Univerzita Karlova v Prahe
Matematicko-fyzikálna fakulta

BAKALÁRSKA PRÁCA

Matúš Zelko

Gama-nulové množiny

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Veľmi pekne ďakujem vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Miroslavovi Zelenému, Ph. D. za všetok čas, trpezlivosť a rady, ktoré mi pri tvorbe práce dal.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Gama-nulové množiny

Autor: Matúš Zelko

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Práce se věnuje Gama-nulovým množinám, což je σ-ideál úzce spjatý s diferencovatelností lipschitzovských funkcí na Banachových prostorech. V práci se však mimo úvod, kde v rychlosti shrnujeme některé známé výsledky, již diferencovatelnosti lipschitzovských funkcí nevěnujeme. Cílem práce je zejména ukázat smysluplnost definice daného pojmu a doplnit důkazy některých známých vlastností. Hlavním přínosem je podrobné zpracování a doplnění vynechaných kroků důkazu, že Gama-nulové a lebesgueovsky nulové množiny v $\mathbb{R}^n$ splývají. Hlavní kroky důkazu, stejně jako pojem Gama-nulovosti, pochází z článku od Jorama Lindenstrausse a Davida Preisse *On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces* (2003), o který se práce opírá. V práci dále ukazujeme, že Gama-nulové množiny tvoří netriviální σ-ideál, což přímo nepřebíráme z literatury.

Klíčová slova: Gama-nulové množiny, Sigma-ideál, úplná metrizovatelnost, Lebesgueovsky nulové množiny

Title: Gamma null sets

Author: Matúš Zelko

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The thesis is devoted to Gamma-null sets, which is a σ-ideal closely related to the differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces. However, apart from the introduction, where we quickly summarize some known results on the differentiability of Lipschitz functions, the work does not focus on this aspect. The aim of the thesis is to show that the Gamma-null sets are well defined and to supplement the proofs of some known properties. The main contribution is a detailed treatment and completion of the omitted steps of the proof that Gamma-null and Lebesgue-null sets in $\mathbb{R}^n$ coincide. The main steps of the proof, as well as the concept of Gamma-nullness, come from the paper by Joram Lindenstrauss and David Preiss, *On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces* (2003), which the thesis builds upon. Furthermore, the thesis demonstrates that Gamma-null sets form a non-trivial σ-ideal, the proof is not directly taken from the literature.

Keywords: Gamma-null sets, Sigma-ideal, complete metrizability, Lebesgue-null sets

Názov práce: Gama-nulové množiny

Autor: Matúš Zelko

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Práca sa venuje Gama-nulovým množinám, čo je σ-ideál úzko súvisiaci s diferencovateľnosťou lipschitzovských funkcií na Banachových priestoroch. V práci sa však mimo úvodu, kde v rýchlosti zhŕňame niektoré známe výsledky, už diferencovateľnosti lipschitzovských funkcií nevenujeme. Cieľom práce je najmä ukázať zmysluplnosť definície daného pojmu a doplniť dôkazy niektorých známych vlastností. Hlavným prínosom je podrobné spracovanie a doplnenie vynechaných krokov dôkazu, že Gama-nulové a lebesgueovsky nulové množiny v $\mathbb{R}^n$ splývajú. Hlavné kroky dôkazu, rovnako ako pojem Gama-nulovosti, pochádza z článku od Jorama Lindenstraussa a Davida Preissa *On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces* (2003), o ktorý sa práca opiera. V práci ďalej ukazujeme, že Gama-nulové množiny tvoria netriviálny σ-ideál, čo priamo nepreberáme z literatúry.

Kľúčové slová: Gama-nulové množiny, Sigma-ideál, úplná metrizovatelnost, Lebesgueovsky nulové množiny

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Diferencovateľnosť lipschitzovských funkcií

Motivácia prečo skúmať Γ-nulové množiny vychádza z problematiky fréchetovskej diferencovateľnosti lipschitzovských funkcií na nekonečne dimenzionálnych Banachových priestoroch. Preto o nej v krátkosti pohovoríme v tejto úvodnej kapitole.

Už od roku 1919 je známe nasledujúce tvrdenie [1, str. 103-106].

Veta 1 (Rademacher)**.** *Nech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lokálne lipschitzovská funkcia, potom f je diferencovateľná v každom bode, až na množinu nulovej lebesgueovej miery.*

Vzhľadom na to, že lebesgueovsky nulové množiny tvoria netriviálny σ-ideál, tak vieme nájsť spoločný bod diferencovateľnosti pre spočetne veľa lipschitzovských funkcií. Prirodzená otázka je, či je možné podobné tvrdenie formulovať aj v obecnejšom kontexte Hilbertových, poprípade Banachových priestorov.

Najprv si musíme ujasniť, čo presne v tomto kontexte myslíme diferencovateľnosťou.

Definícia 2 (Fréchetova derivácia)**.** Nech $(V, ||\cdot||_V)$ a $(W, ||\cdot||_W)$ sú normované vektorové priestory a $U \subset V$ je otvorenou podmnožinou priestoru V. Funkciu $f\colon U \to W$ nazveme *fréchetovsky diferencovateľnou* v bode $x \in U$, pokiaľ existuje obmedzený lineárny operátor $A\colon V \to W$ taký, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - A(h)||_W}{||h||_V} = 0.$$

Tento lineárny operátor je určený jednoznačne, budeme ho značiť $f'[x]$ a nazývať *Fréchetova derivácia* funakcie f v bode x.

Poznámka. Rovno si môžeme všimnúť, že pre $n,m \in \mathbb{N}$, keď $V = \mathbb{R}^n$ a $W = \mathbb{R}^m$, tak ide presne o definíciu totálneho diferenciálu v bode x. Ten budeme značiť $Df[x]$.

Pre Hilbertove priestory sa Davidovi Preissovi a Joramovi Lindenstraussovi podarilo dokázať nasledujúcu vetu [2, str. 263].

Veta 3. *Nech G je neprázdna otvorená podmnožina Hilbertovho priestoru, potom každá dvojica f, g reálnych lipschitzovských funkcií má spoločný bod fréchetovskej diferencovateľnosti.*

Pre obecnejšie, no technickejšie tvrdenie pozri [2, str. 263]. Vystala prirodzená otázka, či je možné nájsť spoločný bod diferencovateľnosti pre ľubovoľný konečný, poprípade spočetný počet reálnych lipschitzovských funkcií. Pokiaľ by sa, podobne ako v Rademacherovej vete, podarilo nájsť taký netriviálny σ-ideál, že každá lipschitzovská funkcia je diferencovateľná v každom bode, až na body tohoto σ-ideálu, tak by sme dosiahli daný výsledok. Γ-nulové množiny sa ukázali, aspoň pre niektoré priestory, ako vhodný σ-ideál [2, str. 114].

Veta 4. *Nech $(B, ||\cdot||)$ je Banachov priestor so separabilným duálnym priestorom. Potom každá reálna lipschitzovská funkcia f z otvorenej množiny $G \subset B$ je fréchetovsky diferencovateľná v každom bode G, až na Γ-nulovú množinu, práve vtedy, keď je každá σ-pórovitá množina Γ-nulová (pre definíciu σ-pórovitosti poz. [2, str. 10]).*

Napríklad priestor c_0 a jeho podpriestory, či priestor $C(K)$, kde K je spočetný kompakt, túto vlastnosť majú [2, str. 114].

V tejto bakalárskej práci sa budeme venovať vlastnostiam Γ-nulových množín a vlastnostiam štruktúr, ktoré sú relevantné pri ich konštrukcii. Bakalárska práca sa primárne opiera o článok od Jorama Lindenstraussa a Davida Preissa *On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces* [3].

V zvyšku úvodu sa budeme venovať pripomenutiu niektorých klasických výsledkov a značenia, ktoré budeme v texte používať.

V druhej kapitole, podľa článku [3], zavedieme Γ-nulové množiny. Pri ich definícii zohráva dôležitú rolu istý priestor funkcií, na ktorého vlastnosti sa tiež v tejto kapitole bližšie pozrieme. Špeciálne si ukážeme, že tento priestor je úplne metrizovateľný, čo priamo nepreberáme z literatúry.

V tretej kapitole si ukážeme, že Γ-nulové množiny tvoria netriviálny σ-ideál a dobudujeme sa ku tvrdeniu o vzťahu Γ-nulových a lebesgueovsky nulových množín v $\mathbb{R}^n$.

1.2 Štandardné definície a vety

Definícia 5. Nech A je množina, potom $\mathcal{P}(A)$ budeme značiť množinu všetkých podmnožín množiny A a nazývať *potenčnou množinou.*

Definícia 6. *Otvorenú guľu* o *strede* x a *polomere* r v $\mathbb{R}^n$ budeme značiť $U^n(x,r)$ a $S^{n-1}(x,r)$ bude značiť *sféru.* Pokiaľ (X, ρ) je metrický priestor, tak $U_X(x,r)$ bude značiť otvorenú guľu vzhľadom k príslušnej metrike a s príslušným stredom a polomerom, podobne $S_X(x,r)$ bude značiť sféru. V prípade, že neuvedieme stred a polomer, tak predpokladáme, že stred je bod 0 a polomer je 1.

Definícia 7. Nech $\{(X_i, \mathbf{S}_i)\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť priestorov opatrených σ-algebrami $\mathbf{S}_i$. Potom pre $n \in \mathbb{N}$ definujeme $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$ ako najmenšiu σ-algebru obsahujúcu množiny

$$\{A_1 \times \cdots \times A_n; \forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon A_i \in \mathbf{S}_i\}.$$

Takto vytvorenú σ-algebru budeme nazývať *súčinom* σ-algebier $\mathbf{S}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pre $n = \infty$ definujeme $\bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ ako najmenšiu σ-algebru obsahujúcu množiny

$$\Big\{\bigtimes_{i=1}^{k} A_i \times \bigtimes_{i=k+1}^{\infty} X_i; k \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1,\dots,k\}\colon A_i \in \mathbf{S}_i\Big\}.$$

Podobne túto σ-algebru budeme nazývať *súčinom* σ-algebier $\mathbf{S}_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Pre $n \in \mathbb{N}$ budeme λ^n značiť n-rozmernú Lebesgueovu mieru. Pre konečný súčin mier poz. [4, str. 144]. Ďalej budeme potrebovať aj jej nekonečne rozmernú obdobu. Na jej existenciu potrebujeme nasledujúcu vetu [4, str. 157].

Veta 8 (O existencii súčinovej miery)**.** *Nech* $\{(X_i, \mathbf{S}_i, \mu_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *je postupnosť priestorov s mierou splňujúcich* $\mu_i(X_i) = 1$*. Potom existuje práve jedna miera* μ*, definovaná na* σ*-algebre* $\mathbf{S} = \bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i$ *taká, že ak* $A \in \bigtimes_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$*, pre* $n \in \mathbb{N}$ *ľubovoľné, tak*

$$\mu(A \times \bigtimes_{i=n+1}^{\infty} X_i) = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)(A).$$

Miera μ *sa nazýva súčinovou mierou mier* μ_i*,* $i \in \mathbb{N}$*. Budeme ju ďalej značiť* $\mu = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i$*. Priestor s mierou*

$$\Big(\bigtimes_{i=1}^{\infty} X_i, \bigtimes_{i=1}^{\infty} \mathbf{S}_i, \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mu_i\Big)$$

je súčinom daných priestorov s mierou.

V texte budeme používať väčšie množstvo rozličných noriem. Štandardnejšie z nich zavádza nasledujúca definícia.

Definícia 9.

- Zobrazenie $||\cdot||_\infty : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, definované ako $||A||_\infty = \max\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |a_{i,j}|$, budeme nazývať *maximovou normou*. Podobne budeme *maximovú normu* uvažovať na priestore $\mathbb{R}^n$ a budeme ju značiť rovnako.
- Nech $\mathcal{L}(X,Y)$ predstavuje priestor spojitých lineárnych zobrazení z priestoru X do priestoru Y. Normou $||\cdot||_{\mathcal{L}(X,Y)} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$ myslíme normu $||f||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x\in U_X} ||f(x)||_Y$. Pokiaľ X nie je jednobodovým priestorom, tak dané zobrazenie je zhodné so zobrazením $\sup_{x\in S_X} ||f(x)||_Y$.
- Pre $n \in \mathbb{N}$, normou $||\cdot||_e$ myslíme *euklidovskú normu* na priestore $\mathbb{R}^n$.

Definícia 10. Nech $||\cdot||_1$ a $||\cdot||_2$ sú normy na vektorovom priestore X. Pokiaľ existujú čísla $a, b > 0$ také, že pre každé $x \in X$ platí

$$a \cdot ||x||_1 \le ||x||_2 \le b \cdot ||x||_1 ,$$

tak o príslušných normách povieme, že sú *ekvivalentné*.

Veta 11 (O ekvivalencii noriem)**.** *Ak* X *je konečne dimenzionálny vektorový priestor, tak sú na ňom každé* 2 *normy ekvivalentné.*

Pre dôkaz pozri [5, str. 75].

Definícia 12. Nech X je množina a $A \subset X$. Potom funkcia $\mathbf{1}_A(\cdot)\colon X \to \mathbb{R}$ je definovaná ako

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Danú funkciu nazývame *charakteristickou funkciou* množiny A.

Definícia 13. Nech (X, ρ) a (Y, σ) sú metrické priestory a nech $\mathcal{M} \subset \{f\colon X \to Y\}$, ďalej nech $a \in X$. Potom povieme, že funkcie množiny $\mathcal{M}$ sú *rovnako spojité v bode* a, pokiaľ platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall f \in \mathcal{M}\, \forall x \in X\colon \rho(x,a) < \delta \implies \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Ďalej povieme, že sú *rovnako spojité*, pokiaľ sú rovnako spojité v každom bode $a \in X$.

Definícia 14. Nech X je množina, (Y, σ) je metrický priestor a pre všetky $n \in \mathbb{N}$ je $f_n\colon X \to Y$ zobrazenie. Potom o postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ povieme, že je *rovnomerne cauchyovská*, pokiaľ platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n,m \in \mathbb{N}\, \forall x \in X\colon n,m > n_0 \implies \sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Lema 15. *Nech $\varphi\colon U^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie spĺňajúce, že pre každé $x \in S^{n-1}$ je $\langle \varphi(x), x\rangle \geq 0$. Pričom $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$. Potom existuje $y \in \overline{U}$ také, že $\varphi(y) = 0$.*

Pre dôkaz pozri [6, str. 53]. My budeme používať jednoduchý dôsledok.

Dôsledok 16. *Nech $\varphi\colon U^n \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie spĺňajúce, že pre každé $x \in S^{n-1}$ je $\langle \varphi(x), x\rangle > 0$. Potom existuje $y \in U$ také, že $\varphi(y) = 0$.*

Dôkaz. Všimnime si, že sme zosilnili predpoklady, takže záver Lemy 15 platí. Existuje teda $y \in \overline{U}$ také, že $\varphi(y) = 0$. Pre spor predpokladajme, že $y \in \partial U = S^{n-1}$, potom $\langle \varphi(y), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$. To nám dáva spor, vďaka tomu existuje $y \in U$ tak, že $\varphi(y) = 0$.

❑

Kapitola 2

Definícia Γ-nulovej množiny

2.1 Definícia Γ-nulovej množiny

V tejto sekcii zavedieme Γ-nulové množiny a pojmy k tomu potrebné. Definícia priamo vychádza z článku [3]. V sekcii sa jej oproti zdroju budeme venovať o niečo podrobnejšie. Napríklad overíme, že pseudometriky generujúce topológiu priestoru funkcií $\Gamma(X)$ sú naozaj pseudometriky.

Definícia 17. Ako nosnú množinu si voľme $T = [0,1]^{\mathbb{N}}$ a postupne na nej zaveďme:

- Mieru. Uvažujme postupnosť $\{([0,1], \mathbf{B}([0,1]), \lambda^1\restriction_{[0,1]})\}_{i=1}^{\infty}$. Potom, podľa Vety 8 (O existencii súčinovej miery), je na priestore $T = [0,1]^{\mathbb{N}}$ jednoznačne definovaná súčinová miera. Tú budeme značiť λ a nazývať *Lebesgueovou mierou* na priestore T.

- Topológiu. Priestor T je kartézskym súčinom kompaktných topologických priestorov $[0,1]$, budeme na ňom teda uvažovať súčinovú topológiu.

- Algebrické operácie. Priestor T je podmnožinou vektorového priestoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Operácie súčtu a súčinu na prvkoch priestoru T budeme uvažovať, tam kde sú dobre definované, ako operácie zdedené z priestoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Poznámka. Ako topologický priestor ide o Hilbertovu kocku [7, str. 83]. Podľa Tychonovovej vety [7, str. 138] je priestor T, ako súčin kompaktných topologických priestorov, topologický kompakt. Ďalej, ako spočetný súčin úplne metrizovateľných topologických priestorov, je úplne metrizovateľný [7, str. 270]. Preto naň vieme nahliadať aj ako na metrický kompakt. Budeme na ňom uvažovať kompatibilnú metriku $\rho(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}$, $a,b \in T$.

Definícia 18. Nech $T = [0,1]^{\mathbb{N}}$ a Y je Banachov priestor. Ďalej, nech $f\colon T \to Y$ je zobrazenie a pre i prirodzené, $e_i = (0, \dots, 0,1,0, \dots)$, kde sa jednotka nachádza na i-tej pozícii. Potom definujeme *parciálnu deriváciu v bode $x \in T$, vzhľadom k T*, ako nasledujúcu limitu, pokiaľ existuje

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x + t \cdot e_i \in T}} \frac{f(x + t \cdot e_i) - f(x)}{t}.$$

Budeme ju značiť $\partial_i^T f(x)$.

Poznámka. Pre zjednodušenie vyjadrovania, pokiaľ nebude hroziť nedorozumenie, budeme práve zadefinovanú limitu nazývať i-tou parciálnou deriváciou (podobne ako v [3]).

Ďalej si všimnime, že pre $i \in \mathbb{N}$ také, že $x_i \in (0,1)$, platí

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x+t\cdot e_i\in T}} \frac{f(x+t\cdot e_i)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\cdot e_i)-f(x)}{t},$$

akonáhle je t dosť blízko 0, tak už $x+t\cdot e_i \in T$, to nám dáva rovnosť. Druhá limita je štandardnou parciálnou deriváciou a budeme ju značiť $\partial_i f(x)$.

Pre $i \in \mathbb{N}$, splňujúce $x_i = 0$, dostávame:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x+t\cdot e_i\in T}} \frac{f(x+t\cdot e_i)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t\cdot e_i)-f(x)}{t},$$

čo je parciálna derivácia sprava. Nakoniec pre $x_i = 1$ dostaneme parciálnu deriváciu zľava.

Definícia 19. Nech $(X, ||\cdot||)$ je Banachov priestor. Potom $\Gamma(X)$ budeme značiť priestor všetkých spojitých zobrazení $\gamma\colon T \to X$ takých, že majú všetky parciálne derivácie $\partial_i^T \gamma$ spojité, kde $i \in \mathbb{N}$.

Poznámka. Rovno môžeme spraviť pozorovanie, že ako spojité funkcie na kompakte sú rovnomerne spojité. Ďalej si všimnime, že $\Gamma(X)$ je lineárny vektorový priestor. Násobenie skalárom a sčítavanie funkcií nám nepokazí spojitosť, ani spojitosť parciálnych derivácií.

Lema 20. *Nech $(X,||\cdot||)$ je Banachov priestor. Uvažujme pre $k \in \mathbb{N}$ funkcie*

$$||\cdot||_0, ||\cdot||_k, ||\cdot||_{\le k}\colon \Gamma(X) \to \mathbb{R},$$

definované nasledovne:

$$\begin{aligned} ||\gamma||_0 &= \sup_{t\in T} ||\gamma(t)||,\\ ||\gamma||_k &= \sup_{t\in T} ||\partial_k^T \gamma(t)||,\\ ||\gamma||_{\le k} &= \max_{0\le j\le k} ||\gamma||_j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Potom funkcie $||\cdot||_0$ a $||\cdot||_{\le k}$ sú normami na $\Gamma(X)$ a funkcie $||\cdot||_k$ sú seminormami na $\Gamma(X)$.

Dôkaz. Najprv ukážme, že $||\cdot||_k$ je seminorma. Voľme $k \in \mathbb{N}$ ľubovoľné. Nezápornosť $||\cdot||_k$ máme z toho, že robíme suprémum cez nezáporné hodnoty. Pozitívnu homogenitu dostávame postupne z linearity parciálnych derivácií (v príslušných bodoch jednostranných), pozitívnej homogenity normy v X a vynímania nezáporného skaláru pred suprémum. Nakoniec, nech $\alpha, \beta \in \Gamma(X)$, potom trojuholníkovú nerovnosť dostávame z nasledovného rozpisu:

$$||\alpha+\beta||_k = \sup_{t\in T} ||\partial_k^T(\alpha+\beta)(t)|| = \sup_{t\in T} ||\partial_k^T \alpha(t) + \partial_k^T \beta(t)|| \le$$

$$\le \sup_{t\in T} \left(||\partial_k^T \alpha(t)|| + ||\partial_k^T \beta(t)||\right) \le \sup_{t\in T} ||\partial_k^T \alpha(t)|| + \sup_{t\in T} ||\partial_k^T \beta(t)|| = ||\alpha||_k + ||\beta||_k.$$

To, že $||\cdot||_0$ je seminorma sa ukáže analogicky. Všimnime si však, že ide dokonca o normu. Ak $\sup_{t\in T}||\gamma(t)|| = 0$ tak pre každé $t \in T$ platí, že $||\gamma(t)|| = 0$. To je však norma na X, takže aj $\gamma(t) = 0$, čiže naozaj $||\cdot||_0$ je normou. Funkcia $||\cdot||_{\le k}$ je tiež zjavne pozitívne homogénna a nezáporná. Nech $\alpha, \beta \in \Gamma(X)$, potom trojuholníkovú nerovnosť dostaneme nasledovne:

$$||\alpha+\beta||_{\le k} = \max_{0\le j\le k} ||\alpha+\beta||_j \le \max_{0\le j\le k} (||\alpha||_j + ||\beta||_j) \le$$

$$\le \max_{0\le j\le k} ||\alpha||_j + \max_{0\le j\le k} ||\beta||_j = ||\alpha||_{\le k} + ||\beta||_{\le k}.$$

Nakoniec si všimnime, že pre každé k prirodzené, pokiaľ $||\gamma||_{\le k} = 0$, tak aj $||\gamma||_0 = 0$ a teda $||\cdot||_{\le k}$ je tiež normou.

❑

Definícia 21. Na priestore $\Gamma(X)$ môžeme uvažovať topológiu indukovanú normami $||\cdot||_{\le k}$ (tzn. ide o topológiu, ktorej báza je $\mathbf{B} = \{U_{||\cdot||_{\le k}}(\alpha, r) \colon \alpha \in \Gamma(X), r > 0, k \in \mathbb{N}\}$).

Definícia 22. Nech $(X, ||\cdot||)$ je Banachov priestor. Množinu $A \subset X$ budeme nazývať Γ-*nulovou*, pokiaľ existuje $B \subset X$ borelovská taká, že $A \subset B$ a $\lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in B\}) = 0$ pre reziduálne veľa $\gamma \in \Gamma(X)$. Systém všetkých Γ-nulových množín na X budeme značiť $\Gamma_0(X)$.

2.2 Základné vlastnosti priestoru $\Gamma(X)$

V tejto sekcii sa pozrieme na vlastnosti priestoru $\Gamma(X)$. Väčšinou ide o podrobnejšie dokázané výsledky z článku [3], ktoré budeme potrebovať pri dôkaze vety o vzťahu Γ-nulových a Lebesgueovsky nulových množín. Výnimkou je tvrdenie o úplnej metrizovateľnosti priestoru $\Gamma(X)$, ktoré sa priamo neopiera o zdrojový text.

Definícia 23. Nech $(X, ||\cdot||)$ je Banachov priestor. Ďalej nech $a,b \in \mathbb{N}, \gamma \in \Gamma(X)$ a $s \in T$, potom definujeme zobrazenie $\gamma_{a,b,s} \colon [0,1]^b \to X$, ako

$$\gamma_{a,b,s}(t_1, \dots, t_b) = \gamma(s_1, \dots, s_a, t_1, \dots, t_b, s_{a+1}, s_{a+2}, \dots).$$

Tiež zaveďme zobrazenia $\gamma^T_{a,b,s} \colon T \to X$, ako

$$\gamma^T_{a,b,s}(t) = \gamma(s_1, \dots, s_a, t_1, \dots, t_b, s_{a+1}, s_{a+2}, \dots).$$

Pokiaľ $a = 0$, tak ho budeme pri značení vynechávať.

Lema 24. *Nech $(X, ||\cdot||)$ je Banachov priestor. Potom pre každé $\gamma \in \Gamma(X), m \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $s \in T$ platí*

$$\left|\left|\gamma^T_{k,s} - \gamma\right|\right|_{\le m} < \varepsilon.$$

Dôkaz. Pre účely dôkazu $\partial^T_0 f = f$. Ďalej nech $\gamma \in \Gamma(X), m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ dané, z rovnomernej spojitosti γ nájdime $\delta_0 > 0$ také, že

$$\forall x, y \in T \colon \rho(x,y) < \delta_0 \implies ||\gamma(x) - \gamma(y)|| < \varepsilon/2.$$

Podobne z rovnomernej spojitosti $\partial_1^T\gamma,\ \dots\ ,\partial_m^T\gamma$ nájdime $\delta_1,\ \dots\ ,\delta_m > 0$ spĺňajúce

$$\forall i \in \{1,\dots,m\}\ \forall x,y \in T\colon \rho(x,y) < \delta_i \implies \left|\left|\partial_i^T\gamma(x) - \partial_i^T\gamma(y)\right|\right| < \varepsilon/2.$$

Pripomeňme, že $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. Nájdime $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} < \min\{\delta_0,\dots,\delta_m\}$. Potom pre toto k platí:

$$\left|\left|\gamma_{k,s}^T - \gamma\right|\right|_{\leq m} = \max_{0\leq i\leq m}\left(\sup_{t\in T}\left|\left|\partial_i^T\gamma(t_1,\dots,t_k,s_1,\dots) - \partial_i^T\gamma(t)\right|\right|\right) \overset{(*)}{\leq} \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Kde $(*)$ je iba rovnomernou spojitosťou príslušných funkcií a jednoduchým pozorovaním, že pre každé $t,s \in T$ platí:

$$\rho\big((t_1,\dots,t_k,s_1,\dots),t\big) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|s_{n-k} - t_n|}{2^n} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} < \min\{\delta_0,\dots,\delta_m\}.$$

❑

Dôsledok 25. *Pokiaľ $\Gamma_k(X)$ značí množinu tých $\gamma \in \Gamma(X)$, ktoré sú závislé na prvých k súradniciach, tak množina $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k(X)$ je hustá v $\Gamma(X)$.*

Nasledujúca lema je veľmi dôležitá, lebo apriórne nie je jasné ako by mohli vyzerať netriviálne reziduálne množiny v priestore $\Gamma(X)$ a ako by sme teda mohli Γ-nulovosť testovať.

Lema 26. *Nech $(X,||\cdot||)$ je Banachov priestor, $n \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon > 0$. Ďalej nech pre každé $j \in \{1,\dots,n\}$ je $u_j \in X$. Potom je množina*

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \left\{\gamma \in \Gamma(X); \exists k \in \mathbb{N}\ \exists c > 0\colon \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c \cdot \partial_{k+j}^T\gamma(t) - u_j\right|\right| < \varepsilon\right\}$$

hustá a otvorená v $\Gamma(X)$.

Dôkaz. Fixujme $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ a $u_j \in X$ pre $j \in \{1,\dots,n\}$. Najprv ukážeme otvorenosť množiny $\mathcal{M}_\varepsilon$. Nech $\gamma \in \mathcal{M}_\varepsilon$ (neprázdnosť $\mathcal{M}_\varepsilon$ sa ukáže pri dôkaze hustoty), potom existuje $c_\gamma > 0$, $k_\gamma \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ tak, že platí nerovnosť

$$\max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t) - u_j\right|\right| < \varepsilon - \delta.$$

Pre $U_{||\cdot||_{\leq k_\gamma+n}}(\gamma,\delta/c_\gamma)$ otvorené okolie γ (poz. Definícia 21) voľme ľubovoľné $\gamma_1 \in U_{||\cdot||_{\leq k_\gamma+n}}(\gamma,\delta/c_\gamma)$. Z nasledujúceho výpočtu dostávame, že $\gamma_1 \in \mathcal{M}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma_1(t) - u_j\right|\right| \\
&= \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma_1(t) - c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t) + c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t) - u_j\right|\right| \\
&\leq \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left(\left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma_1(t) - c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t)\right|\right| + \left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t) - u_j\right|\right|\right) \\
&\leq \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma_1(t) - c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t)\right|\right| + \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c_\gamma \cdot \partial_{k_\gamma+j}^T\gamma(t) - u_j\right|\right| \\
&\leq |c_\gamma| \cdot ||\gamma_1 - \gamma||_{\leq k_\gamma+n} + \varepsilon - \delta < c_\gamma \cdot \frac{\delta}{c_\gamma} + \varepsilon - \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Množina $\mathcal{M}_\varepsilon$ je teda otvorená. Ďalej ukážme, že je hustá v $\Gamma(X)$. Na to nám podľa Dôsledku 25 stačí, že uzáver $\mathcal{M}_\varepsilon$ obsahuje množinu $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k(X)$.

Nech $k \in \mathbb{N}$ ľubovoľné a $\gamma_0 \in \Gamma_k(X)$. Potom nájdeme postupnosť v $\mathcal{M}_\varepsilon$, ktorá k nemu konverguje. Pre každé $m \in \mathbb{N}$ definujme

$$\gamma_m(t) = \gamma_0(t) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} t_{k+j}u_j.$$

Potom postupne dostávame:
Pre $l = 0$

$$||\gamma_m - \gamma_0||_l = ||\gamma_m - \gamma_0||_0 = \sup_{t\in T}\left|\left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} t_{k+j}u_j\right|\right| \leq \frac{n \cdot \max\limits_{1\leq j\leq n}\{||u_j||\}}{m}.$$

Pre $0 < l \leq k$ a pre $l > k+n$

$$||\gamma_m - \gamma_0||_l = \sup_{t\in T}\left|\left|\partial_l^T\gamma_0(t) + \partial_l^T\Big(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} t_{k+j}u_j\Big) - \partial_l^T\gamma_0(t)\right|\right| = 0.$$

Pre $l \in \{k+1, \ldots, k+n\}$

$$||\gamma_m - \gamma_0||_l = \sup_{t\in T}\left|\left|\partial_l^T\gamma_0(t) + \partial_l^T\Big(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} t_{k+j}u_j\Big) - \partial_l^T\gamma_0(t)\right|\right| = \frac{||u_{l-k}||}{m}.$$

Ukážeme, že γ_m naozaj konvergujú ku γ_0. Pre každé otvorené okolie γ_0 vieme nájsť bázovú množinu $U_{||\cdot||_{\leq z}}(\gamma, r)$, ktorá v ňom bude obsiahnutá. Avšak pre každé $z \in \mathbb{N}$ a $r > 0$, z práve vypočítaného, existuje $m_0 \in \mathbb{N}$, že pre každé $m > m_0, \gamma_m \in U_{||\cdot||_{\leq z}}(\gamma, r)$, čo sme chceli. Nakoniec pre $m \in \mathbb{N}$ ľubovoľné a $c = m$ dostávame:

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|m\cdot\partial_{k+j}^T\gamma_m(t) - u_j\right|\right| \\
&= \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|m\cdot\partial_{k+j}^T\gamma_0(t) + m\cdot\partial_{k+j}^T\Big(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} t_{k+i}u_i\Big) - u_j\right|\right| \\
&= \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}||0 + u_j - u_j|| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Takže $\gamma_m \in \mathcal{M}_\varepsilon$, čo mimo iného dokazuje aj neprázdnosť množiny $\mathcal{M}_\varepsilon$.

❑

Veta 27 (Moore-Osgood)**.** *Nech (X,ρ) je metrický priestor a (Y,σ) je úplný metrický priestor. Nech $E \subset X$ a h je hromadný bod množiny E. Ďalej nech $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť funkcií takých, že rovnomerne konvergujú ku funkcii $f\colon X \to Y$ na E. Ďalej predpokladajme, že pre $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{\substack{t\to h\\ t\in E}} f_n(t) = A_n.$$

Potom postupnosť $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje a platí

$$\lim_{\substack{t\to h\\ t\in E}} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Pre dôkaz pozri [8, str. 149].

Lema 28. *Nech X, Y sú Banachove priestory a $U \subset X$ je konvexná, otvorená množina. Ďalej nech $F\colon U \to Y$ je fréchetovsky diferencovateľná v každom bode U spĺňajúca*

$$\sup\{||F'[x]||_{\mathcal{L}(X,Y)} : x \in U\} = M < \infty.$$

Potom

$$\forall x, y \in U\colon\ ||F(x) - F(y)||_Y \leq M \cdot ||x - y||_X\,.$$

Pre dôkaz pozri [9, str. 22-23].

Dôsledok 29. *Pokiaľ k predpokladom predchádzajúcej lemy pridáme predpoklad spojitosti funkcie F na $\overline{U}$, tak dokonca dostávame:*

$$\forall x, y \in \overline{U}\colon\ ||F(x) - F(y)||_Y \leq M \cdot ||x - y||_X\,.$$

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ ľubovoľné. Pre x, $y \in \overline{U}$ uvažujme $a, b \in U$ tak, aby

$$\max\{||x - a||_X\,, ||y - b||_X\,, ||F(x) - F(a)||_Y\,, ||F(y) - F(b)||_Y\} < \varepsilon/2.$$

To vieme vďaka spojitosti F. Potom dostávame:

$$\begin{aligned} ||F(x) - F(y)||_Y &\leq ||F(x) - F(a)||_Y + ||F(a) - F(b)||_Y + ||F(b) - F(y)||_Y \\ &\leq \varepsilon + M \cdot ||a - b||_X \leq \varepsilon + M \cdot (||a - x||_X + ||x - y||_X \\ &+ ||y - b||_X) \leq \varepsilon \cdot (1 + M) + M \cdot ||x - y||_X\,. \end{aligned}$$

Keďže M je nezávislé na ε pevné a ε bolo ľubovoľné, tak dostávame požadované tvrdenie.

❑

Lema 30. *Nech X je množina a (Y, ρ) je metrický priestor. Ďalej nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne cauchyovská postupnosť zobrazení z X do Y. Pokiaľ bodovo konverguje k zobrazeniu $f\colon X \to Y$, tak už ide o rovnomernú konvergenciu.*

Dôkaz. Pre $\varepsilon > 0$, z rovnomernej cauchyovskosti postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, nájdime $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené n,$m > n_0$ a $x \in X$ je $\rho(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon/2$. Ďalej pre $x \in X$ ľubovoľné z konvergentnosti postupnosti nájdime $n_1 \in \mathbb{N}$, že $n_1 > n_0$ a $\rho(f_{n_1}(x), f(x)) < \varepsilon/2$. Potom pre $n > n_0$ máme:

$$\rho(f(x), f_n(x)) \leq \rho(f(x), f_{n_1}(x)) + \rho(f_{n_1}(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Pričom voľba n_0 bola na x nezávislá.

❑

Veta 31. *Nech $(X, ||\cdot||)$ je Banachov priestor, potom $\Gamma(X)$ je úplne metrizovateľný topologický priestor.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že je metrizovateľný. Uvážme zobrazenie $\rho\colon \Gamma(X) \times \Gamma(X) \to \mathbb{R}$ definované ako

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \min\{||\gamma_1 - \gamma_2||_{\leq i}, 2^{-i}\}.$$

Ide o metriku. Konvergentnosť sumy, nezápornosť, symetria a to, že dostávame 0 práve vtedy keď $\gamma_1 = \gamma_2$ je zrejmé. Trojuholníkovú nerovnosť dostávame jednoducho priamym rozpisom.

Teraz potrebujeme ukázať, že generuje rovnakú topológiu ako normy $||\cdot||_{\leq j}$. Najprv si uvedomme, že rovnakú topológiu ako normy $||\cdot||_{\leq j}$ generujú normy $||\cdot||^1_{\leq j} = \min\{||\cdot||_{\leq j}, 1\}$ a budeme to ukazovať pre tieto modifikované normy. Voľme pre $m \in \mathbb{N}$ a $r > 0$ ľubovoľnú bázovú množinu $U_{||\cdot||^1_{\leq m}}(\gamma_0, r)$ topológie $\Gamma(X)$ a $\gamma_1 \in U_{||\cdot||^1_{\leq m}}(\gamma_0, r)$. Potom $||\gamma_0 - \gamma_1||^1_{\leq m} < r - \delta$, pre dáke $\delta > 0$. Ďalej chceme, že

$$\Big\{\gamma \in \Gamma(X)\colon \rho(\gamma, \gamma_1) < \frac{\delta}{2^m}\Big\} = U_\rho\Big(\gamma_1, \frac{\delta}{2^m}\Big) \subset U_{||\cdot||^1_{\leq m}}(\gamma_0, r).$$

Tak voľme $\gamma_2 \in U_\rho(\gamma_1, \frac{\delta}{2^m})$ a počítajme:

$$\begin{aligned}
&||\gamma_0 - \gamma_2||^1_{\leq m} \leq ||\gamma_0 - \gamma_1||^1_{\leq m} + \frac{2^m}{2^m}||\gamma_1 - \gamma_2||^1_{\leq m} \\
&\overset{(*)}{\leq} ||\gamma_0 - \gamma_1||^1_{\leq m} + 2^m \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \min\{||\gamma_1 - \gamma_2||_{\leq i}, 2^{-i}\} < r - \delta + 2^m \cdot \frac{\delta}{2^m} = r.
\end{aligned}$$

Presne v bode $(*)$ využívame, že $||\gamma_1 - \gamma_2||^1_{\leq m} \leq 1$. Takže topológia generovaná metrikou ρ je jemnejšia. Na druhú stranu, nech pre $\gamma_0 \in \Gamma(X)$ a $\varepsilon > 0$ ľubovoľné $\gamma_1 \in U_\rho(\gamma_0, \varepsilon)$. Potom $\rho(\gamma_0, \gamma_1) < \varepsilon - \delta$, pre vhodné $\delta > 0$. Nech $k \in \mathbb{N}$ také, že $\sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-m} < \delta/2$. Potom pre každé $\gamma_2 \in U_{||\cdot||^1_{\leq k}}(\gamma_1, \frac{\delta}{2 \cdot k})$ máme:

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma_0, \gamma_2) &\leq \rho(\gamma_0, \gamma_1) + \rho(\gamma_1, \gamma_2) < \varepsilon - \delta + \sum_{m=1}^{\infty} \min\{||\gamma_1 - \gamma_2||_{\leq m}, 2^{-m}\} \\
&< \varepsilon - \delta + \sum_{m=1}^{k} \min\{||\gamma_1 - \gamma_2||_{\leq m}, 2^{-m}\} + \delta/2 \\
&\overset{(*)}{\leq} \varepsilon - \delta + k \cdot ||\gamma_1 - \gamma_2||^1_{\leq k} + \delta/2 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pre nerovnosť $(*)$ si stačí všimnúť, že ak $a \leq b$, potom $||\gamma||_{\leq a} \leq ||\gamma||_{\leq b}$, ide iba o maximum cez väčšiu množinu. Príslušná metrika teda generuje rovnakú topológiu ako normy z Definície 21.

Už iba ostáva ukázať, že priestor $\Gamma(X)$ je vzhľadom k tejto metrike úplný. Tak nech je cauchyovská postupnosť $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ daná. Všimnime si, že pre každé $t \in T$ a pre každé $i \in \mathbb{N}$ sú aj postupnosti $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\partial_i^T \gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovské v priestore X. Skutočne, nech $i \in \mathbb{N}, 0 < \varepsilon < 2^{-i}$ a $t \in T$ dané. Nájdime $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky prirodzené $n{,}m > n_0$ je $\rho(\gamma_n, \gamma_m) < \varepsilon$. Pre $n{,}m > n_0$ dostávame:

$$
\begin{aligned}
2^{-i} > \varepsilon > \rho(\gamma_n, \gamma_m) &= \sum_{j=1}^{\infty} \min\{||\gamma_n - \gamma_m||_{\leq j}, 2^{-j}\} \\
&\geq \min\{||\gamma_n - \gamma_m||_{\leq i}, 2^{-i}\} = ||\gamma_n - \gamma_m||_{\leq i} \\
&\geq \sup_{s\in T} \left|\left|\partial_i^T \gamma_n(s) - \partial_i^T \gamma_m(s)\right|\right| \geq \left|\left|\partial_i^T \gamma_n(t) - \partial_i^T \gamma_m(t)\right|\right|.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Rovnako pre postupnosť $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. Nahliadnime, že voľba n_0 bola závislá iba na ε a je vhodná pre všetky $t \in T$, takže ide dokonca o rovnomernú cauchyovskosť. Špeciálne ide o cauchyovské postupnosti v úplnom priestore, takže majú limitu. Nasledujúce funkcie vieme definovať ako bodové limity týchto postupností

$$\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(x),$$

$$\gamma^i(x) = \lim_{n\to\infty} \partial_i^T \gamma_n(x).$$

Podľa Lemy 30 postupnosť $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ a postupnosti $\{\partial_i^T \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}, i \in \mathbb{N}$, konvergujú rovnomerne, keďže sú rovnomerne cauchyovské a bodovo konvergentné. Potom γ je rovnomernou limitou spojitých funkcií, takže spojitá [8, str. 150]. Stačí ukázať, že má všetky parciálne derivácie a tie sú spojité, potom už je $\gamma \in \Gamma(X)$, čo dokazuje úplnosť. Už vieme, že funkcie γ^i sú tiež, ako rovnomerné limity spojitých funkcií, spojité. Sú teda dobrým kandidátom na parciálne derivácie funkcie γ. To, že γ^i sú parciálne derivácie zobrazenia γ, dostávame z nasledujúceho výpočtu:

$$
\begin{aligned}
\gamma^i(x) = \lim_{n\to\infty} \partial_i^T \gamma_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{t\to 0 \\ x+t\cdot e_i\in T}} \frac{\gamma_n(x + t\cdot e_i) - \gamma_n(x)}{t} \\
&\overset{(*)}{=} \lim_{\substack{t\to 0 \\ x+t\cdot e_i\in T}} \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n(x + t\cdot e_i) - \gamma_n(x)}{t} \\
&= \lim_{\substack{t\to 0 \\ x+t\cdot e_i\in T}} \frac{\gamma(x + t\cdot e_i) - \gamma(x)}{t} = \partial_i^T \gamma(x).
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Kde $(*)$ je použitím Vety 27. Všimnime si, že spĺňame predpoklady. Najprv 0 je hromadný bod množiny $E = \operatorname{int}(\{t \in (-1{,}1)\colon x+t\cdot e_i \in T\})\setminus\{0\}$ a cieľový priestor X je úplný. Ďalej potrebujeme, že $f_n(t) = \frac{\gamma_n(x+t\cdot e_i)-\gamma_n(x)}{t}$ kovergujú k dákemu A_n ako $t \to 0$. To už máme, keďže pre všetky γ_n, $n \in \mathbb{N}$, všetky parciálne derivácie existujú

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ x+t\cdot e_i\in T}} f_n(t) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ x+t\cdot e_i\in T}} \frac{\gamma_n(x + t\cdot e_i) - \gamma_n(x)}{t} = \partial_i^T \gamma_n(x) = A_n.$$

Nakoniec postupnosť $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne ku $f(t) = \frac{\gamma(x+t\cdot e_i)-\gamma(x)}{t}$ na E. Je zjavné, že na E postupnosť konverguje bodovo ku f. Podľa Lemy 30 nám stačí overiť rovnomernú cauchyovskosť postupnosti $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$.

Pre $\varepsilon > 0$, z rovnomernej cauchyvskosti postupnosti $\{\partial_i^T \gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, nájdime $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $m{,}n > n_0$ a pre každé $z \in T$ platí

$$\left|\left|\partial_i^T \gamma_n(z) - \partial_i^T \gamma_m(z)\right|\right| < \varepsilon.$$

Potom pre $t \in E$ a $n,m > n_0$ ľubovoľné dostávame:

$$
\begin{aligned}
||f_n(t) - f_m(t)|| &= \frac{||(\gamma_n - \gamma_m)(x + t \cdot e_i) - (\gamma_n - \gamma_m)(x)||}{|t|} \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{\left(\sup\limits_{a \in \mathrm{int}(E \cup \{0\})} \left|\left| \Big((\gamma_n - \gamma_m)(x + (\cdot) \cdot e_i) \Big)' [a] \right|\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},X)} \right) \cdot ||t \cdot e_i||}{|t|} \\
&= \sup_{a \in \mathrm{int}(E \cup \{0\})} \left\{ \sup_{y \in \{-1,1\}} \left|\left| \Big((\gamma_n - \gamma_m)(x + (\cdot) \cdot e_i) \Big)' [a](y) \right|\right| \right\} \qquad (2.4) \\
&= \sup_{a \in \mathrm{int}(E \cup \{0\})} \left|\left| \Big((\gamma_n - \gamma_m)(x + (\cdot) \cdot e_i) \Big)' [a] \right|\right| \\
&\overset{(**)}{=} \sup_{a \in \mathrm{int}(E \cup \{0\})} \big|\big| \partial_i^T (\gamma_n - \gamma_m)(x + a \cdot e_i) \big|\big| \\
&= \sup_{a \in \mathrm{int}(E \cup \{0\})} \big|\big| \partial_i^T \gamma_n (x + a \cdot e_i) - \partial_i^T \gamma_m (x + a \cdot e_i) \big|\big| \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Kde $(*)$ je použitie Dôsledku 29 na čitateľ, pre $M = \overline{E \cup \{0\}} \subset \mathbb{R}$, čo je interval, čiže konvexná množina. Zobrazenie $F(t) = (\gamma_n - \gamma_m)(x + t \cdot e_i)$ a krajné body $t, 0 \in M$. Zobrazenie F je rozdiel dvoch spojitých zobrazení na M, čiže je na M spojité. Fréchetovskú diferencovateľnosť pre $t \in \mathrm{int}(M)$ dostávame, lebo v tomto prípade sa zhoduje s nami zavedenými parciálnymi deriváciami, takže fréchetove derivácie existujú. Zároveň nám to objasňuje rovnosť $(**)$. Skutočne:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{\big|\big| F(t+h) - F(t) - \partial_i^T (\gamma_n - \gamma_m)(x + t \cdot e_i) \cdot h \big|\big|}{|h|} \\
&\quad = \Bigg|\Bigg| \lim_{h \to 0} \frac{(\gamma_n - \gamma_m)((x + t \cdot e_i) + h \cdot e_i) - (\gamma_n - \gamma_m)(x + t \cdot e_i)}{h} \\
&\quad - \partial_i^T (\gamma_n - \gamma_m)(x + t \cdot e_i) \Bigg|\Bigg| = 0.
\end{aligned}
$$

Parciálne derivácie sú spojité na celom kompakte T, takže suprémum ich noriem na množine $\{x + t \cdot e_i, t \in E \cup \{0\}\} \subset T$ je konečné. Čiže spĺňame predpoklady Dôsledku 29. Vďaka čomu dostávame rovnomernú cauchyovskosť postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, z ktorej za pomoci Lemy 30 a konvergentnosti tejto postupnosti plynie rovnomerná konvergencia. To bol posledný chýbajúci predpoklad, aby sme mohli použiť Vetu 27 (Moore-Osgood) v rovnosti (2.3). Tým je dôkaz úplnosti zakončený.

❑

Dôsledok 32. *Podľa Baireovej vety [10, str. 41-42] je priestor $\Gamma(X)$, ako úplne metrizovateľný priestor, priestorom druhej kategórie.*

Kapitola 3

Vlastnosti Γ-nulových množín

3.1 Γ-nulové množiny ako σ-ideál

Táto sekcia tiež nie je priamo prebratá z literatúry, avšak ide iba o jednoduché overenie definície. Najzaujímavejším výsledkom je netrivialita priestoru Γ-nulových množín, lebo na ňu potrebujeme Dôsledok 32.

Definícia 33. Nech X je ľubovoľná množina, potom $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme *σ-ideálom*, pokiaľ platí nasledovné:

1. $\emptyset \in \mathcal{N}$,
2. ak $A \subset B$ a $B \in \mathcal{N}$, potom $A \in \mathcal{N}$,
3. ak $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{N}$, potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{N}$.

Veta 34. *Nech $(X, ||\cdot||)$ je Banachov priestor, potom $\Gamma_0(X)$ v ňom tvorí netriviálny σ-ideál. Netrivialitou myslíme, že $\Gamma_0(X) \neq \mathcal{P}(X)$.*

Dôkaz.
1. Najprv ukážeme, že $\emptyset \in \Gamma_0(X)$. Voľme $\gamma \in \Gamma(X)$ ľubovoľné, potom

$$\lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in \emptyset\}) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Pre všetky, špeciálne pre reziduálne veľa $\gamma \in \Gamma(X)$, nám miera vychádza nulová. Prázdna množina je preto Γ-nulová.

2. Ďalej uvažujme $A \subset X$ a $B \in \Gamma_0(X)$ také, že $A \subset B$. Potom z definície Γ-nulovej množiny existuje $C \subset X$ borelovská, taká, že $B \subset C$ a $\lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in C\}) = 0$ pre reziduálne veľa $\gamma \in \Gamma(X)$. Avšak $A \subset B \subset C$ a teda C je hľadaná množina aj pre množinu A. Vďaka tomu je systém $\Gamma_0(X)$ uzavretý na podmnožiny.

3. Nech $A_1, A_2, \dots \in \Gamma_0(X)$, potom nech $B_1, B_2, \dots \subset X$ sú príslušné borelovské množiny, podľa definície Γ-nulovosti. Ďalej definujme $\Gamma_{B_i}(X) = \{\gamma \in \Gamma(X) \colon \lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in B_i\}) = 0\}$. Pre každé $i \in \mathbb{N}$ ide o reziduálnu množinu. Preto aj $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_{B_i}(X) = \Gamma(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(\Gamma(X) \setminus \Gamma_{B_i}(X))$ je reziduálna množina,

pretože ide o doplnok ku spočetnému zjednoteniu množín prvej kategórie. Potom pre $\gamma \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \Gamma_{B_i}(X)$, máme

$$\begin{aligned}\lambda\left(\{t \in T \colon \gamma(t) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}\right) &= \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{t \in T \colon \gamma(t) \in B_i\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in B_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0.\end{aligned}$$

Keďže $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ a pre reziduálne veľa funkcií $\gamma \in \Gamma(X)$ je $\lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}) = 0$. Takže $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ je, ako spočetné zjednotenie borelovských množín, borelovská množina. Takže je množinou, ktorá svedčí o tom, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma_0(X)$. Dostávame, že $\Gamma_0(X)$ skutočne tvorí σ-ideál.

4. Nakoniec ukážeme netrivialitu. Sporom ukážeme, že $X \notin \Gamma_0(X)$. Množina X je očividne borelovská. V takomto prípade

$$\forall \gamma \in \Gamma(X) \colon \lambda(\{t \in T \colon \gamma(t) \in X\}) = 1,$$

takže jediná možnosť aby X bola Γ-nulová je, že $\emptyset$ je reziduálna v $\Gamma(X)$. Inak povedané, $\Gamma(X)$ by bola prvej kategórie. Podľa Dôsledku 32 je však druhej kategórie, čo je spor.

❑

3.2 Γ-nulové množiny v $\mathbb{R}^n$

V tejto sekcii ukážeme už spomínaný vzťah medzi Γ-nulovými a lebesgueovsky nulovými množinami. Tvrdenie aj dôkaz pochádzajú z článku [3]. Prínos tejto sekcie je doplnenie daného dôkazu o vynechané kroky.

Lema 35. *Zobrazenie* $\det \colon \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}$ *je spojité vzhľadom k ľubovoľnej norme na* $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Dôkaz. Vieme, že pre každé $o,p \in \{1,\dots,n\}$ je projekcia $\pi_{o,p} : (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \to a_{o,p}$ lipschitzovská funkcia vzhľadom k maximovej norme, skutočne:

$$\begin{aligned}|\pi_{o,p}((a_{i,j})_{i,j=1}^{n}) - \pi_{o,p}((b_{i,j})_{i,j=1}^{n})| &= |a_{o,p} - b_{o,p}| \\ &\leq \max_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |a_{i,j} - b_{i,j}| = ||A - B||_{\infty}.\end{aligned}$$

Ďalej pri funkcii determinant iba pričítame, poprípade odčítame konečne veľa súčinov týchto projekcí, čiže to je spojitá funkcia vzhľadom k maximovaj norme. Použitím Vety 11 dostávame spojitosť determinantu vzhľadom k ľubovoľnej norme na $\mathbb{R}^{n\times n}$.

❑

Lema 36. *Nech* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *sú otvorené, ďalej nech* $f \colon A \to B$ *je difeomorfizmus týchto množín. Nech* $C \subset B$ *borelovská, potom platí nasledovné:*

- $\lambda^n(C) > 0$ *práve vtedy, keď* $\lambda^n(f^{-1}(C)) > 0$,
- $\lambda^n(C) = 0$ *práve vtedy, keď* $\lambda^n(f^{-1}(C)) = 0$.

Dôkaz. Najprv ukážeme, že ak $\lambda^n(C) > 0$, potom $\lambda^n(f^{-1}(C)) > 0$. Najprv $f^{-1}(C)$ ako spojitý vzor borelovskej množiny je borelovská, čiže merateľná množina. Nerovnosť vychádza z nasledujúceho výpočtu:

$$\begin{aligned} \lambda^n(f^{-1}(C)) &= \int_{f^{-1}(C)} 1 d\lambda^n(x) \overset{(*)}{=} \int_C \left|\det(Df^{-1}[x])\right| d\lambda^n(x) \\ &\overset{(**)}{=} \int_C \frac{1}{|\det(Df[f^{-1}(x)])|} d\lambda^n(x) \overset{(***)}{>} 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Rovnosť označená $(*)$ je klasickou vetou o substitúcií [11, str. 153-155]. Druhú označenú rovnosť objasňuje nasledujúci výpočet. Keďže f je difeomorfizmom a vedie z $A \subset \mathbb{R}^n$ do $B \subset \mathbb{R}^n$, tak pre $x \in A$ môžeme použiť retiazkové pravidlo [8, str. 214].

$$\begin{aligned} 1 &= |\det(D\,\mathrm{Id}[x])| = \left|\det\left(D(f \circ f^{-1})[x]\right)\right| = \left|\det\left(Df[f^{-1}(x)] \circ Df^{-1}[x]\right)\right| \\ &= \left|\det\left(Df[f^{-1}(x)]\right) \cdot \det\left(Df^{-1}[x]\right)\right| = \left|\det\left(Df[f^{-1}(x)]\right)\right| \cdot \left|\det\left(Df^{-1}[x]\right)\right|. \end{aligned}$$

Nerovnosť označenú ako $(***)$ dostávame vďaka tomu, že integrujeme cez množinu nenulovej miery kladnú funkciu. Podarilo sa nám dokázať, že vzor množiny s kladnou mierou pri difeomorfizme má kladnú mieru. Keďže ide o difeomorfizmus, aj inverz je difeomorfizmom. Preto aj obraz množiny s kladnou mierou má kladnú mieru, čo dokazuje prvú odrážku v znení. Druhá odrážka je iba obmeneným výrokom a nezápornosťou miery.

❑

Veta 37. *Uvážme na* $\mathbb{R}^n$ *ľubovoľnú normu* $||\cdot||$. *Ďalej nech* $A \subset \mathbb{R}^n$ *je borelovská množina. Potom* $\lambda^n(A) = 0$ *práve vtedy, keď* $A \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

Dôkaz. $\Longleftarrow$ Budeme postupovať obmenou, nech $\lambda^n(A) > 0$. Ďalej nech $e_1, \ldots, e_n$ sú kanonické vektory v $\mathbb{R}^n$ a $e = (1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Definujme $\hat{\gamma}_0 \colon T \to \mathbb{R}^n$ nasledovne

$$\hat{\gamma}_0(t) = \sum_{i=1}^n t_i e_i.$$

Nech $U_{1/2} = U^n(1/2 \cdot e, 1/2) \times T$, potom existuje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ taký, že $\lambda^n(A \cap (\hat{\gamma}_0(U_{1/2}) + v)) > 0$. Jeho existenciu dokážeme nasledovne. Najprv si uvedomme, že $\hat{\gamma}_0(U_{1/2}) = U^n(1/2 \cdot e, 1/2)$. Ďalej uvážme $\mathbb{Q}^n$, ide o spočetnú množinu, pri ktorej navyše platí $\bigcup_{v \in \mathbb{Q}^n} (v + \hat{\gamma}_0(U_{1/2})) = \mathbb{R}^n$. Potom ak pre každé $v \in \mathbb{Q}^n$ platí $\lambda^n(A \cap (\hat{\gamma}_0(U_{1/2}) + v)) = 0$, tak dostávame

$$
\begin{aligned}
\lambda^n(A) &= \lambda^n\Big(A \cap \bigcup_{v\in\mathbb{Q}^n} (v+\hat{\gamma}_0(U_{1/2}))\Big) \\
&\leq \sum_{v\in\mathbb{Q}^n} \lambda^n(A\cap(v+\hat{\gamma}_0(U_{1/2}))) = \sum_{v\in\mathbb{Q}^n} 0 = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

To je spor s predpokladom, že $\lambda^n(A) > 0$. Takže existuje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ taký, že $\lambda^n(A\cap(\hat{\gamma}_0(U_{1/2})+v)) > 0$.Pre toto v definujme

$$
\gamma_0(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i + v.
$$

Podľa Vety 11 nájdime reálnu konštantu $C > 0$, aby

$$
\forall x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| \geq C\cdot ||x||_\infty. \tag{3.3}
$$

Fixujme $s = (s_1, s_2, \dots) \in T$ a $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ ľubovoľné a podľa Definície 23 uvažujme $\gamma_{n,s}$. Ďalej vieme, že $\partial_i^T\gamma$ je pre každé i prirodzené spojité na T. Špeciálne teda platí, že všetky parciálne derivácie zobrazenia γ sú spojité v bode $(t_1,\dots,t_n,s_1,s_2,\dots) \in T$ a preto $\gamma_{n,s}$ má v bode $(t_1,\dots,t_n) \in (0{,}1)^n$ totálny diferenciál. Pokiaľ bude regulárny, tak budeme môcť použiť vetu o lokálnom difeomorfizme [12, str. 79].

Ukážeme, že $\det(D\gamma_{n,s}[t]) > 0$ pre γ z dákeho okolia zobrazenia γ_0 a každé $t \in (0{,}1)^n$. Najprv tvrdíme, že pre ľubovoľné $s = (s_1, s_2, \dots) \in T$ je množina zobrazení

$$
\mathcal{M} = \{\varphi_a \colon \Gamma(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times n}; a \in (0{,}1)^n \colon \varphi_a(\beta) = D\beta_{n,s}[a]\}
$$

rovnako spojitá v bode γ_0.

Nech teda $\varepsilon > 0$, voľme $\delta = C\cdot\varepsilon$. Ďalej nech $a \in (0{,}1)^n$ dané, potom pre $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ také, že $\delta \geq ||\gamma-\gamma_0||_{\leq n}$, dostávame:

$$
\begin{aligned}
C\cdot\varepsilon &\geq ||\gamma-\gamma_0||_{\leq n} = \max_{0\leq j\leq n} ||\gamma-\gamma_0||_j \geq \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T} ||\partial_j^T(\gamma-\gamma_0)(t)|| \\
&= \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T} ||\partial_j^T\gamma(t)-e_j|| \geq \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in[0,1]^n\times\{s\}} ||\partial_j^T\gamma(t)-e_j|| \\
&\geq \max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in(0,1)^n} ||\partial_j\gamma_{n,s}(t)-e_j|| \geq \max_{1\leq j\leq n} ||\partial_j\gamma_{n,s}(a)-e_j|| \\
&\geq \max_{1\leq j\leq n} C\cdot ||\partial_j\gamma_{n,s}(a)-e_j||_\infty = C\cdot ||D\gamma_{n,s}[a]-\mathrm{Id}||_\infty \\
&= C\cdot ||\varphi_a(\gamma)-\varphi_a(\gamma_0)||_\infty .
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Zobrazenia z množiny $\mathcal{M}$ sú vďaka tomu rovnako spojité v bode γ_0. Ak ich zložíme so spojitým zobrazením det, tak aj zobrazenia $\gamma \mapsto \det(D\gamma_{n,s}[a])$ sú rovnako spojité v bode γ_0. Navyše pre $a \in T$ je $\det(D\gamma_0[a]) = 1$. Preto, na dákom okolí γ_0, sú pre každé $a \in (0{,}1)^n$ determinanty totálneho diferenciálu zobrazenia $\gamma_{n,s}$ nenulové. Podľa vety o lokálnom difeomorfizme [12, str. 79] existujú pre každé $t \in (0{,}1)^n$ otvorené okolia $U_t \ni t$ a $U_{\gamma_{n,s}(t)} \ni \gamma_{n,s}(t)$, že $\gamma_{n,s}$ je difeomorfizmom týchto množín.

Na to aby sme z lokálneho difeomorfizmu dostali difeomorfizmus, nám stačí prostota zobrazenia. Podľa Vety 11 uvažujme $C_1 > 0$ tak, aby pre každé $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ platilo $C_1 \cdot ||A||_\infty \geq ||A||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$. Nech $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ je také, že $||\gamma - \gamma_0||_{\leq n} < C/(2 \cdot C_1)$. Potom podľa (3.4) pre každé $x \in (0,1)^n$ platí $1/C_1 > 1/(2 \cdot C_1) \geq ||D\gamma_{n,s}[x] - \mathrm{Id}||_\infty$. Ostrá nerovnosť ostáva zachovaná aj pre suprémum cez množinu $(0,1)^n$, čo využijeme v bode označenom $(**)$. Navyše rovno dostávame, že suprémum je konečné. Nech $a,b \in (0,1)^n$, že $a \neq b$ a $s \in T$ ľubovoľné, potom píšme:

$$\begin{aligned} ||\gamma_{n,s}(a) - \gamma_{n,s}(b)|| &= ||\gamma_{n,s}(a) - \gamma_{n,s}(b) - \mathrm{Id}(a-b) + a - b|| \\ &\geq ||a-b|| - ||(\gamma_{n,s} - \mathrm{Id})(a) - (\gamma_{n,s} - \mathrm{Id})(b)|| \\ &\overset{(*)}{\geq} ||a-b|| - ||a-b|| \cdot \sup_{x \in (0,1)^n} ||D(\gamma_{n,s} - \mathrm{Id})[x]||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\ &\geq ||a-b|| \cdot (1 - C_1 \cdot \sup_{x \in (0,1)^n} ||D\gamma_{n,s}[x] - \mathrm{Id}||_\infty) \overset{(**)}{>} 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pričom rovnosť $(*)$ je použitím Lemy 28. Konvexita a otvorenosť množiny $(0,1)^n$ je zjavná. Existenciu fréchetovej derivácie máme z poznámky o vzťahu totálneho diferenciálu a fréchetovej derivácie za Definíciou 2 (v konečne rozmernom prípade sa zhodujú) a obmedzenosť supréma sme overili pred výpočtom. Spĺňame teda predpoklady. Môžeme konštatovať, že zobrazenie je prosté a teda naozaj ide o difeomorfizmus.

Ďalej chceme ukázať, že aj $\gamma_{n,s}((0,1)^n) \cap A$ má nenulovú mieru. Nájdime teda $\varepsilon > 0$, že

$$\lambda^n\Big(A \cap \gamma_0(U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon) \times T)\Big) > \lambda^n\big(A \cap \gamma_0(U_{1/2})\big)/2 > 0.$$

Existencia takého $1/2 > \varepsilon > 0$ sa dá ukázať sporom, podobne ako sme ukázali, že $\lambda^n(A \cap \gamma_0(U_{1/2})) > 0$ (poz. (3.2)). Pre skrátenie zápisu si označme $U^n_{1/2} = U^n(1/2 \cdot e, 1/2)$. Potom pre vhodné $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$, ktoré upresníme neskôr, píšme:

$$\begin{aligned} &0 < \lambda^n(A \cap \gamma_0(U_{1/2}))/2 < \lambda^n\big(A \cap \gamma_0(U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon) \times T)\big) \\ &= \lambda^n\Big(A \cap (U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon) + v)\Big) \\ &\overset{(*)}{=} \lambda^n\Big((A - v) \cap U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon)\Big) \\ &\overset{(**)}{\leq} \lambda^n\Big((A - v) \cap (\gamma_{n,s}(U^n_{1/2}) - v)\Big) \overset{(***)}{=} \lambda^n\Big(A \cap \gamma_{n,s}(U^n_{1/2})\Big) \\ &\leq \lambda^n\Big(A \cap \gamma_{n,s}((0,1)^n)\Big). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Prvá a tretia séria hviezdičiek je len invariantnosť Lebesgueovej mieri vzhľadom na transláciu. Druhú sériu hviezdičiek pre vhodné $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ dostávame z toho, že meriame nadmnožinu. To si ukážeme v nasledovnej pasáži:

Chceme teda ukázať, že $U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon) \subset \gamma_{n,s}(U^n_{1/2}) - v$. Z Vety 11 (O ekvivalencii noriem) nájdime $C_2 > 0$ také, že pre všetky $a \in \mathbb{R}^n$: platí, že $||a||_e < C_2 \cdot ||a||$. Potom voľme $\delta < \frac{\varepsilon}{C_2}$. Ďalej nech je $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ ľubovoľné také, že $||\gamma - \gamma_0||_{\leq n} < \delta$, toto sú tie γ, ktorých upresnenie sme avizovali. Nakoniec vyberme $z \in U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon)$ a $s \in T$ ľubovoľne. Zobrazenie $\varphi_z \colon U^n \to \mathbb{R}^n$ definujme ako $\varphi_z(t) = \gamma_{n,s}(1/2 \cdot t + 1/2 \cdot e) - v - z$. Toto zobrazenie spĺňa predpoklady Dôsledku 16. Zjavne je dobre definované a spojité. Požadovanú podmienku na skalárne súčiny, pre $x \in S^{n-1}$, overuje nasledujúci výpočet. Vo výpočte budeme značiť pre $a \in \mathbb{R}^n$ $\gamma(a,s) = \gamma(a_1, \dots, a_n, s_1, \dots)$. Počítajme:

$$
\begin{aligned}
&\langle \gamma_{n,s}(1/2 \cdot (x+e)) - v - z, x\rangle \\
&= \langle \gamma_{n,s}(1/2 \cdot (x+e)) - \gamma_0(1/2 \cdot (x+e), s), x\rangle \\
&+ \langle \gamma_0(1/2 \cdot (x+e), s) - v - z, x\rangle \\
&\overset{(*)}{\geq} -||x||_e \cdot ||\gamma_{n,s}(1/2 \cdot (x+e)) - \gamma_0(1/2 \cdot (x+e), s)||_e \\
&+ \langle 1/2 \cdot (x+e) - z, x\rangle \\
&\geq -C_2 \cdot ||\gamma(1/2 \cdot (x+e), s) - \gamma_0(1/2 \cdot (x+e), s)|| + 1/2 \cdot ||x||_e^2 \\
&+ \begin{cases} ||z - 1/2 \cdot e||_e \cdot \Big\langle -\frac{z - 1/2 \cdot e}{||z - 1/2 \cdot e||_e}, x\Big\rangle & \text{ak } z \neq 1/2 \cdot e, \\ 0 & \text{ak } z = 1/2 \cdot e, \end{cases} \\
&\overset{(**)}{\geq} -C_2 \cdot \delta + 1/2 - (1/2 - \varepsilon) \geq \varepsilon - C_2 \cdot \delta > 0.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

V nerovnosti označenej $(*)$ používame Schwartzovu nerovnosť [5, str. 137]. V druhej označenej nerovnosti používame, že skalárny súčin dvoch jednotkových vektorov je najmenej -1, čo je ďalší dôsledok Schwartzovej nerovnosti. Takže z Dôsledku 16 dostávame

$$
\begin{aligned}
&\forall \gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n)\ \forall z \in U^n(1/2 \cdot e, 1/2 - \varepsilon)\ \forall s \in T\ \exists x \in U^n\colon \\
&||\gamma - \gamma_0||_{\leq n} < \delta \implies \gamma_{n,s}(1/2 \cdot (x+e)) - v - z = 0.
\end{aligned}
$$

Takže pre $1/2 \cdot (x+e) = y \in U^n_{1/2}$, máme $\gamma_{n,s}(y) - v = z$, čo dokazuje avizovanú inklúziu.

Zrekapitulujme si, čo máme. Našli sme dáke $\varepsilon > 0$ a okolie zobrazenia γ_0, že na ňom sú zobrazenia $\gamma_{n,s}$ difeomorfizmami množiny $(0,1)^n$ do $\mathbb{R}^n$ a iné okolie zobrazenia γ_0, že $\lambda^n\Big(A \cap \gamma_{n,s}((0,1)^n)\Big) > 0$. Uvedomme si, že voľba týchto okolí bola nezávislá na $s \in T$.

Potom však podľa Lemy 36 použitého pre $A = (0,1)^n$, $B = \gamma_{n,s}((0,1)^n)$, $C = A \cap \gamma_{n,s}((0,1)^n)$ a $f = \gamma_{n,s}$ dostávame, že $\lambda^n(\gamma_{n,s}^{-1}(A)) > 0$.

To nás privádza k finálnemu výpočtu. Nech $||\gamma - \gamma_0||_{\leq n}$ je tak malá, aby $\lambda^n(\gamma_{n,s}^{-1}(A)) > 0$, $\forall s \in T$. Potom dostávame:

$$\begin{aligned}
\lambda(\gamma^{-1}(A)) &\overset{(*)}{=} \lambda\Big(\bigcup_{s\in T}(\gamma_{n,s}^{-1}(A)\times\{s\})\Big) = (\lambda^n\otimes\lambda)\Big(\bigcup_{s\in T}(\gamma_{n,s}^{-1}(A)\times\{s\})\Big)\\
&= \int\limits_{\bigcup_{s\in T}(\gamma_{n,s}^{-1}(A)\times\{s\})} 1 d(\lambda^n\otimes\lambda)(x,y)\\
&= \int_{[0,1]^n\times T} \mathbf{1}_{\bigcup_{s\in T}(\gamma_{n,s}^{-1}(A)\times\{s\})}(x,y)\ d(\lambda^n\otimes\lambda)(x,y)\\
&\overset{(**)}{=} \int_T\int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{\bigcup_{s\in T}(\gamma_{n,s}^{-1}(A)\times\{s\})}(x,y)\ d\lambda^n(x)d\lambda(y)\\
&= \int_T\int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{\gamma_{n,y}^{-1}(A)}(x)\ d\lambda^n(x)d\lambda(y) = \int_T \lambda^n(\gamma_{n,y}^{-1}(A))d\lambda(y) \overset{(***)}{>} 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Tak si poďme postupne jednotlivé vzťahy objasniť. Prvá $(*)$ je množinovou rovnosťou. Nech (x,y) je v $\bigcup_{s\in T}(\gamma_{n,s}^{-1}(A)\times\{s\})$ tak, že $y\in T$ a $x\in\gamma_{n,y}^{-1}(A)$. Potom $\gamma(x,y)=\gamma_{n,y}(x)$, avšak $x\in\gamma_{n,y}^{-1}(A)$. Preto $\gamma(x,y)\in A$, čo dáva prvú inklúziu.

Pre opačnú, nech $z\in\gamma^{-1}(A)$ ľubovoľný vektor. Potom voľme $x\in\mathbb{R}^n$ a $y\in T$, aby $(x,y)=z$. Potom $\gamma_{n,y}(x)=\gamma(x,y)=\gamma(z)$, pričom $\gamma(z)\in A$, takže platí $(x,y)\in\gamma_{n,y}^{-1}(A)\times\{y\}$.

Ďalej $(**)$ je Fubiniova veta [1, str. 30-34]. Uvedomme si, že spĺňame predpoklady. Ide o súčin dvoch pravdepodobnostných mier, čiže sú σ-konečné, a teda každá funkcia na danom priestore je σ-konečná, ako v [1, str. 30]. Zároveň meriame indikátorovú funkciu množiny, a tá je merateľná, pokiaľ je množina merateľná. Množina však je merateľná, keďže je to vzor borelovskej množiny A pri spojitom zobrazení γ. Nakoniec $(***)$, meriame kladnú funkciu na množine nenulovej miery.

Ukázali sme, že existuje otvorené okolie zobrazenia γ_0 také, že pre každú γ z tohto okolia je miera vzoru množiny A nenulová. Avšak priestor $\Gamma(X)$ je úplne metrizovateľný takže jeho otvorená podmnožina je už nutne druhej kategórie [13, str. 297] a teda nemôže pre reziduálne veľa $\gamma\in\Gamma(X)$ platiť, že by pri nich miera vzoru množiny A bola nulová. Vďaka tomu $A\notin\Gamma_0(\mathbb{R}^n)$. Tým je prvá implikácia dokázaná.

$\Longrightarrow$ Nech $\lambda^n(A)=0$, ďalej nech C, C_1 sú ako vo vzťahoch (3.5) a (3.4). Nech $C/C_1>\varepsilon>0$ spĺňa, že pre každú maticu $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ platí, že ak $||A-\mathrm{Id}||_\infty<\varepsilon/C$, potom už je A ostro diagonálne dominantná, takže regulárna [14, str. 352]. Také ε voliť vieme, keďže diagonálne prvky matice A nám konvergujú k 1 a ostatné k 0, pričom je ich iba konečne veľa.

Pre toto ε a postupnosť $\{e_i\}_{i=1}^n$ vieme nájsť podľa Lemy 26 hustú, otvorenú množinu $\mathcal{M}_\varepsilon$. Pre túto množinu platí, že ak $\gamma\in\mathcal{M}_\varepsilon$, potom existuje $k_\gamma\in\mathbb{N}$ a $c_\gamma>0$, že

$$\max_{1\leq j\leq n}\sup_{t\in T}\left|\left|c_\gamma\cdot\partial^T_{k_\gamma+j}\gamma(t)-e_j\right|\right|<\varepsilon.$$

Chceme ukázať, že pre $s \in T$ ľubovoľné sú zobrazenia $\gamma_{k_\gamma,n,s}\colon (0,1)^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfizmami $(0,1)^n$ do $\mathbb{R}^n$. Postup je podobný prvej časti dôkazu. Píšme:

$$\begin{aligned} C/C_1 > \varepsilon > \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in T} \Big|\Big| c_\gamma \cdot \partial^T_{k_\gamma+j}\gamma(t) - e_j \Big|\Big| \\ &\ge \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in\{s_1,\dots,s_{k_\gamma}\}\times(0,1)^n\times\{s_{k_\gamma+1},\dots\}} ||c_\gamma \cdot \partial^T_{k_\gamma+j}\gamma(t) - e_j|| \\ &= \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in(0,1)^n} ||c_\gamma \cdot \partial_j \gamma_{k_\gamma,n,s}(t) - e_j|| \\ &\overset{(*)}{\ge} C \cdot \Big|\Big| c_\gamma \cdot D\gamma_{k_\gamma,n,s}[a] - \mathrm{Id}\Big|\Big|_\infty . \end{aligned} \tag{3.9}$$

V nerovnosti označenej $(*)$ robíme viacero krokov, ale sú analogické ako v (3.4). Z voľby ε máme, že pre každé $a \in (0,1)^n$ je totálny diferenciál zobrazenia $c_\gamma\cdot\gamma_{k_\gamma,n,s}$ v bode a ostro diagonálne dominantná matica, čiže je regulárny. Použitím vety [12, str. 79] dostávame, že $c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s}$ je lokálnym difeomorfizmom $(0,1)^n$ do $\mathbb{R}^n$.

Na to aby sme z lokálneho difeomorfizmu dostali difeomorfizmus nám stačí ukázať prostotu. Postup je takmer totožný výpočtu (3.5), opäť používame Lemu 28 a spĺňame jeho predpoklady. Pre a, $b \in (0,1)^n$, že $a \neq b$ máme:

$$\begin{aligned} ||c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s}(a) - c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s}(b)|| \\ &= \Big|\Big| c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s}(a) - c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s}(b) - \mathrm{Id}(a-b) + a - b \Big|\Big| \\ &\ge ||a-b|| - \Big|\Big| (c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s} - \mathrm{Id})(a) - (c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s} - \mathrm{Id})(b) \Big|\Big| \\ &\ge ||a-b|| - ||a-b|| \cdot \sup_{x\in(0,1)^n} \Big|\Big| D(c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s} - \mathrm{Id})[x] \Big|\Big|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\ &\ge ||a-b|| \cdot (1 - C_1 \cdot \sup_{x\in(0,1)^n} \Big|\Big| c_\gamma \cdot D\gamma_{k_\gamma,n,s}[x] - \mathrm{Id} \Big|\Big|_\infty) \overset{(*)}{>} 0. \end{aligned}$$

Pre $(*)$ stačí aplikovať vzťah (3.9) a všimnúť si, že prechod k suprému nepokazí ostrú nerovnosť $1/C_1 > \varepsilon/C \ge \sup_{x\in(0,1)^n} \big|\big| c_\gamma \cdot D\gamma_{k_\gamma,n,s}[x] - \mathrm{Id} \big|\big|_\infty$. Takže $c_\gamma \cdot \gamma_{k_\gamma,n,s}$ je dokonca difeomorfizmom $(0,1)^n$ do $\mathbb{R}^n$. Keďže c_γ je nenulová konštanta, aj zobrazenie $\gamma_{k_\gamma,n,s}$ je difeomorfizmom.

Pre $\gamma \in \mathcal{M}_\varepsilon$ potom podľa Lemy 36 o zachovávaní nulovosti lebesguovej miery pri difeomorfizmoch platí, že $\lambda^n(\gamma^{-1}_{k_\gamma,n,s}(A)) = 0$. Nakoniec veľmi podobne ako vo vzťahu (3.8) dostávame:

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma^{-1}(A)) &= \lambda\Big(\bigcup_{s\in T} \big(\{(s_1,\dots,s_{k_\gamma})\} \times \gamma^{-1}_{k_\gamma,n,s}(A) \times \{(s_{k_\gamma+1},\dots)\}\big)\Big) \\ &= \int\limits_{[0,1]^{k_\gamma}} \int\limits_T \int\limits_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{(\bigcup_{s\in T}(\{(s_1,\dots,s_{k_\gamma})\}\times\gamma^{-1}_{k_\gamma,n,s}(A)\times\{(s_{k_\gamma+1},\dots)\}))}(z,x,y)\; d\lambda^n(x)\; d\lambda(y)\; d\lambda^{k_\gamma}(z) \\ &= \int\limits_{[0,1]^{k_\gamma}} \int\limits_T \int\limits_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{\gamma^{-1}_{k_\gamma,n,(z,y)}(A)}(x)\; d\lambda^n(x)\; d\lambda(y)\; d\lambda^{k_\gamma}(z) \\ &= \int\limits_{[0,1]^{k_\gamma}} \int\limits_T \lambda^n(\gamma^{-1}_{k_\gamma,n,(z,y)}(A))\; d\lambda(y)\; d\lambda^{k_\gamma}(z) = 0. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že pre každé $\gamma \in \mathcal{M}_\varepsilon$ je $\lambda(\gamma^{-1}(A)) = 0$. Avšak podľa Lemy 26 ide o otvorenú hustú množinu a teda residuálnu. Skutočne, jej doplnok je dokonca riedka množina:

$$\overline{\Gamma(X) \setminus \overline{\Gamma(X) \setminus \mathcal{M}_\varepsilon}} \stackrel{(*)}{=} \overline{\Gamma(X) \setminus (\Gamma(X) \setminus \mathcal{M}_\varepsilon)} = \overline{\mathcal{M}_\varepsilon} \stackrel{(**)}{=} \Gamma(X).$$

Prvá hviezdička je iba uzavrenosť doplnku k otvorenej množine a druhá označená rovnosť je hustotou $\mathcal{M}_\varepsilon$ v $\Gamma(X)$. Dostávame $A \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$.

❑

Literatúra

[1] L. C. Evans, R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, Revised edition, 2015.

[2] J. Lindenstrauss, D. Preiss, J. Tišer. *Fréchet Differentiability of Lipschitz Functions and Porous Sets in Banach Spaces (AM-179).* Princeton University Press, Princeton, 2012.

[3] J. Lindenstrauss, D. Preiss. On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces. *Ann. of Math. (2)*, 157(1):257–288, 2003.

[4] P. R. Halmos. *Measure Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1974.

[5] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[6] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[7] R. Engelking. *General Topology - Revised and completed ed.* Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[8] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, Third edition, 1976.

[9] B. Buffoni, J. Toland. *Analytic Theory of Global Bifurcation.* Princeton University Press, Princeton, 2003.

[10] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[11] W. Rudin. *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 1966.

[12] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, Second edition, 2013.

[13] J. Munkres. *Topology.* Pearson New Interanational Edition. Pearson, London, Second edition, 2014.

[14] C. R. Johnson, R. A. Horn. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.