MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jáchym Mierva

Banachovy limity

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Název práce: Banachovy limity

Autor: Jáchym Mierva

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Banachova limita je spojitý lineární funkcionál na Banachově prostoru reálných omezených posloupností, který přirozeně rozšiřuje limitu – konkrétně je pozitivní a translačně invariantní. Bakalářská práce se zabývá konstrukcemi Banachových limit s různými vlastnostmi a následného využití vybudované teorie v oblastech teorie míry a funkcionální analýzy. S pomocí Banachových limit je dokázána existence Lebesgueovy míry a Josefsonova-Nissenzweigova věta, přičemž první zmíněný důkaz je vlastní prací autora.

Klíčová slova: Banachova limita; Hahnova-Banachova věta; invariance; Lebesgueova míra

Title: Banach limits

Author: Jáchym Mierva

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Banach limit is a continuous linear functional on the Banach space of real bounded sequences, which naturally extends the limit – in particular, it is positive and translation invariant. In this thesis we construct Banach limits with some additional properties and subquently give examples of their use in several proofs from measure theory and functional analysis. Using the theory of Banach limits, the existence of Lebesgue measure and the Josefson-Nissenzweig theorem are proven, the former being an original work of the author.

Keywords: Banach limit; Hahn-Banach Theorem; invariance; Lebesgue measure

Obsah

Značení

Abych předešel možnému nedorozumění, rozhodl jsem se uvést zde seznam značení a konvencí, které budu v práci používat. V první řadě připomenu definice prostorů, v nichž se bude většina následujícího odehrávat.

Definice 0.1. *Nechť symbol ℓ_∞ značí reálný vektorový prostor všech omezených reálných posloupností. Operace jsou definované člen po členu. Navíc na ℓ_∞ uvažujeme normu*

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty.$$

Dále buď c vektorový podprostor prostoru ℓ_∞ sestávající ze všech konvergentních posloupností.

Je známo, že $\|\cdot\|$ je skutečně norma na ℓ_∞, a že s touto normou je navíc prostor ℓ_∞ Banachův (tj. úplný). Podprostor c je uzavřený v ℓ_∞, tedy je taktéž Banachův.

Následující konvence nám ušetří spoustu textu.

Konvence 0.2. Kdykoliv x bude libovolná posloupnost a $n \in \mathbb{N}$, budeme výrazem x_n vždy značit n-tý člen posloupnosti x.

Konvence 0.3. Buď A operátor na prostoru ℓ_∞, B zobrazení definované na prostoru ℓ_∞ a $x \in \ell_\infty$. Nebude-li hrozit nedorozumění, dovolíme si vynechat symbol složení zobrazení ve výrazu $B \circ A$ a závorky ve výrazu $B(x)$.

Ve stejném duchu budeme symbolem A^n, kde $n \in \mathbb{N}$, myslet výraz

$$\underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{n\text{-krát}}.$$

Konvence 0.4. Zavedeme symbol $\coloneqq$ pro „definiční rovnítko“ - tj. pokud U a V jsou libovolné výrazy, znamená relace $U \coloneqq V$ větu „Ať je výraz U definován předpisem V.“ Tuto konvenci budeme používat zřídka, jen tehdy, když výrazně přispěje k přehlednosti zápisu.

S využitím konvence 0.2 nyní zavedeme na prostoru ℓ_∞ (a tedy speciálně i na c) kanonické částečné uspořádání.

Definice 0.5. *Ať $x, y \in \ell_\infty$, označíme*

$$x \geq y \quad \overset{def}{\iff} \quad \forall n \in \mathbb{N} \colon x_n \geq y_n.$$

Nakonec zavedeme několik důležitých objektů.

Definice 0.6. *Označme posloupnost $\mathbb{1} = (1, 1, \dots) \in c$ a funkcionály*

$$\lim x = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x \in c,$$

$$\limsup y = \limsup_{n\to\infty} y_n, \quad y \in \ell_\infty,$$

$$\liminf y = \liminf_{n\to\infty} y_n, \quad y \in \ell_\infty.$$

1. Základní vlastnosti Banachových limit

Bez nadsázky je možno říci, že matematická analýza je věda o konvergenci. Často chceme „limitit“ i objekty, které a priori nikam nekonvergují – takto například vznikly slabé topologie ve funkcionální analýze. Banachovy limity jsou také takovým pokusem, jak donutit některé divergentní posloupnosti v jakémsi smyslu konvergovat. Konkrétně nás budou zajímat omezené reálné posloupnosti.

Následuje stručný přehled této bakalářské práce. V první kapitole Banachovu limitu zadefinujeme a dokážeme, že nějaká Banachova limita existuje. Také odvodíme jemnější odhady na možné hodnoty Banachových limit, což povede k charakterizaci skoro konvergentních posloupností. Druhá kapitola je věnována konstrukci Banachovy limity s jistými speciálními vlastnostmi. A konečně ve třetí kapitole předvedeme, k čemu je možné Banachovy limity využít v různých oblastech matematické analýzy. Součástí této kapitoly je i autorova vlastní konstrukce Lebesgueovy míry, jež využívá existenci Banachových limit v důkazu klíčového tvrzení.

1.1 Definice Banachovy limity

Definice 1.1. *Na prostoru ℓ_∞ uvažujme operátor posunutí*

$$T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Banachovy limity by měly zobecňovat limitu takovým způsobem, aby co nejvíce zachovávaly naši intuici, kterou máme s limitními procesy spojenou. Základní vlastností limity je, že závisí jen na tzv. limitním chování posloupnosti, neboli ignoruje konečně mnoho členů. To je shrnuto v rovnosti $\lim Tx = \lim x$, která platí pro každou posloupnost $x \in c$. Ihned je totiž vidět, že indukcí můžeme zapomenout prvních konečně mnoho členů a pak je naopak nahradit jinými, to vše bez vlivu na limitu. Tuto vlastnost bychom tedy rádi přenesli i na Banachovy limity, což je uvedeno v bodě (B3) následující definice.

Dále bychom chtěli, aby hodnota Banachovy limity byla alespoň poblíž hodnotám členů dané posloupnosti. Nejmírnější verzí tohoto požadavku je, aby nebyla posloupnosti nezáporných hodnot přidělena záporná limita a aby limitou konstantní posloupnosti byla hodnota jejích členů.

Dostali jsme se tedy k následující, na první pohled velice obecné definici.

Definice 1.2. *Lineární funkcionál $B\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ nazveme Banachovou limitou, pokud platí*

(B1) *B je pozitivní, tj. platí: $\forall x \in \ell_\infty, x \geq 0\colon Bx \geq 0$,*

(B2) *$B\mathbb{1} = 1$,*

(B3) *$BT = B$.*

Množinu všech Banachových limit značíme $\mathfrak{B}$.

Pozorování 1.3. (i) Pro $x, y \in \ell_\infty$ splňující $x \geq y$ máme $x - y \geq 0$. Pro každou $B \in \mathfrak{B}$ pak z pozitivity a linearity plyne $Bx \geq By$. Obdobně pro operátor T dostáváme $Tx \geq Ty$.

(ii) Z (i) a faktu $B\mathbb{1} = 1$, resp. $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$, lze snadno ukázat, že každá Banachova limita B i operátor T jsou spojité a mají normu 1.

Důkaz. Dokážeme, že pro $B \in \mathfrak{B}$ je $\|B\| = 1$, odkud plyne i spojitost. Ať x je libovolná posloupnost z jednotkové koule v ℓ_∞, pak $-\mathbb{1} \leq x \leq \mathbb{1}$. Odsud však dle (i) plyne

$$-1 = B(-\mathbb{1}) \leq Bx \leq B\mathbb{1} = 1,$$

což je ekvivalentní s $|Bx| \leq 1$. Tedy $\|B\| \leq 1$. Opačná nerovnost plyne z

$$\|B\| \geq |B\mathbb{1}| = 1.$$

Důkaz rovnosti $\|T\| = 1$ je velice podobný: pro x z jednotkové koule v ℓ_∞ máme

$$-\mathbb{1} = T(-\mathbb{1}) \leq Tx \leq T\mathbb{1} = \mathbb{1},$$

z čehož opět $1 \geq \|T\| \geq \|T\mathbb{1}\| = 1$. □

Z Definice 1.2 vůbec není jasné, proč by každá Banachova limita měla souhlasit s běžnou limitou na celém prostoru konvergentních posloupností. Zatím jsme ukázali pouze to, že hodnota Banachovy limity je omezena infimem a supremem. Nyní však zásadním způsobem využijeme invarianci vůči posunutí.

Tvrzení 1.4. *Pro každou Banachovu limitu $B \in \mathfrak{B}$ a $x \in \ell_\infty$ platí* $\liminf x \leq Bx \leq \limsup x$.

Důkaz. Mějme $B \in \mathfrak{B}$ a $x \in \ell_\infty$ dáno. Z vlastnosti (B2) a Pozorování 1.3(i) plyne $B(x) \leq B((\sup x)\mathbb{1}) = \sup x$. Aplikujeme-li tuto nerovnost na $T^n x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$B(x) = B(T^n x) \leq \sup_{k>n} x_k,$$

tedy

$$B(x) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k = \limsup x.$$

Nově nabyté znalosti ihned využijeme pro důkaz druhé nerovnosti:

$$\liminf x = -\limsup(-x) \leq -B(-x) = Bx.$$ □

Důsledek 1.5. Pro $x \in c$ je $Bx = \lim x$.

1.2 Existence Banachových limit

V předchozí sekci jsme odvodili několik základních vlastností Banachových limit, avšak to vše za předpokladu, že nějaký funkcionál splňující definici 1.2 existuje. Tuto otázku podrobně rozebereme v této sekci.

Nejprve ukážeme, že existuje alespoň jedna Banachova limita, přičemž použijeme variaci postupu Suchestona [10]. Ten používá fundamentální nástroj funkcionální analýzy, Hahnovu-Banachovu větu, k rozšíření limitního funkcionálu z podprostoru c na ℓ_∞. Pro úplnost uvedeme znění Hahnovy-Banachovy věty.

Definice 1.6. *Mějme reálný vektorový prostor X a funkcionál $p\colon X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že p je sublineární, pokud je*

(i) *subaditivní, tj.* $\forall x, y \in X : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,

(ii) *pozitivně homogenní, tj.* $\forall x \in X \forall \alpha \geq 0 \colon p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Příklad. Můžeme si povšimnout, že $\limsup$ či $\|\cdot\|$ jsou sublineárními funkcionály na ℓ_∞.

Věta 1.7 (Hahn-Banach, reálná verze [5, Theorem 3.2])**.** *Nechť X je reálný vektorový prostor a Y je podprostor X. Je-li p sublineární funkcionál na X a f lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Klíčovým krokem v důkazu existence Banachových limit je nalezení vhodného sublineárního funkcionálu p, jeho vlastnosti totiž určí vlastnosti nalezeného rozšíření limity. Z nerovnosti $F \leq p$ budeme muset být schopni dokázat, že F má vlastnosti (B1), (B2) a (B3).

Definice 1.8. *Pro $x \in \ell_\infty$ a $n \in \mathbb{N}$ označme*

$$a_n(x) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j}, \qquad p(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x).$$

Lemma 1.9. *Funkcionál p je dobře definován a je sublineární.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pro každé $x \in \ell_\infty$ je posloupnost $(a_n(x))_{n=1}^\infty$ konvergentní. Snadno ukážeme, že je omezená:

$$|a_n(x)| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |x_{i+j}| \leq \|x\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ať $k, m, r \in \mathbb{N}$ pevná. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ můžeme shora odhadnout sumu v definici $a_{km}(x)$ následovně:

$$\sum_{j=0}^{km-1} x_{i+j} = \sum_{j=0}^{m-1} x_{i+j} + \sum_{j=m}^{2m-1} x_{i+j} + \cdots + \sum_{j=(k-1)m}^{km-1} x_{i+j} \leq k \cdot m \cdot a_m(x).$$

Protože uvedená nerovnost platí pro každé $i \in \mathbb{N}$, můžeme přejít na levé straně k supremu. Tím získáme nerovnost

$$km \cdot a_{km}(x) \leq km \cdot a_m(x).$$

Stejným způsobem získáme odhad

$$(km + r) a_{km+r}(x) \leq r \cdot a_r(x) + km \cdot a_{km}(x) \leq r \cdot a_r(x) + km \cdot a_m(x).$$

Odsud pro každé $r, m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\limsup_{k\to\infty} a_{km+r} \leq \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{r}{km+r} a_r(x) + \frac{km}{km+r} a_m(x) \right) = a_m(x).$$

Protože uvedená nerovnost platí pro každé $r \in \{1, \dots, m\}$ a posloupnosti $\{km + r\}_{k=0}^{\infty}$, $r \in \{1, \cdots, m\}$, pokrývají $\mathbb{N}$, máme dokonce

$$\limsup_{n\to\infty} a_n(x) \leq a_m(x).$$

A protože m bylo libovolné, platí $\limsup_{n\to\infty} a_n(x) \leq \liminf_{m\to\infty} a_m(x)$, a tedy existuje limita, díky omezenosti jest vlastní. Funkcionál p je tedy dobře definován.

Není těžké nahlédnout, že p je sublineární: pozitivní homogenita je snadno vidět a pro dané $x, y \in \ell_\infty$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n(x+y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j} + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_{i+j} \right) \leq a_n(x) + a_n(y),$$

z čehož limitním přechodem ihned plyne subaditivita p. □

Nyní musíme ukázat, že na prostoru c je splněna nerovnost $\lim \leq p$. Ukážeme silnější technické tvrzení, které se bude hodit později v důkazu Tvrzení 1.13.

Lemma 1.10. *Pro každé $x \in \ell_\infty$ a $y \in c$ platí $p(x+y) = p(x) + \lim y$.*

Důkaz. Mějme $\varepsilon > 0$ libovolné. Označme $l = \lim y$ a nalezněme z definice limity takové $u, v \in c$, že $y = u + v$, u má konečně mnoho nenulových členů a platí $\|v - l\mathbb{1}\| < \varepsilon$.

Pro každé $n, i \in \mathbb{N}$ pak platí

$$-\infty < -\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| \leq \sum_{j=0}^{n-1} u_{i+j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| < \infty,$$
$$n(l-\varepsilon) < \sum_{j=0}^{n-1} v_{i+j} < n(l+\varepsilon),$$

odkud získáme

$$p(x+y) = \lim_{n\to\infty} a_n(x+u+v) = \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} u_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} v_{i+j} \right) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| + l + \varepsilon \right) = p(x) + l + \varepsilon,$$
$$p(x+y) \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} |u_j| + l - \varepsilon \right) = p(x) + l - \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, máme $p(x+y) = p(x) + l$. □

Z Lemmatu 1.10 speciálně při položení $x = 0$ získáváme rovnost $\lim = p$ na c, čímž je předpoklad Věty 1.7 splněn.

Tvrzení 1.11 (Sucheston [10])**.** *Množina Banachových limit $\mathfrak{B}$ je neprázdná.*

Důkaz. Podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 1.7), jejíž předpoklady jsme ověřili v předchozích lemmatech, existuje lineární rozšíření B funkcionálu lim na celý prostor ℓ_∞ takové, že platí $B \leq p$. Zbývá ukázat, že B je Banachova limita. Ověříme podmínky Definice 1.2.

(B1) Ať $x \in \ell_\infty$ splňuje $x \geq 0$. Pak zřejmě platí $a_n(-x) \leq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pročež i $p(-x) \leq 0$. Platí tedy $B(x) = -B(-x) \geq -p(-x) \geq 0$, takže je B pozitivní.

(B2) $B(\mathbb{1}) = \lim \mathbb{1} = 1$.

(B3) Pro $x \in \ell_\infty$ jest

$$|p(Tx - x)| = \left| \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+j+1} - x_{i+j}) \right| =$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} (x_{i+n} - x_i) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \|x\| = 0,$$

obdobně odvodíme i $p(x - Tx) = 0$. Platí tedy

$$0 = -p(x - Tx) \leq -B(x - Tx) = B(Tx - x) \leq p(Tx - x) = 0,$$

aneb $BT = B$. □

1.3 Skoro konvergentní posloupnosti

Sublineární funkcionál p, který jsme v důkazu předchozího tvrzení použili pro Hahnovu-Banachovu větu, dokonce přesně omezuje možné hodnoty Banachových limit. To nám umožňuje charakterizovat takzvané *skoro konvergentní* posloupnosti.

Definice 1.12. *Posloupnost $x \in \ell_\infty$ nazveme skoro konvergentní k $a \in \mathbb{R}$, pokud pro každou Banachovu limitu $B \in \mathfrak{B}$ platí $B(x) = a$. Prostor všech skoro konvergentních posloupností značíme ac. Dále označme ac_0 podprostor ac všech posloupností skoro konvergentních k 0.*

Tvrzení 1.13 (Sucheston [10]). *Pro každou $B \in \mathfrak{B}$ a $x \in \ell_\infty$ platí $-p(-x) \leq B(x) \leq p(x)$.*

Obráceně, pokud $a \in [-p(-x), p(x)]$, pak existuje $B \in \mathfrak{B}$ splňující $B(x) = a$.

Důkaz. Ať $B \in \mathfrak{B}$ a $x \in \ell_\infty$ dáno. Pro $i, n \in \mathbb{N}$ položme

$$z_i^n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j},$$

pak z linearity a translační invariance B jest $B(x) = B(z^n) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} z_i^n = a_n(x)$. Limitním přechodem získáme nerovnost $B(x) \leq p(x)$. Odsud $-p(-x) \leq -B(-x) = B(x)$, čímž je první část tvrzení dokázána.

Pro důkaz druhé části použijeme Hahnovu-Banachovu větu (Věta 1.7) velice podobně jako v důkazu Tvrzení 1.11, nejprve však částečně rozšíříme lim tak, aby měla výsledná Banachova limita správnou hodnotu v x. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $x \in \ell_\infty \setminus c$ a mějme $a \in [-p(-x), p(x)]$ dáno. Pak pro $z \in Z := c \oplus \operatorname{span}\{x\}$, kde $\oplus$ značí direktní součet podprostorů, zapíšeme jednoznačně $z = y + tx$, $y \in c$, $t \in \mathbb{R}$, a položíme $L(z) = \lim y + ta$. Nyní chceme použít

Hahnovu-Banachovu větu na lineární funkcionál L; musíme však ukázat, že na Z platí $L \leq p$.

Ať $z = y + tx$, $y \in c$, $t \in \mathbb{R}$, dáno. Dle Lemmatu 1.10 platí $p(z) = \lim y + p(tx)$. Pokud je $t \geq 0$, odhadneme

$$p(z) = \lim y + tp(x) \geq \lim y + ta = L(z).$$

V opačném případě platí

$$p(z) = \lim y - tp(-x) \geq \lim y + ta = L(z).$$

Dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 1.7) tedy existuje lineární funkcionál B na ℓ_∞ rozšiřující L a dominovaný p. Zjevně můžeme stejným postupem jako v důkazu Tvrzení 1.11 ukázat, že $B \in \mathfrak{B}$, a z konstrukce L plyne $B(x) = a$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Důsledek 1.14. Posloupnost $x \in \ell_\infty$ je skoro konvergentní k $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j} = a$ stejnoměrně vzhledem k $i \in \mathbb{N}$, neboli zobrazení $\varphi_n \colon i \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j}$ konvergují stejnoměrně k zobrazení konstantně rovnému a.

Důkaz. Dle předchozí věty je x skoro konvergentní k a právě tehdy, když $p(x) = -p(-x) = a$. Rozepíšeme z definice

$$a = p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j},$$
$$a = -p(-x) = -\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} -\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j} = \lim_{n\to\infty} \inf_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j},$$

odkud plyne tvrzení. $\square$

2. Invariantní Banachovy limity

Ve druhé kapitole se budeme věnovat využitím Banachových limit v teorii sčítání řad. Nejdříve uvedeme bez důkazu jedno z nejznámějších tvrzení této teorie.

Definice 2.1. *Cèsarovým operátorem rozumíme zobrazení $C\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ definované předpisem*

$$(Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad n \in \mathbb{N}, x \in \ell_\infty.$$

Věta 2.2 (obecněji dokázal Cèsaro [2])**.** *Pokud x je konvergentní posloupnost s limitou $a \in \mathbb{R}$, pak posloupnost Cx je též konvergentní s limitou a.*

Věta 2.2 lze formulovat i tak, že na prostoru c platí rovnost $\lim \circ C = \lim$. Semenov a Sukochev [7] tuto rovnost zobecnili i na Banachovy limity. Nalezli sadu postačujících podmínek na lineární operátor H na prostoru ℓ_∞, které garantují existenci Banachovy limity B invariantní vůči H. Jejich výsledek v této kapitole dokážeme, přičemž se nám bude hodit následující definice.

Definice 2.3. *Označme $S = (I - T)(\ell_\infty)$.*

Všimněme si, že S je ve skutečnosti množina právě těch posloupností, jejichž částečné součty jsou omezené. Pro $y \in \ell_\infty$ totiž máme

$$\left|\sum_{i=1}^{n}((I-T)y)_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{i+1})\right| = |y_1 - y_{n+1}| \leq 2\|y\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

naopak pro x s omezenými částečnými součty můžeme definovat posloupnost

$$y = (0, -x_1, -x_1 - x_2, -x_1 - x_2 - x_3, \dots),$$

pro niž dle předpokladu platí $y \in \ell_\infty$ a navíc zřejmě splňuje $x = (I - T)y$.

Vzpomeňme si na charakterizaci skoro konvergentních posloupností podle Důsledku 1.14. Z ní lze snadno ukázat, že $S \subset ac_0$. Je-li totiž $s \in S$ taková, že její částečné součty jsou v intervalu $[-K, K]$ pro nějaké $K \in \mathbb{R}$, pak máme pro každé $i \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{i+j}\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{i+n-1} x_k - \sum_{k=1}^{i-1} x_k\right| \leq \frac{2K}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Definice 2.4. *Pro každý lineární operátor H na prostoru ℓ_∞ označme množinu*

$$\mathcal{R}(H) = \operatorname{conv}\{H^n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Dále ať Γ označuje množinu všech lineárních operátorů H na ℓ_∞ takových, že

(Γ1) *H je pozitivní a platí $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$,*

(Γ2) *$Hc_0 \subset c_0$,*

(Γ3) *$\forall s \in S \forall A \in \mathcal{R}(H)\colon \limsup As \geq 0$.*

Příklad. Cèsarův operátor C splňuje všechny podmínky (Γ1) až (Γ3), což není náročné ukázat za pomoci Věty 2.2.

Nyní můžeme uvést znění Věty, již se chystáme dokázat.

Věta 2.5 (Semenov a Sukochev [7, Theorem 4])**.** *Pro každý operátor $H \in \Gamma$ existuje Banachova limita $B \in \mathfrak{B}$ splňující $BH = B$.*

Důkaz bude veden v zásadě stejným způsobem jako důkaz věty o existenci Banachových limit (Tvrzení 1.11). V závislosti na daném $H \in \Gamma$ budeme muset definovat vhodný sublineární funkcionál, který nazveme P_0^H. Ten následně použijeme pro rozšíření funkcionálu lim pomocí Hahnovy-Banachovy věty a ukážeme, že výsledné rozšíření je Banachova limita, která je navíc invariantní vůči H.

Začneme několika důležitými vlastnostmi operátorů z Γ.

Pozorování 2.6. (i) Pokud $H \in \Gamma$, pak $H \in \mathcal{R}(H) \subset \Gamma$. Skutečně, každý $A \in \mathcal{R}(H)$ totiž zřejmě splňuje podmínky (Γ1) a (Γ2) a z inkluze $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(H)$ plyne, že splňuje i (Γ3). Tedy $A \in \Gamma$.

(ii) Každý $H \in \Gamma$ je spojitý, má normu 1 a pro $x, y \in \ell_\infty$, $x \geq y$, splňuje $Hx \geq Hy$. Důkaz je stejný jako v Pozorování 1.3 pro T, neboť využívá pouze vlastnost (Γ1).

(iii) Pro $A, B \in \mathcal{R}(H)$ je $AB = BA \in \mathcal{R}(H)$. To stačí ověřit jednoduchým výpočtem: pro konvexní kombinace $A = \sum_{i=1}^m a_i H^i$ a $B = \sum_{j=1}^n b_j H^j$ máme

$$AB = \left(\sum_{i=1}^m a_i H^i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^n b_j H^j\right) = \sum_{i=1}^m a_i \left(H^i \circ \sum_{j=1}^n b_j H^j\right) =$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j H^{i+j}}_{\in \mathcal{R}(H)} = \sum_{j=1}^n b_j \left(H^j \circ \sum_{i=1}^m a_i H^i\right) = BA,$$

neboť $a_i b_j \geq 0$ pro každé i, j a $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^m a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) = 1$.

Lemma 2.7. *Ať A je lineární operátor na ℓ_∞ splňující podmínky* (Γ1) *a* (Γ2)*. Pak pro každou $x \in \ell_\infty$ platí* $\limsup Ax \leq \limsup x$.

Důkaz. Nejdříve uvažujme $x \in \ell_\infty$ takové, že $x \geq 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $x_n < \limsup x + \varepsilon$ pro každé $n > n_0$. Položíme-li

$$u = (x_1, \dots, x_{n_0}, 0, \dots) \qquad \text{a} \qquad v = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots),$$

pak $v \geq 0$ a $Ax = A(u + v) = Au + Av$. Navíc $u \in c_0$, tedy z podmínky (Γ2) máme $Au \in c_0$. Odsud a z faktu $\|A\| = 1$ plyne

$$\limsup Ax = \limsup Av \leq \|Av\| \leq \|v\| = \sup v \leq \limsup x + \varepsilon.$$

Z volby ε máme požadované tvrzení.

Pro $x \in \ell_\infty$ obecné máme $x + \|x\|\mathbb{1} \geq 0$. S využitím předchozího případu a faktu $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$ snadno získáme nerovnost

$$\limsup Ax = \limsup A(x + \|x\|\mathbb{1}) - \|x\| \leq \limsup(x + \|x\|\mathbb{1}) - \|x\| = \limsup x.$$

$\square$

Nyní přistoupíme k definici funkcionálu P_0^H. Viděli jsme, že už v důkazu Tvrzení 1.11 musela být velká část věnována tomu, že funkcionál p je dobře definovaný a sublineární. Stejně tomu bude i nyní.

Definice 2.8. *Pro $H \in \Gamma$ definujeme funkcionály*

$$P^H(x) = \inf_{A \in \mathcal{R}(H)} \limsup Ax, \qquad P_0^H(x) = \inf_{s \in S} P^H(x+s), \qquad x \in \ell_\infty.$$

Lemma 2.9. *Pro každé $H \in \Gamma$ jsou funkcionály P^H a P_0^H dobře definovány a jsou sublineární.*

Důkaz. $P^H(x) \in \mathbb{R}$: Protože každý operátor $A \in \mathcal{R}(H)$ splňuje $\|A\| = 1$ podle Pozorování 2.6(ii), máme pro každé $x \in \ell_\infty$

$$\limsup Ax \geq \inf Ax = -\sup(-Ax) \geq -\|Ax\| \geq -\|x\|.$$

Odsud přechodem k infimu dostáváme

$$P^H(x) \geq -\|x\| > -\infty. \tag{2.1}$$

Nerovnost $P^H(x) \leq \|x\|$ je zjevná.

$P_0^H(x) \in \mathbb{R}$: Pro $x \in \ell_\infty$, $A \in \mathcal{R}(H)$ a $s \in S$ jest

$$\limsup A(x+s) \geq \liminf Ax + \limsup As \geq \liminf Ax \geq -\|x\|.$$

První nerovnost je elementární, druhá plyne z vlastnosti (Γ3) operátoru A a třetí je jako v předchozím kroku. Nerovnost

$$P_0^H(x) \geq -\|x\|$$

odsud plyne přechodem k infimu přes všechny dvojice $(A,s) \in \mathcal{R}(H) \times S$.

P^H, P_0^H pozitivně homogenní: Pozitivní homogenita P^H je zřejmá. Ať $\alpha > 0$ a $x \in \ell_\infty$, pak

$$P_0^H(\alpha x) = \inf_{s \in S} \alpha P^H\left(x + \frac{s}{\alpha}\right) = \alpha \inf_{s \in S} P^H(x+s) = \alpha P_0^H(x),$$

neboť S je lineární množina. Zbývá ukázat $P_0^H(0) = 0$. Protože $0 \in S$, jistě z definice infima platí $P_0^H(0) \leq P^H(0) = 0$. Opačně, z (Γ3) plyne, že $P^H(s) \geq 0$ pro každou $s \in S$, tedy i $P_0^H(0) \geq 0$.

P_0^H subaditivní: Pro $A \in \mathcal{R}(H)$ definujme funkcionál $F_A(x) = \limsup Ax$. Zřejmě je sublineární. Pak

$$P_0^H(x) = \inf_{(A,s) \in \mathcal{R}(H) \times S} F_A(x+s).$$

Zvolme $x, y \in \ell_\infty$ a $\varepsilon > 0$. Z definice infima nalezneme $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(H)$ a $s_1, s_2 \in S$ takové, že

$$F_{A_1}(x+s_1) < P_0^H(x) + \varepsilon, \qquad F_{A_2}(y+s_2) < P_0^H(y) + \varepsilon.$$

Položíme $s = s_1 + s_2 \in S$ a $A = A_1A_2$. Pak $A = A_2A_1 \in \mathcal{R}(H)$ dle Pozorování 2.6(iii) a platí

$$\begin{aligned} P_0^H(x+y) &\leq F_A(x+y+s) \leq F_A(x+s_1) + F_A(y+s_2) \leq \\ &\leq F_{A_1}(x+s_1) + F_{A_2}(y+s_2) < P_0^H(x) + P_0^H(y) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

přičemž třetí nerovnost plyne z Lemmatu 2.7 (neboť z Pozorování 2.6(i) víme, že $A_1, A_2 \in \Gamma$). Z volby ε máme požadovanou nerovnost.

P^H subaditivní: Plyne z důkazu subaditivity P_0^H, stačí volit $s_1 = s_2 = 0$, pak i $s = 0$. $\square$

Nyní zavedeme pomocné funkcionály, které nám usnadní značení.

Definice 2.10. *Pro $H \in \Gamma$ položme*

$$Q^H(x) = -P^H(-x), \qquad Q_0^H(x) = -P_0^H(-x), \qquad x \in \ell_\infty.$$

Pozorování 2.11. Z rovnosti $\sup M = -\inf(-M)$, $M \subset \mathbb{R}$, zřejmě plyne

$$Q^H(x) = \sup_{A \in \mathcal{R}(H)} \liminf Ax, \tag{2.2}$$

$$Q_0^H(x) = \sup_{s \in S} Q^H(x - s) = \sup_{s \in S} Q^H(x + s), \qquad x \in \ell_\infty. \tag{2.3}$$

Graf sublineárního zobrazení P_0^H si lze představit jako takový nekonečný „trychtýř“ - různě natočený a zdeformovaný, ale pouze tak, aby byl všude spojitý a konvexní (tyto vlastnosti je možno snadno ze sublinearity ukázat, ale nebudeme to potřebovat). Pokud každou polopřímku začínající v 0, z nichž je tento graf složen, obrátíme na opačnou, dostaneme „kužel“, který je grafem zobrazení Q_0^H v jistém smyslu duálního k P_0^H. Z geometrické intuice je vidět, že lineární funkcionál L je dominován P_0^H právě tehdy, když dominuje Q_0^H (a speciálně $Q_0^H \leq P_0^H$).

Nyní formálněji: je-li L lineární funkcionál splňující $L \leq P_0^H$ na ℓ_∞ (alespoň jeden takový existuje z Hahnovy-Banachovy věty, kdy uvažujeme triviální podprostor $Y = \{0\}$), pak pro $x \in \ell_\infty$ platí

$$P_0^H(x) \geq L(x) = -L(-x) \geq -P_0^H(-x) = Q_0^H(x). \tag{2.4}$$

Naopak, za předpokladu $L \geq Q_0^H$ máme $L(x) = -L(-x) \leq -Q_0^H(-x) = P_0^H(x)$, $x \in \ell_\infty$.

V tuto chvíli už máme dostatečný arzenál k tomu, abychom dokázali, že nalezené rozšíření limity bude Banachova limita. Musíme však ještě vyšetřit jemnější vlastnosti funkcionálu P^H, ze kterých následně vyplyne, že nalezená Banachova limita bude invariantní vůči H. To je obsahem posledních dvou lemmat.

Lemma 2.12. *Ať $H \in \Gamma$ a $A \in \mathcal{R}(H)$. Pak $P^H A = P^H$, pročež i $Q^H A = Q^H$.*

Důkaz. Buď operátor $A \in \mathcal{R}(H)$ dán. Zapišme jej jako konvexní kombinaci $A = \sum_{i=1}^n a_i H^i$. Pak pro $x \in \ell_\infty$ postupně dle Pozorování 2.6(iii) a Lemmatu 2.7 upravíme

$$\begin{aligned} P^H(Ax) &= \inf_{B \in \mathcal{R}(H)} \limsup BAx = \inf_{B \in \mathcal{R}(H)} \limsup ABx \leq \\ &\leq \inf_{B \in \mathcal{R}(H)} \limsup Bx = P^H(x). \end{aligned}$$

Opačná nerovnost plyne z toho, že $\mathcal{R}(H)A \coloneqq \{BA; B \in \mathcal{R}(H)\} \subset \mathcal{R}(H)$, tedy

$$P^H(Ax) = \inf_{C \in \mathcal{R}(H)A} \limsup Cx \geq \inf_{B \in \mathcal{R}(H)} \limsup Bx = P^H(x).$$ $\square$

Lemma 2.13. *Ať $H \in \Gamma$. Pak pro každé $x \in \ell_\infty$ platí $P^H(x - Hx) = 0$, pročež i $Q^H(x - Hx) = 0$.*

Důkaz. Položme
$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H^i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Pak $A_n \in \mathcal{R}(H)$, a tedy dle Lemmatu 2.12 jest $P^H A_n = P^H$. S využitím nerovnosti (2.1) a faktu $\|H\| = 1$ počítejme
$$\begin{aligned}\left|P^H(x - Hx)\right| &= \left|P^H(A_n x - A_n Hx)\right| = \left|P^H\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(H^i x - H^{i+1}x\Big)\right)\right| = \\ &= \frac{1}{n}\left|P^H(Hx - H^{n+1}x)\right| \le \frac{1}{n}\left\|Hx - H^{n+1}x\right\| \le \\ &\le \Big(\|H\| + \|H\|^{n+1}\Big)\frac{\|x\|}{n} = \frac{2\|x\|}{n}.\end{aligned}$$
Protože tato nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, dostáváme $P^H(x - Hx) = 0$.

Pro Q^H dostaneme z definice $Q^H(x - Hx) = P^H((-x) - H(-x)) = 0$. □

Konečně jsme připraveni na důkaz Věty 2.5. Ten už snadno vyplyne z vlastností funkcionálů P^H a P_0^H, které jsme si rozmysleli a dokázali. Určitým zjednodušením navíc bude, že budeme rozšiřovat limitu pouze z podprostoru $\operatorname{span}\{\mathbb{1}\}$, čímž se vyhneme nutnosti ukazovat nerovnost $\lim x \le P_0^H(x)$ pro každou konvergentní posloupnost x.

Důkaz Věty 2.5. Nejdříve si uvědomme, že
$$\begin{aligned}P_0^H(\mathbb{1}) &= \inf_{(A,s)\in\mathcal{R}(H)\times S} \limsup(A\mathbb{1} + As) = \inf_{(A,s)\in\mathcal{R}(H)\times S}(1 + \limsup As) = \\ &= 1 + P_0^H(0) = 1,\end{aligned}$$
a ze sublinearity odvodíme $P_0^H(-\mathbb{1}) \ge -P_0^H(\mathbb{1}) = -1$. Pokud tedy pro $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme $L(\alpha\mathbb{1}) = \alpha$, pak je L lineární funkcionál definovaný na uzavřeném podprostoru $\operatorname{span}\{\mathbb{1}\}$ prostoru ℓ_∞ a navíc na svém definičním oboru splňuje $L \le P_0^H$. Použijeme Hahnovu-Banachovu větu (Věta 1.7) pro nalezení lineárního funkcionálu B na prostoru ℓ_∞, který je dominován P_0^H a rozšiřuje L. Ukážeme, že se jedná o hledanou invariantní Banachovu limitu.

Připomeňme, že z nerovnosti (2.4) vyplývá, že na ℓ_∞ platí
$$Q^H \le Q_0^H \le B \le P_0^H \le P^H.$$

(B1) Ať $x \ge 0$. Pak z podmínky (Γ1) plyne, že $Hx \ge 0$, speciálně $\liminf Hx \ge 0$. Protože $H \in \mathcal{R}(H)$, máme z vyjádření (2.2)
$$B(x) \ge Q^H(x) = \sup_{A\in\mathcal{R}(H)} \liminf Ax \ge \liminf Hx \ge 0.$$

(B2) $B(\mathbb{1}) = L(\mathbb{1}) = 1$.

(B3) Ať $x \in \ell_\infty$, položme $s = x - Tx \in S$. Pak s využitím rovnosti (2.3) máme
$$0 = Q^H(s + (-s)) \le Q_0^H(s) \le Bs \le P_0^H(s) \le P^H(s + (-s)) = 0,$$
tedy $0 = Bs = Bx - BTx$.

Ukázali jsme tedy, že $B \in \mathfrak{B}$. Zbývá ukázat invarianci vůči H, ta však přímo plyne z Lemmatu 2.13:
$$0 = Q^H(x - Hx) \le Bx - BHx \le P^H(x - Hx) = 0, \qquad x \in \ell_\infty. \qquad \square$$

3. Aplikace teorie Banachových limit

Teorie Banachových limit, jiţ jsme rozvíjeli v předešlých kapitolách, má své využití i v jiných částech matematiky. Uvedeme zde aplikaci, jež se objevuje v článku M. A. Sofiho [8, sekce 1.4.1]. Ten využil existenci Banachových limit v důkazu velice zajímavého tvrzení o existenci jisté invariantní míry.

V sekci 3.2 následně z Tvrzení 3.3 odvodíme existenci Lebesgueovy míry na reálné přímce.

Poslední sekce bude věnována důkazu Josefsonovy-Nissenzweigovy věty z oblasti funkcionální analýzy. Předvedeme důkaz Ehrharda Behrendse, který zásadním způsobem existenci Banachových limit využívá.

3.1 Existence invariantní míry na kompaktním prostoru

V důkazu Tvrzení 3.3 využijeme známou větu z funkcionální analýzy o reprezentaci duálního prostoru k prostoru spojitých funkcí. Připomeňme, že prostor spojitých funkcí z topologického prostoru K do $\mathbb{R}$ značíme $\mathcal{C}(K)$.

Věta 3.1. *Nechť K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a F je nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující*

$$F(f) = \int_K f \, d\mu, \qquad f \in \mathcal{C}(K).$$

Dále budeme potřebovat snadné tvrzení z teorie míry a integrálu.

Věta 3.2 (O přenosu integrace)**.** *Nechť $(X, \mathscr{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $(Y, \mathscr{B})$ je měřitelný prostor a zobrazení $g : X \to Y$ je měřitelné. Pak pro každou $f : Y \to \mathbb{R}$ měřitelnou platí*

$$\int_X f \circ g \, d\mu = \int_Y f \, d(\mu g^{-1}).$$

Tvrzení 3.3 (Sofi [8, sekce 1.4.1])**.** *Ať K je kompaktní Hausdorffův topologický prostor a operátor $H \colon K \to K$ je spojitý. Pak existuje regulární pravděpodobnostní borelovská míra μ na K, která je invariantní vůči H (tj. pro každou $A \subset K$ borelovskou platí $\mu(A) = \mu(H^{-1}(A))$).*

Pokud je navíc H prostý, pak dokonce pro každou $A \subset K$ borelovskou platí $\mu(A) = \mu(H(A))$.

Důkaz. Zvolme libovolně $x \in K$ a Banachovu limitu $B \in \mathfrak{B}$. Definujeme lineární funkcionál F na prostoru $\mathcal{C}(K)$ předpisem

$$F(f) = B\Big(f(x), f(Hx), f(H^2x), \dots\Big), \qquad f \in \mathcal{C}(K). \tag{3.1}$$

Z linearity B zřejmě plyne, že F je lineární. Navíc pro $f \geq 0$ je posloupnost $\{f(H^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporná, a tedy z pozitivity B je funkcionál F nezáporný. Podle

Věty 3.1 tedy existuje regulární borelovská míra μ na K taková, že pro každou $f \in \mathcal{C}(K)$ platí

$$F(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Nyní budeme chtít ukázat, že μ je hledaná invariantní míra. Klíčová je invariance Banachovy limity B vůči posunutí (vlastnost (B3)), protože zapomenutí prvního členu posloupnosti v rovnici 3.1 je totéž, jako přenesení míry μ pomocí zobrazení H. Skutečně, z invariance vůči posunutí dostaneme pro $f \in \mathcal{C}(K)$ rovnost

$$\begin{aligned} F(f) &= B\Big(f(x), f(Hx), f(H^2x), \dots\Big) = B\Big(f(Hx), f(H^2x), f(H^3x), \dots\Big) = \\ &= B\Big(f \circ H(x), f \circ H(Hx), f \circ H(H^2x), \dots\Big) = F(f \circ H), \end{aligned}$$

odsud tedy dle Věty o přenosu integrace (Věta 3.2) máme

$$F(f) = \int_K f \circ H \, d\mu = \int_K f \, d(\mu H^{-1}).$$

Funkcionál F je tedy reprezentován též mírou μH^{-1}. Protože je však μ z Věty 3.1 určena jednoznačně, musí platit $\mu = \mu H^{-1}$. Tím je první část tvrzení dokázána.

Pokud je navíc operátor H prostý, pak pro každou borelovskou množinu $A \subset K$ platí rovnost $H^{-1}(H(A)) = A$. Z předchozího získáváme

$$\mu(H(A)) = \mu(H^{-1}(H(A))) = \mu(A). \qquad \square$$

3.2 Konstrukce Lebesgueovy míry

V této sekci prezentuje autor svůj vlastní důkaz existence Lebesgueovy míry, jehož hlavním stavebním blokem je Tvrzení 3.3. Cílem je zkonstruovat borelovskou míru λ na množině $\mathbb{R}$, která je:

(L1) úplná,

(L2) translačně invariantní, tj. pro každé $t \in \mathbb{R}$ a každou měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}$ platí $\lambda(A + t) = \lambda(A)$,

(L3) normovaná, konkrétně hodnotou $\lambda([0, 1]) = 1$.

Z teorie míry je známo, že každá míra splňující uvedené vlastnosti již musí být rovna Lebesgueově míře [4, Theorem 2.20(d)].

Důležitou vlastností Lebesgueovy míry je translační invariance, takže přirozenou myšlenkou je využít Tvrzení 3.3, kde za operátor H zvolíme nějaké posunutí. Není to však tak přímočaré, neboť čelíme dvěma zásadním problémům. Jednak toto tvrzení nemůžeme použít pro $K = \mathbb{R}$, protože reálná přímka není kompaktní. Avšak především bychom dostali míru invariantní pouze vůči jednomu, předem danému posunu (a jeho iteracím), zatímco Lebesgueova míra je invariantní vůči libovolnému posunu. Oba problémy vyřešíme zároveň tím, že budeme nejdříve pracovat na kružnici $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ta je kompaktní a rotace libovolného bodu o iracionální úhel nám při iterování vytvoří hustou podmnožinu. Libovolnou rotaci tak budeme schopni libovolně blízko aproximovat rotací o nějaký násobek pevného úhlu. To nám spolu s regularitou míry z Tvrzení 3.3 zaručí invarianci vůči všem rotacím. Nakonec postačí tuto kružnici opět „rozbalit“ a slepit jich nekonečně mnoho k sobě, čímž získáme původní reálnou přímku.

Formálně tento myšlenkový postup provedeme v kontextu topologických grup, k čemuž budeme potřebovat několik základních definic a faktů. Použité definice z teorie grup jsou k nalezení ve skriptech Stanovského [9], teorii topologických grup popsali Hewitt a Ross [3].

Definice 3.4. *Chápejme $\mathbb{R}$ s operací sčítání a standardní topologií jako topologickou grupu. Označme K faktorgrupu $\mathbb{R}$ podle její normální podgrupy $\mathbb{Z}$, zkráceně $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dále ať symbol τ značí kanonické kvocientové zobrazení.*

Protože je grupa $\mathbb{R}$ abelovská, je každá její podgrupa normální, což plyne ihned z definice. K je tedy grupa, přičemž se standardní podílovou topologií (jak je popsána například v [3, Definition 5.15]) je to dokonce topologická grupa (důkaz lze nalézt tamtéž, Theorem 5.26).

Je známým faktem, že topologická grupa K je homeomorfně izomorfní grupě $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ s operací násobení komplexních čísel a eukleidovskou metrikou. Odsud plyne, že je K kompaktní. Navíc můžeme na K přenést eukleidovskou metriku z $\mathbb{C}$, čímž získáme na K kompatibilní metriku invariantní vůči grupové operaci. Tuto metriku budeme značit ρ.

Připomeňme, že otevřená koule o středu $x \in K$ a poloměru $\varepsilon > 0$ v metrice ρ se standardně značí výrazem $U_\rho(x, \varepsilon)$.

Lemma 3.5 ([6])**.** *Nechť symbol $\langle x \rangle$ značí neceločíselnou část reálného čísla x. Buď $r \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, pak je množina $\{\langle zr \rangle; z \in \mathbb{Z}\}$ hustá v $[0, 1)$.*

Důkaz. Buď $x \in [0, 1)$ a $n \in \mathbb{N}$ dáno. Rozdělme interval $[0, 1)$ na intervaly $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, kde $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dle Dirichletova principu nyní musí existovat různá $i, j \in \{1, \ldots, n + 1\}$ taková, že jsou hodnoty $\langle ir \rangle, \langle jr \rangle$ ve stejném intervalu $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$. Bez újmy na obecnosti nechť $\langle ir \rangle \geq \langle jr \rangle$. Pak jest

$$0 \leq \langle (i - j)r \rangle = \langle \langle ir \rangle - \langle jr \rangle \rangle = \langle ir \rangle - \langle jr \rangle < \frac{1}{n}.$$

Z iracionality r máme dokonce nerovnost $0 < \langle (i - j)r \rangle$. Nyní je snadno vidět, že vzdálenost bodu x od množiny $\{\langle z(i - j)r \rangle; z \in \mathbb{Z}\}$ je menší než $\frac{1}{n}$. Tím je důkaz dokončen. □

Ze spojitosti a surjektivity kanonického kvocientového zobrazení τ ihned dostáváme následující důsledek.

Důsledek 3.6. Buď $r \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$, pak je množina $\{z\tau(r); z \in \mathbb{Z}\}$ hustá v K.

Tvrzení 3.7. *Existuje regulární pravděpodobnostní borelovská míra μ na K, která je invariantní vůči grupové operaci.*

Důkaz. Krok 1: Buď $r \in [0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ libovolné pevné a označme $t = \tau(r) \in K$. Definujme operátor $H \colon K \to K, x \mapsto x + t$. Protože K je topologická grupa, je operace sčítání spojitá, a tedy je H spojitý operátor. Navíc je bijekcí, neboť zjevně je jeho inverzní zobrazení dáno jako $H^{-1}(x) = x - t$. Nechť je μ regulární pravděpodobnostní borelovská míra z Tvrzení 3.3 aplikovaného na operátor H.

Krok 2: Nechť je dána borelovská množina $A \subset K$ a posunutí $s \in K$. Naším cílem nyní bude ukázat rovnost $\mu(A+s) = \mu(A)$, tím ověříme, že je μ invariantní. Nejprve si však uvědomme, že můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že daná množina A je uzavřená v K – míra μ je regulární, takže je míra každé borelovské množiny B určena pouze mírami uzavřených množin podle předpisu

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F); F \subset B \text{ uzavřená}\}.$$

Záhy nastane klíčový moment celé této kapitoly. V tuto chvíli můžeme volně posouvat množinu A o celočíselné násobky pevného posunutí t, protože pro každé $z \in \mathbb{Z}$ platí $\mu(A+zt) = \mu(H^z(A)) = \mu(A)$. Dle Důsledku 3.6 je tato množina posunutí $\{zt; z \in \mathbb{Z}\}$ hustá v K, takže vyberme nějakou posloupnost $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ takovou, že platí $z_n t \to s$. Nyní bychom však chtěli tuto konvergenci čísel přenést na „konvergenci“ množin $A + z_n t$ k množině $A + s$, v jistém dobře definovaném smyslu. Vlastnosti míry μ následně zaručí, že se tato konvergence přenese i na míry, to jest dostaneme $\mu(A + z_n t) \to \mu(A + s)$. To bude ovšem zdárný konec důkazu, neboť na levé straně je posloupnost konstantně rovná hodnotě $\mu(A)$.

Krok 3: Ona „konvergence množin“ pro nás bude popsána rovností

$$A + s = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} (A + z_n t)}. \tag{3.2}$$

Postupně dokážeme obě inkluze. Nejprve buď $x \in A+s$ dáno. Pak je $x-s \in A$ a platí $x = \lim_{n\to\infty} x - s + z_n t$, přičemž posloupnost na pravé straně je od indexu k obsažena v množině $\bigcup_{n=k}^{\infty}(A + z_n t)$. Tím jsme ukázali, že je

$$x \in \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} (A + z_n t)}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, odkud plyne inkluze „$\subset$“ v rovnici (3.2).

Na druhou stranu, je-li $x \in K \setminus (A+s)$, pak má x od množiny $A+s$ kladnou vzdálenost (neb je množina $A+s$ uzavřená). Označme tuto vzdálenost ε a nalezněme $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq k$ jest $\rho(z_n t, s) < \varepsilon/2$. Nyní sporem ukážeme, že pro $n \geq k$ jsou množiny $U_\rho(x, \varepsilon/2)$ a $A + z_n t$ disjunktní. Kdyby existovalo $y \in U_\rho(x, \varepsilon/2) \cap (A + z_n t)$, bylo by $y - z_n t + s \in A + s$, odkud bychom měli

$$\begin{aligned} \rho(x, A+s) \leq \rho(x, y - z_n t + s) &< \frac{\varepsilon}{2} + \rho(y, y - z_n t + s) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \rho(y + z_n t, y + s) = \frac{\varepsilon}{2} + \rho(z_n t, s) < \varepsilon, \end{aligned}$$

protože je metrika ρ invariantní. To je spor.

Celkem jsme ukázali, že se bod x i s nějakým svým okolím vyhýbá množině $\bigcup_{n=k}^{\infty}(A + z_n t)$, takže platí

$$x \notin \overline{\bigcup_{n=k}^{\infty} (A + z_n t)}.$$

Tím je důkaz inkluze „$\supset$“ v rovnici (3.2) dokončen.

Krok 4: Ukážeme, že platí $\mu(A+s) = \mu(A)$.

Z rovnosti (3.2) a spojitosti míry μ plyne, že

$$\mu(A+s) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}(A+z_n t)}\right).$$

Avšak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\mu\left(\overline{\bigcup_{n=k}^{\infty}(A+z_n t)}\right) \geq \mu(A+z_k t) = \mu(A),$$

tedy i $\mu(A+s) \geq \mu(A)$. Protože jsme tuto nerovnost dokázali pro každou uzavřenou množinu A a každé posunutí s, dostáváme ihned i opačnou nerovnost

$$\mu(A) = \mu((A+s)-s) \geq \mu(A+s).$$

Tím je důkaz hotov. □

Definice 3.8. *Buď μ míra z Tvrzení 3.7. Pro každou borelovskou množinu $A \subset \mathbb{R}$ položme*

$$\nu(A) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(\tau(A \cap [k, k+1))).$$

Uvědomme si, že hodnota uvedené sumy nezávisí na uspořádání členů, neboť jsou všechny členy nezáporné.

Tvrzení 3.9. (i) *ν je míra.*

(ii) *ν je translačně invariantní.*

(iii) *$\nu([0,1]) = 1$*

Důkaz. (i) Ukážeme, že ν je σ-aditivní. Buďte $A_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní borelovské množiny. Každou množinu A_n disjunktně rozložíme na borelovské množiny $A_n^k = A_n \cap [k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Označíme-li dále $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $A^k = A \cap [k, k+1)$, pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$A^k = \bigcup_{n=1} (A_n \cap [k, k+1)) = \bigcup_{n=1} A_n^k.$$

Z Definice 3.8 nyní máme vyjádření

$$\nu(A) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(\tau(A^k)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\left(\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^k\right)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau(A_n^k)\right).$$

Zbývá nám využít σ-aditivitu μ. Množiny $\tau(A_n^k)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, protože jsou zjevně množiny A_n^k, $n \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní podmnožiny intervalu $[k, k+1)$ a kvocientové zobrazení τ je na tomto intervalu prosté. Celkem získáme

$$\nu(A) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tau(A_n^k)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

(přičemž sumy lze prohodit z Fubiniovy věty).

(ii) Chceme ukázat, že pro každou borelovskou množinu $A \subset \mathbb{R}$ a pro každé posunutí $r \in \mathbb{R}$ platí $\nu(A + r) = \nu(A)$. Ať jest tedy A a r dáno. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r \in [0, 1)$ (jinak namísto r vezměme $r - \lfloor r \rfloor$).

Pro $k \in \mathbb{Z}$ položme $A_k = A \cap [k-r, k)$ a $B_k = A \cap [k, k+1-r)$. Tyto množiny tvoří disjunktní rozklad A a navíc zjevně platí $A \cap [k, k+1) = A_{k+1} \cup B_k$ a $(A+r) \cap [k, k+1) = A \cap [k-r, k+1-r) + r = A_k \cup B_k + r$. Počítejme:

$$
\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(\tau(A_{k+1} \cup B_k)) = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(\tau(A_{k+1}) \cup \tau(B_k)) = && (\tau \text{ prosté na } [k, k+1)) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\mu(\tau(A_{k+1})) + \mu(\tau(B_k))\Big) = && (\text{přečíslování sumy}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\mu(\tau(A_k)) + \mu(\tau(B_k))\Big) = && (\mu \text{ invariantní}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\mu(\tau(A_k) + \tau(r)) + \mu(\tau(B_k) + \tau(r))\Big) = && (\tau \text{ homomorfismus}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\mu(\tau(A_k + r)) + \mu(\tau(B_k + r))\Big) = \\
& && (A_k + r \text{ a } B_k + r \text{ jsou disjunktní podmnožiny } [k, k+1)) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\Big(\tau((A_k + r) \cup (B_k + r))\Big) = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu\Big(\tau((A_k \cup B_k) + r)\Big) = \\
&= \nu(A + r).
\end{aligned}
$$

(iii) Protože je míra μ pravděpodobnostní, jest $\nu([0, 1)) = 1$. Odsud zároveň plyne, že jednobodové množiny musí být ν-nulové: kdyby nikoliv, tak by podle bodu (ii) platilo $\nu([0, 1)) = \infty$, protože interval $[0, 1)$ má nekonečně mnoho bodů. Odsud plyne tvrzení. □

Definice 3.10. *Označme* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0, \lambda)$ *zúplnění prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \nu)$*, kde* $\mathcal{B}$ *značí borelovskou* σ*-algebru v* $\mathbb{R}$*.*

Tvrzení 3.11. *Míra* λ *je translačně invariantní.*

Důkaz. Ať je $A \in \mathcal{B}_0$ a $t \in \mathbb{R}$ dáno. Dle definice zúplnění nalezneme borelovské množiny B, C takové, že platí $B \subset A \subset C$ a $\nu(C \setminus B) = 0$. Pak jsou množiny $B+t$, $C+t$ borelovské a splňují $B+t \subset A+t \subset C+t$. Navíc zjevně platí $(C+t) \setminus (B+t) = (C \setminus B) + t$, pročež z Tvrzení 3.9(ii) plyne, že $\nu((C + t) \setminus (B + t)) = 0$. Pak již dostáváme $\lambda(A + t) = \nu(C + t) = \nu(C) = \lambda(C)$. □

Postupně jsme ukázali, že míra λ splňuje body (L1) (přímo z Definice 3.10), (L2) (dle Tvrzení 3.11) i (L3) (dle Tvrzení 3.9(iii)). Zkonstruovali jsme tedy Lebesgueovu míru.

3.3 Josefsonova-Nissenzweigova věta

Předvedeme ještě druhé možné využití teorie Banachových limit, tentokráte v oblasti topologických metod ve funkcionální analýze. Dokážeme s její pomocí hlubokou Josefsonovu-Nissenzweigovu větu, která hovoří o topologii w^* (slabá s hvězdičkou) na duálu obecného Banachova prostoru. Důkaz byl převzat z článku Ehrharda Behrendse [1], přičemž byly formálně doplněny induktivní konstrukce.

Připomeňme, že pro Banachův prostor X rozumíme jeho duálem prostor X^* všech spojitých lineárních funkcionálů na X s normou

$$\|x^*\| = \sup_{x \in S_X} |x^*(x)|, \quad x^* \in X^*,$$

kde S_X značí jednotkovou sféru v X. Kromě topologie indukované normou můžeme na X^* uvažovat slabší topologii w^*, jejíž subbáze je daná množinami tvaru

$$\{x^* \in X^*; x^*(x) < \alpha\}, \quad x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$$

(každá taková množina je otevřený poloprostor v X^*). Není těžké nahlédnout, že posloupnost funkcionálů $(x_i^*)_{i=1}^\infty$ (či obecněji net $(x_i^*)_{i \in I}$) v X^* konverguje slabě s hvězdičkou k $x^* \in X^*$ právě tehdy, když konverguje k x^* bodově.

Nyní jsme připraveni uvést onu větu, kterou budeme chtít dokázat.

Věta 3.12 (Josefsonova-Nissenzweigova). *Buď X nekonečněrozměrný reálný Banachův prostor. Pak existuje posloupnost funkcionálů $(x_n^*) \subset S_{X^*}$ taková, že $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.*

Znění Josefsonovy-Nissenzweigovy věty je jen málo rozdílné od známého a velice snadného faktu, že v případě nekonečněrozměrného prostoru X je 0 vždy ve w^*-uzávěru jednotkové sféry S_{X^*} (každé w^*-okolí 0 totiž zjevně obsahuje nějaký nekonečněrozměrný podprostor, a tedy protíná jednotkovou sféru). Z něj však obecně plyne jen to, že je možné k 0 dokonvergovat pomocí *netu*, nikoliv *posloupnosti.* Tato malá topologická drobnost činí důkaz extrémně obtížným.

Předtím, než k důkazu přistoupíme, se budeme muset náležitě připravit. Použijeme Rosenthalovu větu o prostoru ℓ_1, před jejím uvedením připomeneme pojem slabé cauchyovskosti.

Definice 3.13. *Symbolem ℓ_1 značme prostor všech reálných posloupností x, pro něž je hodnota*

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

konečná. Zobrazení $\|\cdot\|_1$ prohlásíme normou na ℓ_1.

Definice 3.14. *Posloupnost (x_n) v normovaném lineárním prostoru X je slabě cauchyovská, pokud pro každý funkcionál $x^* \in X^*$ je posloupnost $(x^*(x_n))$ konvergentní.*

Je známo, že každá slabě cauchyovská posloupnost je omezená.

Lemma 3.15. *Je-li (x_n^*) slabě cauchyovská posloupnost v duálu normovaného lineárního prostoru X, pak je slabě s hvězdičkou konvergentní.*

Důkaz. Pro $x \in X$ označme $\varepsilon_x \in X^{**}$ jeho obraz při kanonickém vnoření a položme $x^*(x) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_x(x_n^*) = \lim_{n\to\infty} x_n^*(x)$. Označme $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^*\| < \infty$. Pak pro každé $x \in X$ jest

$$\|x^*(x)\| = \lim_{n\to\infty} |x_n^*(x)| \le M\|x\|,$$

tedy je lineární funkcionál x^* spojitý s normou nejvýše M. Je proto w^*-limitou posloupnosti (x_n^*). □

Věta 3.16 (Rosenthal). *Buď X reálný Banachův prostor a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omezená posloupnost v X. Pokud tato posloupnost nemá žádnou slabě cauchyovskou podposloupnost, pak existuje podposloupnost (x_{n_k}), jež je ekvivalentní kanonické bázi prostoru ℓ_1, neboli zobrazení $\phi\colon \ell_1 \to X, t \mapsto \sum t_k x_{n_k}$, je izomorfismus.*

Důsledek 3.17. Pokud je X Banachův prostor takový, že ℓ_1 není v X vnořen, pak má každá omezená posloupnost v X slabě cauchyovskou podposloupnost.

S trochou představivosti je možné v Rosenthalově větě vidět rys Ramseyho teorie – v každé posloupnosti nalezneme buďto jistým způsobem hezkou podposloupnost, nebo naopak velice nepěkně divergentní podposloupnost. Je však zajímavé, že je dokonce možno Rosenthalovu větu pomocí Ramseyho teorie dokázat. Tento důkaz lze nalézt ve zmiňovaném Behrendsově článku [1, Theorem 1.1]. Ten v úvodní kapitole sepsal velice zajímavou úvahu o hlubokém významu Rosenthalovy věty.

Dále uvedeme některá značení, která budou v důkazu Josefsonovy-Nissenzweigovy věty užitečná.

Definice 3.18. *Mějme vektorový prostor X a v něm posloupnosti $(x_n), (y_n)$. Řekneme, že (y_n) je bloková podposloupnost (x_n), pokud lze každý prvek y_n napsat jako lineární kombinaci*

$$y_n = \sum_{k\in I_n} a_k^n x_k$$

pro nějakou konečnou množinu $I_n \subset \mathbb{N}$ a reálná čísla a_k^n splňující $\sum_{k\in I_n} |a_k^n| = 1$, a to navíc tak, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo $\min I_n > \max I_{n-1}$. Tuto skutečnost značíme $(y_n) \sqsubseteq (x_n)$.

Pozorování 3.19. $\sqsubseteq$ je tranzitivní a reflexivní relace.

Definice 3.20. *Pro $k \in \mathbb{N}_0$ a $n \in \mathbb{N}$ označme množinu*

$$N_n^k = \Big\{(n-1)2^k + 1, (n-1)2^k + 2, \ldots, n2^k\Big\},$$

tj. n-tý blok 2^k po sobě jdoucích přirozených čísel.

Definice 3.21. *Pro $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ definujeme posloupnost $\mu_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}$ předpisem*

$$(\mu_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n})_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = 1 + \varepsilon_1 2^0 + \cdots + \varepsilon_n 2^{n-1} + m2^n \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $i \in \mathbb{N}$. Pro představu, platí

$$\begin{aligned} \mu_0 &= (1,0,1,0,1,0,1,0,\dots), & \mu_1 &= (0,1,0,1,0,1,0,1,\dots), \\ \mu_{00} &= (1,0,0,0,1,0,0,0,\dots), & \mu_{10} &= (0,1,0,0,0,1,0,0,\dots), \\ \mu_{01} &= (0,0,1,0,0,0,1,0,\dots), & \mu_{11} &= (0,0,0,1,0,0,0,1,\dots). \end{aligned}$$

Definice 3.22. *Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme posloupnost*

$$\lambda_n = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1} \in \{0,1\}} \Big(\mu_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} 0} - \mu_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} 1} \Big),$$

ekvivalentně

$$(\lambda_n)_i = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i \in N^{n-1}_{2m-1} \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{pokud } i \in N^{n-1}_{2m} \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Nyní si připravme jednoduchý odhad hodnoty Banachovy limity aplikované na „řídkou“ posloupnost.

Lemma 3.23. *Buď B Banachova limita. Pak pro každé $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ a $x \in S_{\ell_\infty}$ platí $|B(\mu_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \cdot x)| \leq 2^{-n}$, kde symbol $\cdot$ značí součin posloupností po prvcích.*

Důkaz. Buď $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ a $x \in S_{\ell_\infty}$ dáno, označme $y = \mu_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \cdot x$. Pak je $\|y\|_\infty \leq 1$. Posloupnost y má všechny členy, jejichž index není tvaru $1 + \varepsilon_1 2^0 + \dots + \varepsilon_n 2^{n-1} + m2^n$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$, nulové, z toho důvodu je posloupnost

$$z = y + Ty + \dots + T^{2^n - 1} y$$

taktéž prvkem jednotkové koule v ℓ_∞. Platí tedy $|B(z)| \leq 1$. Avšak platí $B(z) = B(y) + B(Ty) + \dots + B(T^{2^n-1}y) = 2^n B(y)$, pročež $|B(y)| \leq 2^{-n}$.

□

A konečně uveďme znění technického lemmatu dokázaného v [1, Lemma 5.2], ze kterého na konci důkazu Věty 3.12 vyplyne w^*-konvergence zkonstruované posloupnosti.

Lemma 3.24. *Ať je dáno pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ reálné číslo $r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$ splňující $|r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}| < 2^{-n}$. Buď navíc pro každé $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ splněno $r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} = r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n 0} + r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n 1}$. Pak označíme-li*

$$\eta_n = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1} \in \{0,1\}} \Big(r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} 0} - r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{n-1} 1} \Big),$$

platí $\eta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Nyní jsme připraveni Josefsonovu-Nissenzweigovu větu dokázat.

Důkaz věty 3.12. Případ 1: Nechť ℓ_1 není vnořen v X^*.

V tomto případě budeme postupovat obměnou, to jest za předpokladu, že žádná posloupnost $(x_n^*) \subset S_{X^*}$ nesplňuje $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, dokážeme, že je X konečněrozměrný. Důkaz bude veden ve dvou krocích.

Krok 1.1: Ukážeme, že pokud $(x_n^*) \subset X^*$ splňuje $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$.

Pro spor ať posloupnost $(x_n^*) \subset X^*$ konverguje k $x^* \in X^*$ slabě s hvězdičkou, ale nikoliv v normě. Pak existuje její podposloupnost (y_n^*) a nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že $\|y_n^* - x^*\| \geq \varepsilon$ pro každé n. Pak ale posloupnost

$$z_n^* = \frac{y_n^* - x^*}{\|y_n^* - x^*\|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

splňuje $(z_n^*) \subset S_{X^*}$ a $|z_n^*(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}|(y_n^* - x^*)(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pro každé $x \in X$,

aneb $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. To je spor s předpokladem.

Krok 1.2: Buď $(x_n^*) \subset X^*$ omezená posloupnost, ukážeme, že má v normě konvergentní podposloupnost.

Protože ℓ_1 není vnořen v X^*, nalezneme dle Důsledku 3.17 slabě cauchyovskou podposloupnost $(x_{n_k}^*)$. Ta je slabě s hvězdičkou konvergentní dle Lemmatu 3.15, dle Kroku 1.1 je tedy dokonce konvergentní.

Z Kroku 1.2 již plyne, že X^* je konečněrozměrný (dle charakterizace konečněrozměrných prostorů), tedy je i X konečněrozměrný. Tím je důkaz v tomto případě hotov.

Případ 2: Ať je ℓ_1 vnořen v X^*, neboli existuje posloupnost $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ a čísla $A, B > 0$ taková, že pro každé $t = (t_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ platí

$$A\|t\|_1 \geq \left\| \sum_{n=1}^\infty t_n x_n^* \right\|_{X^*} \geq B\|t\|_1. \tag{3.3}$$

Zjevně je posloupnost (x_n^*) omezená.

Krok 2.1: Pokud existuje nějaká bloková podposloupnost $(y_n^*) \sqsubseteq (x_n^*)$ splňující $y_n^* \xrightarrow{w^*} 0$, pak je onou hledanou posloupností (z_n^*) definovaná jako

$$z_n^* = \frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zapíšeme-li totiž podle definice blokové podposloupnosti

$$y_n^* = \sum_{k\in I_n} a_k^n x_k^*,$$

máme z nerovnosti (3.3)

$$\|y_n^*\| \geq B \sum_{k\in I_n} |a_k^n| = B.$$

Podobně jako v Kroku 1.1 nyní odvodíme, že $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.

Od této chvíle můžeme tedy předpokládat, že (x_n^*) nemá žádnou blokovou podposloupnost, jež by slabě s hvězdičkou konvergovala k 0. Zadefinujme

$$\varphi((y_n^*)) = \sup_{x\in S_X} \limsup_{n\to\infty} |y_n^*(x)|$$

pro každou blokovou podposloupnost $(y_n^*) \sqsubseteq (x_n^*)$. Protože předpokládáme, že žádná taková (y_n^*) nekonverguje slabě s hvězdičkou k nule, je zjevně

$$\varphi((y_n^*)) > 0, \quad (y_n^*) \sqsubseteq (x_n^*). \tag{3.4}$$

Navíc si všimněme, že φ je monotónní ve smyslu, že pro $(z_n^*) \sqsubseteq (y_n^*) \sqsubseteq (x_n^*)$ jest $\varphi((z_n^*)) \le \varphi((y_n^*))$.

Krok 2.2: Ukážeme, že existuje $\delta > 0$ a posloupnost $(y_n^*)_{n=1}^\infty \sqsubseteq (x_n^*)$ taková, že pro každou posloupnost $(z_n^*) \sqsubseteq (y_n^*)$ je $\varphi((z_n^*)) = \delta$.

Indukcí zkonstruujeme posloupnosti $(y_n^1)_{n=1}^\infty \sqsupseteq (y_n^2)_{n=1}^\infty \sqsupseteq \cdots$ a čísla $\delta_1 \ge \delta_2 \ge \cdots$. Položme $y_n^1 = x_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Buď nyní $k > 1$ dáno a předpokládejme, že již máme definovanou posloupnost $(y_n^{k-1})_{n=1}^\infty$. Položme

$$\delta_k = \inf_{(y_n^*) \sqsubseteq (y_n^{k-1})} \varphi((y_n^*)).$$

Pokud je $k > 2$, zjevně z tranzitivity relace $\sqsubseteq$ plyne, že $\delta_k \ge \delta_{k-1}$. Nalezneme blokovou podposloupnost $(y_n^k)_{n=1}^\infty \sqsubseteq (y_n^{k-1})$ takovou, že platí

$$\varphi((y_n^k)) < \delta_k + 2^{-k}.$$

Nyní, maje definovány posloupnosti (y_n^k) a čísla δ_k, pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $y_n^* = y_n^n$ a označme $\delta = \lim_{k\to\infty} \delta_k$ (limita existuje díky monotonii). Tvrdíme, že (y_n^*) je hledaná posloupnost. Povšimněme si, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $T^k((y_n^*)) \sqsubseteq (y_n^k)$, kde T značí operátor posunutí jako v Definici 1.1. Odkud dle definice posloupnosti (y_n^k) a čísla δ_{k+1} dostáváme

$$\delta_{k+1} \le \varphi\Big(T^k((y_n^*))\Big) = \varphi((y_n^*)) \le \varphi((y_n^k)) < \delta_k + 2^{-k}$$

(přičemž jsme zároveň využili, že hodnota φ závisí jen na limitním chování vstupní posloupnosti). Navíc každá bloková podposloupnost $(z_n^*) \sqsubseteq (y_n^*)$ splňuje $T^k((z_n^*)) \sqsubseteq T^k((y_n^*)) \sqsubseteq (y_n^k)$, pročež dle předchozího platí

$$\delta_{k+1} \le \varphi((z_n^*)) \le \varphi((y_n^*)) < \delta_k + 2^{-k}.$$

Limitním přechodem pro $k \to \infty$ získáme rovnost $\varphi((z_n^*)) = \varphi((y_n^*)) = \delta$ pro každou blokovou podposloupnost $(z_n^*) \sqsubseteq (y_n^*)$. Z (3.4) plyne, že platí $\delta > 0$.

Krok 2.3: Zkonstruujeme podposloupnost $(z_n^*)_{n=3}^\infty$ posloupnosti (y_n^*) z Kroku 2.2 a posloupnost $(x_k)_{k=1}^\infty \subset S_X$ tak, aby pro každé $k \in \mathbb{N}$ platilo

$$z_n^*(x_k) \ge \frac{\delta}{2} \text{ pro } n \in \bigcup_{i=1}^\infty N_{2i+1}^{k-1}, \qquad z_n^*(x_k) \le -\frac{\delta}{2} \text{ pro } n \in \bigcup_{i=1}^\infty N_{2i+2}^{k-1}. \tag{3.5}$$

Posloupnost $(z_n^*)_{n=3}^\infty$ budeme konstruovat postupně, a to indukcí podle $k \in \mathbb{N}$. Na začátku položme $w_n^1 = y_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. V k-tém kroku posléze definujeme jistou podposloupnost (w_n^{k+1}) posloupnosti (w_n^k) a označíme některé funkcionály z posloupnosti (y_n^*) jako $z_{2^k+1}^*, z_{2^k+2}^*, \ldots, z_{2^{k+1}}^*$. Indukčním předpokladem bude, že pro každé $l \in \mathbb{N}$, $l < k$, platí

$$w_n^k(x_l) \geq \frac{\delta}{2} \text{ pro } n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{2i-1}^{l-1}, \qquad w_n^k(x_l) \leq -\frac{\delta}{2} \text{ pro } n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{2i}^{l-1}.$$

Pro $k = 1$ indukční předpoklad platí triviálně.

Buď tedy dáno $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že máme definovanou podposloupnost (w_n^k) posloupnosti (y_n^*) splňující indukční předpoklad a prvky $z_3^*, \ldots, z_{2^k}^*$. Položme

$$u_i = \frac{1}{2^k}\left(\sum_{n \in N_{2i+1}^{k-1}} w_n^k - \sum_{n \in N_{2i+2}^{k-1}} w_n^k\right), \quad i \in \mathbb{N},$$

pak $(u_i) \sqsubseteq (y_n^*)$, pročež $\varphi((u_i)) = \delta$. Nalezneme proto $x_k \in S_X$ takové, že platí $\limsup_{i\to\infty}|u_i(x_k)| > (1 - 2^{-2k-1})\delta$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že též platí $\limsup_{i\to\infty} u_i(x_k) > (1 - 2^{-2k-1})\delta$ (jinak namísto x_k zvolíme $-x_k$). Nalezněme podposloupnost $\left(u_{i_j}\right)$ posloupnosti (u_i) takovou, že pro $j \in \mathbb{N}$ platí $u_{i_j}(x_k) \geq (1 - 2^{-2k-1})\delta$. Navíc, protože jest

$$\limsup_{n\to\infty} w_n^k(x_k) \leq \varphi((w_n^k)) = \delta,$$

můžeme jistě zároveň žádat, aby pro každé $n \geq i_1$ platilo $\left|w_n^k(x_k)\right| \leq (1 + 2^{-k-1})\delta$.

Nyní pro $j \in \mathbb{N}$ a $n \in N_{2i_j+1}^{k-1}$ platí

$$\begin{aligned} w_n^k(x_k) &= 2^k u_{i_j}(x_k) - \sum_{\substack{m \in N_{2i_j+1}^{k-1} \\ m \neq n}} w_m^k(x_k) + \sum_{m \in N_{2i_j+2}^{k-1}} w_m^k(x_k) \geq \\ &\geq 2^k u_{i_j}(x_k) - \sum_{\substack{m \in N_{2i_j+1}^{k-1} \cup N_{2i_j+2}^{k-1} \\ m \neq n}} \left|w_m^k(x_k)\right| \geq \\ &\geq 2^k(1 - 2^{-2k-1})\delta - (2^k - 1)(1 + 2^{-k-1})\delta = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Obdobně lze ukázat, že pro $j \in \mathbb{N}$ a $n \in N_{2i_j+2}^{k-1}$ platí $w_n^k(x_k) \leq -\frac{\delta}{2}$.

Buď nyní $(w_n^{k+1})_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost (w_n^k) tvořená těmi prvky w_n^k, kde $n \in N_{2i_j+1}^{k-1} \cup N_{2i_j+2}^{k-1} = N_{i_j+1}^k$, $j \in \mathbb{N}$, a položme

$$z_{2^k+1}^* = w_1^{k+1}, z_{2^k+2}^* = w_2^{k+1}, \ldots, z_{2^{k+1}}^* = w_{2^k}^{k+1}.$$

Díky tomu, že řetězec podposloupností $(w_n^1) \supset \cdots \supset (w_n^k)$ vzniká vždy vybíráním celých bloků daných indexy v $N_{i_j+1}^k$, jsou zachovány vlastnosti z předchozích iterací. Pro libovolné $l < k$ a $i \in \mathbb{N}$ vznikly prvky w_n^k na pozicích s indexy $n \in N_i^l$ jako kopie prvků w_n^l na pozicích s indexy $n \in N_{i_j+1}^l$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$. Odsud plyne, že i posloupnost (w_n^{k+1}) splňuje indukční předpoklad a funkcionály $z_{2^k+1}^*, z_{2^k+2}^*, \ldots, z_{2^{k+1}}^*$ splňují všechny podmínky kladené na ně nerovnicemi (3.5).

Krok 2.4: Mějme posloupnost (z_n^*) z Kroku 2.3. Definujme operátor $H\colon X \to \ell_\infty$ předpisem $Hx = (z_n^*(x))_{n=1}^\infty, x \in X$. Posloupnost $(z_n^*(x))$ je omezená, neboť (z_n^*) je podposloupnost omezené posloupnosti (x_n^*).

Zvolme libovolnou Banachovu limitu B a pro $n \in \mathbb{N}$ definujme spojitý lineární funkcionál $w_n^*(x) = B(\lambda_n \cdot Hx), x \in X$. Ukážeme, že platí $w_n^* \xrightarrow{w^*} 0$. Je-li $x \in X$ dáno, položme pro $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$

$$r_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} = B(\mu_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n} \cdot Hx)$$

(přičemž bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je $\|Hx\|_\infty = 1$). Pak dle Lemmatu 3.23 a definice posloupností $\mu_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}$ jsou splněny předpoklady Lemmatu 3.24. Zjevně jsou čísla η_n z Lemmatu 3.24 rovna hodnotám $w_n^*(x)$. Tím je konvergence $w_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ ověřena.

Nakonec si stačí uvědomit, že díky nerovnostem (3.5) platí

$$w_n^*(x_n) \geq B\left(\frac{\delta}{2}\mathbb{1}\right) = \frac{\delta}{2},$$

odkud plyne, že norma každého funkcionálu w_n^* jest alespoň $\delta/2$. To nám umožní použít stejnou myšlenku jako v Kroku 1.1, abychom si uvědomili, že posloupnost normovaných funkcionálů $\frac{w_n^*}{\|w_n^*\|}$ taktéž konverguje slabě s hvězdičkou k 0. Toť zdárný konec důkazu. $\square$

Seznam použité literatury

[1] Behrends, E. (1994). New proofs of Rosenthal's ℓ^1–theorem and the Josefson–Nissenzweig theorem. *arXiv: Functional Analysis*. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15347322.

[2] Cesàro, E. (1888). Sur la convergence des séries. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, **3e série, 7**, 49–59. URL http://www.numdam.org/item/NAM_1888_3_7__49_1/.

[3] Hewitt, E. a Ross, K. A. (1979). *Abstract Harmonic Analysis*, volume 1 of *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer-Verlag New York, Inc., second edition. ISBN 0-387-94190-8.

[4] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition. ISBN 0-07-054234-1.

[5] Rudin, W. (1991). *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition. ISBN 0-07-054236-8.

[6] Scott, B. M. (31.8.2012). Why is this quotient space not Hausdorff? Mathematics Stack Exchange. URL https://math.stackexchange.com/q/189402. Accessed 22.3.2024.

[7] Semenov, E. M. a Sukochev, F. A. (2010). Invariant Banach limits and applications. *Journal of Functional Analysis*, **259**(6), 1517–1541. ISSN 0022-1236,1096-0783. doi: 10.1016/j.jfa.2010.05.011. URL https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.05.011.

[8] Sofi, M. A. (2021). Banach limits: some new thoughts and perspectives. *The Journal of Analysis*, **29**(2), 591–606. ISSN 0971-3611,2367-2501. doi: 10.1007/s41478-019-00184-2. URL https://doi.org/10.1007/s41478-019-00184-2.

[9] Stanovský, D. (2010). *Základy algebry*. Matfyzpress, Praha, first edition. ISBN 978-80-7378-105-7.

[10] Sucheston, L. (1967). Banach limits. *American Mathematical Monthly*, **74**, 308–311. ISSN 0002-9890,1930-0972. doi: 10.2307/2316038. URL https://doi.org/10.2307/2316038.