

Posudek oponentky na diplomovou práci “Fine properties of functions and operators” Bc. Davida Kubíčka

Diplomová práce Bc. Davida Kubíčka je věnována studiu optimality prostorů funkcí v kontextu Sobolevových vnoření. Těžištěm práce jsou vlastní výsledky studenta. Autor mimo jiné podává charakterizaci prostorů invariantních vůči nerostoucímu přerovnání, které jsou optimálním zdrojovým či cílovým prostorem pro výše zmíněné Sobolevovo vnoření. Tato charakterizace je formulována pomocí omezenosti jistých supremálních operátorů. Pro prostory funkcí splňující předchozí podmínku autor dále nalézá explicitní popis normy jejich “optimálního partnera” pro dané Sobolevovo vnoření (tj. pro zadaný zdrojový prostor je popsána norma v optimálním cílovém prostoru, a naopak pro zadaný cílový prostor je popsána norma v optimálním zdrojovém prostoru). Hlavní výsledky práce jsou velmi obecné a lze je aplikovat na Sobolevova vnoření na celé řadě regulárních i iregulárních oblastí. Autor konkrétně zmiňuje aplikace týkající se tzv. Maz’ových oblastí, jejichž standardním příkladem jsou oblasti s (různě ostrými) hroty, a též aplikace týkající se prostorů s pravděpodobnostní mírou, jejichž základním příkladem je Gaussův prostor.

Během přípravy práce se autor zdárně seznámil s rozsáhlou literaturou týkající se Sobolevových prostorů, teorie interpolací a Banachových i kvazi-Banachových prostorů funkcí s normou invariantní vůči nerostoucímu přerovnání. Tyto znalosti poté zužitkoval pro získání celé řady nových výsledků. Práce je napsána s velkou pečlivostí, nenašla jsem v ní žádné závažné chyby, pouze několik přepisů. Za zmínku též stojí, že práce je napsána velmi slušnou angličtinou. Vzhledem k velkému množství originálních výsledků je práce dobrým základem pro budoucí publikaci. O mimořádné kvalitě práce jistě svědčí i to, že byla oceněna prvním místem v soutěži SVOČ 2024.

Několik připomínek k textu práce:

- strana 12, řádek 1: Místo “couple quasi-Banach spaces” má být “couple of quasi-Banach spaces”.
- strana 16, Fact 2.1: Existuje explicitní reference pro tvrzení označované jako Fact 2.1?
- strana 19, řádek -6: Bylo by lepší uvažovat supremum přes jinou proměnnou než r , jelikož proměnná r se vyskytuje v definici funkce f ($f = \chi_{(0,r)}$).
- strana 25, řádek 9: Uvnitř druhého integrálu má být proměnná t , nikoliv s .
- strana 25, řádek -12: Vynechat jedno ze slov “satisfies” a “has”.
- strana 28, řádek 15: Místo “convegence” má být “convergence”.
- strana 32, řádek -5: Uvnitř hranaté závorky má být $\frac{1}{t^2}$ místo $\frac{1}{t}$.
- strana 32, řádek -3: Myslím, že na levé straně rovnosti chybí znaménko minus.
- strana 46, řádek -8: Místo “sobolev” má být “Sobolev”.

Nakonec uvádím několik nápadů, které by mohly vést k vylepšení práce. Jde o připomínky nad rámec diplomové práce, autor by je ovšem mohl vzít v úvahu, rozhodne-li se práci publikovat.

- Dle mého názoru není z úvodu práce příliš jasné, jaké jsou její hlavní výsledky. Doporučila bych tedy úvod rozšířit a buď do něj přímo přidat formulaci hlavních výsledků, nebo alespoň vytvořit kapitolu “Main results”, kde budou tyto výsledky snadno k nalezení. Pokud to chápu správně, tak jedním z hlavních výsledků práce je Theorem 3.18, který je ovšem nyní formulován až na straně 38, a nepozorný čtenář ho tedy může snadno přehlédnout.

- Bylo by vhodné získané obecné výsledky ilustrovat na konkrétních příkladech. Práce již nyní obsahuje příklady konkrétních prostorů s mírou, na něž lze výsledky aplikovat. Pro dokreslení situace by ovšem neškodilo aplikovat tyto výsledky též na konkrétní prostory funkcí.

- Existuje konkrétní příklad funkce I , pro kterou v situaci popsané v Theorem 3.13 platí $c < 1$ a $(1-c)d \leq c$?

Celkově dle mého názoru práce přesahuje požadavky kladené na diplomovou práci, a doporučuji ji tedy jako takovou uznat.