MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Petr

Ball-Evansův aproximační problém v jedné dimenzi

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Děkuji svému vedoucímu práce profesoru Stanislavu Henclovi za mně věnovaný čas, trpělivost a skvělé vysvětlování složitých pojmů.

Děkuji rovněž všem, kteří si pročetli mou práci, za věcné i stylistické připomínky. Dále chci poděkovat své rodině za plnou podporu mého studia a svým blízkým přátelům za morální podporu v časech dobrých i špatných.

Název práce: Ball-Evansův aproximační problém v jedné dimenzi

Autor: Jakub Petr

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Ball-Evansův aproximační problém je vysoce studovaný v oblasti geometrické teorie funkcí. Možnost aproximace homeomorfismů pomocí difeomorfismů by mohla mít mnohé důsledky např. v teorii regularity minimizérů či v metodě konečných prvků. Nedávno byl tento problém vyřešen ve dvou dimenzích, ale ve fyzikálně nejzajímavějších třech dimenzích zůstává stále otevřený.
V této práci studujeme následující dva problémy. Zaprvé, je-li daný homeomorfismus $f \in W^{k,p}((a,b))$ pro $1 \leq p < \infty$, lze jej aproximovat v $||\cdot||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))}$ s libovolně malou chybou pomocí difeomorfismů? Zadruhé, máme-li $1 \leq p, q < \infty$ a homeomorfismus $f \in W^{1,p}((a,b))$ takový, že rovněž $f^{-1} \in W^{1,q}((c,d))$, lze najít posloupnost difeomorfismů $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí

$$||f_n - f||_{\mathcal{W}^{1,p}((a,b))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{a} \quad \left|\left|f_n^{-1} - f^{-1}\right|\right|_{\mathcal{W}^{1,q}((c,d))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0?$$

Na obě otázky uvádíme kladnou odpověď, přičemž na druhou není známa odpověď už ve dvou dimenzích.

Klíčová slova: Sobolevovy prostory, homeomorfismy, difeomorfismy

Title: Ball-Evans approximation problem in one dimension

Author: Jakub Petr

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Ball-Evans aproximation problem is a highly studied one in Geometric function theory. Approximation of homeomorphisms by diffeomorphisms could have many implications e.g. in the theory of regularity of minimizers or in Finite element method. Recently, this problem was solved in two dimensions. However, in 3D, which is the physically most interesting case, it remains open.
In this thesis, we study the following two problems. Firstly, for some $1 \leq p < \infty$ and a given homeomorphism $f \in W^{k,p}((a,b))$, can we approximate it by diffeomorphisms in $||\cdot||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))}$ with an arbitrarily small error? Secondly, for some $1 \leq p, q < \infty$ and a given homeomorphism $f \in W^{1,p}((a,b))$ such that also $f^{-1} \in W^{1,q}((c,d))$, can we find a sequence of diffeomorphisms $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that

$$||f_n - f||_{\mathcal{W}^{1,p}((a,b))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{and} \quad \left|\left|f_n^{-1} - f^{-1}\right|\right|_{\mathcal{W}^{1,q}((c,d))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0?$$

We show positive results for both problems. The latter one is not known in higher dimensions.

Keywords: Sobolev spaces, homeomorphisms, diffeomorphisms

Obsah

Úvod

Ball-Evansův aproximační problém se zabývá otázkou, zdali jsou difeomorfismy husté v homeomorfismech v Sobolevových prostorech. Tato otázka se dá rozdělit do dvou kroků. Zaprvé jestli lze každý homeomorfismus v $W^{1,p}(U,\mathbb{R}^n)$ (kde U značí otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^n$ a $1 \leq p < \infty$) aproximovat po částech afinními funkcemi ([2, 3]). Druhým krokem je poté zkoumat, jestli se dají tyto funkce zhladit tak, abychom dosáhli aproximace difeomorfismy. Pozitivní výsledky jsou známy pro $n = 2$ ([7, 9]), naopak pro $n \geq 4$ jsou známy protipříklady, a to když $p < \lfloor n/2 \rfloor$ ([5, 8]). Cílem této práce je zaměřit se na speciální případy Ball-Evansova problému a potvrdit jeho pozitivní výsledky. V Kapitole 1 si připomeneme důležité definice a věty známé ze základních kurzů matematické analýzy, teorie míry a integrálu a funkcionální analýzy. Na ně navážeme v Kapitole 2, kde uvedeme výsledky, které budeme využívat v následujících kapitolách. V Kapitole 3 dokážeme pozitivní výsledek v případě $n = 1$ a prozkoumáme také aproximování homeomorfismu v prostorech $W^{k,p}((a,b))$ pro $k \in \mathbb{N}$ větší než 1. Hlavním výsledkem Kapitoly 3 je následující věta.

Věta 0.1. *Nechť (a,b) je omezený interval, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ a $f \in W^{k,p}((a,b))$ je homeomorfismus. Poté pro dané $\varepsilon > 0$ existuje difeomorfismus $h_\varepsilon \in W^{k,p}((a,b))$ takový, že $||h_\varepsilon - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} < \varepsilon$.*

Nakonec v kapitole 4 dokážeme kladný výsledek v případě, kdy také inverzní funkce náleží do Sobolevova prostoru $W^{1,q}((a,b))$.

Věta 0.2. *Nechť $f : [a,b] \xrightarrow{na} [c,d]$ je homeomorfismus a $1 \leq p, q < \infty$ jsou taková, že $f \in W^{1,p}((a,b))$ a $f^{-1} \in W^{1,q}((c,d))$. Pak existují funkce $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost difeomorfismů, pro kterou platí*

$$||f_n - f||_{\mathcal{W}^{1,p}((a,b))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

a $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost difeomorfismů, pro kterou platí

$$\left|\left|f_n^{-1} - f^{-1}\right|\right|_{\mathcal{W}^{1,q}((c,d))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1. Základní definice a věty

Pro začátek si připomeňme základní definice a věty.

1.1 Reálná analýza

Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Poté symbolem $f'(x)$ budeme značit derivaci funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$ a symbolem $f^{(i)}(x)$ myslíme i-tou derivaci funkce f v bodě x (za předpokladu, že existuje). Symboly $f'_+(x)$, $f^{(i)}_+(x)$ značíme příslušné derivace zprava a symboly $f'_-(x)$, $f^{(i)}_-(x)$ derivace zleva.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Množina $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$, označuje k-krát spojitě diferencovatelné funkce $f : U \to \mathbb{R}^m$. V případě $m = 1$ budeme zkráceně psát $f \in \mathcal{C}^k(U)$. Bude-li z kontextu zřejmé, o jaké $m \in \mathbb{N}$ a jaký definiční obor U se jedná, píšeme zkráceně pouze $f \in \mathcal{C}^k$ nebo říkáme, že funkce f je *třídy* $\mathcal{C}^k$.

Nechť E je podmnožina $\mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Pak píšeme

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} |x - y| .$$

Symbolem λ^n budeme značit Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a mějme funkci $f : U \to \mathbb{R}$. Poté pro $i \in \{1, \dots, n\}$ budeme symbolem $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ značit parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné. Dále pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ označme $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Parciální derivaci funkce f podle multiindexu α budeme značit

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definice 1.1. *Nechť jsou $U \subset \mathbb{R}^n$ a $V \subset \mathbb{R}^m$ otevřené množiny a mějme funkci $f : U \xrightarrow{na} V$. Předpokládejme, že existuje její inverzní funkce $f^{-1} : V \xrightarrow{na} U$ definovaná na celém V. Pokud platí, že obě funkce f a f^{-1} jsou spojité, pak nazýváme funkci f* homeomorfismus. *Jsou-li obě funkce dokonce třídy $\mathcal{C}^1$, pak funkci f nazýváme* difeomorfismus.

Definice 1.2. *Nechť $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Poté* konvoluce *funkcí f a g, značená $f * g$, je pro $x \in \mathbb{R}^n$ definována předpisem*

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(y) g(x - y) \, d\lambda^n(y),$$

pokud tento integrál existuje.

Věta 1.3 ([13], §5.2.10.)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je spojitá zprava v bodě a a existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f'(x).$$

Analogicky, když f je spojitá zleva v bodě a a existuje $\lim_{x \to a_-} f'(x)$, pak existuje $f'_-(a)$ a platí

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} f'(x).$$

Věta 1.4 (Aproximace měřitelných funkcí, Věta 16.1.3 b) z [13])**.** *Nechť* $1 \leq p < \infty$ *a ať* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je taková funkce, že* $|f|^p$ *je integrovatelná na* $\mathbb{R}$*. Poté pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje interval* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a spojitá funkce* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *taková, že* $g = 0$ *vně* $[a, b]$ *a* $||f - g||_p < \varepsilon$*.*

Definice 1.5 ([10], §3.1.)**.** *Nechť* $I \subset \mathbb{R}$ *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je funkce. Funkci* f *nazveme* absolutně spojitou *na* I*, pokud pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $a_1 < b_1 \leq a_2 < \ldots \leq a_n < b_n$ *takové, že*

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta,$$

platí

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Explicitně zformulujme ještě snadné pozorování, které se nám bude hodit.

Pozorování 1.6. *Nechť* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je funkce třídy* $\mathcal{C}^1$*. Poté je funkce* f *absolutně spojitá.*

1.2 Teorie míry

Definice i věty z této části jsou převzaty z [14] s pozměněným značením.

Definice 1.7. *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou. Poté řekneme, že vlastnost* V *platí* pro skoro všechna $x \in X$*, pokud existuje množina* $N \subset X$ *taková, že* $\mu(N) = 0$ *a vlastnost* V *platí pro všechna* $x \in X \setminus N$*. Často budeme „skoro všechna“ zkracovat do podoby „s.v.“.*

Věta 1.8 (Fatouovo lemma)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou a nechť jsou funkce* f_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, nezáporné měřitelné na* X*. Poté platí*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x).$$

Věta 1.9 (O spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou,* T *je metrický prostor,* $\alpha_0 \in T$ *a* $f : X \times T \to \mathbb{R}$*. Dále ať*

a) pro všechna $\alpha \in T$ *platí, že* $x \mapsto f(x, \alpha)$ *je měřitelná,*

b) pro všechna $x \in X$ *platí, že* $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ *je spojitá v* α_0*,*

c) existuje $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *taková, že pro všechna* $x \in X$ *a pro všechna* $\alpha \in T$ *platí* $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$*.*

Dále definujme funkci $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, d\mu(x)$ *pro* $\alpha \in T$*. Poté platí, že funkce* F *je spojitá v* α_0*.*

Věta 1.10 (Záměna integrálu a derivace)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou,* $I \subset \mathbb{R}$ *je otevřený interval a* $f : X \times I \to \mathbb{R}$*. Dále ať* $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\, d\mu(x)$*. Pokud* *i) pro všechna $\alpha \in I$ platí, že $x \mapsto f(x, \alpha)$ je měřitelná,*

ii) pro všechna $x \in X$ a pro všechna $\alpha \in I$ platí, že $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)$ existuje vlastní,

iii) existuje $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ taková, že pro všechna $x \in X$ a pro všechna $\alpha \in I$ platí $\left|\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)\right| \leq g(x)$,

iv) existuje $\alpha_0 \in I$ takové, že $F(\alpha_0) \in \mathbb{R}$,

potom pro všechna $\alpha \in I$ platí, že $F(\alpha) \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní derivace $F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)\, d\mu(x)$.

Na závěr si připomeňme jednu větu ze základního kurzu pravděpodobnosti a matematické statistiky.

Věta 1.11 (Cantelliho věta)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu(X) < \infty$. Dále buď $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ posloupnost množin, pro kterou platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Potom

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 0.$$

Poznámka 1.12. *Tradičně se Věta 1.11 vyslovuje pro pravděpodobnostní míry, tj. když $\mu(X) = 1$. Důkaz ovšem proběhne stejně pro libovolnou konečnou míru.*

1.3 $\mathcal{L}^p(X)$ prostory

Definice 1.13. *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Poté* esenciální supremum *funkce f je*

$$||f||_{\infty} := \inf\{C : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

Definice 1.14. *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Mějme měřitelnou funkci $f : X \to \mathbb{R}$. Poté pro $1 \leq p < \infty$ definujeme* p-normu *funkce f jako*

$$||f||_{\mathcal{L}^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Pro $p = \infty$ je ∞-norma totéž, co esenciální supremum. Pokud bude z kontextu jasné, o který prostor s mírou se jedná, budeme psát zkráceně $||f||_p = ||f||_{\mathcal{L}^p(X,\mu)}$.

Množinu všech měřitelných funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, pro něž platí $||f||_p < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, značíme $\mathcal{L}^p(X, \mu)$. V případě, že X je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a μ je Lebesgueova míra, pak píšeme zkráceně $\mathcal{L}^p(X)$.

Pro $X \subset \mathbb{R}^n$ borelovskou budeme symbolem $\mathcal{L}^p_{loc}(X)$ myslet množinu funkcí f takových, že pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset X$ platí, že $f \in \mathcal{L}^p(K)$.

Věta 1.15 ([1], §2.16)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a nechť $1 \leq p \leq \infty$. Uvažme na množině $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ relaci ekvivalence $\equiv$, kde $f \equiv g$ právě tehdy, pokud $f = g$ pro s.v. $x \in X$. Uvažme nyní množinu všech takovýchto tříd ekvivalencí a označme ji $L^p(X, \mu)$. Poté je $\left(L^p(X, \mu), ||\cdot||_p\right)$ Banachův prostor.*

Věta 1.16 (Hölderova nerovnost, [1], §2.4)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou a pro* $1 \leq p,q \leq \infty$ *platí* $1/p + 1/q = 1$. *Ať* $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ *a* $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$. *Pak* $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ *a navíc*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q \, .$$

Věta 1.17 ([10], §B.120)**.** *Nechť* $1 \leq p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $f \in \mathcal{L}^p(U)$. *Pak pro s.v.* $x \in U$ *platí*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p d\lambda^n(y) = 0.$$

Poznámka 1.18. *Body* $x \in U \subset \mathbb{R}^n$*, které splňují pro funkci* $f \in \mathcal{L}^p(U)$ *tvrzení Věty 1.17, budeme nazývat* Lebesgueovy body*.*

1.4 Slabé derivace a Sobolevovy prostory

Následující značení je převzato z [6], §5.2.1. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Poté symbolem $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ značíme množinu všech nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem. Prvky $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ budeme nazývat *testovací funkce.*

Definice 1.19 ([4], §2.3.1)**.** *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená, mějme funkci* $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U)$ *a nechť* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *je multiindex. Poté* derivací ve smyslu distribuce *nebo* slabou derivací *funkce* f *řádu* $|\alpha|$ *je taková funkce* $g \in \mathcal{L}^1_{loc}(U)$*, že pro všechny testovací funkce* ϕ *platí*

$$\int_U f(x) \partial^\alpha \phi(x) \, d\lambda^n(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_U g(x) \phi(x) d\lambda^n(x).$$

Pokud takováto funkce g *existuje, budeme ji značit jako* $D^\alpha f$. *V případě* $|\alpha| = 1$ *budeme psát* $g = D_i f$*, kde* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *je jediný takový index, že* $\alpha_i = 1$.

Pokud v Definici 1.19 uvažujeme $n = 1$, pak pro všechny multiindexy $\alpha = (j)$, kde j je nezáporné celé číslo, značíme $D^j f = D^{(j)} f$.

Definice 1.20 ([1], §3.2 b))**.** *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a nechť* $1 \leq p \leq \infty$. Sobolevův prostor $\mathcal{W}^{1,p}(U)$ *definujeme jako množinu funkcí* $f \in \mathcal{L}^p(U)$ *takových, že pro jejich slabé derivace platí* $D_i f \in \mathcal{L}^p(U)$ *pro všechna* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Analogicky pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *definujeme Sobolevův prostor* $\mathcal{W}^{k,p}(U)$ *jako množinu funkcí* $f \in \mathcal{L}^p(U)$ *takových, že pro všechny multiindexy* α*, pro které platí* $|\alpha| \leq k$*, platí* $D^\alpha f \in \mathcal{L}^p(U)$.

Definice 1.21 ([1], §3.1)**.** *Nechť* $U \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $1 \leq p \leq \infty$. *Pro* $f \in \mathcal{W}^{k,p}(U)$ *definujeme* k,p-normu $||\cdot||_{\mathcal{W}^{k,p}(U)}$ *funkce* f *následovně. Pokud* $p < \infty$*, pak*

$$||f||_{\mathcal{W}^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_p^p \right)^{1/p}.$$

Pokud $p = \infty$*, poté*

$$||f||_{\mathcal{W}^{k,\infty}(U)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_\infty \, .$$

Věta 1.22 ([1], §3.3). *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Stejně jako ve Větě 1.15 uvažujme $W^{k,p}(U)$ množinu všech tříd ekvivalence $\equiv$ na množině $\mathcal{W}^{k,p}(U)$. Poté dvojice $\left(W^{k,p}(U), ||\cdot||_{\mathcal{W}^{k,p}(U)}\right)$ je Banachův prostor.*

Prvkům jednotlivých tříd $f \in W^{k,p}(U)$ budeme říkat *reprezentanti* f. Často pak nebudeme explicitně rozlišovat mezi třídami a jejich konkrétními reprezentanty.

Na závěr kapitoly uveďme věty, které dávají do souvislosti absolutně spojité funkce a Sobolevovy prostory.

Věta 1.23 ([10], §3.29.). *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak je f absolutně spojitá právě tehdy, pokud zároveň platí, že*

1) její derivace f' existuje skoro všude na I a splňuje $f' \in \mathcal{L}^1_{loc}(I)$,

2) pro každé $\varepsilon > 0$ najdeme takové $\delta > 0$, že pro každou měřitelnou $F \subset I$ s $\lambda(F) < \delta$ platí

$$\int_F |f'(t)|\, dt < \varepsilon,$$

3) pro každé $x, y \in I$ platí

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(t) dt.$$

Věta 1.24 ([10], §7.17.). *Nechť $U \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $k \in \mathbb{N}$ a nechť $1 \leq p \leq \infty$. Poté funkce $f : U \to \mathbb{R}$ náleží do $W^{k,p}(U)$ právě tehdy, když existuje reprezentant f třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ takový, že funkce $f^{(k-1)}$ je absolutně spojitá a $f^{(i)} \in \mathcal{L}^p(U)$ pro všechna $i \in \{0, \ldots, k\}$.*

Zformulujme explicitně užitečný důsledek, který vychází z jednoznačnosti slabé derivace ([10], §7.15.) a Věty 1.24.

Důsledek 1.25. *Nechť $U \subset \mathbb{R}$ je otevřená, $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p \leq \infty$. Uvažme funkci $f \in \mathcal{W}^{k,p}(U)$. Pak pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí, že $D^j f = f^{(j)}$, tedy že slabá derivace řádu j funkce f se rovná klasické derivaci skoro všude na U.*

2. Známé výsledky

2.1 Vlastnosti $\mathcal{L}^p$ prostorů

Pro začátek si uveďme jedno velmi specifické jednoduché pozorování, které se nám bude hodit.

Pozorování 2.1. *Nechť $1 \leq p \leq \infty$ a $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dále nechť $f \in \mathcal{L}^p((a,b))$. Pak $f \in \mathcal{L}^1((a,b))$.*

Důkaz. Stačí si všimnout, že platí $1 \in \mathcal{L}^q((a,b))$, kde jako q volíme takové číslo, že $1/p + 1/q = 1$. Potom dle Věty 1.16 platí $1f = f \in \mathcal{L}^1((a,b))$. $\square$

Motivací pro tuto pasáž je uvést do kontextu různé způsoby konvergence funkcí v $\mathcal{L}^p$ prostorech. Následující lemma je převzato z §3.2. v [12].

Lemma 2.2. *Nechť $1 < p < \infty$ a nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Poté existuje taková konstanta $C_\varepsilon > 0$ a nezáporná funkce $\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí*

$$||a|^p - |a-b|^p - |b|^p| \leq C_\varepsilon |a-b|^p + \delta(\varepsilon) |b|^p . \tag{2.1}$$

Důkaz. Uvažujme funkci $\phi : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ s předpisem

$$\phi(x) = \frac{||x|^p - |x-1|^p - 1|}{|x-1|^{p-1}}.$$

S využitím Věty o střední hodnotě pro funkci $g(t) = |t|^p$ najdeme pro $x > 2$ číslo $\xi_x \in (x-1, x)$ takové, že

$$g'(\xi_x) = p\xi_x^{p-1} = x^p - (x-1)^p,$$

a v případě $x < 0$ najdeme $\xi_x \in (x-1, x)$, že

$$g'(\xi_x) = -p|\xi_x|^{p-1} = |x|^p - |x-1|^p.$$

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \phi(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{|p\xi_x^{p-1} - 1|}{(x-1)^{p-1}} = p, \\
\lim_{x\to-\infty} \phi(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{p|\xi_x|^{p-1} + 1}{(1-x)^{p-1}} = p.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Tedy pro dané $\varepsilon > 0$ můžeme rozdělit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ do dvou množin. Pokud platí $|x-1| > \varepsilon$, pak dle (2.2) a ze spojitosti funkce ϕ na intervalech $(-\infty, 1-\varepsilon]$ a $[1+\varepsilon, \infty)$ najdeme konstantu K_ε takovou, že

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leq K_\varepsilon |x-1|^{p-1} .$$

Pokud poté položíme $C_\varepsilon = K_\varepsilon/\varepsilon$, tak dostáváme pro $|x-1| > \varepsilon$ odhad

$$K_\varepsilon |x-1|^{p-1} \leq C_\varepsilon |x-1|^p ,$$

a tedy

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leq C_\varepsilon \, |x-1|^p .$$

Dále pro $|x-1| \leq \varepsilon$ máme z trojúhelníkové nerovnosti

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leq \varepsilon^p + \sup_{|t-1|\leq\varepsilon} ||t|^p - 1| .$$

Označme $\nu(\epsilon) = \sup_{|t-1|\leq\varepsilon} ||t|^p - 1|$. Sečtením obou odhadů dostáváme

$$||x|^p - |x-1|^p - 1| \leq C_\varepsilon \, |x-1|^p + \varepsilon^p + \nu(\epsilon) \tag{2.3}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dále si všimněme, že pokud je jedno z a, b rovno nule, pak je tvrzení triviální. Pro $a, b \neq 0$ uvažme $x = \frac{a}{b}$ a položme $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^p + \nu(\varepsilon)$. Po dosazení do (2.3) a roznásobení dostáváme

$$||a|^p - |a-b|^p - |b|^p| \leq C_\varepsilon \, |a-b|^p + \delta(\varepsilon) \, |b|^p .$$

□

Díky tomuto lemmatu můžeme dokázat následující důležité lemma, jehož důkaz je převzat z [15] a náležitě upraven.

Lemma 2.3 (Brezis-Lieb)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *je prostor s mírou, nechť* $1 \leq p < \infty$ *a nechť* $f_n \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, *je posloupnost funkcí, která konverguje* μ*-s.v. k funkci* f, *a navíc existuje konstanta* $C > 0$ *taková, že pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $||f_n||_p \leq C$. *Poté* $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \left(||f_n||_p^p - ||f_n - f||_p^p \right) = ||f||_p^p . \tag{2.4}$$

V případě $p = 1$ *můžeme podmínku* $||f_n||_1 \leq C$ *nahradit slabším požadavkem* $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Důkaz. Dle Věty 1.8 platí

$$||f||_p \leq \liminf_{n\to\infty} ||f_n||_p \leq C,$$

z čehož plyne $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Poté dle Lemmatu 2.2 najdeme taková čísla $\delta(\varepsilon) \geq 0$ a $C_\varepsilon > 0$, že pro každé $x \in X$ platí

$$||f_n(x)|^p - |f(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p| \leq C_\varepsilon |f(x)|^p + \delta(\varepsilon)|f(x) - f_n(x)|^p, \tag{2.5}$$

kde jsme do Lemmatu 2.2 dosadili $a = f_n(x)$ a $b = f(x) - f_n(x)$. Nyní definujme funkci $h_{n,\varepsilon}$ předpisem

$$h_{n,\varepsilon}(x) = \delta(\varepsilon)|f(x) - f_n(x)|^p + C_\varepsilon|f(x)|^p - ||f_n(x)|^p - |f(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p|$$

pro všechna $x \in X$. Díky (2.5) vidíme, že $h_{n,\varepsilon} \geq 0$. Jelikož pro s.v. $x \in X$ platí $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, tak

$$h_{n,\varepsilon}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} C_\varepsilon|f(x)|^p$$

pro s.v. $x \in X$, a tedy díky Větě 1.8

$$\begin{aligned}
C_\varepsilon \left|\left|f\right|\right|_p^p &= \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} h_{n,\varepsilon}\right) d\mu(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_{n,\varepsilon}(x)\, d\mu(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X \left(\delta(\varepsilon) \left|f_n(x) - f(x)\right|^p + C_\varepsilon \left|f(x)\right|^p\right) d\mu(x) \\
&\quad - \limsup_{n\to\infty} \int_X \left|\left|f_n(x)\right|^p - \left|f(x) - f_n(x)\right|^p - \left|f(x)\right|^p\right| d\mu(x) \\
&\leq \delta(\varepsilon)(2C)^p + C_\varepsilon \left|\left|f\right|\right|_p^p \\
&\quad - \limsup_{n\to\infty} \int_X \left|\left|f_n(x)\right|^p - \left|f(x) - f_n(x)\right|^p - \left|f(x)\right|^p\right|\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Úpravou dostáváme pro libovolné $\varepsilon > 0$ nerovnost

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X \left|\left|f_n(x)\right|^p - \left|f(x) - f_n(x)\right|^p - \left|f(x)\right|^p\right|\, d\mu(x) \leq \delta(\varepsilon)(2C)^p,$$

a jelikož jsme volili $\delta(\varepsilon)$ z Lemmatu 2.2, aby $\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, tak nutně platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left|\left|f_n\right|\right|_p^p - \left|\left|f_n - f\right|\right|_p^p\right) = \left|\left|f\right|\right|_p^p.$$

V případě $p = 1$ stačí zvolit $\delta(\varepsilon) = 0$ a $C_\varepsilon = 2$, čímž je snadno splněna nerovnost (2.1), a tedy je podmínka $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ postačující. $\square$

Jednoduchým důsledkem je následující užitečné tvrzení, taktéž zmíněné v [15].

Věta 2.4. *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, nechť $1 \leq p < \infty$ a nechť $f_n \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost funkcí, která konverguje μ-s.v. k funkci f, a navíc existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left|\left|f_n\right|\right|_p \leq C$. Poté platí, že*

$$\left|\left|f_n - f\right|\right|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.6}$$

právě tehdy, když

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\left|f_n\right|\right|_p \leq \left|\left|f\right|\right|_p. \tag{2.7}$$

V případě $p = 1$ stačí požadovat $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Důkaz. Nejprve nechť platí (2.6). Pak z aritmetiky limit pro lim sup a rovnosti (2.4) z Lemmatu 2.3 dostáváme

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left|\left|f_n\right|\right|_p^p &= \limsup_{n\to\infty} \left(\left|\left|f_n\right|\right|_p^p - \left|\left|f_n - f\right|\right|_p^p\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left|\left|f_n\right|\right|_p^p - \left|\left|f_n - f\right|\right|_p^p\right) = \left|\left|f\right|\right|_p^p,
\end{aligned}$$

a tedy ze spojitosti p-té odmocniny také

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\left|f_n\right|\right|_p = \left|\left|f\right|\right|_p,$$

tudíž nerovnost (2.7) je splněna.

Dále nechť platí (2.7). Dle Věty 1.8, spojitosti p-té odmocniny a toho, že pro μ-s.v. $x \in X$ platí $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, dostáváme, že

$$\liminf_{n\to\infty} ||f_n||_p \geq ||f||_p .$$

Spolu s (2.7) tedy dostáváme sérii nerovností

$$\limsup_{n\to\infty} ||f_n||_p \leq ||f||_p \leq \liminf_{n\to\infty} ||f_n||_p ,$$

z níž spolu se standardní nerovností mezi lim sup a lim inf plyne, že existuje

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n||_p = ||f||_p . \tag{2.8}$$

Tvrdíme, že poté nutně platí (2.6). Pro spor předpokládejme, že tomu tak není. Pak bychom našli takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ existuje nějaké $n \geq N$ takové, že $||f_n - f||_p \geq \varepsilon$. Umíme tedy najít podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $||f_{n_k} - f||_p \geq \varepsilon$. Dále z (2.8) plyne, že najdeme takové $M \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq M$ platí $||f_n||_p < ||f||_p + \frac{\varepsilon}{2}$. Pak najdeme $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $n_k \geq \max(N, M)$, a tedy

$$||f_{n_k}||_p - ||f_{n_k} - f||_p < ||f||_p + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon = ||f||_p - \frac{\varepsilon}{2},$$

což je ovšem ve sporu s (2.4) z Lemmatu 2.3. □

2.2 Zhlazování

V dalším textu budeme odkazovat ke *zhlazovacím jádrům* $\psi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, které definujeme standardně:

$$\psi_m(x) = \begin{cases} C_m e^{\frac{-1}{1-(m|\mathbf{x}|)^2}}, & \text{když } m\,|\mathbf{x}| \leq 1; \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \tag{2.9}$$

kde C_m je taková konstanta, aby $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_m \, dx = 1$. Snadno se ověří, že každé ψ_m je nekonečně diferencovatelné.

Pozorování 2.5. *Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ a pro všechna $x \in [0,1/m)$ platí*

$$\psi_m'(x) = -\psi_m'(-x)$$

a navíc pro $0 < x < \frac{1}{m}$ platí $\psi_m'(x) < 0$.

Důkaz. Všimněme si, že každá z funkcí ψ_m je sudá. Pak ze sudosti máme

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\psi_m(x+t) - \psi_m(x)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\psi_m(-x-t) - \psi_m(-x)}{t} \\ &= -\lim_{t\to 0} \frac{\psi_m(-x-t) - \psi_m(-x)}{-t} \\ &= -\psi_m'(-x). \end{aligned}$$

Fakt, že $\psi_m'(x) < 0$, se ověří snadným výpočtem z definice zhlazovacího jádra. □

3. Aproximace homeomorfismů ve $W^{k,p}((a,b))$

3.1 Teoretická příprava

V případě, kde se zabýváme funkcemi jedné proměnné na intervalu (a,b), existují velmi jednoduché charakterizace homeomorfismů i difeomorfismů: homeomorfismy jsou právě ty spojité funkce, které jsou ryze monotónní, a difeomorfismy jsou právě takové funkce, jejichž derivace je spojitá a nenulová na celém intervalu (a,b). Díky Důsledku 1.25 můžeme skoro všude na (a,b) uvažovat místo slabých derivací derivace klasické.

Myšlenkou následující pasáže je ukázat, že $\{\psi_m * f\}_{m=1}^{\infty}$ je v podstatě posloupnost difeomorfismů, která aproximuje daný homeomorfismus $f \in W^{k,p}((a,b))$ pro $1 \leq p < \infty$. K tomu je třeba dát smysl výrazu $\psi_m * f$ na celém intervalu (a,b) a ukázat, že se skutečně jedná o difeomorfismy a že navíc pro všechna $i \in \{0,\dots,k\}$ platí

$$\left\|(\psi_m * f)^{(i)} - f^{(i)}\right\|_p \to 0.$$

Věty 3.2, 3.3, 3.6 a Lemmata 3.4 a 3.5 jsou inspirovány [11].

Poznámka 3.1. *Naše intervaly (a,b) mohou být omezené či neomezené. V následujících větách a lemmatech tyto případy nerozlišujeme a aplikujeme standardní aritmetiku pro počítání s ∞ a $-\infty$. Konkrétně pro libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí $\infty + c = \infty$ a $-\infty + c = -\infty$.*

Věta 3.2. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{L}^p_{loc}\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})\right)$. Poté $\psi_m * f \in \mathcal{C}^\infty((a,b))$ a pro všechna $i \in \mathbb{N}$ na intervalu (a,b) platí $(\psi_m * f)^{(i)} = \psi_m^{(i)} * f$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $\psi_m * f$ je spojitá. Platí

$$(\psi_m * f)(x) = \int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \psi_m(x-y) f(y)\, dy.$$

Interval $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$ je kompaktní a funkce ψ_m je na něm spojitá, tedy existuje konstanta K, že $|\psi_m(z)| \leq K$ pro každé $z \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$. Poté jsou ale všechny podmínky Věty 1.9 splněny.

a) Funkce ψ_m je spojitá, a tedy měřitelná. Dále dle Pozorování 2.1 aplikovaného na každý kompaktní interval uvnitř $(a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})$ dostáváme, že $f \in \mathcal{L}^1_{loc}\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})\right)$, a tedy f je měřitelná.

b) Funkce ψ_m je spojitá ve všech $z \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$.

c) Jako integrovatelnou majorantu stačí vzít funkci Kf, neboť pro každé $x \in (a,b)$ integrujeme pouze přes omezenou množinu, a tedy je na ní funkce f integrovatelná.

Z toho plyne, že $\psi_m * f$ je spojitá na (a,b).

Nyní podobně ukážeme, že $(\psi_m * f)' = \psi_m' * f$ na (a,b) za pomoci Věty 1.10.

i) Viz bod a) výše.

ii) Derivace $\psi'_m(z)$ existuje vlastní pro každé $z \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$.

iii) Jelikož platí, že ψ'_m je spojitá na intervalu $[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$, tak existuje taková konstanta $K' > 0$, že $|\psi'_m(z)| \leq K'$ pro všechna $z \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$. Tedy jako integrovatelnou majorantu můžeme vzít funkci $K'f$.

iv) Funkce $\psi_m * f$ je spojitá na intervalu (a, b), jak jsme ukázali výše, a tedy opravdu existuje nějaké $x \in (a, b)$, že $\psi_m * f(x) \in \mathbb{R}$.

Nakonec si všimněme, že $\psi'_m \in \mathcal{C}^\infty([-1/m, 1/m])$, a tedy můžeme pokračovat stejným způsobem i nadále pro derivace vyšších řádů. □

Věta 3.3. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $f \in W^{k,p}\left((a - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m})\right)$. Poté pro všechna $i \in \{0, \ldots, k\}$ na intervalu (a, b) platí $(\psi_m * f)^{(i)} = \psi_m * f^{(i)}$.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $i = 0$ není co dokazovat. Dále předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $i < k$. Dle Věty 3.2 a indukčního předpokladu pro $x \in (a, b)$ platí

$$\begin{aligned}
(\psi_m * f)^{(i+1)}(x) &= \left(\psi_m * f^{(i)}\right)'(x) \\
&= \left(\psi'_m * f^{(i)}\right)(x) \\
&= \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \psi'_m(y) f^{(i)}(x - y)\, dy \\
&= \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \psi_m(y) f^{(i+1)}(x - y)\, dy \\
&= \left(\psi_m * f^{(i+1)}\right)(x),
\end{aligned}$$

kde ve čtvrté rovnosti jsme využili Definici 1.19 pro funkci $y \mapsto f(x - y)$, Důsledku 1.25 a toho, že ψ_m je testovací funkce. □

Lemma 3.4. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{L}^p\left((a - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m})\right)$. Poté platí $\psi_m * f \in \mathcal{L}^p((a, b))$ a $||\psi_m * f||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})\right)}$.*

Důkaz. Pro $p = 1$ dle Fubiniovy věty platí

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left| \int_{\mathbb{R}} \psi_m(x - y) f(y)\, dy \right| dx &\leq \int_a^b \int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \psi_m(x - y) |f(y)|\, dy\, dx \\
&= \int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \left(\int_a^b \psi_m(x - y)\, dx \right) |f(y)|\, dy \\
&\leq \int_{a-\frac{1}{m}}^{b+\frac{1}{m}} |f(y)|\, dy = ||f||_{\mathcal{L}^1\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})\right)}.
\end{aligned}$$

V případě $p = \infty$ stačí nahlédnout, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí

$$\begin{aligned}\int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \psi_m(x-y) f(y)\, dy &\leq ||f||_{\mathcal{L}^\infty\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})\right)} \int_{\mathbb{R}} \psi_m(x-y)\, dy \\ &= ||f||_{\mathcal{L}^\infty\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m})\right)} .\end{aligned}$$

Nakonec pro $1 < p < \infty$ použijeme Větu 1.16 k odhadu

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} f(x-y)\psi_m(y)\, dy\right| &\leq \left(\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |f(x-y)|^p \psi_m(y)\, dy\right)^{1/p} \left(\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \psi_m(y)\, dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |f(x-y)|^p \psi_m(y)\, dy\right)^{1/p} .\end{aligned}$$

A tedy opět dle Fubiniovy věty máme

$$\begin{aligned}\int_a^b |f * \psi_m|^p \, dx &\leq \int_a^b \left(\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |f(x-y)|^p \psi_m(y)\, dy\right) dx \\ &\leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} ||f||^p_{\mathcal{L}^p\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m}\right)} \psi_m(y)\, dy \\ &= ||f||^p_{\mathcal{L}^p\left((a-\frac{1}{m}, b+\frac{1}{m}\right)} .\end{aligned}$$

□

Lemma 3.5. *Nechť $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Definujme funkci $\widehat{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$\widehat{g}(x) = \begin{cases} g(a) & \text{pro}\, x < a, \\ g(x) & \text{pro}\, x \in [a, b], \\ g(b) & \text{pro}\, x > b. \end{cases}$$

Potom platí

$$\lim_{m\to\infty} ||\psi_m * \widehat{g} - \widehat{g}||_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})} = 0.$$

Důkaz. Ať $\varepsilon > 0$ dáno. K němu díky stejnoměrné spojitosti funkce g umíme najít vhodné $\delta > 0$, že pro všechna $x, y \in [a,b]$ taková, že $|x - y| < \delta$, platí

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon,$$

a tedy také pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ s $|x - y| < \delta$ platí

$$|\widehat{g}(x) - \widehat{g}(y)| < \varepsilon.$$

Poté pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ platí díky rovnosti $\int_{\mathbb{R}} \psi_m(x)dx = 1$ odhady

$$\begin{aligned}|(\psi_m * \widehat{g})(x) - \widehat{g}(x)| &= \left|\int_{x-1/m}^{x+1/m} \psi_m(x-y)\widehat{g}(y)dy - \int_{\mathbb{R}} \psi_m(x-y)\widehat{g}(x)\, dy\right| \\ &= \left|\int_{x-1/m}^{x+1/m} \psi_m(x-y)\left(\widehat{g}(y) - \widehat{g}(x)\right) dy\right| \\ &\leq \int_{x-1/m}^{x+1/m} |\psi_m(x-y)|\, |\widehat{g}(y) - \widehat{g}(x)|\, dy \\ &< \int_{x-1/m}^{x+1/m} \psi_m(x-y)\, \varepsilon\, dy = \varepsilon\end{aligned}$$

pro všechna $m \in \mathbb{N}$ taková, že $1/m < \delta$. Volme tedy $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby $1/m_0 < \delta$, a pak pro všechna $m \geq m_0$ platí $||\psi_m * \widehat{g} - \widehat{g}||_\infty < \varepsilon$. $\square$

Věta 3.6. *Ať $f \in \mathcal{L}^p((a-1, b+1))$ a $p < \infty$. Pak*

$$\lim_{m \to \infty} ||\psi_m * f - f||_{\mathcal{L}^p((a,b))} = 0.$$

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Uvažme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dodefinovanou mimo interval $(a-1, b+1)$ jako $f(x) = 0$. Dle Věty 1.4 najdeme takovou spojitou funkci $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s kompaktním nosičem, že

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \widetilde{g}(x)|^p \, dx < \varepsilon.$$

Položíme-li $g = \widetilde{g}|_{[a-1,\, b+1]}$, pak zřejmě g je spojitá na $[a-1, b+1]$ a

$$||f - g||_{\mathcal{L}^p((a-1,\, b+1))} < \varepsilon.$$

Poté z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned} ||f - \psi_m * f||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \leq{}& ||f - g||_{\mathcal{L}^p((a,b))} + ||g - \psi_m * g||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \\ &+ ||\psi_m * g - \psi_m * f||_{\mathcal{L}^p((a,b))}, \end{aligned}$$

kde díky Lemmatu 3.4 máme

$$||\psi_m * g - \psi_m * f||_{\mathcal{L}^p((a,b))} = ||\psi_m * (g - f)||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \leq ||g - f||_{\mathcal{L}^p((a-1,\, b+1))} < \varepsilon,$$

a podle Lemmatu 3.5 a toho, že $\widetilde{g} = 0$ vně intervalu $(-N, N)$ pro vhodné $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ||g - \psi_m * g||^p_{\mathcal{L}^p((a,b))} &= \int_{\min(a,-N)}^{\max(b,N)} |g(x) - (\psi_m * g)(x)|^p \, dx \\ &\leq \int_{\min(a,-N)}^{\max(b,N)} ||\psi_m * \widehat{g} - \widehat{g}||^p_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})} \, dx \\ &\leq \max(b-a, b-N, N-a, 2N) \, ||\psi_m * \widehat{g} - \widehat{g}||^p_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Dohromady tedy máme $||f - \psi_m * f||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. $\square$

3.2 Difeomorfismy jsou husté v homeomorfismech

Účelem této sekce je zkoumat Ball-Evansův aproximační problém pro funkce jedné proměnné a $1 \leq p < \infty$ v různých situacích. Bez újmy na obecnosti uvažujme v této sekci pouze ryze rostoucí homeomorfismy. Pro libovolný ryze klesající homeomorfismus f je $-f$ ryze rostoucí, a tedy platí, že když najdeme posloupnost difeomorfismů $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ takových, které aproximují homeomorfismus $-f$, tak funkce $-f_n$ jsou také difeomorfismy, které aproximují homeomorfismus f.

Začněme užitečným lemmatem, které nám říká, že konvolucí homeomorfismů dostaneme difeomorfismy.

Lemma 3.7. *Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{L}^p_{loc}\left(\left(a - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m}\right)\right)$ je funkce, která je ryze rostoucí na (a, b) a neklesající na intervalech $(a - \frac{1}{m}, a)$, $(b, b + \frac{1}{m})$. Pak $(\psi_m * f)' > 0$ na (a, b), a tedy $\psi_m * f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je difeomorfismus.*

Důkaz. Pro všechna $x \in (a, b)$ definujme funkci $g_x(y) = f(x - y) - f(x)$. Pro tuto funkci platí

$$g_x(y) \begin{cases} = 0 & \text{pro}\, y = 0, \\ > 0 & \text{pro}\, y < 0, \\ < 0 & \text{pro}\, y > 0. \end{cases}$$

Pak dle Věty 3.2 platí

$$\begin{aligned} (\psi_m * f)'(x) &= \int_{-1/m}^{1/m} \psi_m'(y) f(x - y)\, dy \\ &= \int_{-1/m}^{1/m} \psi_m'(y) \left(g_x(y) + f(x)\right)\, dy \\ &= f(x) \int_{-1/m}^{1/m} \psi_m'(y)\, dy + \int_{-1/m}^{1/m} \psi_m'(y) g_x(y)\, dy \\ &= f(x) \underbrace{\left(\int_{-1/m}^{0} \psi_m'(y)\, dy + \int_{0}^{1/m} \psi_m'(y)\, dy \right)}_{=0} \\ &\quad + \int_{-1/m}^{0} \psi_m'(y) g_x(y)\, dy + \int_{0}^{1/m} \psi_m'(y) g_x(y)\, dy \\ &> 0, \end{aligned}$$

kde v poslední nerovnosti jsme využili faktu, že díky Pozorování 2.5 mají funkce ψ_m' a g_x stejná znaménka na obou z intervalů $(-1/m, 0)$, $(0, 1/m)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Nakonec díky Větě 3.2 je $\psi_m * f \in \mathcal{C}^\infty((a, b))$, speciálně její derivace je spojitá, a tedy se skutečně jedná o difeomorfismus. □

Další lemma vypovídá o druhé části problému, tedy o konvergenci v k,p-normě.

Lemma 3.8. *Nechť $f \in W^{k,p}((a - 1, b + 1))$. Pak platí*

$$||\psi_m * f - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Důkaz. Pro každé $i \in \{0, \ldots, k\}$ díky Větě 3.3 platí $(\psi_m * f)^{(i)} = \psi_m * f^{(i)}$ na celém (a, b). Jelikož $f \in W^{k,p}((a - 1, b + 1))$, tak $f^{(i)} \in \mathcal{L}^p((a - 1, b + 1))$, a tedy dle Věty 3.6 opravdu máme

$$\left|\left|(\psi_m * f)^{(i)} - f^{(i)}\right|\right|_{\mathcal{L}^p((a,b))} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Z toho již snadno plyne

$$||\psi_m * f - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

□

Nyní tedy můžeme vyslovit pozitivní řešení pro Ball-Evansův aproximační problém, když jako definiční obor bereme celé $\mathbb{R}$.

Věta 3.9. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ a $f \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ je homeomorfismus. Poté pro všechna $m \in \mathbb{N}$ platí, že $\psi_m * f$ je difeomorfismus a $||\psi_m * f - f||_{\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R})} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$.*

Důkaz. Díky Lemmatu 3.7 vidíme, že $\psi_m * f$ jsou opravdu difeomorfismy. Dále díky Lemmatu 3.8 také máme požadovanou konvergenci. $\square$

V případě, kdy (a, b) je omezený interval, musíme dát smysl konvoluci poblíž hranice tohoto intervalu.

Lemma 3.10. *Nechť (a, b) je omezený interval a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá funkce. Poté existují vlastní limity $\lim_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim_{x \to b_-} f(x)$.*

Důkaz. Z definice absolutně spojité funkce platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ najdeme takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a + \delta)$ platí $|f(x) - f(a + \delta)| < \varepsilon$. Proto platí nerovnost

$$\limsup_{x \to a_+} f(x) - \liminf_{x \to a_+} f(x) < 2\varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, pak nutně $\limsup_{x \to a_+} f(x) = \liminf_{x \to a_+} f(x)$, a tedy $\lim_{x \to a_+} f(x)$ existuje. Navíc, volíme-li $\varepsilon = 1$, tak pro ono vhodné $\delta_1 > 0$ máme, že $\left|\lim_{x \to a_+} f(x) - f(a + \delta_1)\right| < 1$, a tedy platí, že $\lim_{x \to a_+} f(x) \in \mathbb{R}$. $\square$

Definice 3.11. *Nechť $f \in W^{k,p}((a, b))$ je homeomorfismus a $k \in \mathbb{N}$. Definujeme* k-prodloužení *funkce f, značíme stále f, pomocí předpisu*

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lim_{x \to a_+} f^{(i)}(x)}{i!}(x - a)^i & \textit{pro}\, x \leq a, \\ f(x) & \textit{pro}\, x \in (a, b), \\ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lim_{x \to b_-} f^{(i)}(x)}{i!}(x - b)^i & \textit{pro}\, x \geq b. \end{cases}$$

Myšlenka k-prodloužení je hladce dodefinovat homeomorfismus f za hranici (a, b) pomocí Taylorova polynomu. To, že se opravdu jedná o „hladké“ prodloužení, říká následující pozorování.

Pozorování 3.12. *Je-li $f \in W^{k,p}((a, b))$ ryze rostoucí funkce na (a, b), pak jeho k-prodloužení splňuje $f \in W^{k,p}((a - 1, b + 1))$. Navíc pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, platí $f'(a), f'(b) \geq 0$ za předpokladu, že interval (a, b) je omezený.*

Důkaz. Dle Věty 1.24 stačí ukázat, že $f \in \mathcal{C}^{(k-1)}(a - 1, b + 1)$, $f^{(k-1)}$ je absolutně spojitá na $(a - 1, b + 1)$ a pro všechna $i \in \{0, \ldots, k\}$ platí, že $f^{(i)} \in \mathcal{L}^p((a - 1, b + 1))$. Z předpokladu víme, že požadované vlastnosti platí na (a, b). Dále platí rovněž na intervalech $(a - 1, a]$ a $[b, b + 1)$ díky Pozorování 1.6 a tomu, že polynomy jsou třídy $\mathcal{C}^\infty$. Proto stačí pouze dokázat, že platí $\lim_{x \to a_-} f^{(i)}(x) = \lim_{x \to a_+} f^{(i)}(x)$ a $\lim_{x \to b_-} f^{(i)}(x) = \lim_{x \to b_+} f^{(i)}(x)$ pro každé $i \in \{0, \ldots, k - 1\}$. To ovšem zřejmě platí z definice k-prodloužení a vlastností Taylorova polynomu.

Z Lemmatu 3.10 a Věty 1.24 plyne, že limity $\lim_{x \to a_+} f'(x)$ a $\lim_{x \to b_-} f'(x)$ pro $k \geq 2$ existují vlastní. Kdyby pro spor $f'(a) < 0$, pak by existovalo okolí $(a, a + \delta)$, na kterém by $f' < 0$. To je ovšem ve sporu s tím, že f je ryze rostoucí funkce na (a, b). Analogicky nemůže platit $f'(b) < 0$. $\square$

Poslední překážkou je, že, pokud platí $k \geq 3$ a $f'(a) = 0$, tak se může stát, že k-prodloužení funkce f nemusí být neklesající na $(a - \varepsilon_a, b)$ pro žádné $\varepsilon_a > 0$. K tomu stačí uvážit funkci $f(x) = x^2$ pro $x \in (0, 1)$ a případ $k = 3$. Příslušné 3-prodloužení je totiž funkce $f(x) = x^2$.

V ostatních případech dostáváme následující výsledek.

Lemma 3.13. *Nechť (a, b) je omezený interval, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $f \in W^{k,p}((a, b))$ je ryze rostoucí homeomorfismus, $\lim_{x \to a_+} f'(x) > 0$ a $\lim_{x \to b_-} f'(x) > 0$. Uvažme k-prodloužení funkce f. Pak existuje $m_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$, je $\psi_m * f : (a, b) \to \mathbb{R}$ difeomorfismus a $||\psi_m * f - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$.*

Důkaz. Splnění podmínek Lemmatu 3.8 plyne z Pozorování 3.12. Dále dle předpokladu máme $\lim_{x \to a_+} f'(x) > 0$, a tedy z definice k-prodloužení také $\lim_{x \to a_-} f'(x)$ $= \lim_{x \to a_+} f'(x) = f'(a) > 0$. Proto z definice a spojitosti derivace najdeme $\varepsilon_a > 0$ takové, že f je ryze rostoucí na $(a - \varepsilon_a, a]$. Analogicky najdeme $\varepsilon_b > 0$, že f je ryze rostoucí na $[b, b + \varepsilon_b)$. Položme $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{m_0} < \min(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$. Pak pro všechna $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$, jsou splněny předpoklady Lemmatu 3.7, a tedy $\psi_m * f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou difeomorfismy. □

Nyní jsme připraveni vyslovit výsledek v případě, kdy je (a, b) omezený interval. Myšlenkou, jak překonat problém v případě $f'(a) = 0$ (resp. $f'(b) = 0$), je mírně změnit funkci f tak, aby $f'(a) > 0$ (resp. $f'(b) > 0$), a pak aplikovat Lemma 3.13.

Věta 3.14. *Nechť (a, b) je omezený interval, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ a $f \in W^{k,p}((a, b))$ je ryze rostoucí homeomorfismus. Poté pro každé $\varepsilon > 0$ existuje difeomorfismus $h_\varepsilon \in W^{k,p}((a, b))$ takový, že $||h_\varepsilon - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} < \varepsilon$.*

Důkaz. Je-li $k = 1$, pak uvažme 1-prodloužení funkce f. Pro toto 1-prodloužení podle Pozorování 3.12 platí $f \in W^{1,p}((a - 1, b + 1))$, a tedy splňuje podmínky Lemmat 3.7 a 3.8. Z toho tedy máme, že funkce $\psi_m * f \in W^{1,p}((a, b))$ jsou difeomorfismy a navíc umíme najít vhodné $m \in \mathbb{N}$, že $||\psi_m * f - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} < \varepsilon$. Položme tedy $h_\varepsilon := \psi_m * f$.

V případě $k \geq 2$ máme navíc díky Pozorování 3.12 také fakt, že $\lim_{x \to a_+} f'(x)$, $\lim_{x \to b_-} f'(x) \geq 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Uvažme

$$C := \frac{1}{2} \left(\frac{(b - a)^{p+1}}{p + 1} + b - a \right)^{-\frac{1}{p}}$$

a $f_\varepsilon(x) := f(x) + C\varepsilon(x - a)$. Nyní

$$\lim_{x \to a_+} f'_\varepsilon(x) = \lim_{x \to a_+} f'(x) + C\varepsilon > 0$$

a analogicky také pro $\lim_{x \to b_-} f'_\varepsilon(x)$. Navíc pro všechna $i \in \{2, \dots, k\}$ platí $f_\varepsilon^{(i)} = f^{(i)}$ na celém intervalu (a, b). Dále se stále jedná o homeomorfismus. Navíc tvrdíme, že také $f_\varepsilon \in \mathcal{W}^{k,p}((a, b))$. Skutečně, funkce $C\varepsilon(x - a)$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na (a, b), tudíž dle Věty 1.24 a Pozorování 1.6 platí $C\varepsilon(x - a) \in \mathcal{W}^{k,p}((a, b))$. Dále $\mathcal{W}^{k,p}((a, b))$ je lineární prostor, a tedy $f_\varepsilon \in \mathcal{W}^{k,p}((a, b))$.

Dle Lemmatu 3.13 umíme najít takové $m \in \mathbb{N}$, že

$$||\psi_m * f_\varepsilon - f_\varepsilon||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme tedy $h_\varepsilon := \psi_m * f_\varepsilon \in \mathcal{W}^{k,p}\left((a,b)\right)$. Rovněž z Lemmatu 3.13 plyne, že h_ε je difeomorfismus. Navíc dostáváme

$$\begin{aligned}
||h_\varepsilon - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} &\leq ||h_\varepsilon - f_\varepsilon||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} + ||f_\varepsilon - f||_{\mathcal{W}^{k,p}((a,b))} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left(||f_\varepsilon - f||_p^p + ||f_\varepsilon' - f'||_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_a^b |C\varepsilon(x-a)|^p \, dx + \int_a^b (C\varepsilon)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + C\varepsilon \left(\frac{(b-a)^{p+1}}{p+1} + b - a\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

kde na druhém řádku jsme využili fakt, že $f_\varepsilon^{(i)} = f^{(i)}$ na celém intervalu (a,b) pro všechna $i \in \{2, \ldots, k\}$. Proto h_ε je hledaný difeomorfismus. $\square$

4. p,q-bisobolevovské homeomorfismy

Definice 4.1. *Nechť* $f : [a,b] \xrightarrow{na} [c,d]$ *je homeomorfismus. Řekneme, že funkce* f *je* p,q-bisobolevovský homeomorfismus, *pokud existují čísla* $1 \leq p,\ q < \infty$ *taková, že* $f \in W^{1,p}((a,b))$ *a* $f^{-1} \in W^{1,q}((c,d))$.

Naším cílem je podobně jako v Sekci 3.2 nalézt posloupnost difeomorfismů $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, které aproximují funkci f ve $W^{1,p}((a,b))$ a jejichž inverzní funkce aproximují funkci f^{-1} ve $W^{1,q}((c,d))$. Budeme uvažovat pouze omezené intervaly $[a,b]$. Z toho dle Lemmatu 3.10 plyne, že rovněž $[c,d]$ je omezený interval.

Cílem této kapitoly je Věta 4.13, k jejímu důkazu je však třeba si připravit technická tvrzení.

Poznámka 4.2. *Bez újmy na obecnosti v této sekci pracujeme pouze s ryze rostoucími* p,q*-bisobolevovskými homeomorfismy. Pokud se nám tyto podaří aproximovat difeomorfismy, pak pro ryze klesající* p,q*-bisobolevovský homeomorfismus* f *můžeme uvažovat* $-f$, *pro nějž najdeme aproximující difeomorfismy* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Poté zřejmě funkce* $-f_n$ *jsou také difeomorfismy, které aproximují homeomorfismus* f.

Poznámka 4.3. *Díky Větě 1.24 platí, že v každé třídě funkcí* $f \in W^{1,p}((a,b))$ *existuje takový reprezentant* $\widetilde{f}$, *který je absolutně spojitý a platí* $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^p((a,b))$ *a* $\widetilde{f}' \in \mathcal{L}^p((a,b))$. *Budeme-li tedy psát* $f \in W^{1,p}((a,b))$, *budeme tím mít na mysli, že samo* f *je onen absolutně spojitý reprezentant.*

Nyní si pro daný p,q-bisobolevovský homeomorfismus $f : [a,b] \to [c,d]$ a pro $n \in \mathbb{N}$ definujme po částech lineární funkce $h_n : [a,b] \to [c,d]$ následovně: uvažme rovnoměrné dělení $P_n = \{x_i^n\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ a pro všechna $i \in \{0,\dots,n\}$ položme $h_n(x_i^n) = f(x_i^n)$. Dále pro $x \in [a,b] \setminus \{x_0^n,\dots,x_n^n\}$ najdeme takové $i \in \{0,\dots,n-1\}$, že $x \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$, a definujeme

$$h_n(x) = f(x_i^n) + \frac{x - x_i^n}{x_{i+1}^n - x_i^n}\Big(f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)\Big), \tag{4.1}$$

a tedy pro tato x máme

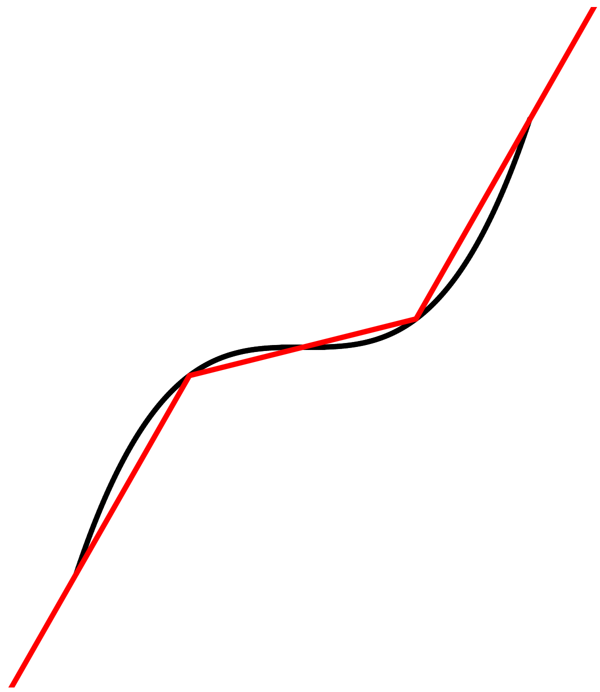
$$h_n'(x) = \frac{f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)}{x_{i+1}^n - x_i^n}. \tag{4.2}$$

Pro naše účely bude dále vhodné dodefinovat funkci h_n za hranici intervalu $[a,b]$ tak, aby hladce navazovala na již definovanou po částech lineární funkci na intervalu $[a,b]$. Konkrétně, pro $x < a$ definujeme

$$h_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{x_1^n - a}\left(f(x_1^n) - f(a)\right),$$

a pro $x > b$ definujeme

$$h_n(x) = f(x_{n-1}^n) + \frac{x - x_{n-1}^n}{b - x_{n-1}^n}\Big(f(b) - f(x_{n-1}^n)\Big).$$



Obrázek 4.1: Pro černou funkci f máme červenou po částech lineární funkci h_4. Funkci h_4 definujeme rovněž mimo interval (a,b), na kterém je funkce f definována.

Pro ilustraci viz Obrázek 4.1.

Uvažujeme-li funkce h_n zadefinované v (4.1), tak platí, že derivace h_n' nabývá pouze konečného množství hodnot. Skutečně, na každém z intervalů (x_i^n, x_{i+1}^n) je funkce h_n lineární, a tedy její derivace je zde konstantní. To samé platí pro intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞). V bodech x_i^n je pak derivace h_n' buď nedefinovaná, anebo se rovná hodnotě $h_n'(x)$ pro $x \in (x_{i-1}^n, x_i^n) \cup (x_i^n, x_{i+1}^n)$, pokud je na obou intervalech totožná. To platí, jelikož funkce h_n jsou spojité, a tedy pro všechna $i \in \{0, \ldots, n\}$ podle Věty 1.3 platí

$$(h_n)'_+ (x_i^n) = \lim_{x \to (x_i^n)_+} h_n'(x),$$

$$(h_n)'_- (x_i^n) = \lim_{x \to (x_i^n)_-} h_n'(x).$$

Dále p,q-bisobolevovský homeomorfismus f je ryze rostoucí, a tedy nutně $f(x_i^n) < f(x_{i+1}^n)$ pro všechna $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Z (4.2) pak plyne, že všechny hodnoty, kterých derivace h_n nabývá, musí být kladné. Označme tedy

$$M_n = \max\{h_n'(x); x \in (a,b) \setminus P_n\}, \tag{4.3}$$

$$M_n \geq m_n = \min\{h_n'(x); x \in (a,b) \setminus P_n\} > 0. \tag{4.4}$$

Nyní si dokažme užitečné lemma, které říká, že derivace těchto lineárních funkcí mají menší $\mathcal{L}^p$ normu než derivace původní funkce.

Lemma 4.4. *Nechť* $1 \leq p < \infty$ *a buď* $f \in W^{1,p}((a,b))$ *homeomorfismus, kde uvažujeme absolutně spojitého reprezentanta* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Uvažme takovou lineární funkci* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$*, že* $h(a) = f(a)$*,* $h(b) = f(b)$*. Poté platí* $||h'||_p \leq ||f'||_p$*.*

Důkaz. Dle Lemmatu 3.10 můžeme absolutně spojitého reprezentanta dodefinovat i na hranici intervalu (a, b).

Bez újmy na obecnosti uvažujme, že f je ryze rostoucí homeomorfismus. Pokud by byl f ryze klesající, pak stačí uvažovat ryze rostoucí homeomorfismus $-f$ a jeho lineární aproximaci (ve smyslu znění lemmatu) h_n. Poté funkce $-h_n$ je lineární aproximací homeomorfismu f a platí

$$|h_n'(x)| = |(-h_n)'(x)|,$$
$$|f'(x)| = |(-f)'(x)|$$

pro všechna $x \in (a, b)$. Tedy

$$||(-h_n)'||_p = ||h_n'||_p \leq ||(-f)'||_p = ||f'||_p \,.$$

Jelikož je funkce f absolutně spojitá, tak dle Věty 1.23 její derivace $f'(x)$ existuje pro s.v. $x \in (a, b)$ a platí

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Navíc díky tomu, že f je ryze rostoucí, je tato derivace nezáporná všude, kde existuje. Označme $c = f(a)$, $d = f(b)$. Pak platí, že pro všechna $x \in (a, b)$ je

$$h'(x) = \frac{d-c}{b-a}. \tag{4.5}$$

Pak z Věty 1.16 a toho, že $1 \in \mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}((a, b))$, dostáváme

$$d - c = ||f'||_1 \leq ||f'||_p \, ||1||_{\frac{p}{p-1}} = ||f'||_p \,(b-a)^{\frac{p-1}{p}} \,.$$

Umocněním obou stran nerovnosti na p-tou a úpravou máme

$$\left(\frac{d-c}{b-a}\right)^p (b-a) \leq ||f'||_p^p \,,$$

kde si stačí všimnout, že díky (4.5) se levá strana nerovnosti výše rovná $||h'||_p^p$. Tím je tedy důkaz ukončen. □

Důsledek 4.5. *Nechť $f : [a, b] \to [c, d]$ náleží do $W^{1,p}((a, b))$, $1 \leq p < \infty$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom pro funkce h_n zadefinované v (4.1) platí*

$$||h_n'||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \leq ||f'||_{\mathcal{L}^p((a,b))} \,.$$

Důkaz. Na každém z intervalů (x_i, x_{i+1}), $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, platí nerovnost

$$||h_n'||_{\mathcal{L}^p((x_i,x_{i+1}))}^p \leq ||f'||_{\mathcal{L}^p((x_i,x_{i+1}))}^p$$

díky Lemmatu 4.4. Potom

$$\begin{aligned} ||h_n'||_p^p = \int_a^b |h_n'(x)|^p \,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |h_n'(x)|^p \,dx \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p \,dx = \int_a^b |f'(x)|^p \,dx = ||f'||_p^p \,, \end{aligned}$$

a tedy také $||h_n'||_p \leq ||f'||_p$. $\square$

Dále ukážeme, že pro sobolevovské funkce f s funkční hodnotou 0 na hranici můžeme jejich p-normu odhadnout pomocí p-normy jejich derivace.

Lemma 4.6. *Nechť $1 \leq p < \infty$ je dáno a pro $f \in W^{1,p}((a,b))$ platí $f(a) = 0$. Poté platí*

$$||f||_p \leq (b-a)\, ||f'||_p .$$

Důkaz. Podle Poznámky 4.3 uvažujeme f jako absolutně spojitého reprezentanta. Proto dle Věty 1.23 pro všechna $x \in [a,b]$ platí

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)dt.$$

Dle trojúhelníkové nerovnosti a Věty 1.16 pro všechna $x \in [a,b]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &= \left|\int_a^x f'(t)dt\right|^p \leq \left|\int_a^x |f'(t)|\, dt\right|^p \\ &\leq \left|\int_a^b |f'(t)|\, dt\right|^p \\ &\leq \left(||f'||_p\, ||1||_{\frac{p}{p-1}}\right)^p = ||f'||_p^p\, (b-a)^{(p-1)}, \end{aligned}$$

kde pro $p = 1$ bereme $\frac{p}{p-1} = \infty$ a finální nerovnost

$$|f(x)| \leq ||f'||_1$$

pak platí také. Tedy

$$||f||_p^p = \int_a^b |f(x)|^p\, dx \leq \int_a^b ||f'||_p^p\, (b-a)^{(p-1)}\, dt = (b-a)^p\, ||f'||_p^p .$$

$\square$

Lemma 4.7. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a je dána funkce $f : [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$. Pak pro všechna $x \in [a,b]$ platí nerovnosti*

$$\inf_{x\in[a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}]} f(x) \leq (\psi_n * f)(x) \leq \sup_{x\in[a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}]} f(x).$$

Důkaz. Z (2.9) vidíme, že $\psi_n \geq 0$. Pokud tedy označíme $s = \sup_{x\in[a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}]} f(x)$, pak platí

$$(\psi_n * f)(x) = \int_{-1/n}^{1/n} \psi_n(y) f(x-y)\, dy \leq \int_{-1/n}^{1/n} \psi_n(y) s\, dy = s,$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že $\int_{-1/n}^{1/n} \psi_n(y)\, dy = 1$. Druhá nerovnost se dokáže analogicky. $\square$

Následující technické tvrzení intuitivně říká, že když zhlazujeme po částech lineární funkci, tak pouze na malém okolí „zlomů“ nedostáváme znovu lineární funkci.

Tvrzení 4.8. *Nechť $f : [a, b] \to [c, d]$ je p,q-bisobolevovský ryze rostoucí homeomorfismus a $1 \le p, q < \infty$. Uvažme funkce h_n zadefinované v (4.1) a pro ně čísla M_n, m_n zadefinovaná v (4.3), (4.4). Pak existuje posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ přirozených čísel splňující $k_n > 2n$ taková, že pro množiny*

$$F_n = \{x \in (a, b) : (\psi_{k_n} * h_n)(x) \neq h_n(x)\},$$
$$G_n = \left\{y \in (c, d) : (\psi_{k_n} * h_n)^{-1}(y) \neq h_n^{-1}(y)\right\},$$

platí

$$F_n \subset \bigcup_{i=0}^{n} \left(x_i^n - \frac{1}{k_n},\, x_i^n + \frac{1}{k_n}\right), \tag{4.6}$$

$$G_n \subset \bigcup_{i=0}^{n} h_n\left(\left(x_i^n - \frac{1}{k_n},\, x_i^n + \frac{1}{k_n}\right)\right), \tag{4.7}$$

$$\lambda(F_n) < \frac{1}{2^n}, \tag{4.8}$$

$$\lambda(G_n) < \min\left\{\frac{m_n^q}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right\} \tag{4.9}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc platí $(\psi_{k_n} * h_n)(a) = f(a)$.

Důkaz. Ať $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Označme n-prvkovou množinu prvků rovnoměrného dělení intervalu $[a, b]$ jako P_n. Tvrdíme, že pro všechna $k > 2(n+1)2^n$ a $x \in (a, b)$ taková, že

$$\operatorname{dist}(x, P_n) > \frac{1}{k},$$

platí

$$(\psi_k * h_n)(x) = \int_{-1/k}^{1/k} \psi_k(y) h_n(x - y)\, dy = \int_{-1/k}^{1/k} \psi_k(y) h_n(x)\, dy = h_n(x). \tag{4.10}$$

Vskutku, nechť $x \in (a, b)$ je takové, že $\operatorname{dist}(x, P_n) > \frac{1}{k}$. Najdeme takové $i \in \{0, \dots, n-1\}$, že $x \in \left(x_i^n, x_{i+1}^n\right)$. Dále pro každé $y \in \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ platí, že také $x + y \in \left(x_i^n, x_{i+1}^n\right)$. Proto dle (4.1) pro $c \in (0, 1/k)$ platí

$$h_n(x - c) - h_n(x) = \frac{-c}{x_{i+1}^n - x_i^n}\left(f\left(x_{i+1}^n\right) - f\left(x_i^n\right)\right) = -h_n(x + c) + h_n(x).$$

Tedy funkce $y \mapsto h_n(x-y) - h_n(x)$ je lichá na intervalu $\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$. Dále je na tomto intervalu funkce $y \mapsto \psi_k(y)$ sudá, a tedy je funkce $y \mapsto \psi_k(y)\left(h_n(x - y) - h_n(x)\right)$ lichá na intervalu $\left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$. Proto platí

$$\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \psi_k(y)\left(h_n(x - y) - h_n(x)\right) dy = 0,$$

z čehož plyne (4.10).

Z (4.10) dále plyne, že pro tato k je množina F_n obsažena v množině těch prvků $x \in (a, b)$, pro něž platí

$$\operatorname{dist}(x, P_n) \le \frac{1}{k}.$$

Tím jsme splnili (4.6). Navíc platí

$$\lambda\left(\left\{x \in (a,b) : \operatorname{dist}(x, P_n) \le \frac{1}{k}\right\}\right) \le \frac{2(n+1)}{k} < \frac{1}{2^n},$$

kde jsme v první nerovnosti sečetli délky $(n+1)$ intervalů o délce $\frac{2}{k}$ s body x_i uprostřed. Tím jsme splnili nerovnost (4.8).

Dále uvažme

$$k > 2(n+1)M_n 2^n \max\left\{1, \frac{1}{m_n^q}\right\}.$$

Chceme pro každé $x_i \in P_n$ určit, jakou míru má obraz intervalu $(x_i - \frac{1}{k}, x_i + \frac{1}{k})$ funkcí h_n. Z (4.10) totiž víme, že pro všechna $x \in (a,b)$ taková, že $\operatorname{dist}(x, P_n) > \frac{1}{k}$, platí

$$(\psi_k * h_n)^{-1}(h_n(x)) = (\psi_k * h_n)^{-1}((\psi_k * h_n)(x)) = x = h_n^{-1}(h_n(x)).$$

Tedy

$$G_n \subset \bigcup_{i=0}^{n} h_n\left(\left(x_i - \frac{1}{k}, x_i + \frac{1}{k}\right)\right),$$

tudíž jsme splnili (4.7). Jenže pro všechna $i \in \{0, \ldots, n\}$ platí díky absolutní spojitosti lineárních funkcí

$$h_n\left(x_i + \frac{1}{k}\right) - h_n\left(x_i - \frac{1}{k}\right) = \int_{x_i - \frac{1}{k}}^{x_i + \frac{1}{k}} h_n'(x)\, dx \le \frac{2}{k} M_n.$$

Tedy

$$\lambda\left(\bigcup_{i=0}^{n} h_n((x_i - 1/k, x_i + 1/k))\right) \le (n+1)\frac{2}{k} M_n < \min\left\{\frac{m_n^q}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right\}.$$

Nakonec platí $2(n+1)2^n > 2n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy volme

$$k_n > \max\left\{2(n+1)2^n, 2(n+1)M_n 2^n \max\left\{1, \frac{1}{m_n^q}\right\}\right\}$$

libovolné a vše z (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) je splněno.

Pro důkaz poslední části si stačí uvědomit, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce h_n na intervalu $(a - \frac{1}{k_n}, a + \frac{1}{k_n})$ lineární, a tedy stejně jako v (4.10) dostáváme

$$(\psi_{k_n} * h_n)(a) = h_n(a) = f(a).$$

□

Nechť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost z Tvrzení 4.8 a pro daný p,q-bisobolevovský homeomorfismus f definujme

$$f_n(x) = (\psi_{k_n} * h_n)(x). \tag{4.11}$$

Platí, že h_n jsou homeomorfismy, které náleží do $W^{1,p}((a-1, b+1))$ pro libovolné $1 \le p < \infty$. Tedy díky Lemmatu 3.7 víme, že f_n jsou difeomorfismy na (a,b). Speciálně to znamená, že existují inverzní funkce f_n^{-1}. Ve Větě 4.13 dokážeme, že tato f_n jsou právě hledanými difeomorfismy. Nejprve začněme přeformulováním Věty 1.17 do podoby, která se nám bude hodit.

Lemma 4.9. *Nechť* $1 \leq p < \infty$ *a* $f \in \mathcal{L}^p((a,b))$. *Potom pro s.v.* $x \in (a,b)$ *platí*

$$\lim_{|I| \to 0} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)|^p \, dy = 0,$$

kde $I \subset (a,b)$ *je libovolný interval takový, že* $x \in I$.

Důkaz. Uvažme ta $x \in (a,b)$, která jsou Lebesgueovými body funkce f. Dále pro libovolný interval I obsahující bod x definujme interval $J = (x - |I|, x + |I|) \cap (a,b)$. Z otevřenosti intervalu (a,b) plyne, že pro intervaly I, jejichž délka $|I|$ je dostatečně malá, platí $J = B(x, |I|) \subset (a,b)$, tedy $|J| = 2|I|$. S využitím Věty 1.17 dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{|I| \to 0} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f(x)|^p dy &= \lim_{|I| \to 0} \frac{|J|}{|I|} \frac{1}{|J|} \int_I |f(y) - f(x)|^p dy \\ &\leq 2 \lim_{|J| \to 0} \frac{1}{|J|} \int_J |f(y) - f(x)|^p dy = 0, \end{aligned}$$

kde nerovnost platí díky tomu, že $I \subset J$, a tedy integrujeme nezápornou funkci přes větší množinu. $\square$

Nyní budeme chtít ukázat, že $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$ pro s.v. $x \in (a,b)$, abychom mohli využít Větu 2.4.

Lemma 4.10. *Nechť funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je spojitá a buďte* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnosti bodů z* $[a,b]$ *takových, že platí* $|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. *Poté*

$$|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Ze stejnoměrné spojitosti funkce f na $[a,b]$ nalezneme takové $\delta > 0$, že pro všechna $r, s \in [a,b]$ taková, že $|r - s| < \delta$, platí $|f(r) - f(s)| < \varepsilon$. Dále najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|x_n - y_n| < \delta,$$

a tedy

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

$\square$

Lemma 4.11. *Nechť* f_n *jsou funkce definované v (4.11) a Tvrzení 4.8. Poté pro s.v.* $x \in (a,b)$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = f'(x)$$

a pro s.v. $y \in (c,d)$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} \left(f_n^{-1}\right)'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y).$$

Důkaz. Připomeňme značení množin ze znění Tvrzení 4.8

$$F_n = \{x \in (a,b) : f_n(x) \neq h_n(x)\},$$
$$G_n = \left\{y \in (c,d) : f_n^{-1}(y) \neq h_n^{-1}(y)\right\}.$$

Díky témuž Tvrzení 4.8 víme, že platí

$$\lambda(F_n) < \frac{1}{2^n}$$

a

$$\lambda(G_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Ze srovnávacího kritéria konvergence řad tedy plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(F_n) < \infty.$$

Pak z Věty 1.11 plyne, že pro s.v. $x \in (a,b)$ najdeme takové $j_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq j_1$ platí $x \notin F_n$, a tedy

$$f_n(x) = h_n(x).$$

Tedy pro každé takové n najdeme $i \in \{0,\dots,n\}$, že $x \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$. Označme $I_n = (x_i^n, x_{i+1}^n)$. Zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0.$$

Nyní f je p,q-bisobolevovský homeomorfismus, a tedy existuje $1 \leq p < \infty$ takové, že $f' \in \mathcal{L}^p\left((a,b)\right)$. Pak z Pozorování 2.1 platí, že také $f' \in \mathcal{L}^1\left((a,b)\right)$. Tedy dle Lemmatu 4.9 dostáváme pro s.v. $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{1}{x_{i+1}^n - x_i^n}\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} f'(y)\,dy\right) - f'(x)\right| &= \\ &= \left|\frac{1}{x_{i+1}^n - x_i^n}\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} \left(f'(y) - f'(x)\right)\,dy\right| \\ &\leq \frac{1}{x_{i+1}^n - x_i^n}\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} |f'(y) - f'(x)|\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Pak z Věty 1.23, (4.2) a (4.12) dostáváme

$$\begin{aligned} f_n'(x) = h_n'(x) &= \frac{f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)}{x_{i+1}^n - x_i^n} \\ &= \frac{1}{x_{i+1}^n - x_i^n}\int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} f'(y)\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x)\end{aligned}$$

pro s.v. $x \in (a,b)$.

Analogicky pro funkci f^{-1} dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n) < \infty,$$

a tedy z Věty 1.11 platí pro skoro všechna $y \in (c,d)$, že najdeme $j_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq j_2$ platí $y \notin G_n$, a tedy

$$f_n^{-1}(y) = h_n^{-1}(y).$$

Pro dané $n \geq j_2$ vezměme $x \in (a,b)$, že $y = h_n(x)$. Pak najdeme $i \in \{0, \ldots, n\}$, že $x \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$. Všimněme si, že díky Lemmatu 4.10 a konvergenci

$$x_{i+1}^n - x_i^n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} \Big(f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n) \Big) = 0. \tag{4.13}$$

Proto pro s.v. $y \in (c,d)$ platí

$$\begin{aligned}
(f_n^{-1})'(y) = (h_n^{-1})'(y) &= \frac{1}{h_n'(x)} = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)} \\
&= \frac{1}{f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)} \int_{f(x_i^n)}^{f(x_{i+1}^n)} (f^{-1})'(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} (f^{-1})'(y),
\end{aligned}$$

kde jsme využili absolutní spojitosti funkce f^{-1} a závěrečná konvergence se díky (4.13) dokáže pomocí Lemmatu 4.9 obdobně jako v (4.12). □

Nezbytným předpokladem ve Větě 2.4 je také odhad p-normy, proto zde máme poslední technické lemma.

Lemma 4.12. *Nechť f_n jsou funkce definované v (4.11). Poté platí*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(f_n^{-1}\right)' \right\|_q \leq \left\| \left(f^{-1}\right)' \right\|_q . \tag{4.14}$$

Důkaz. Připomeňme definice

$$G_n = \Big\{ y \in (c,d) : f_n^{-1}(y) \neq h_n^{-1}(y) \Big\}$$

a

$$m_n = \min\{h_n'(x); x \in (a,b) \setminus P_n\} > 0.$$

Poté z Tvrzení 4.8 máme, že

$$G_n \subset \bigcup_{i=0}^{n} h_n\Big(\Big(x_i^n - \frac{1}{k_n},\, x_i^n + \frac{1}{k_n}\Big)\Big)$$

a

$$\lambda\left(\bigcup_{i=0}^{n} h_n\Big(\Big(x_i^n - \frac{1}{k_n},\, x_i^n + \frac{1}{k_n}\Big)\Big) \right) < \frac{m_n}{2^n}. \tag{4.15}$$

Z Lemmatu 4.7 máme, že pro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$f_n'(x) \geq m_n.$$

Dále pro všechna $y \in (c,d)$ najdeme $x \in (a,b)$ takové, že $f_n(x) = y$, a z Věty o derivaci inverzní funkce plyne

$$\left(f_n^{-1}\right)'(f_n(x)) = \frac{1}{f_n'(x)} \leq \frac{1}{m_n},$$

kde využíváme faktu, že $m_n > 0$. Tedy pro všechna $y \in (c,d)$ platí

$$\left(f_n^{-1}\right)'(y) \leq \frac{1}{m_n}. \tag{4.16}$$

Nyní již můžeme počítat. Intuitivně se dá říct, že G_n mají tak malou míru, že můžeme na těchto množinách dělat velmi hrubé odhady. Je to díky tomu, že mimo G_n přesně víme, že $f_n^{-1} = h_n^{-1}$.

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{h_n(x_i^n)}^{h_n(x_{i+1}^n)} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{h_n\left(x_i^n - \frac{1}{k_n}\right)}^{h_n\left(x_i^n + \frac{1}{k_n}\right)} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy + \int_{h_n\left(x_0^n\right)}^{h_n\left(x_0^n + \frac{1}{k_n}\right)} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy \\
&\quad + \int_{h_n\left(x_n^n - \frac{1}{k_n}\right)}^{h_n\left(x_0^n\right)} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{h_n\left(x_i^n + \frac{1}{k_n}\right)}^{h_n\left(x_{i+1}^n - \frac{1}{k_n}\right)} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{h_n\left(x_i^n - \frac{1}{k_n}\right)}^{h_n\left(x_i^n + \frac{1}{k_n}\right)} \left(\max_{t \in [c,d]} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(t)\right|\right)^q \, dy + \int_{h_n\left(x_0^n\right)}^{h_n\left(x_0^n + \frac{1}{k_n}\right)} \left(\max_{t \in [c,d]} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(t)\right|\right)^q \, dy \\
&\quad + \int_{h_n\left(x_n^n - \frac{1}{k_n}\right)}^{h_n(x_n^n)} \left(\max_{t \in [c,d]} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(t)\right|\right)^q \, dy + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{h_n\left(x_i^n + \frac{1}{k_n}\right)}^{h_n\left(x_{i+1}^n - \frac{1}{k_n}\right)} \left|\left(h_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy \\
&\leq \lambda \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \left(h_n\left(x_i^n - \frac{1}{k_n}\right), h_n\left(x_i^n + \frac{1}{k_n}\right)\right) \cup \left(h_n\left(x_0^n\right), h_n\left(x_0^n + \frac{1}{k_n}\right)\right) \right. \\
&\qquad \left. \cup \left(h_n\left(x_n^n - \frac{1}{k_n}\right), h_n\left(x_n^n\right)\right) \right) \frac{1}{m_n^q} + \int_c^d \left|\left(h_n^{-1}\right)'(y)\right|^q \, dy \\
&\leq \frac{m_n^q}{2^n m_n^q} + \left\|\left(h_n^{-1}\right)'\right\|_q^q \leq \frac{1}{2^n} + \left\|\left(f^{-1}\right)'\right\|_q^q,
\end{aligned}$$

kde v první nerovnosti jsme použili (4.7) a to, že platí

$$\left|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right| \leq \max_{t \in [c,d]} \left|\left(f_n^{-1}\right)'(t)\right|$$

díky spojitosti funkce $\left(f_n^{-1}\right)'$ na kompaktu. Ve druhé nerovnosti jsme využili (4.16) a dále jsme využili důkazu Tvrzení 4.8, abychom na každém z intervalů

$$\left(h_n\left(x_i^n + \frac{1}{k_n}\right), h_n\left(x_{i+1}^n - \frac{1}{k_n}\right)\right)$$

tvrdili, že $\left(f_n^{-1}\right)'(y) = \left(h_n^{-1}\right)'(y)$. Potom jsme ve třetí nerovnosti využili (4.15) a nakonec jsme využili Důsledek 4.5. Aplikováním elementární nerovnosti pro nezáporná čísla

$$(a+b)^{\frac{1}{q}} \leq a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}}$$

tedy dostáváme

$$\left\|\left(f_n^{-1}\right)'(y)\right\|_q \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{q}}} + \left\|\left(f^{-1}\right)'\right\|_q,$$

což platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy je důkaz ukončen. $\square$

Nyní máme připraveno vše k důkazu hlavní věty této sekce.

Věta 4.13. *Nechť $f : [a,b] \overset{na}{\longrightarrow} [c,d]$ je ryze rostoucí p,q-bisobolevovský homeomorfismus a $1 \leq p, q < \infty$ jsou taková, že $f \in W^{1,p}((a,b))$ a $f^{-1} \in W^{1,q}((c,d))$. Uvažme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n definované v (4.11). Pak platí, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost difeomorfismů, pro kterou platí*

$$||f_n - f||_{\mathcal{W}^{1,p}((a,b))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

a $\{f_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost difeomorfismů, pro kterou platí

$$\left|\left|f_n^{-1} - f^{-1}\right|\right|_{\mathcal{W}^{1,q}((c,d))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Důkaz. Fakt, že se jedná o difeomorfismy, plyne z Lemmatu 3.7. Potřebujeme dokázat následující 4 konvergence:

$$||f_n - f||_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.17a}$$

$$||f_n' - f'||_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.17b}$$

$$\left|\left|f_n^{-1} - f^{-1}\right|\right|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{4.17c}$$

$$\left|\left|\left(f_n^{-1}\right)' - \left(f^{-1}\right)'\right|\right|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.17d}$$

Ovšem díky Tvrzení 4.8 máme $(f_n - f)(a) = 0$, a tedy dle Lemmatu 4.6 stačí dokázat pouze (4.17b) a (4.17d). Skutečně, díky linearitě derivace pak platí

$$||f_n - f||_p \leq (b-a) \left|\left|(f_n - f)'\right|\right|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

a tedy (4.17a) je splněno. Totéž s (4.17c).

Chceme tedy ověřit předpoklady Věty 2.4 pro případy (4.17b) a (4.17d). Z Lemmatu 4.11 a Lemmatu 4.12 ihned plyne (4.17d). Dále Věta 3.3, Lemma 3.4 a Důsledek 4.5 dávají pro každé $n \in \mathbb{N}$ odhady

$$||f_n'||_p \leq ||h_n'||_p \leq ||f'||_p\,,$$

čili také

$$\limsup_{n\to\infty} ||f_n'||_p \leq ||f'||_p\,.$$

Tím jsme ověřili podmínky Věty 2.4, čili jsme ověřili platnost (4.17b). $\square$

Poznámka 4.14. *Důkaz Věty 4.13 pro $1 < p, q < \infty$ se dá provést jednodušeji za použití uniformní konvexity prostorů $\mathcal{L}^p((a,b))$ a $\mathcal{L}^q((c,d))$.*

Literatura

[1] R. A. Adams a J. Fournier. *Sobolev spaces.* Academic Press, Amsterdam, 2nd edition, 2003.

[2] J. M. Ball. *Singularities and computation of minimizers for variational problems*, pages 1–20. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge University Press, 2001.

[3] J. M. Ball. *Progress and puzzles in nonlinear elasticity*, pages 1–15. Springer, Vienna, 2010.

[4] P. K. Bhattacharyya. *Distributions: Generalized Functions with Applications in Sobolev Spaces.* De Gruyter, 2012.

[5] D. Campbell, S. Hencl, a V. Tengvall. Approximation of $W^{1,p}$ Sobolev homeomorphism by diffeomorphisms and the signs of the Jacobian. *Adv. Math.*, 331:748–829, 2018.

[6] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics.* Amer. Math. Soc., 1998.

[7] S. Hencl a A. Pratelli. Diffeomorphic approximation of $W^{1,1}$ planar Sobolev homeomorphisms. *J. Eur. Math. Soc.*, 20(3):597–656, 2018.

[8] S. Hencl a B. Vejnar. Sobolev homeomorphisms that cannot be approximated by diffeomorphisms. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 219(1):183–202, 2016.

[9] T. Iwaniec, L. V. Kovalev, a J. Onninen. Diffeomorphic approximation of sobolev homeomorphisms. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 201(3):1047–1067, 2011.

[10] G. Leoni. *A first course in Sobolev spaces.* Amer. Math. Soc., Providence, 2nd edition, 2017.

[11] J. Malý. Advanced Differentiation I. Interní učební text MFF UK. K dispozici v Studijním informačním systému Univerzity Karlovy jako přiložený soubor dipp19-en.pdf u předmětu NMMA437 Derivace a integrál pro pokročilé 1.

[12] D. R. Moreira a E. V. Teixeira. On the behavior of weak convergence under nonlinearities and applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(6):1647–1656, 2004.

[13] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, a M. Zelený. Matematická analýza (předběžná verze). `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/analyza.pdf`. Naposledy upraveno 16.11.2022. Dostupné 04/2024.

[14] J. Rataj. Studijní text k přednášce teorie míry a integrálu. `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/TMI/TMI-text_2017.pdf`. Naposledy upraveno 12.1.2018. Dostupné 04/2024.

[15] G. Teschl. Topics in real analysis. https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ra/ra.pdf. Naposledy upraveno 26.4.2024. Dostupné 04/24.