

Posudek vedoucího na diplomovou práci Bc. Davida Kubíčka

Fine properties of functions and operators

Diplomová práce Bc. Davida Kubíčka je výzkumné povahy a obsahuje autorovy vlastní výsledky. Autor v práci studuje centrální otázku, zda lze podat explicitní popis optimálního partnerského prostoru (na zdrojové nebo na cílové straně) v Sobolevově vnoření libovolného řádu v situaci, kdy je prostor na opačné straně fixován, přičemž funkce jsou definovány na otevřené podmnožině eukleidovského prostoru s předem zadaným isoperimetrickým profilem a prostory mají normy invariantní vůči symetrizaci nerostoucím přerovnáním. Uvedená otázka byla sice v omezené míře studována již dříve, avšak pouze pro oblasti s nejlepším možným isoperimetrickým chováním, tedy pro lipschitzovské, případně Johnovy oblasti. Pro oblasti s obecným isoperimetrickým chováním představuje tato otázka hluboký otevřený problém.

Autorovi se podařilo využít vztahů mezi Sobolevovým vnořením a isoperimetrickou nerovností k důkazu kvantifikovatelného propojení mezi třemi zdánlivě nesouvisejícími vlastnostmi prostorů funkcí, jmenovitě jejich optimalitou na zdrojové či cílové straně Sobolevova vnoření, jejich interpolační charakteristikou vzhledem k vhodnému základnímu páru prostorů (obvykle Lorentzových) a konečně omezeností jistých specifických nelineárních operátorů na jejich asociovaných prostorech. Definice zmíněných operátorů zahrnuje operaci suprema, integraci, operaci nerostoucího přerovnání a specifickou váhu související s isoperimetrickým profilem dané oblasti.

Během práce se ukázalo, že pro charakterisaci optimality prostorů v této obecnosti nelze vystačit s klasickými podmínkami. Z tohoto důvodu autor zavedl několik zcela nových podmínek na isoperimetrickou funkci a podrobně prostudoval jejich vzájemné vztahy. Abstraktní obecné výsledky, které autor obdržel, lze uplatnit na několik typů klasických oblastí, jmenovitě například na oblasti tzv. Maz'ových tříd nebo na pravděpodobnostní prostory se součinnými mírami, jejichž pilotním příkladem je eukleidovský prostor libovolné konečné dimenze osazený Gaussovou mírou.

Práce obsahuje stručný úvod a čtyři kapitoly. První kapitola je přípravného charakteru. Jejím účelem je uvedení čtenáře do problematiky a zavedení veškerého přípravného materiálu, tedy zejména definic, značení a klasických poznatků, a to z oblasti prostorů funkcí, teorie interpolací a teorie váhových nerovností pro supremální operátory. Druhá kapitola obsahuje autorovy výsledky týkající se chování obecných supremálních operátorů dvou základních typů. Generující funkce je zde zcela obecná a předpokládá se o ní pouze to, že jde o konkávní bijekci. Autor zde vynalézavým způsobem pracuje s kvazinormovanými prostory, což je problematika, kterou klasické zdroje notoricky opomíjejí. Zde je však taková obecnost nepostradatelná, protože základními opěrnými prostory pro výzkum supremálních operátorů jsou Marcinkiewiczovy prostory slabého typu, jejichž řídicí funkcionál není normou. Hlavní výsledky práce jsou uvedeny ve třetí kapitole věnované studiu optimality prostorů funkcí v Sobolevových vnořeních. Je zde podán alternativní popis asociované optimální normy a tento výsledek je využit k explicitnímu popisu optimálního cílového prostoru. Obdobné výsledky pro optimální zdrojový prostor jsou studovány v následujícím oddílu téže kapitoly. V poslední čtvrté kapitole jsou podrobně prostudovány vztahy mezi pěti nejdůležitějšími podmínkami na isoperimetrickou funkci. Dále jsou zde uvedeny hluboce netriviální příklady ilustrující obecné výsledky z předcházejících kapitol.

Podle mého názoru diplomová práce Davida Kubíčka obsahuje obrovské množství hlubokých nových výsledků. Výsledky jsou rozhodně publikovatelné ve velmi slušném mezinárodním akademickém časopise a předpokládám, že k publikaci dojde v ranných stádiích doktorského studia, k němuž se již

autor přihlásil. S téměř stejnou prací David Kubíček zvítězil v prestižní soutěži SVOČ v matematice a informatice 2024 ve sloučené kategorii M1 (teorie funkcí a prostorů funkcí) a M2 (teorie diferenciálních a integrálních rovnic) v nebývale silné konkurenci deseti prací.

Práce byla vypracována s nesmírnou pečlivostí a je velice dobře sepsána po stránce matematické i jazykové. Na studenta magisterského studijního programu jde o dílo naprosto mimořádné a zaslouží patřičné ocenění. Autor navíc pracoval po celou dobu zcela samostatně, nastudoval kolosální množství netriviální nové literatury, rychle se zorientoval v nových rozsáhlých teoriích a samostatně v nich dosáhl nových výsledků.

David Kubíček je kromobyčejně talentovaný mladý matematik s nadáním a chutí k vědecké práci, s nímž je radost spolupracovat. Je to stoprocentně spolehlivý kolega a neúnavný dřič. Vedení práce má pak podobu spíše vědecké spolupráce. Je schopen klást si sám rozumné otázky a vůli nacházet odpovědi.

Předložená práce podle mého názoru vysoce překračuje nároky kladené na diplomovou práci. Vřele proto doporučuji, aby byla uznána jako diplomová práce.

V Praze 7.6.2024

Luboš Pick