matice zrcadlení skládáním zobrazení	36
Komplexní reprezentace zrcadlení.....	39
2.1.3 Grupa shodných zobrazení zachovávajících počátek	42
2.2 Obecné shodnosti.....	44
2.2.1 Posunutí	44
Odvození matice posunutí	44
Komplexní reprezentace posunutí	45
2.2.2 Otočení	46
2.2.3 Osová souměrnost	50
2.2.4 Posunuté zrcadlení.....	55
2.2.5 Obecné matice shodného zobrazení	57
Odvození obecné matice shodnosti	58

3	Podobná zobrazení.....	60
3.1	Odvození analytické reprezentace podobných zobrazení.....	61
3.1.1	Podobnost a determinant	63
3.1.2	Stejnolehlost	63
	Analytická reprezentace stejnolehlosti	64
3.2	Komplexní reprezentace podobných zobrazení.....	66
3.3	Samodružné body podobnosti	69
3.4	Rozklad podobnosti na stejnolehlost a shodnost	71
3.5	Řešené příklady – rozklad podobných zobrazení	72
4	Afinní zobrazení	82
4.1	Analytická reprezentace afinního transformace	84
4.2	Samodružné body přímky a směry afinního zobrazení	86
4.2.1	Afinní obraz přímky	87
4.2.2	Afinní obraz vektoru.....	90
	Závěr.....	95
	Seznam použitých informačních zdrojů	96

Úvod

Cílem této práce je srozumitelné sepsání nejdůležitějších pojmů, které se týkají afinních zobrazení roviny z analytického pohledu. Analytická geometrie je velice rozsáhlá část geometrie. V této práci se proto budeme věnovat pouze jejím zlomkem, a to transformacemi roviny. Text má sloužit zejména jako studijní text k předmětu Analytická geometrie II v podobě, ve které byl vyučován na pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v roce 2022. V nové akreditaci již tento předmět není, a proto jsme se rozhodli sepsat studijní materiál věnující se tématům, která se vyskytovala v již zmíněném předmětu. Celá práce, stejně tak jako hodiny Analytické geometrie II, je pojata velice intuitivně a snaží se vybranou látku vysvětlit přístupně a jednoduše. Studijní materiál popisuje analytickou metodou tři různé transformace – shodné, podobné a afinní transformace.

V první kapitole se čtenář obeznámí s nejdůležitějšími pojmy, které se týkají tématu transformací v rovině. Již předpokládáme znalost stěžejních pojmů analytické geometrie (vektor, přímka, rovina) a práci s nimi, jelikož toto téma bylo obsahem předmětu, který Analytické geometrii II předcházela – Analytická geometrie I.

Druhá kapitola věnující se shodnostem je rozdělena na dva hlavní celky – shodnosti zachovávající počátek a shodnosti počátek nezachovávající. Abychom dodrželi myšlenku práce, začneme tím jednodušším – shodnosti zachovávající počátek. Podrobně se s tímto tématem seznámíme a nalezneme hned dvě jeho reprezentace – maticové a komplexní. Stěžejním materiálem pro maticovou reprezentaci bude publikace Geometrické transformace (metoda analytická) (Hejný et al., 1997) a také Analytická geometrie II: Geometrické transformace (Stehlíková, 2008). Komplexní reprezentace částečně vychází z učebnice Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla (Calda, 1999). Dále také množinu shodností, které zachovávají počátek podrobíme zkoumáním, které se zabývá grupami. Poté se přesuneme k obecným shodnostem, kde opět nalezneme analytickou reprezentaci.

Třetí kapitola se zabývá podobnými transformacemi, nalezneme zde spojitost mezi shodnostmi a podobnostmi. Poslední kapitola nám rozšíří analytické obzory až k afinitám. Primární roli v této kapitole budou mít řešené příklady. Tato kapitola nám také dodá ucelený pohled na všechny předešlé transformace, jelikož shodná i podobná zobrazení jsou zároveň i zobrazeními afinními. Afinní zobrazení sama o sobě obsahují velice zajímavá témata, která

se do práce již nevešla. Jedním z těchto témat jsou například osové afinity, které zpracovává bakalářská práce Osová afinita v rovině (Chomová, 2023).

Neodmyslitelnou součástí této práce jsou obrázky, které se snaží dodat přehlednost a někdy i kompaktnost všem tématům. Obrázky jsou autorské a byly vytvořeny pomocí aplikace Geogebra. Všechny kapitoly jsou také doplněny o řešené příklady, aby si čtenář mohl ověřit nabyté znalosti a zároveň si tyto znalosti upevnil. V několika případech jsou příklady ilustrační a motivují čtenáře k následnému nahlédnutí do problematiky.

Práci jsme se snažili členit tak, aby se dala používat co nejvíce prakticky. V obsahu jsou začleněny nejdůležitější kapitoly, aby se daly rychle nalézt. Zároveň jsme se snažili důležitá odvození umístit na začátek stránky, aby se materiál dal jednoduše tisknout, a tím byl dobře použitelný do výuky – například na středních školách.

Mezi mé hlavní zdroje bude patřit publikace 10 Geometrických transformací (Kuřina, 2002) a Geometrické transformace (metoda analytická) (Hejný et al., 1997) spolu s Analytickou geometrií II: Geometrické transformace (Stehlíková, 2008). Elektronická skripta od Stehlíkové částečně vycházejí z Hejného, ale také zároveň přináší nové poznatky.

1 Základní pojmy

V této kapitole jsou pro úplnost a připomenutí uvedeny základní definice a věty, o něž se opírají následující kapitoly.

Definice (Zobrazení)

Zobrazení f množiny A do množiny B je jakákoli relace mezi množinami A, B taková, že pro každý prvek $x \in A$ existuje právě jeden prvek $y \in B$ pro který platí, že $(x, y) \in f$.

(Trch & Novotná, 1993, s. 30)

Zobrazení, potažmo geometrické zobrazení, je pro tuto práci stěžejním pojmem, jelikož shodnosti, podobnosti a afinity, jimiž se budeme dále zabývat, jsou speciálním případem takových zobrazení. Budeme ještě konkrétnější a naše zkoumání zaměříme pouze na zobrazení z roviny do roviny, tedy podle Kuřiny (2002, s. 11): zobrazení f je dáno, je-li k libovolnému bodu X (prvku dané množiny, například roviny) určen jednoznačně bod $X' = f(X)$ jako jeho obraz (z dané roviny).

Dalším důležitým pojmem, který se často prolíná s pojmem zobrazení, je pojem relace. Zde si všimněme jedné důležité věci: občas se hovoří o shodnosti a jindy o shodném zobrazení. Otázka, kterou se nyní můžeme zabývat, zní – zda tato, na první pohled jemná jazyková nuance způsobí rozdíl i v matematice. Shodná, podobná nebo afinní zobrazení jsou zobrazení, které přiřazuje bodům roviny jiné body. Shodnost, podobnost a afinitu můžeme chápat jako vztah mezi dvěma objekty. V geometrii většinou hovoříme o shodných nebo podobných trojúhelnících a afinity využíváme mezi kružnicí a elipsou. Vztah mezi relací a zobrazením je zřejmý: dva objekty, například trojúhelníky, jsou shodné (jsou spolu v relaci) právě tehdy, když existuje shodné zobrazení, které jeden objekt zobrazí na druhý. Pro nás bude vhodnější druhé pojetí, zejména proto, že zobrazení se skládají lépe než relace. Občas však budeme, zejména pro stručnost, používat i relační výrazy (například budeme mluvit o „přímé shodnosti“ namísto formálně přesnějšího „přímého shodného zobrazení“).

Definice (Transformace roviny)

Transformací roviny ρ rozumíme prosté zobrazení roviny ρ na rovinu ρ . (Kuřina, 2002, s. 37)

Shodnou definici transformace uvádí i Stehlíková et al. (2008, s. 3). V Lávičkovi (2006, s. 8) narazíme také na stejnou definici pod pojmem geometrická transformace.

Jinými slovy, se jedná o zobrazení, které je prosté a zároveň na, což také odpovídá pojmu vzájemně jednoznačné zobrazení. Transformace je tedy speciálním případem zobrazení. V této práci budeme uvažovat pouze nad geometrickými transformacemi, zároveň tyto dva pojmy budeme vnímat spíše jako synonymní, nežli slovo nadřazené a podřazené. Dále budeme spíše využívat pojem zobrazení, jelikož tento pojem je mnohdy přirozenější – spíše přemýšlíme o zobrazování objektů, nikoliv o transformaci celé roviny.

Na zobrazení se dají aplikovat různé operace – příkladem takové důležité operace je skládání neboli opakovaná aplikace několika zobrazení. Operace skládání zobrazení je často definována v různých publikacích odlišně (zejména v jakém pořadí je skládání aplikováno) – my se dále budeme držet následující definice.

Definice (Skládání zobrazení)

Mějme dvě rovinná zobrazení z roviny do roviny f a g . Složením těchto zobrazení v tomto pořadí rozumíme zobrazení $g \circ f$ z roviny do roviny,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

(Kuřina, 2002, s. 15)

Definice (Samodružný bod)

Nechť je f geometrické zobrazení v rovině, bod roviny S se nazývá samodružným bodem zobrazení f , právě když pro bod S platí

$$f(S) = S.$$

(Hejný et al., 1997, s. 5)

Samodružné body pro nás budou po celou dobu našeho zkoumání geometrie zajímavými útvary. Mohou nám sdělit velice užitečné informace, které se budou hodit při identifikování zobrazení. Jedno ze zobrazení, které lze identifikovat pomocí samodružných bodů, se nazývá identické zobrazení.

Definice (Identické zobrazení)

Identické zobrazení neboli identita, je geometrické zobrazení, v němž je každý bod samodružný.

(Kuřina, 2002, s. 18)

Definice (Lineární zobrazení)

Nechť $V(T), V'(T)$ jsou vektorové prostory (nad stejným tělesem T). Zobrazení $f: V \rightarrow V'$ se nazývá lineární zobrazení, jestliže pro libovolné $a, b \in V, \alpha \in T$ platí:

- a) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- b) $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a)$.

Neboli platí, že zobrazení f je aditivní (první rovnost) a homogenní (druhá rovnost).

(Novotná & Trch, 2006, s. 64)

Z této definice plyne bezprostředně tvrzení, že pro nulový prvek z vektorového prostoru platí: $f(0) = 0$. Dokažme si toto tvrzení pomocí první vlastnosti lineárního zobrazení – aditivity. Mějme rovnici:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

přičtením opačného prvku k $f(0)$ získáme požadovanou rovnost.

$$\begin{aligned} f(0) - f(0) &= f(0) + f(0) - f(0) \\ 0 &= f(0) \end{aligned}$$

Poznámka: Vektorový prostor, který se nám v geometrii, konkrétně v analytické geometrii, bude nejvíce hodit je množina orientovaných úseček v rovině s počátečním bodem umístěným do počátku kartézské soustavy souřadnic (vektory vektorového prostoru). Vektory budeme sčítat způsobem, který známe ze střední školy a násobit reálnými čísly. (Novotná & Trch, 2006, s. 32) Body roviny tedy ztotožňujeme s vektory, který mají počáteční bod v počátku a konečný v daném bodu.

Lineární zobrazení je zásadním pojmem lineární algebry, jelikož lineární zobrazení implikují mnoho užitečných vlastností. Jednou z nejdůležitějších vlastností je skutečnost, že lineární zobrazení lze reprezentovat pomocí matic, čehož mimo jiné budeme využívat

v následujících kapitolách (Novotná & Trch, 2006, s. 64). Skládání lineárních zobrazení lze pak chápat jako násobení matic, pomocí nichž jsou reprezentovány. Formálně je skládání zobrazení definováno pomocí následující věty.

Věta (Násobení matic a skládání zobrazení)

Nechť f, g jsou zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, jež jsou popsána maticemi F, G . Pak zobrazení $g \circ f$ je popsáno maticí GF .

Důkaz: Nechť $X[x, y]$ je libovolný bod. Označme $f(X) = X'[x', y']$, $g(X') = X''[x'', y'']$.

Matrice $F = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ reprezentuje zobrazení f a matice $G = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$ reprezentuje zobrazení g . Pak

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ odkud } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(Hejný et al., 1997, s. 16)

Grupa

Poslední definici, kterou si v této kapitole uvedeme, bude definice grupy. Stanovský (2010, s. 64) považuje za grupu čtveřici $G = (G, *, ', e)$, kde G je množina, na které je definována binární operace $*$ a platí:

1. $\forall a, b \in G: a * b \in G$,
2. $\forall a, b, c \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$,
3. $\exists e \in G \forall a \in G: e * a = a * e = a$,
4. $\forall a \in G \exists a' \in G: a * a' = a' * a = e$.

Prvku e se říká jednotka (neurální prvek), prvku a' inverzní prvek k a .

Kučina (2002, s. 20) mluví o grupě jako o dvojici $\langle G, * \rangle$. Pro porovnání – Hejný (1997, st. 18) konkretizuje grupu pouze pro transformace. T je grupa transformací na M s operací skládání, kde je M neprázdnou množinou bodů a T neprázdnou množinou transformací, pokud platí

$$f \in T \Rightarrow f^{-1} \in T, \quad f, g \in T \Rightarrow g \circ f \in T.$$

V této práci se budeme držet značení $G = (G, *, ', e)$.

2 Shodná zobrazení

Se shodnostmi se seznamují žáci již na prvním stupni základní školy, a to primárně s osovou souměrností. Žák hledá osově souměrné útvary, osy těchto útvarů atd. Dále se žáci v průběhu studia setkávají s pojmy jako například otočení, posunutí, samodružné body, nebo dokonce rozlišují shodnosti přímé a nepřímé. (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2023, s. 35, 37–38)

Pokud se zeptáme žáků na střední škole, jaké znají shodnosti, jistě pro nás nebude překvapivé, že odpoví rotací, středovou souměrností, osovou souměrností (zrcadlením) a posunutím (Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, 2007, s. 25). Tato rovinná zobrazení jsou probírána zejména syntetickou metodou. Jedním z důvodů může být nedostatečný aparát, kterým žáci na střední škole disponují – zejména absencí znalostí z lineární algebry. Jak si ukážeme na dalších stránkách analytická geometrie je zde s lineární algebrou velice úzce provázána.

Poznámka: S pojmem osová souměrnost pracuje většina středoškolských učebnic matematiky (zdroj, planimetrie), my však primárně budeme využívat pojem zrcadlení, jelikož společně s pojmy otočení a posunutí, můžeme požívat i činná slovesa – otočit, ozrcadlit, posunout. Pojem zrcadlení mimo jiné také odpovídá i anglickému názvosloví – reflection.

Nyní se postupně budeme těmito zobrazeními zabývat, nejprve však zjednodušenou formou, kde bude hrát hlavní roli počátek soustavy souřadnic. Předem upozorníme, že středovou souměrnost v rovině budeme považovat za speciální případ otočení, konkrétně otočení o 180° .

Než se podíváme na obecné náležitosti, které se pojí s tímto tématem, budeme postupovat od jednoduchého ke složitějšímu. Obecné shodnosti jsou velice komplexním tématem, nejprve se budeme zabývat shodnostmi zachovávající počátek. Tento krok bude velice praktický, zejména z hlediska lineární algebry. Z čistě geometrického pohledu by zjednodušením byly i shodnosti zachovávající například bod $[-8,1]$. Avšak zobrazení, které zachovává počátek,

směřujeme k tomu, aby mohlo být nazýváno také zobrazením lineárním a mít jeho velice šikovné vlastnosti.

2.1 Shodnosti zachovávající počátek

To, že shodnost zachovává počátek znamená, že pokud bychom tento bod, tedy počátek, zobrazili, zůstane na místě. Jinými slovy můžeme říct, že počátek bude samodružným bodem. Takováto zobrazení máme dvě. Patří mezi ně otočení okolo počátku a zrcadlení s osou procházející počátkem.

2.1.1 Otočení okolo počátku

Definice (Otočení)

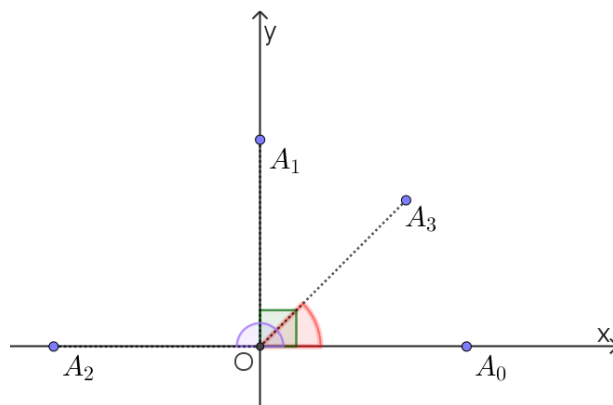
Otočení je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti φ , které bodu S přiřazuje též bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že platí:

$$|\sphericalangle XSX'| = \varphi \quad \text{a} \quad |SX'| = |SX|.$$

Bod S se nazývá střed otočení, orientovaný úhel φ je úhel otočení.

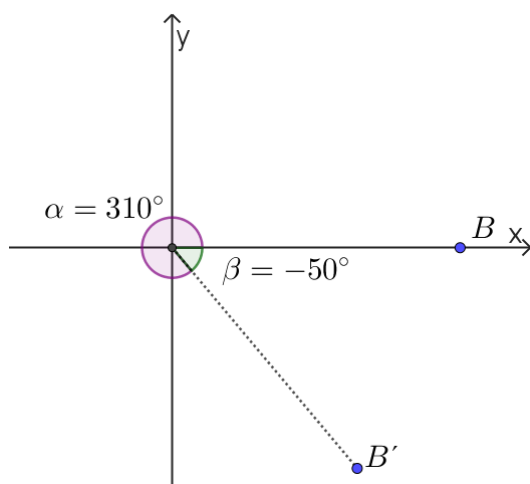
(Kuřina, 2002, s. 75)

S otočením (někdy také rotací) se setkáváme po celý život, ať už se jedná o hodinky, které nosíme na rukách, různá kola či periodické jevy a obrazce v přírodě i v architektuře. Před tím, než se budeme pokoušet odvodit analytický popis otočení okolo počátku, se podíváme na konkrétní příklady otočení jako je otočení bodu $A[x, y]$ o 90° , 180° a 45° .



Obrázek 2.1: Otočení bodu

Na Obrázek 2.1 vidíme bod A_0 , který je zobrazen na bod A_1 otočením o 90° , na bod A_2 otočením o 180° (také možno chápat jako středovou souměrnost) a na bod A_3 otočením o 45° . Povšimněme si, že bod se vždy otáčí na stejnou stranu, tedy konkrétně proti směru hodinových ručiček. Pokud tedy zadáváme otočení, musíme myslet na to, že zadáváme orientovaný úhel. Při otočení po směru hodinových ručiček musíme tedy použít zápornou hodnotu úhlu. Jak můžeme pozorovat na Obrázek 2.2, bod B se dostane do bodu B' buď otočením o -50° nebo o 310° . S otočením tedy souvisí dva důležité pojmy, a to střed otočení a úhel otočení. Proto budeme otočení značit jako písmeno $r_{S,\alpha}$ s dolními koeficienty S (bod středu otočení) a α (orientovaný úhel otočení). Otočení okolo počátku o úhel α budeme značit zjednodušeně r_α .

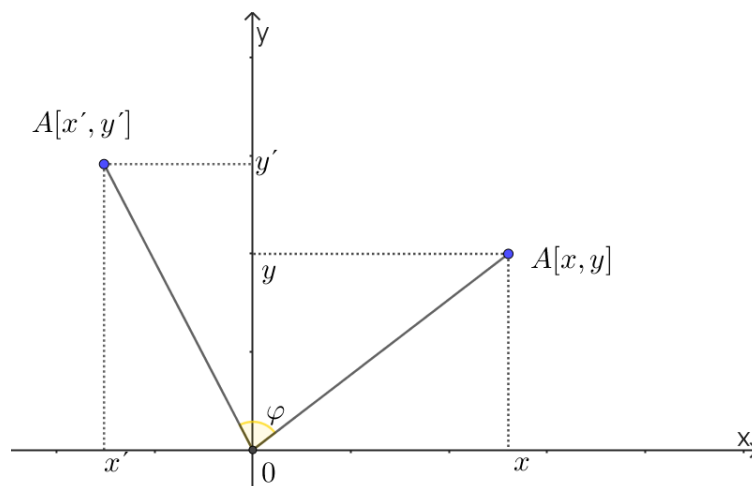


Obrázek 2.2: Otočení o orientovaný úhel

Mohlo by nás napadnout, co se stane s body, které otočíme o 0° (popřípadě o $\pm 360^\circ$ a jejich násobky). Tyto body se otočí o nulový úhel, tedy zůstanou na místě, jedná se tedy o identické zobrazení.

Odvození matice otočení okolo počátku pomocí polárních souřadnic

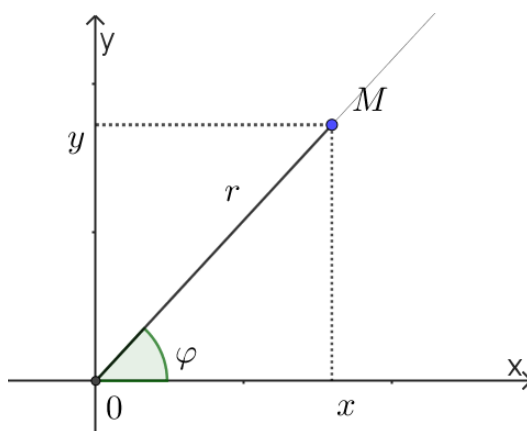
Naším úkolem je najít analytický popis otočení okolo počátku O o orientovaný úhel φ , tedy najít souřadnice zobrazeného bodu $A'[x', y']$ pomocí vzorového bodu $A[x, y]$ a úhlu otočení φ (Obrázek 2.3). Hledáme tedy nějaký předpis pro zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Snadné řešení poskytují polární souřadnice. Nejprve si tento pojem připomeňme.



Obrázek 2.3: Otočení okolo počátku

Polární souřadnice

Polární souřadnice zaznamenává polohu bodu pomocí úhlu φ , který svírá osa x s polopřímku začínající v počátku procházející daným bodem, a vzdálenosti r – vzdálenost daného bodu od počátku soustavy souřadnic. Zápis v polárních souřadnicích pro bod M vypadá takto $[\varphi, r]$ (Obrázek 2.4). Aby byl zápis jednoznačný, úhel φ bereme z intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. (Vondrová, 2005, s. 45)



Obrázek 2.4: Polární souřadnice

Máme-li zadaný bod v polárních souřadnicích lehce pomocí goniometrických vzorců v pravoúhlém trojúhelníku zjistíme souřadnice kartézské.

$$M[\varphi, r] \rightarrow M[r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi] = M[x, y]$$

Abychom s body mohli intuitivně pracovat, kartézské souřadnice neopustíme úplně a budeme pracovat se zápisem bodu v podobě:

$$M[r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi].$$

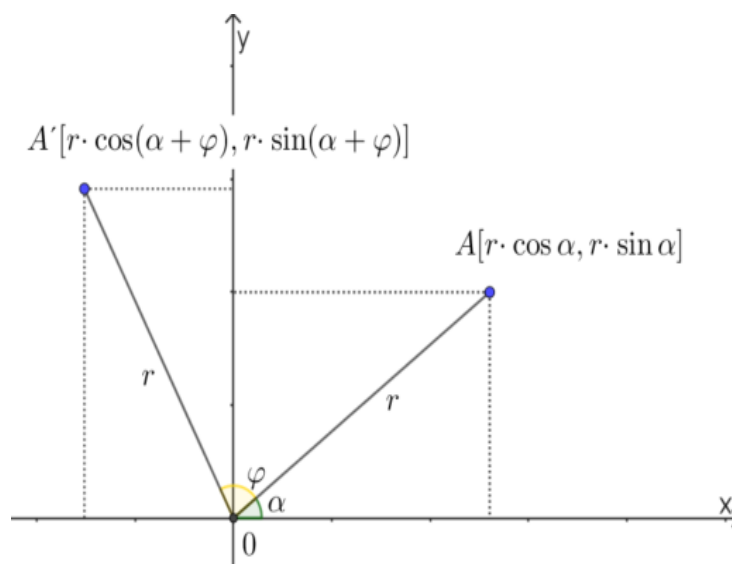
Přepíšme si tedy body pomocí polárních souřadnic podle Obrázek 2.5. Jednotlivé souřadnice zapsané pomocí polárních souřadnic upravujeme pomocí známých goniometrických vzorců, následně můžeme zápis rozdělit na maticové násobení.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos \alpha \\ r \cdot \sin \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\alpha + \varphi) \\ r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi \\ r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y \cos \varphi + x \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(Stehlíková et al., 2008, s. 10-11)



Obrázek 2.5: Otočení okolo počátku (polární souřadnice)

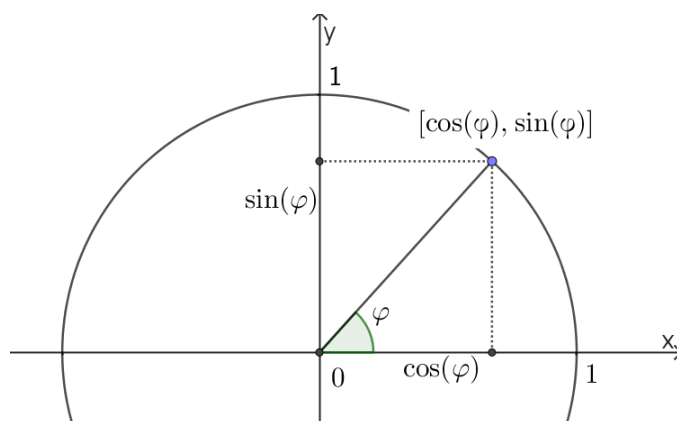
Odvození matice otočení okolo počátku rozkladem do báze

Matici otočení můžeme získat i dalšími způsoby, například pomocí součtu otočených vektorů. Využijeme toho, že každý bod roviny můžeme chápat jako vektor (z počátku do daného bodu) a vyjádřit jej jako lineární kombinaci vektorů $(1; 0)$ a $(0; 1)$, obecněji vektorů báze v kartézské soustavě souřadnic. Ukažme si toto odvození pro otočení okolo počátku s ostrým úhlem α (analogickým způsobem, lze nalézt tuto reprezentaci i pro další úhly).

Mějme bod $A[a_x, a_y]$, který můžeme chápat jako vektor $\vec{a} = (a_x, a_y)$. Tento vektor lze zapsat pomocí vektorů báze jako lineární kombinaci těchto vektorů. Tyto vektory označme \vec{x} a \vec{y} .

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = a_x \cdot (1, 0) + a_y \cdot (0, 1) = (a_x, 0) + (0, a_y) = \vec{x} + \vec{y}$$

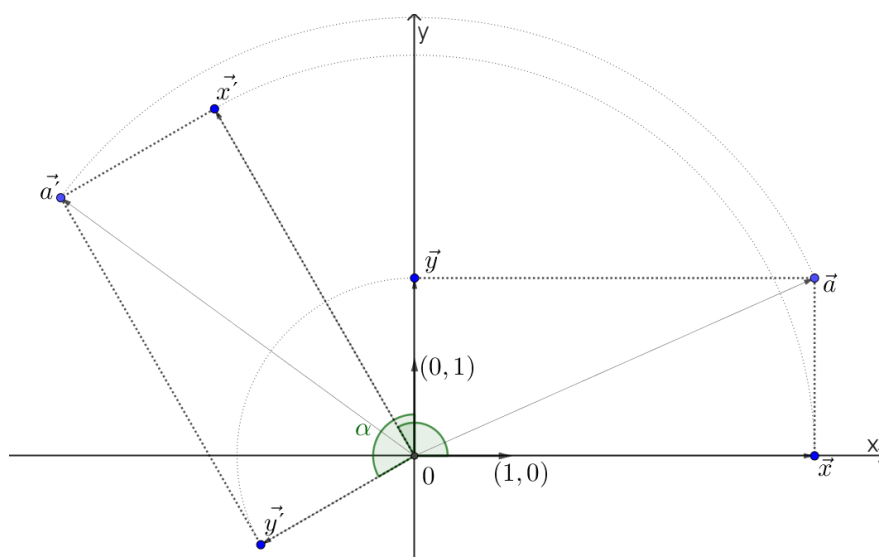
Dále si také připomeňme, že jakýkoliv bod na jednotkové kružnici lze zapsat pomocí goniometrického zápisu $[\cos \varphi, \sin \varphi]$ a zároveň každý bod na této kružnici je obrazem jiného bodu z kružnice, pokud zobrazením, které převádí jeden bod na druhý je otočení okolo počátku (Obrázek 2.6).



Obrázek 2.6: Jednotková kružnice

Vektor \vec{a} tudíž můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_x, a_y) = a_x \cdot (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ) + a_y \cdot (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) \\ &= (a_x \cdot \cos 0^\circ, 0) + (0, a_y \cdot \sin 90^\circ) = \vec{x} + \vec{y} \end{aligned}$$

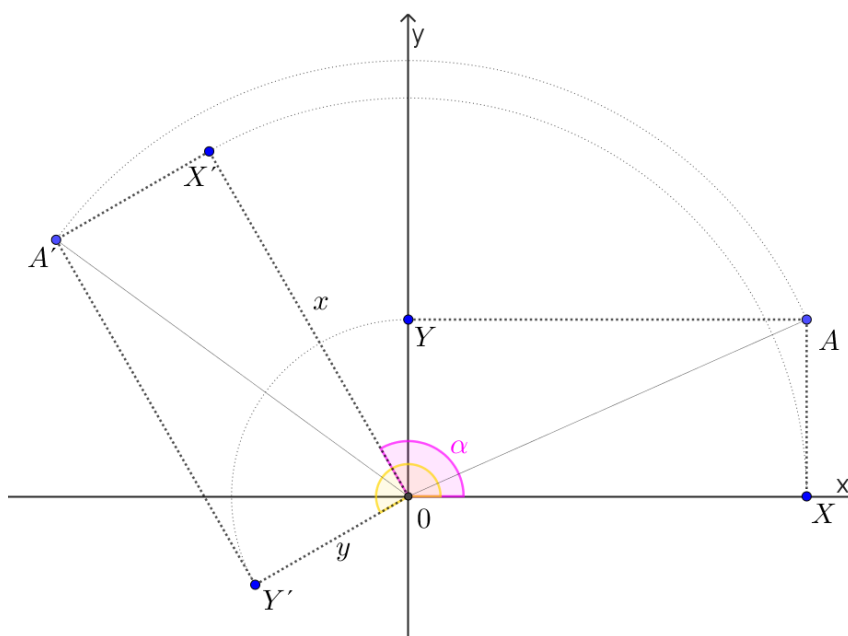


Obrázek 2.7: Otočení okolo počátku rozkladem do báze

Z Obrázek 2.7 vidíme, že stejně jako vektor \vec{a} , lze tímto způsobem vyjádřit obraz \vec{a}' .

$$\vec{a}' = a_x \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) + a_y \cdot (\cos \alpha + 90^\circ, \sin \alpha + 90^\circ) = \vec{x}' + \vec{y}' \quad (2.1)$$

Nyní se z představy o vektorech přesuneme zpět k bodům. Budeme používat značení jako na Obrázek 2.8.



Obrázek 2.8: Otočení okolo počátku rozkladem do báze II

$$X' = [x \cdot \cos \alpha, x \cdot \sin \alpha]$$

$$\begin{aligned} Y' &= [y \cdot \cos(\alpha + 90^\circ), y \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)] = \\ &= [y(\cos \alpha \cos 90^\circ - \sin \alpha \sin 90^\circ), y(\sin \alpha \cos 90^\circ + \cos \alpha \sin 90^\circ)] = \\ &= [-y \cdot \sin \alpha, y \cdot \cos \alpha] \end{aligned}$$

Obraz bodu A se tedy podle rovnice (2.1) rovná

$$A'[x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha], \quad (2.2)$$

což můžeme pomocí matice zapsat jako

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Již jsme našli obecnou analytickou reprezentaci otočení okolo počátku, nyní se podíváme na nějaké konkrétní zadání.

Příklad 2.1

Je dáno otočení okolo počátku o 120° . Najděte analytickou reprezentaci tohoto zobrazení a následně otočte bod A [3, 2] a zjistěte jeho souřadnice.

Řešení:

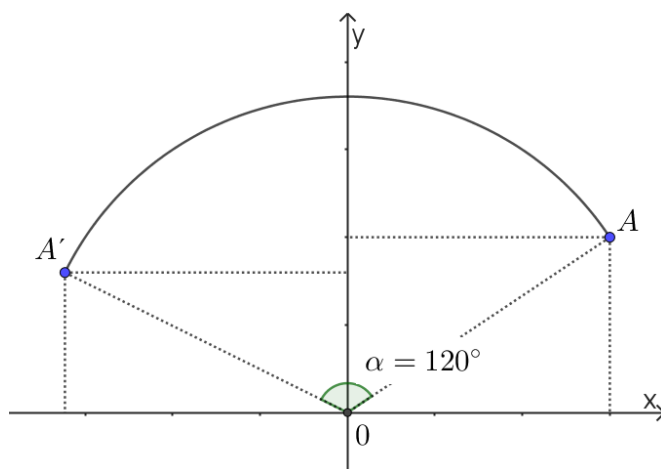
Najít analytickou reprezentaci nebude vůbec náročné, stačí vzít naši odvozenou matici (2.3) a dosadit do ní příslušný úhel.

$$r_{120^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Otočit bod by také nemělo být náročné, stačí na souřadnice bodu uplatnit matici konkrétního otočení a použít maticové násobení.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} -3,2 \\ 1,6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Naše výpočty nastiňuje i následující obrázek:



Obrázek 2.9: Otočení okolo počátku o 120°

Příklad 2.2

Otočení okolo počátku je dáno maticí A . Zjistěte náležitosti tohoto geometrického zobrazení.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Řešení:

Náležitostmi zobrazení myslíme charakterizující prvky tohoto zobrazení. V tomto případě nemusíme řešit o jaké zobrazení se jedná, jelikož nám zadání říká, že jde o otočení. Charakteristickými prvky otočení jsou střed otočení a úhel otočení. Střed je pevně dán počátkem kartézské soustavy souřadnic. Jediné, co nám schází je úhel otočení. Ten zjistíme jednoduchou úpravou matice na základní tvar.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \alpha = 225^\circ$$

Zjistili jsme, že matice reprezentuje otočení okolo počátku o úhel 225° .

Komplexní reprezentace otočení se středem v počátku

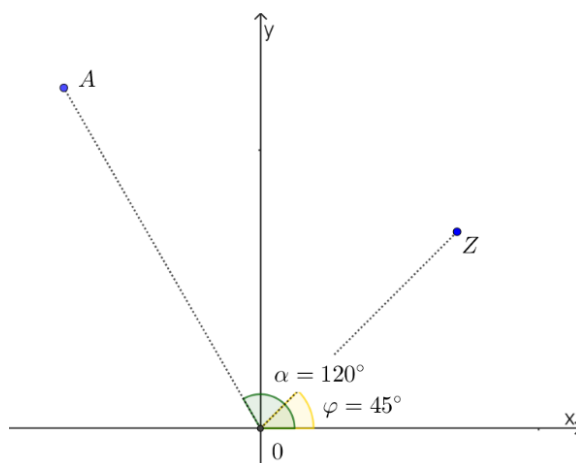
Body v rovině lze reprezentovat několika způsoby. Jedním ze způsobů je reprezentace pomocí komplexních čísel, kdy každému bodu je přiřazeno jedno komplexní číslo, jak bylo již zmíněno na začátku této práce.

Námi hledaná reprezentace přímé shodnosti pak nebude zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, nýbrž komplexní funkce jedné komplexní proměnné $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = z'$. Víceméně hledáme nějakou početní operaci, která v konečném důsledku komplexní číslo v Gaussově rovině otočí.

Vezměme si číslo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, tedy číslo, které reprezentuje bod $Z \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$. Budeme ho násobit různými dalšími komplexními čísly a budeme pozorovat, co se s čísly děje. Pro názornost budeme pracovat s goniometrickým tvarem komplexního čísla, který zaznamenává velikost čísla (vzdálenost od počátku) a úhel, který svírá s osou x.

$$z = a + bi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Nejprve vynásobíme číslo z číslem a (Obrázek 2.10).

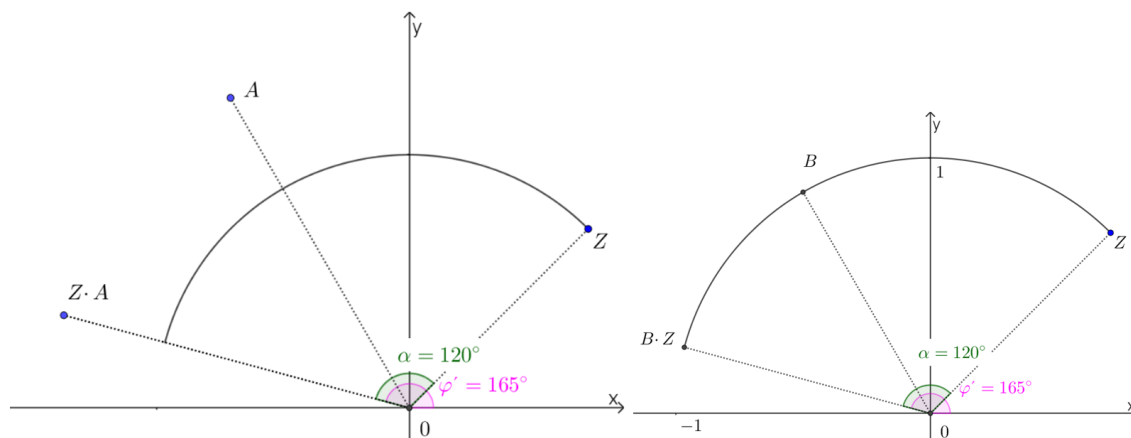


Obrázek 2.10: Komplexní otočení okolo počátku I

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ, \quad a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i = \sqrt{2}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$z \cdot a = 1 \cdot \sqrt{2}(\cos(45^\circ + 120^\circ) + i \sin(45^\circ + 120^\circ)) = \sqrt{2}(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$$

Již samotný výpočet ukazuje, co se bude s bodem v Gaussově rovině dít. V tomto konkrétním případě se úhel zvětšil o 120° , což odpovídá otočení okolo počátku o 120° . Dále se nám zvětšila velikost čísla neboli vzdálenost bodu od počátku, což již neodpovídá definici shodnosti, protože shodnost je takové zobrazení, které zachovává vzdálenosti. Tyto informace nám nastiňuje i Obrázek 2.11.



Obrázek 2.11: Komplexní reprezentace okolo počátku II

Zkusíme tedy násobit číslo z číslem, které má velikost jedna.

$$b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$z \cdot b = 1 \cdot 1(\cos 45^\circ + 120^\circ + i \sin 45^\circ + 120^\circ) = \cos 165^\circ + i \sin 165^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \doteq -0,97 + 0,26i$$

Nyní, jak můžeme vidět z Obrázek 2.11, se nám podařilo otočit bod Z o 120° . Otočení tedy můžeme v Gaussově rovině reprezentovat jako násobení komplexním číslem o velikosti jedna (Caldá, 1999, s.61)

$$z' = a \cdot z, \quad |a| = 1, a \in \mathbb{C} \quad (2.4)$$

Příklad 2.3

Je dáno otočení okolo počátku o 45° . Najděte komplexní reprezentaci tohoto zobrazení a následně pomocí této reprezentace otočte bod $A [4, 1]$ a zjistěte jeho souřadnice.

Řešení:

Již jsme si ukázali, jak reprezentovat body v Gaussově rovině, dále tedy o bodu $A[4, 1]$ budeme hovořit jako o komplexním čísle $a = 4 + 1i$. Také víme, že abychom číslo v Gaussově rovině otočili, stačí toto číslo vynásobit příslušným komplexním číslem o velikosti jedna. Označme si toto číslo písmenem r .

Číslo r si můžeme zapsat v goniometrickém tvaru a následně upravit na algebraický tvar.

$$\begin{aligned}r &= 1 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\r &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

Následně nám již nic nebrání čísla společně vynásobit, a tím zjistit souřadnice otočeného bodu. Samozřejmě nezáleží, zda komplexní čísla násobíme v goniometrickém nebo algebraickém tvaru. V tomto případě násobíme v algebraickém.

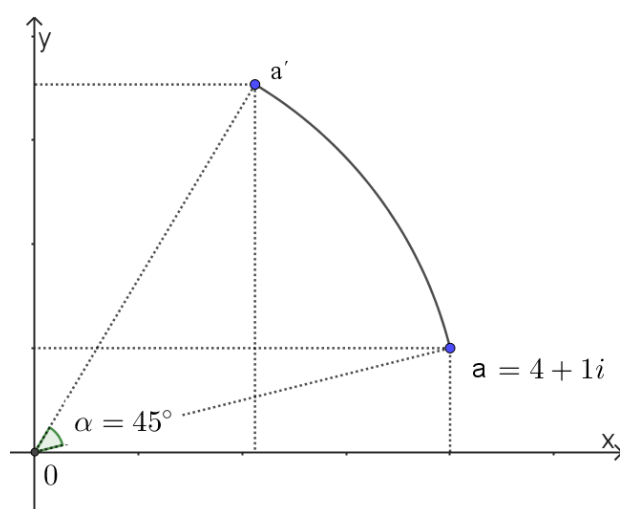
$$\begin{aligned}a' &= a \cdot r \\a' &= (4 + 1i) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\a' &= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} \\a' &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

Nalezli jsme komplexní reprezentaci otočení, které můžeme zapsat rovnicí.

$$a' = a \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

Také jsme našli otočený bod a' , kterou můžeme zpátky převést do souřadnic a zaokrouhlené hodnoty porovnat s Obrázek 2.12.

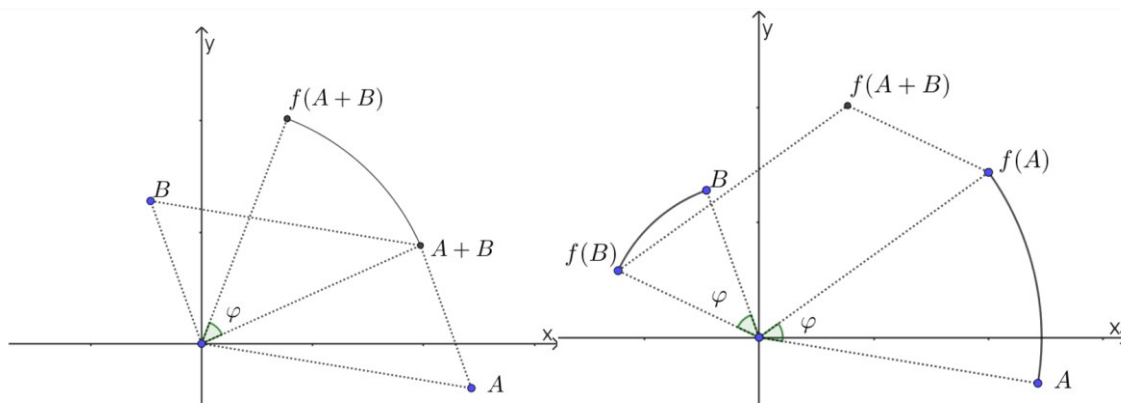
$$A' \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right] \doteq [2,1, 3,5]$$



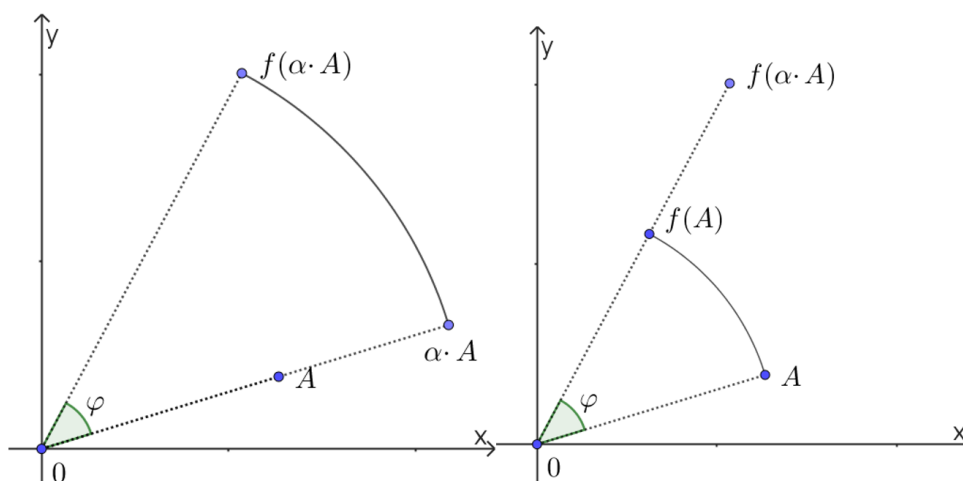
Obrázek 2.12: Otočení okolo počátku o 45°

Otočení a lineární zobrazení

Lineární zobrazení je jeden z nejdůležitějších pojmů z lineární algebry. Pokud by otočení okolo počátku bylo tímto zobrazením, mohli bychom využívat vlastnosti tohoto zobrazení. Otočení okolo počátku zachovává počátek, tím je splněna první podmínka. Na Obrázek 2.13 a Obrázek 2.14 si můžeme ověřit, že platí homogenita i aditivita.



Obrázek 2.13: Aditivita lineárního zobrazení



Obrázek 2.14: Homogenita lineárního zobrazení

Zjistili jsme, že otočení okolo počátku je lineárním zobrazením. Toto zjištění je pro nás klíčové, jelikož se nám odemyká spousta možností, jak nyní s tímto zobrazením a jeho analytickou reprezentací pracovat. Každé lineární zobrazení je reprezentováno maticí, my jsme tuto matici pro otočení se středem v počátku již našli. Skládání zobrazení lze tedy reprezentovat násobením těchto matic, čehož budeme využívat hned na následujících stránkách. Z lineární algebry víme, že sloupce matice lineárního zobrazení jsou tvořeny obrazy bázových vektorů (Novotná & Trch, 2006, s. 64). Tato vlastnost tedy musí platit u otočení okolo počátku – můžeme si to ověřit následujícím příkladem.

Příklad 2.4

Otočení okolo počátku jsou zadána maticemi A a B . Zjistěte o kolik stupňů tato zobrazení body otáčí a zjistěte, kam se otočí bázové vektory $(1,0)$, $(0,1)$.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Úpravou matice na základní tvar matice otočení zjistíme úhel otočení.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ \end{pmatrix}$$

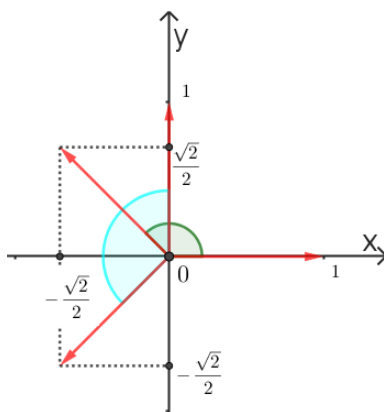
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$$

Při zkoumání vektorů s nimi budeme pracovat jako s orientovanými úsečkami, tedy nejprve zobrazíme počáteční bod a poté koncový. Oba vektory začínají v počátku, tedy jsou samodružným bodem otočení okolo počátku – zůstanou na místě, jelikož se zobrazí samy na sebe. Koncový bod vektoru zobrazíme, jak jsme zvyklí. Nejprve se podíváme na otočení reprezentované maticí A .

$$f_A([1,0]) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$f_A([0,1]) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Jak je vidět (Obrázek 2.15), vektor $(1,0)$ se podle očekávání otočil na vektor $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, jehož souřadnice tvoří první sloupec matice otočení. Totéž platí u vektoru $(0,1)$, který se otočil na vektor $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

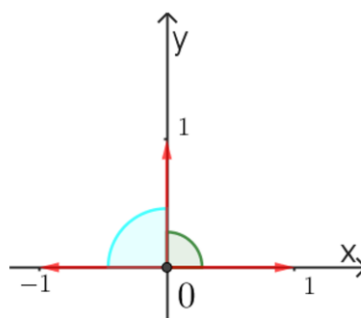


Obrázek 2.15: Sloupce matice otočení okolo počátku I

Matice B reprezentuje otočení okolo počátku o 90° . Stejným postupem zjistíme, kam se zobrazí bázové vektory, a dojdeme ke stejnému zjištění jako u předešlého otočení .

$$f_B([1,0]) = [0,1]$$

$$f_B([0,1]) = [-1,0]$$



Obrázek 2.16: Sloupce matice otočení okolo počátku II

Skládání otočení zachovávající počátek

Příklad 2.5

Maticově i komplexně ukažte, že $r_\beta \circ r_\alpha = r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}$.

Řešení:

Skládání zobrazení obecně komutativní není, nicméně pro otočení se stejným středem tato vlastnost platí. Pro názornost si to ukážeme maticově i komplexně, kde uvidíme, že komplexní zápis je mnohdy kratší a přehlednější. Budeme pracovat s otočením, které má střed v počátku, ale jak bylo řečeno, tato vlastnost platí obecně pro všechna otočení s libovolným stejným středem.

Maticově:

$$\begin{aligned} r_\beta \circ r_\alpha(A) &= r_\beta(r_\alpha(A)) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha & -\cos \beta \cdot \sin \alpha - \sin \beta \cdot \cos \alpha \\ \sin \beta \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \sin \alpha & -\sin \beta \cdot \sin \alpha + \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_\alpha \circ r_\beta(A) &= r_\alpha(r_\beta(A)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta & -\sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
r_{\alpha+\beta}(A) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Komplexně:

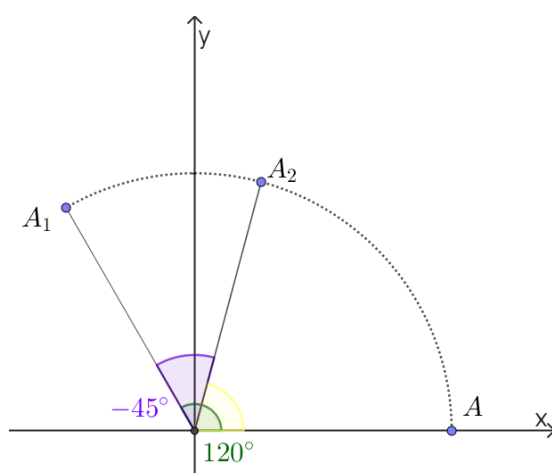
$$\begin{aligned}
r_\beta \circ r_\alpha(z) &= b \cdot (a \cdot z) = (b \cdot a) \cdot z = ((\cos \beta + i \sin \beta) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)) \cdot z = \\
&= (\cos \beta \cos \alpha + i \cos \beta \sin \alpha + i \sin \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha) \cdot z = \\
&= (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \cdot z \\
r_\alpha \circ r_\beta(z) &= a \cdot (b \cdot z) = (a \cdot b) \cdot z = ((\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta)) \cdot z = \\
&= (\cos \alpha \cdot \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot z = \\
&= (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \cdot z \\
r_{\alpha+\beta}(z) &= (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \cdot z
\end{aligned}$$

Příklad 2.6

Spočítejte $r_{120^\circ} \circ r_{-45^\circ}$ a pomocí toho algebraicky vyjádřete $\sin 75^\circ$ a $\cos 75^\circ$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
r_{120^\circ} \circ r_{-45^\circ} &= \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos -45^\circ & -\sin -45^\circ \\ \sin -45^\circ & \cos -45^\circ \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} = r_{75^\circ}
\end{aligned}$$



Obrázek 2.17: Složení otočení okolo počátku

Pomocí skládání otočení okolo stejného středu jsme zjistili algebraické vyjádření goniometrických funkcí, které neznáme z tabulkových hodnot. Algebraické vyjádření tedy vypadá následovně:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \doteq 0,26$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \doteq 0,97.$$

Grupa otočení okolo téhož bodu

Ukažme, že množina všech otočení okolo počátku s operací skládání tvoří komutativní grupu. Abychom toto mohli tvrdit, musíme ověřit uzavřenost této množiny s operací skládání. Dále ověřit, že skládání je komutativní a asociativní. V neposlední řadě je potřeba nalézt neutrální a inverzní prvek k dané množině.

Uzavřenost množiny a komutativitu jsme ověřili již v Příklad 2.5. Asociativitu můžeme ověřit následující rovnicí.

$$(r_\alpha \circ r_\beta) \circ r_\gamma = r_\alpha \circ (r_\beta \circ r_\gamma)$$

$$r_{\alpha+\beta} \circ r_\gamma = r_\alpha \circ r_{\beta+\gamma}$$

$$r_{\alpha+\beta+\gamma} = r_{\alpha+\beta+\gamma}$$

Nyní stačí nalézt neutrální a inverzní prvek. Bez důkazu uvedeme, že neutrálním prvkem je otočení o 0° a inverzní prvek lze snadno nalézt, vždy vezmeme otočení s opačně orientovaným úhlem.

Symbolicky tuto grupu můžeme zapsat následovně:

$$G = (\{r_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}, \circ, r_\alpha^{-1}, id).$$

Jelikož jsem si otočení okolo počátku reprezentovali maticovým zápisem a následně i v komplexní rovině, zápis grupy, by mohl vypadat následovně:

$$G = \left(\left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \circ, \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$G = (\{f(z) = a \cdot z, a \in \mathbb{C}, |a| = 1\}, \circ, f(z)^{-1}, id).$$

Pozorujme, že grupa je jednoparametrická, vždy volíme jeden parametr ať už úhel $\alpha \in \mathbb{R}$, nebo číslo $a \in \mathbb{C}$. Po krátkém zamyšlení také můžeme přijít na to, že se nemusíme omezit pouze na otočení okolo počátku, nýbrž na otočení okolo libovolného stejného bodu. V tomto případě je pro nás počátek stejně obyčejný bod jako každý jiný, jelikož nepotřebujeme využívat sílu lineární algebry.

2.1.2 Zrcadlení s osou procházející počátkem

Definice (Zrcadlení)

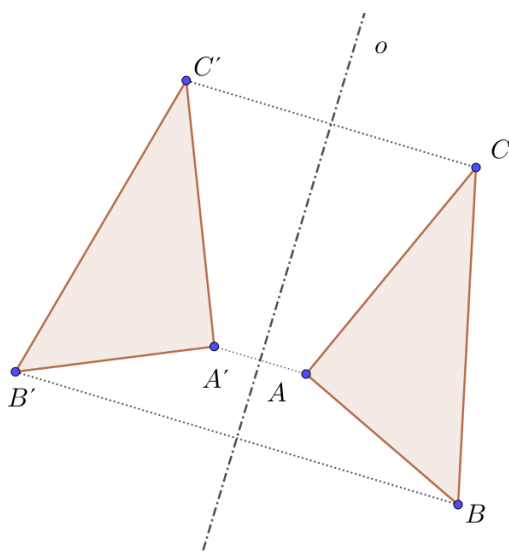
Je dána přímka o . Zobrazení, které libovolnému bodu L přímky o přiřazuje též bod a libovolnému bodu $X \notin o$ přiřazuje bod X' tak, že o je osou úsečky XX' , se nazývá zrcadlení s osou o . Přímka o je přímkou samodružných bodů tohoto zobrazení.

(Kuřina, 2002, s. 48)

Pro stručnost budeme v této kapitole někdy vynechávat spojení osa pocházející počátkem. Ke zmýlení za obecné zrcadlení nedojde, jelikož v této kapitole se budeme věnovat pouze zrcadlení s osou procházející počátkem.

Zrcadlení (osová souměrnost) je (narozdíl od otočení) shodností, kterou řadíme do nepřímých zobrazení. Nepřímé shodnosti jsou takové, které nezachovávají orientaci. Jak můžeme vidět na Obrázek 2.18, tak v trojúhelníku ABC čteme body po směru hodinových

ručiček. Trojúhelník ABC se zobrazí podle osy o na trojúhelník $A'B'C'$, kde ale pořadí bodů čteme po směru hodinových ručiček.



Obrázek 2.18: Osová souměrnost

Osovou souměrnost budeme značit písmenem s_o s dolním koeficientem o , který reprezentuje přímku neboli zadanou osu souměrnosti. Speciálně u osově souměrnosti s osou procházející počátkem budeme někdy využívat značení s_φ , kde φ označuje úhel osy souměrnosti a osy souřadnic x . Jelikož osa prochází počátkem, je tato souměrnost také jednoznačně zadaná. Zobrazení na Obrázek 2.18 označíme s_o , tedy $s_o: ABC \rightarrow A'B'C'$. Naše otázka by mohla být, kam se pomocí zobrazení s_o zobrazí body $A'B'C'$. Z obrázku je zřejmé, že by se zobrazily na své původní vzory, tedy na body ABC . Tuto skutečnost můžeme zapsat vztahem (rovnici) $s_o \circ s_o = \text{Id}$, tedy pokud na body použijeme dvakrát tu samou osovou souměrnost s_o , dostaneme body původní neboli identické.

Definice (Involutorní zobrazení)

Zobrazení f , pro které platí

$$f \circ f = \text{id}$$

se nazývá involutorní zobrazení.

Pro zajímavost uvádíme, že například Kuřina (2002, s. 49) vyčleňuje z definice involutorního zobrazení identické zobrazení. Snadno také nahlédneme, že podmínka involuce je ekvivalentní s tvrzením, že zobrazení, je involutorní samo k sobě.

Odvození matice zrcadlení pomocí polárních souřadnic

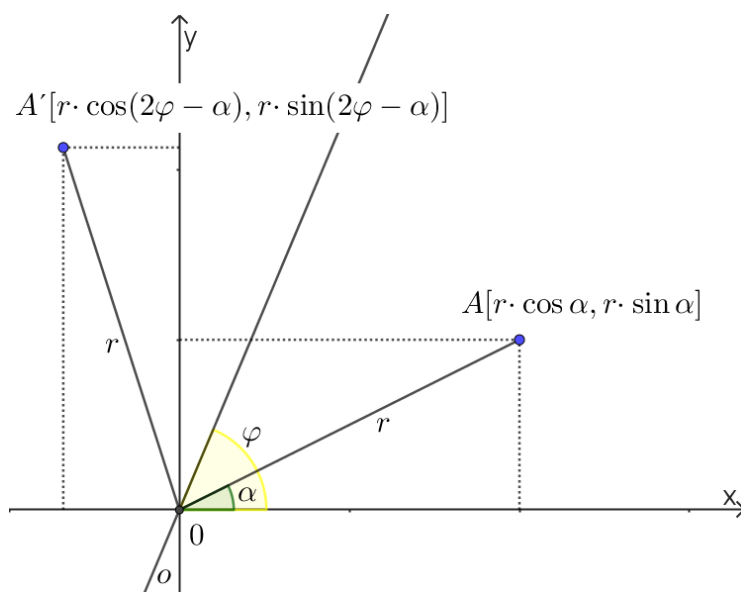
Velice obdobně jako jsme odvodili otočení okolo počátku pomocí polárních souřadnic, můžeme pomocí polárních souřadnic odvodit i osovou souměrnost s osou procházející počátkem. Najdeme tedy matici souměrnosti s osou procházející počátkem O , která svírá s osou x úhel φ .

Při zápisu bodů v polárních souřadnicích se budeme držet úzu, který jsme zavedli u otočení okolo počátku.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos \alpha \\ r \cdot \sin \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(2\varphi - \alpha) \\ r \cdot \sin(2\varphi - \alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos 2\varphi \cos \alpha + r \sin 2\varphi \sin \alpha \\ r \sin 2\varphi \cos \alpha - r \cos 2\varphi \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi \\ x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

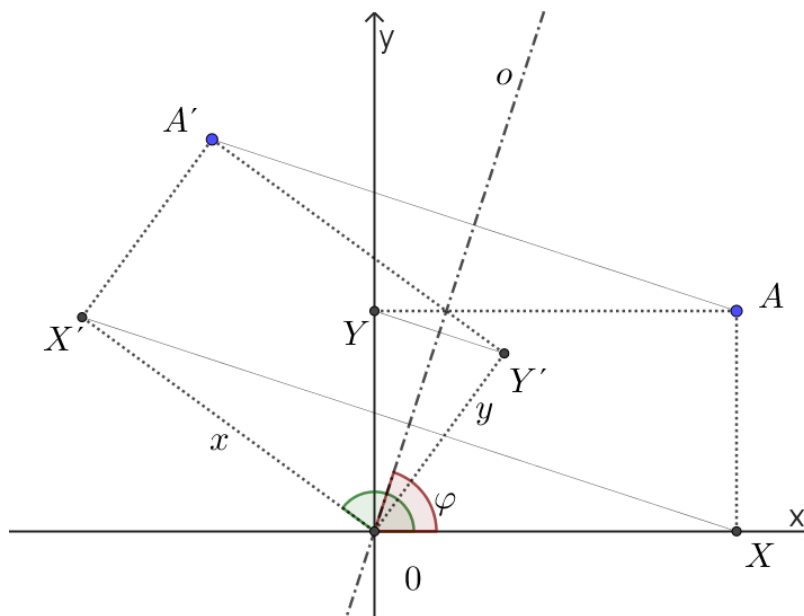
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$



Obrázek 2.19: Osová souměrnost s osou procházející počátkem v polárních souřadnicích

Odvození matice zrcadlení rozkladem do báze

Další možností, jak získat analytickou reprezentaci osové souměrnosti je pomocí vektorů báze. Jak vidíme na Obrázek 2.20, postupovali jsme stejně jako u otočení okolo počátku. Nyní si body zapíšeme v polárních souřadnicích a upravíme pomocí vzorců.



Obrázek 2.20: Osová souměrnost s osou procházející počátkem rozkladem do báze

$$X' = [x \cdot \cos(2\varphi), x \cdot \sin(2\varphi)]$$

$$\begin{aligned} Y' &= [y \cdot \cos(-2 \cdot (90^\circ - \varphi)), y \cdot \sin(-2 \cdot (90^\circ - \varphi))] = \\ &= [y \cos(2\varphi - 180^\circ), y \sin(2\varphi - 180^\circ)] = \\ &= [y(\cos 2\varphi \cos 180^\circ + \sin 2\varphi \sin 180^\circ), y(\sin 2\varphi \cos 180^\circ \\ &\quad - \sin 180^\circ \cos 2\varphi)] = [y \cdot \sin 2\varphi, -y \cdot \cos 2\varphi] \end{aligned}$$

Obraz bodu A se tedy podle Obrázek 2.20 musí rovnat součtu souřadnic bodů X' a Y'

$$A' = [x \cdot \cos 2\varphi + y \cdot \sin 2\varphi, x \cdot \sin 2\varphi - y \cdot \cos 2\varphi],$$

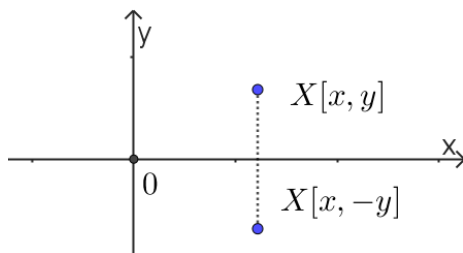
což můžeme pomocí matice zapsat jako

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Poznámka: Stejně jako u otočení okolo počátku je uveden postup pro ostrý úhel (osa zrcadlení svírá s osou x ostrý úhel), analogicky by se postupovalo u úhlů neostrých.

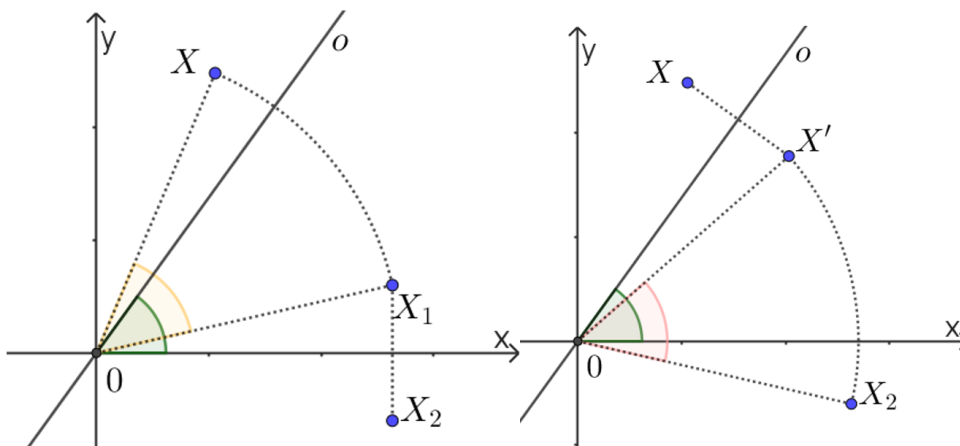
Odvození matice zrcadlení skládáním zobrazení

V tomto odvození vycházíme z toho, že zrcadlení pomocí osy souřadnic x (symbolicky: s_x) nalezneme velice snadno. Mějme bod $X[x, y]$, pokud tento bod odzrcadlíme pomocí osy x , jeho souřadnice budou vypadat následovně $X'[x, -y]$. Po krátkém pozorování odhalíme matice tohoto zobrazení v podobě $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$.



Obrázek 2.21: Zrcadlení s osou x

Nyní přichází část, kdy se potřebujeme dostat do pozice, abychom toto zjednodušené zrcadlení mohli využít. Jediný nástroj, který jsem zatím v této práci objevili, je otočení okolo počátku. Jak vidíme na Obrázek 2.22 právě otočení se nám náramně hodí. Budeme postupovat jako na Obrázek 2.22 a pomocí několika zobrazení se dostaneme z bodu X přes body X_1, X_2 až k bodu X' .



Obrázek 2.22: Odvození matice zrcadlení pomocí skládání

Mějme zrcadlení s osou procházející počátkem, které svírá s osou x úhel φ . Abychom dostali zobrazovaný bod X do polohy X_1 provedeme otočení okolo počátku.

$$r_{-\varphi}: \begin{pmatrix} \cos -\varphi & -\sin -\varphi \\ \sin -\varphi & \cos -\varphi \end{pmatrix} \cdot X = X_1$$

Zrcadlení bude vypadat následovně:

$$s_x: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X_1 = X_2.$$

A konečně, abychom se podle Obrázek 2.22 dostali do polohy X' , musíme provést konečné otočení:

$$r_\varphi: \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot X_2 = X'.$$

Naším cílem ovšem není provádět zrcadlení bodu pomocí tří samostatných zobrazení, ale pomocí jednoho. Nebudeme čtenáře napínat a prozradíme mu, že stejně jako otočení okolo počátku, je i zrcadlení s osou procházející počátkem lineárním zobrazěním – nyní tedy můžeme skládání zobrazení reprezentovat jako násobení příslušných matic. Toto zjištění nám tedy práci značně usnadní. Matice po vynásobení a užití goniometrických vzorců vypadá následovně:

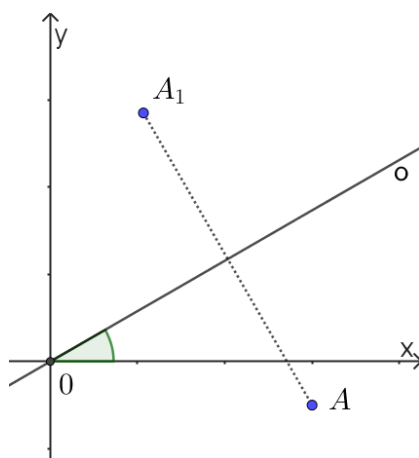
$$r_\varphi \circ s_x \circ r_{-\varphi} = s_\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos -\varphi & -\sin -\varphi \\ \sin -\varphi & \cos -\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.7

Je dána přímka $o: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Nalezněte pomocí matice analytickou reprezentaci zrcadlení podle osy o a následně zobrazte bod $A[3, -0,5]$.

Řešení:



Obrázek 2.23: Osová souměrnost s osou o

Z Obrázek 2.23 vidíme, že zadána osa prochází počátkem. Najít analytickou reprezentaci v podobě matice bude tedy snadné. Stačí dosadit úhel, který svírá přímka o a osa souřadnic x do zápisu (2.5), který jsme si odvodili.

K zjištění úhlu mezi osou o a osou souřadnic x nám stačí směrnicový tvar přímky, kde koeficient u x odpovídá $\tan \varphi$, kde φ je hledaný úhel.

$$\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

$$S_o = \begin{pmatrix} \cos 2 \cdot 30^\circ & \sin 2 \cdot 30^\circ \\ \sin 2 \cdot 30^\circ & -\cos 2 \cdot 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nyní zobrazíme zadaný bod

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6 - \sqrt{3}}{4} \\ \frac{1 + 6\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1 \\ 2,8 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2.8

Osová souměrnost s osou procházející počátkem je zadána maticí B . Zjistěte náležitosti tohoto geometrického zobrazení.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & -\cos 270^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2 \cdot 135^\circ & \sin 2 \cdot 135^\circ \\ \sin 2 \cdot 135^\circ & -\cos 2 \cdot 135^\circ \end{pmatrix}$$

Po úpravě zadané matice jsme zjistili, že osa tohoto zobrazení bude svírat úhel 135° s osou x . Její předpis tedy bude vypadat takto:

$$y = (\tan 135^\circ) \cdot x,$$

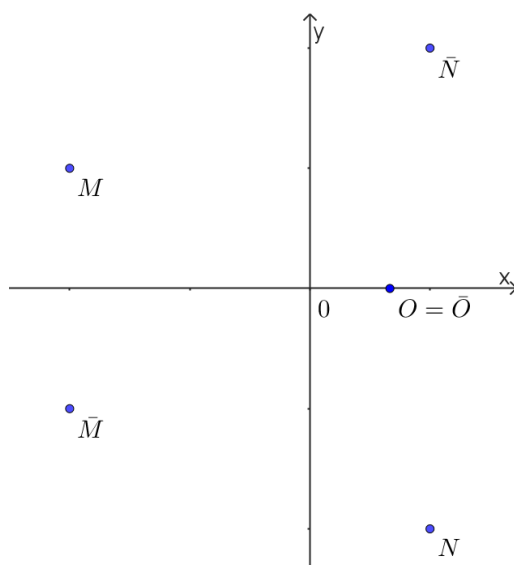
$$y = -x.$$

Komplexní reprezentace zrcadlení

Již víme, že násobením se komplexní čísla otáčí. Nyní se pomocí komplexních čísel pokusíme bod ozrcadlit. Ke komplexním číslům se vztahuje pojem komplexně sdružené číslo. Na Obrázek 2.24 můžeme vidět, co se s komplexními čísly děje, pokud je komplexně sdružíme. Komplexní čísla, která mají pouze reálnou část, zůstávají na ose ($o = \bar{o}$).

$$m = -2 + 1i, \bar{m} = -2 - 1i$$

$$n = 1 - 2i, \bar{n} = 1 + 2i$$



Obrázek 2.24: Komplexní sdružené body

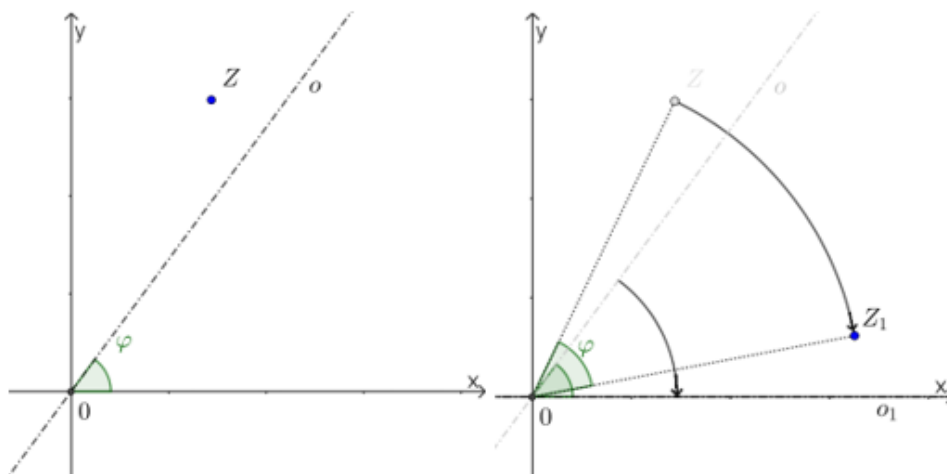
Jak můžeme vidět, když číslo komplexně sdružíme, osa x se chová jako osa zrcadlení. My bychom však rádi pomocí komplexních čísel zobrazovali body podle libovolné osy procházející počátkem. Abychom takto mohli body zobrazovat, budeme si muset práci rozdělit do několika kroků. I v tomto obecnějším případě budeme používat komplexně sdružená čísla. Abychom je mohli používat, musíme se dostat do pozice, kdy osa souměrnosti bude splývat se souřadnicovou osou x . Toho docílíme tím, že zobrazované body (vlastně i osu souměrnosti samotnou) otočíme do polohy, abychom je mohli komplexně sdružit. Tím se body ozrcadlí. Posledním krokem je vrátit bod zpět pomocí otočení.

Jak vidíme na Obrázek 2.25, budeme otáčet okolo počátku, a to o úhel $-\varphi$, kde φ je úhel, který svírá osa x s osou souměrnosti. Početně to vyjádříme pomocí rovnice

$$z_1 = \bar{a} \cdot z,$$

kde číslo \bar{a} reprezentuje otočení okolo počátku o úhel $-\varphi$, jelikož

$$\bar{a} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi = \overline{\cos \varphi + i \sin \varphi}.$$

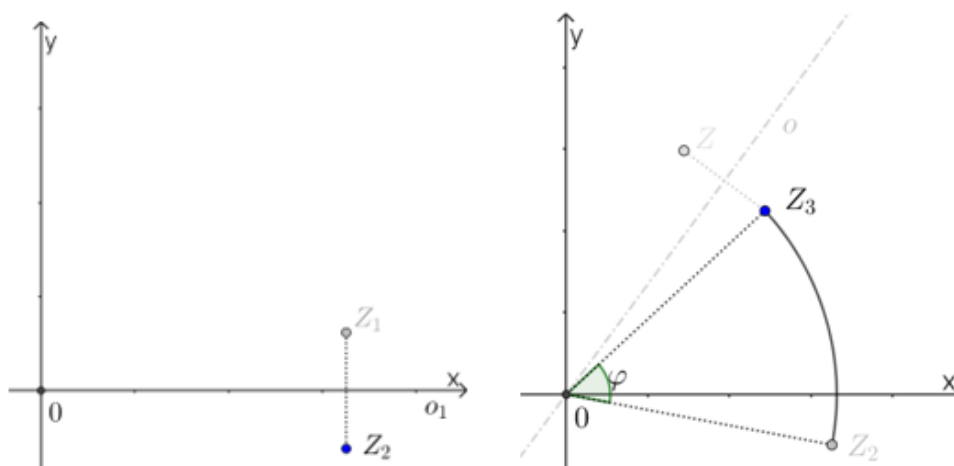


Obrázek 2.25: Komplexní reprezentace osové souměrnosti s osou procházející počátkem I

Další kroky jsou znázorněny na Obrázek 2.26, kde v konečném důsledku vidíme, že se počáteční bod Z dostal do polohy bodu Z_3 , který je osově souměrný s bodem Z podle osy o . Rovnicemi tuto skutečnost vyjádříme takto:

$$z_2 = \bar{z}_1 = \overline{a \cdot z} = a \cdot \bar{z},$$

$$z_3 = a \cdot a \cdot \bar{z} = a^2 \cdot \bar{z}.$$



Obrázek 2.26: Komplexní reprezentace osové souměrnosti s osou procházející počátkem II

Osová souměrnost s osou procházející počátkem má komplexní předpis:

$$z' = a^2 \cdot \bar{z}, \quad (2.6)$$

kde $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$, úhel φ je úhel, který svírá osa zrcadlení o s osou souřadnic x .

Příklad 2.9

Je dána osová souměrnost s osou $o: y = -x$. Najděte komplexní reprezentaci tohoto zobrazení a následně otočte bod $B [1,4]$ a zjistěte jeho souřadnice.

Řešení:

Zjistíme, jaký úhel svírá přímka o osou x .

$$y = -x$$

$$y = \tan 45^\circ \cdot x$$

Nyní podle odvození výše nalezneme komplexní reprezentaci.

$$b' = (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^2 \cdot \bar{b}$$

$$b' = i \cdot \bar{b}$$

Dále podle nalezené rovnice zobrazíme bod B :

$$b' = i \cdot \overline{(1 + 4i)},$$

$$b' = 4 + i.$$

Zobrazený bod B má podle jednoduchého výpočtu souřadnice $[4,1]$.

Příklad 2.10

Maticově i komplexně odvoďte co je výsledkem $s_\beta \circ s_\alpha$ a $s_\alpha \circ s_\beta$.

Řešení:

$$s_\beta \circ s_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\beta \cdot \sin 2\alpha & \cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha - \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha \\ \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha - \cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha & \sin 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\beta - 2\alpha) & \sin(2\alpha - 2\beta) \\ \sin(2\beta - 2\alpha) & \cos(2\beta - 2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\beta - 2\alpha) & -\sin(2\beta - 2\alpha) \\ \sin(2\beta - 2\alpha) & \cos(2\beta - 2\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
s_\alpha \circ s_\beta &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta & \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta & \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - 2\beta) & \sin(2\beta - 2\alpha) \\ \sin(2\alpha - 2\beta) & \cos(2\alpha - 2\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - 2\beta) & -\sin(2\alpha - 2\beta) \\ \sin(2\alpha - 2\beta) & \cos(2\alpha - 2\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pomocí součtových goniometrických vzorců jsme dospěli, k zajímavému zjištění. Složením dvou osových souměrností s osami procházejícími počátkem získáme otočení okolo počátku. To znamená, že množina všech osových souměrností s osou procházející počátkem není uzavřená s operací skládání. Docházíme k jednoduchému závěru – tato množina s operací skládání netvoří grupu.

2.1.3 Grupa shodných zobrazení zachovávajících počátek

Nyní se podíváme, jestli zobrazení zachovávající počátek (otočení okolo počátku, zrcadlení s osou procházející počátkem) a operace skládání tvoří grupu. Již jsme zjistili, že otočení okolo stejného bodu grupu tvoří. Naopak jsme již ověřili, že osová souměrnost grupu netvoří. Abychom ověřili, zda je nějaká množina s operací grupou, musíme ověřit čtyři vlastnosti (uzavřenost, asociativitu, neutrální prvek, inverzní prvek).

Již víme, že složením dvou otočení okolo počátku vznikne opět otočení okolo počátku. Skládáním dvou zrcadlení, získáme otočení okolo průsečíku os zrcadlení (v našem případě okolo počátku). Potřebujeme zjistit, jaké zobrazení nám vznikne, pokud složíme otočení a zrcadlení, které zachovávají počátek.

$$\begin{aligned}
r_\alpha \circ s_\beta &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos 2\beta - \sin \alpha \cdot \sin 2\beta & \cos \alpha \cdot \sin 2\beta + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta \\ \sin \alpha \cdot \cos 2\beta + \cos \alpha \cdot \sin 2\beta & \sin \alpha \cdot \sin 2\beta - \cos \alpha \cdot \cos 2\beta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 2\beta) & \sin(\alpha + 2\beta) \\ \sin(\alpha + 2\beta) & -\cos(\alpha + 2\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_\beta \circ r_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\beta \cdot \cos \alpha + \sin 2\beta \cdot \sin \alpha & -\cos 2\beta \cdot \sin \alpha + \sin 2\beta \cdot \cos \alpha \\ \sin 2\beta \cdot \cos \alpha - \cos 2\beta \cdot \sin \alpha & -\sin 2\beta \cdot \sin \alpha - \cos 2\beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\beta - \alpha) & \sin(2\beta - \alpha) \\ \sin(2\beta - \alpha) & -\cos(2\beta - \alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Operace skládání je asociativní, stejně tak, jako maticové násobení. Neutrálním prvkem bude identické zobrazení. Dále otočení má inverzní prvek – otočení o opačný úhel. Zrcadlení je zobrazení involutorní – je inverzní samo k sobě. Gruppu maticovým zápisem můžeme zapsat následovně:

$$G \left(\left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}, \circ, {}^{-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

2.2 Obecné shodnosti

Nyní se na shodnosti podíváme z obecnějšího hlediska. Budeme se zabývat shodnostmi, které počátek zachovávat nemusí (nicméně, některé stále mohou). Začneme posunutím, následně si popíšeme obecný případ rotace a osové souměrnosti, a nakonec se zaměříme na posunutou osovou souměrnost.

2.2.1 Posunutí

Definice (Posunutí)

Polohou orientované úsečky MM' je dán vektor \vec{u} . Zobrazení, které libovolnému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí $\overline{XX'} = \overline{MM'}$, se nazývá posunutí o vektor \vec{u} .

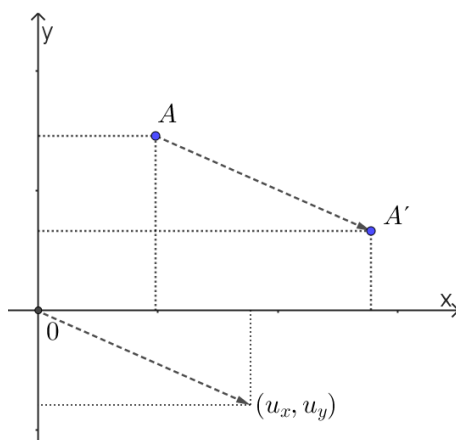
(Kuřina, 2002, s. 63)

Mimo to, že je posunutí samo shodností, budeme posunutí používat k dalším účelům. Zejména k tomu, abychom nemuseli být omezeni na vztažnou soustavu, kdy rotace i osa jsou ukotveny v počátku. Posunutí budeme značit písmenem $t_{\vec{u}}$ s dolním indexem \vec{u} , který vyjadřuje vektor, o který se budou zobrazované body posouvat.

Odvození matice posunutí

Najít souřadnice posunutého bodu o vektor $\vec{u} = (u_x, u_y)$ jistě nebude tak těžké. Z Obrázek 2.27 vidíme velice jasně, kam se bod $A[x, y]$ zobrazí. Souřadnice posunutého bodu budou tedy:

$$x' = x + u_x, \quad y' = y + u_y.$$



Obrázek 2.27: Posunutí

Stejně jako u shodností, které počátek zachovávají, bychom i u posunutí a dalších zobrazení rádi našli maticovou reprezentaci. V tomto případě to bohužel nebude tak přímočaré jako u minulých případů. Naším úkolem je přičtení konstanty k souřadnicím zobrazovaného bodu.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Pokud se podíváme na násobení v rovnici (2.7), ať se budeme snažit sebevíc, tak nedocílíme toho, abychom přičetli samostatnou konstantu. Nejblíže posunutí je matice identického zobrazení, která sice nepřičítá konstantu, ale alespoň nemění koeficient u souřadnic bodů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tímto bychom tuto část mohli uzavřít a skončit se skutečností, že pomocí matice nenalezneme analytickou reprezentaci posunutí. My však toto tvrzení upravíme a řekneme, že matice typu 2×2 nám nenabízí správné řešení pro posunutí. Šikovný náhled nám dá matice typu 3×3 , kde spodní řádek této matice bude uměle vytvořený s pevně danými čísly. Stejně tak všem bodům přidáme novou třetí souřadnici s číslem 1. Zkusme tedy najít zbývající koeficienty. Nápomocná nám bude matice identity, jelikož nechceme, aby se souřadnice bodu měnily násobením, ale pouhým přičtením konstanty.

$$A' = T \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} x + u_x \\ y + u_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po tomto triku lze matici posunutí lehce odhalit, bude vypadat takto:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Hejný et al., 1997, s. 21)

Komplexní reprezentace posunutí

V komplexních číslech bude posunutí velice jednoduché – k danému komplexnímu číslu stačí přičíst jiné komplexní číslo.

$$z' = z + a \quad a \in \mathbb{C}$$

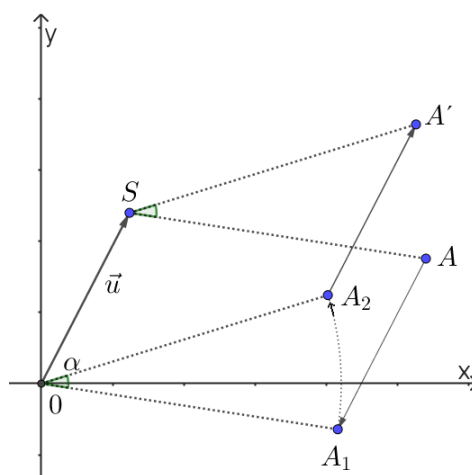
Posunutí a lineární zobrazení

Na první pohled je zřejmé, že posunutí není lineárním zobrazením, jelikož nezachovává počátek. Tímto zjištěním však ztrácíme pro nás zajímavé vlastnosti, které nám dovolují skládat zobrazení reprezentovat jako násobení příslušných matic. Tuto nepříjemnost si objasníme hned v další kapitole.

2.2.2 Otočení

Zatím jsme probrali pouze analytickou reprezentaci otočení okolo počátku. Nyní se zaměříme na obecné otočení, tedy otočení okolo libovolného bodu. Již známe analytickou reprezentaci otočení okolo počátku, zkusme tedy této znalosti využít a nalézt analytickou reprezentaci pro otočení okolo libovolného bodu. Stačí nám náš konkrétní případ (otočení okolo libovolného středu) do této polohy posunout, poté otočit okolo počátku, a následně posunout nazpět, jak ukazuje Obrázek 2.28.

$$r_{S,\alpha} = t_{\vec{u}} \circ r_{0,\alpha} \circ t_{-\vec{u}}$$



Obrázek 2.28: Otočení okolo libovolného bodu

Nyní se musíme vypořádat s dalším problémem, a to je násobení matic, jelikož bychom chtěli dostat pouze jednu matici a celé zobrazení provést najednou, nikoliv provádět samostatně tři zobrazení. Matice posunutí je typu 3×3 , zatímco rotace 2×2 , a tyto matice

spolu nemůžeme násobit. Pokusme se matici rotace doplnit také na matici typu 3×3 . Pokud budeme pracovat s maticí 3×3 , tak potřebujeme, aby i body byli třísloužkové. To však není žádný problém, jelikož jsme si v minulé kapitole řekli, že třetí souřadnice u bodů je číslo jedna.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & e \\ \sin \alpha & \cos \alpha & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nyní můžeme snadno určit neznámé v matici, tak aby poslední souřadnice ve výsledku bylo číslo jedna, a zároveň aby se jednalo pouze o otočení okolo počátku.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

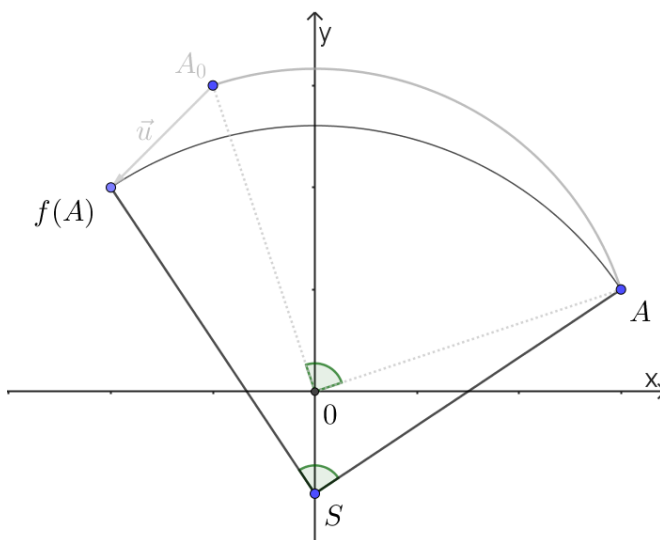
Následně spolu matice vynásobíme (dávejme si pozor na pořadí matic, vůči pořadí skládání zobrazení) neboť tato operace je ekvivalentem pro skládání zobrazení. Matice otočení s libovolným středem $S[m, n]$ a úhlem otočení α , kde vektor \overrightarrow{OS} označíme jako $\vec{u} = (m, n)$, by vypadala následovně:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & m \\ \sin \alpha & \cos \alpha & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -\cos \alpha \cdot m + \sin \alpha \cdot n + m \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot m - \cos \alpha \cdot n + n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & m \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot n \\ \sin \alpha & \cos \alpha & n \cdot (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & u \\ \sin \alpha & \cos \alpha & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Hejný et al., 1997, s. 22)

Ze stejného důvodu jako posunutí ani otočení okolo libovolného bodu nebude lineárním zobrazením. Dobrou zprávou je, že lineární zobrazení není jediným zobrazením, které skládání reprezentuje jako násobení matic. Další takové zobrazení je zobrazení afinní. Afinní

zobrazení můžeme zjednodušeně popsat jako složení lineárního zobrazení a posunutí, což přesně odpovídá odvozenému otočení okolo libovolného středu. (Bican, 2009, s. 202)



Obrázek 2.29: Afinní zobrazení (otočení)

Podívejme se na Obrázek 2.29 reprezentující otočení okolo libovolného středu. Šedou barvou je naznačené rozložené afinní zobrazení, které se skládá z lineárního zobrazení (otočení okolo počátku) a následného posunutí.

Příklad 2.11

Nalezněte maticovou reprezentaci otočení o 90° se středem $S[2,3]$ a následně otočte bod $A[1,3]$.

Řešení:

Nyní máme dvě možnosti řešení. Můžeme se podívat na minulou stranu a dosadit neznáme do odvozeného tvaru matice nebo postupně matici odvodit. Pro názornost si matici posupně odvodíme.

$$R_{S,90^\circ} = T_{\overrightarrow{OS}} \circ R_{0,90^\circ} \circ T_{\overrightarrow{SO}}$$

$$\begin{aligned}
R_{S,90^\circ} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Po nalezení matice zobrazíme bod:

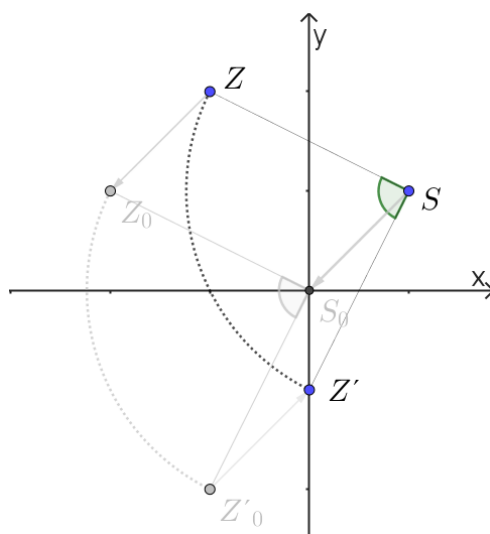
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A'[2,2].$$

Příklad 2.12

Komplexně otočte bod $Z[-1,2]$ kolem středu otočení $S[1,1]$ o úhel $\alpha = 90^\circ$.

Řešení:

Budeme postupovat jako v maticovém případě – nejprve si pomocí posunutí přesuneme všechny body tak, aby střed otočení byl shodný s počátkem soustavy souřadnic, následně otočíme kolem počátku (rovnice (2.4)), a nakonec posuneme zpět na původní umístění. Náš postup také popisuje Obrázek 2.30.



Obrázek 2.30: Komplexní reprezentace otočení

$$z' = (z - s) \cdot (a) + s$$

$$z' = (-1 + i - 1 - i)(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) + 1 + i$$

$$z' = -i$$

Výsledkem je tedy číslo $z' = -i$ nebo bod $Z[0, -1]$.

Dále se zaměříme na obecný tvar otočení v komplexní rovině. Otočení okolo počátku vypadá následovně:

$$z' = a \cdot z, \quad a \in \mathbb{R}, |a| = 1.$$

Otočení okolo obecného bodu vypadá po úpravě takto:

$$z' = (z - s) \cdot (a) + s = za - sa + s.$$

Pro zjednodušení nahradíme výraz $-sa+s$ komplexním číslem b .

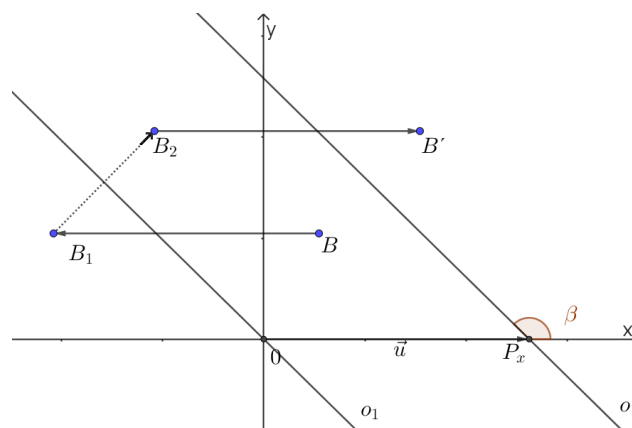
$$z' = a \cdot z + b, \quad a \in \mathbb{R}, |a| = 1, b \in \mathbb{C}$$

2.2.3 Osová souměrnost

Podobně jako u otočení budeme skládat matice posunutí a osově souměrnosti s osou procházející počátkem.

$$s_o = t_{\vec{u}} \circ s_{o_1} \circ t_{-\vec{u}}$$

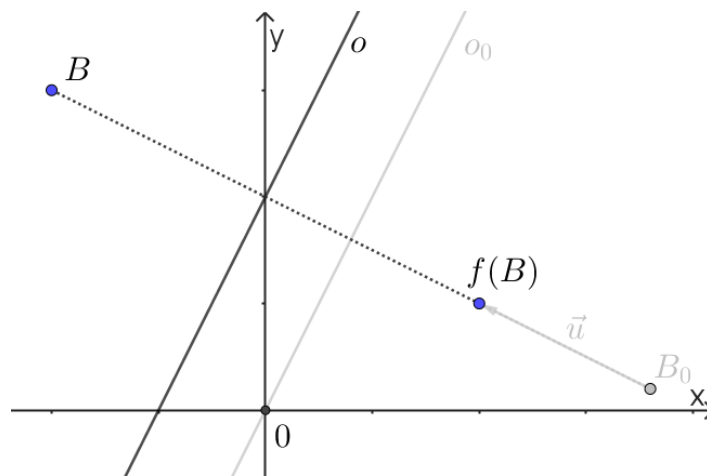
Jak můžeme vidět na Obrázek 2.31, budeme posouvat o vektor $\overrightarrow{OP_x}$, který si označíme jako $\vec{u} = (m, n)$.



Obrázek 2.31: Osová souměrnost

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & m \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & -\cos 2\beta \cdot m - \sin 2\beta \cdot n + m \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & -\sin 2\beta \cdot m + \cos 2\beta \cdot n + n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & m \cdot (1 - \cos 2\beta) - \sin 2\beta \cdot n \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & n \cdot (1 + \cos 2\beta) - \sin 2\beta \cdot m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & u \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Co se týče osové souměrnosti a lineárního zobrazení, jistě nebude překvapením, že stejně jako u otočení, se naše pozornost přesune k zobrazení afinnímu (Obrázek 2.32).



Obrázek 2.32: Afinní zobrazení (Osová souměrnost)

Příklad 2.13

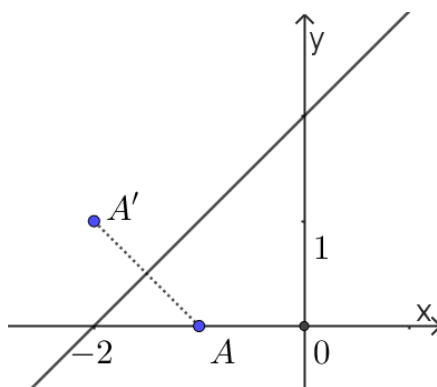
Nalezněte maticovou reprezentaci osové souměrnosti s osou $o: y = x + 2$, následně zobrazte bod $A[-1,0]$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
S_o &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) & -\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Po nalezení matice bod zobrazíme:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow A'[-2,1].$$



Obrázek 2.33: Zrcadlení bodu A

Příklad 2.14

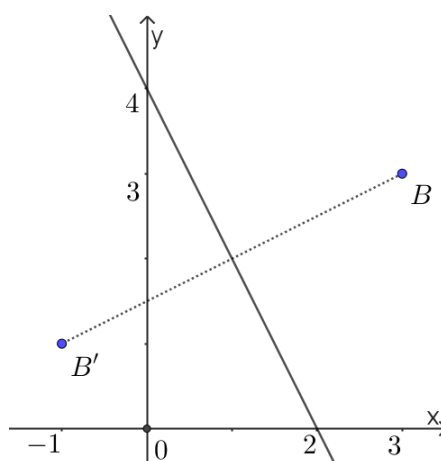
Nalezněte maticovou reprezentaci osové souměrnosti s osou $o: y = -2x + 4$, následně zobrazte bod $B[3,3]$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
S_o &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2 \cdot \text{tg}^{-1}(-2)) & \sin(2 \cdot \text{tg}^{-1}(-2)) & 0 \\ \sin(2 \cdot \text{tg}^{-1}(-2)) & -\cos(2 \cdot \text{tg}^{-1}(-2)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{16}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zobrazený bod bude vypadat následovně:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 16 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{16}{5} \\ 4 & 3 & 8 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 2.34: Zrcadlení bodu B

Příklad 2.15

Komplexně zrcadlete bod $Z[-3,3]$ pomocí osy $o: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

Řešení:

Nejprve si připomeňme, jak jsme postupovali v případě, kdy osa procházela počátkem soustavy souřadnic. Jelikož jsme používali sdružená komplexní čísla, museli jsme dostat osu do takové polohy, aby se překrývala se souřadnicovou osou x . Toho šlo snadno docílit otočením okolo počátku. V našem obecném případě tedy nejdříve posuneme osu tak, aby procházela počátkem soustavy souřadnic, následně otočíme, aby osa splývala s osou souřadnic x , komplexně sdružíme a postupně vrátíme do výchozí polohy. Celý proces opět nastiňuje Obrázek 2.35.

Průsečík přímky o a osy souřadnic x bude bod $S[-2\sqrt{3}, 0]$. Tento bod budeme odčítat od zobrazovaného čísla, abychom ho následně mohli ozrcadlit pomocí osy procházející počátkem, která svírá s osou x úhel $\alpha = 30^\circ$. Komplexní číslo o velikosti jedna, kterým

budeme násobit číslo z , abychom ho otočili, označíme písmenem a s dolním indexem plus pro kladný úhel α a minusem pro záporný úhel.

$$z_0 = (z - s) \cdot (a_-)$$

$$z_0 = (-3 + 3i + 2\sqrt{3}) \cdot (\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ))$$

$$z_0 = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i$$

Nyní číslo komplexně sdružíme a následně opět otočíme a posuneme.

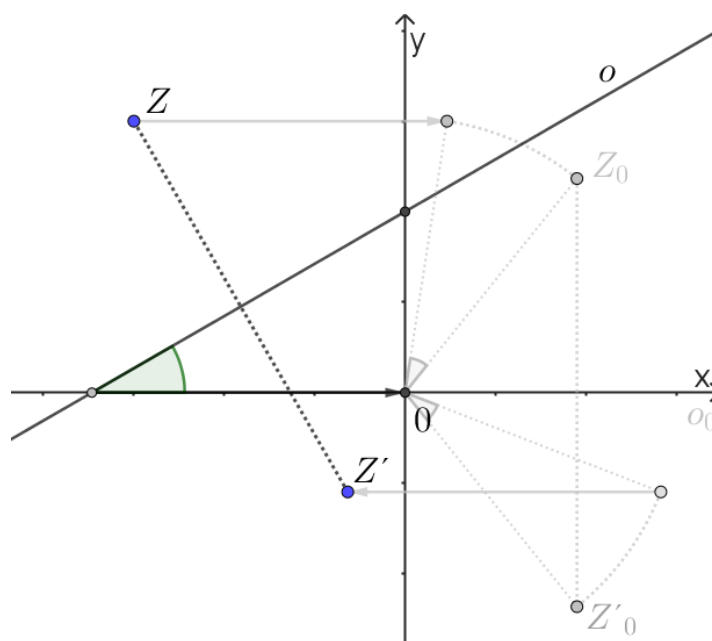
$$\bar{z}_0 = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i$$

$$z' = \bar{z}_0 \cdot a_+ + s$$

$$z' = \left(\frac{9 - 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) - 2\sqrt{3}$$

$$z' = \frac{-3 + 5\sqrt{3}}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}i - 2\sqrt{3}$$

$$z' = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}i \doteq -0,63 - 1,1i$$



Obrázek 2.35: Komplexní reprezentace osové souměrnosti

Tento postup byl v porovnání s přímou shodností (otočení okolo libovolného bodu a posunutí) poměrně složitější. I přesto se však podívejme, jak bychom toto zobrazení popsali pomocí komplexních čísel obecně.

$$z' = \overline{(z - s) \cdot (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))} \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) + s$$

$$z' = a^2 \cdot \bar{z} - \bar{s} \cdot a^2 + s$$

Výraz $-\bar{s} \cdot a^2 + s$ můžeme nahradit komplexním číslem b . Konečná rovnice zrcadlení tedy vypadá následovně:

$$z' = a^2 \cdot \bar{z} + b.$$

2.2.4 Posunuté zrcadlení

Tuto podkapitulu začneme motivačním příkladem.

Příklad 2.16

Je dáno geometrické shodné zobrazení, pomocí matice Q . Určete, o jaké shodné zobrazení se jedná, a zjistěte jeho náležitosti.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

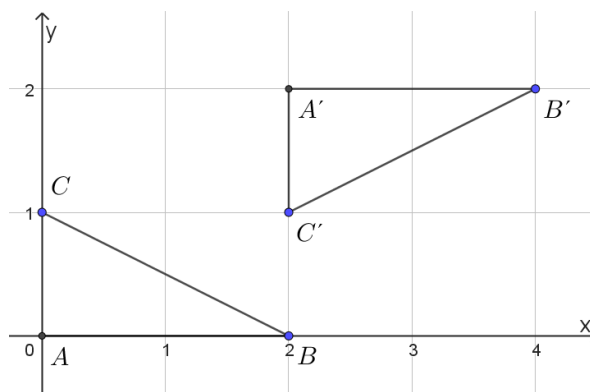
Po úpravě matice zjistíme, že by se mělo jednat o osovou souměrnost s osou rovnoběžnou s osou x .

$$Q = \begin{pmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ & 2 \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní se pokusíme nalézt samodružné body. Jelikož již víme, o jaké zobrazení se jedná, měla by nám vyjít přímka samodružných bodů, tedy osa zobrazení.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Po úpravě této soustavy rovnic zjistíme, že soustava nemá řešení, což znamená, že toto zobrazení nemá žádné samodružné body. Dostáváme se k závěru, že se nemůže jednat o osovou souměrnost.



Obrázek 2.36: Zobrazení reprezentované maticí Q

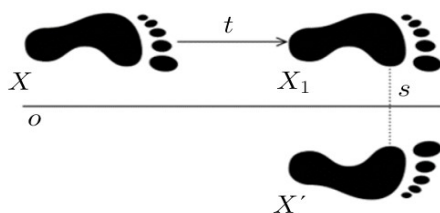
Po zobrazení několika bodů můžeme na Obrázek 2.36 pozorovat, že se jedná o nepřímou shodnost. Poslední shodnost, u které jsme ještě neodvodili analytický popis je posunutá osová souměrnost. Jedná se o shodnost, která kombinuje osovou souměrnost podle osy o a posunutí ve směru osy.

Definice (Posunuté zrcadlení)

Je dána přímka m . Zobrazení složené z posunutí t ve směru přímky m a zrcadlení podle osy m v jakémkoliv pořadí se nazývá posunuté zrcadlení.

(Kuřina, 2002, s. 98)

Posunutou osovou souměrnost budeme značit písmenem $v_{o,\vec{u}}$ s dolními koeficienty označujícími osu souměrnosti a vektor posunutí. Toto zobrazení si můžeme snadno interpretovat na stopách ve sněhu. Jak vidíme na Obrázek 2.37, stopy jsou posunuté o vektor \vec{v} a k tomu jsou převrácené pomocí osy o .



Obrázek 2.37: Stopy

Odvození matice posunuté souměrnosti

Budeme postupovat podle definice, tím pádem budeme skládat osovou souměrnost s_o s posunutím $t_{\vec{v}}$, kde vektor posunutí $\vec{t} = (q, r)$ je rovnoběžný s osou osové souměrnosti o .

$$v_{o,\vec{t}} = s_o \circ t_{\vec{t}}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & u \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & u + q \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & v + r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & k \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Stehlíková et al., 2008, s. 18)

Jak můžeme pozorovat, matice osové souměrnosti a posunuté osové souměrnosti jsou víceméně totožné, my bychom však rádi tyto matice rozeznávali. Jednoduché řešení poskytují samodružné body. Jak ukázal motivační Příklad 2.16, tato zobrazení se liší v počtu samodružných bodů.

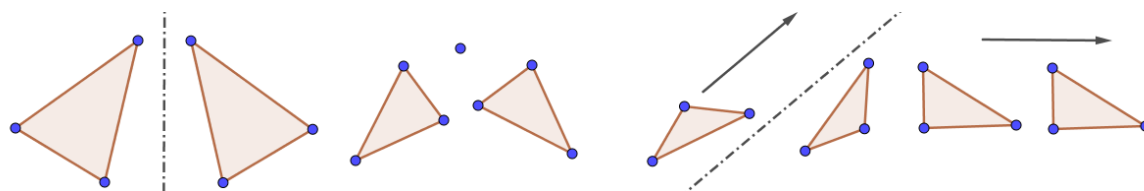
2.2.5 Obecné matice shodného zobrazení

Máme odvozená následující zobrazení: zrcadlení, otočení, posunuté zrcadlení a posunutí (Obrázek 2.38). Jsou toto všechny existující shodnosti, nebo jich je více? Podíváme se na definici shodnosti a pokusíme se ověřit, že jsme našli všechna zobrazení a jejich analytická vyjádření.

Definice (Shodné zobrazení)

Zobrazení roviny na rovinu se nazývá shodné zobrazení neboli shodností roviny, právě když pro každé dva body roviny X, Y a jejich obrazy X', Y' platí

$$|XY| = |X'Y'|.$$



Obrázek 2.38: Zrcadlení, otočení, posunuté zrcadlení, posunutí

Odvození obecné matice shodnosti

Najděte všechny shodnosti

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X[x, y, 1] \rightarrow X'[x', y', 1],$$

kteřé lze v maticovém tvaru zapsat předpisem

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Vezměme si obecnou matici zobrazení F , tu můžeme rozložit na dvě matice zobrazení, ze kterých jedna nám bude geometrické útvary posouvat (matice posunutí T) a druhá nám bude geometrické útvary otáčet či zrcadlit (matice shodnosti I).

$$F = T \cdot I$$

$$F = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naše zkoumání tedy zaměříme na matici I , kterou posléze můžeme zmenšit na matici 2×2 . Definice shodného zobrazení nám dává podmínky pro vzdálenost dvou bodů. My si tuto definici upravíme a nahradíme vzdálenost bodu vzdáleností vektorů.

$$|XY| = |Y - X| = |\vec{v}| = |(x, y)|, \quad \forall \vec{v}: |f(\vec{v})| = |\vec{v}|$$

Ze světa bodů jsme se dostali k vektorům. Zobrazený vektor $f(\vec{v})$ můžeme vyjádřit pomocí matice I . Dostaneme se k rovnici, kterou upravujeme maticovým násobením, následně použijeme vzorec pro velikost vektoru.

Nyní z definice shodnosti:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|, \\ |(ax + cy, bx + dy)| &= |(x, y)|, \\ \sqrt{((ax + cy)^2 + (bx + dy)^2)} &= \sqrt{(x^2 + y^2)}, \\ a^2x^2 + 2acxy + c^2y^2 + b^2x^2 + 2bdxy + d^2y^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Chceme, aby tato rovnost platila pro všechny body, tím pádem pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Z toho důvodu porovnáme následující koeficienty:

$$\begin{aligned}x^2: & \quad a^2 + b^2 = 1, \\y^2: & \quad c^2 + d^2 = 1, \\xy: & \quad 2ac + 2bd = 0.\end{aligned}$$

Po zkoušce výsledků a vhodným parametrizováním dospějeme ke dvěma řešením:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

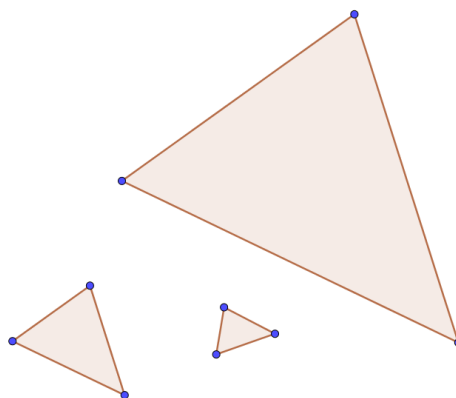
Následně opět složíme s maticemi posunutí a dostáváme úplná řešení:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & e \\ \sin \varphi & \cos \varphi & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & e \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autoři Hejný et al. (1997, s. 23) uvádějí postup obdobný, který vede k naprosto totožným výsledkům. Pro ucelenost doporučujeme k nahlédnutí.

3 Podobná zobrazení

Podobnost můžeme jednoduše chápat jako zobrazení, které zachovává tvar a mění velikost.



Obrázek 3.1: Podobné trojúhelníky

První myšlenky žáků a studentů mohou často vést k podobným trojúhelníkům a větám o nich (SUS, SSU, UU). Pomocí podobnosti lze v geometrii dokázat spoustu matematických vět (Eukleidovy věty, Pythagorova věta). My se však na podobnost podíváme z analytického pohledu, stejně jako na shodnost, a budeme se snažit nalézt její předpis a geometrické náležitosti.

Definice (Podobné zobrazení)

Zobrazení roviny na rovinu se nazývá podobným zobrazením roviny neboli podobností roviny, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro každé dva body roviny X, Y a jejich obrazy X', Y' platí:

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|, \quad (3.1)$$

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti.

Pokud je koeficient podobnosti k roven jedné, zobrazení je shodností a hovoříme o nevlastní podobnosti. Je-li koeficient podobnosti k různý od jedné, podobnost se nazývá vlastní.

3.1 Odvození analytické reprezentace podobných zobrazení

V minulé kapitole jsme pro shodnost našli šikovní vyjádření pomocí matice, zkusme tedy to samé udělat i pro podobnosti. Odvození je obdobné jako v závěru kapitoly o shodnostech – vyjdeme z obecné definice a odvodíme souhrnný předpis.

Najděme všechny podobnosti

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad X[x, y] \rightarrow X'[x', y'],$$

které lze v maticovém tvaru zapsat předpisem

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vezměme si obecnou matici zobrazení F – tu můžeme rozložit na dvě matice zobrazení, ze kterých jedna nám bude geometrické útvary posouvat (matice posunutí T) a druhá nám bude geometrické útvary otáčet či zrcadlit a dále zmenšovat nebo zvětšovat (matice podobnosti P).

$$F = T \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naše zkoumání tedy zaměříme na matici P , kterou posléze můžeme zmenšit na matici typu 2×2 . Definice podobného zobrazení nám dává podmínky pro vzdálenost dvou bodů. My si tuto definici upravíme a nahradíme vzdálenost bodu vzdáleností vektorů.

$$|XY| = |Y - X| = |\vec{v}| = |(x, y)|, \exists k > 0, \forall \vec{v}: |f(\vec{v})| = k \cdot |\vec{v}|$$

Ze světa bodů jsme se dostali k vektorům. Zobrazený vektor $f(\vec{v})$ můžeme vyjádřit pomocí matice P . Dostaneme se k rovnici, kterou upravujeme maticovým násobením, následně použijeme vzorec pro velikost vektoru.

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| &= k \cdot \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \\ |(ax + cy, bx + dy)| &= k \cdot |(x, y)| \\ \sqrt{((ax + cy)^2 + (bx + dy)^2)} &= k \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

$$a^2x^2 + 2acxy + c^2y^2 + b^2x^2 + 2bdxy + d^2y^2 = k^2x^2 + k^2y^2$$

Nyní porovnáme jednotlivé koeficienty u neznámých x^2, y^2 , a xy , jelikož, stejně jako u shodných zobrazení, chceme, aby rovnice platila pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$a^2 + b^2 = k^2 \tag{3.2}$$

$$c^2 + d^2 = k^2 \tag{3.3}$$

$$2ac + 2bd = 0 \tag{3.4}$$

Nyní do umocněné rovnice (3.4) dosadíme upravené rovnice (3.2) a (3.3).

$$ac = -bd$$

$$a^2c^2 = b^2d^2$$

$$a^2(k^2 - d^2) = (k^2 - a^2)d^2$$

$$a^2k^2 - a^2d^2 = k^2d^2 - a^2d^2$$

$$d^2 = a^2$$

$$d = \pm a$$

Obdobným postupem získáme další rovnost:

$$c = \pm b.$$

Po provedení zkoušky získáváme dvě možné kombinace, jak může vypadat matice podobnosti P :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \text{ kde } (a, b) \neq (0, 0).$$

Po složení s maticí posunutí T získáváme konečný tvar matice podobnosti F , která může mít dva tvary: matice F^+ reprezentující přímou podobnost a matici F^- reprezentující nepřímou podobnost.

$$F^+ = \begin{pmatrix} a & -b & e \\ b & a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad F^- = \begin{pmatrix} a & b & e \\ b & -a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

Další možnost nalezení matice podobného zobrazení nalezneme ve Stehlíkové (2008, s. 27–28).

3.1.1 Podobnost a determinant

Nejprve si vezměme obecný tvar matice podobnosti, který jsme již odvodili.

$$P = \begin{pmatrix} a & \mp b & e \\ b & \pm a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Máme před sebou matici typu 3×3 , její determinant lze snadno zjistit pomocí Sarrusova pravidla. Díky poslednímu řádku matice podobnosti lze dokonce matici zmenšit na matici typu 2×2 a třetí sloupec zanedbat. Nyní se podíváme na výpočet determinantu u tohoto zjednodušeného obecného tvaru a pokusíme se nalézt spojitost s koeficientem podobnosti.

$$\det P^+ = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & +a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$
$$\det P^- = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2)$$

Jelikož jsme zachovali značení jako při prvotním odvození matice podobnosti, můžeme podle rovnice (3.2) vztah přepsat na rovnici ve tvaru:

$$\det P^+ = +k^2$$
$$\det P^- = -k^2$$
$$k = \sqrt{|\det P|}.$$

Determinant je tedy poměrně silný nástroj, který nám odhalí jak orientaci podobnosti, tak její koeficient. Stejnou analogii lze použít pro shodnosti a jejich matice s determinanty. Shodnosti neboli nevlastní podobnosti mají tedy determinant roven ± 1 .

3.1.2 Stejnolehlost

Stejnolehlost je speciálním případem podobnosti.

Definice (Stejnolehlost)

Je dáno reálné číslo l různé od 0 a 1 a bod S . Zobrazení, které libovolnému bodu X roviny přiřazuje bod X' tak, že platí

$$|SX'| = l \cdot |SX|,$$

se nazývá stejnolehlost $h(S, l)$.

(Kuřina, 2009, s. 129)

Každá stejnolehlost je podobností s poměrem podobnosti $k = |l|$. Stejnolehlost s koeficientem -1 je středová souměrnost.

Analytická reprezentace stejnolehlosti

Nechť máme stejnolehlost s koeficientem l a se středem v počátku O . Z definice snadno odvodíme matici stejnolehlosti ve tvaru:

$$H_{O,l} = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud bychom hledali matici stejnolehlosti s libovolným středem, využijeme stejný postup jako u hledání obecných případů shodností. Nechť máme stejnolehlost s koeficientem l a se středem $S[m, n]$. Matici stejnolehlosti získáme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} H_{S,l} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l & 0 & m - lm \\ 0 & l & n - ln \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & 0 & (1-l) \cdot m \\ 0 & l & (1-l) \cdot n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

(Stehlíková et al., 2008, s. 27)

Příklad 3.1

U zadaných matic A, B, C, D , které reprezentují podobná zobrazení zjistěte, zda se jedná o přímou nebo nepřímou podobnost a nalezněte koeficient podobnosti. Spočítejte determinant jednotlivých matic a nalezněte samodružné body těchto podobností.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 4 & -9 & 21 \\ 9 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Řešení:

Pouze z tvaru matic můžeme pozorovat, že matice C reprezentuje stejnoolehlost se středem v počátku, ostatní matice nelze dále identifikovat. Zkusme tedy najít zadané prvky a následně je společně porovnat. Nejprve budeme pracovat se zadanou maticí A . Zjištění, zda se jedná o podobnost přímou či nepřímou nám poví tvar již zadané matice, který porovnáme se základním tvarem podle rovnice (3.5). Matice A tedy reprezentuje nepřímou podobnost.

Dále se pokusíme zjistit koeficient podobnosti, který můžeme podle definice podobnosti (3.1) spočítat takto:

$$k = \frac{|X'Y'|}{|XY|}.$$

Zobrazíme tedy libovolnou přímku a zjistíme koeficient podobnosti.

$$X[0,0] \rightarrow f_A(X)[3,4], Y[1,0] \rightarrow f_A(Y)[4,6]$$

$$k = \frac{\sqrt{(4-3)^2 + (6-4)^2}}{\sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2}} = \sqrt{5}$$

Poznámka: Již jsme si ukázali, že koeficient podobnosti se dá zjistit pomocí determinantu. Nyní počítáme koeficient podobnosti pomocí definice, abychom ho následně mohli porovnat s determinantem a informace si ověřit a upevnit.

Dále nalezneme samodružný bod neboli bod, který se při zobrazení zobrazí sám na sebe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y + 3 = x$$

$$2x - y + 4 = y$$

Soustava rovnic nám sdělí jedno řešení a to bod $S_A \left[-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right]$.

Determinant matice vypočítáme například pomocí Sarrusova pravidla, které můžeme vidět v následující rovnici.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 + 0 - 0 + 0 - 4 = -5$$

Stejným způsobem budeme postupovat u zbylých matic. Pro přehlednost jsme výsledné prvky zapsali do Tabulka 3.1, znaménkem plus budeme značit podobnost přímou, naopak znaménkem mínus podobnost nepřímou.

Tabulka 3.1: Charakteristické prvky podobnosti

Matice	Druh podobnosti	k	Determinant	Samodružný bod
<i>A</i>	–	$\sqrt{5}$	–5	$\left[-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right]$
<i>B</i>	+	3	9	$\left[\frac{1}{10}, \frac{21}{30}\right]$
<i>C</i>	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	[0,0]
<i>D</i>	+	$\sqrt{97}$	97	[–1,2]

Jak si můžeme z tabulky všimnout, druh podobnosti se v našem případě přenáší do determinantu v podobě znaménka. Koeficient podobnosti je pak odmocninou absolutní hodnoty determinantu, jak jsme očekávali.

3.2 Komplexní reprezentace podobných zobrazení

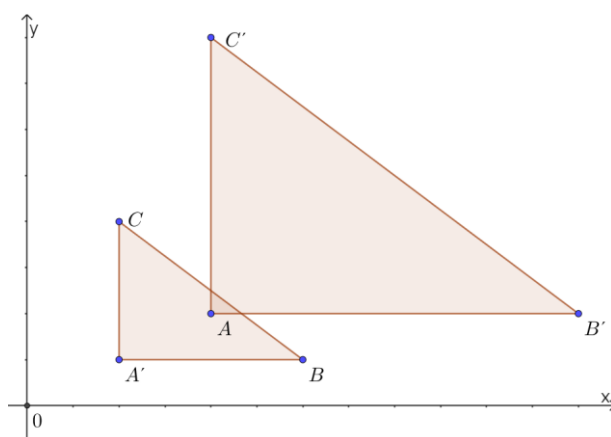
V této kapitole jsme se zatím velice podrobně věnovali maticím. Již u shodností jsme si však ukázali, že matice nejsou jediná cesta, co se týče analytické reprezentace zobrazení. Další možností je reprezentace pomocí komplexní roviny. V Příklad 2.12 a Příklad 2.5 jsme našli způsob, jak vyjádřit otočení okolo libovolného bodu a osovou souměrnost s libovolnou osou komplexně. Pro naše další účely se nyní podíváme na vyjádření přímé podobnosti pomocí komplexních čísel. Nepřímou podobnost přenecháme pouze maticím, jelikož, jak jsme viděli již u nepřímé shodnosti, zápis začíná být značně složitý a neefektivní. Odvození začneme konkrétním příkladem, ze kterého se pokusíme odvodit obecnou reprezentaci.

Příklad 3.2

Trojúhelník ABC se zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$. Zjistěte, o jaké zobrazení se jedná a nalezněte jeho analytickou reprezentaci pomocí matic. Následně se pokuste odvodit komplexní reprezentaci.

$$\begin{aligned} A[2,1] &\rightarrow A'[4,2] \\ B[6,1] &\rightarrow B'[12,2] \\ C[2,4] &\rightarrow C'[4,8] \end{aligned}$$

Řešení:



Obrázek 3.2: Podobné trojúhelníky – komplexní reprezentace

U každého příkladu je vhodné si načrtnout obrázek. Z našeho Obrázek 3.2 vidíme, že zobrazení bude přímá podobnost, jelikož se zachovávají úhly (podobné zobrazení) i pořadí bodů (přímé zobrazení). Z rovnice (3.5) známe podobu matice přímé podobnosti, nyní tedy pomocí soustavy lineárních rovnic tuto matici nalezneme. V následujícím zápise se postupně zobrazují tři body. Na tomto místě uveďme poznámku ke značení – pro kompaktnost a úsporu místa není každému bodu věnována samostatná rovnice, ale jsou odděleny svislou čarou.

$$\begin{aligned} f(X) &= X' \\ \begin{pmatrix} a & -b & e \\ b & a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c|c} 4 & 12 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ 2a - b + e &= 4 \\ 6a - b + e &= 12 \\ 2a - 4b + e &= 4 \end{aligned}$$

$$2b + a + f = 2$$

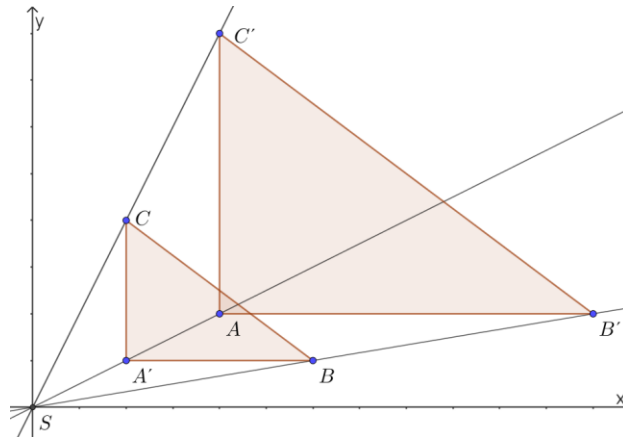
$$6b + a + f = 2$$

$$2b + 4a + f = 8$$

Nyní soustavu rovnic vyřešíme pomocí Gaussovy eliminační metody v matici.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 3.3: Stejnolehlost

Nalezli jsme matici podobnosti F a podle tvaru zjišťujeme, že se jedná o stejnolehlost se středem v počátku s koeficientem 2 (Obrázek 3.3).

Nyní se přesuneme do komplexní roviny a podíváme se, jak se komplexní čísla mění.

$$\begin{array}{lcl} z & \rightarrow & z' \\ 2 + i & \rightarrow & 4 + 2i \\ 6 + i & \rightarrow & 12 + 2i \\ 2 + 4i & \rightarrow & 4 + 8i \end{array}$$

Po krátkém pozorování zjišťujeme, že každé číslo bylo vynásobeno číslem 2, abychom dostali zobrazený tvar. Zobrazení f tedy komplexně můžeme reprezentovat rovnicí:

$$z' = (2 + 0i) \cdot z.$$

Komplexní reprezentace stejnohlosti se středem v počátku

V minulém příkladu jsme našli jednu konkrétní komplexní reprezentaci stejnohlosti, zkusme nyní tuto myšlenku zobecnit. Připomeňme si komplexní odvození rotace okolo počátku, viz str. 23. Stejnohlost mění vzdálenost od svého středu, nikoliv úhel, který se vyskytuje v goniometrickém tvaru komplexního čísla. Náš úkol bude nyní naprosto opačný od odvození otočení okolo počátku – hledáme takovou operaci, která nemění úhel komplexního čísla, který svírá s osou x , ale naopak mění velikost komplexního čísla.

Víceméně chceme číslo otočit o 0° a zvětšit jeho velikost v závislosti na koeficientu stejnohlosti $l \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

$$z' = l \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \cdot z$$

$$z' = l \cdot 1 \cdot z$$

$$z' = l \cdot z$$

Přímé podobnosti komplexně

Komplexní reprezentaci přímých podobností můžeme odvodit analogicky, jako přímé shodnosti. Mějme na paměti komplexní reprezentaci stejnohlosti – podobnosti tedy můžeme reprezentovat následující rovnicí:

$$z' = kz + m, \text{ kde } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{C}$$

Pokud bude k rovno 1, bude se jednat o shodné zobrazení.

3.3 Samodružné body podobnosti

Stejně jako u shodností budou u podobností samodružné body zajímavým tématem. U shodností byly samodružné body velice rozmanité. Některé shodnosti měly nekonečně mnoho samodružných bodů, některé dokonce žádný. Pojdme se opět podívat na tabulku (Tabulka 3.1), kde jsme hledali samodružné body již u čtyř různých podobností. Pokaždé jsme našli pouze jeden samodružný bod jak u podobnosti přímé, tak i nepřímé. Je tedy přirozené se domnívat, že každé podobnosti náleží právě jeden samodružný bod. Nyní si tuto domněnku ověříme.

Věta (Samodružné body vlastní podobnosti)

Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

Důkaz:

Důkaz rozdělíme do dvou částí na přímou podobnost a nepřímou podobnost.

- a) Přímou podobnost dokážeme pomocí komplexních čísel. Podobné zobrazení f pomocí komplexních čísel vyjádříme následujícím způsobem:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$f(z) = z \cdot a + c, \quad a, c \in \mathbb{C}, |a| \neq 1, 0.$$

$$f(s) = s$$
$$a \cdot s + c = s$$
$$s(a - 1) = -c$$
$$s = \frac{c}{1 - a}$$

Pro číslo a nám vznikla podmínka $a \neq 1$. To nás vůbec neomezuje, jelikož aby se jednalo o vlastní podobnost, musí být velikost čísla a různá od jedné. Našli jsme samodružný bod S , který je určen jednoznačně.

- b) Nepřímou podobnost dokážeme pomocí maticové reprezentace. Hledáme takový bod $S[x, y]$, který se zobrazí sám na sebe, a tudíž vyhovuje rovnosti:

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ b & -a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tuto rovnost lze zapsat jako soustavu lineárních rovnic, kterou si následně přepíšeme do matice

$$ax + by + e = x$$
$$bx - ay + f = y$$
$$M_R = \left(\begin{array}{cc|c} a-1 & b & -e \\ b & -a-1 & -f \end{array} \right)$$
$$M = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix}.$$

Chceme dokázat, že existuje právě jeden takový bod $S[x, y]$, který vyhovuje dané soustavě rovnic. Z lineární algebry víme, že soustava n lineárních rovnic

o n neznámých má právě jedno řešení, právě tehdy když je matice soustavy M regulární. Aby matice M byla regulární, její determinant musí být různý od nuly.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ & (a-1)(-a-1) - b^2 \neq 0 \\ & -a^2 - b^2 + 1 \neq 0 \\ & -k^2 + 1 \neq 0 \\ & k^2 \neq 1 \\ & k \neq \pm 1 \end{aligned}$$

Výraz $a^2 + b^2$ jsme nahradili koeficientem podobnosti k z rovnosti (3.2). Z definice podobnosti víme, že k musí být větší než nula a že pokud k je rovno jedné, jedná se o vlastní podobnost. Z toho plyne, že se nikdy nestane aby k bylo rovno jedné nebo mínus jedné a věta je dokázána.

Poznámka: Další náhled na tuto problematiku nabízí Kuřina (2002, s. 156).

3.4 Rozklad podobnosti na stejnolehlost a shodnost

Každé podobné zobrazení s koeficientem k můžeme rozložit na stejnolehlost $h(S, l)$ a shodné zobrazení s . Střed S můžeme v rovině volit libovolně, shodnost je pak určena jednoznačně.

(Kuřina, 2009, s. 152)

Jelikož si střed stejnolehlosti můžeme zvolit libovolně, volíme si ho v počátku, rozklad podobnosti vypadá následovně:

$$F \in \mathcal{P}, F = \begin{pmatrix} a & \mp b & e \\ b & \pm a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \mp \sin \varphi & e \\ \sin \varphi & \pm \cos \varphi & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Tento rozklad nás však příliš neuspokojuje geometricky, jelikož shodnost v rozkladu je poměrně neurčitá, zatímco stejnolehlost má střed v počátku. Uveďme si tedy další tvrzení o rozkladu podobnosti podle Kuřiny (2002, s. 157).

Libovolnou vlastní přímou podobnost, která není stejnolehlostí. Lze rozložit na stejnolehlost a rotaci s tímž středem.

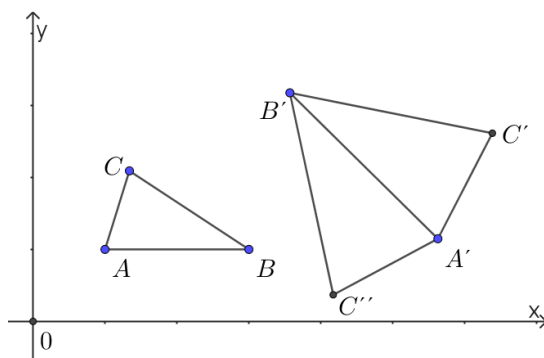
Libovolnou vlastní nepřímou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a osovou souměrnost, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.

Nyní spojíme znalosti o samodružném bodě podobnosti. Pokud budeme volit tento rozklad a střed stejnolehlosti zvolíme v samodružném bodě, geometricky se pro nás stane situace mnohem zajímavější.

3.5 Řešené příklady – rozklad podobných zobrazení

Nyní se podíváme na některé typické příklady, které provázely kurz Analytické geometrie II. Jedním z nich je příklad, kdy je zadána úsečka a její obraz, a my máme zjistit, která podobnost tuto úsečku na zobrazenou úsečku zobrazí. První otázka, kterou bychom si měli položit je, zda bude taková podobnost existovat vždy, a pokud ano, kolik jich bude.

První otázka má zcela triviální řešení – každé dvě úsečky jsou si podobné, jelikož mezi nimi existuje podobné zobrazení, které převádí jednu na druhou. Může se jednat o vlastní podobnost (úsečky mají různé velikosti), nebo o nevlastní podobnost – tedy shodnost (úsečky mají stejné velikosti).



Obrázek 3.4: Určenost podobného zobrazení

Odpověď na druhou otázku po krátkém zamyšlení také nebude vůbec složitá. Doplňme zadanou úsečku AB o třetí bod C tak, aby nám vznikl trojúhelník ABC . Následně také budeme chtít doplnit úsečku $A'B'$ bodem C' , tak abychom měli trojúhelník $A'B'C'$ (kde si příslušné poměry stran odpovídají tak, abychom zachovali podobnost obrazce). Avšak jak

vidíme na Obrázek 3.4, takové trojúhelníky jsou právě dva a to $A'B'C'$ a také $A'B'C''$. Existuje tedy právě jedna přímá a jedna nepřímá podobnost, která převádí úsečky AB na $A'B'$.

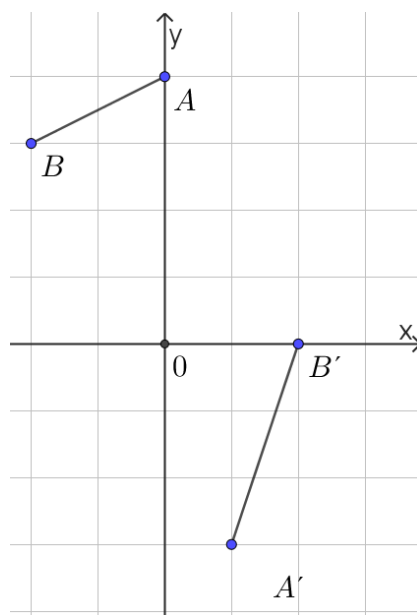
(Kuřina, 2002, s. 152)

Příklad 3.3

Analyticky popište všechny podobnosti $f \in \mathcal{P}$, které úsečku AB zobrazí na úsečku $A'B'$. Najděte samodružné body těchto podobností a analyticky určete jejich rozklad na stejnoolehlost se středem v samodružném bodě a vhodnou shodnost (otočení se středem v samodružném bodě, resp. zrcadlení podle osy tímto bodem procházející). Výsledná zobrazení rozkladu u přímé podobnosti geometricky popište.

$$f: AB \rightarrow A'B', \quad f \in \mathcal{P}$$

$$A[0,4], B[-2,3], A'[1,-3], B'[2,0]$$



Obrázek 3.5: Podobné zobrazení – příklad I

Řešení:

Existuje právě jedna přímá podobnost, a právě jedna nepřímá podobnost, která zobrazí úsečku AB na úsečku $A'B'$. Jelikož se jedná o podobnost, jako první si spočítáme koeficient podobnosti pomocí rovnice z definice podobnosti (3.1).

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

$$\sqrt{10} = k \cdot \sqrt{5}$$

$$k = \sqrt{2}$$

Nyní se podíváme zvlášť na přímou podobnost a následně na nepřímou podobnost. Abychom se vyhnuli nedorozumění budeme přímou podobnost a její matici značit P^+ a nepřímou P^- .

Matici přímé podobnosti snadno zjistíme sestavením soustavy lineárních rovnic.

$$f(X) = X'$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & e \\ b & a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0a - 4b + e = 1$$

$$0b + 4a + f = -3$$

$$-2a - 3b + e = 2$$

$$-2b + 3a + f = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Po vyřešení lineární soustavy jsme koeficienty dosadili do matice, tím jsme našli analytickou reprezentaci přímé podobnosti.

$$P^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naším dalším úkolem je rozložit tuto podobnost na stejnolehlost a shodnost. Jelikož má mít stejnolehlost střed v samodružném bodě podobnosti, nejprve tento bod zjistíme podle definice (opět pomocí soustavy rovnic).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-x + y - 3 = x$$

$$-x - y + 1 = y$$

Samodružným bodem podobnosti je tedy bod:

$$S_{P^+}[-1,1].$$

Nyní podle věty o rozložení podobnosti podobnost rozložíme. Nejprve najdeme stejnoolehlost se středem v samodružném bodě podle vzorce (3.6), které jsme si odvodili na minulých stránkách. Stejně tak nalezneme matici shodnosti.

$$H^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & (1 - \sqrt{2}) \cdot (-1) \\ 0 & \sqrt{2} & (1 - \sqrt{2}) \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 + \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & e \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 + \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Jelikož se jedná o přímou podobnost, tak i shodností bude otočení. Zadání požaduje, aby otočení mělo střed v samodružném bodě podobnosti (stejně jako stejnoolehlost). Takové otočení nalezneme pomocí rovnice odvozené v kapitole 2.2.2.

$$S^+ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & m \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot n \\ \sin \alpha & \cos \alpha & n \cdot (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozklad přímé podobnosti tedy vypadá následovně:

$$P^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 + \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalším úkolem je popsat dílčí zobrazení, ze kterých je složen rozklad. Budeme postupovat velice obdobným způsobem jako v kapitole o shodnostech.

$$S^+ = \begin{pmatrix} \cos 225^\circ & -\sin 225^\circ & -1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \sin 225^\circ & \cos 225^\circ & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak můžeme vidět na matici shodnosti, jedná se o otočení o 225° okolo bodu $S^+[-1,1]$.

Nepřímou podobnost nalezneme velice obdobným způsobem. Nejprve pomocí soustavy lineárních rovnic nalezneme matici nepřímé podobnosti.

$$f(X) = X'$$

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ b & -a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0a + 4b + e = 1$$

$$0b - 4a + f = -3$$

$$-2a + 3b + e = 2$$

$$-2b - 3a + f = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 33/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11/5 \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{33}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále nalezneme samodružný bod nepřímé podobnosti.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{33}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}y + \frac{33}{5} = x$$

$$-\frac{7}{5}x - \frac{1}{5}y - \frac{11}{5} = y$$

$$S_{P^+}[-11,11]$$

Rozklad na shodnost a stejnoolehlost bude vypadat následovně:

$$P_- = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{33}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & e \\ \sin \delta & -\cos \delta & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & g \\ 0 & \sqrt{2} & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dopočítáme tedy jednotlivé koeficienty, aby vyhovovaly zadání (střed stejnolehlosti v samo družném bodě podobnosti).

$$H^- = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & (1 - \sqrt{2}) \cdot (-11) \\ 0 & \sqrt{2} & (1 - \sqrt{2}) \cdot 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -11 + 11\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 11 - 11\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{33}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & e \\ \frac{7}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -11 + 11\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 11 - 11\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^- = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta & m \cdot (1 - \cos 2\beta) - \sin 2\beta \cdot n \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta & n \cdot (1 + \cos 2\beta) - \sin 2\beta \cdot m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & -11 + \frac{88}{5\sqrt{2}} \\ \frac{7}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & 11 - \frac{66}{5\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozklad nepřímé podobnosti vypadá následovně:

$$P^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{7}{5\sqrt{2}} & -11 + \frac{88}{5\sqrt{2}} \\ \frac{7}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & 11 - \frac{66}{5\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -11 + 11\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 11 - 11\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

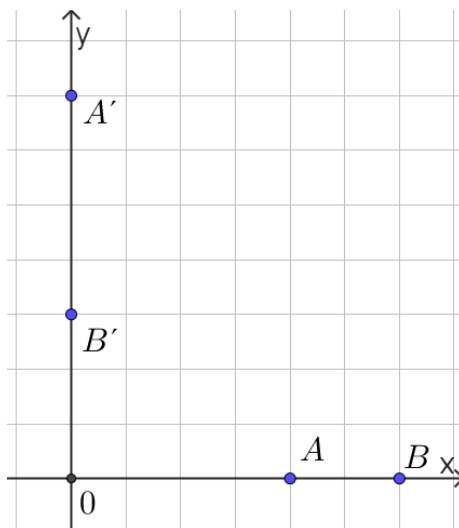
Příklad 3.4

Analyticky popište všechny podobnosti $f \in \mathcal{P}$, které úsečku AB zobrazí na úsečku $A'B'$. Najděte samodružné body těchto podobností a analyticky určete jejich rozklad na stejnolehlost se středem v samodružném bodě a vhodnou shodnost (otočení se středem

v samodružném bodě, resp. zrcadlení podle osy tímto bodem procházející). Výsledná shodná zobrazení v rozkladu geometricky popište.

$$f: AB \rightarrow A'B', \quad f \in \mathcal{P}$$

$$A[4,0], B[6,0], A'[0,7], B'[0,3]$$



Obrázek 3.6: Podobné zobrazení – příklad II

Řešení:

Stejně jako v minulém příkladu, existuje právě jedna přímá podobnost a jedna nepřímá podobnost, která zobrazí úsečku AB na úsečku $A'B'$. Budeme postupovat stejným způsobem jako v prvním případě. Nejprve tedy nalezneme koeficient podobnosti:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

$$4 = k \cdot 2$$

$$k = 2.$$

Nyní se zaměříme na přímou podobnost – nalezneme matici pomocí lineární soustavy rovnic.

$$f(X) = X'$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & e \\ b & a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4a - 0b + e = 0$$

$$4b + 0a + f = 7$$

$$6a - 0b + e = 0$$

$$6b + 0a + f = 3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Nalezená přímá podobnost tedy vypadá následovně:

$$P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Samodružný bod je podle rovnice (3.9) bod $S^+ \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right]$.

$$\begin{pmatrix} 0 & +2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$+2y = x$$

$$-2x + 1 = y$$

Dále nalezneme již podle známých vzorců vhodnou stejnolehlost a shodnost.

$$H^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (1-2) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \\ 0 & 2 & (1-2) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \cdot (1 - \cos \alpha) + \sin \alpha \cdot n \\ -1 & 0 & n \cdot (1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Našli jsme konečné rozložení přímé podobnosti. Poslední část pro přímou podobnost je zjištění, o jakou shodnost v rozkladu se jedná.

$$S^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\sin 270^\circ & \frac{1}{5} \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jedná se o otočení okolo bodu $S \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right]$ o 270° .

Nyní se budeme věnovat nepřímé podobnosti.

$$f(X) = X'$$

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ b & -a & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4a + 0b + e = 0$$

$$4b - 0a + f = 7$$

$$6a + 0b + e = 0$$

$$6b - 0a + f = 3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Nalezená nepřímá podobnost tedy vypadá následovně:

$$P^- = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Samodružný bod nalezneme pomocí následující rovnice.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-2y = x$$

$$-2x + 15 = y$$

Samodružným bodem nepřímé podobnosti je bod $S^- [10, -5]$. Nyní nalezneme rozklad nepřímé podobnosti na stejnoolehlost se středem v samodružném bodě a příslušnou shodnost.

$$H^- = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (1-2) \cdot (10) \\ 0 & 2 & (1-2) \cdot (-5) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozklad nepřímé podobnosti vypadá následovně:

$$P^- = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Našli jsme příslušný rozklad – nyní se podíváme na matici shodnosti. Jelikož víme, že se jedná o zrcadlení, upravíme si matici na příslušný tvar. Následně budeme hledat samodružné prvky tohoto zobrazení.

$$S^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2 \cdot 135^\circ & \sin 2 \cdot 135^\circ & 5 \\ \sin 2 \cdot 135^\circ & \cos 2 \cdot 135^\circ & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-y + 5 = x$$

$$-x + 5 = y$$

Matice S^- reprezentuje osovou souměrnost s osou $p: y = -x + 5$.

4 Afinní zobrazení

Již jsme zjistili, že různé matice mohou představovat různá zobrazení, a to jednak lineární a jednak nelineární. Matice vždy museli být v nějakém jistém tvaru a dodržovat určitá pravidla. Otázkou tedy zůstává, zda matice, kterou budeme volit zcela libovolně, bude představovat nějaké vzájemně jednoznačné zobrazení. Vzájemně jednoznačné zobrazení volíme záměrně, jelikož se nemůže stát, že by se celá rovina zobrazila do jedné přímky, nebo dokonce do jednoho bodu.

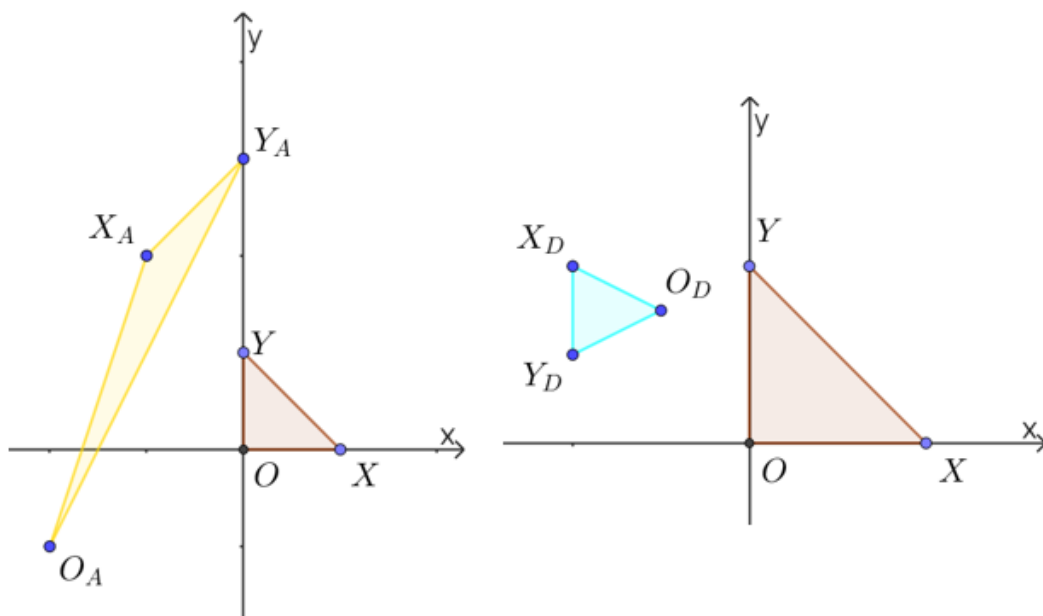
Příklad 4.1

Zjistěte, zda zadané matice zobrazí 3 body XYO na jiné tři různé body.

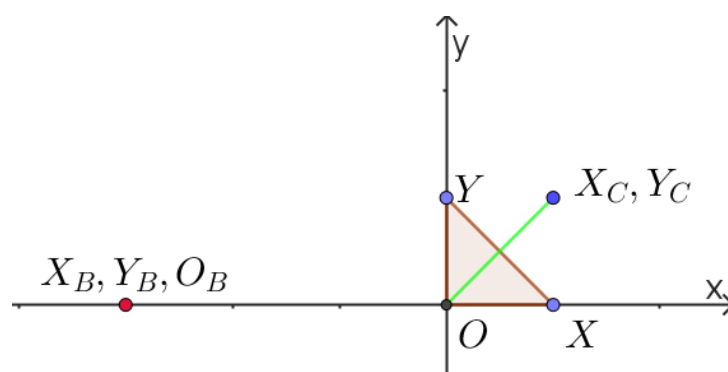
$$X[1,0], Y[0,1], O[0,0]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:



Obrázek 4.1: Zobrazení reprezentována regulární maticí (A, D)



Obrázek 4.2: Zobrazení reprezentována singulární maticí (B, C)

Výsledky si v tomto případě demonstrujeme pouze pomocí Obrázek 4.1 a Obrázek 4.2. Je zřejmé, že matice B a C nezobrazí zadané body do tří různých bodů. Pojděme se tedy nejprve zaměřit na matice A a D . Jak můžeme vidět tyto matice zřejmě reprezentují vzájemně jednoznačná zobrazení, jelikož z dosavadního pozorování to vypadá, že tři body se zobrazí na tři jiné body. Z obrázků je zřejmé, že zobrazení nezachovává vzdálenosti ani úhly, proto se nemůže jednat o shodnost ani o podobnost (tomu samozřejmě také nasvědčuje i tvar zadaných matic). Zobrazení nezachovávající úhly ani vzdálenosti by mohlo být afinní zobrazení. Pouze z obrázku tuto skutečnost bohužel neověříme. Matice B a C nesplňují naši podmínku – matice B bude zřejmě reprezentovat projekci do bodu a matice C zřejmě projekci na přímku. Tato zobrazení však nejsou obsahem této práce a dále se jim věnovat nebudeme.

Již u podobnostech jsme analyzovali různé matice podobností a mimo koeficientu podobnosti jsme se zaměřili také na determinant. Díky tvaru matice a hodnoty determinantu můžeme dokonce rozlišit podobnost vlastní a nevlastní. Podívejme se tedy na determinant u matic A, B, C, D .

$$|A| = 4 - 0 + 0 - 0 + 0 - 6 = -2$$

$$|B| = 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$|C| = 1 - 0 + 0 - 0 + 0 - 1 = 0$$

$$|D| = \frac{1}{8} - 0 + 0 - 0 + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Vidíme, že determinant matic B, C je roven nule neboli že matice B a C jsou singulární, zatímco matice A a D jsou regulární. To pro nás v konečném důsledku nemusí být velké

překvapení, jelikož již v úvodu této práce jsme si uvedli, že stěžejní pro nás bude pojem transformace. Ekvivalentní podmínka pro to, aby bylo zobrazení transformací, je existence inverzního zobrazení. Jelikož reprezentujeme tyto zobrazení maticemi, musí k dané matici existovat inverzní matice. Matice má inverzní matici právě tehdy když je matice regulární (Novotná & Trch, 2006, s. 15).

Definice (Afinní zobrazení)

Zobrazení roviny na rovinu se nazývá afinní transformací roviny neboli afinitou, právě tehdy když jsou obrazy X', Y', Z' libovolných tří kolineárních bodů X, Y, Z rovněž kolineární a pro jejich dělicí poměr platí

$$(XY, Z) = (X'Y', Z').$$

Sekanina (1988, s. 10) definuje afinní zobrazení ještě s možností, že body X', Y', Z' splynou v jeden bod. My nad tímto neuvažujeme, jelikož již na začátku této práce jsme si uvedli, že uvažujeme nad transformacemi a ty musí být vzájemně jednoznačné. Budeme se tedy příklánět k definici podle Kuřiny (2002, s. 37).

(Kuřina, 2002, s. 37)

4.1 Analytická reprezentace afinního transformace

Stejně tak jako pro shodnosti a podobnosti bychom rádi našli maticovou reprezentaci i pro afinity. Již víme, že matice musí být regulární. Otázkou zůstává, zda je toto jediná nutná podmínka.

Věta (Analytické vyjádření afinního zobrazení)

Libovolné afinní zobrazení g má analytické vyjádření

$$\begin{aligned} g: x' &= ax + by + e, \\ y' &= cx + dy + f, \end{aligned}$$

kde $ad - bc \neq 0$. Tyto výsledky můžeme zapsat maticově takto:

$$g: X' = XA + B, |A| \neq 0$$

Kde $X' = (x', y')$, $X = (x, y)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = (e, f)$.

Nyní můžeme použít trik s maticí, kde přidáme uměle vytvořený řádek a zápis bude vypadat následovně:

$$g: X' = F \cdot X,$$

$$\text{kde } F = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |F| \neq 0.$$

Podívejme se na prvky matice F podrobněji. Již u obecných shodností jsme si řekli, že afinní zobrazení je složením lineárního zobrazení a posunutí. První dva sloupce matice shodností představují zobrazené bázové vektory (v našem případě $\vec{u} = (1,0)$, $\vec{v} = (0,1)$). Stejně tomu bude i v tomto případě. Poslední sloupec bude poté znázorňovat zobrazený počátek $(0,0)$ (Stehlíková et al., 2008, s. 53). Každé podobné zobrazení je afinní (Sekanina, 1988, s. 74). Z toho plyne, že i shodné zobrazení je afinní. Tyto vlastnosti tedy platí pro všechny odvozené matice – jak jsme mohli pozorovat již v několika uvedených příkladech, zejména v Příklad 2.4 a Příklad 4.1.

Příklad 4.2

Nalezněte analytickou reprezentaci afinity, která převádí trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$. Načrtněte obrázek. Nalezněte samodružné body. Podle determinantu určete, jestli se jedná o zobrazení přímé nebo nepřímé.

$$\begin{aligned} A[2,0] &\rightarrow A'[+5, +6] \\ B[1,1] &\rightarrow B'[-2, +6] \\ C[7,4] &\rightarrow C[-3, -4] \end{aligned}$$

Řešení:

Opět pomocí již známého algoritmu nalezneme matici afinního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(X) &= X' \\ \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 6 & 6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 2a + 0b + e &= 5 \\ a + b + e &= -2 \end{aligned}$$

$$7a + 4b + e = -3$$

$$2c + 0d + f = 6$$

$$c + d + f = 6$$

$$7c + 4d + f = -4$$

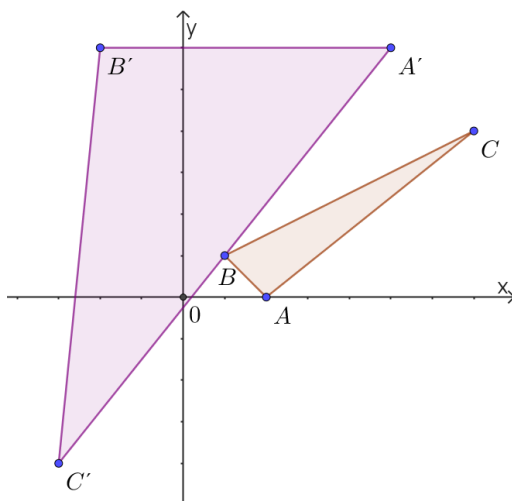
Po vyřešení soustavy lineárních rovnic jsme našli koeficienty a matice afinity vypadá následovně:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{20}{9} & -\frac{43}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} & \frac{10}{9} & \frac{74}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní se přesuneme k determinantu. Pokud je determinant matice afinního zobrazení kladný, jedná se o přímé zobrazení. Pokud je záporný, jedná se o zobrazení nepřímé. (Lávička, 14)

$$|F| = -\frac{70}{9}$$

Jelikož je determinant záporný, jedná se o zobrazení nepřímé, mimo jiné to můžeme pozorovat i na Obrázek 4.3.

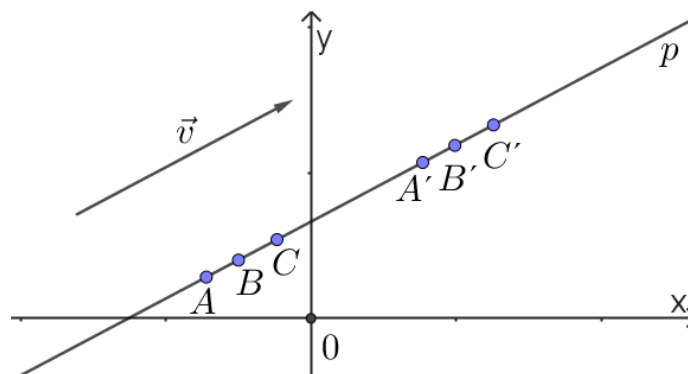


Obrázek 4.3: Afinní zobrazení

4.2 Samodružné body přímky a směry afinního zobrazení

U podobného a shodného zobrazení jsme zkoumali zejména samodružné body. Další takové prvky, které je možné zkoumat jsou samodružné přímky a samodružné směry (vektory).

Nejprve si musíme uvědomit, že přímka samodružných bodů není to samé, co samodružná přímka.



Obrázek 4.4: Přímka samodružných bodů x samodružná přímka

Podívejme se na Obrázek 4.4, kde vidíme posunutí o vektor \vec{v} a přímku p rovnoběžnou s tímto vektorem. Již jsme zmínili, že posunutí žádné samodružné body nemá – z toho důvodu nemůže mít přímku samodružných bodů. Nyní si představme posunutí jako uchopení objektu z roviny a následné položení objektu zpět do roviny. Body A, B, C ležící na přímce p jsme takto uchopili a posunuli na body A', B', C' . Zobrazené body opět náležejí přímce p , jelikož je přímka rovnoběžná se směrem posunutí. Pokud bychom takto uchopili celou přímku p a posunuli ji, přímka se zobrazí sama na sebe (na rozdíl od jednotlivých bodů) – bude to samodružná přímka. V naší představě o posunutí, kde si toto zobrazení můžeme představit jako zmíněné uchopení objektu, je nemyslitelné, že by se přímka zobrazila na něco jiného než přímku. Nikdy však nebude v našich silách, abychom zobrazili všechny body přímky, a tím si toto tvrzení potvrdili.

Než se budeme zabývat samodružnými přímkami a vektory, je nutné si ověřit, že přímka se v afinním zobrazení zobrazí na přímku a vektor na vektor.

4.2.1 Afinní obraz přímky

Věta (Afinní obraz přímky)

Afinním obrazem přímky je přímka.

Důkaz:

Mějme přímku $p: Ax + By + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$ a regulární maticí X . Dále mějme rovnici

$$(A, B, C) \begin{pmatrix} a & b & i \\ c & d & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b & i \\ c & d & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

Tato rovnice musí dát zřejmě rovnici přímky p , jelikož vynásobením matic dostaneme matici jednotkou, kterou můžeme ze zápisu vypustit, protože nic nezmění. Maticovým násobením zbylého výrazu dostaneme zápis přímky: $Ax + By + C = 0$.

Označme

$$(A', B', C') = (A, B, C) \begin{pmatrix} a & b & i \\ c & d & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & i \\ c & d & j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení výrazu z (4.2) do (4.1) dostaneme $(A', B', C') \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Což po vynásobení odpovídá rovnici $A'x' + B'y' + C' = 0$. Nyní ověřme, že nově vzniklá rovnice je rovnicí přímky čili že $(A', B') \neq (0, 0)$.

Zadaná matice X je regulární – k ní inverzní matice je opět regulární. Připomeňme si, že výraz (A, B) je také různý od nuly. Z rovnice (4.2) nám pro koeficienty matice a, b, c a d vzniká podmínka

$$Aa + Bc \neq 0, \quad Ab + Bd \neq 0.$$

Dokažme, že tato podmínka platí vždy.

Rovnice můžeme upravit a následně sloučit do rovnice $cb \neq da$. Tento zápis nám říká, že matice X^{-1} musí být regulární, což je naším předpoklad.

Rovnice přímky $A'x' + B'y' + C' = 0$ je tedy evidentně obrazem přímky p v afinitě, která je reprezentovaná maticí X . Tvrzení je dokázáno a jako bonus jsme našli také koeficienty zobrazené přímky A', B' a C' , které spočítáme pomocí prvního vztahu (4.2).

(Hejný et al., 1997, s. 41)

Příklad 4.3

Afinita je dána maticí F . Nalezněte samodružné body a přímky tohoto zobrazení.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Samodružné body nalezneme pomocí rovnice

$$f(S) = S$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nalezli jsme jeden samodružný bod $S \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right]$.

Samodružnou přímku $p: Ax + By + C = 0$ nalezneme pomocí rovnice:

$$(A, B, C) = (A, B, C)F^{-1},$$
$$(A, B, C) = (A, B, C) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Nejprve nalezneme inverzní matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Podle rovnice

$$(A, B, C) = (A, B, C) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

budeme hledat koeficienty A, B, C . Nejdříve si musíme uvědomit, že například vektor $(1, 2, 3)$ reprezentuje přímku $w: x + 2y + 3 = 0$, ale stejně tak ji reprezentuje vektor $(2, 4, 6)$ a každý další násobek. Abychom tedy našli všechna řešení, musíme hledat čísla A, B, C a koeficient $t \in \mathbb{R} \setminus 0$ tak, aby platilo:

$$t \cdot (A, B, C) = (A, B, C) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$tA = -A + \frac{1}{2}B$$

$$tB = \frac{1}{2}B$$

$$tC = A - \frac{1}{2}B + C$$

Nacházíme dvě řešení – $p: x + 3y + 1 = 0$, $q: 2x - 1 = 0$.

Hledání inverzní matice může být často zdlouhavou a náročnou úlohou, proto si nyní ukážeme, jak najít samodružné přímky i bez použití inverzní matice. Vezměme si rovnici, podle které jsme samodružné přímky našli. Tuto rovnici následně vynásobíme maticí F zprava (mějme na paměti, že maticové násobení není komutativní).

$$t \cdot (A, B, C) = (A, B, C) \cdot F^{-1}$$

$$t \cdot (A, B, C) \cdot F = (A, B, C)$$

Pokud označíme $\frac{1}{t} = q$, $q \in \mathbb{R} \setminus 0$, dostáváme rovnici pro výpočet koeficientů samodružné přímky pro afinní transformaci reprezentovanou maticí X .

$$(A, B, C) \cdot F = (A, B, C) \cdot q$$

(Hejný et al., 1997, s. 43-44)

4.2.2 Afinní obraz vektoru

Připomeňme, že body zapisujeme s použitím třetí uměle vytvořené souřadnice jedna – $X[x, y, 1]$. Jak tedy zapíšeme vektor? Následující věta nám odpoví i na tuto otázku. Prozatím však budeme vektor reprezentovat pomocí dvou bodů a jejich rozdílem.

Věta (Afinní obraz vektoru)

V rovině jsou dány čtyři body A, B, C, D , tak že $A - B = C - D$. Necht' f je libovolná afinita. Pak platí $f(A) - f(B) = f(C) - f(D)$.

Nyní větu uvádíme bez důkazu, který je k nahlédnutí v (Hejný et al., 1997).

Z věty také plyne zápis vektoru, a to ve tvaru $\vec{v}(u, v, 0)$, jelikož od sebe odečítáme dva zobrazené body $[e', f', 1] - [g', h', 1] = (e' - g', f' - h', 1 - 1) = (e' - g', f' - h', 0)$.

(Hejný et al., 1997, s. 41)

Příklad 4.4

Nalezněte samodružné body, přímky a směry afinity, zadanou pomocí matice W .

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Samodružné body:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Po vyřešení předešlé rovnice jsme našli jeden samodružný bod afinity $S[2,1]$.

Samodružné přímky:

$$(A, B, C) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A, B, C) \cdot q,$$

$$(2a + 3B, -B, -2A - 4B + C) = (Aq, Bq, Cq).$$

Dostáváme tři řešení $(-1, 0, 2)$, $(1, -1, -1)$, $(0, 0, r), r \in \mathbb{R}$. Pouze dvě z těchto řešení mohou reprezentovat přímky: $p_1 = -x + 2 = 0$ a $p_2 = x - y + 1 = 0$.

Samodružné směry:

hledáme vektor $\vec{u} = (u, v, 0)$, který se zobrazí sám na sebe, tomu odpovídá rovnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (u, v, 0) = \lambda(u, v, 0).$$

$$(2u + 3v + 0, -v + 0, -2v - 4v + 0) = (\lambda u, \lambda v, \lambda 0)$$

Po roznásobení zjišťujeme, že třetí sloupec v matici můžeme zanedbat, protože tvar vektoru tento sloupec celý vynuluje. Nyní tedy budeme pracovat pouze se čtvercovou maticí o

velikosti 2×2 , kterou označíme $W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Obecná rovnice hledání samodružných směrů vypadá následovně:

$$W \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Tato rovnice mimo jiné říká, že vektor \vec{u} musí být vlastním vektorem matice W (Bican, 2009, s. 151). Úkol najít samodružných směrů afinity se mění na najít vlastní vektorů matice W .

$$\begin{aligned} \det(W - \lambda E) &= 0 \\ \left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \right| &= 0 \\ (2 - \lambda)(-1 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Nalezli jsme dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, kterým odpovídají dva vlastní vektory $(-1, 0)$, $(1, -1)$.

Příklad 4.5

Jsou dány body $A = [0, 0]$, $B = [3, 0]$, $C = [4, 2]$ a $D = [1, 2]$. Nalezněte matici afinity, která převádí (po řadě) body A , B , C na body D , B , C . Dále také nalezněte samodružné body, přímky a směry afinity.

Řešení:

Nejprve pomocí soustavy rovnic nalezneme matici tohoto zobrazení.

$$\begin{aligned} f(X) &= X' \\ \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

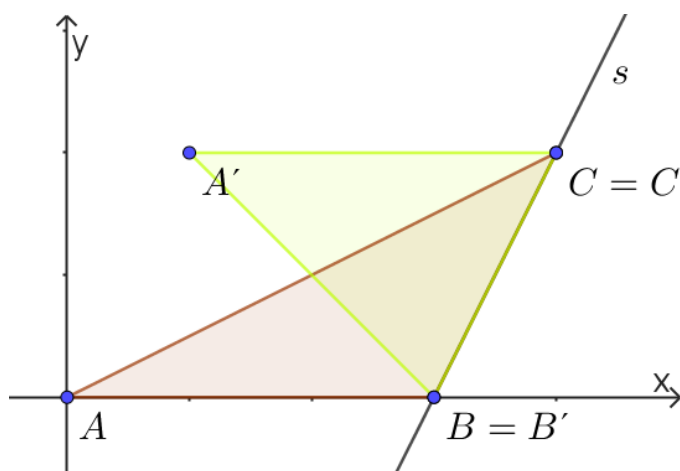
Matice tedy vypadá následovně:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Samodružné body nalezneme pomocí následující rovnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Po vyřešení soustavy rovnic jsme nenalezli jeden samodružný bod, ale dokonce celou přímku samodružných bodů – s : $y = 2x - 6$.



Obrázek 4.5: Samodružné body afinity G

Samodružné přímky nalezneme pomocí následující rovnice:

$$(A, B, C) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A, B, C) \cdot q.$$

$$\frac{2}{3}A - \frac{2}{3}B = Aq$$

$$\frac{1}{6}A + \frac{4}{3}B = Bq$$

$$A + 2B + C = Cq$$

Tuto soustavu rovnic můžeme opět poskládat do maticového zápisu, nyní však budeme vektor reprezentující přímku zapisovat do sloupce.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že matice v tomto zápisu se transponovala, rovnici tedy také můžeme zapsat jako:

$$G^T \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Nyní se opět dostáváme k zajímavému zjištění – nalezení koeficientů samodružné přímky lze provést pomocí vlastních vektorů transponované matice zobrazení. Po vyřešení rovnice dostáváme jedno vlastní číslo matice a to tedy $q = 1$. Nalezneme vlastní vektory pomocí vlastního čísla:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 2 & 1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Řešením je osnova samodružných přímek rovnoběžná s osou samodružných bodů:

$$x - 2y + c = 0, c \in \mathbb{R}.$$

Samodružné směry nalezneme také pomocí vlastních čísel. Výsledný samodružný směr je rovnoběžný s osou afinity.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit studijní materiál, zejména pro studenty matematiky pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. V práci jsou témata, kterými se zabýval předmět Analytická geometrie II, který se v současné době již nevyučuje. Materiál tedy slouží zejména k samostudiu a prohloubení geometrických znalostí studentů. Dále by také mohl sloužit jako rozšiřující materiál, například pro žáky na gymnáziích.

Ve třech hlavních kapitolách byly shrnuty analytické poznatky o afinních zobrazeních, mezi které patří zobrazení shodná, podobná a afinní. Nejpodrobněji byla probrána shodná zobrazení v první části. Dále jsme na tyto znalosti navazovali jak v podobných zobrazeních, tak v afinních. Kapitola o podobnostech byla završena větou o rozkladu podobných zobrazení na shodnost a stejnoolehlost. Na tuto větu se soustředí kapitola 3.5 s řešenými příklady.

Poslední kapitola o afinních zobrazení nás s tímto tématem spíše seznamuje. Prozkoumává spíše obecné znalosti o afinitách a spojuje je s tématy podobných a shodných zobrazení.

Zabývali jsme se hned dvěma analytickými reprezentacemi – maticová reprezentace a komplexní reprezentace. Předmět spojoval několik oblastí matematiky – analytickou geometrii, syntetickou geometrii, komplexní čísla a lineární algebru. Tento text si dával za cíl podobné ambice, a to tedy spojení těchto odvětví do přehledného textu, zabývající se transformacemi roviny.

Na práci by se dalo navázat například zkoumáním transformací různých objektů, konkrétně třeba transformacemi kuželoseček, což bylo také tématem předmětu Analytická geometrie II. Dále také studiem projektivní geometrie, která je obsahem navazujícího předmětu Analytická geometrie III.

Seznam použitých informačních zdrojů

- Bican, L. (2009). *Lineární algebra a geometrie* (2. vydání). Academia.
- Calda, E. (1999). *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla* (2. vydání). Prometheus.
- Hejný, M., Jirotková, D., & Stehlíková, N. (1997). *Geometrické transformace (metoda analytická)*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze.
- Chomová, P. (2023). *Osová afinita v rovině*. Bakalářská práce. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.
<https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/184794/130369172.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Kuřina, F. (2002). *10 geometrických transformací*. Prometheus.
- Lávička, M. (2006). *KMA/G2 Geometrie 2: Pomocný učební text*.
https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/Lavicka_G2.pdf
- Novotná, J., & Trch, M. (2006). *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů. 1. část, Lineární algebra*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Trch, M., & Novotná, J. (1993). *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů. Část 3, Základy algebry*. Karolinum.
- Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. (2007). 978-80-87000-11-3.
<https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/>
- Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. (2023). <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- Sekanina, M., Boček, L., Kočandrl, M., & Šedivý, J. (1988). *Geometrie II*. Státní pedagogické nakladatelství.
- Stanovský, D. (2010). *Základy algebry*. Matfyzpress.
- Stehlíková, N., Hejný, M., & Jirotková, D. (2008). *Analytická geometrie II: Geometrické transformace*. Elektronická kript, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

https://d11.cuni.cz/pluginfile.php/349959/mod_resource/content/1/AG%20II%20skripta.pdf

f

Vondrová, N., Hejný, M., & Jirotková, D. (2005). *Úvod do studia analytické geometrie*.

Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.