Posudek diplomové práce

Název práce: Fixation time in Moran process under strong selection

Autor práce: Bc. Lenka Kopfová

Vedoucí: Josef Tkadlec, PhD

Předložená práce Lenky Kopfové se zabývá Moranovým procesem na grafech. Moranův proces je náhodný proces, který modeluje šíření genetické mutace v populaci jedinců. Struktura populace je v něm popsaná grafem G s n vrcholy a síla mutace parametrem $r \geq 1$. Důležitá veličina při zkoumání Moranova procesu je čas fixace, tedy střední hodnota počtu kroků, po nichž se mutace rozšíří do všech vrcholů (nebo zcela zanikne). Je známo, že čas fixace může být obecně exponenciální v n. Cílem práce bylo prozkoumat Moranův proces v limitě $r \to \infty$ a dokázat odhady na čas fixace pro různé třídy grafů.

Autorce se podařilo dokázat řadu překvapivých výsledků, které dohromady pěkně vystihují chování Moranova procesu v limitě $r \to \infty$. Obzvlášť bych chtěl vyzdvihnout následující tři výsledky.

(1) Těsný horní odhad $\frac{1}{2} \cdot n^3 + O(n^2)$ na čas fixace pro libovolné (orientované i neorientované) grafy. Autorka dokonce pro každé n přesně identifikovala nejpomalejší graf. Důkaz tohoto výsledku není příliš obtížný, ale tvrzení je překvapivé, jelikož pro pevné konečné r existují orientované grafy, na kterých je čas fixace exponenciální. Takto těsné výsledky jsou navíc vzácné – například není známé, jak vypadají nejpomalejší grafy pro $r = 1$ (resp. pro libovolné pevné r).

(2) Horní odhad $O(n^{2.5})$ na čas fixace pro neorientované grafy. Důkaz tohoto výsledku je obtížný a důmyslně využívá vlastností neorientovaných grafů. Ve zkratce se v něm ukazuje, že časové úseky, během nichž je proces pomalý, jsou vždy vykompenzovány jinými časovými úseky, během nichž je proces naopak rychlý. Tento výsledek je překvapivý, jelikož pro pevné konečné r existují neorientované grafy, na kterých je čas fixace $\Omega(n^3)$, tedy pomalejší.

(3) Nalezení konkrétního grafu G_{11}, na němž je čas fixace kratší než čas fixace na úplném grafu K_{11} za předpokladu, že mutace se objeví v jednom konkrétním vrcholu. V literatuře lze nalézt několik doměnek, které říkají, že úplný graf je (v nějakém smyslu) nejrychlejší graf ze všech. Tento výsledek ukazuje, že minimálně některé z těchto doměnek neplatí.

Práce splňuje všechny potřebné náležitosti. Autorka v první kapitole výstižně představuje hlavní problém a relevantní literaturu a uvádí přehled výsledků obsažených v práci. Po dokázání výše zmíněných výsledků dále analyzuje čas fixace na několika speciálních relevantních třídách grafů (např. na hvězdách a dvojhvězdách), diskutuje výsledky týkající se různých způsobů měření času fixace, shrnuje výsledky práce a formuluje otevřené problémy.

Celá práce je psaná angličtinou, která je podle mého posouzení na patřičné úrovni. Výsledky práce dle mého dalece překračují požadavky kladené na diplomovou práci. Nepochybuji, že z těchto výsledků vznikne brzy nejméně jeden článek v kvalitním impaktovaném časopise zaměřeném na matematickou biologii.

Práci doporučuji k obhajobě.

Práci navrhuji na zvláštní ocenění.