Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Porozumění algebraickým výrazům u žáků druhého stupně ZŠ

Understanding of algebraic expressions by pupils of higher primary schools

Bc. Patrik Jelínek

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy (N0114A300095)

Studijní obor: N M 20 (0114TA300095)

2024

Prohlášení

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Porozumění algebraickým výrazům u žáků druhého stupně ZŠ* potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 14.4.2024

Poděkování

S odevzdáním této diplomové práce vyjadřuji poděkování všem, kdo přispěli k jejímu vypracování. Mé díky prvně patří prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, DSc., Dr. za jeho rady při vedení práce a pomoc při jejím zpracování. Dále děkuji všem účastníkům výzkumu. Tímto způsobem tedy současně děkuji i účastníkům a učitelům ze škol: Základní škola Lesní, Gymnázium a obchodní akademie Mariánské Lázně, Gymnázium prof. Jana Patočky, Základní škola Jih, Základní škola Zárečná a Benešova základní škola. Jen s jejich pomocí a ochotou mohl být výzkum proveden v dostatečném rozsahu.

ABSTRAKT

Tato diplomová práce je zaměřena na porozumění algebraickým výrazům u žáků 2. stupně základních škol. Cíle jsou dva. Zaprvé, na základě kvantitativního vyhodnocení řešení žáků určit, jaké chyby jsou u algebraických výrazů nejvíce prominentní v okruzích: *zobecňování, algebraizace, intepretace, geometrizace a manipulace výrazů,* a zadruhé srovnat, jak je zavedení těchto výrazů pojato v různých učebnicích matematiky. Nad rámec tohoto je zahrnuta i rešerše literatury. Včetně výběru výzkumů o porozumění algebraickým výrazům je v této sekci podán popis pro to, jak lze docílit vyššího porozumění algebry vhodnými aktivitami při výuce, a dále jaké jsou časté chyby a jejich možné důvody pro dílčí okruhy. Druhou část práce poté představuje 2dílná komparace učebnic. Její první část odpovídá analýze výkladu, kdy se řeší různé přístupy, jak autoři dokládají platnost manipulace algebraických výrazů. A druhou částí je kvantitativní analýza úloh (tj. přehled jejich složení u výkladu u pěti okruhů stanovených výše). Třetí část práce je nakonec tvořena vyhodnocením experimentu. S písemným otestováním 207 žáků z posledních ročníků povinné školní docházky byly pro tuto část vytyčeny další 2 dílčí cíle – zaprvé, zjistit, jaké okruhy úloh činí žákům největší potíže u algebraických výrazů; a dále ověřit, zda se shodují s TIMSS 2007 (tj. s okruhem geometrie, zobecňování a složitějšími případy algebraizace). Pro druhý cíl se podařilo nalézt částečnou shodu. Geometrické i zobecňující úlohy, jež byly v TIMSS 2007 více problematické, vyšly i zde nejhůře, zatímco algebraizace nejlépe. Podle klesající průměrné úspěšnosti bylo celkové pořadí okruhů: algebraizace, interpretace, manipulace, zobecnění a geometrizace výrazů. Nejnáročnější okruh tedy byla celkově geometrizace.

KLÍČOVÁ SLOVA

Algebraický výraz, proměnná, komparace učebnic, didaktický test

ABSTRACT

This master's thesis focuses on the understanding of algebraic expressions by higher primary school pupils. The objective is twofold. First, to determine, based on the quantitative evaluation of research data, the most common mistakes pupils make under the headings of *generalization, algebraization, interpretation, geometrization, & manipulation*; and then second, to compare the introduction of algebraic expressions in different mathematics textbooks. Beyond this, a theory is also appended. Including several research results, literature review also delves into several activities effective in enhancing pupils' understanding of algebraic expressions, as well as an illustration of their typical errors associated to the aforementioned headings. The second part of the thesis then consists of the two-part textbook analysis: First, a qualitative analysis of authors' reasoning when validating modifications of algebraic expressions, and then a quantitative analysis of the algebraic tasks concerning the headings (i.e., the creation of a task overview). The third part of the paper finally evaluates the author's research. With the test sample of 207 pupils selected from the last years of compulsory education, two additional objectives were set out – first, to find out which tasks (according to said headings) are the most difficult in the context of algebraic expressions; and then, to check whether they coincide with TIMSS 2007 (that being the geometry, generalization and complex cases of algebraization). Partial agreement was found for the second objective. Both geometry and generalization marked for TIMSS 2007 as the most difficult items also scored the lowest success rate in this study. On the other hand, algebraization scored comparatively the best. According to the decreasing average success of pupils the overal order of headings was: algebraization, interpretation, manipulation, generalization and geometrization of expressions. The most demanding headings was thereafter the geometrization.

KEYWORDS

Algebraic expressions, variable, comparison of textbooks, didactic test

OBSAH

ÚVOD

Zavedení algebraické symboliky je pro učitele jedním z nejdůležitějších momentů základní školy. Je tomu jednak proto, že správné zavedení této symboliky dovoluje žákovi dále v matematice objevovat, jaké další významy mohou písmena mít, ale i to, že nesprávné zavedení vede na chyby – a to i u dalšího učiva. Proto je důležité znát hlavní úskalí zavedení symboliky. Toho je docíleno skrze následující cíle: u algebraických výrazů zaprvé srovnat, jak probíhá jejich zavedení v různých učebnicích matematiky. A dále zjistit, jaké jsou u nich nejčastější chyby žáků při jejich odlišném použití (tj. při *zobecňování, algebraizaci, intepretaci, geometrizaci a manipulaci výrazů)*. Pro naplnění těchto cílů byly vytyčeny tyto dílčí cíle:

- C1: S využitím odborné literatury vymezit základní okruhy práce s algebraickými výrazy. Součástí tohoto cíle je vymezit i pro ně typické obtíže;
- C2: Na základě komparace učebnic matematiky pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia stanovit společné trendy těchto učebnic při zavádění algebraických výrazů;
- C3: Kvantitativní analýzou učebnic popsat hlavní trendy z hlediska přítomných typů úloh;
- C4: Na základě provedeného testování identifikovat nejčastější typy chyb žáků při jejich použití algebraických výrazů napříč všemi okruhy;
- C5: Pomocí vlastního šetření ověřit, zda byly problematické okruhy výrazů stejné jako v šetření TIMSS 2007.

Všechny tyto dílčí cíle byly založeny na 3 důvodech naznačených v práci. Prvním je to, že podle analýzy žákovských výsledků z cyklu TIMSS 2007 (Rendl & Vondrová, 2014) byly algebraické výrazy zařazeny do *kritických míst matematiky základní školy*[1]. Zadruhé, dle souvisejících dat z TIMSS 1999, 2007 a PISA 2003, 2012, 2022 patří jazyk algebry současně i do oblastí, v nichž čeští žáci setrvale vykazují nedostatky. A zatřetí, v českém prostředí existuje jen málo prací téhož typu. Posledním bodem je myšleno to, že mezi závěrečnými pracemi studentů vznikají zpravidla ty, kde se autoři zabývají jen jedním z okruhů – tj. např. geometrickým užitím výrazů či manipulacemi. Tato práce je však pojata jinak. Problematiku výrazů záměrně pojímá u více okruhů najednou, a tedy cílí na holistické pojetí a vytváření námětů pro další specializované výzkumy.

[1] Autory uváděná ‚kritická místa' (dále rozebraná v Havlíčková & kol., 2015), jsou takové oblasti učiva matematiky, v nichž čeští žáci opakovaně selhávají vinou své nedostatečné znalosti. Mezi tyto oblasti patří na úrovni základní školy např. i *zlomky, slovní úlohy* a *míra v geometrii*.

1 SLOVNÍK ZÁKLADNÍCH POJMŮ

Předtím než je přestoupeno k naplnění cílů v rámci práce, je potřeba vymezit několik pojmů, které jsou používány k popisu. Tyto pojmy jsou následovné.

Algebraický výraz: Tento koncept ve své knize vymezuje např. Vošický (1997, s. 34). Uvádí, že se jedná o „zápis, který je správně vytvořený z konstant, matematických operačních znaků, čísel, výsledků operací a proměnných," přičemž pokud není přítomna proměnná, jedná se o *číselný výraz* (*proměnná*, viz oddíl 2.1).

Matematický model (dále i *model*): Jako matematický model je nazvána každá smysluplná reprezentace matematického konceptu, jíž je možné převést na jiný model. Pokud je tímto konceptem například *obsah čtverce* (o straně $\boldsymbol{a}$), potom jeho vyplněný nákres odpovídá jeho geometrickému modelu, zatímco algebraický výraz $\boldsymbol{a^2}$ jeho algebraickému modelu.

Teorie generických modelů (dále i *TGM*): Teorie konstruktivistického vyučování matematiky založená na poznávacím procesu z Tab. 1. Autorem této teorie je československý didaktik M. Hejný, syn V. Hejného a autor *Hejného matematiky*.

Tab. 1: Stádia poznávacího procesu (Hejný, 2014, s. 40)

(1) stádium motivace	(prvotní zaujetí žáka)	(5) Krystalizace kontinuální propojování starých a nových poznatků
(2) stádium izolovaných modelů	(viz ‚izolovaný model')	
↓ *první abstraktní zdvih* ↓		
(3) stádium generického modelu	(viz ‚generický model')	
↓ *druhý abstraktní zdvih* ↓		
(4) stádium abstraktního modelu	(viz ‚abstraktní model')	

Izolovaný (či separovaný) model: Podle TGM je tento model každý matematický model nesouvisející s jinými modely téhož konceptu. Jednotlivé modely se mohou od sebe lišit vizuálně i obtížností (viz srovnání Tab. 2), přičemž model nepříslušící danému konceptu je tzv. *ne-model* či *zavádějící model* (např. ukázka chyb u úpravy výrazů) (Hejný, 2014).

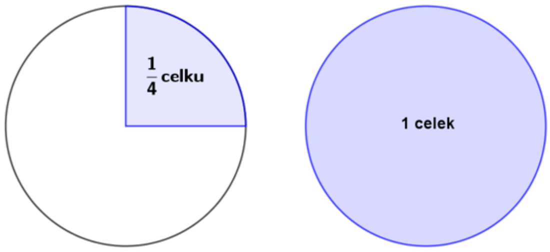
Tab. 2: Příklad izolovaných modelů kvadratické rovnice (vlastní)

$\boldsymbol{x^2 = 0}$	$\boldsymbol{y^2 = 0}$	$3z^2 + 1 = 0$	$2a^2 + 3b + 4 = 0$

Generický model: Podle TGM je generický model každý prototyp izolovaných modelů, kterých je více. Speciálním případem jsou pravidelnosti, kde jsou jeho 2 typy (Hejný, 2004). Zaprvé se jedná o tzv. *procesuálně generický model* (k nalezení neznámých členů je třeba využití jeho předchůdců při popisu vztahu slovy – tzn. verbální rekurentní vzorec), a dále *konceptuálně generický model*, který, oproti procesuálnímu, je již zcela obecným návodem tzn. nevyužívá předchůdců a je to explicitní vzorec (Obr. 1) (Hejný, 2004).

Tab. 3: Příklad generického modelu – koláčový model zlomku (vlastní)

S tím, jak žák poznává další izolované modely jednoho konceptu (jako např. úprav výrazů), je důležité, že v průběhu času poznává i jeho další kritické atributy – tedy různé podoby a vlastnosti konceptů. Pro koncept *zlomku* je to např. to, že lze mít i zlomek s hodnotou vyšší než 1 či menší než 0. U obou jde totiž o atributy vedoucí ke změně generického modelu. Pro zlomky větší než 1 je změna modelu např. vyvolána tím, že k jejich znázornění již nestačí 1 model jako u Obr. 1 (Nováková & Vondrová, 2015).



Obr. 1: Reprezentace 2 izolovaných modelů zlomku pomocí generického modelu koláče

Abstraktní model: Podle TGM je abstraktní model generický model konceptu, který již byl vyjádřen (formálním) jazykem písmen (Hejný, 2014). Jeho ukázku u zlomku nabízí Tab. 4.

Tab. 4: Příklad abstraktního modelu zlomku (vlastní)

Zápis zlomku ve tvaru $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$ pro náhradu modelu koláče

Formální poznatek: Podle TGM je formální poznatek takový poznatek, jež není osvojen porozuměním, ale memorováním. Jedná se tedy o znalost primárně nežádoucí. Důvodem je to, že žák koncept neumí samostatně použít v nové situaci, ale jen si pamatuje jeho zápis a případné použití pro známé situace a podle známých návodů (Hejný, 2014).

Konceptuální poznatek: Podle *TGM* je konceptuální poznatek každý poznatek nabytý porozuměním. Rozlišují se 2 typy tzv. *strukturálně ukotvený poznatek* (ten se u žáka utváří kombinací jeho starších konceptuálních poznatků (nejen) v matematice) a dále *sémanticky ukotvený poznatek* (ten je naopak založen na analogii konceptu k životní zkušenosti žáka). Z hlediska příkladů jde často o dvě různé situace. Např. u prvního případu může jít o odvození vzorečku pro obsah čtverce přes jiné známé vztahy (tzv. strukturální model) a u druhého o myšlenku lineárních rovnic jako rovnovážných vah (tzv. semantický model).

Úloha: Podle konvence je úloha dosud nesplněný úkol, který žák řeší pro procvičení učiva, nebo vstupní porozumění konceptu. Soubor alespoň jedné úlohy je nazván *cvičení*.

Příklad: Předem splněný úkol, který je komplementem úlohy, je označen jako *příklad*. Žák v něm poznává zprostředkované principy autora, který situaci vzorově řešil, a tyto principy pak aplikuje u vlastního řešení úloh.

1.1 Zásady formátování práce

Kromě vybraných pojmů, které jsou představeny výše, je před začátkem práce dále třeba vymezit několik zásad jejího formálního zpracování. Tyto zásady jsou následovné.

Značení tabulek

V práci jsou používány celkem tři druhy tabulek, jež se liší zdrojem informace. Jedná se o:

1. Tabulky vytvořené bez využití jakéhokoliv nevlastního zdroje;
   - ⇨ Tyto tabulky jsou v titulku označené jako: (vlastní).
2. Tabulky vytvořené z informací jiných autorů, ale ne formou jejich přímých citací;
   - ⇨ Tyto tabulky jsou v titulku označené jako: (jména autorů, rok publikace).
3. Tabulky přímo odcitované z prací jiných autorů (tj. převzaté).
   - ⇨ Tyto tabulky mají v titulku: (jména autorů, rok publikace, strany citované části).

Výše uvedené značení platí pro všechny obrázky a tabulky z kap. 2; kdežto pro kap. 3 a 4 nikoli. Rozdílem je to, že v kap. 3 (srovnání učebnic) nejsou uvedena samotná jména autorů, ale pouze nakladatelství dané učebnice z důvodu přehlednosti, a pro kap. 4 jsou všechny materiály vlastní. Z tohoto důvodu nejsou v této kapitole nijak výrazně odlišeny.

Přímé citace z cizojazyčných zdrojů

Text mimo českých zdrojů obsahuje i občasné citace zahraniční literatury. Tyto citace jsou vždy uváděny v češtině. Pokud autor neuvedl původní informaci v češtině, je tudíž část zdroje přeložena – a to jako vlastní překlad bez dodatečné korektury.

Rozlišení přímé citace s přidaným textem

Pakliže je přímá citace v textu doplněna o hranaté závorky [ ], znamená to, že tato citace byla doplněna o dodatečný text. Tato informace slouží vždy k přiblížení kontextu citace.

Odlišení přímé citace a vlastního zvýrazněného textu

V textu se vyskytují pasáže zvýrazňující některá slova či věty. Tyto části mají své značení. Zaprvé kurzívu, která je obvykle, ale ne vždy využívána u samostatných či kratších spojení slov, a zadruhé jednoduché uvozovky obvykle použité pro delší slovní spojení. Pokud jde o citace, ty jsou stále značeny standardně. Pro jejich odlišení slouží buď dvojité uvozovky, je-li citace kratší, či zvětšené odsazení textu, je-li citace delší.

2 TEORETICKÁ ČÁST

Tato kapitola se zaměřuje na cíl C1, jenž souvisí s vymezením základních pojmů. Hlavním cílem je zde tudíž představit odlišné okruhy algebraických výrazů, které jsou sledované u výzkumu (tj. zobecňování, intepretace, úpravy a modelování), a dále ilustrovat pro ně charakteristické chyby – včetně literatury. V poslední části jsou následně představeny i didaktické náměty. V konkretizaci se jedná o různé podněty k tomu, jak využít geometrii k zavádění či navýšení porozumění u algebraických výrazů, a dále přehled výsledků dvou mezinárodních výzkumů: výzkumu TIMSS a výzkumu PISA.

2.1 Role písmen

První pojem, který je potřeba zavést při interpretaci jazyka algebry, je *role písmen* představujících jejich významy. Těchto rolí je více. *Role jednotky* žák chápe tak, že písmena nejsou jen elementy slov, ale i zkratkami reference (např. $1\ m$ pro *‚1 metr'* či $2l$ pro *‚2 litry')*. *Roli objektu* dále chápe jako ztotožnění vybraných písmen s určitými objekty (např. úsečku ***a*** jako geometrický objekt či ***b****anán* ***b*** jako reálný objekt). A následně *roli veličiny* jako spojení obou. Důvodem je to, že principálně souvisí s algebrou. Vzhledem k tomu, že role veličiny podle (Rhine & kol., 2018) odpovídá *závislé proměnné*, jež je vyjádřena jinými proměnnými. Což má pro žáka za význam to, že písmeno zastupuje celou číselnou vlastnost (např. obvod o, obsah S, ale i čas t), což dále rozvíjí *role atributu*. Ta má podle stejných autorů specifičtější význam. Roli veličiny zužuje na jeden konkrétní objekt (např. a v úloze: ‚Sestrojte [konkrétní] úsečku a, pro níž platí [číselná vlastnost] $a = 4\ cm$), což dovoluje distinkci role objektu i jeho vlastnosti u řešení úloh.

Role konstanty, jež dovoluje řešit úlohy u zkoumání kružnic, je další důležitá role. Důvodem je její dualita. Písmeno π (Ludolfovo číslo) na jednu stranu totiž plní roli, kdy jde o symbol 1 čísla (tzn. jako konkrétní číslo může vstupovat i do operací s dalšími čísly, viz $\pi + 2$), ale zároveň je to i znak pro všechny jeho číslice (tj. $3{,}14\ldots$, kdy reprezentuje nekonečně mnoho znaků). Toto odlišení je pak zásadní i v algebře. Příčinou je to, že role písmen zde mají často různé výklady, kdy kromě jednoho objektu může rolí např. být i následující podle (Trigueros & Ursini, 1999; Vondrová, 2019).

Proměnná
Písmeno, jež v dané části zápisu vyjadřuje všechny číselné hodnoty, jež se v zápisu mohou měnit. Část autorů ji proto považují za obecné užití písmene. Např. Furinghetti & Paola (1994) uvádí, že proměnná je generický model všech rolí uváděných dále, tzn. že to jsou role *proměnné*, zatímco Vondrová (2019) uvádí, že jde jen o *role písmen*.

Určitá neznámá
Písmeno, které představuje zatím nespecifikované hodnoty. Cílem je tyto hodnoty určit.
Příklad: Písmeno $x \in \mathbb{R}$ je v roli neznámé např. v lineární rovnici $x + 2 = 8$.
Parametr
Písmeno, jež je nástroj k vyjádření celé třídy objektů. Na rozdíl od neznámé je již u parametru znám obor hodnot proměnné.
Příklad: Písmeno $b \in \mathbb{R}$ v modelu všech lineárních rovnic $ax + b = 0$.
Zobecněné číslo
Písmeno se nachází v roli zobecněného čísla, pokud za něj může být ve výroku dosazeno libovolné číslo a nedojde ke změně platnosti výroku (Vondrová, 2019).
Příklad: Písmena $a, b \in \mathbb{R}$ jsou v roli zobecněné číslo u $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
Koeficient
Písmeno je koeficientem, zastupuje-li čísla, jimiž je násobena jiná hodnota či proměnná.
Příklad: Písmeno $a \in \mathbb{R}$ násobící proměnnou $x \in \mathbb{R}$ u $ax + b = 0$ je v roli koeficientu.

Důvodem pro to, proč se někdy tyto poslední 4 uváděné role nazývají *rolemi proměnné* namísto *rolí písmen*, je to, že jde o její zvláštní případy. Příkladem jsou Furinghetti & Paola (1994). Spolu s Trigueros & Ursini (1999) uvádí to, že neznámá je omezení role proměnné na případ, kdy písmeno zastupuje jen neznámé a hledané hodnoty. Parametr je dle nich typ proměnné, jenž je nezávislý na ostatních proměnných úlohy a dovoluje žákovi vyjádřit jinou (tzv. závisle) proměnnou. A zobecněné číslo je typ proměnné u ekvivalentních úprav (např. u sčítání a odčítání mnohočlenů, kdy je nutné za proměnnou dosadit libovolnou hodnotu). Na druhou stranu, i toto přináší riziko. Důvodem je to, že jelikož o výběru jedné z různých rolí proměnné často rozhoduje jen to, co je aktuální cíl řešitele úlohy (tj. zda se např. jen snaží odvodit vzorec obvodu čtverce či tento vzorec již prakticky používá), je možné, že se role písmen průběžně změní. Tuto situaci ilustruje níže Vondrová (2019).

> Problematika [písmen v algebře] je o to složitější, že ne vždy dokážeme říct, v jaké roli písmeno je. Např. H. Bloedy-Vinner (2002) to ukazuje na příkladu úlohy: ‚Najděte rovnici přímky, která prochází bodem o souřadnicích [2; 5] a má směrnici 3.' Začneme rovnicí $y = ax + b$. Z kontextu úlohy plyne, že v ní jsou y a x proměnné a a a b parametry. Pak dosadíme hodnotu směrnice a dostaneme $y = 3x + b$. Nyní hledáme konkrétní hodnotu b. Tím se z b stává neznámá, jejíž hodnota záleží na parametrech x a y. Za x a y dosadíme souřadnice daného bodu a dostaneme rovnici $5 = 3 \cdot 2 + b$ s neznámou b. V získané rovnici $y = 3x - 1$ jsou x a y opět proměnné (Vondrová, 2019, s. 118).

Důsledkem uvedeného jevu, kterým se dále zabývají i Furinghetti & Paola (1994), je jedna z častějších chyb v úvodu algebry – žáci jednotlivé role dostatečně nerozlišují, ale např. (a) zaměňují zobecněné číslo za jednotku či objekt (Küchemann, 1981) nebo (b) zaměňují zobecněné číslo za neznámou (Bardini & kol., 2005). Příklad druhého jevu je následovný. Lze si ho představit tak, že žák u řešení úlohy, jež principálně nezávisí na využití neznámé, ale zobecněného čísla, nebude výraz jen tvořit a dále upravovat (např. při svém zobecnění číselných vztahů), ale i vyčíslovat, tzn. po utvoření výrazu přejde k roli neznámé[2]. Na druhou stranu, u záměny typu (a) je to jiné. Zde chyba nastává tím, že žák jednočlen typu $5j$ (j zde např. odpovídá *počtu jahod*) neinterpretuje jako ‚pětinásobek počtu jahod odpovídající j' (tedy j jako zobecněné číslo), ale jen jako ‚5 *j*ablek' (tedy j jako jednotku). Jedná se tedy o zpředmětnění písmene. Dle klasifikace v Tab. 5 jde přesněji o situaci, kdy žák ve svém vývoji porozumění proměnné ještě nedošel do stádia, kdy písmeno může být i zástupce více hodnot (tj. stádia 5 a 6). A vnímá ho jen jako jeden objekt (viz Küchemann, 1978; Weinberg & kol., 2004).

Tab. 5: Souhrn 6 stádií porozumění rolí písmen v algebře (Küchemann, 1981)

1) Vyčíslení písmen (Letter evaluated): Žák za písmena ve výrazech dosazuje čísla, aby se jich zbavil. Jeho porozumění výrazům se tedy omezuje jen na číselné výrazy.
2) Ignorování písmen (Letter not used): Písmena jsou ignorována či nejsou uváženy jejich role. Úlohu, kde se písmena vyskytují, řeší žák pouze za pomocí zadaných čísel.
3) Písmena jako objekt (Letter used as an object): Písmenu je přisouzen význam objektu či jednotky. Podpora tohoto pohledu je rozebrána dále.
4) Písmeno jako určitá neznámá (Letter used as a specific unknown): Žák v tomto stádiu již považuje písmeno za vyjádření čísla, které je konkrétní, avšak stále neznámé. Tuto hodnotu je tudíž potřeba určit.
5) Písmeno jako zobecněné číslo (Letter used as a generalised number): Na písmeno je nahlíženo jako na model více individuálních hodnot. Žák se už nesnaží písmeno vyčíslit.
6) Písmeno jako proměnná (Letter used as a variable): Na písmeno je nahlíženo jako na abstraktní model celé množiny číselných hodnot, nikoli jen jako na zástupce jejích prvků. Oproti předchozímu stádiu se tedy liší to, že žák ztotožní s písmenem již *celou množinu hodnot,* a nejen její dílčí prvky (tzn. jde o vlastní matematický objekt).

[2] Skutečnost, že žáci provádí záměnu za neznámou má mimo neformálního využití neznámé na 1. stupni (Nováková & Vondrová, 2015; Hejný, 2014) i historický základ. Stejně jako žáci zaměňují tuto roli za zobecněné číslo (resp. za proměnnou v obecném smyslu), tak i historicky neznámá předcházela současnému pojetí proměnné, jež se zavedla až později (Ely & Adams, 2012).

Küchemann (1981) dále uvádí, že tři poslední role z Tab. 5 tvoří tři role proměnné. Jinými slovy, stejně jako Rhine & kol. (2018) zvažuje, že zatímco první tři odpovídají nedostatečnému porozumění písmen v algebře, ty zbylé jsou hlavní koncepty algebry, tzn. neznámou, zobecněným číslem a proměnnou. U tohoto se pak i zastavuje. V článku uvádí, že jednou z možných příčin záměny rolí písmen ze strany žáků je i pojetí výuky učiteli, což naznačuje i Žalská (2015). Ta společně se svými kolegy zjistila, že 243 z tázaných učitelů matematiky (93 % souboru) v jejich dotazníku i o výuce algebry věřilo v užití metody ‚jablíček a hrušek', čiže metaforu, kdy sčítat různé proměnné je přiblíženo ke sčítání jablek a hrušek. Učitelé také věřili, že pochopení součtu $2j + 3h$ může u žáků posílit to, když jim obě proměnné přiblíží jako ***j**ablka* a ***h**rušky*, což znamená jako objekty. Nicméně to nese svá rizika. Jak uvádí Nováková & Vondrová (2015), když učitel tento přístup použije, musí pro správné porozumění rolím písmen následovat jen zdůrazňování pravého významu písmen, totiž role proměnné – a to hlavně u žáků. To znamená, že písmena j *i* h nesmí být již dále čtena jako $2j$ coby *‚2 **j**ablka'*, ale jako proměnná, což je *počet jablek* a *počet hrušek*. Ze stejného důvodu je třeba dbát i na veličiny. Jak uvádí MacGregor & Stacey (2007) i jejich značení má rys toho, že zpravidla vychází ze synkopického značení (tj. užívaní zkratek jako ***o**bvod* o), což připomíná roli jednotek a může vést k záměně rolí.

> …žáci v aplikované matematice [jako je fyzika] rychle přichází na to, že se různé veličiny značí počátečními písmeny svých názvů, tj. např. A využívají pro plochu [**a**rea], m pro hmotnost [**m**ass], t pro čas [**t**ime]. Lze nicméně soudit, že právě toto značení u nich posiluje jejich mylnou představu. Užitá písmena si totiž poté nespojují přímo s množinami čísel [obory proměnné], ale spíše s názvy těchto samotných veličin a také s adresovanými předměty [v roli objektu] (MacGregor & Stacey, 2007, s. 16).

MacGregor & Stacey (2007) dále kromě tohoto upozorňují, že stejný jev může vyvolat i nevhodná rutina učitele. Příklady uvádí dva. Za prvé varují před tím, když si učitel neuvědomuje, že pro jeden význam využívá vždy stále stejných písmen, čím se stávají jeho prototypem (tj. pro určité neznámé volí vždy písmena x, y, což vede na jejich možné ztotožnění s neznámou jakožto jejím generickým modelem). A za druhé, když užívá zkratek bez důrazu na role písmen (viz Tab. 6 a dále chyby u Tab. 7).

Tab. 6: Možné intepretace jednočlenu 3a (Rhine & kol., 2018)

Jedním z problémů, který se napojuje na nepochopení konceptu proměnné, je mylné pochopení konceptu z ní vycházejících. Jedná se např. o záměny jednočlenu: (1) $3a$ v roli první položky seznamu s pořadovým číslem tři; (2) $3a$ v roli zkratky ‚tří <u>a</u>ut' či jiného počitatelného objektu začínajícího na písmeno a; (3) $3a$ v roli obsahu plochy o velikosti tři ary (zejména v psaném projevu); (4) $3a$ v roli trojnásobek proměnné a.

Tab. 7: Vybrané chyby v chápání konceptu proměnné (Booth,1986; Fujii, 1993; Weinberg & kol., 2004; Rhine & kol., 2018)

Nekonzistentní hodnota proměnné napříč jedním výrazem
Jak už vyplývá z textu výše, konceptuální porozumění proměnné je závislé na pochopení více stran tohoto konceptu. Jednak té, kdy jde o písmeno, jež je reprezentantem všech hodnot *oboru proměnné* (viz Tab. 5), a dále to, že jedna a tatáž proměnná nabývá při dosazení vždy stejné hodnoty (tj. je u ní dodržena konzistence hodnot v rámci celého zápisu). U této chyby však druhé uvědomění chybí. Žák u určení hodnoty výrazu nevnímá to, že každý zápis proměnné a musí nabýt stejné hodnoty (zřejmě v domnění, že *proměnná* značí provedení takové *změny*), a tuto hodnotu mění jako níže (Fujii, 1993). Příklad: V řešení $x + x + x = 12$ žák označí za množinu řešení i neplatnou trojici 3, 4 a 5. Důvodem je to, že za každé x dosadil po řadě čísla 3, 4 a 5, tj. dosadil: $3 + 4 + 5 = 12.$
Problém cifer
Další z chyb, jež se může objevit spíše u žáků poznávajících algebru, vzniká u písmen v *roli cifer*. Tato role nastává u dosazení. Chyba spočívá v tom, že výraz $2x$ nevnímá žák jako součin $2 \cdot x$ s proměnnou x, ale $2 \cdot 10^1 + x \cdot 10^0$, kde x stojí na pozici *jednotek dvojciferného čísla* (Rhine & kol., 2018). Příklad: Při dosazení čísla 3 do výrazu $2x$ je řešením i 23, zatímco pro opačné $x2$ je to 32. Chyba je tedy podobná řešení algebrogramů. V těch, např. v *Hejného matematice,* kde jsou hojně využívány, řeší žáci kombinatorické úlohy typu $AA = 30 + A$, kde písmena nemají roli proměnné, ale čísel na pozici cifer. To znamená, že řešení vyznačené úlohy není řešení kvadratické rovnice, ale rovnost $33 = 30 + 3$.

Záměna multiplikativního operátoru za aditivní (viz oddíl 2.6)

Potřeba žáka *vypočítat* každý algebraický výraz určením hodnoty proměnných může být důsledkem jeho neporozumění různých rolí proměnné, která se projeví i u intepretace jednočlenu. Tato chyba je právě tento případ. Nastává tak, že žák vlivem neporozumění proměnné (viz Tab. 5) nahradí multiplikativní operátor u jejího koeficientu za aditivní a celý výraz upraví buď (1) sečtením proměnných, jež sečíst nelze, nebo (2) sečtením proměnných a čísel. Příklad je níže.

Příklad: Žák v rámci zjednodušení výrazu $5(2+x)$ provede jeho neekvivalentní úpravu $5(2+x) = 5 \cdot 2x = 10x$, či opačně pro zadání $5 \cdot 2x$ napíše $5 \cdot 2x = 5(2+x)$. Důvodem je zkušenost žáka. Podle (Booth,1986; Rhine & kol., 2018) je na vině to, že si žák v aritmetice až příliš zobecňuje dříve poznané případy lineárního řazení znaků, jako např. u $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ nebo i $23 = 20 + 3$.

Proměnná nemůže nabývat hodnoty složeného výrazu

Provádění substituce za složený výraz, jako je $x = y + 3$, vyžaduje od žáka porozumění více konceptům najednou. Zaprvé vyžaduje to, že dojde na porozumění výrazu $y + 3$ jako objektu, který není třeba upravovat, a dále že dojde na konceptuální porozumění rovnosti, kdy se jednočlen může rovnat i dvojčlenu. Tato úvaha ovšem není triviální. Studie jako (Weinberg & kol., 2004) již déle dokazují, že ač žáci 11–13 let zvládnou s relativně vysokou úspěšností nahradit proměnnou za libovolné číslo (56 % žáků 6. ročníku, 77 % žáků 7. ročníku, 87 % žáků 8. ročníku), potíží je substituce za složené výrazy (26 % žáků 6. ročníku, 30 % žáků 7. ročníku a 40 % žáků 8. ročníku). Příkladem je níže citovaný žák. Pro úlohu spočívající v uvážení případu $n = 4$, kdy číslo 4 bylo dané, prvně uvedl, že dosazení tohoto čísla za n možné je, protože písmena mohou vyjadřovat *libovolná čísla;* nicméně u $n = 3r + 2$ totéž říct nedokázal. Podle jeho odpovědi se spíše zdálo, že členy u $3r + 2$ vnímal odděleně. Součet členů nejspíše nebyl objektem, ale jen instrukcí výraz zjednodušit, což vedlo na následující otázku.

Otázka (parafráze): Pokud nám říkáš, že lze dosadit $n = 42$ a zároveň $n = 42 = 15 + 27$, lze také říci, že můžeme dosadit i $n = 3r + 2$, bude-li $r = 5$?

> Myslím, že ano. I když… asi ne. Proměnné představují vždy jen jedno číslo, jednu hodnotu, a lze tedy mít n a nějaké jiné písmeno či proměnnou, kdy n bude třeba 15 a ta jiná proměnná 27. Ale nejde, aby [pro n] současně platilo $n = 15 + 27$ (Weinberg & kol., 2004, s. 7).

2.2 Síly jazyka algebry

Hejný (2014) uvádí, že pokud má žák plně porozumět konceptu proměnné, je důležité, aby věděl, jaký má jazyk písmen oproti číslům výhody – resp. vlastnosti. Tyto vlastnosti zve jako *síly jazyka algebry* (viz dále) a uvádí je jako spojení Tab. 8 a Tab. 9.

Tab. 8: Základní síly jazyka algebry – skupina označena podle autora (Hejný, 2014)

Kódovací síla. Síla zahrnující jakékoli využití *kódů* (tj. písmen a jiných symbolů), jež jsou v zadání úlohy. Podle autora zahrnuje její využití například rozpoznání kódů v textu či u obrázků zadání, jejich zaznamenání do legendy a případné dosazení za ně.

Uchopovací síla. Tato síla dále dovoluje využití písmen k označení vybrané části zadání, která nebyla kódem (tzn. žák analyzuje zadání a poté označuje pro něj důležité části). Při řešení úloh jde tedy i o rozlišení toho, jaké jsou známé a neznámé veličiny.

Vyjadřovací síla. Síla dovolující expresi vztahů vzešlých z předchozích sil jazyka algebry. To znamená, že pokud je v zadání rovnou řečeno (či si žák uchopovací silou sám označí), že ‚váha jednoho jablka' je x, pak lze z tohoto dále odvodit i *váhu poloviny jablka* $\frac{x}{2}$ či *váhu čtvrtiny jablka* $\frac{x}{4}$.

Transformační síla. Pro vyjádření vztahů dovoluje transformační síla dále měnit tvar těchto předchozího vyjádření. Podle Hejného spolu se zobecněným číslem jako rolí písmen dovoluje využít jazyka písmen i k převodu algebraického modelu do více výhodného tvaru (ekvivalentní úpravy).

Tab. 9: Rozšiřující síly jazyka algebry – neformální označení skupiny (Hejný, 2014)

Argumentační síla. Kombinace všech základních sil za účelem zdůvodnění určitého tvrzení. Jedná se zpravidla o postup:

1. užití uchopovací síly k prvotnímu označení všech hledaných a známých objektů;
2. užití vyjadřovací síly k popisu zadaných vztahů mezi známými a neznámými veličinami;
3. užití transformační síly k úpravě vzniklých či zadaných modelů do vhodného tvaru. Vhodný tvar je přitom ten, jež doloží platnost či neplatnost zkoumaného výroku.

Objevitelská síla. Poté, co žák využije argumentační síly, dochází k odhalení nového tvrzení – ať už pravdy, či nepravdy. Jedná se zpravidla o poznání založené na kombinaci více pravd – např. tvrzení již dříve dokázaných (matematických vět a lemmat) a tvrzení implicitně přijímaných (definic a axiomů). Jejich spojení zajišťuje matematická logika.

Návrh sil Hejného (2014) je dále možné vztáhnout k pracím Kvasze (2008, 2012), z nichž Hejný vychází. Autor prvně identifikoval různé vývojové stupně jazyka matematiky, jež jsou u dvou příkladů uvedené níže, a následně porovnal jejich potenciality u 4 a dále 6 sil jazyka matematiky (viz Tab. 10). Tyto potenciality založil na měnících se funkcích jazyků, které se v matematice objevily po sobě.

- <u>Jazyka elementární aritmetiky</u>: jazyk čísel, závorek a symbolů aritmetických operací;
- <u>Jazyka syntetické geometrie</u>: jazyk geometrických obrazců a geometrických těles.

Zde uvedený jazyk syntetické geometrie je autorem nejvíce srovnáván vůči jazyku algebry.

Tab. 10: Síly jazyka algebry (Kvasz, 2013; 2012; 2008)[3]

Logická síla. Síla „ukazující, jak složité vzorce lze v jazyce dokázat". Pro jazyk algebry je to využití proměnné jako obecného objektu. Díky jejímu zavedení šlo totiž nově dokazovat platnost modálních predikátů i bez jazyka geometrie, např. u formální manipulace symbolů, zkratek či slov při důkazu lichosti dvou po sobě jdoucích čísel (Kvasz, 2008):

$$\forall n \in \mathbb{N}: n + (n + 1) = 2n + 1 \neq 2n.$$

Expresivní síla. Síla, která v teorii autora „ukazuje, co nového, co v předchozích stádiích vyjádřit nešlo, nynější jazyk již vyjádřit umožňuje" – u jazyka algebry je to nezávislost všech mocnin na jejich geometrické interpretaci. Usuzováno je tím to, že zatímco syntetickou geometrii ještě limitovalo v jazyku to, že jednoznačnou geometrickou intepretaci (a tedy i vyjádření) v ní mají jen první 3 mocniny (tj. délka úsečky, obsah čtverce a objem krychle), v algebře jsou tyto intepretace přítomné i pro všechny vyšší mocniny. Chápáno je tím to, že všechny jako a^4, a^5 lze zásluhou R. Descarta (1596–1650) chápat i jako *délky úseček,* tj. skrze reinterpretaci součinu analytické geometrie (Kvasz, 2008).

Metodická síla: Síla „prezentující, jaké nové metody je možné v jazyce zavést v oblasti, kde na předchozích stádiích existovala jen směsice nesouvisejících triků". Pro algebru je to notace veličin F. Vièta (1540–1603). Jeho přístup spočíval v tom, že jazykově odlišil veličiny známé a neznámé, přesněji neznámé značil velkými samohláskami (A, E, I, O, U …) a známé (parametry) velkými souhláskami (B, C, D, F, G …) (Kvasz, 2008).

Integrativní síla: Síla „ukazující, jak [nový] jazyk umožňuje vidět jednotu a řád tam, kde se dříve ukazovaly jen spolu nesouvisející případy." V algebře je to nový pohled na záporná čísla. Původcem je M. Stifel (1487–1567), který jako první interpretoval tato čísla i s pravidly aritmetiky ve formě čísel menších než nula (přesněji: $0 - z$, $z \in \mathbb{N}$), což měnilo obor parametrů. Spolu s prací Vièta to vedlo např. na to, že místo více ‚obecných' tvarů rovnic pro různé kombinace členů lze sestavit jen jeden obecný tvar (Kvasz, 2008)

[3] Všechny definice sil jsou přebrány z článku (Kvasz, 2013, s. 316).

Explanatoristická síla. Síla, jež je spojena s vysvětlením selhávajících metod jiného jazyka. Přesněji je svázána s tím, že „ukazuje to, jak nový jazyk umí osvětlit dříve nepochopitelná selhání jazyka," jako např. u řešení starořeckých úloh. Dle Kvasze (2008, 2012) je právě to příklad u jazyka algebry. Důvodem je to, že tyto původně geometrické úlohy (jako např. duplicita krychle) nejsou v geometrii euklidovsky řešitelné, jelikož algebraicky vedou na kubické rovnice, jež jsou ireducibilní a mají eukleidovsky nekonstruovatelné kořeny.

Konstitutivní síla. Tato síla je stejně jako síla *metodická* oproti ostatním silám představena až v (Kvasz, 2012). Autor tedy koncepci přehodnotil. Uvádí, že konstitutivní síla „ukazuje, jak nový jazyk dovede překročit meze skutečnosti vytyčené u předchozího jazyka a dále jak dovede konstituovat radikálně nový druh objektů". V algebře jsou těmito novými objekty deskriptivní predikáty. Jmenovitě jde o užití neznámých a parametrů (tj. různých rolí proměnné) a také operací umocňování i odmocňování, jež pomohly u řešení rovnic.

Jak dokládají Tab. 8, Tab. 9, Tab. 10, názory na síly jazyka algebry se mohou výrazně lišit. Zatímco Kvasz vychází z historie matematiky, kdy rozebírá, jaký dopad měly změny na vývoj matematiky různé formy jejího jazyka, Hejného pohled odpovídá více perspektivě pedagogicko-didaktické, kdy odráží školní výuku (Tab. 11). V jeho případě je tedy zásadní poznávací proces. Jednotlivé síly uvažuje u algebry oproti Kvaszovi více v abstrakci z pohledu žáků, a tedy základní síly uvažuje např. jako ty, jež žák může poznat i na 1. stupni.

Tab. 11: Příklad praktického využití sil jazyka algebry dle Hejného (2014); (vlastní)

Úloha: Pavel a Jan dali dohromady úspory a jejich kamarád nyní zkoumá, kolik každý přispěl. Ví, že společně mají oba chlapci 300 Kč a že Jan dal to úspor dvojnásobek toho, co přidal Pavel. Neví ovšem, kolik přidal Pavel. Zjistěte, kolik korun to je.

Uchopovací síla

⇨ Peníze obou chlapců se nejprve značí různými písmeny. Těmito písmeny může být např.

peníze Pavla… x , peníze Jana … y .

Vyjadřovací síla

⇨ Z podmínek zadání se dále sestaví všechny potřebné vztahy neboli rovnice. Zde tedy

$$x + y = 300\ , \qquad y = \frac{x}{2}.$$

Transformační síla

⇨ Sestavené rovnice se nakonec upraví do vhodného tvaru. Touto úpravou může být např: sled ekvivalencí

$$x + \frac{x}{2} = 300 \Leftrightarrow 2x + x = 600 \Leftrightarrow 3x = 600 \Leftrightarrow x = 200\ [\text{kč}].$$

2.3 Algebraické uvažování

Výše ilustrované pochopení sil jazyka algebry a roli písmen, je ve výuce dále doprovázeno o způsob myšlení, které je označováno jako algebraické. Toto myšlení má více komponent. Například Kaput (2008) identifikuje, že jsou celkem 2: (a) provádění stále sofistikovanějších forem zobecnění v kontextu použitého jazyka matematiky a (b) manipulaci s jeho výstupy. Na druhé straně Usiskin (1988) rozlišuje čtyři. Tyto složky dělí z pohledu výuky na:

- Algebra as generalized arithmetic: proces pojetí algebry s důrazem na zobecňování. Hlavní rolí zde autor přisuzuje roli zobecněného číslo a za hlavní činností s písmeny považuje odvozování nových tvrzení z číselných modelů.
- Algebra as a Study of Procedures for Solving Certain Kinds of Problems: pojetí algebry s důrazem na hledání odpovědí. Hlavní rolí se zde podle autora stává určitá neznámá a hlavní činností je nalézání odpovědí na otázky.
- Algebra as the Study of Relationships among Quantities: zaměření výuky na studium, veličin na bázi korelace i kauzality. Hlavní rolí je podle autora tedy závislá a nezávislá proměnná (neboli i role veličiny) a hlavní činností je hledání a vyjádření vztahů.
- Algebra as the Study of Structures: nasměrování výuky posledním směrem je mířeno k analýze abstraktních matematických objektů. Těchto objektů je více. Může se jednat například o *koncept mnohočlenu*, který je zaváděn jako 1 model *součtu příslušného počtu jednočlenů* či koncept *algebraických rovnic* místo rovnosti dvou algebraických výrazů.

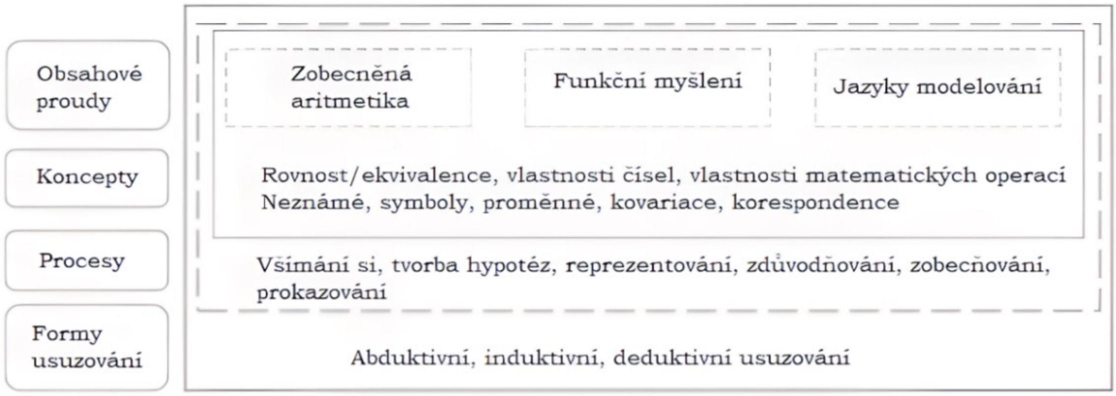
Shodně s tímto členěním uvádějí analogické závěry i další autoři. Z českých lze upozornit např. na práci Novákové & Vondrové (2015), kde autorky rozlišují ‚3 pilíře algebry' jakožto tři pilíře podpory algebraického uvažování (viz Tab. 12). Zatímco ze zahraničí lze zmínit diskutovanou práci (Chimoni & kol., 2018).

Tab. 12: Tři pilíře algebry (Nováková & Vondrová, 2015)

1. Pilíř (Aritmetika):	číselné výrazy a jejich vlastní aritmetika, tj. úprava výrazů
2. Pilíř (Geometrie):	korespondence jazyka písmen a vzorců pro výpočet míry v geometrii.
3. Pilíř (Zobecnění):	úlohy se zaměřením na zobecnění s vazbou na funkce, posloupnosti a řady (zkráceně *pravidelnosti určitých entit*)

Chimoni & kol. (2018) se liší tím, že představují algebraické uvažování jako schéma 4 dimenzí. Toto schéma znázorňuje Obr. 2. První jeho dimenzi, *obsahový proud*, chápou autoři podobně jako složky u (Usiskin, 1988). Jedná se o tedy označení více činností podporujících porozumění žáka v algebře (zobecnění, studium vztahů a vytváření výrazů[4]), kdy příkladem prvního je strukturální uvažování[5].

Druhou dimenzí následně zvou *koncepty* a chápou ji jako zásadní pojmy. Obr. 2 přibližuje, že nejde jen o algebraické koncepty, ale i aritmetické. Konkrétně jde i o změnu chápání notace pro operace a rovnosti, jež dovolují úpravy výrazů a rovnic (viz oddíl 2.6).



Obr. 2: Dimenze algebraického uvažování (Chimoni & kol., 2018, s. 61 překlad dle Vondrová, 2019, s. 120)

Poslední 2 dimenze jsou propojené. *Procesy* jsou podle autorů obecnější postupy, jež mají základ v revidované *Bloomově taxonomii kognitivních procesů* (viz slovesa jako *všímání si a zdůvodňování)*, kdežto *formy usuzování* jsou způsoby odvození závěrů. Tyto formy jsou celkem tři. Zaprvé jde o usuzování *induktivní* (to spočívá v dosažení obecnému závěru na základě generalizace více konkrétních případů). Dále jde o *dedukci* (tj. vyjití z obecného případu či jejich kombinace, jako u výpočtu obsahu jednoho konkrétního čtverce pomocí vzorce $S = a^2$ či v situaci, kdy se obecný tvar *Pythagorovy věty* zužitkuje k odvození obecné délky úhlopříčky čtverce). A poslední forma je *abdukce*. Ta, jak uvádí Rivera & Becker (2007), slouží při plánování postupů. Laicky řečeno, jde o úsudek, kdy žák vyvozuje závěry ještě tehdy, když nemá všechny údaje neboli v Tab. 13, Tab. 14 jde o práci s odhadem u *strategické manipulace a globální meta-úrovňové aktivity*.

[4] Podporu těchto činností lze vidět dále i u (Kieran,1998; Hejný, 1989) v rámci Tab. 13, Tab. 14.

[5] Toto uvažování vyčlenili ve své starší práci i Linchevski & Livneh (1999). Znamená, že žák využívá strukturu zápisu, aby došel k novému závěru. Příkladem je $1 + 1 - 1$, $2 - 1 = 1$, …, kde neřeší vše zvlášť, ale po úvaze výrazů sestaví abstraktní model $1 + a - a = 1$ či generický model $1 + ? - ? = 1$.

Tab. 13: *Základní algebraické činnosti* pro rozvoj algebraického uvažování (Kieran, 1998)

Aktivity o zobecňování (Generational activities)
Úlohy zaměřené na zobecnění geometrických, figurálních či číselných pravidelností.
Aktivity o transformaci (Transformational activites)
Úlohy zaměřené na změnu tvaru algebraického modelu (tj. úpravy rovnic a výrazů). Tyto a předchozí aktivity odpovídají pojetí algebraického uvažování u (Kaput, 2008)
Globální meta-úrovňové aktivity (Global meta-level activites)
Úlohy založené na vlastní tvorbě postupu, ne provedení algoritmu. Základem je, že žák analyzuje danou situaci a syntetizuje v ní dosud známé postupy do nového postupu.

Tab. 14: Hladiny práce s algebraickými výrazy, jež zvyšují jejich porozumění (Hejný, 1989)

Hladina modelace
Za hladinu modelace označuje Hejný jakýkoli přechod mezi alespoň 2 systémy jazyka. Jedná se např. o: • *matematizaci* (výstupem modelace je libovolný matematický model); • *algebraizaci* (výstupem modelace je libovolný algebraický model) • *geometrizaci* (výsledkem modelace je libovolný geometrický model). Příklad: Zápis, že $\boldsymbol{A}$ je liché číslo, ve tvaru $\boldsymbol{A = 2k + 1}$, kde $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$.
Standardní manipulace
Podobně jako Kieran (1998) i Hejný nazývá standardní manipulaci podmínkou osvojení vyššího matematického vzdělání. Jedná se zpravidla o algoritmy, jež má žák obvykle zautomatizované a jež již pozbyly významu strategické manipulace. Příklad: Rozložte na součin dvojčlen: $\boldsymbol{x^2 - y^2}$; roznásobte: $\boldsymbol{(x + 1) \cdot (x - 1)}$
Strategická manipulace
Proces řešení aktivit, jež Kieran (1998) zve globální meta-úrovňové, nese u Hejného název strategická manipulace. Jedná se o hladinu práce, kdy žák výrazy nevyužívá jen v rámci naučených postupů, ale tyto postupy si sám vymýšlí na základě starších znalostí. Příklad: Dokažte, že každý součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný $\boldsymbol{3}$. 1. užití pravidel o sčítání mnohočlenů: $\boldsymbol{n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3}$. 2. užití pravidel o vytýkání z výrazu: $\boldsymbol{3n + 3 = 3 \cdot (n + 1)}$. 3. užití definice být *násobkem/dělitelem*, a definice *ekvivalentních výrazů*: $\boldsymbol{n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3}$

2.3.1 Algebraické uvažování v RVP ZV

Algebraické uvažování, znázorněné na Obr. 2 jako spojení obsahových proudů: modelace zobecněné aritmetiky a funkčního myšlení, je v přímé výuce podporováno v propedeutice. Ukázku některých takto podnětných doporučení tvoří například:

- Zařadit i před úvodem do algebry zobecňující úlohy využívající číselných pravidelností a závislostí (tj. i posloupnosti). Důvodem je to, že tyto úlohy budují u žáků funkční myšlení ve vztahu k číslům a také porozumění číselným oborům (Lee & kol., 2018, Mason, 2017);
- Začlenit do výuky matematiky i zkoumání nečíselných pravidelností (tj. figurálních), jež dovolují využití představivosti. Výhodné je i to, zařadit k tomu práci s fyzickými modely (Carraher & kol., 2008; Warren, 2005);
- Integrovat do výuky matematiky jiné způsoby zobecnění. Tyto formy mohou zahrnovat indukce, dedukce apod., jakož i to, kdy žák k závěru dojde prostřednictvím softwaru. (Papic & kol., 2011; Peirce & Radford, 2006)

Z hlediska kurikulárních dokumentů, které doručení výše respektují, dochází na podporu algebraického uvažování i na úrovni rámcového vzdělávacího programu (RVP ZV). Tento dokument, z nějž podle (MŠMT, 2021) vychází české základní školy a víceletá gymnázia při navrhování svých školních vzdělávacích plánů, přibližuje u vzdělávací oblastí *Matematika a její aplikace* trojí aplikace zobecněné aritmetiky – jmenovitě: (1) rozvoj algebraického uvažování při *zkoumání* obecnosti (v kontextu Obr. 2 tedy procesy ‚Všímání si' a ‚Tvorbu hypotéz'); (2) rozvíjení algebraického uvažování v rámci *vyjádření* nalezené obecnosti (ne nutně ale algebraickou cestou); a vysvětlení obecnosti v souvislosti s aktuálními poznatky žáka.

Po stránce složek algebraického uvažování, které představují dílčí obsahové proudy, jsou dále důležité i dílčí okruhy vzdělávací oblasti. Pro 2. stupeň jsou to*: (i) Číslo a proměnná*; (*ii) Závislosti, vztahy a práce s daty*; *(iii) Geometrie v rovině a v prostoru*; a *(iv) Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, kdy samotné formalizování proměnné náleží do prvního z nich – tedy okruhu *Číslo a proměnná*.

Tento okruh (navazující na starší okruh *Čísla a početní operace* z 1. stupně) pokračuje v rozvoji znalostí aritmetiky i na 2. stupni, a to s rozšířením o užití písmen. Zdůrazněna je:

- dovednost žáků provést správně algoritmus všech aritmetických operacích;
- porozumění žáků, proč jsou číselné operace prováděny určitým postupem;
- dovednost žáka propojit každou z těchto operací s jistou reálnou situací.

Podporu funkčního myšlení, zajišťuje následně okruh *Závislosti, vztahy a práce s daty*. Nad rámec vzorců, které žák poznává, když se učí početně určovat míru v geometrii pomocí písmen (obsah, obvod, …), jsou pro algebraické uvažování významné i tři další koncepty (Ely, Adams, 2012):

- přímá a nepřímá úměrnost, jež je pro žáka formální úvod do konceptu funkce;
- vyjádření oboru proměnné více způsoby (výčtem, tabulkou, grafem atd.);
- explicitně stanovené role písmen v podobě závisle a nezávisle proměnné.

Modelace, ať už chápána jako tvorba či změna matematického modelu na jiný, je dále rozvíjena s očekávaným výstupem [M-9-2-05]. V něm stojí, že žák na konci povinné školní docházky úspěšně matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů (ne však ale nezbytně jen s písmeny), přičemž to, s jakým modelem je algebraizuje, udávají výstupy [M-9-1-07 až 09].

V nich je postupně upřesněno, že žák zvládne tři typy algebraizace: zaprvé, jednoduchou reálnou situaci reprezentuje soustavou 2 lineárních rovnic o dvou neznámých (nejsložitější případ), zadruhé reálnou situaci znázorní pomocí lineárních rovnic či pomocí výrazů.

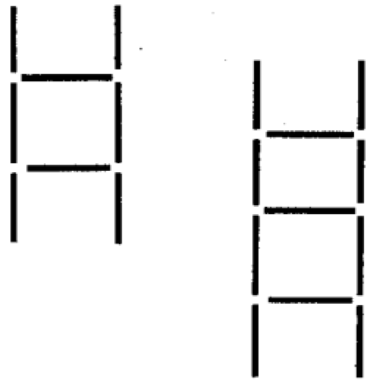
V návaznosti na to, jaký model je uveden poslední, je dále ve výstupech [M-9-1-07 až 08] popsána jejich očekává úprava. Píše se zde, že (1) žák 9. ročníku dovede určit hodnotu výrazu při dosazení za v něm užité proměnné; (2) dokáže sečíst, odečíst nebo vynásobit mnohočleny různé délky (ne nutně tedy dělit); a konečně (3) převést algebraický výraz na součin více výrazů, a to pomocí vzorců i vhodného vytýkání.

Pro propojení algebry a geometrie (2. pilíř v Tab. 12) jsou v okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* důležité výstupy [M-9-3-10], [M-9-3-04]. V nich stojí, že žák koncem povinné školní docházky určí výpočtem geometrické míry prostorových těles a rovinných útvarů pomocí vzorců i jiných postupů a také, že zjistí jejich metrické a polohové vlastnosti s užitím vhodné symboliky. Tato symbolika může zahrnout tudíž i jazyk písmen.

Strategická manipulace, zmíněná Hejným, nachází nakonec největší uplatnění u okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy.* Jak už název napovídá, i na 1. stupni se v tomto okruhu nabízí využití propedeutiky vybraných konceptů, např.: výstup [M-5-4-01]: žák modeluje jednodušší slovní úlohy (propedeutika pro proměnnou či rovnice), [M-5-4-01]: žák popisuje obecná pravidla pro číselné či figurální pravidelnosti (propedeutika zobecnění); anebo [M-5-4-01]: žák řeší úlohy jako magické čtverce a součtové trojúhelníky (propedeutika proměnné). Na úrovni 2. stupně se tato činnost prohlubuje. Očekávaný výstup [M-9-4-01] zahrnuje i kombinační úsudek a logiku (viz algebrogramy); kdežto v [M-9-4-02] je využití analogie i číselné a obrázkové reprezentace – tedy analogie modelů.

2.4 Zobecnění

Zobecňující úlohy, které dále vymezuje Kieran (1998) jako jeden z pilířů, které pomáhají rozvoji algebraického uvažování, tvoří princip *Teorie generických modelů*. Jak vyplývá z popisu této teorie z kap. 1, když žák operuje s více izolovanými modely, které se týkají jednoho konceptu, jeho sklonem je tyto modely uchopit generickým modelem neboli je zobecnit. Tento postup se opakuje i u úloh. Pokud žák např. u pravidelností rozezná, že se všechny sousední členy posloupnosti liší vždy o stejné číslo či násobek, je pro něj běžné takový vztah jakkoli popsat (ať už slovně, figurálně či symbolicky dle jeho úrovně) a tuto vlastnost zobecnit. Nicméně, zda se mu to podaří závisí i na volbě vztahu. Podle (English & Warren, 1998) je totiž část vztahů náročnější. I lineární vztahy, jež bývají na základní škole prosazované jako vhodné (viz RVP ZV), čítají jisté pravidelnosti, jež jsou pro žáky náročnější – a to nejen na úrovni číselných a figurálních entit, ale i na úrovni vyjádření pravidla. Příkladem jsou obecné lineární vztahy: $a_n = ax + b$; kde je $a, b \neq 0$. Tanişli (2011) u tohoto typu totiž upozorňuje, že žáci vychází z prototypu. Při zobecnění podobných pravidel často zkouší uplatnit specifické generické modely z minulosti (tj. formulují pravidlo jako přímou úměrnost bez b či jako rostoucí pravidelnost[6]), čímž dochází k chybě. Problém navíc tvoří i zkouška. Bourke & Stacey (1988) dokumentovali, že ne všichni žáci bývají zvyklí objevené vztahy ověřit, což ověřila i Stacey (1989) pro 140 žáků ve věku 9–13 let. Tato studie přinesla totiž zjištění, že žáci zobecňovali pravidelnost z Obr. 3 hlavně jako přímou úměrnost. Když autorka zadala, aby žáci zapsali vyjádření tohoto pravidla pro $n$tý člen (tj. aby zapsali pravidlo obecně), místo očekávaného: $a_n = ax + b$; $a, b \neq 0$ využili 2 chybných postupů, jmenovitě: *postupu diference* (tzv. difference method) a *postupu celků* (whole-object method).



Obr. 3: Žáci určovali počet příček v závislosti na pořadovém číslu žebříku (Stacey, 1989, s. 148)

[6] Tzv. Iluze linearity (De Bock & kol., 2007)

Metoda diference byla ve výzkumu popsána jako častější a založená na diferenci aritmetické posloupnosti. Její využití spočívalo v tom, že žák u vyjádření pravidla neuvažoval členy a_1 a b jako nutné k nálezu pravidla, ale vystačil si s tím, že násobil jen zjištěnou diferenci d pořadím hledaného členu, tj. místo $a_{100} = a_1 + 99d$ uvedl u přímé úměrnosti pouze $a_{100} = 100 \cdot d$. Metoda celků měla pak podobný princip. Součin členů a_m, a_n, jež žák znal ze zadání, nevyužil při vyjádření členu $a_{m \cdot n}$, jako výše v napojení přesné pořadí, ale jen v napojení na jeho rozklad, tj. $a_{m \cdot n} = m \cdot a_n$ (Stacey, 1989).

Co se týká vyjádření pravidel, další tendence provází žáky, i pokud volí jiný postup. Jinak řečeno, podobné nemusí být u žáků jen to, jak k pravidlu dochází (tj. jakou strategii volí), ale i to, v jaké formě jej zapíší, tedy vyjádří. Doložil to např. Lannin (2005) ve své studii 25 žáků ze 6. ročníku. V této studii totiž pozoroval, že žáci u zobecnění i při odlišném postupu volili jeden tvar zápisu: místo víc proměnných použijí jen jednu. Znamenalo to tedy, že se žáci více vyhýbají vyjadřovací síle jazyka algebry, což zjistili dříve i Trigueros & Ursini (1999). Jmenovitě, žáci více tíhli k tomu, aby uváděli rekurentní, potažmo explicitní zápis pravidla v jedné proměnné (tzn. vyhýbali se funkčním vztahům, jež často vynucují i použití více písmen) a využívali jen jednodušší formy vyjádření – tedy pomocí slov. Toto pozorovala i Stacey (1989). Ta v rámci dobového výzkumu a dále v (MacGregor & Stacey, 1995) ověřila, že nejčastější typ exprese vztahů je s pomocí jedné proměnné. Při zkoumání výsledků u zobecnění lineárního pravidla takto konkrétně zjistila, že funkční myšlení žáků nebylo jako u (Trigueros & Ursini, 1999) tak rozvinuté jako jiné složky algebraického uvažování a také že si žáci nebyli tolik jisti, jak využít vyjadřovací síly jazyka algebry (Tab. 15).

Tab. 15: Zobecňování žáků – počet využívaných písmen (vlastní)

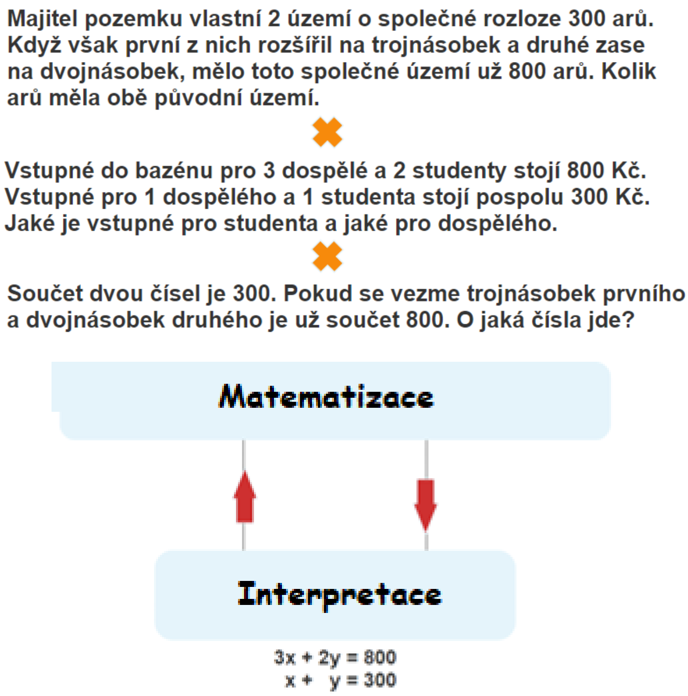
Příkladem toho, kdy žák tíhne k tomu, aby použil při zobecnění jen jedno písmeno místo více, je řešení následující úlohy. V té je cílem žáka dojít k obecnému pravidlu $b = n + 4$, nicméně ne nutně v tomto tvaru. Pravidlo může být vyjádřeno i procesuálně generickým modelem jako: ‚Každý člen 2. řádku bude vždy o 4 větší než odpovídající číslo 1. řádku', popř. konceptuálně generickým modelem $n + 4$ jen za pomocí jedné proměnné.

Zadání: *V tabulce platí, že čísla 2. řádku vznikají z čísel prvního pomocí téhož pravidla. Zapište toto pravidlo pro číslo* n *do sloupce pod ním.*

a	1	2	3	4	...	n
b	5	6	7	8	...	?

2.5 Hladina modelace

Hladina modelace, představená v Tab. 14 jako procedura vytváření nových matematických modelů, je Hejným (1989) považována za vůbec nejvýznamnější hladinu práce s výrazy. Podle jeho názoru, i názoru Vondrové (2019), která jej s ním sdílí, se jedná se o hladinu práce výrazy dvou typů. Zaprvé, jde o již řečenou *matematizaci*, tj. vytvoření specifického matematického modelu pro vyjádření v jiném jazyce (viz Tab. 14), a zadruhé *interpretaci* takového matematického modelu. Jak již název napovídá, jde o procesy k sobě opačné. Intepretace, na rozdíl od matematizace, je proces, který se uplatňuje při vymýšlení zadání úloh či interpretaci jejich řešení, jelikož žák původně matematicky vyjádřenou informaci převede zpět do jazyka slov, a to v opačném sledu než u matematizace výše (viz Obr. 4).



Obr. 4: Matematizace a interpretace (vlastní)

Opačný charakter obou procesů je patrný i u vlastností toho, jak pracují s jednoznačností modelů a změně kontextu. Vysvětlení je následovné. Zatímco u matematizace (dále jen modelace slovního sdělení do jazyka matematiky) lze provedený proces považovat za spíše jednoznačný a kontext redukující (tzn. ztrácí se část původní informace, ale vzniklý model bude vždy až na vybraná písmena a pořadí stejný), intepretace je opačná. Její provedení má příznak toho, že vzniklý model není již zcela jednoznačný vůči zadání (viz model soustavy výše pro tři různé situace), a tedy kontext roste a dovoluje interpretovat jeden model jako cenu vstupného, plochu pozemku či dokonce i číselné vztahy (takový kontext se pak obvykle nazývá jako *jazykový*) (Vondrová & kol. 2015).

Dalších rozdílů si lze všimnout i v četnosti použití. Vzhledem k tomu, že matematizace bývá při výuce procesem, jenž je žáky využíván i více než *jednou* při řešení úloh, kdežto interpretace spíše jen jednou, nebývá intepretace tolik zkoušena, a proto u ní žáci mohou častěji chybovat (Novotná, 2014). Nicméně, chyby provázejí i matematizaci (Rendl & Vondrová, 2014). Vondrová (2020) např. uvádí, že matematizace slovních úloh[7] bývá náročná i tím, že není jednokroková, ale má často více fází, a to ve spojení s terminologií De Lange (1987):

1. *Tvoření situačního modelu* – opakované čtení a zadání pro vytvoření představy;
2. *Horizontální matematizace* – převedení situačního modelu na matematický;
3. *Vertikální matematizace* – transformace matematického modelu do jiných tvarů;
4. *Interpretace řešení* – výklad matematického řešení v kontextu slovního zadání.

Praktické využití všech těchto kroků demonstruje dále Tab. 16.

Tab. 16: Příklad provedení matematizace (PISA, 2003, s. 7–8)

[Zadání příkladu]
Městská rada se rozhodla, že v trojúhelníkovém parčíku postaví lampu veřejného osvětlení tak, aby osvětlovala celý park. Kde by měla lampa stát?
[Fáze 1]: Začneme od problému situovaného do reality.
Určit místo v parku, kde má stát lampa.
[Fáze 2]: Vyjádříme jej pomocí matematických pojmů.
Park lze vidět jako trojúhelník a osvětlenou plochu jako kruh se středem v lampě.
[Fáze 2]: Postupně vyloučíme z problému reálné prvky tak, že formulujeme předpoklady o podstatných prvcích problému, zobecňujeme a formalizujeme. Tím zvýrazníme matematickou podstatu situace a převedeme reálný problém na problém matematický, který věrně reprezentuje danou situaci.
Problém je převeden na určení středu kružnice opsané trojúhelníku
[Krok 3]: Řešíme matematický problém.
Využijeme znalosti, že střed kružnice opsané trojúhelníku leží v průsečíku os souměrnosti stran trojúhelníku, a sestrojíme osy souměrnosti dvou stran trojúhelníku. Jejich průsečík je středem kružnice.

[7] Matematizace jako přístup k řešení úloh je tradičně uplatňována právě u slovních úloh neboli úloh, kde se mimo slovní formy zadání pracuje i s (pseudo)reálným kontextem. Vondrová (2020, s. 67) ve svém komentáři k řešení slovních úloh např. uvádí, že se řešení odehrává v krocích z Tab. 16, kdy uváděným krokem navíc, je zde pouze finální realizace sémantické zkoušky (tj. ověření smysluplnosti řešení vůči podmínkám zadání). Podobně jako Ferri (2007) pak navíc Vondrová (2020, s. 67) dodává, že matematizace, resp. při řešení slovních úloh, není vždy proces lineární, ale může čítat i jisté cykly. V některých případech lze však jisté kroky přeskakovat, jak autorka také uvádí.

[Krok 4]: Matematické řešení převedeme zpět do jazyka reálné situace.

Vztáhneme toto zjištění na reálný park a posoudíme smysluplnost výsledku. Například kdyby byl v jednom ze tří rohů parku tupý úhel, řešení nebude vyhovovat, protože lampa by se nacházela vně parku. Praktická využitelnost matematického řešení může být též ovlivněna umístěním a velikostí stromů.

Jupri & Drijvers (2016) dále popisují, jaké chyby mohou v matematizaci nastat při odlišné volbě kontextu. Ve svém testování 51 žáků ve věku 12–13 let využili 2 digitálních appletů zmíněných dále, aby ověřili porozumění algebraizace a úpravy modelů pro dva typy úloh: (1) úloh, v nichž byly modelované situace spojené jen s reálným, resp. (pseudo)reálným kontextem (viz applet Cover-up Strategy, Tab. 17), a (2) úlohy, které byly spojené převážně s jazykovým kontextem (viz applet Algebra Arrow, Tab. 17).

Tab. 17: Příklady algebraizace s variací kontextu (Jupri & Drijvers, 2016, s. 2488–2489)

Příklad úlohy: applet Algebra Arrow (Jupri & Drijvers, 2016, s. 2488)

Jisté číslo je po řadě násobené 3, zmenšené o 5 a pak vyděleno 5. Pokud je výsledek 5, jaké bylo původní číslo?

Příklad úlohy: applet Cover-up Strategy (Jupri & Drijvers, 2016, s. 2489)

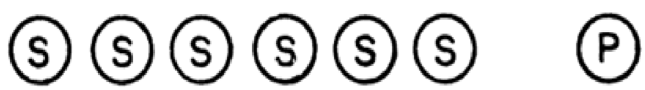
Při prodloužení vzdálenosti Yantova domu od školy o vzdálenost odpovídající vzdálenosti domova Wati od školy a následném vydělení této délky číslem 3, je tato dálka rovna vzdálenosti Budiho domu od školy. Pokud jsou vzdálenosti u Budiho a Wati po řadě vyjádřeny jako 1 km a 2 km, jak dlouhá je cesta z domů do školy pro Yanta?

Šetření dále přecházelo seznámení žáků s použitím obou appletů v dostatečném rozsahu. Tímto způsobem autoři tedy cílili na to, aby výsledné chyby nemohly pocházet jen z malé znalosti žáků uživatelského prostředí, ale naopak přímo z neporozumění algebraizaci. To se nakonec i potvrdilo. V kontextu úloh bylo zjištěno, že volba kontextu ovlivnila i hlavní typ chyby pro oba typy úloh. Pro úlohy spjaté s modelací situace (pseudo)reálného typu převažovala chyba při sestavení matematického modelu – tedy s algebraizací; zatímco u ryze slovně zadaných úloh ne. U těchto úloh bylo naopak viděno, že algebraizace byla převážně správná. Nejvíce zde došlo totiž na to, že ačkoli řešení žáků obsahovala správný matematický model vzhledem k zadání, s chybou se žák setkal až při jeho úpravě neboli standardní manipulaci. Jednalo se tak o důležité zjištění. Jupri & Drijvers (2016) zjistili, že algebraizování (pseudo)reálné situace představuje pro žáky více zatěžující vliv, než pokud je kontext ryze jazykový, a to s dvěma hlavními důvody.

Mezi důvody, proč mohl být jeden typ situace na modelaci náročnější, autoři zařadili faktory na straně žáků i úloh: Zaprvé, větší zkušenost žáků s matematizací jazykového kontextu mohla u žáků vést na vyšší úspěšnost při samotné algebraizaci (tento argument vznesla při podobném pozorování i Žalská, 2015 či Lodholz, 1990); a zadruhé struktura úloh u (pseudo)reálného kontextu bývá náročnější pro tvorbu situačního modelu (Jupri & Drijvers, 2016). Principem druhého bodu je hlavně snížená využitelnost prototypu žáků. Tímto prototypem je odborně uvažovaný tzv. *reversal error* či *reversal obstacle* (González-Calero & kol., 2015) čili matematizace, při níž žáci *překládají každou část zadání doslovně*, tzn. slovo od slova, sekvenčně zleva doprava a bez uvážení vztahů (viz Tab. 18).

Tab. 18: Příklady ‚reversal error' (Vondrová, 2019; Clement & kol., 1981)

<table>
<tr><th colspan="2">Reversal error v jazykovém kontextu (Vondrová, 2019)</th></tr>
<tr><th>Zadání</th><th>Didaktický komentář</th></tr>
<tr><td>Zapiš výrazem:
Pětkrát více než číslo x.</td><td rowspan="6">„Pro některé žáky bývá obtížné uchopit slova vyjadřující změnu množství („zmenšeno" a „více než") jako matematickou operaci, a místo toho je „překládají" jako porovnání dvou stavů, jinými slovy, chápou znaménka nerovnosti jako operátory změny nebo jako jejich součásti" (Vondrová, 2019, s. 123–124).</td></tr>
<tr><th>Doslovná modelace žáka</th></tr>
<tr><td>$5 \cdot > x$</td></tr>
<tr><th>Proces vzniku chyby</th></tr>
<tr><td>pětkrát více než číslo x
$5 \cdot > x$.</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Reversal error v (pseudo)reálném kontextu (Clement & kol. 1981)</th></tr>
<tr><th>Zadání</th><th>Didaktický komentář</th></tr>
<tr><td>Zapiš výrazem:
Studentů je šestkrát víc než profesorů.</td><td rowspan="5">Tento případ chybné algebraizace byl zjištěn skupinou Clement & kol. (1981). Autoři uvedli, že se žáci základní školy dopustili této chyby dvojím způsobem: zaprvé, rovnost $6 \cdot S = P$ uvedli rovnou, tedy přímo převodem slovního modelu do algebraického modelu; a zadruhé, žáci $6 \cdot S = P$ získali až po tvorbě grafického modelu z Obr. 5.
Výstupem bylo, že potíž tudíž nenastala vždy jen u pochopení zadání. Jak vyplývá z Obr. 5, část žáků měla také potíž převést svůj grafický model na algebraický, což znamená, že potíž pak činila spíš algebraizace, tedy jazyk algebry.</td></tr>
<tr><th>Doslovná modelace žáka</th></tr>
<tr><td>$6 \cdot S = P$</td></tr>
<tr><th>Proces vzniku chyby</th></tr>
<tr><td>Studentů je šestkrát víc než profesorů.
$6 \cdot S = P$</td></tr>
</table>



Obr. 5: Diagram řešení úlohy (Clement & kol. 1981, s. 288)

Příklady rysů, které přidávají na výskytu *reversal error,* je podle literatury více. Podle Vondrové (2020) nebo Daroczy & kol. (2015) je na vině např. typické zadání. Ke zvýšení náročnosti může tak u matematizace slovních úloh přispět např. to, že jejich zápis bude tak dlouhý, že žák neodhalí všechny potřebné vztahy, anebo to, že bude zápis doplněn o zavádějící návodná slova (tedy např. slova jako *zvětšit*, či *zmenšit*, jež však mohou dle záměru autora úlohy vést i na operaci *odečtení*, či *přičtení* v roli tzv. *antisignálu*). Dalším problémem je dle studií i struktura. V literatuře se věnuje např. velká pozornost tomu, že obtížnost matematizace zvyšuje: (1) nedělení textu zadání do více odstavců, jež by zřejmě zvýšily přehlednost; (2) nezvyklé pořadí zadání údajů, jež u sebe neuvádí související data; (3) pro žáka neznámá slova, jejichž význam musí odhadnout; (4) kombinace slovního a symbolického zápisu čísel či (5) redundantní údaje (Vondrová, 2020; Yazdani, 2008).

Jak z této informace vyplývá, obtížnost určuje pochopení textu. Řešení úloh na matematizaci se totiž nesestává jen z toho, že si žák osvojil veškerý aparát ke tvorbě modelu (např. konceptuální porozumění rovnic a výrazů), ale že má i dostatečné porozumění psanému textu, tj. čtenářskou gramotnost, jíž definuje PISA.

Tato gramotnost je v protokolu této studie vymezena jako porozumění a uvědomělá práce s textem, jež mu umožňuje využít tamních informací. V literatuře je pak přímo spojena i s matematizací. (Blum & Leiß, 2006, cit. dle Blum, 2015) např. testovali 15leté žáky na matematizování slovních úloh, přičemž jim zadávali 2 typy: (1) úlohy zasazené do více známé situace, jež žáci spíše znali (např. nákup v obchodě), a (2) úloh, u nichž autoři neočekávali dopřednou znalost situace (např. nákup více druhů plen, s nímž žáci patrně neměli zkušenost). Jak autoři očekávali, znalost situace vedla k podstatně vyšší úspěšnosti žáků v rámci modelace. Celkem se zjistilo, že když žáci situaci rozuměli (tzn. znali ji), při její modelaci častěji došli ke správnému modelu než opačně (Blum & Leiß, 2006, cit. dle Blum, 2015), což koresponduje se závěry o důležitosti znalosti kontextu u (Abedi & kol., 1997) a také s tím, že čtenářské a matematické gramotnosti korelují i na úrovni studie PISA.

V tomto bodě se odkazuje přesněji na národní, nikoli mezinárodní výsledky PISA 2003. Při analýze výsledků tohoto cyklu bylo totiž na úrovni českých žáků zjištěno, že korelační koeficient obou gramotností (matematické a čtenářské) dosáhl ve věkové skupině 15 let relativně vysoké hodnoty 0,77 čili vcelku významné souvislosti (Palečková & Tomášek, 2005). Obdobně u Havlíčková & kol. (2019) podléhal analýze pro sumativní hodnocení. V kontextu žáků základních škol, u nichž autoři studie zkoumali korelaci jejich pololetních známek z češtiny a matematiky, přišli na to, že obě gramotnosti provázelo i zde významné spojení. Korelační koeficient vyšel jmenovitě v rozmezí 0,4–0,7 dle výběru ročníku žáků.

2.6 Potřeba uzavřenosti

Výzkumníci Tall & Thomas (1991), kteří se zabývali přechodem žáků z aritmetiky do algebry, ve své práci popsali, že jakmile žáci přichází do kontaktu s proměnnou a souvisejícími koncepty, dopouští se nových chyb i při úpravách výrazů. Tyto chyby jsou přitom rozmanité. Žáci kupříkladu nemusí vnímat, že proměnná představuje symbol znázorňující více hodnot najednou (tj. pro různé proměnné nevnímá jejich hodnoty jako různé), a vnímají je místo toho jen jako objekty, jež jdou spolu sčítat (Rhine & kol., 2018). Tato úvaha má pak dopady na úpravy algebraický výrazů. Dochází třeba k tomu, že žák, zobecňující zkušenosti z aritmetiky, dochází k tomu, že *každý výraz* (nehledě na to, zda bude zrovna algebraický či číselný) dokáže zjednodušit až na jednu hodnotu, tedy převést na jeden člen jako třeba:

$$3h + j + \ h = 4hj\,, \qquad\qquad a + 3 = 3a\,, \qquad\qquad a + b = ab\,.$$

Tento problém je v úvaze odborně nazýván jako *potřeba uzavřenosti* a v literatuře má silné zastoupení nejen v jeho pozorování (viz MacGregor & Stacey, 2007; Pournara & kol., 2016; Collis (1974), ale i v příčině. Collis (1974) například uvedl, že zdrojem je nekonceptuální porozumění rovnosti. Myslel tím to, že symbol této rovnosti (tzv. *rovnítko)* není žákem ještě viděno jako koncept ekvivalence více výrazů shodných pro všechny hodnoty proměnných, ale jen jako výzva k výpočtu. Toto porozumění je zváno *operační*. Jinak řečeno, symbolem ‚=' není zatím ještě uvážen znak ekvivalence (relační porozumění), ale jen *signál* k hledání řešení, tj.: ‚Proveď všechny operace před rovnítkem, a najdi tak výsledek úlohy'. Drijvers (2003) přitom uvádí, že relační pojetí je klíčem k reedukaci potřeby uzavřenosti. Podle jeho názoru, jež uvádí i French (2004) a Tall & Thomas (1991), musí žáci při reedukaci této miskoncepce dojít k poznání, že rovnítko i jiné užívané symboly mají často dva významy. Zaprvé jsou *procesy*, které řešitele povedou k vykonání určité sérií akcí, po niž získá výsledek (to je např. základ zjednodušení číselných výrazů); a dále vlastní *objekt* čili *koncept* (tj. zase případ substituce za složený výraz anebo vnímání rovnice jako jednoho objektu). V tomto případě je cílem podporovat oboje najednou. V zájmu toho, aby šlo řešit úlohy různého typu, má dle Sfard (1991) žák dojít k tomu, kdy nejenže ví, co obě pojetí znamenají, ale zároveň že mezi nimi dokáže i přecházet. To znamená, že dojde do stádia *proceptu*. Toto stádium totiž ve zkratce znamená, že už není explicitně rozlišeno stádium *konceptu procesu*, ale naopak že došlo na spojení relačního a operačního porozumění, kdy mezi nimiž dokáže žák přejít i v rámci jedné úlohy pro splnění určitého cíle (viz Sfard, 1991; Van Amerom, 2003; Nováková & Vondrová, 2015).

2.7 Práce se závorkami

Kieran (1979) uvádí, že další chyby, s nimiž se algebraické výrazy pojí, jsou chyby vzniklé při odstranění závorek. Těchto chyb je více. Na rozdíl od aritmetiky, kde měly závorky jen jednu hlavní roli, kterou žák využíval (totiž roli signálu, v jakém pořadí provést úprav výrazů, MacGregor & Stacey, 2007)[8], v algebře mají rolí více. Jedná se např. o:

- *Role snazšího upravení výrazů*, jež dovoluje rozpoznat mnohočleny, které se pak vytknou či odečtou (Marchini & Papadopoulos, 2011);
- *Role objektu*, kdy závorky spojují členy výrazu do mnohočlenu a tím pomáhají tento výraz vnímat jako vlastní objekt, a ne součet objektů (Hoch & Dreyfus, 2005a; 2005b.
- Role podpory proceptu u všech aritmetických operací. Tento bod se vztahuje tedy k tomu, že závorky mohou nad rámec usnadnění úprav pomoci posílit porozumění všech základních početních operací, jelikož jsou s operandy viděny jako vlastní entity (Hoch & Dreyfus, 2005a; 2005b).

Rozdíl dále nastává také v tom, jak lze výrazy v závorce rozdělit. Obecně jsou 2 hlavní typy:

Zaprvé, *heterogenní výrazy,* jež tvoří výrazy typu:

(1) kombinace stejných proměnných, ale vždy ve stejné mocniny (např. $a^2 + a$);

(2) kombinace různých proměnných nezávisle na použité mocnině (např. $a + b$);

(3) nebo kombinace libovolných proměnných a taktéž čísel (např. $a + 1$).

a zadruhé *homogenní výrazy*.

Jak už název napovídá homogenní výrazy představují výrazy, které nejsou heterogenní. V případě matematiky jde jmenovitě o výrazy $2 + 5 + 3$, tedy výrazy číselné, a dále o výrazy jako $2a + 5a + 3a$, čiže algebraické výrazy v jedné proměnné a ve stejné mocnině. Význam je pak ryze praktický. Výše uvedené rozlišení vede totiž na uvědomění, že u žádných úprav heterogenních výrazu není závorka nikdy v roli signálu (tj. nelze sečíst členy $2x + 3 \neq 5x$ u $2x \cdot (2x + 3)$, protože tak nastane potřeba uzavřenosti), avšak u homogenního výrazu je rolí více. Výraz tohoto typu (např. $2x \cdot (2x + 3x)$ může díky použité homogenní struktuře podléhat úpravě i opačně, tj. sečtení závorky a až pak násobení jako u $2x \cdot (5x) = 10x^2$).

Podobně je tomu i jinde. Žáci si mohou např. s ideou závorek jako objektů u zjednodušení výrazů uvědomit, že nemusí vše upracovat ručně (viz také oddíl 2.3), ale mohou sledovat jen strukturu uvnitř zápisu a uvědomit si:

$$2x + (3x + 7) + x - (3x + 7) \Leftrightarrow 2x + z + x - z \Leftrightarrow 2x + x \Leftrightarrow 3x\,.$$

[8] Další rolí závorek *udržení integrity výrazu*, jíž Lee & Freiman (2006) pro přepis $\frac{1+2}{3+4}$ na $(1 + 2) \div (3 + 4)$.

Hoch & Dreyfus (2005a) u tohoto příkladu uvádí, že jejich řešení pomáhá žákům k rozvoji strukturálního uvazování i pro úlohy, kde závorky obsažené nejsou – tj. při jakékoli úpravě výrazů. Své tvrzení podkládají studií. U 92 žáků (15–16 let) řešících úlohy na zjednodušení výrazů pozorovali autoři to, že když tyto žáky nechali řešit úlohy výše uvedeného typu – tj. úpravy výrazů, kde závorky pomáhaly identifikovat navzájem podobné prvky zápisu, více času věnovali struktuře, i když závorky absentovaly. Předpokládaným důvodem bylo to, že jim prvotní užití pomohlo vidět, na co se u úprav soustředit.

Jiný případ může nicméně nastat, když žák nevnímá závorku jako objekt, ale právě pouze jako signál k úpravě. Dopadem je pak i to, že neprovádí správně násobení závorek jako u:

- Zobecnění pravidel sčítání mnohočlenů na případy jejich násobení, což Ben-Zeev (1995) nazývá jako *racionální omyly*. Výsledkem je to, že žák vynásobí pokaždé stejné členy. Konkrétně vynásobí jen ty členy závorky, jež sdílí s činitelem před ní svou mocninu proměnné čili např. $a \cdot (a + 2a + 3) = a^2 + 2a^2 + 3$, kde žák vynechá $3a$.
- Zapamatovaní pravidel součinu mnohočlenů chybným způsobem. Zde jsou chyby víc nejednotné, neboť nevynásoben může libovolný člen. Člen může také zcela chybět.
- Žák se u odstranění závorky nedostatečně soustředí. Jedná se o situaci, kdy žák mohl svou pozornost vztáhnout např. k vyšším početním úkonům, čímž se snížila kapacita jeho pracovní paměti.

Speciálním případem jsou dále úpravy výrazů se strukturou dle (Ayres, 2001; Rendl & Vondrová, 2014). Jedná se o výrazy, jež dle těchto autorů zahrnují totožné prvky gradace jejich následného zjednodušení, jmenovitě: (1) vynásobení alespoň jednoho mnohočlenu dalším výrazem (tj. užití distribuce), (2) odečtení alespoň jednoho mnohočlenu od jiného mnohočlenu (tj. nutnost odečítání mocnin) a (3) jakákoli úprava znamének při odstranění závorek (tj. znaménkové konvence). Příkladem těchto prvků je $2 \cdot (x + y) - (2x - y)$ z šetření TIMSS 2007. Jde o výraz, který byl v cyklu této studie použit k testování žáků (15 let) při zjištění nepříznivých výsledků. Při vyhodnocení cyklu vyšlo, že nejen čeští žáci, ale i jejich zahraniční vrstevníci u zjednodušení výrazu chybovali podstatně více než u jiných algebraických výrazů (Rendl & Vondrová, 2014). Stejně tak bylo vysloveno, že na tyto chyby žáků může mít negativní vliv instruktivní přístup učitelů. Collins & Benzon (2023) např. varovali, že mezi přístupy podporující chybné práce se závorkami patří mnemotechniky. Příkladem je podle nich třeba americké *PEMDAS* (<u>P</u>arentheses <u>E</u>xponents, <u>M</u>ultiplication, <u>D</u>ivision, <u>A</u>ddition, <u>S</u>ubtraction) čili anglický akronym poučky: ‚Nejdřív při zjednodušení výrazů odstraň závorky; pak postupně vyřešit všechny mocniny, násobení a dělení; a až nakonec proveď zbylé sčítání a odčítání, které zbývá.'

Jak lze z tohoto popisu vyčíst, mnemotechnika sama vede jen na formální porozumění. Ač u žáka dokáže zprvu zajistit, že poučky o přednosti všech operací využije korektně k řešení úprav výrazů v aritmetice, u algebry budou důsledky opačné. Důvodem je to, že tu mají výrazy dvojí strukturu. Jsou jednak heterogenní, a je tudíž nemožné je sečíst až na jednu hodnotu, či jsou homogenní a sečíst je lze. Právě první případ je pak zdrojem komplikací při úpravě závorky. Pokud totiž výrazy jsou heterogenní a zároveň jsou v závorce (tedy mají potenciál měnit roli závorky ze signálu na objekt), dojde při užití PEMDAS na chybu, jež se projeví při odstranění závorek. Namísto toho, aby žák tuto závorku jen roznásobil a až pak zkoušel sčítat, zkusí interpretovat celou závorku nejdříve jako signál (čiže ji zkusí odstranit dle 1. kroku PEMDAS) – a tedy přijde s potřebou uzavřenosti či chybami z Tab. 19 (Kieran, 1992; 2004).

Tab. 19: Miskoncepce při práci se závorkami (MacGregor & Stacey, 2007; Žalská, 2015)

Zadaná úloha
„Pakliže n vyjadřuje neznámé číslo, zapište výrazem následující početní instrukci: ‚Přičtěte 5 k n a vynásobte 3'" (MacGregor & Stacey, 2007, s. 8). Možná nápověda nepřítomná v zadání, ale u zadavatelů (Žalská, 2015, s. 336). Řešení je jedno z: a) $n + 5 \cdot 3$ b) $15n + 3$ c) $5n \cdot 3$ d) $3(n + 5)$ e) $(5 + n)^3$
Hlavní pozorované chyby v řešeních i rozhovorech
Ve studii, která úlohu využila jako první (tj. MacGregor & Stacey, 2007), byla chyba, jež se projevila vynecháním závorky z řešení, zjištěna u 131 žáků z 980 žáků (8. a 9. ročník), a to u 22 % a 11 % v tomto pořadí. Ve studii (Žalská, 2015) tomu bylo poměrově méně. Úlohu, jež byla přebrána z výše uvedené studie, provázelo zjištění, že závorku v 9. ročníku nepoužil jen 1 žák ze 13 neboli čeští žáci dopadli ve srovnání lépe. Ve výzkumu (Chow, 2011), který se vlivem závorek zabýval na úrovni modelace, byly zjištěny další typické chyby u využití závorek. Kromě opakovaného vynechání, jež bylo zmíněno výše (celkem 4 žáci ze 39) byly mezi častějšími chybami identifikovány i dvě, z nichž první pozorovali i Tall & Thomas (1991). Jednalo se o: (1) chybu, při níž žáci vykonávali úpravu jen zleva doprava (tzv. parsing obstacle); Například chybná úprava výrazu: $x + 2 + 3 \cdot (x + 2) = x + 5 \cdot (x + 2)$. (2) chybu, při níž závorky pro žáky nic neznamenají a v úloze je neberou v potaz. Například úprava: $3 - (x - 2) = (3 - x) - 2$, jež v žácích nevyvolává rozpor.

2.8 Chyby úprav výrazů

Chyby, které se projevují při práci s algebraickými výrazy i nad rámec odstranění závorek a potřeby uzavřenosti, je dále možné dělit do více kategorií. Podle Hejného (1989) jich je např. 7. Jako první rozděluje chyby, je jsou ve výuce závažnější a jsou způsobeny formálním porozuměním žáka (tj. nižšího porozumění učivu, viz níže 2, 5, 6), a následně chyby, jež mají jiné než tyto příčiny (tj. chyby způsobené např. vlivem zvýšeného stresu, nepozornosti či nepřesnosti během četby zadání, viz níže 1, 3, 4, 7) (Hejný & Kuřina, 2001). Jednotlivé kategorie s příklady uvádí níže Tab. 20.

Tab. 20: Typologie chyb při úpravě výrazů (Hejný, 1989)

1. Numerické chyby: chyby vzešlé z nepozornosti a nedostačující automatizace nižších početních úkonů žáka, jako jsou manipulace čísel. Příčinou bývá vyšší koncentrace na vyšší řešitelské úkony, jako např. úpravy a sestavení rovnic či také soustav.

   ⇨ Např.: Zjednodušení výrazu: $x + 3 \cdot (x + 2) = x + 3x + 4$

2. Úkonové chyby: chyby nastalé při použití dříve nesprávně zapamatované znalosti.

   ⇨ Např.: Umocnění výrazu: $(a + b)^2 = a^2 + 0 \cdot 2ab + b^2$

3. Grafické chyby: chyby vzniklé nekvalitním zápisem či nákresem žáka.

   ⇨ Např.: Záměna podobných čísel 6 a 9 či také symbolů odčítání a násobení.

4. Chyby velkých skoků: chyby vzniklé snahou o vykonání více úprav najednou.

   ⇨ Např.: Rozložení na součin u výrazu: $4a^2 + 9b^2 - (-12ab) = (2a - 3b)$

5. Strategické chyby: chyby vzniklé z odklonění pozornosti od plánování řešení k dobře známým úkonům. Následkem je to, že žák přeskakuje některé kroky či začne provádět zbytečné, často i kontraproduktivní úpravy, jež jej vedou od řešení úlohy.

   ⇨ Např.: Rozložení na součin u výrazu $(a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

6. Bezradnost a bloudění: obecné vyjádření pro to, že žák vykonává úpravy bez předem stanoveného cíle. Projevem je to, že se u jistého kroku např. přeruší původní tok myšlenek, jež započal, a začne jednat nelogicky či postup zpětně smazat (v takovém případě však nemusí jít vždy o chybu, ale i o zjištění, že původní postup byl nevhodný).

   ⇨ Např.: Rozklad: $(a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b)^2 - c^2$

7. Jiné chyby: souhrn všech pochybení, jež vznikají mimo příčin uvedených výše.

   ⇨ Např.: Chyby vzniklé z chybného anebo zbrklého pročítání zadání; stresu apod.

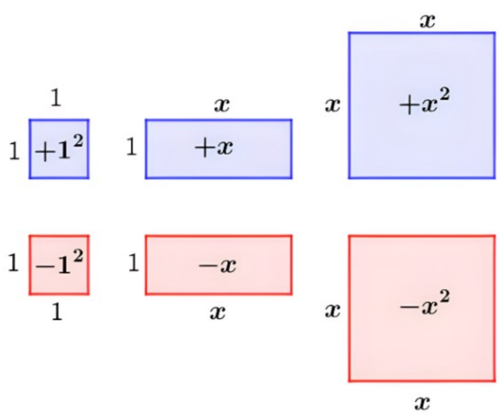
2.9 Geometrie

Souvislost algebry s geometrií, jež byla nastíněna oddílem 2.3 jako jeden z pilířů pro rozvoj algebraického uvažování, je možné zkoumat i dále – a to o různé náměty. Jmenovitě jde o náměty k tomu, jak geometrii vůbec využít a následně k čemu. Možnosti jsou na začátku nabízeny dvě. Jednak je tu cesta geometrizování algebraických výrazům, která je více tradiční – tzv. *papírová geometrie*, která je prováděná na papíře či tabuli (Apsari & kol., 2020) – anebo je tu *geometrie dynamická*, jež jde jen v softwaru (Vondrová, 2019). Právě druhá možnost bude zkoumána dále. Výhodou je totiž to, že dovoluje efektivně:

- zkoumat vzájemné vztahy u algebraických výrazů, tj. identit (Usiskin, 2010);
- ověřovat, zda dané tvrzení o úpravě algebraických výrazů platí (viz dále).
- vytvářet vlastní hypotézy o vztazích algebraických výrazů a ty pak i experimentálně ověřit díky responzivitě a interaktivitě softwarového prostředí (Hohenwarter, 2007; Hall & Chamblee, 2013; Robová, 2012).
- získávat bezprostřední zpětnou vazbu mezi úpravou předpisu polynomické funkce a podobou jejího grafu (Hohenwarter & Jones, 2007; Robová, 2012);
- redukovat miskoncepce žáků a budovat konceptuálního porozumění (viz dále

Mezi programy, které prostředí dynamické geometrie nabízí, patří mnoho variant, včetně bezplatných. Z této skupiny stojí za zmínění např. volně přístupná GeoGebra, jež je aktuálně nasazována ve výuce Pedagogické fakulty Karlovy univerzity v oboru učitelství matematiky, či také Math3D a Desmos, jež mají mírně jiné zaměření, ale tytéž styčné prvky. Těmito styčnými prvky jsou mimo dílčích funkcí, které se týkají geometrické konstrukce, např. široké možnosti úprav výrazů (tzv. CAS čili computer algebra system), a to s cílem automatizace a kompenzace, jež zajišťují i některé specializované kalkulačky. Další cestu k podpoře algebry nastiňuje Usiskin (2010). Autor ve své práci zvažuje, že stejně jako je obecně přijímáno, aby učitel do výuky matematiky zařadil více úloh, jež pak pro žáky odráží jiná použití probíraného učiva, je principálně stejně důležité ukázat jim i několik přístupů k jejich řešení – tedy např. pomocí geometrie i algebry (Usiskin, 2010). Jediné, co je zde zásadní pokaždé dodržet, je tedy aktivní role žáka. Žák by měl po celou dobu předvádění strategií nejen pasivně přijímat, z jakých kroků se skládají a jaký je vlastně princip jejich fungování, ale měl by mít i možnost všechny porovnat a pak vysvětlit rozdíly, které mezi nimi panují (Vondrová, 2019).

Cestou, jak může takovéto srovnání vypadat, je např. komparace manipulací na výrazech prováděných symbolicky (tj. např. $2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$) a skrze *algebraické dlaždice* – tj. skrze geometrizaci. S anglickým názvem *algebraic tiles*, je toto prostředí totéž založeno na geometrické modelaci algebraického zápisu. Ze strany žáka dochází konkrétně k tomu, že dle předem daných pravidel, které prostředí má (viz Obr. 6), přesouvá sadu dlaždic, jež jsou mu dány, a to s jediným cílem: složení pravoúhelníku, jenž poté reprezentuje určitý výraz, jenž je pro něj naopak vyjádřením obsahu (viz Obr. 6).



Pravidla použití

P1: Jednotku dovolující znázornit absolutní člen představuje obsah čtverce s délkou strany 1.

P2: Proměnnou x reprezentuje obsah obdélníku o rozměrech x a 1 jednotek.

P3: Druhou mocninu x vyjadřuje obsah čtverce se stranou délky x jednotek.

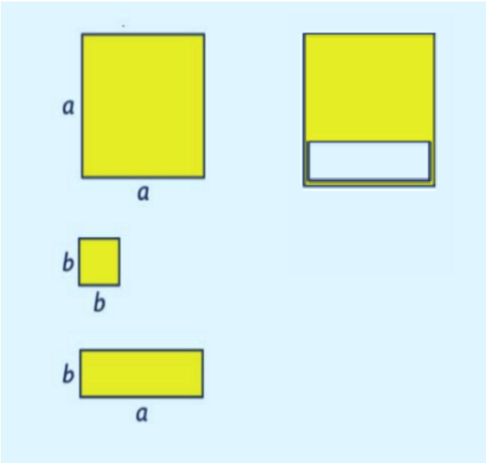
P4: Rozměr x nesmí pro jednoznačné řešení představovat celočíselný násobek jednotky.

Obr. 6: Ukázka sady algebraických dlaždic (vlastní)

Co se týče podoby celého tohoto prostředí, je důležité poznačit, že uvedená koncepce z Obr. 6, není jediná možná – ve skutečnosti jich je více. Některá mění např. jen to, v jaké formě se prostředí dlaždic využívá (tj. zda jsou dlaždice digitální či fyzické[9]); a jiné to, jak se umísťují. V kontextu algebry je toto druhé rozdělení dále větveno. Zaprvé je větveno do směru, kdy se od sebe odlišují dlaždice, jež zahrnují jen jednu, anebo více proměnných (výše naznačené prostředí má tak jen jednu proměnnou x a nejde využít pro výrazy o více proměnných), a dále jak se v tomto prostředí značí odečítání veličin (to má obvykle dva způsoby pojetí). Jedním z těchto pojetí disponoval už Obr. 6. Jedná se o barevné odlišení, které provází záporné a kladné veličiny (to umožňuje zpětně sledovat, jaké členy byly při manipulaci přičteny a odečteny), zatímco další možností je překrytí dlaždic.

Touto druhou možností disponuje např. Obr. 7 vyobrazený níže. Cestou ke znázornění rozdílu se v něm totiž stává nikoli barva jako u Obr. 6, ale přeložení dlaždic; také jinak: rozdíl je zde značen odstraněním odečítané části, což je principálně totožný postup jako na číselné ose.

[9] Prospěšné využití digitálních dlaždic hlásili např. Bautista & Garzón (2018).



Vpravo model $(a^2 - ab)$,

Vlevo základní dlaždice.

Obr. 7: Hejného dlaždice (Hejný & kol., 2017, s. 25–26)

Nad rámec rozdílu, který mohou různá prostředí reprezentovat různě, lze algebraické dlaždice využít i pro jiné koncepty. Příkladem je jejich využití u aritmetiky. V rámci studií bylo ověřeno, že využití algebraických dlaždic je ve výuce vhodné pro (1) navýšení porozumění celočíselné aritmetiky, kde proměnná není přítomna (Leitze & Kitt, 2000), (2) pochopení operací mezi výrazy rozdílných struktur, včetně výrazů v algebře (Saraswati & kol., 2016) a (3) smysluplný přechod žáka k jazyku algebry (viz Vondrová, 2019). Na druhou stranu, existují i rizika formalismů. Možným úskalím se stává u geometrizace např. to, že si žák dílčí pravidla postupu jen automatizuje a nebude výsledky vnímat vůči výrazům, tj. nebude vnímat propojení reprezentací. Z tohoto důvodu se má trvat na vysvětlení souvislostí modelů. Cílem je to, aby učitel dokázal z vysvětlení žáka říci, zda výsledek jeho práce opravdu odrážel jeho stav porozumění výrazům, a pokud ne, aby zajistil vhodnou reedukaci i s dopomocí algebraických dlaždic (Saraswati & kol., 2016). I z hlediska reedukace jsou totiž výhodné. Např. se dají použít k tomu, aby žák poznal a napravil své miskoncepce u úpravy výrazů (viz oddíl 2.6 a 2.8) (Picciotto & Wah, 1993) nebo také aby došlo na:

- ⇨ zlepšení dovednosti řešit lineární rovnice algebraicky (Saraswati & kol., 2016)
- ⇨ posílení dovednosti řešit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých (Amidu & kol., 2018);
- ⇨ porozumění převodu algebraických výrazů na součinový tvaru vytýkáním (Sharp, 1995; Thornton, 1995)
- ⇨ zdůvodnění metody doplnění na čtverec při řešení kvadratických rovnic (Vinogradova, 2007).
- ⇨ zdůvodnění platnosti vybraných algebraických identit (Sharp, 1995, viz Obr. 8)

⇨ zdůvodnění postupu u součinu mnohočlenů (Larbi & Mavis, 2016, viz Obr. 9)

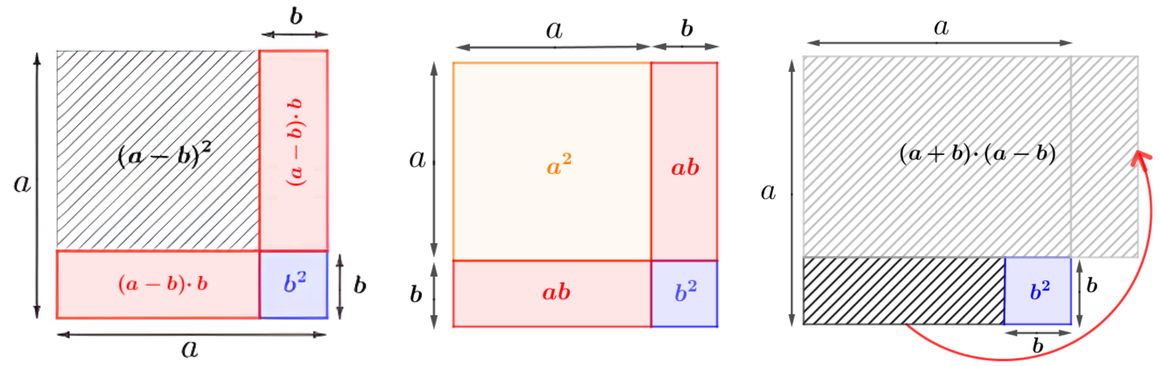
⇨ porozumění žáků se specifičtějšími individuálními potřebami:

- Žáci, kteří v hlavním vzdělávacím proudu dlouhodobě selhávají (Wingett, 2019).
- Žáci, kteří preferují vizuální či jiné více taktilní metody učení (Wingett, 2019),
- Žáci, u kterých byly diagnostikovány *specifické poruchy učení*.

V posledním případě (viz rovněž Castro, 2017; Long & kol., 2021) jsou myšleny hlavně operacionální či ideognostické formy dyskalkulie. V jejich případech dochází na:

- narušení schopnosti žáka provádět matematické operace (tj. sčítání, odčítání apod.);
- narušení pochopení matematických pojmů a vztahů mezi nimi (např. přirozená čísla).

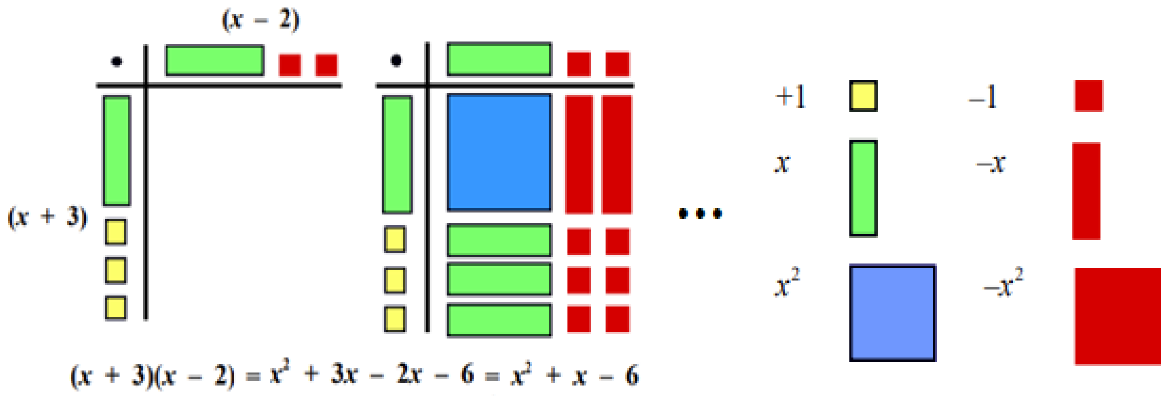
Obecně nápomocné mohou být však dlaždice i u dalších forem dyskalkulie.



$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot(a-b)\cdot b + b^2$ $\quad$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $\quad$ $a^2 - b^2 = a\cdot(a-b) + b\cdot(a-b)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $\quad$ $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

Obr. 8: Geometrizace základních algebraických identit (vlastní)



Obr. 9: Algebraické dlaždice: Součin výrazů (Hall, 1999, s. 15–16)

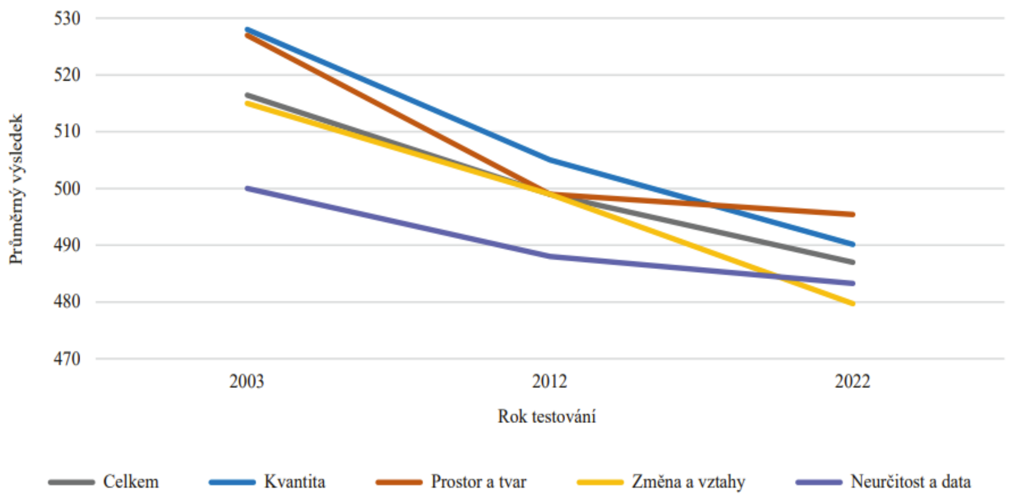
2.10 Mezinárodní šetření

Jak už bylo uvedeno na začátku kapitoly při vymezení teoretické části, poslední pasáž rešerše se věnuji 2 výzkumům o porozumění matematiky. Jedná se výzkum PISA a výzkum TIMSS.

Programme for International Student Assessment (PISA)

Výzkum PISA neboli *Program pro mezinárodní srovnávání žáků* je největší mezinárodní šetření ve výzkumu vzdělávání. Už od roku 2000 se koná cyklicky každé 3 roky, přičemž se týká jen žáků 15 let na konci povinné školní docházky. Na mezinárodní úrovni je studie pak koordinována separátně od národní. Za její světovou koordinaci zodpovídá skupina *Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj* (OECD), zatímco na české je to *Česká školní inspekce* (ČŠI). Její úlohou je zajistit sběr dat a přípravu národní zprávy.

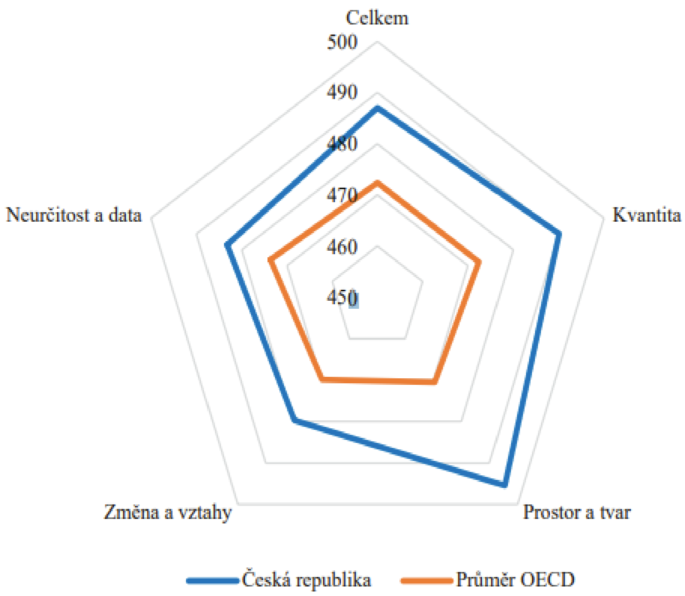
Jedním z charakteristických rysů PISA je dále zaměření na úlohy z reálného života, resp. realistické úlohy. Tímto se liší od studie TIMSS. Z hlediska sběru dat se takto v každém cyklu OECD zaměřuje skrze realistické úlohy na 3 různé gramotnosti – matematickou, čtenářskou a přírodovědnou – kdy jedna je vždy hlavní. V roce 2022 to byla gramotnost matematická (Boudová & kol., 2022).



Obr. 10: Matematická gramotnost v ČR – PISA (Boudová & kol., 2023, s. 29)

Jak je z možné vysledovat z dat tohoto, jakož i předcházejících cyklů (Obr. 10), poslední zjištění o matematické gramotnosti žáků zůstala konzistentní s předchozími výsledky. Ani u posledního šetření nedošlo ke zjištění, že by se u českých žáků projevil dlouho očekávaný nárůst v jejich matematické gramotnosti, ale naopak nastal další pokles, a to v oblastech: *Změna a vztahy* a *Neurčitost a data*.

Tyto dvě oblasti, představující dvě ze čtyř částí matematické gramotnosti (viz Obr. 11), byly pro české žáky celkově nejméně úspěšné. *Změna a vztahy* pro ně dopadla nejhůře, která se dle národní zprávy od Boudové & kol. (2023) zaměřila na algebraické úlohy, jako je modelace či zobecnění. A oblast *Neurčitost a data* vyšla v matematice jako druhá nejhorší. V jejím případě šlo však o statistiku. Z toho lze tedy vyčíst, že hlavní potíž pravděpodobně netkvěla v algebře a jejím nedostatečném porozumění (ačkoli i to se u českých žáků zřejmě projevilo), ale práci s více modely – neboli horizontální i vertikální matematizace z oddílu 2.5.



Obr. 11: Matematická gramotnost – PISA, 2022 (Boudová & kol., 2023, s. 28)

Z hlediska opačných výsledků, kde si čeští žáci vedli lépe, vyšla nejpříznivěji oblast *Prostor a tvar* a následně *Kvantita*. U obou se tak patrně stalo v důsledku zkušenosti žáků s úlohami podobného typu. Jak totiž uvádí např. Boudová & kol. (2023), obě oblasti zahrnuly poměrně typické matematické úlohy, jmenovitě – první zahrnula častou aplikaci vzorečků pro míru v geometrii a využití vlastností obrazců; a druhá využití čísel a jejich vlastností.

Co se týče konkrétních úloh, závěrem se sluší také doplnit, že testové položky z cyklů PISA nebývají detailně analyzovány tak často jako u TIMSS. To znamená, že oproti TIMSS chybí podrobnější analýzy o řešeních úloh. Pro českou část to přesněji značí, že na rozdíl od TIMSS, kde takové národní analýzy existují, není dispozici detailní rozbor konkrétních chyb žáků u specifických oblastí učiva.

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)

Studie TIMSS je srovnávací šetření, které mezinárodně koordinuje *Mezinárodní asociací pro hodnocení vzdělávacích výsledků* (IEA) a pro Českou republiku ČŠI. Jedná se o studii 2 skupin žáků. Zaprvé se testují znalosti žáků 4. ročníků, jež se nachází před přechodem na 2. stupeň základní školy, a následně žáků 8. ročníků, kteří jsou před koncem povinné školní docházky. V obou případech se sledují matematické a přírodovědné gramotnosti. Sledování takto probíhá cyklicky každé 4 roky (od roku 1995), kdy se Česká republika účastnila v letech 1999, 2007 a 2011, ale u žáků 8. ročníků jen v letech 1999 a 2007. Nicméně i to se změnilo s posledním cyklem. V roce 2023, kdy se tento cyklus realizoval, se Česká republika zapojila do obou částí, tj. u 4. i 8. ročníků, ovšem tato data nebyla ještě zveřejněna. Z tohoto důvodu je vhodnější cyklus 2007. Důvodem je to, že v relevanci k vlastnímu výzkumu o dosud poslední data, jež byla v TIMSS shromážděna u českých žáků podobného věku jako u vlastního výzkumu, tj. výzkumu, kde byli testováni žáci na začátku 9. ročníku a kvarty nižšího gymnázia.

TIMSS 2007

Výsledky národní studie TIMSS 2007 analyzovali v průběhu let autoři mnoha článků (viz např. Frýzek & kol., 2009; nebo Rendl & Vondrová, 2014). Autoři druhé zmínění publikace např. identifikovali problematické úlohy. Ty následně nazvali jako *slabé* a *velmi slabé* (viz jejich shrnutí v Obr. 12), kdy u obou určili i oblasti, do kterých spadaly. Tyto okruhy nazvali po řadě jako: [okruh pro] „různé aspekty algebry, jak ji koncipují úlohy TIMSS [viz Obr. 12, kde jsou tyto aspekty vypsány], … a [dále okruh] úloh vyžadujících využití znalostí o vlastnostech geometrických útvarů ve složitějších výpočtech (Rendl & Vondrová, 2014, s. 52). V prvním okruhu upozornili autoři na následující obtíž. Žákům činilo větší problém, pokud byla součástí úlohy: „…práce se zápornými čísly a zlomky ve výrazech a rovnicích, neznámá ve jmenovateli, substituce ve složitějších výrazech, dosazování hodnot z uspořádaných dvojic nebo systematické testování platnosti rovnice vícenásobným dosazováním za proměnné (Rendl & Vondrová, 2014, s. 52). Jako další obtíž identifikovali pak matematizaci a intepretaci. U snazších úloh, hlavně u identifikace korespondence jednoduššího výrazu a jeho slovně popsané či jinak vyobrazené situace, dosahovali žáci na mezinárodní průměr relativně často. Nicméně pro náročnější případy ne. Problém zde např. tvořilo sestavení rovnice pro zadání nezvyklého kontextu a formulace nebo také zobecnění pravidelností (Rendl & Vondrová, 2014).

Opakem byly pak úpravy výrazů, kde byly výsledky příznivější. V této oblasti čeští žáci, zřejmě i svou vyšší školní zkušeností, v převaze vykazovali výsledky na hranici či nad rámec mezinárodního průměru – což se nestalo u okruhu geometrie (Rendl & Vondrová, 2014). U toho naopak Rendl & Vondrová (2014, s. 53) upozornili, že potíží bylo interpretování a chybné algebraizování geometrických modelů. To znamená, že žáci měli potíž propojit více druhů reprezentací – resp.: „využití znalostí o vlastnostech geometrických útvarů ve složitějších výpočtech", „vyvození vlastnosti tělesa z jeho sítě" či chyby nastávaly „ve vzorcích pro výpočty obvodu, obsahu, objemu a povrchu." Ve všech těchto případech podle autorů čeští žáci dosahovali horších výsledků než u většiny jiných testovaných úloh. Současně opakovaným problémem bylo také to, že se žákům nedařilo vztažení algebraického modelu k příslušné geometrické situaci (viz ukázky dále).

	Celkový počet úloh	Počet slabých úloh	Počet velmi slabých úloh	Procento slabých a velmi slabých úloh	Procento velmi slabých úloh	Průměrná úspěšnost českých žáků v dané oblasti	Průměrný rozdíl českého a mezinárodního souboru
Algebra	45	8	16	53 %	36 %	43,1	4,7
Funkce	6	0	3	50 %	50 %	34,5	1,9
Substituce	12	3	6	75 %	50 %	35,5	2,0
Rovnice, nerovnice	10	2	4	60 %	40 %	37,4	2,8
Výrazy	17	3	3	35 %	18 %	55,0	8,6
Posloupnosti	17	4	3	41 %	18 %	35,7	6,3
Obrazce, tělesa	20	6	5	55 %	24 %	38,7	5,4
Geometrie (bez obrazců a těles)	30	6	3	30 %	10 %	53,4	11,1
Čísla	44	5	6	25 %[10]	14 %	54,4	11,2
Úměra, poměr	11	2	1	27 %	9 %	57,7	10,6
Procenta	9	0	0	0 %	0 %	61,2	13,5
Slovní úlohy	36	5	1	17 %	3 %	50,5	13,9
Pravděpodobnost	8	2	1	38 %	13 %	57,8	11,3
Souřadnice, grafy v soustavě souřadnic	6	0	2	33 %	33 %	50,9	4,3
Statistika	6	0	2	33 %	33 %	33,6	3,6
Reprezentace dat	27	0	1	4 %	4 %	56,3	14,4

12 Z těchto 11 úloh se 6 týká zlomků.

Obr. 12: Přehled slabých a velmi slabých úloh v TIMSS 2007 (Rendl & Vondrová, 2014, s. 30)

Příklady čtyř vybraných (velmi) slabých úloh ze studie TIMSS 2007

Úloha M04 – 07 – zaměření: úprava výrazů, násobení a sčítání mnohočlenů

Který výraz se rovná výrazu $2(x + y) - (2x - y)$?
A) $3y$
B) y
C) $4x + 3y$
D) $4x + 2y$

Obr. 13: Zadání úlohy M04-07 (Frýzek & kol., 2009, s. 43)

Tato uzavřená úloha byla v testu příkladem úpravy algebraického výrazu, v níž čeští žáci selhávali ve velmi vysoké míře (úspěšnost 24,7 %, – 1,1 %). Nejčastější chybou zde bylo vybrání řešení D (29,7 % – zde došlo na chybné vynásobení prvního členu druhé závorky) a následně řešení B (26,2 %,) a C (13,2 %). Možný důvod byl této chybovosti byl nastíněn u oddílu 2.7 u struktur výrazu. Sluší se nicméně podotknout, že vliv mohla mít i zahrnutá volba řešení, jelikož mohla vést žáky k tomu, aby řešení odhadli, a nikoli ručně počítali (Frýzek & kol., 2009).

Úloha M05 – 10 – zaměření: zobecnění pro pravidelnost číselných entit

Tabulka zachycuje vztah mezi x a y.

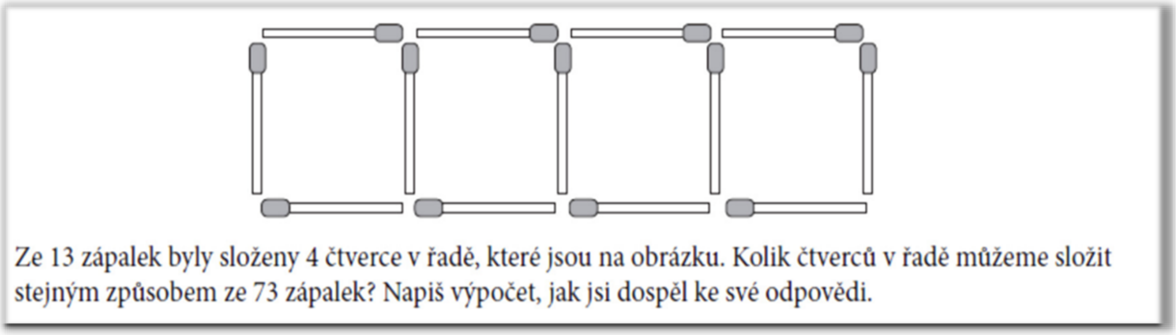
x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Která z následujících rovnic vyjadřuje tento vztah?
A) $y = x + 4$
B) $y = x + 1$
C) $y = 2x - 1$
D) $y = 3x - 2$

Obr. 14: Zadání úlohy M05-10 (Frýzek & kol., 2009, s. 50)

Tato uzavřená úloha byla dále zaměřena na pravidelnosti při „rozpoznávání a vytváření ekvivalentních vyjádření funkcí prezentovaných formou uspořádaných dvojic, tabulek, grafů nebo slovně (Frýzek & kol., 2009, s. 50).“ Čeští žáci v ní nicméně opět dosáhli velmi nízké úspěšnosti. V průměru činila jejich úspěšnost jen 32,4 % (mezinárodní průměr byl 38,4 %), kdy nejčastější chybná odpověď byla B, jíž zvolilo 24,9 % žáků. Zbylé možnosti (A a D), měly svá zastoupení výrazně nižší (12,8 % a 11,1 %). Rendl a Vondrová (2014) tudíž soudili, že žáci možná pravidla daná v zadání ověřovali jen pro některé z dvojic hodnot. Důvodem je to, že všechna chybná řešení (viz výše A, B, D) měla vždy alespoň jednu z uspořádaných dvojic jako své řešení – viz A: [5,9], B: [2, 3] a D: [1,1]. Jako další vysvětlení bylo pak uváděno, že žáci možná byli ovlivněni zkušeností s řešením lineárních rovnic. Rendl & Vondrová (2014) to vysvětlili tím, že těchto lineárních rovnic bývá v 8. ročníku ještě procesem o nalezení jednoho řešení, což mohlo žáky vést k tomu, že když jedno dosazení určité pravidlo potvrdilo, postup bylo možné ukončit.

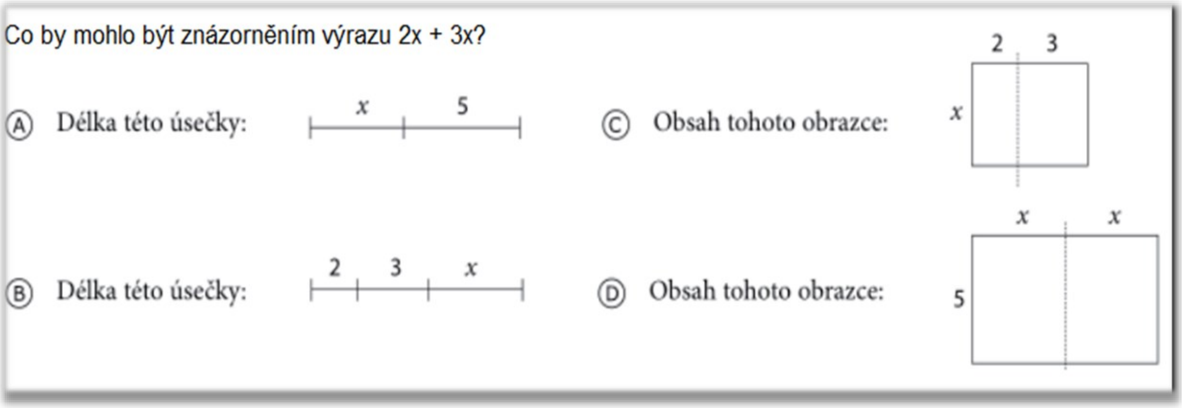
Úloha M05 − 03 − zaměření: zobecnění pro pravidelnost grafických entit



Obr. 15: Zadání úlohy M05-03 (Frýzek & kol., 2009, s. 39)

V této otevřené úloze, která se jako předchozí zaměřila na zobecnění v napojení na pravidelnosti, měli žáci za cíl využít závislost počtu čtverců a počtu zápalek nutných pro výstavbu čtverců a najít číselný výsledek pro konkrétní počet čtverců (buď slovně, číselně či symbolicky). S předpokládaným řešením dosazení 73 do $[\textbf{počet zápalek pro } \boldsymbol{n} \textbf{ čtverců}] =$ $= 3 \cdot (n-1) + 4$, ovšem přišlo jen 8,8 % českých žáků. Přibližně 21,5 % pak úlohu zcela vynechalo a cca 11,7 % žáků uvedlo jen částečné řešení s nákresem čtverců pro všech 73 zápalek a spočtením počtu sirek (Frýzek & kol., 2009).

Úloha M09 − 04 − zaměření: vztažení algebraického modelu ke geometrické situaci



Obr. 16: Zadání úlohy M09-04 – modifikováno o přetočení položek C, D do horizontální pozice (Rendl & Vondrová, 2014, s. 40)

Poslední úloha, která je zde uvedena jako ukázka položek TIMSS 2007, má svoji mírně upravenou verzi i u vlastního výzkumu v kap. 4. Jedná se přitom o uzavřenou úlohu. Její jediné správné řešení je v tomto případě C, které odpovídá obsahu obdélníku, nicméně čeští žáci toto řešení spíše nevybrali (42,5 %). Jak uvádí Rendl a Vondrová (2014), žáci uvážili v převaze výraz jen jako lineární model. Nižší úspěšnosti zde podpořilo tedy to, že čeští žáci vybrali nesprávné řešení ve formě *délky úsečky* (tj. nejčastějšími chybnými řešeními zde bylo A a B), zatímco D bylo rovněž zastoupeno méně jako další případ obsahu obdélníku (Rendl & Vondrová, 2014).

3 SROVNÁNÍ UČEBNIC

Průcha (1998) ve své knize líčí učebnici jako jeden ze zdrojů přípravy výuky. Ačkoli ji učitel nemusí nutně následovat ve všech bodech, často mu může posloužit jako zdroj inspirace, a to při přímé i nepřímé výuce. Cílem této kapitoly je proto učebnice rozebrat. Konkrétně je cílem popsat, jaké přístupy používají jejich autoři při zavádění algebraických výrazů – a to u úloh i výkladu (C2, C3).

3.1 Metodologie

Analýza má 2 části, jež se dělí na *výkladovou* a *úlohovou*. Část výkladová je zkoumána první. Týká se kvalitativního rozboru všech autorských komentářů, kde autoři vysvětlují základní koncepty algebraických výrazů, jakož i příkladů a shrnutí, které je doplňují. V části úlohové je následně vytvořen přehled úloh. Tyto úlohy, jež jsou obsaženy v kapitole jako příslušný výklad, jsou na základě zkoumání učebnic rozebrány hlavně kvantitativně (po typovém rozlišení, jež je popsáno dále).

3.1.1 Zkoumaný vzorek učebnic

Srovnání zahrnuje celkem 9 učebnic, z nichž 2 byly sloučeny. Důvodem je to, že šlo o dvě učebnice, u nichž bylo zkoumané učivo rozděleno. Ale i u nich výběr proběhl podle týchž kritérií. Zaprvé, bylo kritériem to, že každá učebnice musela obsahovat zavedení konceptu algebraických výrazů a jejich úprav; a zadruhé, že každou musela využívat alespoň jedna skupina žáků z vlastního výzkumu, tj. aspoň třída participantů z testového šetření v kap. 4.

Tab. 21: Zkoumaný vzorek učebnic (dále i ‚soubor učebnic‘) (vlastní)

Název učebnice	Nakladatelství	Autoři
Matematika pro 8. ročník ZŠ – algebra	SPN	Čihák & kol.
Hravá matematika 8 – algebra	Taktik	Lauberová & kol.
Matematika [1] pro 8. ročník ZŠ	Prometheus	Odvárko, Kadleček
Matematika: Výrazy [1 & 2]	Prometheus	Herman & kol.
Matematika 8, Aritmetika pro ZŠ	Fraus	Binterová & kol.
Matematika 8 pro ZŠ	Fortuna	Coufalová & kol.
Algebra 8	Nová škola Brno	Rosecká & kol.
Matematika 8	Prodos	Molnár & kol.

Pozn.: Učebnice jsou dále pro přehlednost nazvány podle názvu nakladatele. Příkladem je tedy třeba (SPN) namísto (Čihák & kol., 2009). Rozdílné je pouze značení u Prometheus. Zde je pro sdílení nakladatele odlišena učebnice (Prometheus-G) od Herman & kol. a učebnice (Prometheus-ZŠ) od Odvárka & Kadlečka (2012).

3.1.2 Vyhodnocování úloh

Úlohy, které jsou analyzovány, jsou rozlišovány podle pravidel z Tab. 23 na 3 základní typy (Tab. 22). Tyto typy se dále dělí na různě početné podtypy, které mají své popisy a příklady v *Příloze 1*. Pravidla, podle nichž se rozlišení řídí, byla vytvořena k objektivnějšímu rozboru. Jmenovitě sloužila tomu, aby analýza nezvýhodňovala učebnice, jež se liší v poměru: $(\text{počet úlohy} : \text{počet cvičení})$, a dále aby šlo nezávisle na hodnotiteli určit, do jakého podtypu i typu úloha patří.

Tab. 22: Základní typy úloh (vlastní)

Algebraické úlohy (A): úlohy spočívající v algebraizaci větných i nevětných konstrukcí.

Geometrické úlohy (G): úlohy spočívající ve využití algebraických výrazů v geometrické souvislosti.

Transformační úlohy (T): úlohy spočívající pouze v symbolické manipulaci daných algebraických výrazů bez geometrické souvislosti.

Tab. 23: Pravidla pro analyzování učebnic (vlastní)

P1: Pokud úloha leží na pomezí více typů (Tab. 23), je na níže uvedené škále vybrán typ úlohy sídlící nejvíce vlevo. Odůvodněním je to, že každý typ více vlevo (alespoň ve většině zde zkoumaných úloh) zahrnoval i výskyt zbylých typů vpravo. Například, když byl v úloze počítán obsah geometrického modelu, sestavovaly se v úloze i výrazy, jež jej reprezentovaly, a tyto výrazy se dále také upravovaly.

Geometrizační potenciál	Algebraizační potenciál	Transformační potenciál.

P2: Pokud některý z podtypů úloh není v učebnici identifikován, je doplněn četností **0**.

P3: Pokud úloha stojí na pomezí víc podtypů u téhož typu, vybere se ten s vyšší pozicí v hierarchii tohoto typu (tj. s nižším kódovým číslem, jak je naznačeno i níže).

P4: Za jednu úlohu se považuje vždy taková část cvičení, jež je jednoznačně oddělena od ostatních úloh téhož cvičení (tzn. např. odrážkami, mezerou či číslováním). Takovéto rozdělení se vlivem struktury nevztahuje jen na úlohy A-1, G-1, T-1, T-4, T-5 (Příloha 1).[10]

P5: Do analyzovaných úloh nejsou zařazeny úlohy, jejichž počet je v učebnicích příliš nízký na tvorbu vlastního podtypu (např. tajenky) či byly umístěn mimo výklad (např. obsahy bočních sloupců).

P6: Započítány jsou jen úlohy, v nichž se vyskytují algebraické výrazy. To znamená, že úloha zahrnující jen součet číselných výrazů do žádného podtypu započítána není. Je započítána pouze do celkového počtu úloh, jež učebnice obsahuje.

[10] A-1, G-1, T-1, T-5 jsou vždy započteny jako 1 úloha. T-4 je počítáno jako tolik úloh, kolik je k sobě ve cvičení obsaženo úloh, jež se pojí s variací korespondujících závorek.

3.1.3 Vyhodnocování výkladu

Rozbor výkladu probíhá na základě typů výkladu, které s pravidly analýzy popisuje Tab. 24. Základem je upravená koncepce tzv. *modes of reasoning* (*způsobů zdůvodnění*). Tuto koncepci použili ve výzkumu učebnic např. Stacey & Vincent (2009), přičemž zde došlo na následující změny v podobě:[11]

- Sloučení *experimentální demonstrace* a *dedukce pomocí specifického případu* do jediného zdůvodnění: *induktivního zobecnění (viz induktivní forma usuzování*, oddíl 2.3)
- Nahrazení *dedukce pomocí modelu* a *shoda pravidla s modelem* za zdůvodnění: *pomocí modelu geometrického, algebraického* anebo *reálného*.

Tab. 24: Klasifikace typu zdůvodnění (vlastní)

Odvolání se na autoritu (OdAu): koncept je v učebnici zaveden bez řádného zdůvodnění (například osamocené uvedení vzorce či výčtu pravidel bez jejich rozboru). Tento způsob zdůvodnění je nejvíce vázán na upevňování formální znalosti žáků.

Kvalitativní analogie (KvAn): koncept je v učebnici vysvětlen nematematickou analogií. Příkladem jsou již dříve zmíněná ‚jablíčka a hrušky' (oddíl 2.1), kdy jde o analogie, jež samy nenabízí matematické zdůvodnění, ale izolovaně jen mylnou představu o učivu.

Induktivní zobecnění (InZd): koncept je v učebnici vysvětlen (zpravidla i komentovanou) ukázkou postupu u izolovaných modelů. Cílem činnosti je předvedený postup zobecnit.

Algebraickým modelem (AlgM): nová látka je v učebnici minimálně alespoň v jednom směru algebraické identity doložena transformační silou jazyka algebry. Výjimkou je případ, kdy je pravidlo vysloveno bez jeho ukázky (tj. pak OdAu).[12]

Geometrickým modelem (GeoM): nová látka je v učebnici opodstatněna geometrizací čili tvorbou geometrického modelu. U úprav výrazů může jít například o demonstrace algebraických identit z Obr. 8.

Reálným modelem (RealM): nová látka je v učebnici odvozena pomocí komentovaného řešení slovní úlohy či úloh (ovšem bez použití geometrického modelu). Jako prostředek dosaženého konceptuálního porozumění je zde použit (pseudo)reálný kontext, a to s cílem sémantického ukotvení znalosti nad rámec ukotvení ryze strukturálního.

[11] Důvodem změn je přizpůsobení koncepce pro algebraické výrazy a jejich zavádění.

[12] Např. samotné zmínění, že součin dvojčlenů je dvakrát použitý součin jednočlenu a dvojčlenu.

Pravidla pro hodnocení způsobů zdůvodnění

P1: Součástí analyzovaného výkladu, k němuž se vztahují modes of reasoning, jsou dvě části učebnic: První je vlastní text autorů, který je přítomný v příslušném tematickém bloku učebnice (tzn. kapitoly a oddíly), a druhým jsou úlohy uvozující výklad (tzn. úlohy, které v rámci výkladu dovolují žákům koncepty objevit).

P2: Typ zdůvodnění u výkladu a (výkladových) úloh, je v tabulkách odlišen následující grafickou formou: Černou fajfkou (✔) je zde označen výklad nezahrnující výše uvedenou úlohu (tzn. příklady, komentáře apod.) a šedou fajfkou (✔) úloha uvozující výklad.

P3: S jednou učebnicí může být při vyhodnocení v jednu chvíli spojeno více i žádný z typů zdůvodnění. Speciálním případem je následující pravidlo.

P4: Pokud je u zavedení konceptu využito více zdůvodnění, které se liší svým typem, pak pokud je mezi nimi využit i OdAu, a to po jiném typu, samo OdAu uvedeno není. Důvodem je to, že v každé učebnici je toto formální zdůvodnění eventuálně obsaženo (např. rámeček „Zapamatuj si!'), a tedy jde o zavádějící informaci.

P5: Typy zdůvodnění jsou v textu značeny jinak a v tabulkách. Důvodem je přehlednost. V souvislém textu jsou typy zdůvodnění označovány svými kódy z Tab. 24 (viz příklad výše) a v tabulkách slovně jako v Tab. 24. Důvodem je to, že by v souvislém textu slovní označení mohla splývat.

P6: Analýze jsou podrobeny jen části výkladu z Tab. 25. U analýzy úlohové části, která témata výkladové části kopíruje, je seznam témat identický.

Tab. 25: Analyzované koncepty u výkladové i úlohové části

- Zavedení proměnné a výrazů s proměnnými;
- Zavedení pravidel pro součet a rozdíl mnohočlenů;
- Zavedení pravidel pro násobení více mnohočlenů;
- Vytýkání (včetně postupného vytýkání);
- Zavedení dvojice vzorců ve složení:
  - *druhá mocnina dvojčlenu*
  - *součin součtu rozdíl* (tj. *rozdíl čtverců).*

3.2 Analýza výkladu

3.2.1 Uspořádání tematických celků

První část, kterou je nutné analyzovat, je uspořádání tematických bloků. Motivací je to, že při volbě jiného pořadí kapitol může docházet ke změně u způsobů zdůvodnění látky, jež využívá učitel následující učebnici, a dále v prekonceptech, které má žák. U tohoto rozdílu byly identifikovány jako hlavní 2 faktory:

- Kde dochází k výkladu geometrických témat oproti výkladu algebraických výrazů;
- Kde dochází k výkladu mocnin s přirozeným mocnitelem vůči výkladu algebraických výrazů.

První z těchto faktorů byl v souboru identifikován jako 2 spojené vlivy. Zavedení konceptu *Pythagorovy věty*, jež dovoluje žákovi vidět, že někdy nastává rovnost mezi součtem více výrazů a jedním výrazem (viz dříve Tab. 7), a dále zavedení vzorečků pro míru v geometrii (tedy např. obvod kružnice či obsah kruhu). Důvodem pro vymezení právě těchto oblastí je pak to, že se vyskytovaly u více analyzovaných částí k prohloubení porozumění geometrie. Např. u odvození obecného vztahu pro výpočet délky tělesové úhlopříčky krychle (tedy vzorce) někteří autoři využili *Pythagorovu větu*, aby tento nový vztah objevili, zatímco jiní s ním odvodili další vztahy, jako např. délku části tečny (viz SPN, s. 69). Vzhledem k tomu bylo tedy nutné rozebrat, kde došlo k zavedení samotné *Pythagorovy věty,* konkrétně: Zda k zavedení *Pythagorovy věty* došlo ještě před úvodem algebraických výrazů; až po něm; či v jiném díle učebnice – výsledky přitom ukázaly převahu první možnosti. Tuto variantu, jež poté dovolovala zužitkovat *Pythagorovu větu* i u odvozování vztahů v algebře, zahrnulo při pozorování celkem 5 učebnic (Prometheus-ZŠ; Prometheus-G; Taktik; SPN; a Fortuna), kdežto zbylé možnosti využily jen 1 a 2. Konkrétně, u (Prodos) šlo o druhý postup, tedy autoři *Pythagorovu větu* zavedli až po formalizaci algebraických výrazů, kdežto autoři (Nová škola Brno; a Fraus) tak učinili v jiném, resp. předcházejícím dílu učebnice (Tab. 26). Další rozdíly podobného rázu nicméně už sledovány nebyly. Mezi učebnicemi např. obecně platilo, že geometrická témata nebyla před algebraickými výrazy příliš zaváděna, což je asi u učebnic dáno i pojetím jednotlivých řad. Jak totiž vyplynulo ze souvisejícího pohledu na tyto série, jejich nakladatelé v převaze separují díly vycházející v řadě podle jejich obecného rámce, tj. vyčleňují zvlášť učebnici pro geometrii, algebru i aritmetiku, čímž je sice ucelují v tématu, ale zároveň snižují šanci pro efektivní odůvodnění pojmu jedné oblasti pomocí druhé.

Tab. 26: Pořadí tematických celků v rámci učebnic (soubor učebnic)

SPN		
1. Druhá mocnina a odmocnina 2. Pythagorova věta 3. Mocnina s přirozeným mocnitelem	4. Výrazy 5. Lineární rovnice 6. Statistika	7. Pravděpodobnost
Taktik		
1. Mocniny a odmocniny 2. Výrazy	3. Lineární rovnice 4. Statistika a pravděpodobnost	
Prometheus-ZŠ		
1. Druhá mocnina a odmocnina 2. Pythagorova věta	3. Výrazy 4. Mocniny s přirozeným mocnitelem	
Prometheus-G		
1. Druhá mocnina a odmocnina 2. Třetí mocnina a odmocnina 3. Vyšší mocniny	4. Velká a malá čísla 5. Mocniny v geometrii 6. Pythagorova věta	7. Číselné výrazy 8. Výrazy s proměnnými 9. Lomené výrazy
Fraus		
1. Mocniny a odmocniny 2. Výrazy	3. Rovnice 4. Procenta, úroky, statistika	
Fortuna		
1. Druhá mocnina a odmocnina 2. Pythagorova věta 3. Mocniny s přirozeným mocnitelem	4. Kruh, kružnice 5. Výrazy 6. Válec	7. Lineární rovnice 8. Konstrukční úlohy 9. Statistika
Prodos		
1. Výrazy 2. Lineární rovnice 3. Druhá mocnina a odmocnina 4. Pythagorova věta	5. Množiny 6. Kruh a kružnice 7. Mocniny s přirozeným mocnitelem 8. Množiny bodů dané vlastnosti	9. Konstrukční úlohy 10. Statistika 11. Válec
Nová škola Brno		
1. Druhá mocnina a odmocnina 2. Mocniny s přirozeným mocnitelem 3. Početní výkony s mocninami	4. Výrazy s proměnnou 5. Mnohočleny 6. Lineární rovnice o jedné neznámé	7. Slovní úlohy

Pozn: Tabulka neuvádí opakování učiva nižších ročníků ani souhrny.

Mocniny s přirozeným mocnitelem

Jiné rozdíly, které byly zjištěny, se týkají zavedení mocnin s přirozeným mocnitelem, u něhož byla zjištěna jedna hlavní varianta. Byla to ta, kdy bylo celé téma mocnin zavedeno ještě před zavedením konceptu proměnné (to nastalo u všech učebnic vyjma Prometheus-ZŠ), což mělo výhodu ve výuce výrazů. Plyne to z toho, že jelikož využití různých mocnin proměnné nezbytně mění náročnost, s jakou se provádí úpravy s těmito mocninami (např. rozklad na součin pomocí vzorců), mění se se s nimi i představy o samotných výrazech – a to u generického modelu. Pokud je např. prvně vyložena práce s čísly do druhé mocniny, ale zbylé mocniny jsou vyloženy až po algebraických výrazech (tak je tomu právě u Prometheus-ZŠ), může to u žáků podpořit to, že si pod prototypem každého algebraického výrazu nepředstaví obecný mnohočlen, ale jen polynom *do* 2. stupně. Tento přístup jej pak nutně omezí i na úroveň jejich úprav, jelikož některé složitější případy potkat zatím nemůže.

Zavedení vzorců a součinu mnohočlenů

Další podobnou rozdílností jako výše je relativní pozice zavedení výkladu dílčích konceptů algebraických výrazů – jmenovitě vysvětlení všech případů součinu mnohočlenů podle typů násobených výrazů (Tab. 27); zavedení obou vzorců z Tab. 25 (Tab. 28), a číselných a algebraických výrazů (Tab. 29). Všechny tyto případy pokrývají tabulky níže.

Tab. 27: Odlišnosti v organizaci výkladu: Součin algebraických výrazů (vlastní)

Součin mnohočlenů je pro různé typy výrazů[13] vyložen zvlášť v rámci tří oddílů učebnice.
Učebnice: (Taktik; Prodos; SPN; Prometheus-ZŠ, Prometheus-G). (+): Poskytuje větší svobodu při zdůvodnění a procvičení učiva (−): U učitele může podněcovat přístup, kde se podnětně zavádí jen první případ.
Součin mnohočlenů je s gradací modelů vyložen současně pro všechny typy činitelů.
Učebnice: (Fraus) (+): Dovoluje využít stejného zdůvodnění u různých případů, a tím lépe chápat souvislosti. (−): Vyšší míra abstrakce může činit potíže slabším žákům.
Násobení 2 mnohočlenů je odděleno od zbylých případů zavedením vytýkání
Učebnice: (Nová škola Brno a Fortuna) (+): Těsná vazba na součin jednočlenu s mnohočlenem dovoluje učiteli vysvětlit vytýkání i pomocí obousměrného AlgM, tj. $A \cdot (B + C) = AB + AC$ využité ‚zprava doleva'. (−): Rozdělení případů může snížit počet použitelných vysvětlení pro jiné koncepty. Ubývá např. možnost explanace postupného vytýkání i vytknutí dvojčlenu skrze AlgM.

[13] (1) jednočlen krát jednočlen, (2) jednočlen krát mnohočlen a (3) mnohočlen krát mnohočlen.

Tab. 28: Odlišnosti v organizaci výkladu: Vzorce (vlastní)

Výklad obou vzorců je v učebnici proveden až po zavedení vytýkání před závorku.
Učebnice: (Taktik, Fraus, Nová škola Brno, Fortuna a Prometheus-ZŠ, Prodos). (+): Souběžné použití obou identit oběma směry může podnítit relační vnímání rovnítka. (−): Žádná rizika nebyla pro tento způsob rozpoznána.
Výklad obou vzorců je rozdělen na 2 části: zaprvé dochází na užití obou vzorců k umocnění výrazu; a až následně k rozklad výrazu na součin. Předělem obou částí je zavedení vytýkání.
Učebnice: (SPN, Prometheus-G) (+): Představení obou použití odděleně může díky cílenému procvičení jednoho v jeden moment pomoci slabším žákům. Např. úpravy se jim tolik nemusí plést. (−): Možné omezení procedurálního vnímání rovnítka a ztížení práce s druhým směrem úpravy. Při práci s jedním směrem se žák může například fixovat na jednu roli rovnítka a později odmítat úpravy vyžadující pro ni opačnou roli pro druhou úpravu.

Tab. 29: Odlišnosti v organizaci výkladu: algebraické a číselné výrazy (vlastní)

V učebnici nastává ostrý předěl obou témat a nesouvisející způsob zavedení proměnné.
Učebnice: (Prometheus-ZŠ; Prometheus-G; Nová škola Brno) (+): Výklad působí přehlednějším dojmem, opět výhodnějším pro slabší žáky. (−): Zavedení AV zvlášť může vést dojmu, že témata vzájemně nesouvisí.
V učebnici nastává ostrý předěl obou témat, avšak nastává při zavedení proměnné pomocí znalosti číselných výrazů. Toto zavedení znamená, že se k odvození algebraických výrazů využívá princip zobecnění více číselných výrazů pomocí indukce (viz InZd).
Učebnice: (SPN; Taktik; Fortuna; Prodos) (+): Oslabená verze zbylých dvou přístupů v tabulce. Popsat jej lze tak, že pomocí děleného výkladu částečně mizí možné zmatení žáků u paralelního výkladu, ale zároveň nenastává stejná nepropojenost témat jako u rozdělného výkladu výše. (−): Viz výše.
V učebnici nastává plynulý přechod mezi oběma tématy. Obě témata jsou zde zaváděna najednou.
Učebnice: (Fraus) (+): Úzký vztah obou druhů výrazů podporuje možnost vidět paralely úprav obou z nich. (−): Potenciální riziko nerovnoměrného rozvoje žáků. Rizikem je např. menší počet úloh, jež bude žák řešit u každého tématu a taktéž vyšší rychlost, s nímž bude probíhat výklad.

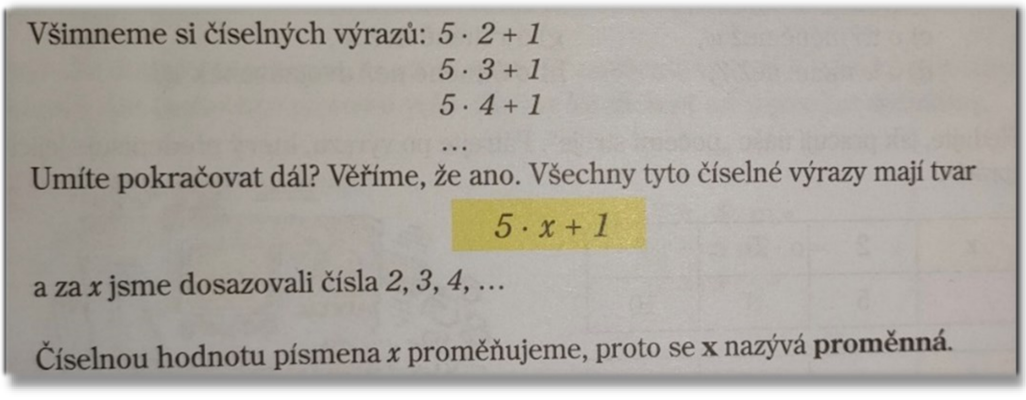
3.2.2 Proměnná a algebraický výraz

Z Tab. 30 plyne, že nejčastějším typem zdůvodnění konceptu algebraických výrazů (a tedy i proměnné) byl v souboru učebnic RealM a InZd. Jednalo se tak to po řadě u zobecnění, jež bylo prováděné u situace (pseudo)reálného a jazykového kontextu. U InZd se tak stalo konkrétně tehdy, když se proměnná dostala do zápisu jako zobecnění pro části tří až čtyř číselných výrazů téže struktury (viz Obr. 17, Obr. 18), kdežto pro RealM to bylo až koncem řešení komentované slovní úlohy. Rozdíl tak tvořila usuzování z

Tab. 13. Zatímco u InZd, jež využilo indukce, byl užit přístup s cílem strukturálního upevnění pojmu algebraického výrazu (čiže kontext zde pro jeho zavedení nebyl zásadní), u RealM tomu bylo jinak (Obr. 19, Obr. 20). Model slovní úlohy zde sloužil i jako prostředek pro sémantické porozumění (algebraizace se odehrávala v praktické situaci), což dovolilo více poznat využitelnost proměnné. Více než její ryzí aplikovatelnost v matematice mohli žáci totiž vidět, že ji lze využít i v běžném životu, což se jeví jako hodnotnější možnost, jak proměnnou napoprvé zavádět.

Tab. 30: Zavedení algebraických výrazů (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu						✓		✓
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění	✓				✓			
Algebraickým modelem								
Reálným modelem		✓	✓	✓				
Geometrickým modelem							✓	


Všimneme si číselných výrazů: $5 \cdot 2 + 1$

$5 \cdot 3 + 1$

$5 \cdot 4 + 1$

…

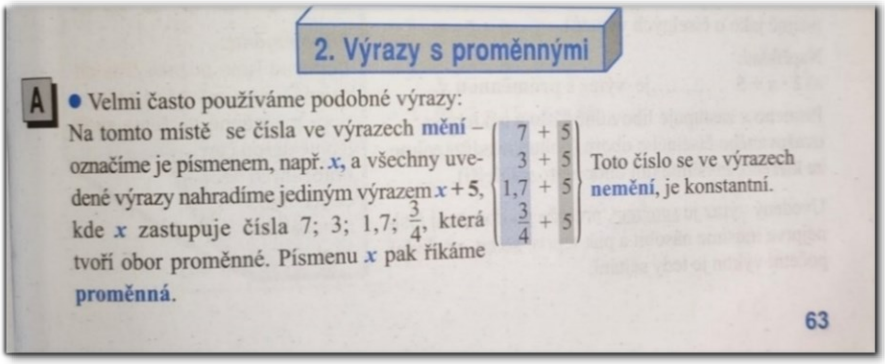
Umíte pokračovat dál? Věříme, že ano. Všechny tyto číselné výrazy mají tvar

$$5 \cdot x + 1$$

a za x jsme dosazovali čísla $2, 3, 4, \ldots$

Číselnou hodnotu písmena x proměňujeme, proto se **x** nazývá **proměnná**.

Obr. 17: (Prodos, s. 21): Zavedení výrazů s proměnnými



2. Výrazy s proměnnými

A • Velmi často používáme podobné výrazy:
Na tomto místě se čísla ve výrazech **mění** – označíme je písmenem, např. x, a všechny uvedené výrazy nahradíme jediným výrazem $x + 5$, kde x zastupuje čísla 7; 3; 1,7; $\frac{3}{4}$, která tvoří obor proměnné. Písmenu x pak říkáme **proměnná**.

$$\left.\begin{array}{r} 7 + 5 \\ 3 + 5 \\ 1{,}7 + 5 \\ \frac{3}{4} + 5 \end{array}\right\}$$

Toto číslo se ve výrazech **nemění**, je konstantní.

63

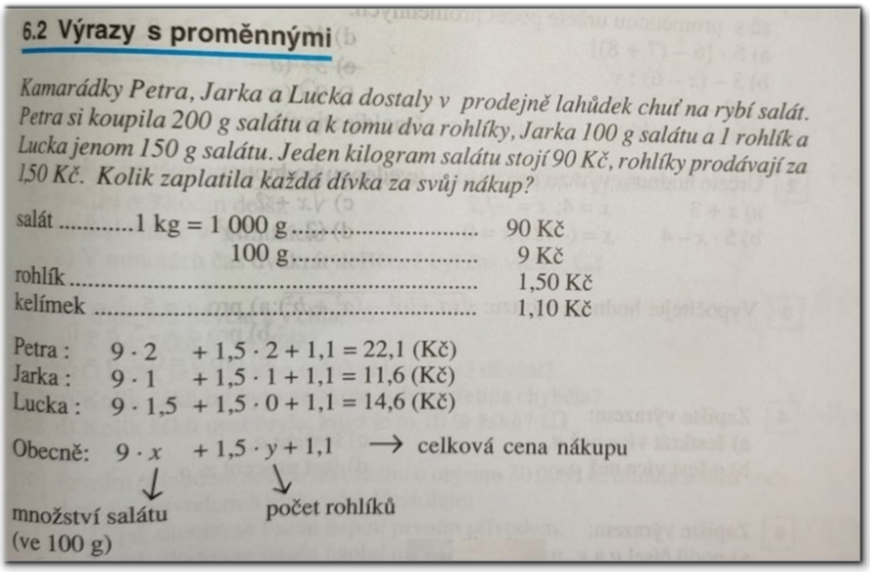
Obr. 18: (SPN, s. 63): Zavedení výrazů s proměnnými

Příklad 1

Zemský povrch je rozdělen poledníky na 24 časových pásem, v každém pásmu platí tzv. pásmový čas. Za počátek pokládáme nultý poledník, který je označovaný jako světový čas. Při přechodu o jedno časové pásmo se změní čas o jednu hodinu, a sice směrem na východ (vpravo) jednu hodinu připočítáme, směrem na západ (vlevo) jednu hodinu odpočítáme.

a) Když je v Londýně 11 hodin, jaký čas bude ve vyznačených městech? Zapiš i výpočet.
b) Když je v Londýně x hodin, jaký čas bude ve vyznačených městech?
c) V každém výrazu z možnosti b) nahraď písmeno x číslem 11. Zkontroluj, zda jsou tvé výsledky stejné jako časy vypočítané v možnosti a).

Obr. 19: (Taktik, s. 84): Zavedení výrazů s proměnnými



6.2 Výrazy s proměnnými

Kamarádky Petra, Jarka a Lucka dostaly v prodejně lahůdek chuť na rybí salát. Petra si koupila 200 g salátu a k tomu dva rohlíky, Jarka 100 g salátu a 1 rohlík a Lucka jenom 150 g salátu. Jeden kilogram salátu stojí 90 Kč, rohlíky prodávají za 1,50 Kč. Kolik zaplatila každá dívka za svůj nákup?

salát ....1 kg = 1 000 g .... 90 Kč
100 g .... 9 Kč
rohlík .... 1,50 Kč
kelímek .... 1,10 Kč

Petra : $9 \cdot 2 \quad + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}1 = 22{,}1$ (Kč)
Jarka : $9 \cdot 1 \quad + 1{,}5 \cdot 1 + 1{,}1 = 11{,}6$ (Kč)
Lucka : $9 \cdot 1{,}5 \quad + 1{,}5 \cdot 0 + 1{,}1 = 14{,}6$ (Kč)

Obecně: $9 \cdot x \quad + 1{,}5 \cdot y + 1{,}1$ $\longrightarrow$ celková cena nákupu

množství salátu (ve 100 g) — počet rohlíků

Obr. 20: (Fortuna, s. 101): Zavedení výrazů s proměnnými

3.2.3 Úvodní modelace

Co se týče dalších rozdílů, které se projevily při zavedení proměnné v učebnicích, byly sledovány i dva další parametry u první algebraizace. Jednalo se o:

- Kontext situace, v němž autorská algebraizace probíhala (tj. známost kontextu);
- Struktura výrazu, který byl následně získán (tj. zda šlo např. o dvojčlen či trojčlen).

Výsledek tohoto sledování byl následně shrnut v Tab. 31 dle srovnání obou parametrů dle jejich subjektivního hodnocení[14]. Jak z této tabulky plyne, výrazem, který měl strukturu, jež by byla pro žáky nejméně složitá, byl jednočlen učebnice (Fraus), kdežto nejobtížnějším by byl trojčlen učebnice (Fortuna). Z hlediska algebraizování situace byla naopak nejvíce dohledána práce se známým jazykovým kontextem. Tímto kontextem oplývaly v souboru konkrétně učebnice (SPN; Prodos; Prometheus-G), zatímco učebnice (Fortuna) využila pro žáky nejvíce známý kontext (pseudo)reálného typu.

Tab. 31: Parametry úvodní algebraizace (soubor učebnic)

Algebraický model (nejnižší složitosti výrazu po nejvyšší):

- ⇨ jednočlen: 1 proměnná, koeficient … (Fraus)
- ⇨ dvojčlen: 1 proměnná, 1 konstanta … (Taktik; Prodos; SPN)
- ⇨ dvojčlen: 2 proměnné … (Nová škola Brno, Prometheus-ZŠ i G)
- ⇨ trojčlen: 2 proměnné, 1 konstanta … (Fortuna)

Známost kontextu (od nejvyšší očekávané obeznámenosti žáků po nejnižší)

- ⇨ jazykový kontext … (SPN; Prodos; Prometheus-G)
- ⇨ nákup brambor v supermarketu … (Fortuna)
- ⇨ sázení květin … (Fraus)
- ⇨ nákup jízdného na turistický zájezd … (Prometheus-ZŠ)
- ⇨ let přes různá časová pásma … (Taktik)
- ⇨ výroba lisů v továrně … (Nová škola Brno)

Další zkoumaný aspekt se týkal metody, kterou autoři použili pro zavedení proměnné. Autoři (Fortuna a Taktik) například řešili slovní úlohy, které vyžadovaly algebraizaci induktivním způsobem. To znamená, že nejprve pracovali s konkrétními číselnými hodnotami a až poté přešli k algebraickému výrazu. Na druhé straně, autoři (Prometheus-ZŠ) uplatnili deduktivní přístup. Namísto toho, aby začali s konkrétními čísly a postupně je zobecňovali na proměnnou, rozhodli se nejprve sestavit algebraický výraz a až poté do něj dosadit konkrétní čísla, aby našli izolované modely situace. Tím se lišila úroveň abstrakce. V případě dedukce, jak ji prezentovala učebnice (Prometheus-ZŠ), musel žák pochopit algebraický výraz bez opory konkrétních číselných hodnot, zatímco indukce takovou oporu poskytovala.

[14] Pokud nebyl hledaný příklad nalezen ve výkladu, je vzat z první úlohy viz (Fraus; Prometheus-G).

Rozebírané role písmen

Po zobecnění číselných výrazů, které autory dovedlo k odvození algebraického výrazu jako nového konceptu, bylo u všech učebnic explicitně představeno více rolí písmen. Četnost těchto rolí shrnuje Tab. 32. Z hlediska jejich výskytu bylo nejčastěji představeno *písmeno využité jako zobecněné číslo*, což odpovídá i hlavním typům zdůvodnění popsaným výše, a dále *role objektu, neznámé* a *konstanty*, kdy nejnižší zastoupení měla *závisle proměnná*. To, že se vyskytla méně, je však očekávatelné. Např. *role konstanty*, jež měla rovněž nižší zastoupení, bývá v podobě π zdůrazněna u učiva kružnic, což vede na to, že nemusí být znova opakována u výrazů. *Závisle proměnnou* provází totéž u učiva funkcí (viz Tab. 26). I z tohoto důvodu mohla tudíž tato role absentovat u většiny učebnic.

Tab. 32: Explicitně diskutované role písmen ve výkladu (vlastní)

Role písmen ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Zobecněné číslo	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Závisle proměnná	✓							
Vyjádření objektu	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
Určitá neznámá	✓	✓						✓
Významná konstanta	✓				✓		✓	

Další prvek, který u mnoha učebnic absentoval, bylo vymezení proměnné formou definice. Jak lze vidět z Tab. 33, z celkového počtu osmi analyzovaných učebnic zahrnuly exaktnější vymezení proměnné jen čtyři. Autoři zbylých naopak koncept zavedly, aniž by jej popsali (maximálně poskytli příklady), což šlo proti zásadám oddílu 2.3. Důvodem je to, že právě tam bylo popsáno (viz Obr. 2), že proměnná je koncept, jehož porozumění podmiňuje algebraické uvažování. A tedy vynechání jeho definice může vést žáky k tomu, že si spíše upevní mylné představy.

Tab. 33: Přítomné vymezení proměnné (soubor učebnic)

Učebnice	Definice/přiblížení proměnné
SPN	„Proměnná je znak, nejčastěji písmeno (např. x, y, z), zastupující čísla z určité množiny; tato čísla tvoří obor proměnné. (s. 64) “
Taktik	„Neznámou, respektive proměnlivou hodnotu ve výrazu označujeme pomocí písmena (např. m, x, apod.) a říkáme ji proměnná (s. 84).“

Prodos	„Číselnou hodnotu písmena x [v příkladu $5 \cdot x + 1$] proměňujeme [za $2, 3, 4$], proto se nazývá proměnná (s. 21)“
Prometheus-G	„…Zápis [$o =$] $4 \cdot a$ je příkladem *výrazu s proměnnou*. Písmeno a se nazývá *proměnná*. Tento název napovídá, že se hodnota a může *měnit* podle toho, s jakým čtvercem pracujeme (s. 106).“

Záměna role jednotky a zobecněného čísla

Očekávané zdůraznění, že operátor mezi proměnnou a jejím koeficientem odpovídá symbolu násobení, a nikoli sčítání, zdůraznili jen autoři jedné učebnice. Šlo o autory (Fraus), kteří přiložili příklad. Naopak zbytek využíval tohoto vztahu jen nepřímo, tj. operátor využívali k úpravám $2 \cdot a = 2a$, ale jelikož jej nikde nevysvětlili, rostlo u žáků riziko, že proměnná bude chápana jako jednotka a dojde na potřebu uzavřenosti.

Vztah písmen a geometrie

Další riziko, které bylo identifikováno, plynulo z propojení jazyka algebry a geometrie, viz Tab. 34. Jak tato tabulka ukazuje, učebnice opět neprovázel jednotný trend, jak podpořit vztah mezi oběma tématy. Zatímco autoři některých učebnic (Prodos) zjevně cílili na to, že budou geometrii rozebírat zvlášť od algebry v jiné učebnici, jiní autoři zkoušeli propojení zajistit i v algebře, ale volili nevhodné provedení. Tato forma je popsaná níže. Forma se týkala toho, že autoři vybraných učebnic (Prometheus-ZŠ; a SPN) využití algebry v rámci geometrie prováděli na nevhodném místě učebnice. Po zavedení proměnné rovnou začali algebraicky odvozovat vybrané vzorce pro míru v geometrii (skrze příklady, které komentovali), nicméně, než tak učinili, nezavedli či nevysvětlili potřebné úpravy výrazů, takže se snížila pochopitelnost příkladů, které poskytli (využity byly např. součet a součin mnohočlenů).

Tab. 34: Orientační míra propojení algebry a geometrie ve výkladu algebry (vlastní)[15]

+ nejvýše 2 případy ++ 2 až 5 případů +++ 5 a víc případů	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Před úpravami mnohočlenů	+++	+	++	+	+	+++	++	+
V rámci úprav mnohočlenů	+	+++	+	++	+	++	++	++

[15] Případy zahrnují odvození geometrických vzorečků na různých místech učebnice či zdůvodnění úprav výrazů skrze GeoM. Hranice 5 případů byla zvolena proto, že každý z konceptů Tab. 25 lze zdůvodnit skrze GeoM, a hranice 2 proto, že se GeoM použije jen u zavedení vzorců z Tab. 25.

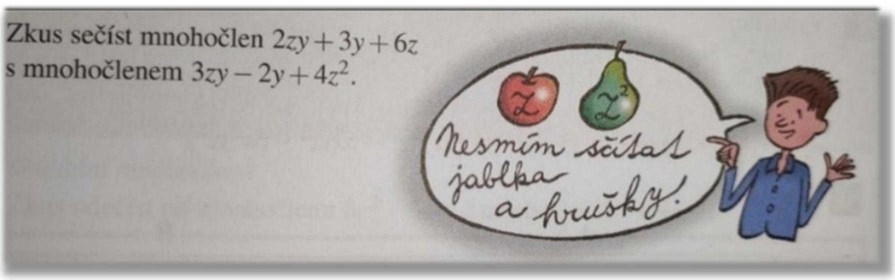
3.2.4 Součet mnohočlenů

Součet mnohočlenů, který je první operací s proměnnou, kterou žák mimo dosazování poznává, zachytává ve způsobech použitých zdůvodnění Tab. 35. Tato tabulka znázorňuje, že největší podíl mezi zdůvodněními měla v souboru učebnic KvAn, a to formou ‚jablíček a hrušek'. Tato analogie, pokrytá i oddílem 2.1, byla zjištěna ve dvou formách: s přidanými algebraickými výrazy, které byly použity v korespondenci s obrázky a jen skrze obrázky.

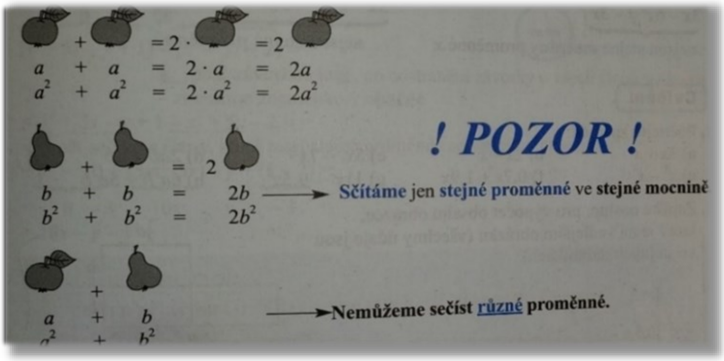
Tab. 35: Zavedení součtu mnohočlenů (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu				✓				
Kvalitativní analogie	✓		✓		✓	✓	✓	✓
Induktivní zobecnění								
Algebraickým modelem								
Reálným modelem								
Geometrickým modelem		✓	✓					

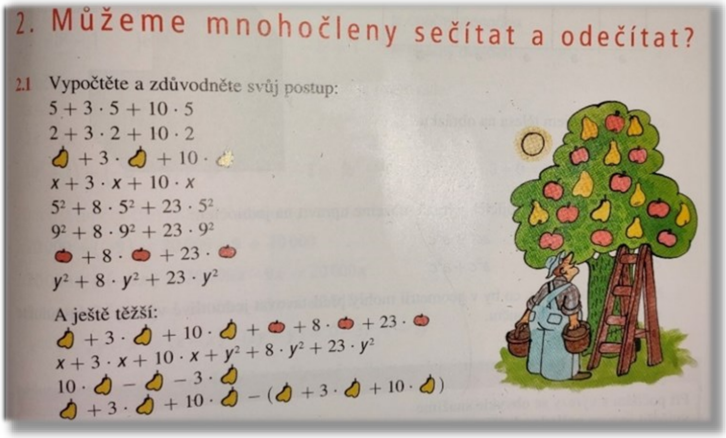
V druhém případě, kdy se jednalo jen o izolované kresby ovoce, jež pro žáky znázorňovaly, že nemohou ‚sčítat jablka a hrušky' (Obr. 21), byla situace jiná svým vlivem na rolí písmen. Ve třech učebnicích, kde byl tento přístup zjištěn (tj. Nová škola Brno; Prometheus-G; Prometheus-ZŠ), bylo díky absenci algebraického zápisu totiž nižší riziko, že u žáka dojde k záměně zobecněného čísla a jednotek (tj. k negativnímu zmíněné této KvAn). Patrné je to zejména při srovnání s Obr. 22, Obr. 23 a Obr. 24. Jak lze totiž z jejich obsahu vidět, přístup všech učebnic (Prodos; SPN; i Fraus) využíval dosazení za ovoce tak, že 1 písmeno vždy přišlo na pozici 1 ovoce, včetně mocnin, kdy u (Prodos) byl dokonce použit i iniciál vyobrazeného objektu skrze synkopické značení.



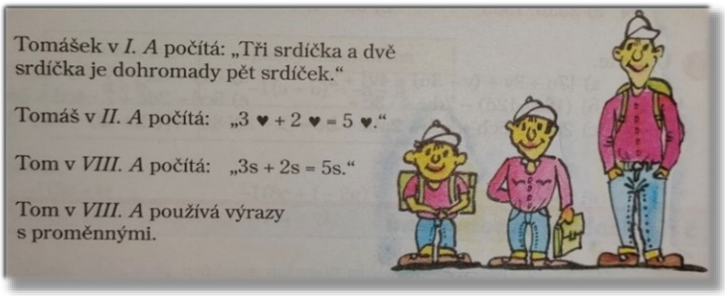
Obr. 21: (Prometheus-ZŠ, s. 55): Zavedení sčítání mnohočlenů – 2



Obr. 22: (SPN, s. 73): Zavedení sčítání mnohočlenů



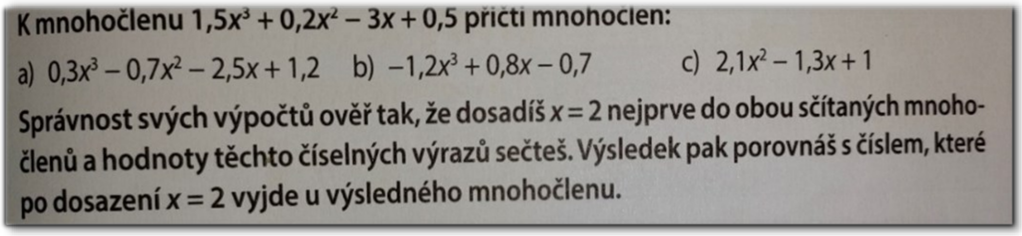
Obr. 23: (Fraus, s. 59): Zavedení sčítání mnohočlenů



Obr. 24: (Prodos, s. 23): Zavedení sčítání mnohočlenů

Právě synkopické značení prezentované autory (Prodos) je nejvíce zavádějící. Například, když se zde bez následného zdůraznění pravé role písmen žák dozví, že $3s$ vyjadřuje *‚tři srdce'* (jako výše) a že $3k$ vyjadřuje *tři křížky'* (viz Prodos, s. 24), mohou oprávněně domnívat, že s, k značí jednotky, což zevně neplatí. Současně je tím také podpořena šance výskytu potřeby uzavřenosti. Tato skutečnost je totiž dále podpořena i tím, že v učebnici (Prodos) není jako v jediné obsažen žádný návod, jak této chybě předcházet – také jinak: vzorové ne-modely, které se týkají sčítání mnohočlenů, či postupy, jak úpravu zkontrolovat.

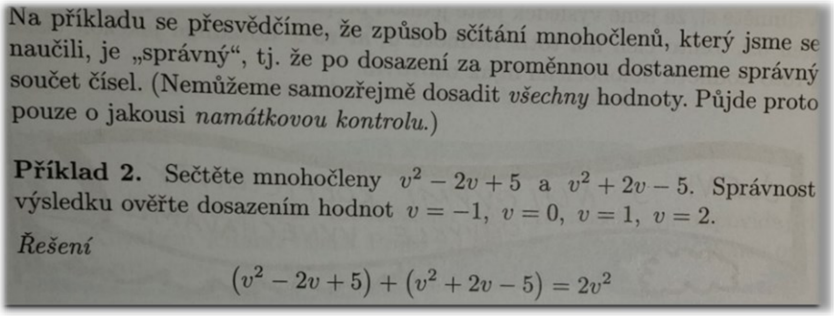
Ze všech zkoumaných učebnic přitom alespoň jednu metodu využívají všechny ostatní. Např. zmíněné ne-modely, které mohou nabýt podoby jako $a + b \neq ab$, lze najít u učebnic (SPN; Prometheus-ZŠ; Fortuna; Fraus), kdežto zkoušku dosazením u (SPN; Prometheus-ZŠ; Prometheus-G; Fortuna a Fraus). Na druhou stranu, tato zkouška není vždy popsána přesně. Například u (Taktik) volí autoři až příliš stručné vysvětlení, jelikož neupozorňují na vše, co je u ní třeba provést (viz Obr. 25). Konkrétně uvádí, že za proměnnou stačí pro zkoušku dosadit jen *nějaké číslo* (v kontextu přiložené úlohy se navíc může žákovi zdát, že stačí pouze jedno) a poté že stačí, aby platila rovnost pro zadaný a koncový výraz a úprava bude správná. Jak bude nyní ukázáno, toto není obecně pravda. Příkladem je situace, kdy se žák pokusí zjednodušit výraz $x^2 + 4x + x$ při následném dosazení 0. Pokud bude totiž postupovat, že si výraz převede na $x^2 + 5x$ a pak dosazení $x = 0$, je zřejmé, že ověří jeho správnost, protože postup byl očividně správný. Co se ovšem stane pro chybnou úpravu? Pokud bude žák např. postupovat tak, že si místo výrazu $x^2 + 5x$ napíše $6x$ (provede tedy neekvivalentní úpravu $x^2 + 5x = 6x$), tatáž kontrola selže ve své účinnosti. Namísto toho, aby mu nyní pomohla ověřit, že by byl správný, ověří týmž postupem i nesprávné řešení, neboť $x = 0$ povede opět na $0^2 + 4 \cdot 0 + 0 = 6 \cdot 0$, přestože úprava výrazu byla chybná.


K mnohočlenu $1{,}5x^3 + 0{,}2x^2 - 3x + 0{,}5$ přičti mnohočlen:
a) $0{,}3x^3 - 0{,}7x^2 - 2{,}5x + 1{,}2$ b) $-1{,}2x^3 + 0{,}8x - 0{,}7$ c) $2{,}1x^2 - 1{,}3x + 1$
Správnost svých výpočtů ověř tak, že dosadíš $x = 2$ nejprve do obou sčítaných mnohočlenů a hodnoty těchto číselných výrazů sečteš. Výsledek pak porovnáš s číslem, které po dosazení $x = 2$ vyjde u výsledného mnohočlenu.

Obr. 25: (Taktik, s. 93): Zkouška dosazením za proměnné

Jak je z tohoto příkladu tedy vyplývá, zásadní je zdůraznit všechny kroky zkoušky – včetně výběru dosazovaných hodnot. Chybou se tu totiž stalo, že autoři (Taktik) takto nepostupovali. Při svém popisu zkoušky dostatečně nezdůraznili, jaká čísla mohou být při provedení dosazena (viz výše uvedený člen x zastoupený v každém členu upraveného výrazu), a tím proto zkouška mohla vést i na to, že byla nejednoznačná.

Další nedostatek, který chybu podpořil, bylo to, že autoři vágnějším popisem částečně implikovali, že stačí dosadit jen jednu hodnotu. Tato tendence nebyla však vlastní jen jim. Jediná učebnice, u které bylo v souboru zároveň explicitně zdůrazněno, že je třeba dosadit do výrazu více hodnot než jednu a u níž zároveň bylo i rozebráno, jak celou zkoušku provést, byla (Prometheus-G) z Obr. 26.


Na příkladu se přesvědčíme, že způsob sčítání mnohočlenů, který jsme se naučili, je „správný“, tj. že po dosazení za proměnnou dostaneme správný součet čísel. (Nemůžeme samozřejmě dosadit *všechny* hodnoty. Půjde proto pouze o jakousi *namátkovou kontrolu*.)

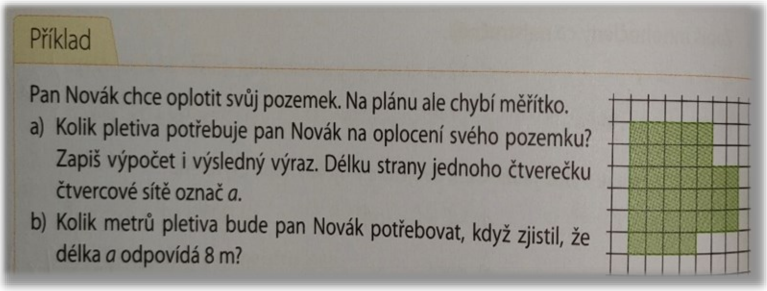
Příklad 2. Sečtěte mnohočleny $v^2 - 2v + 5$ a $v^2 + 2v - 5$. Správnost výsledku ověřte dosazením hodnot $v = -1$, $v = 0$, $v = 1$, $v = 2$.

Řešení

$$(v^2 - 2v + 5) + (v^2 + 2v - 5) = 2v^2$$

Obr. 26: (Prometheus-G, s. 116): Zavedení sčítání mnohočlenů

Z ostatních učebnic, kde toto vysvětlení nebylo, vyrovnávali toto omezení autoři (Taktik; a Prometheus-ZŠ) podnětnějšími úvody do sčítání mnohočlenů. Například, jak je vidět z úvodního příkladu (Taktik) na Obr. 27, cílem autorů bylo nechat žáka objevit (a posléze i dosazením ověřit), jaké množství pletiva bude třeba k oplocení pozemku znázorněného ve čtvercové síti, zatímco u (Prometheus-ZŠ) šlo o kvádry bez zkoušky dosazením (Obr. 28). V obou případech se tedy jednalo o argumentaci GeoM.

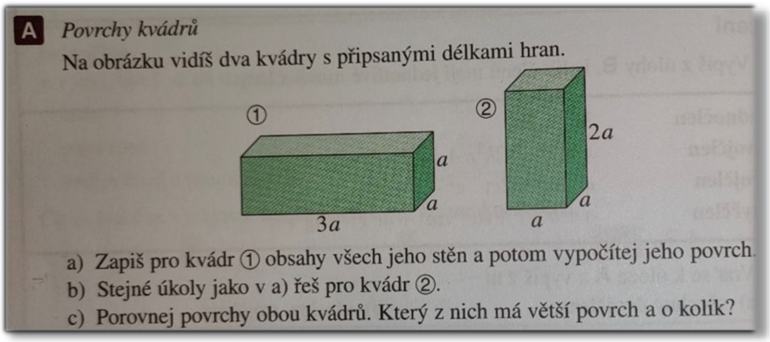

Příklad

Pan Novák chce oplotit svůj pozemek. Na plánu ale chybí měřítko.

a) Kolik pletiva potřebuje pan Novák na oplocení svého pozemku? Zapiš výpočet i výsledný výraz. Délku strany jednoho čtverečku čtvercové sítě označ *a*.

b) Kolik metrů pletiva bude pan Novák potřebovat, když zjistil, že délka *a* odpovídá 8 m?

Obr. 27: (Taktik, s. 92): Zavedení sčítání mnohočlenů


A *Povrchy kvádrů*

Na obrázku vidíš dva kvádry s připsanými délkami hran.

a) Zapiš pro kvádr ① obsahy všech jeho stěn a potom vypočítej jeho povrch.

b) Stejné úkoly jako v a) řeš pro kvádr ②.

c) Porovnej povrchy obou kvádrů. Který z nich má větší povrch a o kolik?

Obr. 28: (Prometheus-ZŠ, s. 54): Zavedení sčítání mnohočlenů

3.2.5 Součin mnohočlenů

Další úpravou, jež měla u výrazů silné zastoupení v rámci svého geometrického vysvětlení, je násobení čili opakované sčítání mnohočlenů. Toto zavedení mělo obvykle 3 kroky:

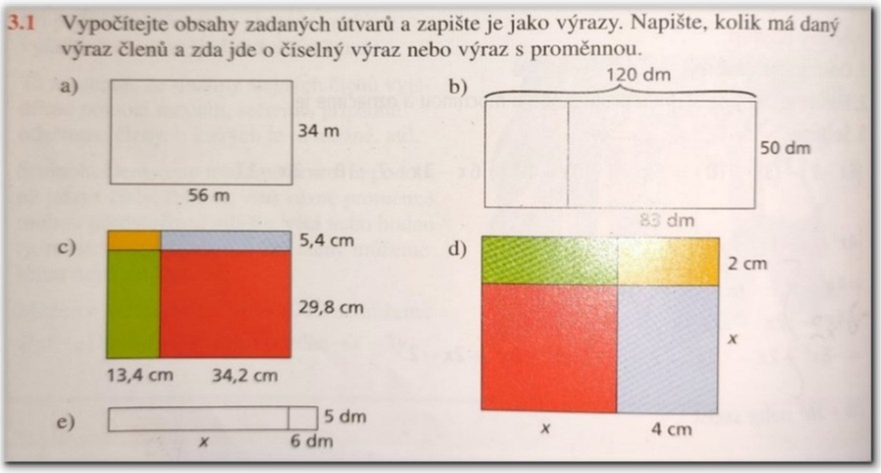
a) Zavedení součinu jednočlenů ve spojení s úpravou mocnin při této operaci (Tab. 36);

b) Zavedení součinu mnohočlenu s jednočlenem neboli roznásobení závorky (Tab. 37);

c) Zavedení dvojice mnohočlenů, jež předchozí úpravu zobecňuje (Tab. 38).

Ze všech těchto případů bylo nejvíce uplatněno OdAu a GeoM, a to pro každý z případů **a**, **b**, **c**. Autoři (Fraus, Obr. 29) např. volili GeoM skrze gradovanou sérii úloh, jež následně ukázala, jak jsou k sobě jednotlivé případy **a**, **b**, **c** analogické (Obr. 29), zatímco (Fortuna) nabídla jen vyjmenování pravidel. Jiné přístupy byly naopak voleny minimálně. Vysvětlení typu RealM, kdy by se použila slovní úloha, bylo kupříkladu využito jen u (Nová škola Brno), kde se týkalo stejného příkladu, jaký byl zmíněn už u úvodní algebraizace, zatímco AlgM byl použit jen u (Prodos). Na druhou stranu právě v případě (Prodos) šlo zároveň o vcelku podnětný přístup. Výše uvedený případ **b**, jenž tkví v násobení mnohočlenu a jednočlenu, autoři totiž nejprve převedli **b** na opakované sčítání, jež žáci znali, a poté upravili jako:

$$2 \cdot (a + b) = (a + b) + (a + b) = (a + a) + (b + b) = 2a + 2b.$$



Obr. 29: (Fraus, s. 62): Zavedení součinu mnohočlenů

Jiné přístupy učebnic se týkaly zkoušky správnosti. Na rozdíl od sčítání mnohočlenů, kde byla např. zkouška dosazením za proměnné či ukázka ne-modelů pozorována v převaze, téměř žádná z učebnic trend neopakovala, tj. u násobení mnohočlenů neobsáhla možné ne-modely, které by byly vhodné u součinu mnohočlenů (např. nevynásobeni všech členů závorky apod.), a až na (Nová škola Brno) žádná ani nezmínila zkoušku dosazením.

Jediným rozdílem byl přístup k výkladu u (SPN), který kombinoval GeoM a OdAu. Rozdílné však bylo, že GeoM sloužil jen k motivaci součin hledat (Obr. 30). Namísto toho, aby autoři totiž použili geometrický model kvádru samostatně k tomu, aby s ním i poté vysvětlili, proč se v případě násobení **b** provádí úprava předloženým způsobem (tzn. aby se napřed určil povrch kvádru vzorcem, pak součtem povrchů všech jeho stěn a pak aby se oba výsledky porovnaly), napsali autoři vzorec hned na začátku a pak jen sami předvedli roznásobení závorky. V jádru zavedení šlo tedy i o argumentaci typu OdAu.

Tab. 36: Součin dvou jednočlenů (vlastní)

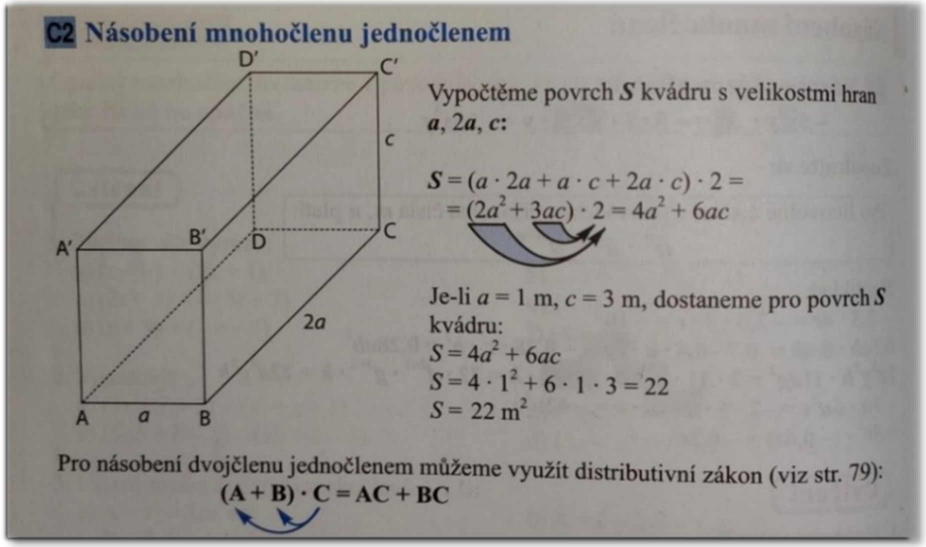
Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu	✓		✓	✓				
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění								
Algebraickým modelem								✓
Reálným modelem								
Geometrickým modelem		✓				✓	✓	

Tab. 37: Součin mnohočlenu a jednočlenu (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu	✓		✓	✓				✓
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění								
Algebraickým modelem					✓			
Reálným modelem						✓		
Geometrickým modelem	✓	✓		✓		✓	✓	

Tab. 38: Součin dvou mnohočlenů (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu	✓	✓	✓	✓	✓			✓
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění								
Algebraickým modelem								
Reálným modelem								
Geometrickým modelem		✓		✓		✓	✓	



Obr. 30: (SPN, s. 78): Zavedení součinu mnohočlenů

3.2.6 Vytýkání před závorku

Vytýkání před závorku, které pro všechny učebnice představuje další úpravu navazující na zavedení součinu mnohočlenů (resp. pro některé u úpravu zaváděnou společně s ním), je budováno podle stejného schématu. Jedná se o:

- zavedení dělení algebraického výrazu daným členem (bez vytknutí před závorku);
- vytýkání zadaného či nezadaného členu před závorku ze algebraického výrazu;
- případné zavedení postupného vytýkání, které není povinné.

Dělení algebraickým výrazem, které stojí na začátku tohoto schématu, je vytýkání již velice podobné, nicméně je třeba zdůraznit, že není celkově stejné. Na rozdíl od něj např. ve svých až 3 pozorovaných formách (tj. dělení mnohočlenu číslem, proměnnou a složeným výrazem), nevyužívá symbolu násobení, ale dělení, a tedy v důsledku toho neobsahuje závorky, ale právě symbol dělení ÷ (Obr. 31).

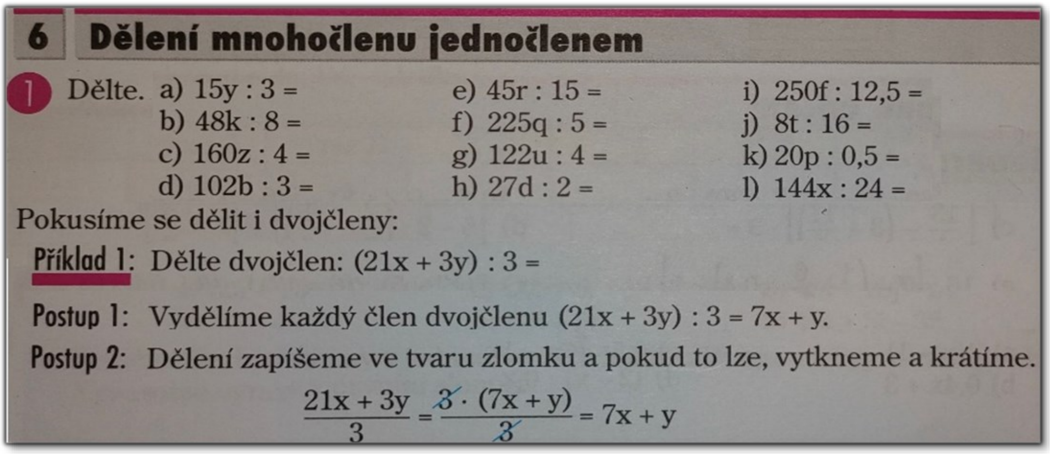
Násobení jednočlenů ■ vynásobíme koeficienty ■ vynásobíme mocniny se stejným základem	Příklady: $4 \cdot 5k = 20k$ $6x^2y \cdot 3xy^3 = 18x^3y^4$
Dělení jednočlenů ■ vydělíme koeficienty ■ vydělíme mocniny se stejným základem	$8x^2 : 4 = 2x^2$ $10a^3b : 2ab = 5a^2$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

Obr. 31: (Fortuna, s. 106): Dělení mnohočlenů

První a nejjednodušší forma tohoto dělení byla dohledána nejvíce. Dělení čísly využili tímto způsobem k přestavení vytýkání autoři učebnic (Fortuna; Nová škola Brno; Prodos; Prometheus-G; a Fraus), dělení proměnnou následně autoři (Fortuna, Nová škola Brno a Prometheus-G) a dělení složeným výrazem nakonec jen autoři (Prometheus-G). Odlišná byla nicméně i forma prezentace samotného dělení. Např. některé učebnice se lišily tím, že v nich zavedení dělení neproběhlo jako zavedení každého nového tématu (tj. případ Prodos, Fraus a Nová Škola Brno, kde se tak dělo jen s 1 příkladem a až přímo u zavedení vytýkání), kdežto u (Fortuna; Nová škola Brno a Prometheus-G), dostalo dělení i vlastní tematický blok. To znamená, že se u různých učebnic lišil prostor věnovaný úpravě. Zatímco u (Prodos; a Fraus) představovalo dělení jen jakýsi jednorázový způsob, jak žákům přiblížit, co je principem vytýkání, ale ne vlastní téma, u učebnic (Fortuna; Nová škola Brno a Prometheus-G) šlo právě o vlastní matematický koncept na úrovni vytýkání. Během zavedení autoři tudíž nepřiblížili žákovi jen dělení čísly, jež postihly učebnice výše, ale i proměnnou – s čímž přichází i případ dělení nulou, který však z (Prodos, Fraus a Nová Škola Brno) ošetřili jen autoři (Prodos, Fraus)

Další rozdíl, který u těchto učebnic nastal, je ten, že se na zavedení dělení výrazů pojí na různá další témata. Autoři buď jako u (Fortuna) razí přístup, kdy se k sobě pojí navzájem opačné úpravy zaváděné společně (viz Obr. 31, kde se tímto způsobem zavádí násobení a dělení jednočlenů a pak násobení a dělení mnohočlenů jednočlenem), či se tak neděje a výklad je rozdělen. K tomuto výkladu se řadí např. i (Prodos) z Obr. 32.

Jak už z těchto skutečností nakonec vyplývá, u většiny učebnic bylo zavedení vytýkání založené na podobném principu. Zcela či zčásti podle Tab. 39, Tab. 40 vycházel tamní přístup z výše popsaného dělení mnohočlenu dalšími výrazy (tedy formou AlgM), a to i pro postupné vytýkání, jež obsáhly 4 učebnice z Tab. 40 (viz popis zavedení postupného vytýkání u Tab. 41,Tab. 42).



6 Dělení mnohočlenu jednočlenem

1 Dělte. a) 15y : 3 = e) 45r : 15 = i) 250f : 12,5 =
b) 48k : 8 = f) 225q : 5 = j) 8t : 16 =
c) 160z : 4 = g) 122u : 4 = k) 20p : 0,5 =
d) 102b : 3 = h) 27d : 2 = l) 144x : 24 =

Pokusíme se dělit i dvojčleny:

Příklad 1: Dělte dvojčlen: (21x + 3y) : 3 =

Postup 1: Vydělíme každý člen dvojčlenu (21x + 3y) : 3 = 7x + y.

Postup 2: Dělení zapíšeme ve tvaru zlomku a pokud to lze, vytkneme a krátíme.

$$\frac{21x + 3y}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot (7x + y)}{\cancel{3}} = 7x + y$$

Obr. 32: (Prodos, s. 27): Dělení mnohočlenů

Tab. 39: Zavedení vytýkání (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu								
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění				✓			✓	
Algebraickým modelem	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
Reálným modelem								
Geometrickým modelem		✓						

Tab. 40: Zavedení postupného vytýkání (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu			✓					✓
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění		✓						
Algebraickým modelem	✓	✓						
Reálným modelem								
Geometrickým modelem								

Tab. 41: Vytýkání – typy využití algebraického modelu[16] (soubor učebnic)

(SPN, Fraus)
Autoři těchto učebnic použili AlgM při zdůvodnění konceptu vytýkání na základě násobení mnohočlenů. U (SPN) šlo o autorský komentář v příkladu, který demonstroval, že vytýkání odpovídá opaku k násobení daných výrazů (Obr. 33), zatímco u (Fraus) šlo o analogické úlohy, jež zase řešili žáci (Obr. 34).
(Prodos, Prometheus-G)
Autoři (Prodos a Prometheus-G) čerpali při zavedení vytýkání z abstraktních modelů racionálních čísel, resp. zlomků. Při zdůvodňování vyšli z vlastností modelu z Tab. 4, kdy dělení 2 čísel přepsali do jednoho zlomku pomocí zlomkové čáry, a poté využili procesu roztrhání tohoto zlomku a krácení jako ukázky konceptu vytknutí (Obr. 35).
(Nová škola Brno, Prometheus-ZŠ, Taktik)
Postup (Nová škola Brno, Taktik i Prometheus-ZŠ) vychází z rozpisu členů výrazu na jejich násobky vytýkaného členu. U (Nová škola Brno) byly navíc vizuálně zvýrazněni i společní činitelé, zatímco u (Prometheus-ZŠ) padla zmínka o kontrole násobením. Učebnice (Taktik) nakonec byla unikátní tématem. Její demonstrativní vytknutí z výrazu byla usazené v geometrii, kdy autoři využili i znalosti vzorců pro obsah obdélníku (Obr. 36).

[16] Učebnice jako (SPN a Fortuna), cílí u manipulace výrazů také na to, aby se u žáků eliminovaly chyby typu $a = a(a + b + 0)$. Jedná se o chybu, kdy žák namísto vytknutí jednoho celého členu z výrazu (a zanechání na jeho místě 1), tento člen odečte, a tím provede chybné řešení se záměnou obou operací. V obou učebnicích je tomuto předcházeno podobně. V (SPN) je rovnost: $4x = 1 \cdot 4x$, jež provází výčet úvodních příkladů na vytýkání, kdežto u (Fortuna, s. 110) je to poznámka: „Vytkneme-li celý člen, zbyde na jeho místě v závorce 1."

Při násobení jsme používali:

$(A + B) \cdot C = AC + BC$

$(A + B) \cdot (C + D) = AC + AD + BC + BD;$

nyní použijeme uvedené vztahy ve směru „zprava do leva":

$AC + BC = C \cdot (A + B) = (A + B) \cdot C$

C je společný činitel, který můžeme **vytknout** před, nebo za závorku

Obdobně také:

$\underline{A}C + \underline{A}D + BC + BD = \underline{A}(C + D) + B(C + D) = (C + D) \cdot (A + B)$

Tomuto postupu vytýkání říkáme **postupné vytýkání**.

Obr. 33: (SPN, s. 84): Zavedení vytýkání

3.5 Roznásobte výrazy v levém sloupci tabulky a doplňte výsledky. Pak si prohlédněte výraz ve stejném řádku ve třetím sloupci a zkuste vyplnit čtvrtý sloupec podle toho, co víte o násobení mnohočlenů.

Součin mnohočlenů	Výsledek	Výsledek	Součin mnohočlenů
$(a - 3) \cdot 5$	$5a - 15$	$2x - 2$	$2 \cdot (x - 1)$
$5a \cdot (2a - 5)$		$10x + x^2$	
$6x \cdot (x^2 + x - 8)$		$10x^3 + 5x^2 - 2x$	
$9b \cdot (4ab - ab^2 + ca - 3bc)$		$6km^3 - 36m^2 - 18om$	
$(ps - r) \cdot p$		$36m^2 - 6m$	

Obr. 34: (Fraus, s. 65): Zavedení vytýkání

Pokusíme se dělit i dvojčleny:

Příklad 1: Dělte dvojčlen: $(21x + 3y) : 3 =$

Postup 1: Vydělíme každý člen dvojčlenu $(21x + 3y) : 3 = 7x + y$.

Postup 2: Dělení zapíšeme ve tvaru zlomku a pokud to lze, vytkneme a krátíme.

$$\frac{21x + 3y}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot (7x + y)}{\cancel{3}} = 7x + y$$

Obr. 35: (Prodos, s. 37): Zavedení vytýkání

Příklad 1

Obdélník má obsah $x^2 + 4x$, kde x je přirozené číslo. V nabídce vyber možnost výrazů, které představují délky stran tohoto obdélníku. Výrazy nenásob.

$x^2 + 4x$

a) $x^2; 4x$ b) $x; 2x$ c) $x + 1; x + 4$ d) $x; x + 4$

Řešení:

Obsah obdélníku o stranách a, b počítáme jako součin délek jeho stran:

$$S = a \cdot b$$

Abychom zjistili, která z možností obsahuje délky stran tohoto obdélníku bez toho, abychom výrazy v možnostech násobili, potřebujeme upravit obsah obdélníku na součin. To znamená, že najdeme, co mají oba členy výrazu společné, a to vytkneme před závorku.

$$S = x^2 + 4x = x \cdot x + 4 \cdot x = x \cdot (x + 4)$$
$$S = x \cdot (x + 4)$$

Obdélník s obsahem $x^2 + 4x$ má tedy strany o délkách x a $x + 4$; tj. správná je možnost d).

Obr. 36: (Taktik, s. 101): Zavedení vytýkání

Tab. 42: Detail zavedení postupného vytýkání (soubor učebnic)

(Taktik) (Prometheus-G):	Obě učebnice představují žákovi identický přístup k postupnému vytýkání. Dva různé výrazy jsou určeny k převodu do součinového tvaru, avšak s komplikací, kdy nelze najít jejich společné činitele. Autoři z tohoto důvodu vše komentují a krokově demonstrují.
(Prometheus-ZŠ):	Postupné vytýkání u (Prometheus-ZŠ) je zde na rozdíl od učebnic uvedených výše představeno skrze dva vzorově vypracované, ale současně nekomentované příklady. Z tohoto důvodu je vysvětlení postupu v rukou žáka či učitele, neboť autoři pouze postup konají.
(SPN):	Postup této učebnice je analogií k již uvedenému Obr. 33, kde autoři zaváděli standardní vytýkání. Autoři u zavedení postupného vytýkání ukáží tedy nejdříve opět to, že jde o operaci, která je inverzní k součinu mnohočlenů, načež vše doplňují průběžným komentářem, který vysvětluje dílčí kroky postupu.

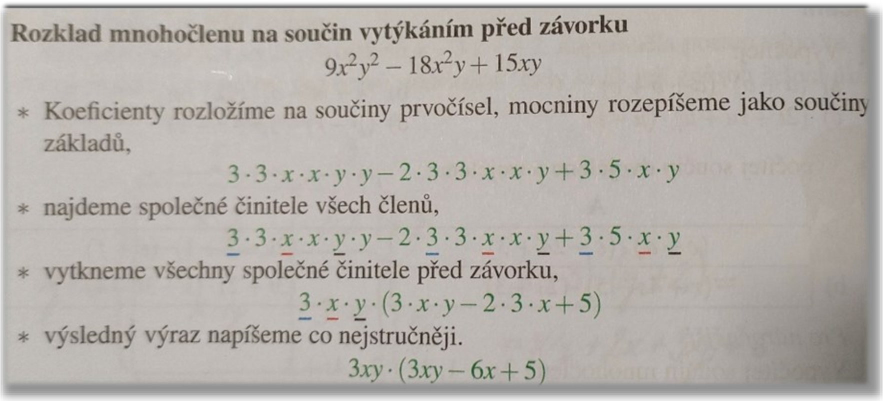
Ze všech 3 způsobů zavedení postupného vytýkání (Tab. 42) bylo nejvíce odlišné jednání autorů (SPN) díky užití abstraktnějších modelů (Obr. 33). To znamená, že použité výrazy nezahrnovaly čísla. Namísto toho autoři využili jen algebraické výrazy, jež byly složené z písmen (viz třeba $[\mathrm{A}+\mathrm{B}]\cdot\mathrm{C}$), což vedlo na to, že stouply nároky na porozumění jazyka při důrazu na obecnost.

Dalším rozdílem bylo to, že se použili i jiné příklady. Autorský kolektiv (Taktik) např. zavedl postupné zavedení tím, že prvně představil příklad výrazu, kde první vytknutí vede na dva stejné dvojčleny, které lze znovu vytknout, a druhý příklad, kde se tak nestalo. Po jeho prvotním vytknutí tedy nezůstaly dva totožné dvojčleny, ale dva k sobě opačné. To znamená, že autoři tímto žákům ukázali, že je někdy vhodné, ač ne vždy, před naučeným algoritmem zkusit i jiné úpravy – jako třeba vytknutí -1, jak je popsáno i v (Prometheus-G).

Co se týče jiných doporučení, některé učebnice obsahovaly i dodatečné instrukce přímo i k vytýkání. Učebnice (Taktik, Prometheus-ZŠ) např. oproti zbytku souboru obsahují i radu, jak výraz upravit těsně před provedením vytýkání. Žáci dostávají konkrétně pokyn, aby u všech členů výrazu prováděli ‚prvočíselný rozklad koeficientů a rozklad mocnin na součin základů', tj.

$$4a^3+8a^2b+2a=2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot a+2\cdot 2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot b+2\cdot a.$$

Úkolem tohoto kroku je snazší nalezení největšího společného dělitele – tedy rozlišení jakou metodu rozkladu u výrazu vybrat. Pokud žákovi například vyjde, že největší společný dělitel bude číslo větší než 1, podle rady automaticky ví, že má takového dělitele vytknout, zatímco u opaku ví, že by to nebyla správná cesta. Právě zde je však riziko. Pokud totiž vytýkání k rozložení výrazu nepovede, je třeba i vědět, že se má ‚rozepsaný' výraz opět i ‚složit' neboli že k řešení bude třeba asi některé vzorce. Právě zde je však ono riziko. Při rozpisu typu $a^2 + 32a + 16 = a \cdot a + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, kde nový výraz je méně přehledný, je totiž podstatně více nejasné, jaký ze vzorců se má volit, protože se příliš liší žákovu abstraktnímu modelu – tedy formě $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Z tohoto důvodu je tedy třeba vždy zdůrazňovat radu o složení výrazů. Jinak řečeno, jako u učebnic (Taktik; Prometheus-ZŠ), kde autoři ‚složení' nešťastně popisují jen pro to, když už k vytknutí došlo (Obr. 37), je třeba zajistit, aby žák ‚skládal' takto výrazy vždy – tedy nehledě na úpravu. V opačném případě totiž hrozí, že v zápisu nepozná strukturu vzorce a ukotví si nežádoucí návyky směrem k úpravám výrazů.


Rozklad mnohočlenu na součin vytýkáním před závorku

$$9x^2y^2 - 18x^2y + 15xy$$

* Koeficienty rozložíme na součiny prvočísel, mocniny rozepíšeme jako součiny základů,

$$3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y + 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y$$

* najdeme společné činitele všech členů,

$$\underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{x} \cdot x \cdot \underline{y} \cdot y - 2 \cdot \underline{3} \cdot 3 \cdot \underline{x} \cdot x \cdot \underline{y} + \underline{3} \cdot 5 \cdot \underline{x} \cdot \underline{y}$$

* vytkneme všechny společné činitele před závorku,

$$\underline{3} \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} \cdot (3 \cdot x \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot x + 5)$$

* výsledný výraz napíšeme co nejstručněji.

$$3xy \cdot (3xy - 6x + 5)$$

Obr. 37: (Prometheus-ZŠ, s. 64): Rada k rozepisování výrazů před jejich převáděním na součin

3.2.7 Vzorce užívané v algebře

Úpravy výrazů byly ve všech učebnicích nakonec zakončeny zavedením dvou vzorců, jež byly popsány dříve – *rozdílem čtverců* a *druhou mocninou dvojčlenu*. Jako hlavní metoda zdůvodnění jejich platnosti bylo AlgM a poté GeoM (Tab. 43 a Tab. 44). Autoři celkem 4 učebnic využili AlgM k tomu, aby zdůvodnili identitu druhé mocniny dvojčlenu v rámci převedení umocnění výrazu na jeho opakované násobení. Čtyři učebnice zahrnuly AlgM dále i k tomu, aby u rozdílu čtverců využili úpravu: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - ba + ab - a^2$. A tři z těchto učebnic byly pro oba případy společné.

Pro další 4 učebnice dále v souboru platilo, že se v nich GeoM využil jen u druhé mocniny *součtu* na GeoM, ale ne *rozdílu*. Tomuto případu se vymykala jen učebnice (Prometheus-ZŠ). V ostatních učebnicích, kde byl GeoM využit, byl vzorec ve variantě pro rozdíl zaveden až dodatečně – a to buď skrze OdAu, či lépe AlgM.

Tab. 43: Zavedení druhé mocniny dvojčlenu (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-zš	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu						✓		
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění							✓	
Algebraickým modelem	✓		✓	✓	✓			✓
Reálným modelem								
Geometrickým modelem		✓		✓	✓	✓	✓	✓

Tab. 44: Zavedení součinu součtu a rozdílu (vlastní)

Typ zdůvodnění (dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-zš	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G
Odvolání se na autoritu								
Kvalitativní analogie								
Induktivní zobecnění		✓	✓				✓	
Algebraickým modelem	✓			✓	✓	✓		✓
Reálným modelem								
Geometrickým modelem				✓		✓	✓	✓

Další postupy zdůvodnění zjištěné u učebnic představovaly využití InZd u (Fraus). Jednalo se o cvičení namísto příkladu, v němž autoři žádali, aby si vzorec žáci odvodili sami podle předchozího příkladu a aby pak provedli i jeho algebraické vyjádření. To se jinde nedělo. Naopak autoři dalších 2 učebnic (viz výše Nová škola Brno; a Prometheus-G) využívali AlgM spolu s GeoM, ale oboje pouze v příkladech. To znamená, že žáci oproti (Fortuna) neměli vůbec prostor provést ani jeden postup odvození sami. Např. geometrické modely autoři (Nová škola Brno; a Prometheus-G) tvořili sami, když dělili pravoúhelníky na menší pravoúhelníky či lichoběžníky, zatímco AlgM využívali sami tak, že volili 1 jednosměrné odvození z Tab. 45.

Tab. 45: Algebraické zdůvodnění vzorců (vlastní)

1. $\boxed{\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}}$

- **a.** $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a(a + b) + b(a + b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$
- **b.** $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $\boxed{\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}}$

- **a.** $a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = a(a + b) - b(a + b) = (a + b)(a - b).$
- **b.** $(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

Toto jednosměrné odvození, kterému výše odpovídají všechny přístupy, bylo celkově přítomno u všech učebnic. Označuje to, že jejich autoři nezkoušeli oba vzorce odvodit oběma postupy z jedné kategorie – tedy ze součinového tvaru na součtový (viz **1a** a **2a**), a dále ze součtového tvaru na součinový (viz **1b** a **2b**) – ale naopak volili jen **1b** a **2b**, tedy vždy součinového tvaru na součtový. I ostatní jsou přitom legitimní. Varianta **2a** např. mísí úpravy, jež autoři několika učebnic zaváděli v minulých částech výkladu (postupné vytýkání a s tím související vytýkání složeného výrazu), přičemž **1a** to má stejně. Nicméně to bude zřejmě i důvod jejich absence. Jak totiž uvádí i Marciniak (2017), když líčí své zkušenosti z výuky žáků základní školy, vytýkání složeného výrazu (a tedy i postupné vytýkání) bývá pro žáky daleko více náročné než vytknout jednočlen, což mohlo vést autory učebnic na to tuto úpravu vynechat.[17]

Na druhou stranu, i když je toto řečeno, je důležité upozornit, že má své opodstatnění tyto postupy zařadit po boku **1b** a **2b**. Motivací je to, že skrze kombinaci obou postupů z jedné kategorie (tj. obousměrné využití jednoho AlgM) může dojíti k propedeutice rovnice, resp. i k podpoře relačního pojetí rovnítka. Příčinou je to, že ačkoli žáci 8. ročníku obvykle ještě nebudou mít plně rozvinutou představu rovnice (intuitivní představa ovšem možná je), je vhodné podpořit jejich představu alespoň u inverzních úprav, tj. že existuje-li jedna úprava, která převádí výraz A na výraz B, pak pokud byla první úprava ekvivalentní, existuje pro tuto úpravu i úprava inverzní, která převede výraz B na výraz A.[18]

[17] Další překážkou, která toto mohla zapříčinit, je první úprava u 2a. Jak si lze všimnout, tento postup, ač správný, využívá hned zpočátku jedné nestandardní úpravy – v rámci výrazu se uměle připíše člen 0, jen aby se pak vyjádřil jako ab-ab a následně použil při postupném vytýkání. Tato úprava přitom není triviální. I pro žáky střední školy je obtížná na porozumění, jelikož vstupuje do výuky až u kvadratické rovnice u metody doplnění na čtverec a také odvození diskriminantu.

[18] Co se týče odvození vzorců, závěrem nezbývá než doplnit, že u 3 učebnic došlo i na využití ne-modelů. Učebnice (Fortuna, Nová Škola Brno; a Prodos) takto obsáhly celkem 2 důležité ne-modely, které ostatní učebnice nezahrnuly, jmenovitě $a^2 + b^2 \neq (a + b)^2$, $a^2 - b^2 \neq (a - b)^2$, zatímco (Fraus; a Taktik) zahrnuly i odvození druhé mocniny rozdílu z druhé mocniny součtu. Autoři zbylých učebnic naopak oba vzorce představili odděleně, čímž mohli podpořit, že je žáci uvidí jako nesouvisející.

3.2.8 Závěrečné shrnutí výsledků výkladové části

Kvalitativní pohled na výklad učebnic podle konceptů (vlastní)

Zaváděná látka (zkratky dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Prometheus-G	Fraus
Výrazy s proměnnými	InZd	RealM	RealM	RealM	InZd	OdAu	OdAu	GeoM
Součet mnohočlenů	KvAn	GeoM	KvAn GeoM	OdAu	KvAn	KvAn	KvAn	KvAn
Součin jednočlenů	OdAu	GeoM	OdAu	OdAu		GeoM	AlgM	GeoM
Roznásobení závorky	OdAu GeoM	GeoM	OdAu	OdAu GeoM	AlgM	RealM GeoM	OdAu	GeoM
Součin mnohočlenů	OdAu	OdAu GeoM	OdAu	OdAu GeoM	OdAu	GeoM	OdAu	GeoM
Vytýkání před závorku	AlgM	AlgM GeoM	AlgM	InZd	AlgM	AlgM	AlgM	InZd AlgM
Postupné vytýkání	AlgM	InZd AlgM	OdAu				OdAu	
Druhá mocnina součtu	AlgM	GeoM	AlgM	AlgM GeoM	AlgM GeoM	OdAu GeoM	AlgM GeoM	InZd GeoM
Součin součtu a rozdílu	AlgM	InZd	InZd	AlgM GeoM	AlgM	AlgM GeoM	AlgM GeoM	InZd GeoM

Kvantitativní pohled na výklad učebnic podle konceptů (vlastní)

(Červená vyznačuje zdůvodnění s nejvyšší četností dle učebnice)

Typ zdůvodnění (názvy dle Tab. 24) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Součet
Odvolání se na autoritu	3	1	4	4	1	2	0	4	15
Kvalitativní analogie	1	0	1	0	1	1	1	1	5
Induktivní zobecnění	0	1	1	1	1	0	3	0	7
Algebraickým modelem	4	2	2	2	4	2	1	4	17
Reálným modelem	0	1	1	1	0	1	0	0	4
Geometrickým modelem	1	6	1	4	1	5	6	2	24

Shrnutí výkladové části – hlavní zjištění (vlastní)

- ⇨ Ve výkladu učebnic byly zjištěny dva hlavní přístupy k zavádění algebraických výrazů a navazujících konceptů: kombinace OdAu a AlgM; a kombinace GeoM a AlgM.
- ⇨ Nejčastější role, s níž v učebnicích vystupují písmena u výkladu algebraických výrazů, je role zobecněného čísla. Toto zjištění je v souladu s tím, že zobecněná aritmetika je dominantní pojetí algebry v sekundárním vzdělávání matematiky (Usiskin, 1988).
- ⇨ Největší příklon k vysvětlení algebraických konceptů pomocí GeoM nastal u součinu mnohočlenů a zavedení vzorců. Menšina z učebnic sice využívá propojení algebry a geometrie i jinde (např. u odvození vzorců pro míru v geometrii), nicméně i tak se tak děje většinou neoptimálně. Odvození vzorců nepředchází většinou adekvátní vysvětlení užitých úprav výrazů (zpravidla součtu a součinu mnohočlenů), a žák tedy nemusí zcela rozumět, jaký je princip představenému postupu autorů.
- ⇨ Většina autorů učebnic vychází při zavedení součtu mnohočlenů z analogie *jablíček a hrušek*, jež byla přiblížena v oddílu 2.1. Tato analogie není v těchto učebnicích nikdy opatřena dalším vysvětlujícím komentářem, a u jedné učebnice je dokonce doplněn doplněna označením proměnných jako zkratek.
- ⇨ S konceptem proměnné se v učebnicích asi v polovině případů nepojí explicitní vymezení. Význam proměnné pak nepřímo vyplývá až z úloh či dalších příkladů.
- ⇨ Většina autorů učebnic představuje před zavedením vytýkání i proceduru dělení mnohočlenů číselným činitelem a asi jedna třetina učebnic i dělení proměnnou. Jen dvě učebnice tohoto typu adresují dělení nulou.
- ⇨ Násobení mnohočlenů nebývá v učebnicích oproti součtu a algebraickým identitám doplněno ne-modely, ale jen zkouškou dosazením. Tento přístup může vést žáky k tomu, že sice mohou zjistit, zda se dopustili chyby při úpravě výrazu, ale nemusí si být vědom, jakých chyb se mají vyvarovat.
- ⇨ Zkouška dosazením je až na jednu učebnici zadána jen ve vazbě k jednomu číslu. K ověření správnosti autoři tedy neradí dosadit více různých hodnot sousledně, což by zvýšilo u zkoušky dosazením její spolehlivost.

Shrnutí výkladové části – nezmíněné nedostatky v designu části učebnic (vlastní)

- ⇨ Učebnice (SPN) využívá opakovaně standardní manipulace výrazů s písmeny už od začátku učebnice, nikoli až od formalizace proměnné.
- ⇨ Učebnice (Nová škola Brno) má celkově nepřehledný, místy až „přezdobený“ design. Tento design brání snadné orientaci v textu, a tím i porozumění, jež jinak zvedají početné a variované úlohy.
- ⇨ Učebnice (Nová škola Brno) využívá nejednotné terminologie. Příkladem je úvodní zavedení AV, kde se využívá termínu ‚výrazy s proměnnou‘, ač vzápětí následující příklady, kde je proměnných více.
- ⇨ Učebnice (SPN, s. 64, 65) užívá zápisu $2 \cdot x = 2x$ ještě před jeho zavedením. U (SPN, s. 64) je to navíc o to důležitější, neboť jde o 1. příklad algebraizace reálné situace, který mohou žáci podrobit zevrubnějšímu zkoumání.
- ⇨ Učebnice (Taktik, s. 105) nesprávně uvádí, že „vzorec pro zápis součtu dvou čtverců $(a^2 + b^2)$ ve tvaru součinu neexistuje“. Přesnější tvrzení je, že tento rozklad není možné provést v oboru reálných čísel.

3.3 Přehled úloh

Jak už bylo uvedeno v úvodu kapitoly, druhou částí analýzy učebnic je komparace jejich úlohové části, a to při tvorbě přehledu. Cílem oddílu není tudíž uvádět či charakterizovat podnětné úlohy, jež učebnice zahrnují, ale naopak sestavit jejich kvantitativní přehled úloh dle rozeznaných typů, a to s cílem vytvoření výzkumného nástroje pro kap. 4. S úmyslem naplnění tohoto cíle, jsou v analýze sledovány 3 následující veličiny: (1) *absolutní četnost* u *podtypů úloh z Přílohy 1* (pro snazší orientaci jde hodnoty značené modře); (2) *relativní četnost podtypů úloh z Přílohy 1* (pro lepší orientaci jde o hodnoty značené červeně a zaokrouhlené na desetiny procent[19]); a (3) *absolutní četnost podtypů úloh napříč učebnicemi* (pro orientaci jde o hodnoty značené **tučně**).

Vzhledem k tomu, že ne všechny úlohy bylo rovněž při analýze úlohové části učebnic možné zařadit do některé podtypy dle již vytvořeného protokolu, je část úloh (Tab. 23) započtena zvlášť. Tyto úlohy odpovídají úlohám z Tab. 46 až Tab. 65, jež tvoří doplněk do celkového počtu úloh v každé učebnici, přičemž jinak započtené úlohy jsou označeny vždy v souladu se svými definicemi v Příloze 1.

[19] Zaokrouhlení vychází z toho, že rozdíl relativní četnosti v setinách procent nelze při zahrnutém počtu úloh již jednoznačně interpretovat.

Tab. 46: Proměnná: algebraizační úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Celkem typu ⇊
A-1	1	4	1	0	0	0	0	0	6
A-2	1	2	4	12	0	4	1	0	24
A-3	0	5	1	0	0	0	0	0	6
A-4	6	19	21	9	8	20	10	4	97
A-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Počet A-úloh (N_a)	8	30	27	21	8	24	11	4	133
Celkem úloh	65	153	100	51	36	92	41	37	
Podíl A-úloh [%]	12,3	19,6	27	41,2	22,2	26,1	26,8	10,8	

Tab. 47: Proměnná: transformační úlohy (vlastní)

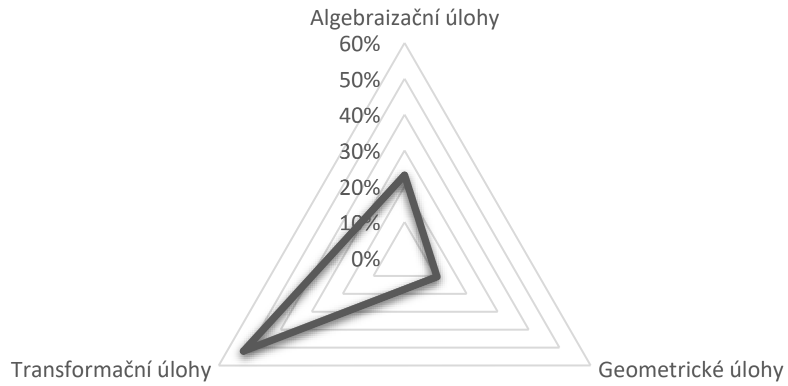
Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Celkem typu ⇊
T-1	5	12	1	0	6	0	0	3	27
T-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-4	0	0	1	0	0	0	0	0	1
T-5	2	0	0	0	8	8	0	0	18
T-6	40	60	55	9	12	37	13	27	253
Počet T-úloh (N_t)	47	72	57	9	26	45	13	30	299
Celkem úloh	65	153	100	51	36	92	41	37	
Podíl T-úloh [%]	72,3	47,1	57	17,6	72,2	48,9	31,7	81,1	

Tab. 48: Proměnná: geometrické úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Celkem typu ⇊
G-1	0	0	2	0	0	0	1	0	3
G-2	0	2	0	0	0	3	6	0	11
G-3	0	2	0	0	0	0	1	0	3
G-4	1	9	1	9	0	0	8	0	28
G-5	8	1	3	0	0	1	0	2	15
Počet G-úloh (N_g)	9	14	6	9	0	4	16	5	60
Celkem úloh	65	153	100	51	36	92	41	37	
Podíl G-úloh [%]	13,8	9,2	6	17,6	0	4,3	39	5,4	

Tab. 49: Proměnná: Shrnutí (vlastní)

Nejzastoupenější okruh: T-úlohy **Nejzastoupenější podtyp úlohy**: T-6



Tab. 50: Součet mnohočlenů: algebraizační úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Celkem typu ⇊
A-1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
A-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-3	0	0	0	0	0	0	3	0	3
A-4	0	0	2	0	0	2	0	7	11
A-5	0	3	0	0	0	5	0	0	8
Počet A-úloh (N_a)	0	3	2	0	0	7	4	7	23
Celkem úloh	51	90	63	44	26	49	36	110	
Podíl A-úloh [%]	0	3,3	3,2	0	0	14,3	11,1	6,4	

Tab. 51: Součet mnohočlenů: transformační úlohy

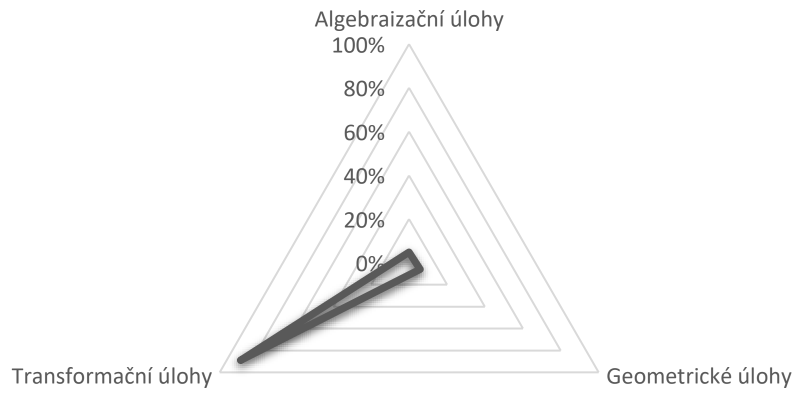
Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Celkem typu ⇊
T-1	4	3	5	2	2	15	12	0	43
T-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-4	0	4	1	0	0	0	0	0	5
T-5	4	0	0	0	0	0	0	0	4
T-6	40	76	52	42	24	25	10	96	365
Počet T-úloh (N_t)	48	83	58	44	26	40	22	96	417
Celkem úloh	51	90	63	44	26	49	36	110	
Podíl T-úloh [%]	94,1	92,2	92,1	100	100	81,6	61,1	87,3	

Tab. 52: Součet mnohočlenů: geometrické úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Celkem typu ⇊
G-1	0	0	1	0	0	0	4	0	5
G-2	2	0	1	0	0	0	4	0	7
G-3	0	1	1	0	0	0	0	1	3
G-4	1	3	0	0	0	0	2	6	12
G-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Počet G-úloh (N_g)	3	4	3	0	0	0	10	7	27
Celkem úloh	51	90	63	44	26	49	36	110	
Podíl G-úloh [%]	5,9	4,4	4,8	0	0	0	27,8	6,4	

Tab. 53: Součet mnohočlenů: Shrnutí (vlastní)

Nejzastoupenější okruh: T-úlohy **Nejzastoupenější podtyp úlohy**: T-6



Tab. 54: Součin mnohočlenů: algebraizační úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Suma podtypu
A-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A-2	0	0	0	4	0	8	0	0	12
A-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-4	3	5	0	0	0	3	0	0	11
A-5	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Počet A-úloh (N_a)	3	5	0	4	0	12	0	1	25
Celkem úloh	105	105	107	123	77	114	24	56	
Podíl A-úloh [%]	2,9	4,8	0	3,3	0	10,5	0	1,8	

Tab. 55: Součin mnohočlenů: transformační úlohy (vlastní)

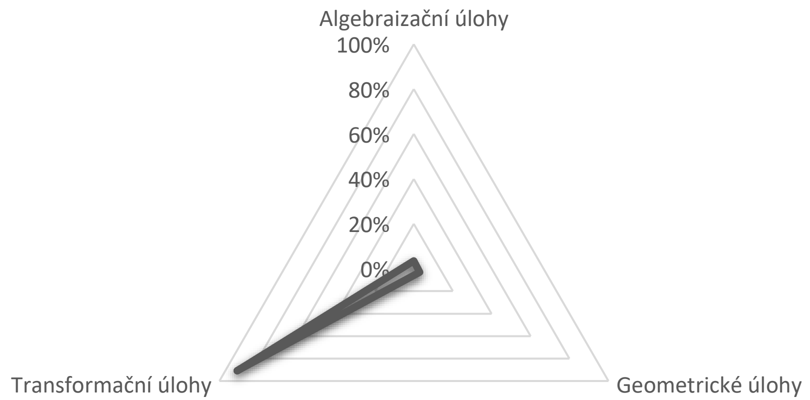
Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Suma podtypu
T-1	13	3	3	0	6	26	0	0	51
T-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-4	0	0	0	0	0	0	0	7	7
T-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-6	86	86	99	119	71	72	9	46	588
Počet T-úloh (N_t)	99	89	102	119	77	98	9	53	646
Celkem úloh	105	105	107	123	77	114	24	56	
Podíl T-úloh [%]	94,3	84,8	95,3	96,7	100	86	37,5	94,6	

Tab. 56: Součin mnohočlenů: geometrické úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Suma podtypu
G-1	0	0	1	0	0	1	3	0	5
G-2	0	1	0	0	0	0	0	2	3
G-3	3	2	2	0	0	1	0	0	8
G-4	0	3	0	0	0	1	2	0	6
G-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Počet G-úloh (N_g)	3	6	3	0	0	3	5	2	21
Celkem úloh	105	105	107	123	77	114	24	56	
Podíl G-úloh [%]	2,9	5,7	2,8	0	0	2,6	20,8	3,6	

Tab. 57: Součin mnohočlenů: Shrnutí (vlastní)

Nejzastoupenější okruh: T-úlohy **Nejzastoupenější podtyp úlohy**: T-6



Tab. 58: Vytýkání/dělení/vzorce: algebraizační úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Suma podtypu
A-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-4	0	2	0	0	0	0	0	4	6
A-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Počet A-úloh (N_a)	0	2	0	0	0	0	0	4	6
Celkem úloh	118	167	136	160	97	133	26	557	
Podíl A-úloh [%]	0	1,2	0	0	0	0	0	0,7	

Tab. 59 Vytýkání/dělení/vzorce: transformační úlohy (vlastní)

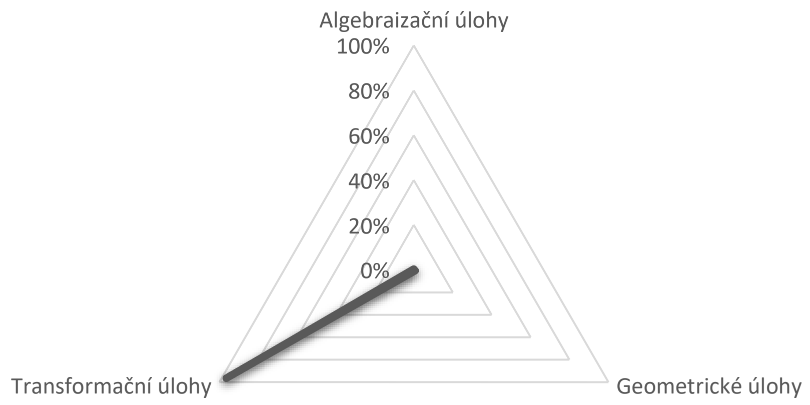
Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Suma podtypu
T-1	32	8	26	18	0	26	4	65	179
T-2	14	8	12	18	0	0	0	21	73
T-3	9	29	0	10	12	0	12	40	112
T-4	0	0	0	0	0	0	0	2	2
T-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T-6	63	113	96	114	85	101	6	401	979
Počet T-úloh (N_t)	118	158	134	160	97	127	22	529	1345
Celkem úloh	118	167	136	160	97	133	26	557	
Podíl T-úloh [%]	100	94,6	98,5	100	100	95,5	84,6	95	

Tab. 60: Vytýkání/dělení/vzorce: geometrické úlohy (vlastní)

Podtyp úlohy (dle Příloha 1) ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Suma podtypu
G-1	0	1	0	0	0	1	3	0	5
G-2	0	0	0	0	0	1	0	0	1
G-3	0	0	1	0	0	0	0	0	1
G-4	0	0	0	0	0	2	1	0	3
G-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Počet G-úloh (N_g)	0	1	1	0	0	4	4	0	10
Celkem úloh	118	167	136	160	97	133	26	557	
Podíl G-úloh [%]	0	0,6	0,7	0	0	3	15,4	0	

Tab. 61: Vytýkání/dělení: Shrnutí (vlastní)

Nejzastoupenější okruh: T-úlohy **Nejzastoupenější podtyp úlohy**: T-6



Tab. 62: Souhrnná data: Podíl algebraizačních úloh (vlastní)

Učivo ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Úloh v učivu ⇊
Proměnná	8	30	27	21	8	24	11	4	133
Součet výrazů	0	3	2	0	0	7	4	7	23
Součin výrazů	3	5	0	4	0	12	0	1	25
Vytýkání/vzorce	0	2	0	0	0	0	0	4	6
Součet A-úloh	11	40	29	25	8	43	15	16	
Podíl A-úloh [%]	3,2	7,8	7,1	6,6	3,4	11,1	11,8	2,1	

Tab. 63: Souhrnná data: Podíl transformačních úloh (vlastní)

Učivo ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Úloh v učivu ⇊
Proměnná	47	72	57	9	26	45	13	30	299
Součet výrazů	48	83	58	44	26	40	22	96	417
Součin výrazů	99	89	102	119	77	98	9	53	646
Vytýkání/dělení	118	158	134	160	97	127	22	529	1345
Součet T-úloh	312	402	351	332	226	310	66	708	
Podíl T-úloh [%]	92	78,1	86,5	87,8	95,8	79,9	52	93,2	

Tab. 64: Souhrnná data: Podíl geometrických úloh (vlastní)

Učivo ⇊	SPN	Taktik	Prometheus-ZŠ	Fortuna	Prodos	Nová škola Brno	Fraus	Prometheus-G	Úloh v učivu ⇊
Proměnná	9	14	6	9	0	4	16	2	60
Součet výrazů	3	4	3	0	0	0	10	7	27
Součin výrazů	3	6	3	0	0	3	5	2	22
Vytýkání/dělení	0	1	1	0	0	4	4	0	10
Součet G-úloh	15	25	13	9	0	11	35	11	
Podíl G-úloh [%]	4,4	4,9	3,2	2,4	0	2,8	27,6	1,4	

Tab. 65: Souhrnná data: Shrnutí všech typů úloh (vlastní)

Celkové podíly typů úloh (průměr a medián jsou vytvářeny z podílů zastoupení jednotlivých typů úloh)
$N_t = 2707$, $\overline{x_t} = 83{,}1\,\%$, $\tilde{x}_t = 87{,}1\,\%$, $t_{max} = N_{T-6} = 2185$, $t_{min} = N_{T-4} = 15$ $N_a = 187$, $\overline{x_a} = 6{,}4\,\%$, $\tilde{x}_a = 6{,}9\,\%$, $a_{max} = N_{A-4} = 125$, $a_{min} = N_{A-1} = 8$ $N_g = 119$, $\overline{x_g} = 5{,}8\,\%$, $\tilde{x}_g = 3{,}0\,\%$, $g_{max} = N_{G-4} = 117$, $g_{min} = N_{G-5} = 8$
Učebnice s nejvíce/nejméně úlohami daného typu
T-úloh: Absolutní četnost: (Fraus/Prodos), Relativní četnost: (Fraus/Prodos) A-úloh: Absolutní četnost: (Taktik/Prodos), Relativní četnost: (Fraus/Prometheus-G) G-úloh: Absolutní četnost: (Fraus/Prodos), Relativní četnost: (Fraus/Prodos)

3.4 Výsledky komparace učebnic

Provedená komparace, která byla vykonána vždy u vybraných zástupců z osmi řad učebnic matematiky přinesla o jejich výstavbě následující zjištění. Převažujícím přístupem k výkladu algebraických výrazů se ukázal GeoM s celkovou četností 24 využití, a to nejvíce u součinu mnohočlenu s jednočlenem a dále u druhé mocniny dvojčlenu (oboje u 5 případů). Další hojně užívané způsoby byly pak AlgM a OdAu. Šlo o způsoby, jež byly napříč učivem zastoupené u 17 a 15 případů, kdy nejméně byl naopak využit KvAn, a to u 5 případů.

Z hlediska rizik a nedostatků, kterými se učebnice vyznačovaly, byly dále vymezeny 4 hlavní nedostatky následujícího složení. Zaprvé, v učebnicích docházelo na absenci ne-modelů, čiže ukázek typických chyb v podobě neekvivalentní úpravy výrazů. Zadruhé, v učebnicích bylo v převaze zjištěno zavádějící vysvětlení zkoušky dosazením. Zatřetí, v učebnicích zjištěný vysoký podíl zdůvodnění typu OdAu a KvAn může u žáků podpořit vznik formální znalosti. A začtvrté, častá absence vymezení proměnné, zvyšuje riziko konceptuálního neporozumění tomuto pojmu.

Pokud jde o úlohy, které byly zkoumány u úlohové části, zde se na druhou stranu poznatky shodovaly se zjištěními (Rendl & Vondrová, 2014). To znamená, že učebnice, které zde byly zahrnuty, neobsahovaly při vyřazení výkladových úloh, žádné úlohy na zobecnění, ale spíše úlohy transformační, kde se jen upravovaly výrazy. Z celkového počtu měly tyto úlohy konkrétní četnost o hodnotě 2707 úloh, což představovalo asi 86 % všech dohledaných úloh, které soubor učebnic obsáhl. U zbylých to bylo výrazně méně. Algebraizační typ měl pro srovnání souhrnnou četnost jen 187 úloh (asi 5,9 % všech úloh), zatímco geometrický 119 úloh (tedy asi 3,8 % všech zahrnutých úloh).

Co se týče zastoupení, samotné relativní četnosti ukázaly, že nejmenší, resp. největší vyvážeností typů úloh T, A, G disponovala učebnice (Prodos), resp. (Fraus). Předností (Fraus) zde bylo to, že i když vůči zbytku učebnic neobsahovala tolik úloh, tyto úlohy byly celkově rovnoměrněji rozložené napříč T, A, G, což je pravda i pro zdůvodnění konceptů.

Zde data zase pro změnu naznačila, že učebnice (Fraus a Taktik) vykazovaly u výkladu nejvyšší míru užití GeoM, jež je podle Nováková & Vondrová (2015) zásadní při budování algebraického uvažování. Naopak nejhůř dopadla učebnice (Prodos). Její nevýhoda zde plynula z toho, že výklad autorů byl jako u (Fortuna) velmi stručný, a navíc, jak se ukázalo u zavedení mocnin s mocnitelem vyšším než dva došlo až po vytýkání, bylo také neoptimální z hlediska uspořádání učiva. I toto zjištění vedlo na finální závěr. Konkrétně, že právě učebnice (Prodos) působí z celého souboru nejméně vhodně pro nasazení ve výuce, a to nejen z důvodu výkladu, ale i podobně nepříznivého výsledku u úlohové části.

4 TESTOVÉ ŠETŘENÍ

V návaznosti na předcházející kapitolu, jež se ve smíšené analýze zabývala učebnicemi, v nichž došlo na zavedení algebraických výrazů, je v této kapitole zkoumáno porozumění těchto konceptů u předchozích uživatelů těchto učebnic – tzn. žáků, kteří je dříve používali. Hlavní cíl této činnosti je založen na 2 výzkumných otázkách prezentovaných níže. První z nich (O-1) se vztahuje k dílčím cílům C4 a C5. Těmito cíli je zjistit, jaké jsou nejčastější chyby žáků při jejich práci s algebraickými výrazy u *zobecňování, algebraizace, intepretace, geometrizace a manipulace výrazů*, a dále ověřit, zda se shodují s TIMSS 2007. Druhá otázka (O-2) následně řeší, jaké kroky v řešení jsou nejčastěji chybné.

4.1 Výzkumné otázky

O-1: Jaký okruh úloh je v kontextu tří pilířů algebry pro žáky nejobtížnější?

O-2: Jaké jsou nejčastější chyby žáků u dílčích okruhů a typů úloh, respektive: V jakých krocích nejčastěji chybují?

4.2 Metodologie

Výzkumný projekt měl charakter testového šetření o 2 částech, zaprvé jednorázová pilotáž zařazená i pro optimalizaci výzkumného nástroje, a následně hlavní studie. Úvodní pilotáž byla vykonána v říjnu 2023 a zahrnula u 42 žáků Základní školy Lesní. Hlavní studie naopak trvala od listopadu 2023 až do prosince 2023 a jednalo se o postupné testování 207 žáků (Tab. 66) napříč posledními ročníky základních škol a kvart víceletých gymnázií.

Tab. 66: Zkoumané skupiny[20]

Škola	Označení	Počet žáků
Základní škola Lesní (Liberec)	ZŠ Liberec	42
Gymnázium a obchodní akademie Mariánské Lázně	GOAML	30
Gymnázium prof. Jana Patočky (Praha)	GPJP	30
Základní škola Jih (Mariánské Lázně)	ZŠ ML	40
Základní škola Zárečná (Tachov)	ZŠ Tachov	60
Benešova základní škola (Plzeň)	ZŠ Plzeň	47

[20] Školy účastnící se hlavní i pilotní studie byly vybrány z různých měst za účelem získání variabilního vzorku. Ve všech případech byly školy voleny s dopomocí známosti autora se zadavateli testu (vždy zkušenými učiteli matematiky), a to z důvodu sběru dat za navzájem konzistentních podmínek.

Všichni žáci, kteří byli do testování v obou částech zapojeni, měli vzhledem k čerstvému zahájení závěrečného ročníku povinné školní docházky probrané všechny zde testované koncepty, čímž bylo vyloučeno, že by chyby vznikly z tohoto důvodu. Na vypracování testu měli současně všechny skupiny jednotný čas. Až na výjimky, které souhrnně popisuje oddíl 4.8, měli žáci na vypracování testu maximálně 45 minut, přičemž během tohoto testování byli pod dohledem zadavatele testu (svého učitele matematiky) a měli zakázáno jakkoli spolupracovat či používat fyzické či elektronické pomůcky. Další podmínky testování byly následně zahrnuty přímo v zadání testu a zopakovány slovně zadavatelem testu.

4.3 Výzkumný nástroj

Výzkumný nástroj, který byl ke sběru dat u obou testování využit, nabyl formy 2stránkového testu formátu A4. U hlavní studie zahrnul tento test celkem 16 otevřených či uzavřených úloh, viz Příloha 3; zatímco u pilotní studie byl seznam delší a zadaných úloh bylo celkem 18 (Příloha 2). Pro sestavení testu se v obou případech nicméně vycházelo ze stejných okruhů úloh, takže testy měly podobnou formu. Tyto okruhy (viz Tab. 67) byly vybrány pro tento výzkum z toho důvodu, aby bylo možné porozumění algebraických výrazů otestovat komplexně, přičemž jejich pořadí odpovídalo u hlavní studie i pořadí v Tab. 67.

Tab. 67: Klasifikace cvičení didaktického testu

1. okruh	–	diagnostika porozumění proměnné	(Tab. 68)
2. okruh	–	standardní manipulace algebraických výrazů	(Tab. 69)
3. okruh	–	algebraizace při sestavení algebraického výrazu	(Tab. 70)
4. okruh	–	geometrické užití algebraických výrazů	(Tab. 71)
5. okruh	–	zobecnění v napojení na pojem pravidelnost	(Tab. 72)

Pořadí okruhů bylo určeno tímto způsobem z toho důvodu, protože odpovídalo absolutní četnosti podtypů úloh v kap. 3. Jinak řečeno, úvahou bylo, že pokud jisté podtypy úlohy figurují u učebnic matematiky více, pro žáky budou tyto úlohy možná povědomější a snazší na řešení, zatímco úlohy méně známé budou provázet potíže. To znamená, že motivací k tomuto seřazení bylo, aby nedošlo ke zhoršení výkonu vinou nevhodné serializaci testu. V zájmu snížení šance, že chyby vzniknou z tohoto důvodu, byla pro všechna užitá cvičení (s výjimkou cvičení 1. okruhu, jež zkoumala porozumění rolím písmen ještě než žáci tyto role dále používají) řazena podle zastoupení v obsahu učebnic – tj. podle absolutní četnosti. I tak ale nejde o nutnou predikci žákovské úspěšnosti. Řazení např. nebere v potaz, jak byly učebnice využité při výuce, popř. zda žák úlohu vyřeší či ji jen začne řešit. Predikcí je jen to, že bude s jistými cvičeními žák více obeznámen, a tedy – za předpokladu vynaložené snahy – bude schopen úlohu alespoň potenciálně začít řešit.

Tab. 68: Cvičení 1 & 2 (C1 & C2) – okruh: diagnostika porozumění proměnné

PODTYPY CVIČENÍ
C1: teoretické pochopení termínu proměnné C2: pochopení písemné symboliky proměnné
ZADÁNÍ CVIČENÍ
C1: Vysvětlete, co si v matematice představujete pod pojmem proměnná. C2: Je-li „počet jablek" označen j, vysvětlete, co rozumíte výrazem $10j$.
ÚČEL ZAŘAZENÍ
Ověření chápání proměnné na úrovni jazyka i konceptu. **C1** testuje, s odkazem na oddíl 2.1, porozumění termínu proměnná (tj. jaké role si s ním žáci spojují) a **C2** testuje totéž na úrovni symbolů (tj. jak žáci chápou písmeno užité jako proměnná). Cílem těchto cvičení je ukázat, zda existuje vztah mezi interpretacemi rolí, a pokud ne, v čem se odpovědi žáka liší.
ZDROJ/INSPIRACE
C1: vlastní tvorba. C2: modifikace *úlohy 2* z diplomové práce (Novotná, 2014, s. 123).

Tab. 69: Cvičení 3 & 4 (C3 & C4) – okruh: standardní manipulace algebraických výrazů

<table>
<tr><td colspan="2">PODTYPY CVIČENÍ</td></tr>
<tr><td colspan="2">C3: zjednodušení algebraických výrazů početními operaci
C4: převádění algebraického výrazu do součinového tvaru</td></tr>
<tr><td colspan="2">ZADÁNÍ CVIČENÍ</td></tr>
<tr><td>C3: Zjednodušte výrazy:
a $-x + 3 - 2 \cdot (x^2 + 1)$
b $2x + (3x + 7) - x - (3x - 7)$
c $2x \cdot (x + 1) - x \cdot (-x - 1)$</td><td>C4: Rozložte výrazy na součin:
a $3x^2 + 9x + 3$
b $4x^2 - 1$
c $x^2 + 4y^2 - 4xy$
d $-(-25x^2) - 16y^2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÚČEL ZAŘAZENÍ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ověření standardní manipulace na výrazech. C3 testuje dopad počtu závorek na náročnost úpravy výrazů a C4 ověřuje vliv hledání postupu pro převod výrazu do součinového tvaru. Testováno je tomto cvičení to, zda žák vnímá vytknutí jako jednu z metod této aktivity (proto zadání C4 neuvádí výčet metod) i to, zda žáci dokáží dosadit jednočlen za proměnnou (4b, 4d). Jedním z cílů C4 je také testovat, zda žák dokáže výraz bez výzvy upravit a až pak použít vhodný vzorec (4c, 4d)</td></tr>
</table>

ZDROJ/INSPIRACE
$3a-3c, 4a-4b$: vlastní tvorba po řadě na motiv TIMSS 2077 a (Žalská, 2015) $4c$: převzato z (Taktik, s. 112, cvičení 7, úloha c, levý sloupec) $4d$: převzato z (Taktik, s. 105, cvičení 16, úloha a)

Tab. 70: Cvičení 5 & 6 (C5 & C6) – okruh: algebraizace při sestavení algebraického výrazu

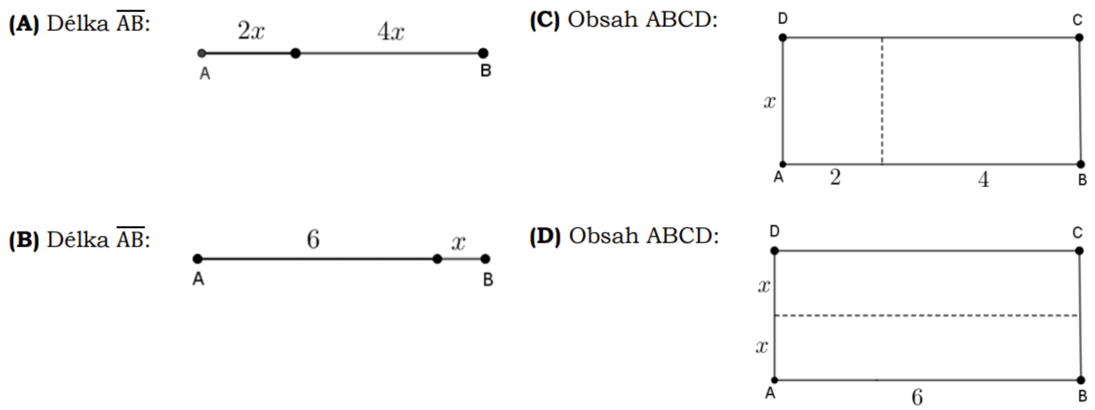
KATEGORIZACE
C5: algebraizace v jazykovém kontextu C6: algebraizace v (pseudo)reálném kontextu
ZADÁNÍ
C5: Písmeno n značí libovolné číslo. Pomocí výrazu zapište pokyn: „Přičti n k pěti a vynásob třemi“. C6: David šel na pouť, kde se platí za vstup 120 Kč a za každou použitou atrakci 50 Kč. Vyberte výraz (nebo výrazy), které popisují jeho celkové výdaje při odchodu z pouti, pokud tam použil n atrakcí a) $50 \cdot n$ c) $120 \cdot n + 50$ e) $(120 + 50) \cdot n$ b) $170 \cdot n$ d) $120 + 50 \cdot n$ f) $120 \cdot (n + 50)$
ÚČEL ZAŘAZENÍ
Obě cvičení testují algebraizaci, jen s rozdílnými parametry: $C5$ testuje vlastní modelaci výrazu v jazykovém kontextu a $C6$ výběr výrazu v reálném kontextu. Tento rozdíl nastal proto, aby šlo sledovat lépe vliv výběru možnosti na úspěšnost při změně kontextu (tj. zda obvykle náročnější algebraizace v reálném kontextu opravdu dopadne lépe, pokud lze řešení vybrat). Další účely byly ty, že $C5$ (ale i $C6$) testuje cit žáků pro použití závorky.
ZDROJ
C5: Převzato z výzkumu (Žalská, 2015). Jak už bylo ovšem u tohoto výzkumu zmíněno (oddíl 2.7), úloha je původně převzata ze studie (MacGregor & Stacey, 2007). **C6**: Toto cvičení bylo inspirováno učebnicí (Prometheus-ZŠ, s. 45, cvičení 4)

Tab. 71: Cvičení 7,8 & 9 (C7, C8 & C9) – okruh: geometrické užití algebraických výrazů

KATEGORIZACE
C7: geometrizace daného algebraického výrazu C8: tvorba i algebraizace geometrického modelu C9: algebraizace daného geometrického modelu

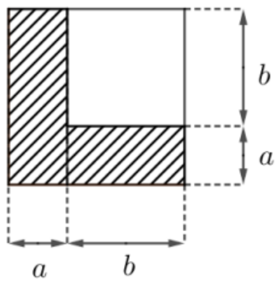
ZADÁNÍ

C7: Vyberte, co vše může geometricky znamenat výraz $2x + 4x$.



C8: Z jednoho rohu obdélníku o rozměrech $x + 2$ a x jsme ustřihli čtvercový kus se stranou délky $\frac{x}{2}$. Vyjádřete výrazem obsah zbylé části obdélníku a tento výraz zjednodušte.

C9: Vyjádřete co nejjednodušším výrazem obsah vyšrafované plochy:



ÚČEL ZAŘAZENÍ

Všechna cvičení ověřují žákovu schopnost tvořit či interpretovat geometrické reprezentace, které jsou zadány nebo si je žák tvoří. Na rozdíl od C9, kde je reprezentace zadána, tedy C8 přináší i její generování, takže lze srovnat, zda potíž v řešení nastává už při tvorbě geometrického modelu, anebo až při jeho využití. U C7 jde dále o interpretovatelnost součinu dle Descarta– tj. zda žáci vidí součin jako délku (7a) či obsah (7c) a také jaké důvody je vedou na zvolení chybné odpovědi (tj. chybná varianta **7b** testuje, zda se žáci přehnaně nesoustředí na koeficient: $2x + 4x = (2+4)x = 6x$; zatímco **7d** testuje, zda žáci neuvádí úpravu: $2x + 4x = (2+4) \cdot (x + x) = 6 \cdot 2x$.

ZDROJ

C7: Modifikace *úlohy 7* Novotné (2014, s. 123), resp. *úlohy B7* od Žalské (2015, s. 337), jež se shodují s Obr. 16 z TIMSS 2007. Rozdílem je to, že zde použitá varianta má dvě správná řešení, kdežto původní varianta od TIMSS jen jedno (obdobu řešení C).

C8: Modifikace cvičení (Taktik, s. 112, cvičení 8, sloupec nalevo i vpravo)

C9: Analogie úlohy *A5* z diplomové práce (Benešová, 2023, s. 93)

Tab. 72: Cvičení 10 & 11 (C10 & C11): zobecnění v napojení na pravidelnosti

KATEGORIZACE

C10: zkoumání pravidelnosti u pravidelnosti číselných entit

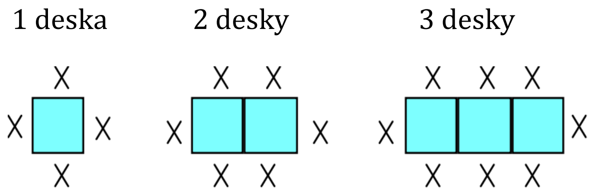
C11: zkoumání pravidelnosti u pravidelnosti figurálních entit

ZADÁNÍ

C10: Doplňte chybějící části tabulky. Čísla ve 2. řádku vznikají vždy z 1. řádku podle určitého pravidla. Toto pravidlo uveďte do sloupce n.

1	2	3	4	…	10	n
5	9	13				

C11: Na obrázcích níže jsou k vidění stoly různé šířky. Čtverce představují desky stolu, znaky X židle.



Desky se přidávají jen v jednom směru (do šířky) a židle obsadí všechna místa, která stůl dovoluje. Vyjádřete celkový počet židlí, které se ke stolu vejdou, je-li jeho šířka: 4 desky, 5 desek a n desek.

ÚČEL ZAŘAZENÍ

Obě cvičení testují zobecňování u lineárně rostoucí pravidelnosti $a_n = ax + b;\ a,\ b \neq 0$: U $\mathtt{C10}$ jde o pravidelnost numerických entit a u $\mathtt{C11}$ grafických, kdy cílem je ona případy srovnat. To znamená, že cílem tohoto okruhu je zjistit, jak se liší řešení a úspěšnost žáků u obou typů pravidelností, a tedy zda si např. více tvoří další izolované modely jen u jednoho typu entit či zda se liší třeba způsob vyjádření pravidla (tj. slovně, symbolicky, či skrze izolované modely; nebo i explicitně či rekurzivně jako v oddílu 2.4)

ZDROJ

C10: Inspirováno formou identickou *úlohou 6* z diplomové práce (Pokorný, 2017, s. 98).

C11: Se zkrácením původního zadání odpovídá úloze *Restaurace* z (Markworth, 2010, s. 71), resp. analogické úloze *Narozeniny* z výzkumu (Blanton & kol., 2019, s. 208-209).

4.4 Odlišnosti pilotní a hlavní studie

Jak už bylo uvedeno, hlavní studii předcházela pilotáž, která měla za cíl optimalizaci testu. Tato optimalizace zahrnula:

- Změnu pořadí a obsahu cvičení v okruhu: *geometrické užití algebraických výrazů*;
- Změnu pořadí a obsahu cvičení v okruhu *algebraizace v jazykovém kontextu*;
- Změnu obsahu cvičení v okruhu: *standardní manipulace algebraických výrazů*.

Konkrétní alternace lze najít u *Příloh 2 & 3*, kde jsou testy vyobrazeny (viz Tab. 73), nicméně důležitější důležitá je ještě jedna změna. Touto změnou bylo:

- vychechtání rozhovoru žáků se zadavatelem testu, který byl součástí pilotáže, ale nikoli hlavní studie.

Tento rozdíl vznikl tím, že vedle informovaného souhlasu zákonných zástupců testovaných žáků bylo vzhledem k věku účastníků potřeba i svolení statutárních zástupců škol – což se bohužel ne u vždy podařilo zajistit. Na základě toho se tedy vyhodnocení odvíjelo jen od analýzy výsledků testu, a nikoli i rozhovorů, jež by mohly poskytnout dodatečná data.

Tab. 73: Důvody úprav testu mezi hlavní a pilotní studií

Změněné pořadí a obsah okruhu: *geometrické užití algebraických výrazů*
Na základě rozhovoru z pilotního šetření vyšlo podle zadavatele testu najevo, že přístup k návrhu serializace testu (viz Příloha 2) nebyl optimální a vedl k potížím, jež nebyly očekávány. Od známějších položek testu se dle žáků občas přecházelo k méně známým položkám (viz původní umístnění *cvičení 7* a *9*, jež se dále změnilo), což podpořilo nižší míru dokončení, když se žáci zastavili u pro ně náročnějších položek. Na druhou stranu, u *cvičení 8* změna podléhala vlastnímu důvodu. Bylo jím to, že původní úprava výrazů, jež zde byla obsažena, neodhalila žádné významné skutečnosti o chybách žáků, a tedy nepřinášela pro výzkum podstatnou informaci. Učiněná úprava měla toto napravit.
Změněný počet cvičení i typ prvního cvičení u okruhu *algebraizace v jazykovém kontextu*
V tomto bodu byla důvodem pro změnu jen zjištěná vynechanost zmíněného cvičení. Sami žáci po testu potvrdili, že důvodem častého vynechání bylo nepochopení zadání.
Změna obsahu cvičení v okruhu: *standardní manipulace algebraických výrazů*
U tohoto poslední bodu bylo motivací pro změnu testu to, že pro převažující většinu žáků (přes 97 %) byla pilotní verze úlohy $3\mathrm{d}$ neřešitelná. Úloha spočívala jmenovitě v substituci proměnné za dvojčlen v rámci rozkladu algebraického výrazu pomocí druhé mocniny dvojčlenu, což jak se ukázalo při rozhovoru, mnozí žáci ještě nezažili. Další úlohy prošly jinou změnou. Konkrétně, pilotní úlohy značené jako $3\mathrm{b}$–$3\mathrm{d}$ byly nahrazeny za $6a$–$6\mathrm{d}$, jelikož pro užití vzorců museli žáci navíc zadané výrazy vhodně upravit.

4.5 Způsob vyhodnocení a prezentace dat

Data z obou částí výzkumu byla po dokončení sběru dat zpracována způsobem. Tento způsob zahrnul:

Fázi 1: binární rozlišení správnosti a nesprávnosti žákova řešení u všech cvičení testu;

Fázi 2: analýzu forem odpovědí v relaci ke krokům řešení, tj. rozlišení nejčastějších chyb;

Fázi 3: zakódování a digitalizace dat z minulých fází. Díky tomu šlo monitorovat, jak se liší řešení žáka u různých podtypů cvičení, a to pomocí vlastního programu v jazyce Python.

V rámci fáze 3, která byla provedena až poslední, byla tímto způsobem sledována data dvojího zaměření. Šlo o:

- Data o základních podobách chyb, jichž se žáci dopouštějí u hlavních kroků řešení;
- Data o podrobnějších formách chyb, jež upřesňují formy řešení žáků výše[21].

U vybraných cvičení provedení *fáze 3* znamenalo, že se mimo úspěšnost jednotlivých cvičení dala porovnat i úspěšnost a řešení napříč těmito cvičeními, tj. daly se sledovat i žákovské kombinace odpovědí napříč více cvičeními, což přineslo další data při jejich vyhodnocení. Šlo tak např. sledovat, jak si žáci vedli v různých okruzích. V kontextu dále uvedených výsledků to např. tedy znamenalo, že bylo možné zjistit, zda žák (resp. všichni individuální žáci) prováděl(i) tutéž chybu nejen u jednoho cvičení, ale i více cvičení najednou. Z hlediska této práce pak umožnilo sledování kombinací také zodpovědět výzkumné otázky. Jinak řečeno, skrze tuto analýzu bylo možné s větší jistotou určit, co bylo hlavní potíží žáků – tj. Jaké aktivity činí žákům u výrazů potíže a také v jakých krocích jejich použití nejvíce chybují (tj. výzkumná otázka **O-1**).

Tab. 74: Korespondence okruhů u pilotní a hlavní studie (dále se následuje pravé pořadí)

Pilotní studie		Hlavní studie
Cvičení 1 & 2	≈	Cvičení 1 & 2
Cvičení 3 & 4	≈	Cvičení 5 & 6
Cvičení 5 & 6	≈	Cvičení 3 & 4
Cvičení 7,8 & 9	≈	Cvičení 9, 7 & 8
Cvičení 10 & 11	≈	Cvičení 10 & 11

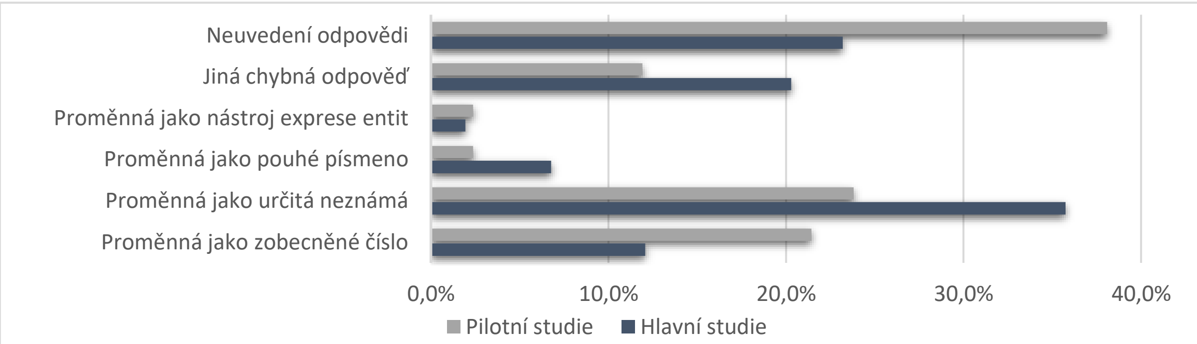
Poznámka. Označení ‚celá studie' slouží v dalším testu k označení sjednocených výsledků pilotní a hlavní studie. Motivací toho je zvětšení vzorku u společných cvičení obou studií.

[21] Pro srovnání různě velkých vzorků pilotní a hlavní studie jsou data o základních podobách chyb a řešení žáků uváděna v relativní četnosti. Výsledky u podrobnějších forem, které jsou zmíněny výše, jsou naopak uváděny i s hodnotou absolutní četnosti – a to vlivem sledování rozdílů u škol. Při sledování jednotlivých dat se respektuje pořadí položek hlavní studie v rámci Tab. 74.

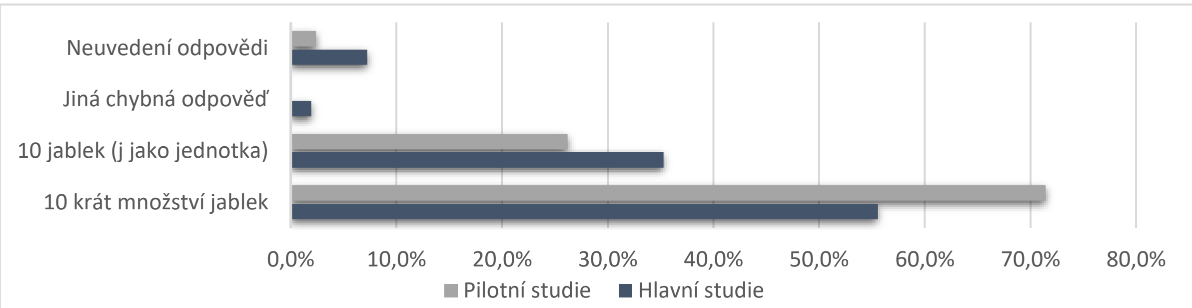
4.6 Výsledky výzkumu

4.6.1 Cvičení 1 & 2

Základní výsledky, které pochází z okruhu: *diagnostika porozumění proměnné*, uvádí pro *cvičení 1* Obr. 38 a pro *cvičení 2* i Obr. 39. Z těchto výsledků lze vyčíst, že větší problém činilo žákům *cvičení 1*. Toto volněji zadané, kde došlo oproti cvičení 2, jen na intepretaci konceptu proměnné, a nikoli interpretaci již zadaného výrazu, vedlo u žáků na podstatně větší rozmanitost odpovědí skrze uváděné role. Za správnou odpověď tu byly uznány 3 různé role proměnné. Jednalo se o: *písmeno chápané jako určitá neznámá*; *písmeno jako zobecněné číslo*; a zatřetí i písmeno jako *nástroj exprese entit* (především pak parametr), kdy žák koncept proměnné popsal jako nástroj vyjádření jiných matematických objektů či jejich manipulaci. Jiné uváděné role jako správné označit nešlo. Důvodem bylo i to, že žáci relativně často kromě příměru ‚proměnná je písmeno' uváděli i tzv. *jiné role*, což znamená pro prosměnnou nesprávné role, jež ilustruje Tab. 75.



Obr. 38: Základní přehled výsledků – *cvičení 1*



Obr. 39: Základní přehled výsledků – *cvičení 2*

Z hlediska výsledků bylo dále zjištěno, že u *cvičení 2* byla signifikantně vyšší míra odpovědi v podobě zobecněného čísla – a to u hlavní i celé studie. Za možný důvod lze potenciálně považovat jeho zadání. Na rozdíl od *cvičení 1*, kde šlo uvést víc správných řešení najednou (viz výše), disponovalo *cvičení 2* správným řešením jen jedním, a to z důvodu zadané role písmene j. To znamená, že jelikož zadání obsáhlo i krátkou poznámku: ‚j vyjadřuje počet jablek', žák mohl již rovnou snáze usoudit, že j bude *zobecněné číslo*, a tedy že $10j$ tvoří jeho desetinásobek.

Na druhou stranu, pro toto vyústění je možné vysvětlení i jiné. Lze např. uvažovat, že žáci nemuseli být ovlivnění jen formou zadání, jež je popsána výše, ale také odlišnou koncepcí cvičení. To znamená, že mohli být např. ovlivněni tím, jak byla proměnná zadána, tedy zda byla zrovna vyjádřena jako slovo (viz *cvičení 1*) či jako symbol zadaný písmenem (což byla pravda pro *cvičení 2*). Tomuto vysvětlení by do jisté míry nasvědčovaly výsledky pro různé skupiny žáků v rámci téže školy. Většina žáků, kteří patřili do stejné vzdělávací skupiny (tzn. do třídy s jiným učitelem), volila u *cvičení 1* tutéž odpověď, a to zřejmě proto, že byl v jejich výuce dřív kladen důraz na jiné role proměnné – neboli jiná pojetí algebry z oddílu 2.1.

Tab. 75: Jiné formy odpovědi – *cvičení 1* (C1) – citace řešení žáků

Úkol: Stručně vysvětlete, co si v matematice představujete pod pojmem proměnná.

Příklady vybraných odpovědí (pro čitelnost přepsané do digitální podoby)

A Důraz na dosazení hodnot: „Někde vložíš výsledek a poté ho vytáhneš někde.“

B Důraz pouze na akt *změny* bez napojení na definici proměnné: „[Proměnná je,] že proměníš čitatele s jmenovatelem.“, „Promění se čísla.“, „Že se něco promění.“

C Chápání proměnné jako konstanty: „Číslo, co je konkrétně označeno.“

D Proměnná jako znaménko: „Proměnná je znaménko.“

E Proměnná jako exponent: [se zakroužkováním mocnitele 2 u x^2]: „na druhou je proměnná.“

F Proměnná jako úprava zlomku: „Když mám $\frac{2}{4}$ a to změním na $\frac{1}{2}$, to je proměnná.“

G Obrácená představa zobecněného čísla: „Proměnná je jakékoli písmeno (j, x, y) ukryté v čísle.“

H Nematematické odpovědi: „Dává smysl.“ apod.

C1	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
A	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
B	2 (3 %)	2 (7 %)	5 (13 %)	19 (40 %)	0 (0 %)	3 (7 %)	31 (12 %)
C	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	1 (< 1 %)
D	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (10 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
E	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	3 (1 %)
F	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	3 (1 %)
G	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	1 (< 1 %)
H	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	4 (2 %)

Pokud jde o samotné vyhodnocení okruhu, z výsledků dále také vyplynulo, že správnost řešení byla v celé studii asi 49,4 %. Z rolí, které byly označeny jako správné, bylo nejvíce zastoupeno *písmeno jako neznámá* a *zobecněné číslo*, a to patrně vlivem výuky žáků. U těch, u nichž byla před testem podle učitelů výuka soustředěna na probírání soustav rovnic (tzn. koncepty algebry, kde je písmeno často použito jako neznámá), byla v převaze správná řešení *cvičení 1* spojena s tím, že žák uváděl roli neznámé. Naopak, u škol, kde se učivo lišilo, byla dominantní jiná řešení. V tomto případě převažovalo ve správných řešeních písmeno popsané žákem jako zobecněné číslo, což lze opět vysvětlit tak, že na chápaní rolí mohl mít vliv nejen obecný výklad před testem, ale i jeho nedávná náplň – tj. poslední probírané učivo před konáním testu.

Z dalších výsledků stojí za uvedení, že úspěšnosti žáků u *cvičení 1* byla v zásadě identická u hlavní i pilotní studie. U pilotní skupiny, jíž představovala jen ZŠ Liberec, uvedlo některé ze tří uznaných řešení asi 47,6 % žáků, kdežto u hlavní studie, to bylo asi 49,3 %. Na druhou stranu, školní výsledky se zde velmi lišily. Ukázalo se, že souhrnná úspěšnost 49,3 % byla vlivem extrémů málo reprezentativní pro každou z dílčích škol (viz Tab. 76), a to i s tím, že nebylo ani obvyklé, aby žáci uváděli více rolí najednou. Myšleno je tím to, že pouze 2 žáci z celé studie uvedli u *cvičení 1* víc rolí proměnné než jednu. To ukazuje, že i když žáci zkouší proměnnou vymezit, a to klidně i skrze správné řešení, spojují si samotný koncept v danou chvíli často jen s jednou rolí, a to i přesto, že podle dalších cvičení znají rolí více.

Tab. 76: Chybovost (X) a úspěšnost (✓) ve *cvičení 1 & 2* (C1 & C2) na školní úrovni

C1	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec
X	10 (17 %)	17 (57 %)	34 (85 %)	37 (79 %)	6 (20 %)	22 (52 %)
✓	50 (83 %)	13 (43 %)	6 (15 %)	10 (21 %)	24 (80 %)	20 (48 %)
C2	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec
X	12 (20 %)	11 (37 %)	35 (88 %)	25 (53 %)	9 (30 %)	11 (26 %)
✓	48 (80 %)	19 (63 %)	5 (12 %)	22 (47 %)	21 (70 %)	30 (74 %)

Co se týká *cvičení 2,* mimo toho, že šlo v okruhu o cvičení s vyšší úspěšností (rozdíl pro celou studii tvořil asi 9 %), úspěšnost byla vyšší i u na úrovni škol. Jmenovitě, většina škol celé studie dosáhla na vyšší úspěšnost u *cvičení 2* než u *cvičení 1*, což vedlo i na analýzu těchto cvičení prostřednictvím kombinace jejich řešení. Tato analýza poté ukázala, že dílčí žáci nejčastěji dokázali řešit obě cvičení správně. Tato kombinace byla v celé i hlavní studii vypozorována u necelých 40 % žáků, kdy druhé nejčastější řešení – obě cvičení chybné či bez řešení neboli krátce: obě nesprávné – uvedlo asi 33 % žáků u hlavní studie i celé studie. Poslední kombinace byla tudíž sledována nejméně. Kombinace: jedno cvičení správně, druhé nesprávně, byla přítomna asi 30 % žáků celé i hlavní studie, kdy, jak vyplývá z Tab. 76, tímto častěji správně řešeným cvičením bylo *cvičení 2*.

V rámci kombinace dále vyplynulo, že většina žáků proměnila svou odpověď – tzn. u obou cvičení písmena proměnila svou roli. Specificky, ze všech testovaných žáků jen minorita asi 10 % žáků hlavní studie uvedla roli zobecněného čísla u obou cvičení současně, kdy, jak dokládají Obr. 39 a Obr. 38, role více figurovala u *cvičení 2*.[22]

Tab. 77: Chybovost (X) a úspěšnost (✓) *cvičení 10 & 11* (C10 & C11)

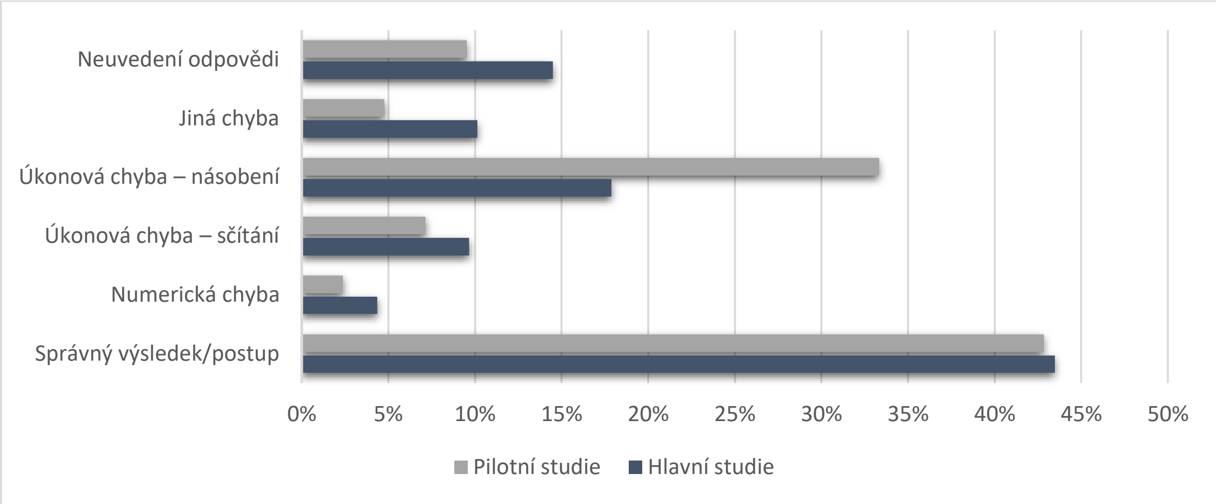
Kombinace odpovědí (u stejného žáka)	Počet žáků (Hlavní/celá studie)	Podíl žáků (Hlavní/celá studie)
C1 ✓ ∧ C2 X	25/29	12–13 % / 11–12 %
C1 X ∧ C2 ✓	37/51	17–18 % / 20–21 %
C1 ✓ ∧ C2 ✓	78/94	37–38 % / 37–38 %
C1 X ∧ C2 X	72/81	34–35 % / 32–33 %
C1 ✓ ∧ C2 ✓: Zobecněné číslo	14/21	6–7 % / 8–9 %
C1 ✓ ∧ C2 ✓: Neuvedení odpovědi	10/11	4–5 % / 4–5 %

4.6.2 Cvičení 3 & 4

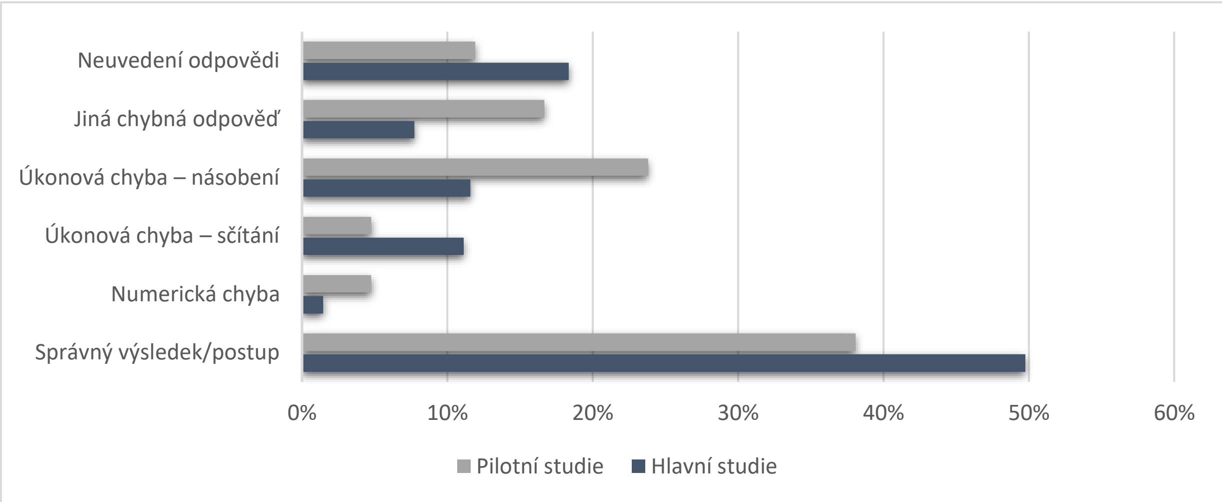
Cvičení, která se v testu zaměřila na standardní manipulaci při provádění zjednodušení výrazů a rozklad na součin, mají své výsledky zobrazené v Obr. 40 až Obr. 46. Jako první je mezi těmito výsledky provedeno shrnutí *cvičení* 3, jež bylo zaměřeno na zjednodušení výrazů (Obr. 40 až Obr. 42). Důvodem je to, že *cvičení 3* ještě od žáků nevyžadovalo, aby na samém počátku řešení provedli analýzu zadání pro výběr vhodné metody, jak výrazy upravit, a dále to, že se tamní chyby mohly projevit i u *cvičení 4*. Z tohoto důvodu bylo *cvičení 4* pokryto až dále, a to přesněji v Obr. 43 až Obr. 46. Dalším důvodem pro toto umístnění je také to, že *cvičení 4* vyžadovalo i zmíněné určení metody. To znamená, že žáci nad rámec aplikace již naučeného algoritmu museli formou strukturálního uvažování určit i vhodnou metodu rozkladu výrazu na součin pro každý zadaný výraz, a tedy šlo očekávat, že toto cvičení bude náročnější než *cvičení 3*.[23]

[22] Srovnání (cvičení 2): Novotná (2014, s. 123), jejíž úloha: „V bedýnce je j kilogramů jahod. Co znamená výraz 5j?“, vedla k návrhu *cvičení 2*, též zjistila záměny role jednotky a zobecněného čísla (resp. záměny role jednotky a role počtu jednotek). Ve svých výsledcích shrnula vše takto (s. 97): „Nejčastěji jsem se u žáků setkala s problémem, že nedokázali rozlišit význam pojmů „jedna bedýnka“ (pod tím si většinou představili celý její obsah včetně všech souvisejících vlastností, jako byla hmotnost v ní uložených jahod), „hmotnost jahod v jedné bedýnce“ a „počet kilogramů jahod v jedné bedýnce“. U dvou žáků se objevil i názor, že označuje 1 kg, tedy jednotku hmotnosti.

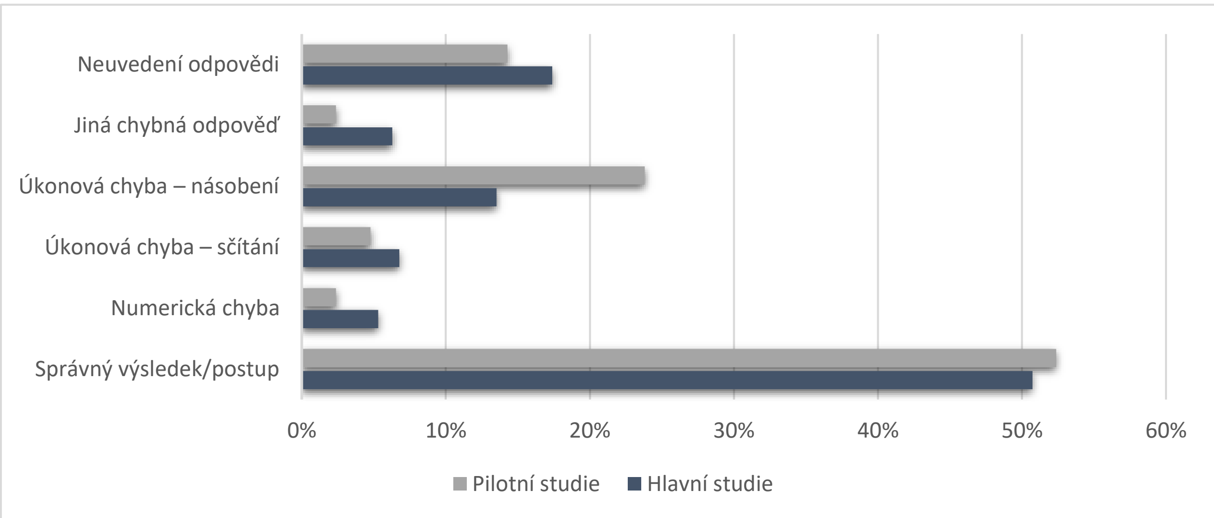
[23] Srovnání (cvičení 3): Úloha M34 z TIMSS 2007 (Obr. 13), jež typem odpovídala výše použité *úloze 3c*, byla i přes přídavek volby řešení, správně vyřešena jen u asi 25 % žáků, tedy u méně použité úlohy s otevřenou odpovědí. Vysvětlení však může ležet právě v tomto. To, že zadání obsáhlo i nabídku, mohlo totiž české účastníky TIMSS 2007 spíše svést k tomu, aby výraz nezkoušeli upravit, ale raději výsledek jen *odhadli* neboli určili ‚od oka'. Závorky a nutnost upravení znamének byly pak jenom komplikující faktor. Jednalo by se totiž o přidané prvky náročnosti vedoucí na chyby velkých skoků, což naznačuje i úloha M33: „Který výraz se rovná výrazu $4x - x + 7y - 2y$?“ (Frýzek & kol., 2009, s. 42), kde byla bez obou prvků úspěšnost žáků 75,8 %.



Obr. 40: Základní přehled výsledků – *úloha 3a*



Obr. 41: Základní přehled výsledků – *úloha 3b*



Obr. 42: Základní přehled výsledků – *úloha 3c*

Jak už bylo popsáno v Tab. 69 při rozboru okruhu o standardní manipulaci, motivací pro zařazení *cvičení 3* bylo ověřit výsledky starších výzkumů v oblasti úprav výrazů. Konkrétně, cílem bylo ověřit, zda jinými autory uváděný vztah závorek a úprav znamének a vyšší náročnost úprav výrazu bude zjištěn i zde při navýšení jejich počtu – neboli zda nejhůře dopadne *úloha 3c*. Výsledek to však nepotvrdil. V rozporou s původním předpokladem, jenž byl založen na oddílu 2.7, provázela pro hlavní studii nejnižší úspěšnost *úlohu 3a*, což byla úloha s nejmenším počtem prvků obou typů. Z tohoto důvodu nelze usuzovat, že by navýšený počet a složitost obou prvků jednoznačně nezvyšoval obtížnost, ale naopak lze naznačit, že na obtížnost může mít vliv spíš jejich výskyt, tj. že zásadní nemusí být přímo jejich počet, ale to, zda se v zadání objeví.

Skutečnost, že zásadní může být opravdu spíš přítomnost těchto prvků, naznačuje zčásti i převažující chyba ve *cvičení 3*. Tato chyba byla konkrétně napojena na změnu znamének při odstranění závorek, kdy došlo na záměnu pravidel násobení, a to pro dvojici záporných čísel za násobení čísla kladného a záporného.

Současně, chyba také převažovala na témže místě výrazů, z čehož lze usuzovat možný zdroj této chyby. U majority těchto řešení nastala totiž chyba až u druhého členu závorky, tj. u zvýrazněných členů výrazů jako $-2x \cdot (x - 1)$ či $-(3x - 7)$, čili u členů, jež byly vybaveny znaménkem.[24]

Další chyby, které nastaly, už nebyly tak početné, ale byly neméně závažné. Jak ukazuje např. Tab. 78, kromě různých případů neekvivalentních úprav (opomenutí části zápisu z minulého kroku řešení či bloudění z oddílu 2.8), šlo i o potřebu uzavřenosti z oddílu 2.6. U této chyby byl v hlavní studii zjištěn celkový výskyt skoro u šestiny žáků (cca 18 %), kdy kromě 1 % žáků těchto žáků zůstala chyba zachována i u *cvičení 4*.

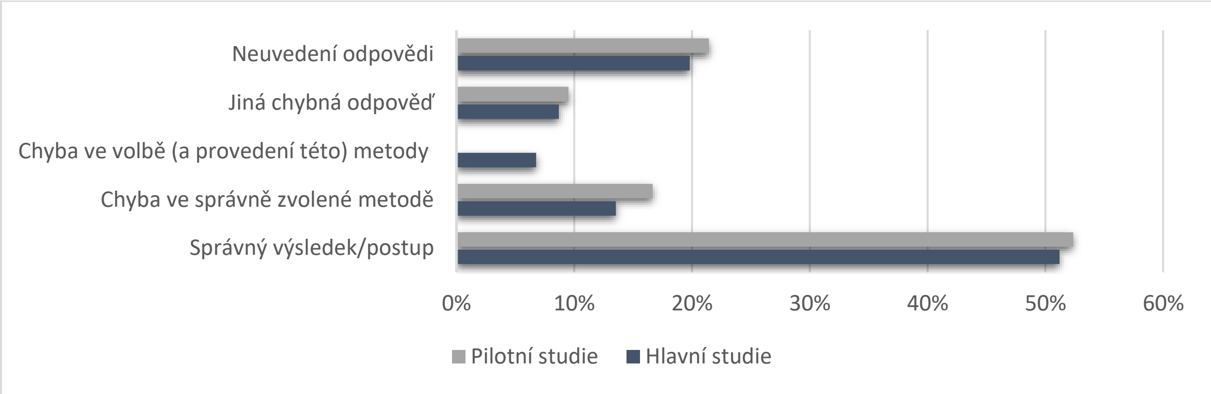
Z hlediska interakce bylo dále také pozorováno, že většina žáků, kteří takto chybovali, navzájem stejně řešili i *cvičení 1 & 2*. Ve *cvičení 1* konkrétně jednotně neuváděli odpověď (tzn. spadaly do řešení: *Neuvedení odpovědi*) a ve *cvičení 2* zase uváděli jen roli jednotek (tedy $10j$ jako ‚10 jablek'). Výstupem tedy bylo, že tito žáci zřejmě disponovali jen velmi formálním porozuměním jazyka písmen. Přesněji, vzhledem k jejich výsledkům i u *cvičení 8 & 9* (téměř vždy provázené potřebou uzavřenosti při úpravě výrazu), lze uvést, že na vině bylo asi neporozumění základním konceptům algebry – a to zejména rolím proměnné.

[24] Z tohoto lze předpokládat že původcem byl pravděpodobně zápis znamének. Vzhledem k tomu, že se znaménko mínus vyskytovalo před závorkou i před ní, mohl žák nabýt podezření, že se znaménka budou měnit, nicméně nevěděl jak a poté chyboval při odhadnutí postupu.

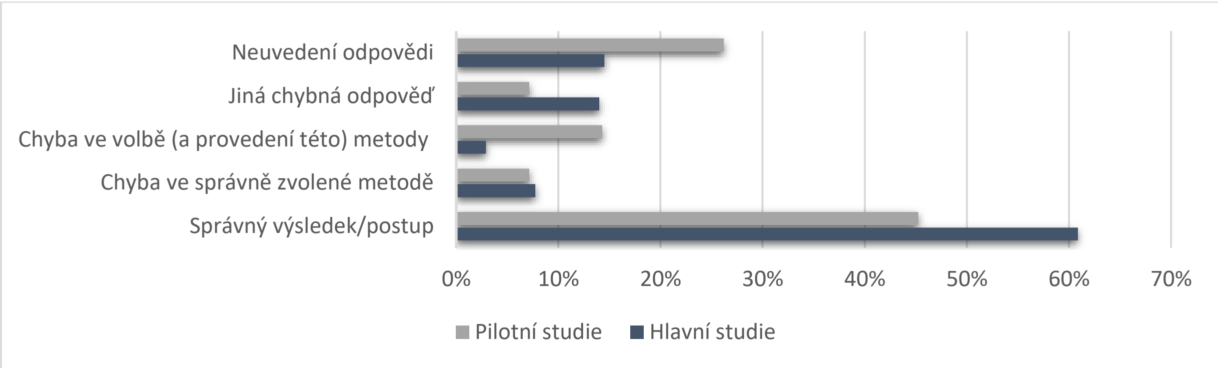
V případě *cvičení 4,* které bylo dále napojeno na hledání součinového tvaru, byly výsledky z hlediska chyb méně jednotné než u *cvičení 3*. U *úlohy 4a* a *4c,* ve kterých měli žáci po řadě zjistit, že nejvhodnější je užití vytknutí a druhé mocniny dvojčlenu, byla nejvíc početná chyba při určení vhodné metody postupu (tedy záměna způsobu převedení výrazu na součin při jeho spojení s chybným vypracováním této vybrané metody), kdežto u *4b* šlo více o provedení správně zvolené metody. Z hlediska záměny byly také chyby jiné v rámci úloh. U *úlohy 4c* bylo např. nejčastější, že záměna proběhla za identitu součinu součtu a rozdílu; u *4b* to bylo za vytýkání a součin součtu a rozdílu (u obou v obdobné četnosti), a u *4a* to bylo za druhou mocninu dvojčlenu. Vysvětlení všech těchto voleb je pak zřejmě v prototypech. Konkrétně, u *úlohy 4c* mohlo nejčastější záměnu metod podpořit to, že žáci rozdíl druhých mocnin vnímali již implicitně jako svůj prototyp pro užití rozdílů čtverců, zatímco u *4a* mohlo šlo podle výsledků o to, že zadaný trojčlen $3x^2 + 9x + 3$ zaměňovali i za $3x^2 + 6x + 9$, jež si byly podobné.

V případě *úlohy 4c*, jež byla naopak mezi studiemi oproti jiným úlohám více pozměněna (pro hlavní byla doplněna o to, že žák musel výraz nejprve upravit přemístěním jeho členů), měla hlavní verze úlohy sníženou úspěšnost. Z výsledků vyplynulo, že pilotní verzi správně vyřešilo asi 43 % žáků; kdežto hlavní verzi asi jen 30 %, tedy ani ne třetina. Na druhou stranu, ze všech žáků, kteří byli provedeného výzkumu účastni, jen větší část hlavní studie uvedla u úlohy alespoň nějaké řešení. Pro hlavní studii byla zkoumané vynechanost v *úloze 4c* konkrétně jen 23 %, kdežto u pilotáže 38 %, což značí, že nižší úspěšnost u hlavní studie nemusela být dána jen volbou vhodné metody převodu výrazu na součin (pokud by ji žáci nenašli, úlohu by např. vynechali), ale spíše i úpravou úlohy. Vzhledem k tomu, že zadání ani jednoho z testů úmyslně neuvádělo, že je vhodné jisté výrazy nejprve upravit, je možné (a výsledky též ověřitelné), že tuto prvotní úpravu provedlo jen málo chybujících žáků, zatímco ostatní zkoušeli využít vzorce u původních výrazů, což vedlo na chyby v provedení metody[25].

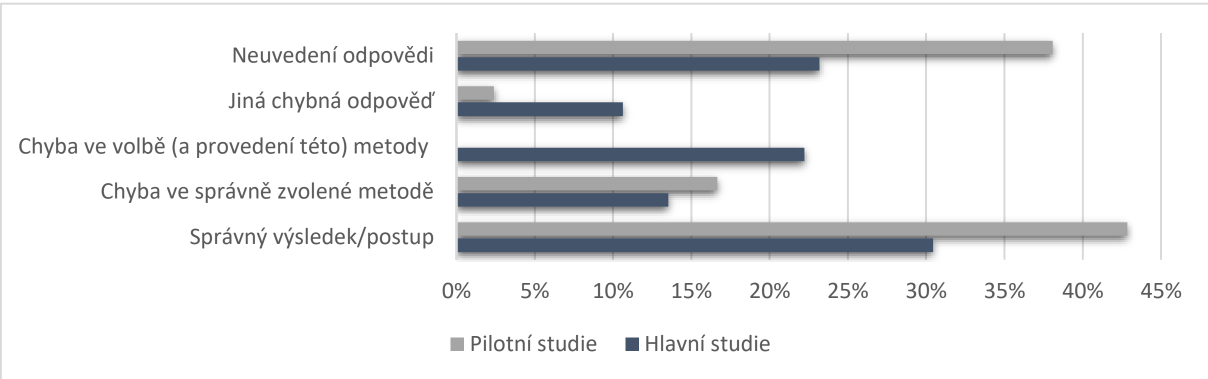
[25] Srovnání (cvičení 4): Výzkum od Žalské (2015), jenž v porovnání se *cvičením 4* zahrnul i srovnatelné (ale snazší) úlohy na rozklad výrazů na součin, přinesl třeba zjištění, že žáci dosahovali velmi nízké úspěšnosti při uplatnění vytýkání. Úlohu zde tvořilo následné zadání: „Rozložte na součin $2x + 4$" (s. 369), kdy výstup byl, že žádný žák nedokázal úkol správně provést bez poskytnutí nápovědy. I s ní jej pak správně provedlo asi jen 30 % žáků (z 16 z 8. i 9. ročníku). V návazné úloze: $x^2 - 5x$ oproti tomu byla úspěšnost i bez nápovědy 60 %, kdežto u úloh: $16 - p^2$, $4a^2 - 25b^2$ zkoušelo výrazy upravit 7 žáků, kteří s nimi měli ze školy zkušenost, ale bez získání nápovědy uspěli pouze 2.



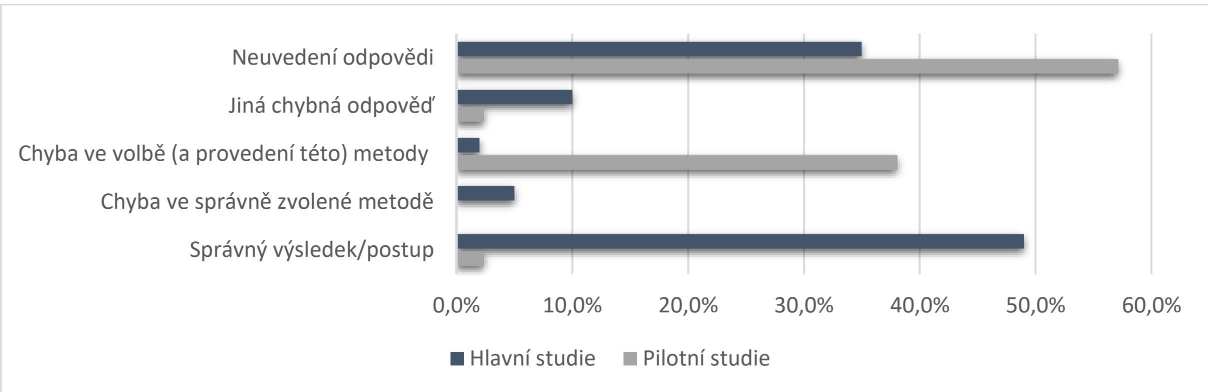
Obr. 43: Základní přehled výsledků – *úloha 4a*



Obr. 44: Základní přehled výsledků – *úloha 4b*



Obr. 45: Základní přehled výsledků – *úloha 4c*



Obr. 46: Základní přehled výsledků – *úloha 4d*

Co se týká poslední úlohy, kterou byla úloha *4d* (Obr. 46), i zde bylo zadání jiné pro obě studie. Jak už stálo v popisu obou studií, účastníci pilotáže tuto úlohu označili za vůbec nejnáročnější část testu, a to i v doprovodu nejnižší úspěšnosti. Při diskuzi např. uváděli, že příčinu tohoto neúspěchu nevidí přímo v náročnosti zadání, ale spíše v malé zkušenosti s tímto typem úloh, tj. s typem úloh, kde se mají dosadit dvojčleny za proměnnou skrze substituci $\boldsymbol{c = a + b}$, nikoli jen při substituci jednočlenu. Zajímavé však je, že jinde stejné dosazení dokázali. Konkrétně se tak stalo u *cvičení 7 & 8*, kde mnozí žáci, kteří chybovali u *4d,* správně dosadili dvojčleny ve tvaru $x + 2$ a $\boldsymbol{a + b}$ do vzorce $\boldsymbol{S = c \cdot d}$, čímž úlohu řešili správně. Z toho plyne, že chyba zmíněné výše zřejmě nebyla dána neporozuměním užité identity, ale spíše jen nezkušeností a nerozvinutým generickým modelem. Ostatně, jak ukázala dále i hlavní studie s upravenou verzí úlohy, když nebyly použity v zadání dvojčleny, úspěšnost významně vzrostla. Pro připomenutí, v hlavní studii byly řečené dvojčleny kvůli zjištěným výsledkům pilotáže nahrazeny jen za méně náročné jednočleny, a to s přidaným krokem upravit tyto členy před rozkladem změnou odstraněním jejich znamének. Jako výsledek vyšlo, že žáci v této verzi úlohy dosáhli průměrné úspěšnosti 49 %. Nejčetnější chybou se po změně stala pochybení spadající do *chyb velkých skoků*, tedy chyby, kdy žáci prováděli všechny kroky najednou a v části zápisu provedli chyby při využití správné metody. Tím skončili se 2 druhy chyb: Zaprvé s chybou, kdy nesprávně upravili znaménka některého členu, a dále chyba, jež vznikla při odmocnění mocnin v mocniteli proměnné. Alespoň jednu tuto chybu (při správném řešení *úlohy 4b*, kde se měla použít tatáž identita) učinilo pak v hlavní studii 9 % žáků. Stojí přitom za zmínku, že stejně jako u *pilotní úlohy 4b,* i zde menšina žáků (N = 4) řešila úlohu alternativně. Tímto řešením bylo při převedení výrazu na součin jen vytknutí čísla 1, tj. správné řešení, jež bylo v návrhu výzkumu sice zváženo, ale nebylo úmyslně zakázáno s tím, zda jej žáci vyzkouší.

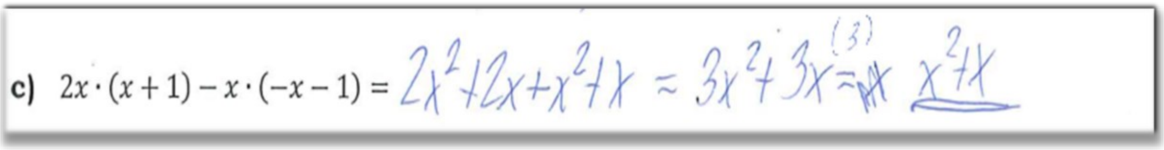
Další kategorie chyb, které byly dopředu očekávány a nastaly, byly dvě chyby ve správně zvolené metodě. Pro úlohy *3a–3c* i *4a* se jednalo o:

1. nahrazení vytknutí celého členu z výrazu za jeho odečtení, tj. jako v oddílu 3.2.6,
2. nezapsání vytýkaného členu v řešení úlohy, ačkoli při řešení vytýkání zapsán byl.

Tato druhá chyba, jež v předchozím textu oproti první rozebírána nebyla, byla zjištěna jen u části škol, které se shodovaly v aktuálně probíraném učivu. Přesněji šlo o školy, kde byl před testem věnován výklad učitelů řešení rovnic a jejich soustav, kvůli čemuž byla chyba nazvána jako ‚vliv úpravy rovnic'.

Obr. 47: *Úloha 4a (hlavní)* – Žák píše vytýkaný člen jen pod rovnítko, ale ne před závorku.

Označení tohoto typu (Obr. 47) vychází převážně z toho, jak se tato chyba projevovala. Žák při jejím provádění nejprve z výrazu sice vytkne, nicméně výsledek tohoto procesu poté nepíše celý, ale bez vytýkaného členu. Namísto, aby jej tedy zahrnul před závorku, jíž většinou ani neuvádí, vytýkaný člen nesprávně umístí jen nad či pod předcházející rovnítko (viz ukázku výše), a to i pro *cvičení 3*. Tam se i vzhledem k jinému charakteru úlohy zmíněná chyba projevuje mírně jinak. Většina chybujících žáků nejprve jen dojde ke správnému výsledku (tedy výraz zjednoduší), nicméně, než aby se s ním spokojili, převedou jej do součinového tvaru za výše uvedeného postupu (Obr. 48).



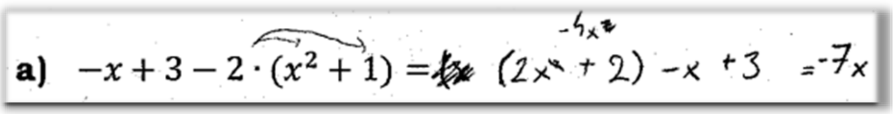
Obr. 48: *Úloha 4c (hlavní)* – Žák dochází výrazu ke správnému výsledku $\mathbf{3x^2 + 3x}$, avšak následně chybně vytýká číslo $\mathbf{3}$.

Tab. 78: Podrobnější přehled výsledků – *cvičení 3 & 4* (C3 & C4)

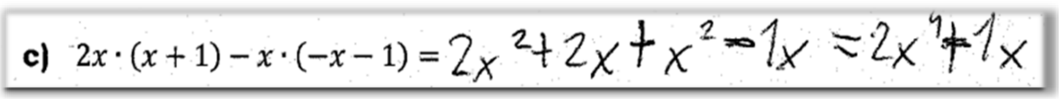
Četnost hlavních úkonových chyb v součtu výrazů

3a	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$A-1$	7 (12 %)	0 (0 %)	6 (15 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	15 (7 %)
$A-2$	2 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	0 (0 %)	5 (2 %)
3b	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$A-1$	11 (18 %)	0 (0 %)	8 (20 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	21 (10 %)
$A-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (7 %)	2 (1 %)
3c	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$A-1$	5 (8 %)	0 (0 %)	6 (15 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	12 (6 %)
$A-2$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)

- $\mathbf{A-1}$: Potřeba uzavřenosti (Obr. 49)
- $\mathbf{A-2}$: Záměna pravidel součtu za pravidla součinu (Obr. 50)



Obr. 49: *Úloha 3a (hlavní)* – žák sčítá $\mathbf{2x^2 + 2 = 4x^2}$ a $\mathbf{(-x+3) = -3x}$ a pak $\mathbf{4x^2 - 3x = -7x}$.

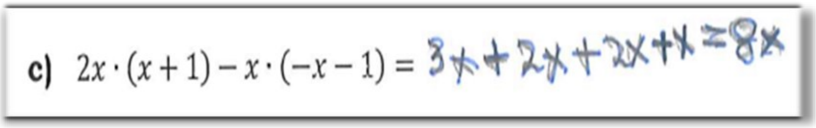


Obr. 50: *Úloha 3c (hlavní)* – Žák sčítá $\mathbf{(2x^2 + x^2) + (2x - 1x) = 2x^{2+2} + x = 2x^4 + 1x}$.

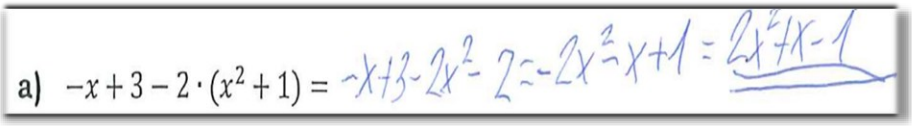
Četnost hlavních úkonových chyb v součinu výrazů

3a	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$B-1$	3 (5 %)	6 (20 %)	9 (23 %)	3 (6 %)	3 (10 %)	23 (11 %)
$B-2$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$B-3$	0 (0 %)	4 (13 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
$B-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (10 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
$B-5$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
3b	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$B-1$	5 (8 %)	6 (20 %)	4 (10 %)	5 (11 %)	3 (10 %)	23 (11 %)
$B-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$B-3$	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$B-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$B-5$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
3c	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$B-1$	3 (5 %)	3 (10 %)	2 (5 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	10 (5 %)
$B-2$	2 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	0 (0 %)	5 (2 %)
$B-3$	0 (0 %)	6 (20 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	6 (3 %)
$B-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$B-5$	4 (7 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	0 (0 %)	7 (3 %)

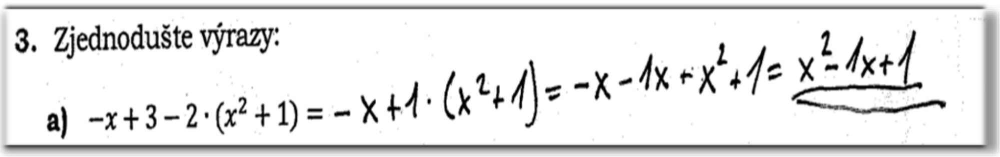
- $\mathbf{B-1}$: Chybné uplatnění znaménkové konvence
- $\mathbf{B-2}$: Záměna pravidel součinu za pravidla součtu (Obr. 51)
- $\mathbf{B-3}$: Uplatnění zvyklostí z úprav rovnic na algebraické výrazy (Obr. 52)
- $\mathbf{B-4}$: Ignorování závorky, resp. záměna pořadí kroků postupu (Obr. 53)
- $\mathbf{B-5}$: Chybná úprava proměnných a jejich mocnin (mimo B-2)



Obr. 51: *Úloha 3c (hlavní)* – žák mocnitele proměnné $\boldsymbol{x}$ snižuje na $\mathbf{1}$ a zbytek přičítá ke koeficientu, viz $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}\cdot\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}=(\mathbf{2}+\mathbf{1})\cdot\boldsymbol{x}$.



Obr. 52: *Úloha 3a (hlavní)* – žák považuje k sobě opačné mnohočleny za ekvivalentní.



Obr. 53: *Úloha 3a (hlavní)* – Žák narušuje pořadí operací a počítá $-\boldsymbol{x}+(\mathbf{3}-\mathbf{2})\cdot(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1})$.

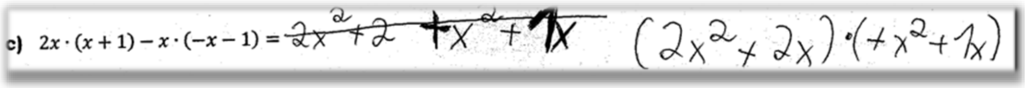
Četnost hlavních chyb z kategorie ‚jiné chyby'

3a	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$C-1$	5 (8 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	6 (3 %)
$C-2$	1 (2 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	2 (4 %)	4 (13 %)	9 (4 %)
$C-3$	1 (2 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$C-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)

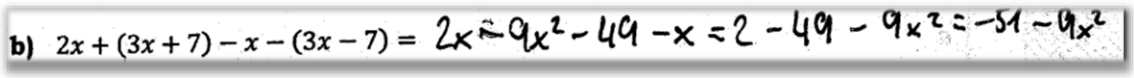
3b	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$C-1$	0 (0 %)	3 (10 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	6 (3 %)
$C-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$C-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	1 (2 %)	1 (3 %)	4 (2 %)
$C-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	2 (7 %)	5 (2 %)
3c	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$C-1$	3 (5 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (2 %)
$C-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$C-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$C-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (9 %)	0 (0 %)	4 (2 %)

- $\mathbf{C-1}$: Záměna znamének operací v průběhu postupu (Obr. 54).
- $\mathbf{C-2}$: Opomenutí opisu části zápisu mezi kroky postupu.
- $\mathbf{C-3}$: Dojem, že lze při úpravě výrazu uplatnit algebraickou identitu (Obr. 55).
- $\mathbf{C-4}$: Odečtení/vytknutí výrazů na základě vizuální podobnosti (Obr. 56).

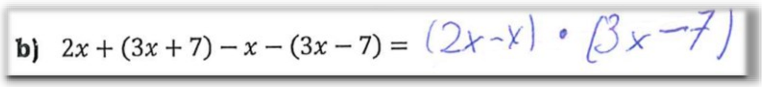
Neuváděné *jiné* chyby byly pozorovány pouze u 1 žáka.



Obr. 54: *Úloha 3a (hlavní)* – Žák přechází k záměně operace součtu (prvně rozdílu) za součin.



Obr. 55: *Úloha 3n (hlavní)* – žák záměnou spojuje závorky skrze: $\mathbf{(3x+7)(3x-7)=9x^2-49}$.

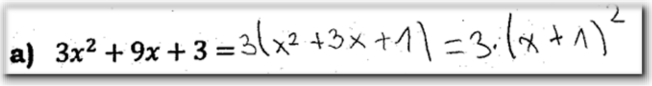


Obr. 56: *Úloha 3b (hlavní)* – Žák ztotožňuje závorky při hledání součinového tvaru.

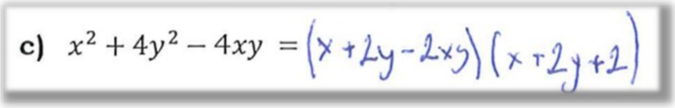
Četnost hlavních chyb v záměně (a chybném použití) metody

4a	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$D-1$	3 (5 %)	2 (7 %)	3 (8 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	9 (4 %)
$D-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$D-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (17 %)	5 (2 %)
4b	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$D-1$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$D-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$D-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	3 (1 %)
4c	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$D-1$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$D-2$	19 (32 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	22 (11 %)
$D-3$	6 (10 %)	3 (10 %)	2 (5 %)	7 (15 %)	5 (17 %)	23 (11 %)
4d	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$D-1$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$D-2$	2 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$D-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)

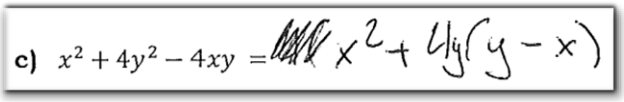
- $\mathbf{D-1}$: Žák volí a chybně používá identitu druhé mocniny dvojčlenu (Obr. 57).
- $\mathbf{D-2}$: Žák volí a chybně používá identitu součinu součtu a rozdílu (Obr. 58).
- $\mathbf{D-3}$: Žák volí a chybně používá vytýkání či postupné vytýkání (Obr. 59).



Obr. 57: *Úloha 4a* (hlavní)– Žák našel správný výsledek, ale nechává se svést prototypem vzorce.



Obr. 58: *Úloha 4c (hlavní)* – Žák zaměnil $x^2 + 4y^2$ za $(x + 2y)^2$ a chyboval při odmocnění $-4xy$.

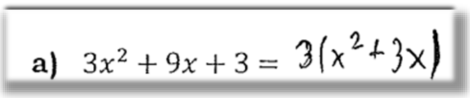


Obr. 59: *Úloha 4c (hlavní)*– Žák vybírá jinou metodu než vzorec a vytýká jen z části výrazu.

Četnost hlavních úkonových chyb v součinu výrazů

4a	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
E – 1	5 (8 %)	4 (13 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	9 (4 %)
E – 2	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
E – 3	1 (2 %)	4 (13 %)	2 (2 %)	1 (2 %)	1 (3 %)	9 (4 %)
E – 4	1 (2 %)	1 (3 %)	1 (3 %)	1 (2 %)	1 (3 %)	5 (2 %)
E – 5	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (9 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
4b	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
E – 1	11 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
E – 2	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 3	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 4	2 (3 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	5 (2 %)
E – 5	10 (17 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	10 (5 %)
4c	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
E – 1	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 2	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 3	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 4	6 (10 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	1 (3 %)	11 (5 %)
E – 5	8 (13 %)	0 (0 %)	4 (10 %)	4 (9 %)	1 (3 %)	17 (8 %)
4d	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
E – 1	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 2	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 3	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
E – 4	3 (5 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (7 %)	8 (4 %)
E – 5	2 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)

- **E – 1**: Záměna vytknutí členu za jeho odečtení (Obr. 60).
- **E – 2:** Vytknutí jen z vybraných členů výrazů (nepřevedení výrazu na součin).
- **E – 3**: Ovlivnění řešením rovnic – žák neuvádí vytýkaný člen.
- **E – 4**: Chyba jen při práci s číselnými koeficienty.
- **E – 5:** Chyba jen při práci s proměnnými (např. v jejich počtu u použití vzorce)

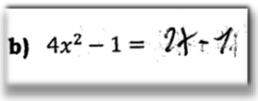


Obr. 60: *Úloha 3a (hlavní)* – Absolutní člen výrazu je s jeho vytknutím odečten.

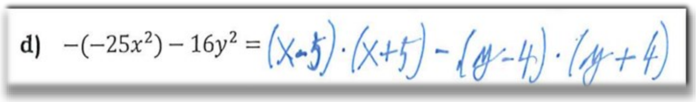
Četnost hlavních chyb z kategorie ‚jiné chyby' (chyby před volbou metody)

4a	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$\mathrm{F}-1$	3 (5 %)	0 (0 %)	10 (25 %)	3 (6 %)	0 (0 %)	16 (8 %)
$\mathrm{F}-2$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$\mathrm{F}-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$\mathrm{F}-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
4b	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$\mathrm{F}-1$	2 (3 %)	0 (0 %)	9 (23 %)	6 (13 %)	1 (3 %)	18 (9 %)
$\mathrm{F}-2$	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$\mathrm{F}-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	3 (1 %)
$\mathrm{F}-4$	0 (0 %)	1 (3 %)	1 (3 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
4c	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$\mathrm{F}-1$	2 (3 %)	0 (0 %)	8 (20 %)	2 (4 %)	1 (3 %)	13 (6 %)
$\mathrm{F}-2$	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$\mathrm{F}-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (2 %)
$\mathrm{F}-4$	0 (0 %)	1 (3 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
4d	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	Celkem
$\mathrm{F}-1$	1 (2 %)	0 (0 %)	7 (18 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	10 (5 %)
$\mathrm{F}-2$	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$\mathrm{F}-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	1 (2 %)	1 (3 %)	4 (2 %)
$\mathrm{F}-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	2 (1 %)

- $\mathbf{F-1}$: Potřeba uzavřenosti.
- $\mathbf{F-2}$: Strukturální chyba (např. užití identity před další činností, (Obr. 61).
- $\mathbf{F-3}$: Rozpis daného výrazu na základní činitele a ukončení postupu.
- $\mathbf{F-4}$: Místo rozkladu na součin je uveden jen jeden činitel rozkladu (Obr. 62).



Obr. 61: *Úloha 4b (hlavní)* – Žák zvolil správnou identitu, ale píše jen jednu její část.

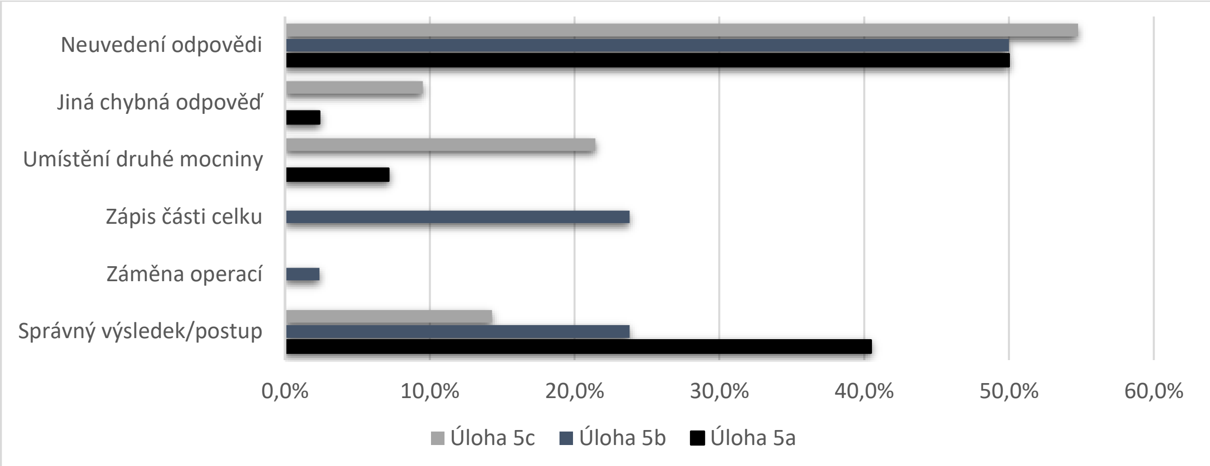


Obr. 62: *Úloha 4d (hlavní)* – Žák provádí chybný rozpis výrazu: $-25x^2 = -5x \cdot 5x = (x-5)(x+5)$. čili opačné využití potřeby uzavřenosti.

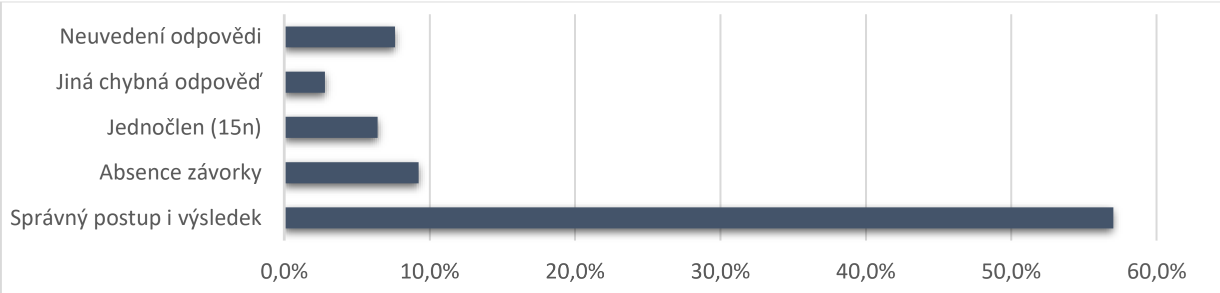
4.6.3 Cvičení 5 & 6

Pro cvičení, která se v testu testovala sestavení či alespoň výběr vhodného algebraického výrazu k modelované situaci, je třeba rozdělit celý okruh algebraizace na dvě části: zaprvé na cvičení, jež byla pro obě studie společná (tj. *cvičení 6*), a zadruhé cvičení, jež byla odlišná (tj. *cvičení 5*). Jako první je vhodné začít u *cvičení 5*[26].

[26] Srovnání (cvičení 5): Chyba v neuvedení závorek z Obr. 64 byla u (Žalská, 2015) zjištěna u 1 žáka ze 13 (správně odpovědělo 8 žáků), zatímco u (MacGregor & Stacey, 2007) byla chyba v zastoupení 21 % (386 žáků) a úspěšnost byla 26 %. Pokud se navíc zohlední i další sledovaná chyba (zápis $15n$ místo $(n+5)\cdot 3$), jev nastal v rozmezí obou studií U (MacGregor & Stacey, 2007) byl tento jednočlen dohledán jen u 4 % žáků 9. ročníku, kdežto u Žalské (2015) opět jen u 1 žáka. U (Novotná, 2014) byla četnost též podobná. Chybu v její práci učinil jen 1 žák z 8, kdy další 2 projevili nejistotu a uvedli správné řešení až po radě autorky.



Obr. 63: Základní přehled výsledků – *cvičení 5* – pilotní studie



Obr. 64: Základní přehled výsledků – *cvičení 5* – hlavní studie

Pilotní verze *cvičení 5* patřila mezi cvičení s největší vynechaností (v průměru všech tří úloh asi 52 %). Toto řešení převažovalo dle Obr. 63 u každé ze tří úloh, které cvičení obsahovalo, zatímco u hlavní studie bylo nejčastější formou odpovědí uvedení správného řešení (Obr. 64). Z toho plyne, že jiné zadání pro obě studie výrazně ovlivnilo výsledky. Zatímco u hlavní studie žáci modifikované zadání (ač rovněž v jazykovém kontextu) převážně rozuměli (viz úspěšnost 57 %), u pilotáže tomu bylo jinak. V rozhovoru zadavateli (Tab. 73) často uváděli, že původnímu zadání nerozuměli (za matoucí část označovali především pokyn: ‚Zapište jako *matematický výraz*:'), což mělo za následek tvorbu chybného situačního modelu a chybné řešení. Naopak u hlavní studie specifikaci hledaného modelu vedla již zmíněnou úspěšnost[27]. Žáci, kteří nepatřili do 57 % žáků se správným řešením, chybovali většinou jen předpokládaným způsobem – a to vynecháním závorek (9 %) či potřebou uzavřenosti (6 %).

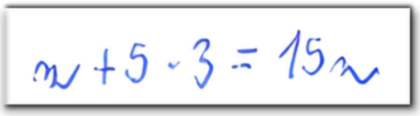
[27] Toto zjištění může značit, že je i u algebraice nutné dosáhnout popis požadovaného modelu provést jednoznačně. Současně může jít ale i jen o projev malého vzorku pilotní studie. Řečeno jinak, žáci pilotáže podobné cvičení ještě před testem možná neřešili (nebylo v rozhovoru zmíněno), zatímco ostatní ano.

Pokud žáci chybu s vynecháním závorek ve cvičení učinili, v naprosté většině případů (až na 1 žáka[28]) byl zápis mezi žáky jednotný. Jako řešení žák do záznamového archu uvedl jen dvojčlen $n + 5 \cdot 3$ (tj. správný výsledek až na absenci závorky), zatímco u druhé chyby to bylo $15n$. V tomto případě nastala chyba ovšem již i v kroku, kdy žáci spojili výrazy při startu řešení. Ve svém pokusu o nalezení správného výsledku uvedli spojení $n + 5 = 5n$, načež následným násobením číslem 3 vytvořili výsledek $15n$.

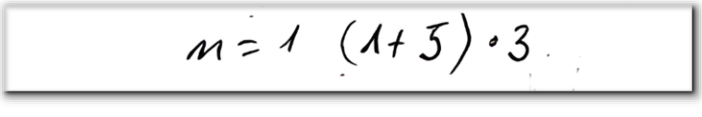
Alternativní postup byl ten, kdy žák chyby provedl najednou, když vynechal závorku a až poté spojil výrazy skrze $n + 5 \cdot 3 = 15n$. Jak už tohoto vyplývá, tuto kombinovanou chybu nelze bez rozhovorů jasně odlišit. Z tohoto důvodu bylo přistoupeno na rozhodnutí uvedenou chybu neodlišit, ale naopak ji zahrnout do jiné, a to přesněji *potřeby uzavřenosti*. Důvodem je to, že zatímco někteří žáci uvedli do záznamového archu i celý postup, z nějž šlo jasně rozeznat, jaké chyby se dopustili a proč, jiní uváděli jen výsledek, a tedy i samotné $15n$. Z toho plyne, že nešlo vždy říci, zda se žáci dopustili jedné, či více chyb. Příčinou je to, že žáci uvádějící jen samotný výsledek $15n$ mohli chybovat různě. Např. mohli při tvorbě výrazu začít u sečtení členů 5 a n, následně přejít k vynásobení součtu číslem 3 (tím došlo k vyřazení závorky), a dále násobek součtu zjednodušit potřebou uzavřenosti:

$$5 + n = 5n = 5n \cdot 3 = 1.$$

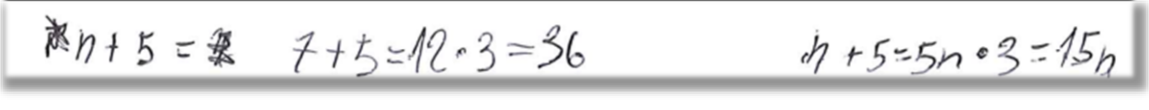
Druhým způsobem, jak chybu mohli provést, je, že uvažovali závorku v roli procesu. Tímto způsobem pak dochází na stejnou chybu tak, že žák neodstraní závorku v rámci prvních dvou kroků výše, ale naopak až v důsledku $(5 + n) = (5n)$, kdy již není třeba (Obr. 65, Obr. 66 a Obr. 67)



Obr. 65: *Cvičení 5 (pilotní)*: kombinace dvou chyb najednou



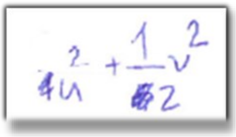
Obr. 66: *Cvičení 5 (pilotní)*: Správné řešení provázené dosazením za proměnnou



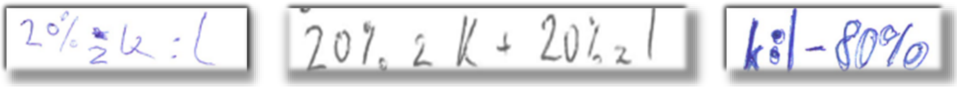
Obr. 67: *Cvičení 5 (pilotní)*: Kombinovaná chyba v zápisu jednočlenu a absenci závorky

[28] Jeden žák, který v závorce chyboval, ale závorku stále zapsal, uzávorkoval všechny tři členy výrazu.

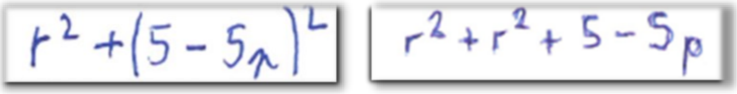
Co se týče pilotní verze cvičení, v rozboru tamních výsledků bylo dále zjištěno, že pro různá zadání činili žákům potíže různé prvky. Například u *úlohy 3a* 3 žáci vynechali závorky ze svého modelu, čímž se přiblížili chybě z hlavní studie ilustrované výše (Obr. 68). U *úlohy 3b* skupina 10 žáků chybovala při algebraizaci procentuální části (se sklonem modelovat doplněk, či symbol % pouze opsat – Obr. 69)[29]. A u *úlohy 3c* bylo hlavní potíží správné umístnění druhé mocniny a určení počtu členů (Obr. 70).[30]



Obr. 68: *Úloha 3a (pilotní):* modelace s absencí závorek

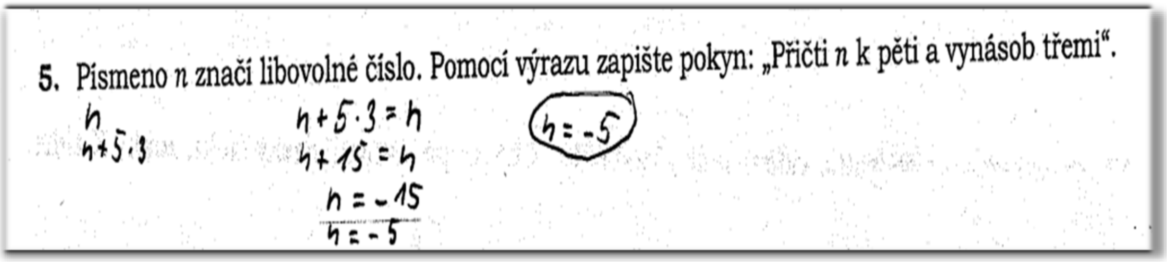


Obr. 69: *Úloha 3b (pilotní)*: chyba v aplikaci expresivní síly u části vyjádřené procenty



Obr. 70: *Úloha 3c (pilotní):* chyba v pozici (vlevo) a počtu druhých mocnin (vpravo)

Pokud jde o další rozdíly, u (hlavního) *cvičení 5* se dále také u 2 žáků projevil jev, jenž byl zjištěn i u *cvičení 6* jako tzv. ‚potřeba vyčíslení' (Tab. 5). Tato chyba byla vzhledem ke svému nižšímu výskytu zařazena mezi ‚jiné' (viz Obr. 71)Obr. 71, přičemž šlo o chybu, kdy žák zkoušel písmeno vyčíslit tak, že zaměnil roli zobecněného čísla a určité neznámé.[31].



Obr. 71 *Cvičení 5 (hlavní)* – Záměna rolí písmene v roli zobecněného čísla a neznámé, resp. užití obou (neznámá je užita na levé straně a zobecněné číslo na pravé). Žák si však není vědom, že se tak dopouští i chyby při úpravě rovnic. Člen $\boldsymbol{n}$ ve třetí úpravě rovnice totiž nahradí nulou.

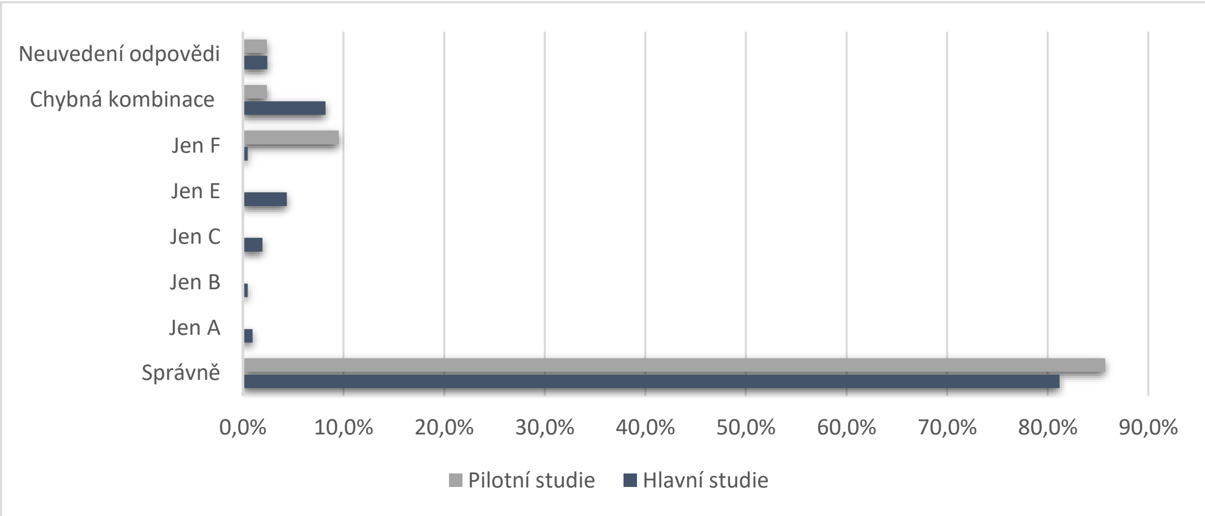
[29] Srovnání: u úloh $3c$ a $3a$, kde část nevyjadřovala procenta, provedli tutéž chybu jen 4 a 1 žák.

[30] Chybu tohoto typu lze odůvodnit např. tím, že žáci zkoušeli algebraizovat sérii úkonů doslovně. Použitý slovosled ‚součet druhých mocnin r' odpojili tak od textu u čísla 5 a uvedli jen $r^2 + r^2$.

[31] Poznámka: Skutečnost, že je řešení těchto žáků z jejich pohledu vázané na roli neznámé, vychází mj. i z *cvičení 1 & 2*. Ve *cvičení 1* oba chybující žáci uvedli, že pro proměnná znamená neznámou a *cvičení 2* s rolí zobecněného čísla vyřešit nedokázali.

Z hlediska *cvičení 6*, které bylo zaměřeno na výběr vhodného modelu z nabídky výrazů, byly výsledky v převaze jednotné u pilotní a hlavní studie. U více než 80 % žáků celé studie bylo shledáno řešení jako správné, přičemž u chybných šlo zase nejvíce o kombinace několika řešení najednou, jako především $A \wedge D$ (Tab. 79).[32]

Pokud žák volil jen jednu možnost, byla jeho chybná volba nejčastěji E: $(120 + 50) \cdot n$. Tato volba se, na rozdíl od správného D: $120 + 50 \cdot n$, lišila tím, že spolu jinak interagovaly členy v rámci výrazu. Při její volbě žák (při neuvážení možnosti, že mohl řešení pouze odhadovat) nerozlišil koeficient a absolutní člen, ale naopak je sjednotil. Teoreticky tak mohl dojít až k úvaze, že všechny členy sdílí roli neboli že se proměnná vztahuje k oběma číslům 120 i 50, a nikoli jen k číslu 50.



Obr. 72: Základní přehled výsledků – *cvičení 6*

Pakliže se pozornost dále stočí na otázky, s nimiž byl test navrhován, nedošlo k potvrzení, že by žáci řešili volili zároveň k sobě ekvivalentní řešení. Volbu E, jež byla vyjádřena jako $(120 + 50) \cdot n$, ani u jednoho žáka neprovázelo zvolení k ekvivalentní volby B: $170 \cdot n$, což podporuje, že tito žáci buď dostatečně neanalyzovali každou z nabízených variant řešení, anebo je nenapadlo jednotlivé volby porovnat[33].

[32] Nejčastější zvolenou kombinací pro *cvičení 6* se u celkové studie ukázalo chybné řešení $A \wedge D$ u 4 žáků. Nicméně ještě důležitějším rysem bylo, že téměř každá kombinace odpovědí obsahovala i volbu i správné odpovědi D (Tab. 79). To, i vzhledem k počtu distraktorů naznačuje, že žáci byli i přes šíři nabídky schopni identifikovat správnou možnost a vyřadit většinu chybných. Problém však nastal v následné selekci (tj. neuvažovali ekvivalenci výrazů).

[33] V rámci souvisejících dat, lze uvést, že řešení *cvičení 6* byla zkoumána i vůči řešením u *cvičení 3 & 4*. Ti žáci, kteří byli výše u těchto cvičení (či alespoň v jednom z nich) spojeni s potřebou uzavřenosti, tutéž chybu aplikovali i u *cvičení 6*. Touto chybou byla volba řešení E, resp. B, jež obě spočívaly ve spojení výrazů v rámci součtu.

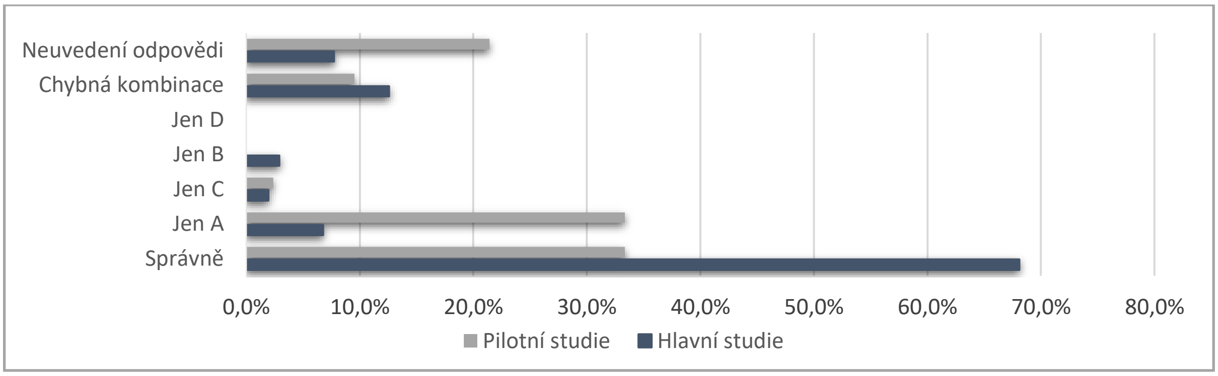
Tab. 79: Četnost zjištěných kombinací možností – *cvičení 6* (C6) – školní úroveň

C6	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$A \wedge D$	0 (0 %)	1 (3 %)	3 (8 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
$B \wedge E$	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (1 %)
$C \wedge D$	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$D \wedge E$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	2 (1 %)
$A \wedge C \wedge D$	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$D \wedge E \wedge F$	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$C \wedge F$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$C \wedge E$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$B \wedge D \wedge E$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)

4.6.4 Cvičení 7, 8 & 9

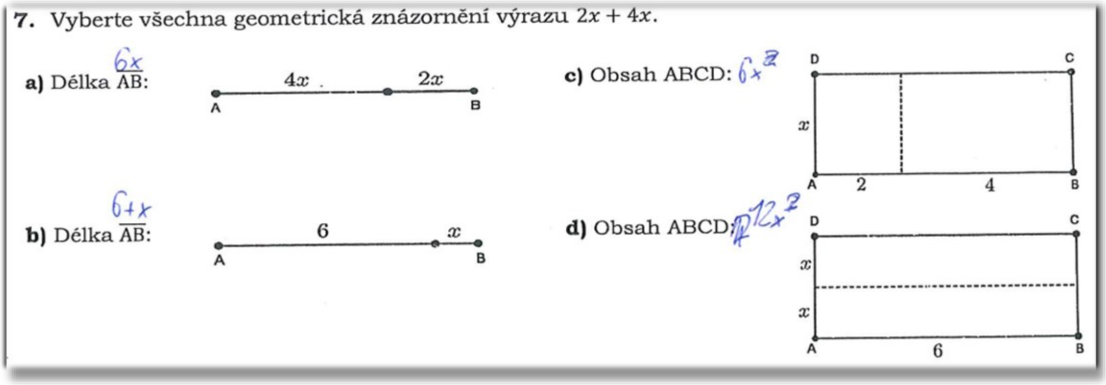
Trojice cvičení, která se v testu vztahovala ke tvorbě a interpretaci geometrického modelu, má své výsledky pokryté v Obr. 73, Obr. 75 a Obr. 81. Jako první je pokryto *cvičení 7*. Žáci pilotní studie v něm většině případů odpověděli chybně, zatímco u hlavní studie správně. Ve *cvičení 7* žáci u pilotní studie ve třetině případů věřili, že dvojčlen $2x + 4x$ má jen jednu geometrickou intepretaci (délku úsečky o 6 jednotkách délky x, volba A), kdy 4 z těchto žáků tutéž úvahu zopakovali i u *cvičení 8*.

V hlavní studii, která úlohu sdílela, měla výsledky výrazně příznivější.[34] Zhruba 68 % žáků (v celé studii pak cca 62 %) uvedlo, že řešení *cvičení 7* zahrnuje nejen volbu odpovědi A, ale i C, tzn. úsečku i obsah obdélníku o stranách 6 a x. Nicméně, jak už plyne z Obr. 73, kde jsou výsledky cvičení pokryty, nejčastější neúplné řešení pilotáže (jen volba A), měla i pro hlavní studii nezanedbatelné zastoupení (7 %). Jako důvod lze patrně vnímat to, že tito žáci při řešení *cvičení 7* nezkoušeli (či selhali při zkoušce) zadaný výraz upravit. Z tohoto důvodu pak mohli rovnou využít, že model využitý u odpovědi A obsahoval rovnou oba zadané činitele, což znamená $2x$ a $4x$ jako na Obr. 74.



Obr. 73: Základní přehled výsledků – *cvičení 7*

[34] **Srovnání (cvičení 7)**: U (Žalská, 2015), resp. (Novotná, 2014), kde měla srovnatelná úloha jen jedno řešení (viz Obr. 16), vybralo tuto možnost bez nápovědy 9 ze 13 žáků a 1 žák z 8. Pro studii TIMSS 2007 to bylo více. Úspěšnost u studie narostla na 42,5 %, nicméně nejčastější chyba byla shodná. Stejně jako u výzkumů to byla snaha žáků vnímat výraz jen jako (chybnou) délku úsečky.



Obr. 74: *Cvičení 7*: Žák správně usuzuje, že lze řešení usnadnit algebraizací geometrických modelů, ale chybuje u následných úprav. V možnosti $\boldsymbol{D}$ provádí úkonové chyby v násobení výrazů, resp. pravidel úpravy mocnin proměnné při násobení výrazů (viz druhá mocnina u $\mathbf{12}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$).

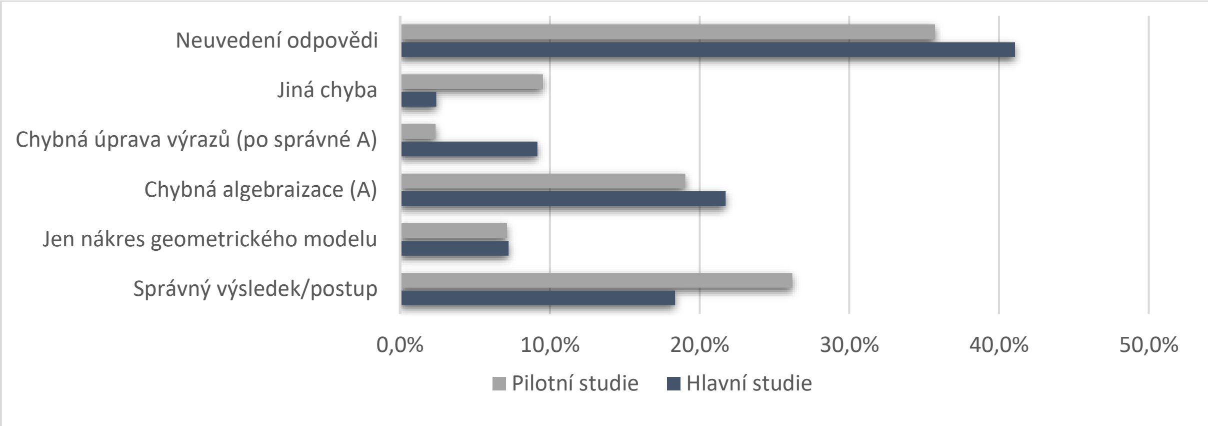
Co se týká nesprávných kombinací, u hlavní studie byla dominantní pouze jediná. Touto chybou bylo podle Tab. 80 zvolení nesprávného řešení $A \wedge D$, kdy chybné řešení D bylo obsaženo i ve většině chybných kombinací pro hlavní i celou studii (u obou asi 8 %).

Tab. 80: Podrobnější odpovědi – *cvičení 7* (C7) – školní úroveň

C7	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$A \wedge B$	2 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$A \wedge D$	6 (10 %)	2 (7 %)	4 (10 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	3 (7 %)	16 (6 %)
$B \wedge C$	3 (5 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	4 (2 %)
$C \wedge D$	1 (2 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$A \wedge B \wedge C$	1 (2 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	3 (1 %)
$A \wedge C \wedge D$	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$A \wedge B \wedge D$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)

Správná volba A, která byla naopak ze správných variant A, C volena více, byla přítomna v nejvíce řešeních[35]. Její výskyt byl v analýze zjištěn u téměř 83 % žáků celé studie (u hlavní studie přibližně 70 %), což naznačuje, že valná většina žáků neměla potíž chápat dvojčlen jako lineární model, ale spíš jako dvojrozměrný model. Vychází to z toho, v kolika řešeních se vyskytlo jen C, či i $C \wedge D$. Jak totiž vyplývá z Obr. 73 i Tab. 80, těchto chybných odpovědí bylo při sjednocení všech zhruba 16 % (každé zvlášť pak po řadě 14 % a 2 %), což ukazuje, že žáci čelili jedné obtíži více než jiné. Místo toho, aby nedokázali určit, který dvojrozměrný model bude správný, měli potíž určit, že takový model bude vůbec součástí řešení, a proto zvolili jen model(y) lineární.

[35] Toto zahrnuje řešení obsahující $A \wedge C$, řešení obsahující jen A a chybné kombinace zahrnující A.



Obr. 75: Základní přehled výsledků – *cvičení 8*

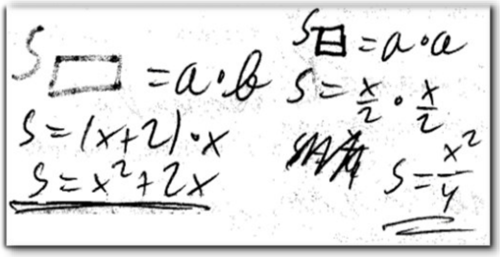
U *cvičení 8*, které už bylo postaveno na tom, že žák geometrické modely nejen vybírá, ale i tvoří, nastala chyba nejvíce v algebraizaci, a to u 21 % žáků pro hlavní studii. Chyba se u žáků projevovala nezávisle na tom, zda si geometrický model vytvořili (nezáleželo tedy na tom, zda výraz vznikal jako výsledek pro modelaci: *přirozený jazyk* → *algebraický jazyk*, anebo: *přirozený jazyk* → *geometrický jazyk* → *algebraický jazyk;* v obou případech byla přítomná). Tab. 81 v tomto směru dokonce ukazuje, že si v celé studii tvořilo geometrický model *cvičení 8* asi jen 51 % žáků. Z tohoto počtu navíc ještě celých 13 % nedosáhlo ani po geometrizaci na správné řešení (podle Tab. 81 chybovali především při algebraizaci a dále úpravě výrazů), kdy nejčastější typ chyby v algebraizaci byla ‚vazba na linearitu'. Tato chyba se projevila tím, že žák chybně zapsal mocniny proměnné, resp. některé vynechal. Zaprvé, buď ignoroval jeden rozměr zadaného obdélníku (v převaze jeho výšku, jíž poté do výrazu nepromítl), nebo chyboval u odebraného čtverce (v tomto případě neuvedl u vyjádření obsahu mocnitele 2).

Alespoň jedné z těchto chyb se v celé studii dopustilo 11 % žáků, kdy u hlavní studie šlo 10 %. Jakékoli chyby v algebraizaci obsahu se souběžně s tím dopustilo v hlavní studii asi 17 % žáků, kdy cca 3 % žáků zaměnilo při zápisu obsahu obdélníku multiplikativní operace za aditivní.

Tab. 81: Správná řešení (S) a tvorba geom. modelů (G) – *cvičení 8* (C8) – školní úroveň

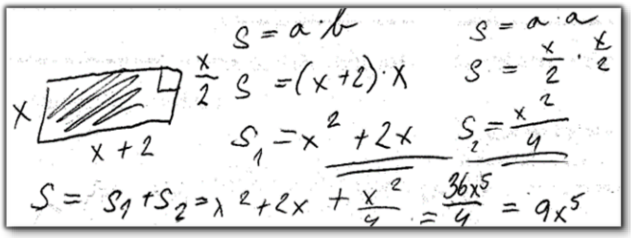
C8	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
Všech G	46 (77 %)	16 (53 %)	5 (13 %)	24 (51 %)	14 (47 %)	22 (52 %)	127 (51 %)
S ∧ G	21 (35 %)	2 (7 %)	0 (0 %)	5 (11 %)	5 (17 %)	9 (21 %)	42 (17 %)
S bez G	25 (42 %)	14 (47 %)	5 (13 %)	19 (40 %)	9 (30 %)	13 (31 %)	85 (34 %)
Chybné G	6 (10 %)	8 (27 %)	4 (10 %)	8 (17 %)	5 (17 %)	7 (17 %)	38 (15 %)
Bez G	19 (32 %)	6 (20 %)	1 (3 %)	11 (23 %)	4 (13 %)	6 (14 %)	47 (19 %)

Asi 4 % žáků dále považovalo za řešení *cvičení 8* pouze určení obsahu jen pro dílčí části zadaného geometrického modelu. Tato chyba vypadala nejčastěji tak, že žáci sice dílčí obsahy pro dané i odebírané útvary vyjádřili správně, avšak po tomto kroku oba obsahy již nespojili uchopovací silou, ale považovali je za hledané výsledky (Obr. 76)



Obr. 76: *Cvičení 8*: chyba v nespojení výrazů

Jiné chyby podobného rázu se projevovali tím, že žáci výše uvedené obsahy spojili opačnou operací oproti očekávání – tzn. sčítání místo odčítání a naopak. Při algebraizaci odstřižení čtverce pak tudíž při strategii komplementu nezapsali hledaný obsah jako rozdílů obsahů, ale jako jejich součet, viz Obr. 77.



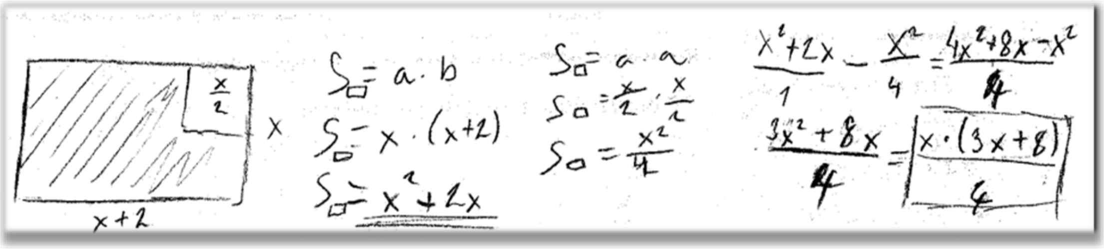
Obr. 77: *Cvičení 8*: chyba v sečtení obsahů S_1 a S_2

Dalším zjištěním bylo dále to, že žáci, kteří algebraizaci provedli pro *cvičení 8* chybně, navzdory pokrytým výsledkům *cvičení 5*, nevynechali závorky u vyjádření obsahu obdélníku stejně frekventovaně, ale méně. Vůči *cvičení 5,* kde bylo vynechání závorky zjištěno asi u 9 % žáků, stejnou chybu u *cvičení 8* učinila asi jen třetina žáků hlavní studie, tedy asi 3 % žáků.

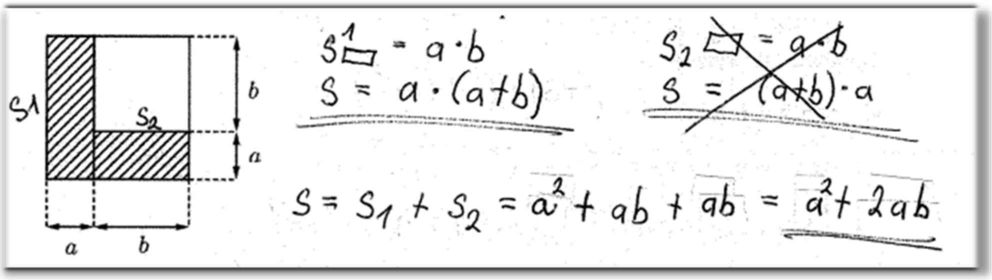
Tab. 82: Četnost komplementu (K) a rozdělení (R) *cvičení 8 & 9* (C8 & C9) – školní úroveň

C8	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
R	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
K	23 (38 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	4 (9 %)	7 (23 %)	11 (26 %)	48 (19 %)
C9	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
R	19 (32 %)	4 (13 %)	3 (8 %)	18 (38 %)	18 (60 %)	16 (38 %)	78 (25 %)
K	1 (2 %)	2 (7 %)	0 (9 %)	4 (9 %)	4 (13 %)	1 (2 %)	12 (8 %)

V rámci kontextu správných řešení bylo dále zjištěno, že u *cvičení 8* došlo na poměrně značnou disproporci v rámci volby správné metody řešení (Tab. 82). Postup založený na doplnění obdélníku o odebraný čtverec (strategie komplementu, Obr. 78) volilo v hlavní studii asi 19 % žáků, zatímco rozdělení na části jen méně než 1 %, tedy 1 žák. Z toho vyplývá, že pro správné řešitele bylo výrazně přirozenější volit při vytváření geometrického modelu metodu komplementu než metodu rozdělení – což byl hlavní rozdíl oproti *cvičení 9*. V tom naopak platilo, že častější bylo rozdělení. Voleno bylo celkem u 76 % správných řešitelů z hlavní studie a 71 % správných řešitelů celé studie, a to v podobě jíž ilustruje Obr. 79.

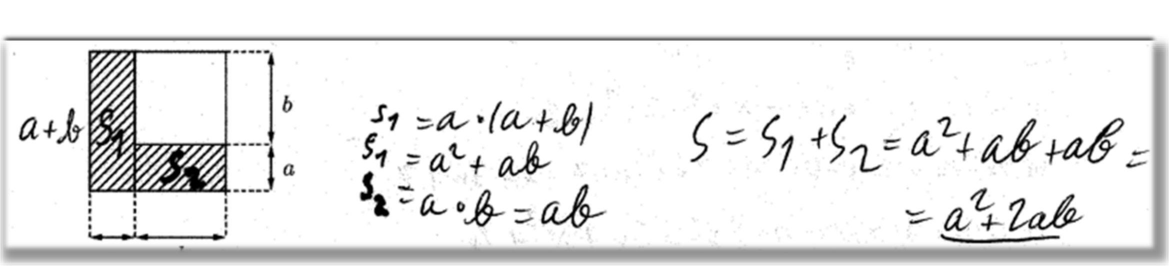


Obr. 78: *Cvičení 8* – příklad správného řešení (strategie komplementu)



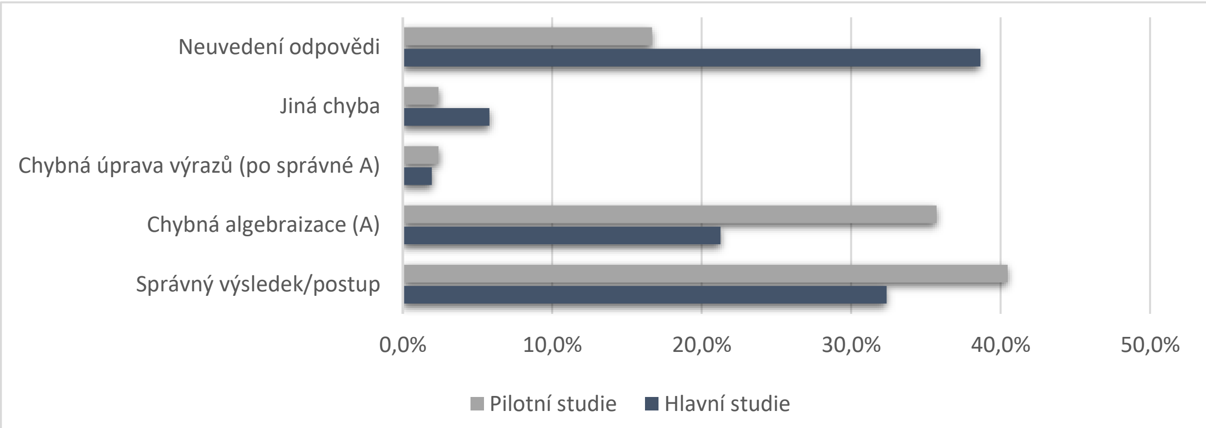
Obr. 79: *Cvičení 9* – příklad správného řešení (strategie rozdělení)

Důvod, proč bylo tímto způsobem dominantní jiné řešení pro obě cvičení, je opět patrně spojen se zadáním obou cvičení. Zhruba 73 % žáků, kteří v hlavní studii obě cvičení vyřešili správně, totiž během řešení zaměnilo použitou metodu mezi cvičením, tj. že první vyřešili správně komplementem a druhé rozdělením. Na druhou stranu, u *cvičení 9* mohl vše ovlivnit i daný model. Tím je myšlen geometrický model z Obr. 80 složený z dělících čar, jež mohl zafungovat jako návod, že stačí určit obsah menších obdélníků (S_1 a S_2) a tyto obsahy následně sečíst (Obr. 80).



Obr. 80: *Cvičení 9* – Žák volí metodu rozdělení útvaru a značí hlavní části vyšrafovaného útvaru.

Na druhou stranu, jak ukazuje *cvičení 9* a Obr. 81, nezdá se, že by při řešení dělící čáry každému žákovi pomohly. I když bylo zjištěno, že účastníci hlavní studie dosáhli u *cvičení 8* v průměru téměř dvojnásobné úspěšnosti než u *cvičení 9,* ani jedna úspěšnost nebyla výrazně vysoká – a i chyby byly podobné. Změnu v jejich složení (Tab. 85) přineslo až to, když se uvážila část postupu týkající se úpravy výrazů, tj. standardní manipulace. Rozdíl zde nastal v tom, že u *cvičení 8* (a zvláště u jeho pilotní verze, jež poté prošla pro hlavní studii úpravou) museli žáci nejen násobit a odečíst výrazy, ale i umocnit a odečíst zlomky. To pak samo přineslo většinu chyb při úpravě výrazů, jež mimo jiné nastávaly i u násobení a sčítání výrazů[36]. U *cvičení 9* byly do chyb zahrnuté úpravy jen násobení a sčítání výrazů. Jako jedna z hlavních chyb se proto při úpravě výrazů ukázalo to, že žáci zaměňovali operace, tedy že postupovali jako u Obr. 77, kdy u *cvičení 8* figurovala chyba přibližně u 2 % žáků hlavní studie, a u *cvičení 9* u 11 % žáků (viz Tab. 85).



Obr. 81: Základní přehled výsledků – *cvičení 9*

Jak vyplývá dále z Tab. 84, nejčastější kombinací řešení mezi *cvičeními 8 & 9* byla dvojitá nesprávná odpověď. Dle Tab. 83 to bylo dáno zřejmě tím, že většina žáků neměla s těmito cvičeními zkušenost – což naznačili i zadavatelé. Jediná škola, kde se tyto úlohy objevovaly ve výuce více pravidelně, byla jen ZŠ Tachov, kde se tak dělo i těsně před testem.

Tab. 83: Počet chyb (X) a úspěšnosti (✓) u *cvičení 8 a 9* (C8 &C9) – školní úroveň

C8 & C9	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec
C8 X	37 (62 %)	27 (90 %)	40 (100 %)	43 (73 %)	22 (73 %)	31 (74 %)
C8 ✓	23 (38 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	4 (27 %)	8 (27 %)	11 (26 %)
C9 X	40 (67 %)	24 (80 %)	37 (93 %)	32 (68 %)	8 (27 %)	25 (60 %)
C8 ✓	20 (33 %)	6 (20 %)	3 (7 %)	15 (32 %)	22 (73 %)	17 (40 %)

[36] **Srovnání (cvičení 9)**: U Benešové (2023), kde se úloha lišila absencí dělících čar, byla úspěšnost u 9. ročníku (N = 60) mírně nad 15 % kdy 40 % odpověď neuvedlo. I v jejím případě se však shodovaly chyby. Jednou z hlavních se stalo tvoření algebraického modelu jako u chyby $P-1$ v Tab. 85 a následně i chybné utváření geometrického modelu.

Tab. 84: Přehled chyb (X) a úspěšnosti (✓) u *cvičení 8 & 9* (C8 & C9)

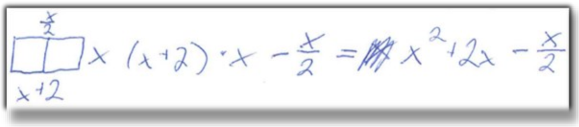
Kombinace odpovědí (u stejného žáka)	Počet žáků (Hlavní/celá studie)	Podíl žáků (Hlavní/celá studie)
C8 ✓ ∧ C9 X	12 /14	5–6 % / 5–6 %
C8 X ∧ C9 ✓	41 / 49	19–20 % / 19–20 %
C8 ✓ ∧ C9 ✓	26 / 35	12–13 % / 14–15 %
C8 X ∧ C9 X	133 /157	64–65 % /63–64 %
C8 X ∧ C9 X: Chyba při úpravě výrazů	0 / 0	0 % / 0 %
C8 X ∧ C9 X: Chyba při tvorbě výrazů	19 / 19	9–10 % / 7–8 %
C8 X ∧ C9 X: Neuvedení odpovědi	58 / 58	28–29 % / 23–24 %

Tab. 85: Podrobnější přehled výsledků cvičení 8 & 9 (C8 & C9)

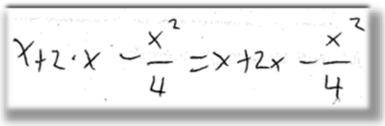
Četnost hlavních chyb vzešlých z nesprávné algebraizace

C8	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$A-1$	0 (0 %)	9 (30 %)	4 (10 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	6 (14 %)	19 (8 %)
$A-2$	3 (5 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	3 (6 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	10 (4 %)
$A-3$	3 (5 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	9 (4 %)
$A-4$	1 (2 %)	0 (0 %)	3 (8 %)	1 (2 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	6 (2 %)
$A-5$	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	2 (1 %)
C9	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$A-1$	0 (0 %)	2 (7 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$A-2$	3 (5 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (2 %)
$A-3$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (< 1 %)
$A-4$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (7 %)	3 (1 %)
$A-5$	7 (12 %)	6 (20 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	6 (20 %)	6 (14 %)	28 (11 %)

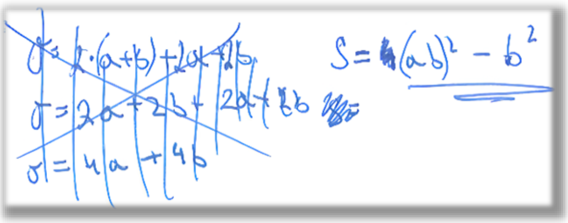
- $\boldsymbol{A-1}$: ve vzorci obsahu pravoúhelníků se nevyužívá obou jeho rozměrů (Obr. 82)
- $\boldsymbol{A-2}$: žák u strategie komplementace nebo rozdělení úvaru chybuje v algebraizaci vzájemného vztahu pro správně sestavené výrazy. Zaměňuje rozdíl, součet.
- $\boldsymbol{A-3}$: žák u strategie komplementace nebo rozdělení úvaru chybuje v algebraizaci vzájemného vztahu pro správně sestavené výrazy. Neuvádí žádnou operaci.
- $\boldsymbol{A-4}$: žák při algebraizaci obsahu obdélníku nepoužívá závorky (Obr. 83).
- $\boldsymbol{A-5}$: žák ve vzorci pro obdélník místo násobení uvádí sčítání (Obr. 84).



Obr. 82: *Cvičení 8* – chyba v absenci mocniny u $\frac{x}{2}$



Obr. 83: *Cvičení 8* – chyba v závorce $x+2$.

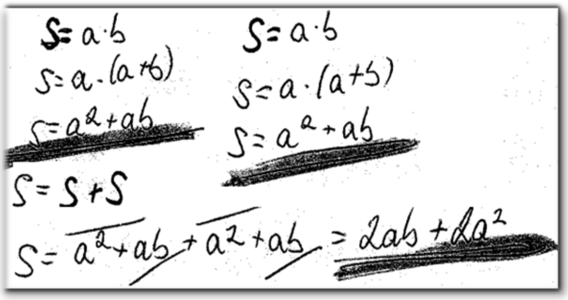


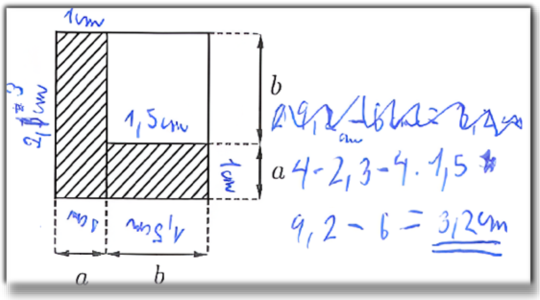
Obr. 84: *Cvičení 8* – chyba v zápisu $a \cdot b$ místo $a+b$.

Četnost chyb vzešlých z nepochopení zadání

C8	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$P-1$	5 (8 %)	2 (7 %)	0 (0 %)	5 (11 %)	5 (17 %)	0 (0 %)	9 (7 %)
$P-2$	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (6 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
$P-3$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
C9	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$P-1$	2 (3 %)	3 (10 %)	0 (0 %)	2 (4 %)	0 (0 %)	4 (10 %)	11 (4 %)
$P-2$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$P-3$	1 (2 %)	1 (3 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	4 (10 %)	9 (4 %)

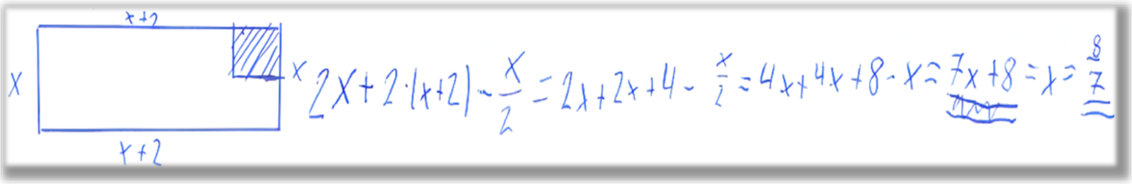
- $\boldsymbol{P-1}$: žák chybně určí, o kterou plochu se má zajímat. Určí buď obsah celého útvaru bez odebrání čtverce, či určí jen obsah odečtené části.
- $\boldsymbol{P-2}$: žák chybně určí, o kterou plochu se má zajímat v kontextu průniku. Průnik překrývajících se částí útvarů buď počítá duplicitně, nebo jej vynechá (Obr. 85).
- $\boldsymbol{P-3}$: žák projevuje potřebu přesnosti. Při užití modelu (specificky u C9) se pokouší měřit rozměry a nedbá jeho ilustrativnosti. V následném postupu pak např. snaží určit obvod, nikoli obsah (Obr. 86).



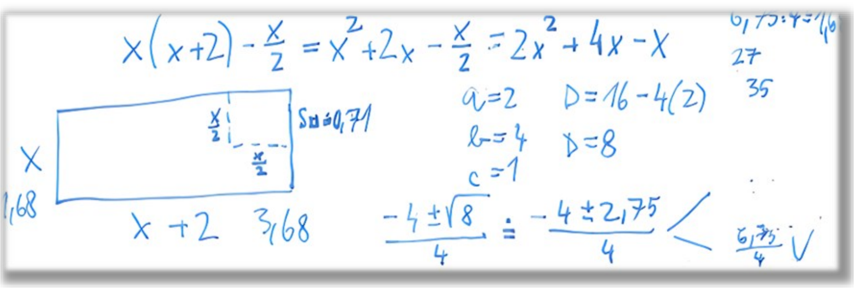


Obr. 85: *Cvičení 9* – chyba dvojitého zápisu $\boldsymbol{a \cdot b}$. Obr. 86: *Cvičení 9* – chyba v měření a obvodu

Příklad sekundárních chyb vzešlých záměny role písmen – Obr. 87, Obr. 88



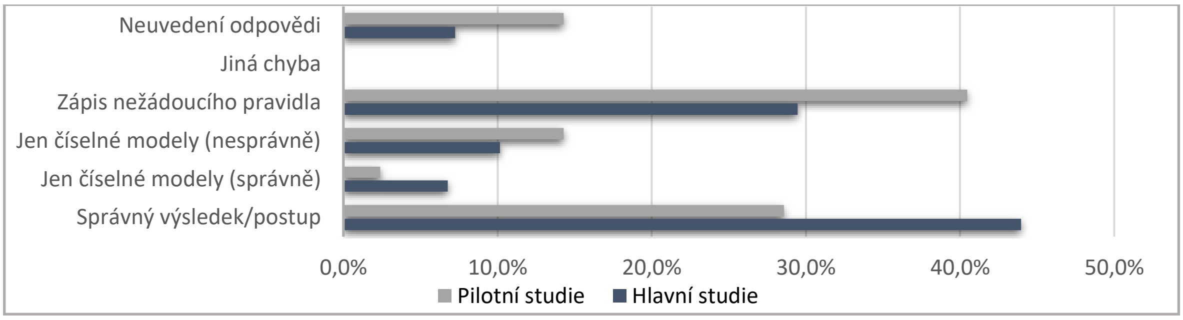
Obr. 87: *Cvičení 8* – Chyba vzniká už při určení obvodu obdélníku a odečtení $\frac{x}{2}$. Pokračuje však neekvivalentní úpravou (násobení 2) a chybným „převodem“ $\boldsymbol{7x}$ na druhou stranu „rovnice“.



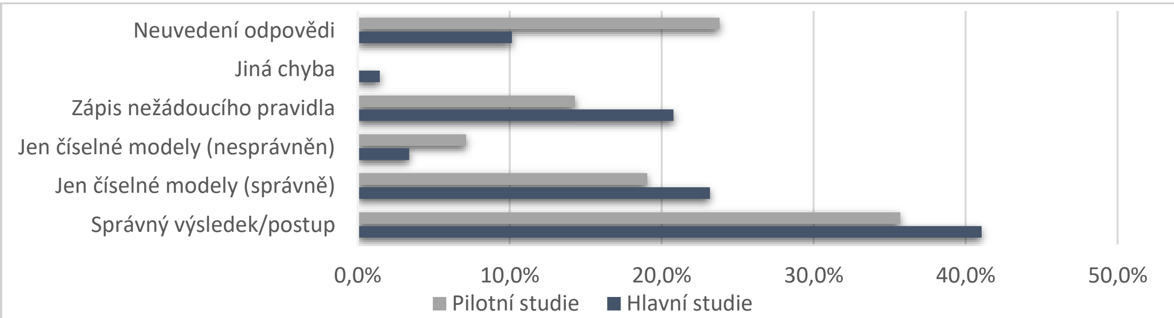
Obr. 88: *Cvičení 8*: Chyba vzniká v odečtení $\frac{x}{2}$ a neekvivalentním násobení výrazu 2. Poté dochází však na záměnu výrazu za rovnici a výpočet ‚kořenů rovnice‘ pomocí diskriminantu.

4.6.5 Cvičení 10 & 11

Poslední cvičení, která byla v testu zahrnuta k otestování identifikace a vyjádření pravidla u pravidelnosti mají výsledky pokryté v Obr. 89 a Obr. 90. Cílem bylo zjistit, jak žáci dokáží hledat a následně vyjádřit obecné vztahy izolovaných modelů u pravidelností číselných i grafických entit a zda se tyto případy budou lišit v obtížnosti. Výsledky ukázaly, že rozdíl v úspěšnosti byl marginální (< 3 %). Pro *cvičení 10*, kde byla žákovi zadána pravidelnost číselných entit byla nejvíce pozorovaná chyba zápis neplatného pravidla vůči podmínkám zadání, zatímco u *cvičení 11* (pravidelnost grafických entit) šlo o jen uvedení izolovaných modelů. V případě tedy došlo na to, že u žáka neproběhl první abstrakční zdvih (Tab. 87) a žák zůstal jen na úrovni izolovaných modelů bez vyjádření pravidla.[37]



Obr. 89: Základní přehled výsledků – *cvičení 10*



Obr. 90: Základní přehled výsledků – *cvičení 11*

---

[37] Srovnání (cvičení 10): Pokorný (2017) odhalil, že nejčastější chybou u jeho analogie *cvičení 10* (stejné zadání jen jiné pravidlo) tvořil zápis $n + 3$ místo $3n - 1$, zatímco zde šlo o $n + 4$ místo $4n + 1$. Chyby jsou tedy zjevné stejné. Na základě svého výsledku Pokorný (2017) proto soudil, že žáci měli patrně příliš malou potřebu svůj nalezený vztah ověřit, jelikož jej neuvažovali jako závislost řádků, ale jako zápis dalšího členu 2. řádku (tj. jako rekurentní zápis $a_n = a_{n-1} + 3$, kde je obecný člen a_n vynechán a jeho předchůdce je nahrazen za n či jeho slovní vyjádření). Tento předpoklad se tu spíše potvrdil. Důvodem je to, že úloha M42 studie TIMSS (Obr. 14) také naznačila, že žáci svá pravidla u zobecnění příliš netestují, ale spokojí se s tím, že jim platí pro jakýkoli počet případů.

Srovnání (cvičení 11): I dle Markworthа (2010), jenž *cvičení 11* použil první, bylo *cvičení* obtížné. V práci uvádí, že šlo o nejhůř řešenou úlohu při testování zobecnění (bez uvedení úspěšnosti), kdy správné řešení bylo pro žáky vždy stejné. Tímto řešením bylo určení pravidla součtem. Žák podle autorů postupně sčítal všechny židle podle jejich pozice (tzn. nad a pod stolem a pak vlevo i vpravo od něj), což je hlásili i Blanton & kol. (2019). Ti u varianty téhož cvičení zjistili, že nejstarší žáci jejich studie (do 5. ročníku) byli schopni pravidlo mezi počtem sedících lidí a stolů vyjádřit častěji jako algebraický výraz než slovní popis (poměr 20 % vs cca 15 % žáků). Rozdíl byl však v koncepci cvičení. Jak už bylo uvedeno studie sledovala jen mladší žáky a zadání cvičení také oplývalo tabulkou.

V rámci úspěšnosti bylo dále zjištěno, že zhruba 43 % žáků celé studie nedokázalo vyřešit ani jedno z cvičení, tj. buď v nich chybovali, či řešení neuvedli. Opačný trend byl zastoupen méně. Pokud žák dokázal správně vyřešit jedno *cvičení*, pouze v necelé polovině případů dokázal vyřešit i cvičení zbylé, a to u hlavní i pilotní studie (Tab. 86).

Tab. 86: Přehled chyb (X) a úspěšnosti (✓) u *cvičení 10 & 11* (C10 & C11)

Kombinace odpovědí (u téhož žáka)	Počet žáků (Hlavní/celá studie)	Podíl žáků (Hlavní/celá studie)
C10 ✓ ∧ C11 X	36 / 38	17–18 % / 15–16 %
C10 X ∧ C11 ✓	30 / 35	14–15 % / 14–15 %
C10 ✓ ∧ C11 ✓	55 / 65	26–27 % / 26–27 %
C10 X ∧ C11 X	91 / 117	43–44 % / 46–47 %
C10 X ∧ C11 X: Nesprávný zápis pravidla	17 / 21	8–9 % / 10–11 %
C10 X ∧ C11 X: Jen IM[38]	11 / 14	5–6 % / 5–6 %
C10 X ∧ C11 X: Jen (správně) tvořené IM	2 / 3	0–1 % / 1–2 %

Další zjištění, které z tohoto pozorování vyplynulo, bylo to, že ne každé správné řešení bylo spojeno i s tvorbou izolovaných modelů. U *cvičení 10* tvořil podíl všech správných řešení, u nichž došlo i na tvorbu izolovaných modelů asi 33 % všech testů (za izolované modely se zde brala jakákoli čísla, jež původní tabulka nežádala), zatímco u *cvičení 11* šlo o zhruba 53 % (zde se za izolované modely považovaly i kresby modelů, o nichž se v zadání psalo, ale jejichž náčrt byl podle zadání nepovinný; při dodržení předchozího postupu by šlo jen o méně než 2 % žáků).[39] Opustí-li se dále od podmínky, že řešení musí být správná, je podíl izolovaných modelů výrazně vyšší. Ve *cvičení 10* představoval podíl všech řešení, v nichž si žák tvořil ve výše uvedeném způsobu izolované modely asi 39 % případů, kdežto u *cvičení 11* o 52 %, přičemž oboje je počítané u hlavní studie. Současně, asi dvě třetiny z právě uvedeného počtu (přesněji o podílech 58 % a 64 % u *cvičení 10 a 11*) nemělo mimo modelů vyjádřené pravidlo neboli u nich nedošlo na 1. abstraktní zdvih. Bezmála 10 % žáků například takto u hlavní studie chybovalo v alespoň jednom cvičení, když hledané pravidlo neuvedli správně, či že k zápisu pravidla ani nedošlo a žáci zůstali jen u izolovaných modelů. Tato druhá situace byla viděna asi u 5 % žáků. Vzhledem k již uvedenému bylo nicméně i u první skupiny zjištěno, že část žáků možná nejenže nenašla způsob, jak vyjádřit hledané pravidlo, ale potenciálně hůře u izolovaných modelů využila jen ručního spočtení počtu židlí a celé pravidlo ani neobjevila.

[38] IM označuje *izolované modely*.

[39] Rozdíl v odlišném započtení izolovaných modelů vniká tím, že obě cvičení podněcovala jiný počet řešení. Zatímco u *cvičení 11* šlo najít jedno pravidlo, jež bylo zároveň platné i správné dle zadání, u *cvičení 10* jich bylo více, ale ne všechna odpovídala zadání (viz Tab. 87). Dalším důvodem bylo pak to, že *cvičení 11* výslovně žádalo určit jen čísla, a nikoli grafické izolované modely, jež jsou počítány.

Tab. 87: Podrobnější přehled výsledků – *cvičení 10 & 11* (C10 & C11)

Četnost hlavních forem nesprávného uvedení pravidla

C10	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$E \wedge F$	4 (7 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (4 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	7 (3 %)
$E \wedge V$	0 (0 %)	1 (3 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
$R \wedge F$	4 (7 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	4 (9 %)	2 (7 %)	17 (40 %)	29 (12 %)
$R \wedge V$	1 (2 %)	8 (27 %)	14 (35 %)	9 (19 %)	5 (17 %)	0 (0 %)	37 (15 %)
C11	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$E \wedge F$	2 (3 %)	8 (27 %)	7 (18 %)	4 (9 %)	0 (0 %)	4 (10 %)	25 (10 %)
$E \wedge V$	0 (0 %)	6 (20 %)	7 (18 %)	5 (11 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	18 (7 %)
$R \wedge F$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$R \wedge V$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)

Četnost hlavních forem správného uvedení pravidla

C10	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$E \wedge F$	42 (70 %)	6 (20 %)	1 (3 %)	18 (38 %)	13 (43 %)	8 (19 %)	88 (35 %)
$E \wedge V$	2 (3 %)	5 (17 %)	2 (5 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (7 %)	12 (5 %)
$R \wedge F$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	1 (< 1 %)
$R \wedge V$	0 (0 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (7 %)	0 (0 %)	3 (1 %)
C11	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$E \wedge F$	34 (57 %)	6 (20 %)	3 (8 %)	16 (34 %)	24 (80 %)	14 (33 %)	97 (39 %)
$E \wedge V$	2 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (1 %)
$R \wedge F$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
$R \wedge V$	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)

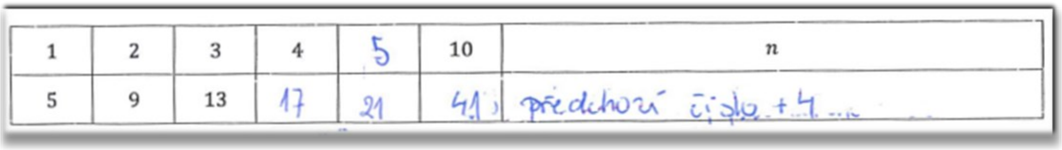
- E … explicitní typ zápisu (bez vztahu k minulým členům posloupnosti)
- R … rekurentní typ zápisu (se vztahem k minulým členům posloupnosti)
- F … formální zápis pravidla (použit je matematický zápis s proměnnou)
- V … verbální zápis pravidla (použito je slovně-číselné vyjádření bez proměnné)

Četnost opakovaných nesprávných forem zápisu pravidla (P)

C10	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$P = n + 4$ či $4 \cdot n$	4 (7 %)	8 (27 %)	10 (25 %)	11 (23 %)	7 (23 %)	13 (31 %)	53 (21 %)
$P =$ rozdíl čísel ve sloupci roste o 3	0 (0 %)	1 (3 %)	1 (3 %)	1 (2 %)	3 (10 %)	3 (7 %)	9 (4 %)
Jiné (max 2 žáci)	6 (10 %)	0 (0 %)	7 (18 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	15 (6 %)
C11	ZŠ Tachov	GOAML	ZŠ ML	ZŠ Plzeň	GPJP	ZŠ Liberec	Celkem
$P = 2n + (2 \cdot 3)$	0 (0 %)	2 (7 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (1 %)
$P = n$ anebo P je libovolné číslo	0 (0 %)	2 (7 %)	4 (10 %)	4 (9 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	11 (4 %)
$P = 22 \cdot \mathrm{n}$	0 (0 %)	1 (3 %)	3 (8 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (2 %)
$P = 2 \cdot n$	1 (2 %)	2 (7 %)	4 (10 %)	4 (9 %)	0 (0 %)	2 (5 %)	13 (5 %)
Jiné (max 2 žáci)	1 (2 %)	7 (23 %)	2 (5 %)	5 (11 %)	0 (0 %)	3 (7 %)	18 (7 %)

Chybné řešení (C10):	$\boldsymbol{P = 4 + n}$ anebo $\boldsymbol{4n}$	Obr. 91

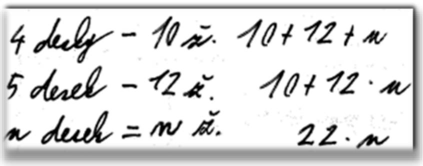
Tato chyba byla ve *cvičení 10* nejpočetnější a dle zápisů žáků patrně vznikla ve vazbě na druhý řádek zadané tabulky (tj. první řádek v pravidlu nefiguruje). Žák si skrze zadaná čísla nejspíše povšiml, že čísla druhého řádku vždy rostou o 4 (někteří tak přímo uvádějí i slovně či vztah formulují rekurentně), což může značit fixaci na hledání přímé úměrnosti. Na druhou stranu, jelikož je četnost chyby vysoká, ve stejnou chvíli může jít i o dopad nevhodného zadání. Jinými slovy, může jít i dopad toho, že pro cvičení byla zvolena nejednoznačná formulace, kdy žáci nerozuměli pokynu: ‚zapište do sloupce n' (tj. neinterpretovali tuto část jako to, že číslo prvního řádku má být u zápisu pravidla právě proměnná n, ale pochopili jej jinak). Pokud tomu tak je, lze očekávat, že by k minimalizaci tohoto pochybení mohlo přispět přeformulování zadání. Konkrétní návrh by mohl být např.: ‚Zapište pravidlo, jak vznikají čísla druhého řádku z čísel prvního řádku *v závislosti* na čísle n, je-li n libovolné (přirozené) číslo.'


1	2	3	4	5	10	n
5	9	13	17	21	41	předchozí číslo +4 ...

Obr. 91: *Cvičení 11* – chyba: $\boldsymbol{P = 4 \cdot n}$

Chybné řešení (C11):	$\boldsymbol{P = 22 \cdot n}$	Obr. 92

Tato chyba se objevovala u žáků, kteří provedli výše uvedenou chybu, ale ještě jeden krok navíc. Stejně jako výše správně určili totiž číselné výsledky $P(4) = 10$, $P(5) = 12$ a chybně $P(n) = n$, nicméně místo ukončení, pokračovali sčítáním výsledků $P(4) + P(5) + P(n)$, a to za užití potřeby uzavřenosti: $10 + 12 + n = 22 + n = 22n$.



Obr. 92: *Cvičení 11* – chyba: $P = 22n$

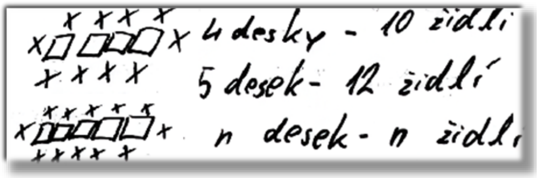
Chybné řešení (C11):	$\boldsymbol{P = 2 \cdot n}$	Obr. 93

Žák uvážil vztah jen jako přímou úměrnost a neuvědomil si, že musí vnímat i první člen posloupnosti. Jeho úvaha byla tedy příliš fixována na přibývající množství, a nikoli studium všech zadaných členů, specificky prvního.

Obr. 93: *Cvičení 11* – chyba: $P = 2n$

Chybné řešení (C11):	$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{n}$/libovolné	Obr. 94

Chyba tohoto typu se v testech vyskytovala ve více formách: někteří žáci zapisovali, že počet desek stolu bude libovolné číslo (tj. bez úvahy počtu židlí), jiní obě veličiny spojili. V tomto případě vznikla neplatná rovnost: ‚počet desek stolu = počet židlí', kterou žák uvedl jako svou odpověď. Důvodem obou chyb byla nicméně asi přílišná fixace na to, že proměnná $\boldsymbol{n}$ značí libovolné číslo. Výslednou úvahou tedy bylo, že $\boldsymbol{n}$ může značit i počet desek stolu.



Obr. 94: *Cvičení 11*: chyba: $P = n$

Chybné řešení (C10):	$\boldsymbol{P}$ = rozdíl čísel ve sloupci roste o 3	Obr. 95

Tato forma zápisu ve *cvičení 10* byla označena za chybu jen kvůli nedokončení. Pravidlo, které žák objevil je totiž platné, nicméně nemohlo být použito k získání očekávaného řešení, protože postup závisí na znalosti aritmetické posloupnosti.

<u>*Kompletní vypracování:*</u>

$$x_1 - 1 = 4$$
$$x_2 - 2 = 4 + 3$$
$$x_3 - 3 = 4 + 3 + 3$$
$$x_n - n = 4 + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n-1} = 4 + 3 \cdot (n-1) = 4 + 3n - 3 = 1 + 3n$$
$$x_n - n = 1 + 3n \implies x_n = (1 + 3n) + n \implies \boxed{P = 4n + 1}$$

4	7	10	13			
1	2	3	4	…	10	n
5	9	13	17		40	sečtem vozdíl předchozích čísel + 3=vozdíc následující čísel,

Obr. 95: *Cvičení 10*: chyba: $P =$ rozdíl čísel ve sloupci roste o 3

Alternativní správné řešení (C10):	$\boldsymbol{P = 5 \cdot n - (n - 1)}$	Obr. 96

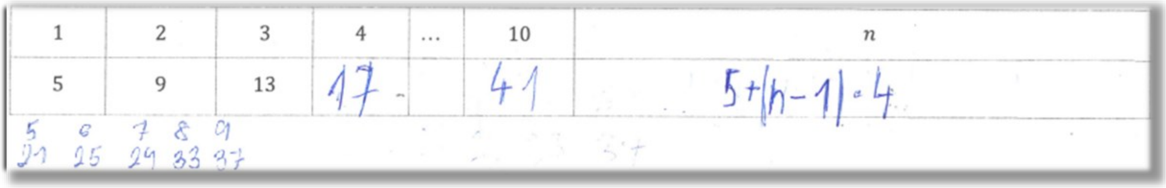
Toto správné řešení bylo dohledáno u 4 žáků hlavní studie. Tři z nich pravidlo vyjádřili buď pomocí mnoha numerických modelů (bez užití proměnné), či slovního vyjádření. Jen 1 žák uvedl pravidlo jazykem písmen.

1 ·5-0	2 ·5-1	3 ·5-2	4 ·5-3	…	10 ·5-9	n
5	9	13	17		41	5n-(n-1)

Obr. 96: *Cvičení 10* – správné řešení: zápisy u úvodních políček jsou $(\cdot\, \mathbf{5} - \mathbf{0})$, $(\cdot\, \mathbf{5} - \mathbf{1})$ atd.

Alternativní správné řešení (C10):	$\boldsymbol{P = 5 + (n-1)\cdot 4}$	Obr. 97

Toto správné řešení bylo nalezeno jen u 2 žáků. V obou případech bylo vyjádřeno jako níže.



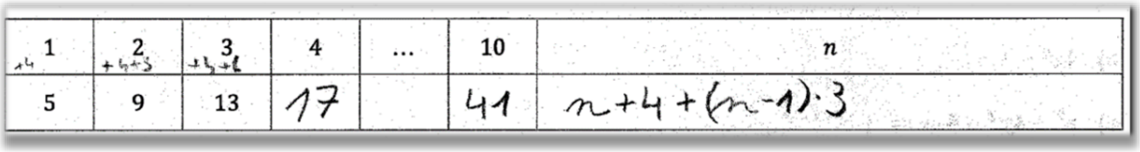
1	2	3	4	…	10	n
5	9	13	17		41	$5+(n-1)\cdot 4$

5 6 7 8 9
21 25 29 33 37

Obr. 97: *Cvičení 10* – správné řešení: vlevo jsou uvedeny rozšiřující izolované modely.

Alternativní správné řešení (C10):	$\boldsymbol{P = n + 4 + (n-1)\cdot 3}$	Obr. 98

Toto správné řešení bylo zjištěno jen u 1 žáka ze školy GPJP.

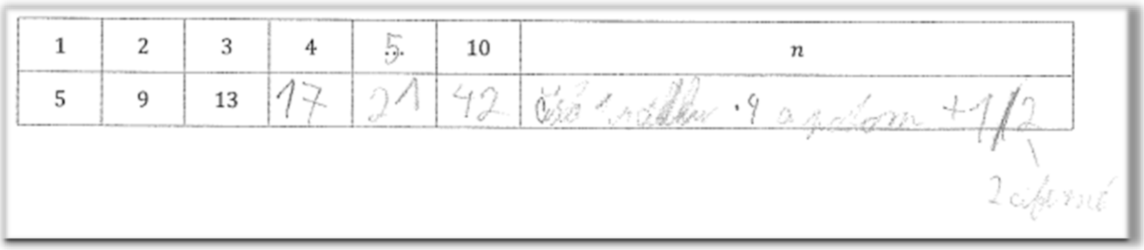


1 +4	2 +4+3	3 +4+6	4	…	10	n
5	9	13	17		41	$n+4+(n-1)\cdot 3$

Obr. 98: *Cvičení 10* – správné řešení: zápisy u úvodních políček jsou: $(\boldsymbol{+4})$, $(\boldsymbol{+4+3})$, $(\boldsymbol{+4+6})$.

Speciální typy chyb (C10 ∧ C11)	Obr. 99, Obr. 100

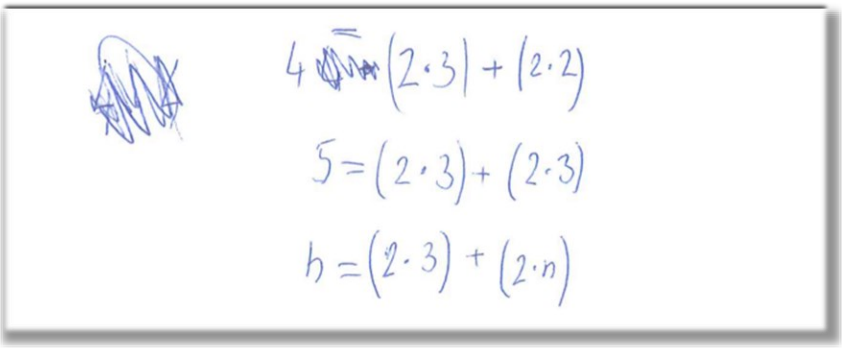
Jako závěrečná poznámka jsou uvedeny dvě méně časté, ale poměrně zajímavé chyby, jichž se žáci dopustili. Každá z nich byla přítomna jen u 1 žáka a zařazena mezi ‚jiné chyby'.



1	2	3	4	5	10	n
5	9	13	17	21	42	číslo řádku ·4 a přidám +1/2

2 ciferné

Obr. 99: *Cvičení 10* – Žák patrně nedopatřením určuje chybnou dvojici $[\boldsymbol{10, 42}]$, a soudí, že pravidlo je třeba rozdělit – pro jednociferná čísla přičítá k členu $\boldsymbol{4n}$ číslo $\boldsymbol{1}$ a pro dvojciferná čísla číslo $\boldsymbol{2}$.



Obr. 100: *Cvičení 11* – Žák pomocí izolovaných modelů správně určil [počet desek, počet židlí] pro $[\boldsymbol{4, 10}]$, $[\boldsymbol{5, 12}]$, ale těchto modelů si neudělal dost. Výstupem tak bylo neuznané pravidlo, které platí pro uvedené dvojice $[\boldsymbol{4, 10}]$, $[\boldsymbol{5, 12}]$, ale ne pro další hodnoty.

4.7 Přehled hlavních výsledků z hlavní studie

➢ **Nejnižší úspěšnost u hlavní studie:**

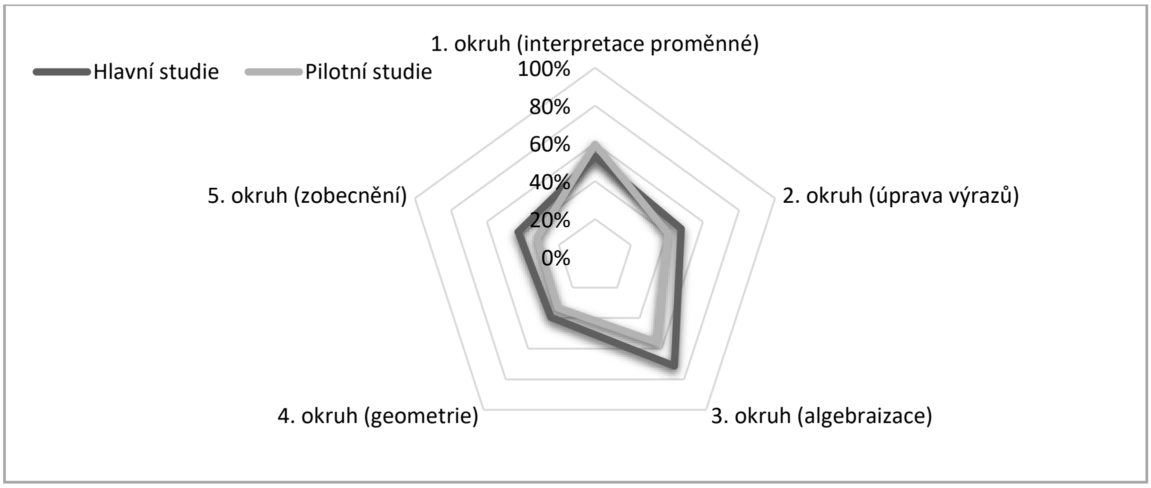
- Okruh úloh: Geometrické užití algebraických výrazů (celková chybovost cca 40 %).
- Typ úlohy: Tvorba i algebraizace geometrického modelu (cca 18 %).

➢ **Nejvyšší úspěšnost u hlavní studie:**

- Okruh úloh: Algebraizace s variací kontextu (cca 71 %);
- Typ úlohy: Algebraizace v (pseudo)reálném kontextu (cca 86 %).

➢ **Průměrná úspěšnost žáků podle testovaného okruhu úloh – Obr. 101**

- Celková úspěšnost (při stejné váze úloh/cvičení): cca 48 %



Obr. 101: Rozdělení úspěšnosti žáků napříč hlavní i pilotní studií

➢ **Nejčastější typy chyb podle zahrnutých cvičení (C) bez vynechání odpovědi:**

- C1: Volba ‚jiných chyb' z Tab. 75 (cca 19 %) (∗)
- C2: Interpretace písmene jako jednotky (cca 36 %)
- C3: Úkonová chyba – násobení (cca 14 %) (∗)
- C4: ‚Jiné chyby' z Tab. 78 (cca 11 %) (∗)
- C5: Nezapsání nutné závorky (cca 9 %)
- C6: Volba více než jednoho řešení (cca 7 %)
- C7: Chybná kombinace řešení (cca 12 %)
- C8: Chybná algebraizace – dle geometrického modelu (cca 21 %) (∗)
- C9: Chybná algebraizace – dle slov či geometrického modelu (cca 24 %) (∗)
- C10: Zápis nesprávného obecného pravidla (cca 31 %)
- C11: (Správná) řešení jen pro čísla bez zápisu obecného pravidla (cca 23 %).

Cvičení označená (∗) značí ta cvičení, kde bylo nejčastější chybou právě neuvedení řešení.

➢ Hlavní zjištění výzkumu dle testového okruhu

1. okruh: diagnostika porozumění proměnné

⇨ **Odlišná reprezentace proměnné:** Pro žáky bylo náročnější uvést správnou roli proměnné, když byla zadána (A) jako stejnojmenný termín bez upřesnění role proměnné; než jako (B) jako písmenný symbol s předem danou rolí (přesněji roli zobecněného čísla, jež byla zadána jako ‚počet jahod'). Jako hlavní důvod rozdílné obtížnosti určení role bylo shledáno u úloh jejich použité zadání. Zejména u případu (B), kdy žák jen interpretoval výraz $10j$, mohla k určení role velmi pomoci už skutečnost, že hledaná role byla v zadání již naznačena, kdežto u (A) byla otázka otevřeně: ‚Co pro tebe znamená proměnná?' Důvodem neuvedení správné odpovědi mohla být tedy nezkušenost žáků s definicí proměnné. Na toto ukazuje mimo jiného i to, že 23,2 % žáků při řešení (A) neuvedlo žádnou odpověď (včetně chybné), zatímco u (B) šlo o 7,2 % žáků. Z tohoto důvodu lze tedy usoudit (stejně jako ze správného užití jiných rolí těmito žáků u dalších cvičení), že žáci vnímali písmena odděleně od termínů, jež tato písmena reprezentovala.

⇨ **Nejzastoupenější role u vyjádření proměnné písmenem**: Roli, jíž žáci nejvíce přisuzovali výrazu $10j$, když znali význam j, bylo zobecněné číslo (55,6 %) a dále jednotka (35,6 %). U jednotky lze usuzovat, že volba vycházela z úvahy j jako $j$ahoda, a tedy $10j$ jako ‚10 jahod'.

⇨ **Nejzastoupenější role u vyjádření proměnné termínem**: Rolí, jíž žáci nejčastěji přiřazovali konceptu *proměnné* při otázce: ‚Co pro tebe znamená proměnná,' byla role neznámé (35,7 %). Nejčastější role, jež naopak jako správná považována nebyla, ale byla také častá, byla záměna proměnnou za jiné známé úpravy. Šlo nejvíce o krácení zlomků a změnu znamének při násobení celých čísel.

2. okruh: standardní manipulace algebraických výrazů

⇨ **Úspěšnost cvičení**: Navzdory tomu, že rozklad algebraického výrazu na součin zahrnoval i volbu vhodné metody, jak rozklad provést, úspěšnost dorovnala tu u zjednodušení výrazů (rozdíl pod 1 %). Z toho plyne, že žáci měli zřejmě podobnou průpravu pro obě aktivity ze své výuky matematiky.

⇨ **Největší překážka při úpravě výrazů:** Pro zjednodušení výrazů byly dominantní dvě chyby: (1) úpravy znamének při násobení dvou členů se znaménky $(-)$; a (2) porušení ekvivalence výrazů potřebou uzavřenosti.

První chyba (cca 12 % žáků), vychází z dřívějšího výzkumu GA ČR od Žalské (2015). V něm žáci chybovali při roznásobení závorek převážně v chybném vynásobení těch členů výrazu, jež u sebe měly i znaménka, tj. $+2$, -3, což bylo zjištěno i zde. Možné vysvětlení leží tedy u formálního porozumění násobení celých čísel. Je předpokládáno, že žáci pouze uplatňovali memorovaná pravidla.

Druhá chyba, jež byla napojena na potřebu uzavřenosti, byla v souhrnu studie nejčetnější ze všech chyb zjištěných u zjednodušení výrazů. Chyba nastala u cca 11 % žáků (v průměru všech úloh a unikátních žáků), kdy pravděpodobnou příčinou bylo jen formální porozumění algebraickým výrazům, resp. jejich ekvivalenci i konceptu rovnosti (tj. relační porozumění rovnítka oproti žákem využitého porozumění procesnímu). Dalším závěrem bylo, že potřeba uzavřenosti zůstala u chybujících žáků zachována i u dalších cvičení. To znamená, že pokud žák aspoň jednou takto chyboval, tatáž chyba poté následovala i v řešení ostatních cvičeních s úpravou výrazů (tzn. například i geometrii), což naznačuje formální porozumění konceptu proměnné. Další náznak tohoto nabízí pak napojení 2. okruhu úloh na 1. okruh. Dotyční žáci, kteří výše projevili potřebu uzavřenosti v 2. okruhu, totiž ve většině případů chybovali stejně i v *cvičení 1 & 2*, a sice po řadě neuvedením odpovědi a chybou v roli jednotek.

- ⇨ **Největší překážka u převádění výrazů na součin:** Jako největší potíž u převádění výrazů na součin se projevilo to, že žáci neuváděli odpověď, resp. nepokoušeli se o uvedení řešení. To naznačuje, že pro dané zadání nejspíše nenašli vhodnou metodu rozkladu. V průměru šlo o případ, který nastal alespoň v jedné úloze *cvičení 4* u cca 23 % žáků, zatímco nesprávné provedení metody rozkladu, pro níž daná úloha nebyla ani navržena, byla druhá nejčastější chyba (zastoupení asi 20 % žáků). Třetí nejčastější chyba byla následně chybně provedená metoda, jež byla při návrhu testu očekávána pro získání správného řešení. Alespoň v jedné úloze byla tato chyba zjištěna u více než 15 % žáků.

3. okruh: algebraizace při sestavení algebraického výrazu

- ⇨ **Největší překážka u algebraizace:** Hlavní výzvou při modelování dané situace pomocí algebraického výrazu se stala práce se závorkami. Chyba byla zjištěna u cca 10 % žáků se započítaným výskytem v obou variantách, tedy zápisem závorky, když zapsána byt neměla, a naopak. Tato druhá možnost byla četnější, se zastoupením přes 9 % žáků.

- ⇨ Chyba s potřebou uzavřenosti, která byla druhá nejčastější, byla naproti tomu viděna méně (cca 7 % žáků). Častěji se vyskytla u algebraizace s vlastní tvorbou výrazu (6,4 %) a méně u výběru výrazu s užitím distraktorů. U této možnosti nastala chyba u cca 5 % žáků.

4. okruh: geometrické užití algebraických výrazů

- ⇨ **Přiřazení geometrického modelu algebraickému výrazu:** U cvičení, kde si žáci sami vybírali, jaké jsou vhodné geometrizace zadaného výrazu s proměnnou, bylo hlavní zjištění, že žáci upřednostňují jeden typ reprezentace: lineární model. Ačkoliv většinou volili správná řešení, tj. dané cvičení řešili správně (cca 68 %), případná chyba byla většinou jedné formy – žáci vybírali pouze jednu z intepretací v podobě délky úsečky, a ne obsahu obdélníku (ať už správného či chybného). Z toho lze vydedukovat, že si obsah pravděpodobně spojovali primárně se vzorečky pro míru, jež mají specifický tvar. Těmito vzorečky je tedy například $S = a \cdot b$ či $S = a^2$.

- ⇨ **Tvoření vs. interpretování daného geometrického modelu.** Při porovnání toho, jak řešení žáků ovlivnění nutnost tvořit, či jen interpretovat daný geometrický model, bylo zjištěno, že geometrizace ztížila proces řešení. Z výsledků vyplynulo, že jejich celková úspěšnost při neposkytnutí již hotového geometrického modelu byla vzhledem k interpretaci modelu již zadaného pouze poloviční (18,4 % a 32,4 %). To může naznačovat, že žáci mají potíž s propojením více reprezentací, jak naznačili už Rendl & Vondrová (2014) u TIMSS 2007. Konkrétně, i když žáci zvládli obě cvičení na algebraizaci ze 4. okruhu vyřešit správně (čili provést modelaci slovního vyjádření do jazyka algebry), při potenciálně dvojí modelaci už chybovali více. To znamená chybovali buď při dvojím přechodu z jazyka slov do jazyka geometrie (tvorba obrázku) a následně znovu do jazyka algebry (nalezení výsledku), či přímo při přechodu z jazyka slov do jazyka algebry (tedy při netvoření obrázku).
- ⇨ **Největší překážka u geometrického užití výrazů:** Hlavní chyba bylo sestavení algebraických modelů pro obsah geometrického modelu. Chyba měla zastoupení cca 22 % a jednalo se o záměny či vynechání operací ze vzorce anebo vynechávání závorky v zápisu výrazu.

5. okruh: zobecnění v napojení na pojem pravidelnosti

- ⇨ **Úspěšnost cvičení u zobecnění pravidelností:** U cvičení, kde se testovalo zobecňování při zkoumání pravidelností byla vůči očekávání dosažena velice srovnatelná úspěšnost u obou cvičení, tj. u pravidelností grafických i číselných entit. U číselných entit byla jmenovitě průměrná úspěšnost mírně vyšší (o cca 3 %). Nicméně nejde patrně o zcela vypovídající výsledek. Lze totiž předpokládat, že vlivem nejpočetnější chyby u číselných entit (viz níže) mohla být úspěšnost žáků u tohoto cvičení snížena nevhodnou formulací zadání, která byla vesměs převzata z výzkumu diplomové práce (Pokorný, 2007).
- ⇨ **Největší překážka u zobecnění pravidelností:** Nejčastější chybou, která provázela 5. okruh testu bylo vyjádření nesprávného pravidla, resp. zobecnění s nesprávným závěrem. Tento druh chyby, jenž byl více pozorován při zobecnění číselných entit, byl alespoň i jednoho cvičení zjištěn u cca 43 % žáků – tedy skoro poloviny. Zvláště u žáků, kteří v tomto zmíněném volili nejpočetnější chybné vyjádření pravidla (totiž přímou úměrnost – 21 %), učinilo chybný zápis pravidla celkově až 29,5 % žáků; zatímco u grafických entit to bylo 20,8 %. U tohoto cvičení bylo naopak nejčastější to, že žáci dohledané (i chybné) pravidlo využili jen u těch grafických entit, jež byly ve cvičení konkrétní (tzn. např. pro 7. člen), ale poté neprovedli jeho zápis obecně, jelikož řešili jen izolované modely. Spolu s výskytem toho, kdy řešení nebylo ani zahájeno (asi 24 % žáků), byla tedy tato chyba náznakem, že zobecnění je pro žáky stále obtížné. Konkrétně šlo vidět, že přes 40 % žáků nedokázalo bez poskytnutí pomoci obecné pravidlo pravidelnosti grafických entit najít, a pokud ano, pak často neznalo způsob jeho vhodného vyjádření.

4.8 Limitace výzkumu

Vzhledem k charakteru výzkumu, jenž je vždy limitován zvolenou metodikou, je vhodné zdůraznit jistá omezení tohoto výzkumu. Tato omezení jsou uvedena níže.

Velikost a složení výzkumného vzorku

Jedním z cílů, se kterým byl výzkum prováděn, bylo zajištění širšího vzorku účastníků, který zahrne žáky nejen více škol, ale i měst i regionu. Toto se povedlo. Nicméně i tak šlo o malý vzorek. V kontextu prezentovaných výsledků je tedy třeba vnímat, že zahrnutí více regionů (ať už okresů, měst, krajů) může výsledky pozměnit, což platí i pro zařazené školy. Pokud by se do výzkumu např. zapojilo více gymnázií či škol preferujících primárně konstruktivistické metody výuky, což se zde nestalo, lze soudit, že by mohlo dojít na změnu části závěrů.

Žáci se speciálními vzdělávacími potřebami

Jelikož bylo před proběhnutím hlavní studie očekáváno, že menšina žáků zúčastněných škol má přiznaná podpůrná opatření, je třeba uvést, že tyto individuální rozdíly nebyly posléze promítnuty do vyhodnocení výsledků. Důvodem je, že na každé škole nebylo označeno, jaký test přísluší, kterému žákovi (kvůli ochraně osobních údajů) a ani to, zda má žák přiznaná podpůrná opatření. Na druhou stranu, výběr žáků do studie tím stále ovlivněn byl. Do hlavní i pilotní studie byli zapojeni jen žáci, kteří měli přiznaná podpůrná opatření do 2. stupně, a to včetně žáků cizinců a žáků se specifickými poruchami učení. Podmínkou vždy bylo, že tito žáci museli být schopni porozumět zadání. Jinak řečeno, pokud šlo o žáky cizince s odlišným mateřským jazykem, podmínkou bylo, že tito žáci musí na uvážení zadavatele disponovat dostatečnou úrovní češtiny pro možné vykonání testu, a naopak pro žáky se specifickými poruchami učení bylo třeba, aby nevyžadovali další asistenci. U obou skupin bylo vzhledem k potřebám žáků možné poskytnout čas navíc, a to až do výše 15 minut.

Forma zprostředkovaného zadání testu

Relevantní poznámkou k provedení výzkumu je kromě absence rozhovorů zprostředkované zadání testů. Nicméně, i zde existují důvody. Tím hlavním bylo to, že část zde oslovených učitelů (poději tedy zadavatelů testu) nedokázala předem specifikovat, kdy přesně bude možné test žákům zadat, resp. věděli, že se tak stane až během suplování. Z tohoto důvodu bylo tedy u všech škol rozhodnuto ponechat učitelům prostor při volbě data a přistoupit na ryze zprostředkované zadání.

Počet cvičení v jednotlivých třídách

Závěrem je důležité upozornit, že vzhledem k širšímu záběru testovaného učiva, jenž byl jedním z důvodů konání práce, jsou různé závěry založeny jen na vyhodnocení omezeného počtu úloh pro každý okruh – neboli na základě menšího počtu dat. To zadává, že výzkum mohl být víc náchylný na zavádějící závěry. Vlivem extrémů, jež mohly nastat jiným výkonem žáků z různých škol, mohla shromážděná data vést např. k tomu, že byly pro jisté okruhy vysloveny závěry, jež by bylo třeba podložit více daty z více zacílených výzkumů. Na druhou stranu, ve stejné chvíli jde i o podnět na co zaměřit další výzkum. Přesněji, že vhodné je se věnovat zde problematickým okruhům úloh a specificky chybám, které žáci vykazovali.

Závěr

Hlavním cílem této diplomové práce bylo prozkoumat, jaké je porozumění algebraických výrazů u žáků 2. stupně základních škol. Zkoumány byly dva pohledy. Zaprvé, na základě analýzy výkladové a úlohové části bylo cílem popsat, jak algebraické výrazy zavádí různí autoři učebnic matematiky, a zadruhé s vyhodnocením výzkumu bylo cílem i určit, jaké jsou nejčastější chyby žáků u algebraických výrazů (jmenovitě u *zobecňování, algebraizace, intepretace, geometrizace a manipulace výrazů)*. Tento cíl se podařilo naplnit. Dílčí cíle, skrze něž se tak stalo, jsou popsány níže.

C1: S využitím odborné literatury vymezit základní okruhy práce s algebraickými výrazy. Součástí tohoto cíle je vymezit i pro ně typické obtíže

Tento cíl byla naplněn v úvodní části práce jako úvod k výzkumu a analýze učebnic. Učivo algebraických výrazů zde bylo nejprve představeno stran rolí písmen, jež se ukazují jako důležité před přechodem žáka k algebře, a dále rolí, jež formálně přibývají až s tímto přechodem (tzn. role neznámé, zobecněného čísla nebo také parametru). Větší pozornost byla dále věnována také dimenzím algebraického uvažování. Do této oblasti patřilo jednak zobecnění, algebraizace, manipulace a geometrizace algebraických výrazů, a to včetně klasifikace chyb, jež u nich žáky provází. Poté následovalo přiblížení 2 teoretických částí. První byla *geometrie*, kde bylo s ohledem na analýzu učebnic rozebráno, jakým způsobem mohou být geometrické modely prospěšné při ve výuce algebry, a další byly výsledky pro 2 *mezinárodní výzkumy* – studii TIMSS a PISA. Skrze výzkum TIMSS 2007 byly představeny i výsledky žáků 8. ročníků základních škol. Vymezeno např. bylo, že hlavní potíží byly úlohy na zobecnění, náročnější algebraizace nebo také propojení výrazů s geometrií.

C2: Na základě komparace učebnic matematiky pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia stanovit trendy těchto učebnic při zavádění algebraických výrazů

Tento cíl byl naplňován kvalitativní analýzou výkladové části učebnic, jež bylo věnována způsobu zavedení algebraických výrazů a souvisejících konceptů jejich úprav. Převažujícím výsledkem bylo, že autoři učebnic využívali při iniciálním zdůvodnění a zavedení konceptů geometrických modelů – tedy jazyka syntetické geometrie. Tyto modely, jež dokládaly platnost ekvivalentních úprav výrazů prostřednictvím jejich geometrické reprezentace, byly v učebnicích nejčastěji zastoupeny u součinu mnohočlenu s jednočlenem a druhou mocninu dvojčlenu; u ostatních byla více zastoupena algebraická odvození.

Nejčastěji se metoda vysvětlení učiva za pomocí jeho geometrických modelů vyskytla u učebnic nakladatelů Fraus, Taktik, Nová škola Brno a Fortuna; nejméně naopak u Prodos, SPN a Prometheus, u nějž byly analyzovány učebnice pro základní školy i gymnázia. Druhá nejvíce užívaná forma zdůvodnění učiva u jeho zavedení, bylo odvození nového konceptu úpravou algebraických modelů konceptů zavedených dříve – tj. např. sčítání a násobení výrazů. Využití této metody byla u učebnic často souběžně kombinováno s geometrickou metodou zmíněnou výše, přičemž bylo vázané hlavně na později zaváděné úpravy výrazů, jako metody převodu výrazů na součin.

Z hlediska rizik a nedostatků, jimiž se učebnice vyznačovaly, bylo dál vymezeno celkem pět hlavních nedostatků, které byly identifikovány v jejich výstavbě. Jednalo se o:

1. častou absenci ne-modelů určitých úprav výrazů (zejména násobení mnohočlenů);
2. nedostatečné rozebrání zkoušky úpravy výrazů dosazením z hlediska provedení;
3. vysoké zastoupení metody zdůvodnění učiva ve formě odvolání se na autoritu;
4. často chybějící definice proměnné;
5. a riziková analogie ‚jablíček a hrušek' využitá u zavedení součtu mnohočlenů.

C3: Kvantitativní analýzou popsat hlavní trendy učebnic z hlediska přítomných typů úloh

Z hlediska kvantitativní analýzy úloh, která doplnila analýzu výkladu, bylo zjištěno, že u většiny učebnic panoval výrazný nepoměr tří vymezených typů úloh, tj.: geometrických, algebraizačních a transformačních. Jak ukázala provedená analýza, nejvíce byly u všech učebnic zastoupeny úlohy prvního typu – totiž transformační. Konkrétně bylo zjištěno, že relativní četnosti těchto úloh rostla s postupujícím výkladem neboli autoři se stále méně soustředili na zbylé dva typy. To značí, že poté, co autoři zavedli koncept algebraického výrazu (a tím pádem i proměnné, která zde byla zaváděna), počet transformačních úloh setrvale rostl s každým zavedeným konceptem, a to na úkor úloh obou zbylých typů (tj. geometrických a algebraizačních). V jejich případě bylo kontrastně zjištěno, že jejich počty byly v průměru učebnic vesměs srovnatelné. Algebraizačních úloh, v nichž je cílem pouze sestavit výrazy, sice bylo relativně více (o nižší jednotky procent), nicméně šlo hlavně o zavedení konceptu algebraického výrazu, nikoli další koncepty učiva. U úloh, jež byly motivované geometricky nastalo největší zastoupení také v této oblasti.

Sledují-li se dále dílčí podtypy úloh, u všech učebnic byly nejvíc z transformačních úloh nejvíce zastoupeny ty, v nichž byly úpravy výrazů samoúčelné. To znamená, že se jednalo o úlohy, v nichž se prohlubovala především dovednost žáka najít jednodušší tvar daného výrazu či převést výraz na součin, tj. změnit výraz na jiný při zachování jejich ekvivalence.

Nejméně zastoupené byly naopak u transformačních úloh úlohy napojené na poznání role závorek. V tomto případě šlo podle jejich definice o úlohy, v nichž žák porovnával vliv závorek na tvar, úpravu a také výsledný hodnotu výrazu, čímž zvyšoval porozumění žáka, kdy závorky využít.

U algebraizačních úloh, jež byly identifikovány jako druhý nejčastější typ úloh, byl jejich nejčastější podtyp algebraizování situací jazykového kontextu. Jednalo se tedy o takové případy, kdy se algebraické výrazy tvořily jako zobecněné modely číselných vztahů, nikoli (pseudo)reálné situace. Naopak nejméně byly mezi algebraizačními zastoupeny ty úlohy, v nichž žák sestavuje určitý výraz při zobecnění série číselných hodnot či výrazů.

Pro geometrický typ, který byl zastoupen ze všech tří typů nejméně, byl nejčastější podtyp úloh spjatý s algebraickým vyjádřením míry geometrického modelu. Jeho specifikem bylo to, že se algebraický výraz (např. obsah čtverce) měl sestavovat na základě algebraického popisu daného geometrického obrazce či tělesa, a to podle jeho již zadaných rozměrů (algebraických výrazů) a případně i obrázku s těmito rozměry.

C4: Na základě provedeného testování identifikovat nejčastější chyby žáků při jejich použití algebraických výrazů

Výzkumná část, zahrnující testové šetření u 207 žáků základních škol i víceletých gymnázií, měla za cíl prozkoumat chyby žáků pro celkem 5 okruhů úloh. Jednalo se o:

1. okruh	–	diagnostika porozumění proměnné;
2. okruh	–	standardní manipulace algebraických výrazů;
3. okruh	–	algebraizace při sestavení algebraického výrazu;
4. okruh	–	geometrické užití algebraických výrazů;
5. okruh	–	zobecnění v napojení na pojem pravidelnosti.

Pro okruh ‚diagnostika porozumění proměnné', který byl test zahájen, byl nejčastější typ chyby identifikován jako záměny role proměnné. Zastoupené byly především záměny rolí založené jiné formě úprav, jako např. krácení zlomků a změnu znamének u násobení. Nicméně došlo i na záměnu zobecněného čísla a jednotky. Tento případ nastal podle očekávání vždy při intepretaci výrazu $10j$, kdy žáci vnímali písmeno j, znamenající ‚počet jablek', jako jednotku, resp. objekt.

Pro okruh ‚standardní manipulace algebraických výrazů' byl nejčetnější typ chyby celkově nesprávné roznásobení závorek. Hlavní chybou u zjednodušení výrazů bylo nesprávné násobení výrazů s proměnnými při odstranění závorky, a to jak s ohledem na úpravu znamének v těchto závorkách (tj. uplatnění znaménkových konvencí), tak i toho, jak se sečetly členy uvnitř závorek (tj. zda došlo na potřebu uzavřenosti).

Pro převod výrazu na součin byla u závorek pozorována nejvíce chyba ve volbě nevhodné metody rozkladu, jež byla poté i chybně vykonána, či nepodání řešení úlohy. Chyba, kdy žák volil vhodnou metodu rozkladu, ale poté v ní chyboval, byla třetí nejčastější.

Pro okruh ‚algebraizace při sestavení algebraického výrazu' byla nejfrekventovanější chyba znovu práce se závorkami. Pokud modelovaná situace použití závorek žádala, závorky uvedeny nebyly, a opačně, pokud použity být neměly, uvedeny byly. Z toho plyne, že ne všichni žáci před testem dostatečně porozuměli roli závorek jako objektu. Tento závěr má jednak základ v tom, že závorky prochází v algebře při zavedení proměnné vlastním rozšířením rolí, jež činí žákům potíže, a dále že v analyzovaných učebnicích nebyla sama role závorek téměř pokryta (viz výsledky pro C3 či ještě detailněji oddíl 3.3).

Pro okruh ‚geometrické užití algebraických výrazů', jež testoval transfer mezi algebraickými a geometrickými modely, byla nejčastější chyba závislá na vybraném cvičení. Pro cvičení, v němž žáci přiřazovali jen korespondující geometrické modely k zadanému výrazu, byla nejčastější chyba např. vztažena k upozadění rovinného modelů. To znamená, že žáci jako u TIMSS 2007 více vnímali, že geometrický model výrazu s proměnnou je primárně délka úsečky, ne obsah pravoúhelníku.

Pro cvičení, kde žáci algebraicky vyjadřovali obsah geometrického modelu, byla hlavní chyba sestavení správného výrazu. Tato chyba nastala více tehdy, když žáci neměli v zadání výše popisovaný geometrický model, ale zadání pouze naznačovalo, že si ho mají vytvořit.

Pro okruh ‚zobecnění v napojení na pojem pravidelnosti' byla nejvíce pozorována chyba nevyjádření obecného pravidla a následně chybné formulace tohoto pravidla. První chyba se u žáků projevovala dvojím způsobem. Žák buď dané cvičení neřešil (zcela jej vynechal), či jej začali řešit, ale pravidlo neformuloval, tzn. skončil u konečných modelů, které úloha obsahovala. Naopak u druhého typu chyby šlo nejvíce o formulaci přímé úměrnosti. Místo rostoucího lineárního vztahu: $a_n = ax + b;\ a, b \neq 0$, jenž byl u obou cvičení správný, žák tedy vyjádřil zejména při zobecnění pravidelnosti číselných entit obecné pravidlo jen jako ax neboli bez absolutního členu b.

C5: Pomocí vlastního šetření ověřit, zda byly problematické okruhy výrazů stejné jako v šetření TIMSS 2007

Z výsledků výzkumu lze formulovat, že dva okruhy, jež byly pro české účastníky TIMSS 2007 více problematické (geometrie a zobecňování), měly nejhorší výsledky i u tohoto výzkumu. Při seřazení všech 5 zde testovaných okruhů podle průměrné úspěšnosti k nim příslušných položek byla největší problematičnost zjištěna u okruhů geometrizace a zobecňování a až následně u manipulace, intepretace a algebraizace.

SEZNAM POUŽITÝCH INFORMAČNÍCH ZDROJŮ

Abedi, J., Lord, C., & Plummer, J. R. (1997). *Final report of language background as a variable in NAEP mathematics performance* (No. 429). Los Angeles: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing.

Amidu, B., Salifu, A. S., & Nyarko, S. (2020). The effect of Algebra tiles manipulative on preservice teacher's Mathematics knowledge in teaching basic Algebra. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, *8*(2), 26–39.

Apsari, R. A., Putri, R. I. I., Abels, M., & Prayitno, S. (2020). Geometry Representation to Develop Algebraic Thinking: A Recommendation for a Pattern Investigation in Pre–Algebra Class. *Journal on Mathematics Education*, *11*(1), 45–58. http://doi.org/10.222342/jme.11.1.9535.45-58.

Ayres, P. L. (2001). Systematic mathematical errors and cognitive load. *Contemporary Educational Psychology*, *26*(2), 227–248. https://doi.org/10.1006/ceps.2000.1051.

Bardini, C., Radford, L., & Sabena, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. In Hannula, M. S., Kaasila, R., Laine, A., Pehkonen, E., Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, No. 17, 129–136).

Bautista & Garzón, J. (2018). Virtual Algebra Tiles: A pedagogical tool to teach and learn algebra through geometry. Journal of computer assisted learning, 34(6), 876-883. https://doi.org/10.1111/jcal.12296

Benešová, Š. (2023). *Algebraizace v úlohách s geometrickým kontextem–žákovské obtíže a chyby* [diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Ben–Zev, T. (1995). The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking: Induction from examples and prior knowledge. *Cognitive Science*, *19*(3), 341–376.

Binterová, H., Fuchs, E., & Tlustý, P. (2009). *Matematika 8 Aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. Fraus.

Blanton, M., Gardiner, A. M, Isler-Baykal, Knuth, E, Stephens, A., I., Stroud, R., & Stephens, A. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. Educational Studies in Mathematics, 102, 193-219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In Cho S. J. (Ed.), The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges (73-96). Springer International Publishing.

Booth, L. R. (1986). Difficulties in Algebra. *Australian Mathematics Teacher*, *42*(3), 2–4.

Boudová, S., Tomášek, & Halbová, B. (2023). *Národní Zpráva Pisa 2022*. Česká Školní Inspekce.

Boudová, S., Tomášek, V., & Klement, L. (2022). *Mezinárodní šetření PISA 2022 – koncepční rámec*. Česká školní inspekce.

Bourke, S., & Stacey, K. (1988). Assessing problem solving in mathematics: Some variables related to student performance. *The Australian Educational Researcher*, *15*(1), 73–83.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*, 3–22.

Castro, S. (2017). *Algebra tiles effect on mathematical achievement of students with learning disabilities* [diplomová práce]. California State University.

Collins, A., & Benson, S. (2023). *Accessible Algebra: 30 Modules to Promote Algebraic Reasoning, Grades 7–10*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781032680521.

Collis, K. F. (1974). *Cognitive Development & Mathematics Learning*. Shell Mathematics Unit, Centre for Science Education, Chelsea College, University of London.

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., & Lávička, M. (2020). *Matematika 8 pro 8. ročník základních školy*. 3. vydání. Fortuna.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *88*(4), 286–290.

Čihák, M., Půlpán, Z., & Trejbal, J. (2015). *Matematika pro základní školy: Algebry*. SPN.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H. C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in psychology*, *348*(6). http://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Vol. 41). Springer Science & Business Media.

De Lange, J. (1987). Mathematics, insight and meaning [disertační práce]. Utrecht: Utrecht University.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter* [disertační práce]. *Utrecht University.*

Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x?. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(1), 19–38. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0029-9.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, *91*(2), 166–170.

Ferri, R. B. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. Mathematical modelling, *ICTMA*, 12, 260-270.

French, D. (2004). *Teaching and learning algebra*. Bloomsbury Publishing.

Frýzek, M., Palečková, J., Švejdová, D., Tomášek, V., Vernerová, M. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – úlohy z matematiky pro 8. ročník*. ÚIV.

Fujii, T. (1993). A clinical interview on children's understanding and misconceptions of literal symbols in school mathematics. In Hirabayashi, I. (Ed.), *Proceedings of the 17th PME International Conference. Tsukuba* (Vol. 1, 173-180). University of Tsukuba

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a little difference. In Da Ponte, J. P., & Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 368–375).

González–Calero, J. A., Arnau, D., & Laserna–Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. *Educational Studies in Mathematics*, *89*, 133–147. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9596-0.

Hall, B. C. (1999). Using Algebra Tiles effectively. Prentice–Hall.

Hall, J., & Chamblee, G. (2013). Teaching algebra and geometry with GeoGebra: Preparing pre–service teachers for middle grades/secondary mathematics classrooms. *Computers in the Schools*, *30*(1–2), 12–29. https://doi.org/10.1080/07380569.2013.764276.

Havlíčková, R., Rendl, M., Vondrová, N. & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy: metodický materiál pro učitele*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, M., Šmejkalová, M., Tůmová, V., & Vondrová, N. (2019). Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií. Karolinum.

Hejný, M. (1989). *Teória vyučovania matematiky*. SPN.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). Dítě, škola a matematika. Portál.

Hejný, M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In: Hejný, M., & Novotná, J. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (23–42).

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Vydavatelství PedF UK., 2016.

Hejný, M.; & kol (2017). *Matematika D: učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H–mat.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1995). *Matematika: Výrazy* [1]. Prometheus.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1997). *Matematika: Výrazy* [2]. Prometheus.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. In Smith C. (Ed.), *Proceedings of the British Society for research into Learning Mathematics*, *27*(3), 126–131.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005a). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. In Hoines, M., J., Fuglestad, A. B. (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, 49–56).

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005b). Students' Difficulties with Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. In Hannula, M. S., Kaasila, R., Laine, A., Pehkonen, E., Chick, H. L., & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, 145–152).

Chimoni, M., Pitta–Pantazi, D., & Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: Insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, *98*, 57–76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x.

Chow, T. C. F. (2011). *Students' difficulties, conceptions and attitudes towards learning algebra: an intervention study to improve teaching and learning* [disertační práce]. Curtin University.

Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(9), 2481–2502. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1299a.

Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning?. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (5–18). Routledge.

Kieran, C. (1979). Children’s operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In Tall, D. (Ed.), *Proceedings of the third international conference for the psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 128–133). Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning:(A project of the national council of teachers of mathematics). (390–419). Macmillan*

Kieran, C. (1998). The changing face of school algebra. In Alsina, C. (Ed.), *8th International Congress on Mathematical Education: selected lectures* (271–290). Sociedad Andaluza de Educación Matemática" Thales".

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, *8*(1), 139–151.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*, *7*(4), 23–26.

Küchemann, D. (1981). Cognitive demand of secondary school mathematics items. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 301–316.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of change: linguistic innovations in the development of classical mathematics*. Springer Science & Business Media.

Kvasz, L (2012). *Jazyk a změna: jako sme menili jazyk matematiky a jako jazyk matematiky zmenil nás*. Filozofický ústav AV ČR: Filosofia.

Kvasz, L. (2013). Jazyk matematiky, jeho zmeny a didaktika matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *58*(4), 315–325.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231–258.

Larbi, E., & Mavis, O. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and practice*, *7*(36), 53–61.

Lauberová, A., Matasová, B., Mierva, T., Nádvorníková, P., Presová, J., & Weinlich, R. (2021). Hravá matematika 8 Algebra: Učebnice pro 8. ročník ZŠ a víceletá gymnázia. Taktik.

Leitze, A., & Kitt, N. A. (2000). Algebra for all: Using homemade algebra tiles to develop algebra and prealgebra concepts. *The Mathematics Teacher*, *93*(6), 462–520.

Lee, L., & Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through pattern exploration. *Mathematics teaching in the middle school*, *11*(9), 428–433. https://doi.org/10.5951/MTMS.11.9.0428.

Lee, K., Ng, S. F., & Bull, R. (2018). Learning and solving algebra word problems: The roles of relational skills, arithmetic, and executive functioning. *Developmental psychology*, *54*(9), 1758–1772. https://doi.org/10.1037/dev0000561.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, 40(2), 173–196. https://doi.org/10.1023/A:1003606308064.

Lodholz, R. (1990). The transition from arithmetic to algebra. In: Edwards Jr, E. L. (Ed.), Algebra for everyone (24–33). VA: Department of Education.

Long, H., Bouck, E., & Domka, A. (2021). Manipulating algebra: Comparing concrete and virtual algebra tiles for students with intellectual and developmental disabilities. *Exceptionality*, *29*(3), 197–214. https://doi.org/10.1080/09362835.2020.1850454.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, 7(1), 69–85. https://doi.org/10.1007/BF03217276.

MacGregor, M., & Stacey, K. (2007). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. In Leder, G. C., & Forgasz, H. (Eds.), *Stepping stones for the 21st century* (63–81). Brill.

Marciniak, M. (2017). Active learning in developmental classes of mathematics. *Mathematics Teaching Research Journal*, *9*(1–2), 1–12.

Marchini, C., & Papadopoulos, I. (2011). Are useless brackets useful tools for teaching. In Radford, L., Hoines, M. J., & Fuglestad, A. B. (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, 3–185). PME.

Markworth, K. A (2010). *Growing and growing: Promoting functional thinking with geometric growing patterns* [disertační práce]. University of North Carolina.

Mason, J. (2017). 3 Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the early grades* (57–94). Routledge.

Molnár, J., Lepík, L., Lišková, H., Slouka, J., & Emanovský, P. *Matematika 8*. Prodos.

MŠMT (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Výzkumný ústav pedagogický. http://www.nuv.cz/file/4982_1_1/

Nakladatelství Fortuna (2023). O nakladatelství. *Fortuna* [online]. Fortuna. [cit. 14. 8. 2023]. Dostupné z: https://www.fortuna.cz/o–nas/o–nakladatelstvi

Novotná, A. (2014). *Přechod mezi slovním a algebraickým vyjádřením. Žákovské strategie a obtíže* [diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Nováková, E.; & Vondrová N. (2015). Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná. In: Fuchs, E., & Zelendová, E. (Eds.), *Metodické komentáře ke Standardům ZV k oboru matematika* [online]. Národní ústav pro vzdělávání. [cit. 11. 8. 2023]. 8–41. Dostupné z http://www.nuv.cz/t/metodicke-komentare

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2012). *Matematika [1] pro 8. ročník základní školy*. 2. vydání. Prometheus.

Palečková, J., & Tomášek, V. (2005). Učení pro zítřek: Výsledky výzkumu OECD PISA 2003. ÚIV.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237–268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237.

Peirce & Radford, C. S. (2006) Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In Alatorre, S., Cortina J. L., Méndez, A & Sáiz, M. (Eds.), Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter (Vol. 1, 2-21).

Picciotto, H., & Wah, A. (1993). A New Algebra: Tools, Themes, Concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*(1), 19–42.

Pokorný, A. (2017). *Výrazy s proměnnou v učivu základní školy* [diplomová práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

Pournara, C., Sanders, Y., Adler, J., & Hodgen, J. (2016). Learners' errors in secondary algebra: Insights from tracking a cohort from Grade 9 to Grade 11 on a diagnostic algebra test. *Pythagoras*, *37*(1), 1–10. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v37i1.334.

Průcha, J. (1998). *Učebnice: teorie a analýzy edukačního média: příručka pro studenty, učitele, autory učebnic a výzkumné pracovníky*. Paido.

Rendl, M., & Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, *24*(1), 22–57. https://doi.org/10.5817/PedOr2014-1-22.

Rhine, S., Harrington, R., & Starr, C. (2018). How students think when doing algebra. IAP.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 140–155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001.

Robová, J. (2012). Výzkumy vlivu některých typů technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. *Scientia in educatione*, *3*(2), 79–106. https://doi.org/10.14712/18047106.38.

Rosecká, Z., & kol. (2022). *Algebra pro 8. ročník*. Nová škola Brno.

Saraswati, S., Putri, R. I. I., & Somakim, S. (2016). Supporting students' understanding of linear equations with one variable using algebra tiles. *Journal on Mathematics Education*, *7*(1), 19–30.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715.

Sharp, J. M. (1995). Results of using algebra tiles as meaningful representations of algebra concepts. *Department of Curriculum and Instruction, Iowa State University*, 1–8.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164. https://doi.org/10.1007/BF00579460.

Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth–grade mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, *72*(3), 271–288. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9193-1.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational studies in mathematics*, *22*(2), 125–147. https://doi.org/10.1007/BF00555720.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. The Journal of Mathematical Behavior, 30(3), 206–223. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001.

Thornton, G. J. (1995). Algebra tiles and learning styles [diplomová práce]. University of Rhodesia.

Trigueros, M., & Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling?. In Zaslaysky, O. (Ed.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, 4–273).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K–12*, *8*(1). 7–13

Usiskin, Z. (2010). *Future curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference*. Information Age Publishing.

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 63–75. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf.

Vinogradova, N. (2007). Teacher to teacher: Solving quadratic equations by completing squares. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(7), 403–405. https://doi.org/10.5951/MTMS.12.7.0403.

Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N. (2020). Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet. *Učitel matematiky*, *28*(2), 66–93.

Vošický, Z. (1997). *Matematika v kostce: pro střední školy*. Fragment.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. *Building connections: Research, theory and practice*, *2*, 759–766.

Weinberg, A. D., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Krill, D. E., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2004). Students' initial and developing conceptions of variable. In Paper presented at the *annual meeting of the american education research association, San Diego, CA*.

Wingett, A. (2019). Effectiveness of manipulatives within the algebra 1 classroom.

Yazdani, M. A. (2008). The limitations of direct sentence translation in algebraic modeling of word problems. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, *3*(2), 56–61.

Žalská, J. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. In Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A. Rendl, M., Vondrová, N., & Žalská, J. (Eds.), *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Karolinum.

PŘÍLOHY

Příloha 1 – Manuál sledovaných typů úloh

Úlohy zařazené do algebraizačního potenciálu (A-úlohy)

A-1: Tvorba algebraického modelu skrze induktivní uvažování

Úlohy, kde se vytvoření algebraického modelu řídí indukcí přes rostoucí, či klesající číselné hodnoty. Tyto hodnoty jsou přítomné v podúlohách cvičení.

Příklad: *Jeden kg jablek stojí 6 korun. Určete, kolik v korunách zaplatíš za:*

2 kg, *5 kg,* *11 kg,* x *kg.*

A-2: Tvorba algebraického modelu bez induktivního uvažování

Cvičení, kde se jako níže u (1) tvoří algebraický model k reálnému kontextu slovní úlohy. Části cvičení, kde se do takového modelu dosazují čísla, viz (2), jsou započteny s bodem (1) jako jeden výskyt.

Příklad: *Členové věrnostního programu uplatnit tři druhy slev: 2 %, 5 %, 10 %.*

(1). *Cena nezlevněného zboží je* d. *Jaká je cena pro členy programů.*

(2). *Cena nákupu beze slevy je 1246 korun. Určete, kolik zaplatí členové všech věrnostních programů.*

A-3: Přiřazení správného algebraického modelu k reálnému kontextu

Úlohy, kde se slovnímu popisu přiřazuje algebraický výraz z nabídky.

Příklad: *David šel na pouť. Vstup stál 120 korun a každá použitá atrakce 50 korun. Určete, který s těchto výrazů odpovídá jeho celkové útratě z pouti, byl-li na* n *atrakcích.*

$50 \cdot n$, $170 \cdot n$, $120 \cdot n$, $120 \cdot n + 50$, $120 + 50 \cdot n$.

A-4: Tvorba algebraického modelu v jazykovém kontextu – typ 1

Úlohy, kde se vztahy s jazykovým kontextem zapíší jazykem algebry. Akt algebraizace musí být explicitně zmíněn už v zadání. Nejde tedy o úlohy: ‚Sečtěte výrazy $x + 1$ a $x + 2$‘, jelikož nahrazují jen jednu operaci pomocí slov. Tyto úlohy patří pod T-6.

Příklad: *Zapište výrazem: tři pětiny z rozdílu* m *a* n.

Příklad: *K součinu* $b + 5$ *a* $b - 5$ *přičti druhou mocninu výrazu* $3b + 3$.

A-5: Tvorba algebraického modelu v jazykovém kontextu – typ 2

Úlohy, kde se v k algebraickým výrazům odkazuje jako k objektům (typicky zástupným symbolem) a tím se posiluje konceptuální vnímání užitých operací.

Příklad: *Jsou dány tři mnohočleny* A: $2x + 2$, B: $3x + 3$, C: $4x + 4$. *Od součtu* A *a* B *odečtěte* C.

Úlohy zařazené do geometrizačního potenciálu (G-úlohy)

G-1: Geometrizace algebraického modelu spojená s argumentací

Úlohy, kde je geometrizován algebraický výraz, popř. je použit jen vztah geometrie a algebry ke zdůvodnění určitého tvrzení.

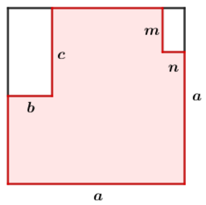
Příklad: *Určete obsah čtverce se stranou o délce* $(x-1)$. *Situaci ilustrujte.*

Příklad: *Ukažte pomocí obrázku, že platí* $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$.

G-2: Algebraické vyjádření míry nestandardního útvaru

Úlohy na hledání míry určité části geometrického modelu podle obrázku anebo popisu jeho rozměrů. Jedná se o úlohy vedoucí na doplnění či členění útvaru.

Příklad: *Vyjádřete obsah červené části obrazce:*



G-3: Vyjádření míry standardního útvaru – typ 1

Úlohy na vyjádření míry geometrického modelu (či jeho části) podle popisu vztahů mezi jeho rozměry s využitím proměnných.

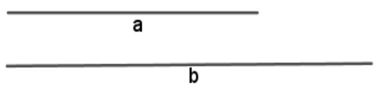
Příklad: *Víte, že jedna strana obdélníku měří* $x+1$ *a druhá je dvojnásobek této délky. Vyjádřete obsah a obvod tohoto obdélníku.*

G-4: Vyjádření míry standardního útvaru[40] – typ 2

Úlohy na vyjádření míry geometrického modelu (či jeho části) podle již zadaných rozměrů s využitím proměnných (popř. i obrázku). Alternativou je sama tvorba tohoto modelu podle zadaných údajů.

Příklad: *Určete obsah i obvod obdélníku s délkami stran* $x+1$ *a* $2x+2$

Příklad: *Sestrojte úsečku délky* $a+b$



G-5: Dosazení daných hodnot do geometrického vzorce

Úlohy, kde se pouze dosazuje za proměnné do již odvozeného vzorce. Potřebná čísla jsou již zadána a pokud je uvedena tabulka, buňky jsou započteny zvlášť.

Příklad: *Vypočítej délku stěnové úhlopříčky krychle s hranou délky 6,5 cm.*

[40] Označení „standardního (rovinné) útvary" je užito ve smyslu pravidelných útvarů, jako jsou čtverce, obdélníky či pravidelné mnohoúhelníky; u „standardních těles" jde obdobně např. o krychli a kvádr.

Úlohy zařazené do transformačního potenciálu (T-úlohy)

T-1: Algebraické zdůvodnění platnosti zadaného pravidla

Úlohy, kde se vhodnými úpravami algebraických výrazů ukazuje obecná platnost jistého výroku, popř. jde o úlohy, kde se rozborem izolovaných modelů nahlíží nějaké obecné pravidlo (tj. indukcí). Alternativou je určení předpisu funkce sestavenou tabulkou (tj. opačně k T-7), potažmo řešení úlohy, kde je explicitní výzva k užití inverzní operace či dosazení za proměnné k ověření výroku. Kritickým aspektem těchto úloh je důraz na rozvoj relačního porozumění rovnítka a argumentační i objevitelskou sílu jazyka algebry.

Příklad: *Dokažte, že součet dvou po sobě jdoucích přirozených čísel (větších než nula) je vždy dělitelný dvěma.*

Příklad: *Násobte a pokuste se vyslovit pravidlo, jak umocňujeme mnohočleny.*

Příklad: *Zjednodušte a proveďte zkoušku dosazením:* $c + (3d - 5c) = ?$

Příklad: *Zkontrolujte a opravte výpočet:* $(3a + b)^2 = 3a^2 + 6ab + b^2$

Příklad: *Doplňte výraz, aby platila rovnost:* $(\square + b)^2 = \square + 2ab + \square$.

T-2: Použití vzorce pro řešení numerického výpočtu

Úlohy motivující žáka k použití vzorců k rychlejšímu vyřešení numerického výpočtu.

Příklad: *Vyřešte vzorci pro druhou mocninu dvojčlenu a součin součtu a rozdílu tyto výpočty:*

$$21 \cdot 19, \qquad 38^2 - 36^2, \qquad 78^2.$$

T-3: Použití vzorců a vytýkání (potřeba výběru správné metody)

Úlohy s potřebou rozboru struktury AV a pro volbu vhodné metody jeho převedení do součinového tvaru (např. postupné vytýkání, vytýkání, vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu a vzorec pro součin součtu a rozdílu). V tomto případě nemusí být výběr přímo zmíněn v zadání, ale postačí, že dílčí úlohy vyžadují více typů úprav.

Příklad: *Převeďte do součinového tvaru:*

- $3x^2 + 12x + 12$
- $4x^2 - 16$.

T-4: Zkoumání role závorek

Úlohy ve cvičení, kde je cílem porovnat vliv závorek na tvar a hodnotu výrazu po jeho úpravě (1). Zkoumány mohou být i znaménkové konvence (2), přičemž rysem je užití stejných členů uvnitř závorek, jen se změnou znamének.

Příklad: *Zjednodušte a sledujte, jak pozice závorek ovlivňují pořadí početních úkonů a výsledek:*

$(\mathbf{1})\ (x+y)\cdot(x-y)$, $(x+y)\cdot x-y$;

$(\mathbf{2})\ (x+y)-(x-y)$, $(x+y)-(x+y)$, $(x+y)-(-x+y)$.

T-5: Zkoumání závislosti veličin/výrazů

Úlohy, kde se vyplňuje tabulka hodnot závislé veličiny na základě hodnot druhé veličiny. Každý nový řádek je počítán jako další úloha a tabulka musí být zmíněna už v zadání.

Příklad: *Vyplňte následující tabulku:*

t	-2	-1	0	1	2
$5t-1$					

T-6: Úlohy formálního charakteru

Úlohy, jejichž jediným účelem je procvičení standardní manipulace. Jednotlivá cvičení obvykle sdružují úlohy téhož typu v zájmu podpoření procedurální zručnosti žáka. Každá úloha je počítáno jako oddělená, přičemž není uvažována jejich obtížnost.

Příklad: *Zjednodušte* $7\cdot x\cdot y\cdot 2\cdot x$.

Příklad: *Sečtěte/odečtěte/vynásobte výrazy* $(7x^3-2x^2)$,$(6x^3+2x^2)$.

Příklad: *Převeďte na součin vytýkáním* $7x^3-2x^2-3x$, $ax+ay+bx+by$

Příklad: *Umocněte* $(x+1)^2$, $(x+y+1)^2$.

Příklad: *Vyjádřete jako druhou mocninu dvojčlenu* x^2+2x+1 .

Příklad: *Rozložte na součin součtu a rozdílu* x^2-1, $(x-1)^2-1$.

Příklad: *Určete hodnotu výrazu* x^2-1 *pro* $x=1,2,3,4$.

Příloha 2 – Zadání testu pilotní studie

Pokyny:

- Každá otázka má jednu, nebo více správných odpovědí.
- Řešení, která nevybíráte z nabídky, pište vždy celá, včetně pomocných výpočtů.

---

1. Stručně vysvětlete, co si v matematice představujete pod pojmem „proměnná".

---

2. Množství jablek je označeno jako j. Vlastními slovy popište, co rozumíte výrazem $10j$.

---

3. Zapište jako matematický výraz:

(A) druhá mocnina rozdílu proměnné u a jedné poloviny proměnné v

(B) 20 % z podílu proměnných k a l

(C) součet druhých mocnin proměnné r a čísla 5 zmenšený o pětinásobek proměnné p

---

4. David šel na pouť. Vstup ho stál 120 Kč a každá dále použitá atrakce 50 Kč. Určete, který z těchto výrazů odpovídá jeho celkové útratě z pouti po použití n atrakcí:

(A) $50 \cdot n$ **(C)** $120 \cdot n + 50$ **(F)** $(120 + 50) \cdot n$

(B) $170 \cdot n$ **(D)** $120 + 50 \cdot n$ **(E)** $120 \cdot (n + 50)$

---

5. Zjednodušte uvedené výrazy. Zapište celý postup.

(A) $-x + 3 - 2 \cdot (x^2 + 1) =$

(B) $2x + (3x + 7) + x - (3x - 7) =$

(C) $x \cdot (2x + 1) - 2x \cdot (x - 1) =$

---

6. Převeďte výrazy do součinového tvaru. Zapište celý postup.

(A) $3x^2 + 9x + 3 =$

(B) $4x^2 - 16y^2 =$

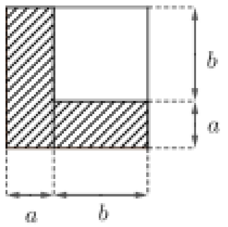
(C) $x^2 - 22xy + 121y^2 =$

(D) $(2 + a)^2 - b^2 =$

---

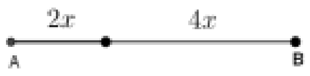
7. Z obdélníku o rozměrech $x + 2$ a x jsme ustřihli jeden roh ve tvaru čtverce s délkou strany y. Určete obsah útvaru, který zbyl po střihu (vzniklý výraz zapište ve zjednodušeném tvaru).

8. Vyjádřete co nejjednodušším výrazem obsah vyšrafované plochy.

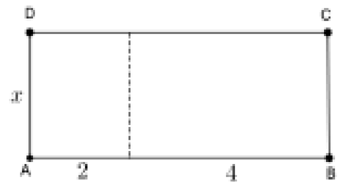


9. Vyberte všechna geometrická znázornění výrazu $2x + 4x$.

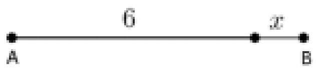
(A) Délka $\overline{AB}$:



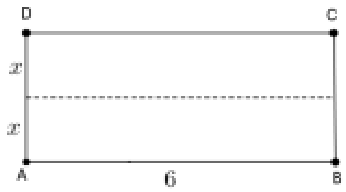
(C) Obsah ABCD:



(B) Délka $\overline{AB}$:



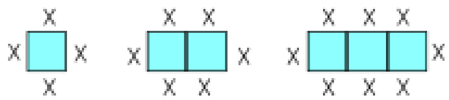
(D) Obsah ABCD:



10. Doplňte chybějící políčka tabulky. Čísla ve druhém řádku vznikají vždy z prvního řádku podle určitého pravidla. Toto pravidlo uveďte do sloupce ***n***.

1	2	3	4	…	10	n
5	9	13				

11. Na obrázcích jsou stoly o různém počtu desek. Čtverečky představují desky stolu a X židle.



Desky stolu se přidávají jen v jednom směru (do šířky) a židle obsadí všechna místa jako výše.

Určete počet židlí, které se ke stolu takto přisunou, pokud bude počet desek stolu: 4, 5, 10, n.

Příloha 3 – Zadání testu hlavní studie

Pokyny:

- Každá otázka má jednu, nebo více správných odpovědí.
- Řešení, která nevybíráte z nabídky, pište vždy celá, včetně pomocných výpočtů.

1. Stručně vysvětlete, co si v matematice představujete pod pojmem „proměnná“.

2. Je-li „počet jablek“ označen j, vysvětlete, co rozumíte výrazem $10j$.

3. Zjednodušte výrazy:

a) $-x + 3 - 2 \cdot (x^2 + 1) =$

b) $2x + (3x + 7) - x - (3x - 7) =$

c) $2x \cdot (x + 1) - x \cdot (-x - 1) =$

4. Rozložte výrazy na součin:

a) $3x^2 + 9x + 3 =$

b) $4x^2 - 1 =$

c) $x^2 + 4y^2 - 4xy =$

d) $-(-25x^2) - 16y^2 =$

5. Písmeno n značí libovolné číslo. Pomocí výrazu zapište pokyn: „Přičti n k pěti a vynásob třemi“.

6. David šel na pouť, kde se platí za vstup 120 Kč a za každou použitou atrakci 50 Kč. Vyberte výraz(y) které popisují jeho celkové výdaje při odchodu z pouti, pokud tam použil n atrakcí.

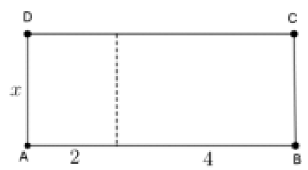
a) $50 \cdot n$ **c)** $120 \cdot n + 50$ **e)** $(120 + 50) \cdot n$

b) $170 \cdot n$ **d)** $120 + 50 \cdot n$ **f)** $120 \cdot (n + 50)$

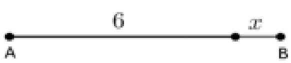
7. Vyberte všechna geometrická znázornění výrazu $2x + 4x$.

a) Délka $\overline{AB}$:

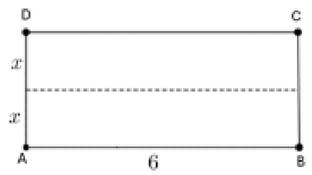
c) Obsah ABCD:



b) Délka $\overline{AB}$:

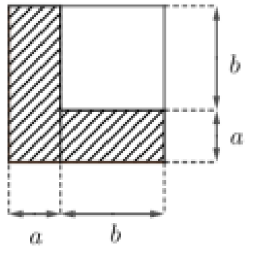


d) Obsah ABCD:



8. Z jednoho rohu obdélníku o rozměrech $x+2$ a x jsme ustřihli čtvercový kus se stranou délky $\frac{x}{2}$. Vyjádřete výrazem obsah zbylé části obdélníku a tento výraz zjednodušte.

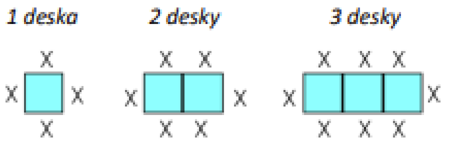
9. Vyjádřete co nejjednodušším výrazem obsah vyšrafované plochy.



10. Vyplňte zbytek tabulky. Pro každé číslo 2. řádku vždy platí, že vzniká z čísla 1. řádku podle téhož pravidla. Toto pravidlo zapište do sloupce n.

1	2	3	4	…	10	n
5	9	13				

11. Na obrázcích níže jsou k vidění stoly různé šířky. Čtverce představují desky stolu, znaky X židle.



Desky se přidávají jen v jednom směru (do šířky) a židle obsadí všechna místa, která stůl dovoluje. Vyjádřete celkový počet židlí, které se ke stolu takto vejdou, je-li jeho šířka: 4 desky, 5 desek a n desek.