MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adrián Šegeda

Slabé řešení Navier-Stokesových rovnic

Matematický ústav Karlovy Univerzity

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Ondřej Kreml, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Fyzika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Veľmi rád by som chcel poďakovať vedúcemu práce Mgr. Ondřejovi Kremlovi, Ph.D. za jeho čas, trpezlivosť a cenné rady, ktoré mi veľmi pomohli. Ďalej chcem poďakovať svojím rodičom za ich podporu v mojom štúdiu a taktiež celej Univerzite Karlovej, ktorá mi umožnila toto štúdium.

Název práce: Slabé řešení Navier-Stokesových rovnic

Autor: Adrián Šegeda

Ústav: Matematický ústav Karlovy Univerzity

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Ondřej Kreml, Ph.D., Matematický ústav Karlovy Univerzity

Abstrakt: Priamo zo základných fyzikálnych princípov odvodíme slabú formuláciu Navier-Stokesových rovníc, čím ukážeme, že slabá formulácia a teda aj slabé riešenie sú úplne prirodzené pre popis tohto systému. Ďalej ukážeme, aký vplyv majú rôzne okrajové podmienky na túto slabú formuláciu. Nakoniec zhrnieme už známe pojmy riešení Navier-Stokesových rovníc s vetami o ich existencii a vysvetlíme jednotlivé vzťahy medzi nimi.

Klíčová slova: Navier-Stokesovy rovnice, slabé řešení, vhodné slabé řešení, okrajové podmínky

Title: Weak solution to the Navier-Stokes equations

Author: Adrián Šegeda

Institute: Institute of Mathematics, Charles University

Supervisor: Mgr. Ondřej Kreml, Ph.D., Institute of Mathematics, Charles University

Abstract: We derive the weak formulation of the Navier-Stokes equations directly from the basic physical principles, showing that the weak formulation and thus also the weak solution are completely natural for this system. Next, we will show the effect of various boundary conditions on this weak formulation. Finally, we summarize the already known concepts of solutions of the Navier-Stokes equations with theorems about their existence and explain relationships among them.

Keywords: Navier-Stokes equations, weak solution, suitable weak solution, boundary conditions

Obsah

Úvod

Na začiatok hneď v prvej kapitole pripomenieme základné matematické metódy na popis kontinua. Čo je to kontinuum? Ide o model látky pochádzajúci z klasickej fyziky, keď si predstavíme, že daná látka *spojite* vypĺňa priestor. Spojite je myslené v matematickom zmysle slova. Tento popis je očividne zjednodušenie, keďže vieme, že látky sú na najnižšej úrovni tvorené atómami, resp. molekulami, ktoré sú oddelené od seba „prázdnym“ priestorom. Samotné atómy tiež nie sú vyplnené homogénnou hustotou, ale väčšina ich hmotnosti je sústredená v malom jadre. V látkach môžu vznikať rôzne trhliny a póry na škálach omnoho väčších ako sú rozmery molekúl. Ďalej budeme zanedbávať znečistenie a rôzne prímesy, ktoré sú všeobecne vždy prítomné v každej látke. Keď to zhrnieme, tak kontinuum môžeme spojite rozdeliť na infinitezimálne elementy majúce rovnaké vlastnosti ako celok.

Týmto sa dostávame k pojmu „infinitezimálne“, odkiaľ je hneď jasné, že k popisu kontinua budeme potrebovať základné poznatky z matematickej analýzy a Lebesgueovho integrálu. Práve integrál je vhodný nástroj na popis fyzikálnych zákonov, keďže umožňuje narábanie s veličinami, ktorých hodnoty sa menia v priestore, a na malých škálach sa dá interpretovať ako priemerovanie. Nakoniec týmto ukážeme, že odvodené Navier-Stokesove rovnice práve v integrálnej podobe (slabej formulácii) sú prirodzenejšie ako je ich klasická formulácia, čo je bodová rovnosť veličín a ich derivácií. Fyzikálne bod v matematickom zmysle ani nemá význam, nakoľko jeho definícia je v rozpore s kvantovou teóriou. V našom prípade sa na malých škálach môžeme odvolávať na spomínané priemerovanie. Poznamenajme, že všade pri našich úvahách budeme predpokladať merateľnosť všetkých množín a funkcií. Ďalej tam, kde bude treba, predpokladáme spojitosť a rozumnú hladkosť, aby všetko malo fyzikálny význam.

K formulovaniu rovníc využijeme základné fyzikálne princípy známe už z klasickej mechaniky. Konkrétne zákon zachovania hmoty, čo sa nedá priamo odvodiť, ale tak myslíme si, že celková hmota sa zachováva — nedá sa vyrobiť z ničoho, ani zničiť. Bolo by predsa divné, ak by sme si niečo odložili do trezoru a ono to odtiaľ zmizlo bez toho, aby to prešlo cez povrch trezora. Takisto by bolo divné, ak po nejakom čase, by toho bolo zrazu viacej, čo by síce niekto mohol hodnotiť pozitívne, ale zatiaľ takéto javy pozorované neboli. Využijeme aj zákon zachovania hybnosti, resp. prvú vetu impulzovú (ide o zovšeobecnenie druhého Newtonovho pohybového zákona), čo bude ten kľúčový princíp, z ktorého odvodíme Navier-Stokesove rovnice. Ďalej uvidíme, že zákon zachovania momentu hybnosti, resp. druhá veta impulzová dá peknú vlastnosť tenzoru napätia, ktorý tiež odvodíme zo základných úvah (ide o objekt popisujúci deformáciu kontinua).

Už spomínané Navier-Stokesove rovnice odvodíme tak, že do zákonu zachovania hybnosti dosadíme tenzor napätia pre homogénnu nestlačiteľnú Newtonovskú tekutinou. Homogenita znamená, že v každom bode aj čase má rovnakú hustotu, resp. hustota je nezávislá konštanta (homogenita je teda silnejší pojem ako izotropia). Nestlačiteľnosť je vlastnosť kvapalín — ide znova o idealizáciu, keďže každá látka je aspoň trochu stlačiteľná. Newtonovská tekutina je taká, pre ktorú je tenzor napätia lineárny. Keď odvodíme všeobecný tenzor napätia pre tekutinu, tak ho budeme linearizovať, resp. zanedbáme všetky nelineárne členy. Nakoniec sa pozrieme na rôzne okrajové podmienky, čo súvisia so správaním sa tekutiny pri kontakte s pevnou hranicou a predstavíme známe pojmy riešení s existenčnými vetami Navier-Stokesových rovníc a vysvetlíme jednotlivé vzťahy medzi týmito pojmami.

1. Popis kontinua

Na začiatok pripomeňme základné metódy popisu kontinua. Postupujeme rovnako, ako sa prednáša v klasickej fyzike (Feistauer, 1993), (Málek a Rajagopal, 2005, str. 19 až 23).

1.1 Základné definície

Nech $\mathcal{E}^3$ je trojrozmerný Euklidovský priestor. Označme $\mathcal{B}$ všeobecné abstraktné teleso a nech $\kappa\colon \mathcal{B} \to \mathcal{E}^3$ je bijektívne zobrazenie. Konfiguráciou telesa $\mathcal{B}$ nazveme $\kappa(\mathcal{B})$. Referenčnú konfiguráciu zavedieme ako $\kappa_R(\mathcal{B})$ a konfiguráciu v čase $t \in \mathbb{R}$ ako $\kappa_t(\mathcal{B})$.

Pohybom rozumieme zobrazenie $\vec{\chi}\colon \kappa_R(\mathcal{B}) \times \mathbb{R} \to \kappa_t(\mathcal{B})$ dané predpisom

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t), \tag{1.1}$$

kde $\vec{x}, \vec{X} \in \mathcal{E}^3$. Ďalej predpokladajme, že existuje jednoznačná inverzia (1.1)

$$\vec{X} = \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t). \tag{1.2}$$

Pri skúmaní ľubovoľnej vektorovej veličiny $\vec{\pi} = \vec{\pi}(\vec{\xi}, t)$, $\vec{\xi} \in \mathcal{B}$ môžeme jej závislosť vyjadriť dvoma spôsobmi

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_L(\vec{X}, t), \tag{1.3a}$$

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_E(\vec{x}, t). \tag{1.3b}$$

V mechanike kontinua sa vyjadrenie (1.3a) nazýva *Lagrangeov popis* a vyjadrenie (1.3b) ako *Eulerov popis*. Očividne práve vzťahy (1.1) a (1.2) sú kľúčom k prechodu medzi jednotlivými popismi, nakoľko platí

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_E(\vec{x}, t) = \vec{\pi}_E(\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \equiv \vec{\pi}_L(\vec{X}, t) = \vec{\pi}_L(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), t) \equiv \vec{\pi}_E(\vec{x}, t).$$

Analogická úvaha samozrejme platí aj pre ľubovoľnú skalárnu, resp. tenzorovú veličinu.

Rýchlosť $\vec{v}$ definujeme ako

$$\vec{v}_L(\vec{X}, t) := \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}(\vec{X}, t) \implies \vec{v}(\vec{x}, t) := \vec{v}_E(\vec{x}, t) = \vec{v}_L(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t), t). \tag{1.4}$$

Zatiaľ sme nič nepovedali o hladkosti $\vec{\chi}$, ale predpokladajme, že je dostatočne hladké, aby výraz (1.4) a ďalšie operácie s ním mali dobrý (fyzikálny) zmysel. Nakoniec aj tak od konštrukcie pomocou $\vec{\chi}$ odhliadneme a všade budeme pracovať iba s rýchlosťou $\vec{v}$.

Vráťme sa ešte k všeobecnej veličine $\vec{\pi}$ (môže byť aj skalárna, predpokladajme jej hladkosť) a odvoďme tzv. *materiálovú deriváciu*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\pi}_L}{\partial t}(\vec{X}, t) &= \frac{\partial \vec{\pi}_E}{\partial t}(\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \\ &= \frac{\partial \vec{\pi}_E}{\partial t}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}(\vec{X}, t) \cdot \frac{\partial \vec{\pi}_E}{\partial \vec{\chi}}(\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \vec{\pi}_E}{\partial t}(\vec{x},t) + \vec{v}_L(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x},t),t) \cdot \frac{\partial \vec{\pi}_E}{\partial \vec{x}}(\vec{x},t)$$

$$\frac{\partial \vec{\pi}_L}{\partial t}(\vec{X},t) = \frac{\partial \vec{\pi}_E}{\partial t}(\vec{x},t) + \vec{v}_E(\vec{x},t) \cdot \operatorname{grad} \vec{\pi}_E(\vec{x},t). \tag{1.5}$$

Využili sme vzťahy (1.1), (1.2), (1.4) a v druhom kroku sme použili retiazkové pravidlo pre deriváciu zloženej funkcie viacerých premenných.

Nakoniec zaveďme deformačný gradient pomocou

$$\mathbf{F}(\vec{X},t) := \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{X}}(\vec{X},t). \tag{1.6}$$

Podobne ako pri rýchlosti predpokladajme hladkosť $\vec{\chi}$ a tiež nenulovosť determinantu $\mathbf{F}$ (v mechanike kontinua sa tiež nazýva *axióm kontinuity*).

1.2 Zákony zachovania

Z klasickej fyziky poznáme tvrdenia, ktoré hovoria ako sa nejaké veličiny vyvíjajú v čase a aké ďalšie veličiny ich (ne)môžu ovplyvniť. Tieto tvrdenia sa súhrnne nazývajú zákony zachovania.

1.2.1 Nestlačiteľnosť

Definujme $\forall \mathcal{P}_R \subset \kappa_R(\mathcal{B})$: $\mathcal{P}_t := \vec{\chi}(\mathcal{P}_R, t)$, potom nestlačiteľnosť môžeme vyjadriť pomocou zachovania miery každej podmnožiny $\mathcal{P}_t$ v každom čase nasledovne

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_R} \mathrm{d}X = \text{const.},\ \forall \mathcal{P}_R \subset \kappa_R(\mathcal{B}),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Vzťah (1.7) sa dá interpretovať takto: pod $\mathcal{P}_R$ si napríklad predstavme balónik naplnený vodou, ktorý sa môže v čase rôzne presúvať, otáčať a deformovať do tvaru $\mathcal{P}_t$. Objem balónika však ostane rovnaký, nakoľko je voda (skoro) nestlačiteľná. V teórii Lebesgueovho integrálu sa miera balónika zachováva. Keď do (1.7) dosadíme vetu o substitúcii integrálu v $\mathcal{E}^3$ a využijeme (1.6), tak dostaneme

$$\int_{\mathcal{P}_t = \vec{\chi}(\mathcal{P}_R,t)} \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_R} \det \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{X}}(\vec{X},t)\ \mathrm{d}X = \int_{\mathcal{P}_R} \det \mathbf{F}(\vec{X},t)\ \mathrm{d}X,$$

čo platí $\forall \mathcal{P}_R \subset \kappa_R(\mathcal{B}),\ \forall t \in \mathbb{R}$. Po porovnaní s rovnosťou (1.7) teda jedine

$$\det \mathbf{F}(\vec{X},t) = 1,\ \forall \vec{X} \in \kappa_R(\mathcal{B}),\ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

čo je vlastne geometrické vyjadrenie nestlačiteľnosti, pretože zobrazenie nemení objem práve vtedy, keď je jeho jacobián (v absolútnej hodnote) rovný jednej.

Ďalej chceme spočítať časovú deriváciu (1.8), k čomu použijeme jeden trik z maticovej analýzy (Magnus a Neudecker, 2007, str. 202). Nech $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ sú tenzory rovnakých rozmerov ako $\mathbf{F}$, potom

$$\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G}) = \det(\mathbf{F}) \det(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{G}).$$

Spočítajme diferenciál tohto vzťahu v $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ aplikovaný na $\mathbf{H}$ pomocou retiazkového pravidla (označme diferenciál operátoru det ako Ddet)

$$\mathrm{Ddet}(\mathbf{F})(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{F})\,\mathrm{Ddet}(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{F})(\underbrace{\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{H}}_{:=\mathbf{K}}) = \det(\mathbf{F})\,\mathrm{Ddet}(\mathbf{1})(\mathbf{K}). \tag{1.9}$$

Priamo z definície derivácie v smere máme

$$\mathrm{Ddet}(\mathbf{1})(\mathbf{K}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\det(\mathbf{1}+\epsilon\mathbf{K}) - \det(\mathbf{1})}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\det(\mathbf{1}+\epsilon\mathbf{K}) - 1}{\epsilon}. \tag{1.10}$$

Rozpíšeme si, čo výraz $\det(\mathbf{1}+\epsilon\mathbf{K})$ znamená po zložkách v troch rozmeroch

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{1}+\epsilon\mathbf{K}) &= \det\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \epsilon\begin{pmatrix}K_{11}&K_{12}&K_{13}\\K_{21}&K_{22}&K_{23}\\K_{31}&K_{32}&K_{33}\end{pmatrix}\right)\\
&= \det\begin{pmatrix}1+\epsilon K_{11}&\epsilon K_{12}&\epsilon K_{13}\\\epsilon K_{21}&1+\epsilon K_{22}&\epsilon K_{23}\\\epsilon K_{31}&\epsilon K_{32}&1+\epsilon K_{33}\end{pmatrix}\\
&= \Big(1+\epsilon K_{11}\Big)\Big(1+\epsilon K_{22}\Big)\Big(1+\epsilon K_{33}\Big) + o(\epsilon^2)\\
&= 1 + \epsilon\Big(K_{11}+K_{22}+K_{33}\Big) + o(\epsilon^2)\\
\det(\mathbf{1}+\epsilon\mathbf{K}) &= 1 + \epsilon\,\mathrm{tr}\,\mathbf{K} + o(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Analogická úvaha pre odvodenie (1.11) funguje aj v ľubovoľnej inej dimenzii. Pri roznásobovaní determinantu vždy platí:

1. V determinante pokaždé dostaneme (po roznásobení diagonály) konštantný člen 1 v ϵ pochádzajúci zo súčinu jedničiek.

2. Do lineárneho členu v ϵ k determinantu vždy prispeje jedine diagonála, pretože všetky ostatné permutácie budú aspoň kvadratické v ϵ, teda $o(\epsilon^2)$.

3. Lineárne členy v ϵ dostaneme jedine zo súčinu členov ϵK_{ii} so samými jedničkami a každý člen ϵK_{ii} pre $\forall i$ sa po roznásobení diagonály nachádza v súčte práve jedenkrát.

4. Zo súčtu všetkých ϵK_{ii} členov pre $\forall i$ dostaneme $\epsilon\,\mathrm{tr}\,\mathbf{K}$, presne podľa (1.11).

Konečne dosadíme (1.11) do (1.10) a dostaneme

$$\mathrm{Ddet}(\mathbf{1})(\mathbf{K}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1+\epsilon\,\mathrm{tr}\,\mathbf{K} + o(\epsilon^2) - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\mathrm{tr}\,\mathbf{K} + o(\epsilon)\Big) = \mathrm{tr}\,\mathbf{K},$$

čo po dosadení do (1.9) dá

$$\mathrm{Ddet}(\mathbf{F})(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{F})\,\mathrm{tr}\,\mathbf{K} = \det(\mathbf{F})\,\mathrm{tr}(\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{H}).$$

Stačí už len zobrať $\mathbf{H} := \partial\mathbf{F}/\partial t$ a dostaneme identitu

$$\frac{\partial}{\partial t}\det\mathbf{F} = \det\mathbf{F}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{F}^{-1}\cdot\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\right).$$

Dosadením (1.6) do predchádzajúceho výsledku dostaneme dôležitý vzťah

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\det\mathbf{F}(\vec{X},t) &= \frac{\partial}{\partial t}\det\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial\vec{X}}(\vec{X},t)\\
&= \det\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial\vec{X}}(\vec{X},t)\,\mathrm{tr}\left(\left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial\vec{X}}\right)^{-1}(\vec{\chi}(\vec{X},t),t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial\vec{X}}(\vec{X},t)\right)\\
&= \det\mathbf{F}(\vec{X},t)\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\vec{\chi}^{-1}}{\partial\vec{x}}(\vec{\chi}(\vec{X},t),t)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{X}}\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial t}(\vec{X},t)\right)\\
&= \det\mathbf{F}(\vec{X},t)\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\vec{\chi}^{-1}}{\partial\vec{x}}(\vec{x},t)\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{X}}\vec{v}_L(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x},t),t)\right)\\
&= \det\mathbf{F}(\vec{X},t)\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\vec{v}_L}{\partial\vec{x}}(\vec{\chi}^{-1}(\vec{x},t),t)\right)\\
&= \det\mathbf{F}(\vec{X},t)\,\mathrm{tr}\,\mathrm{grad}\,\vec{v}_E(\vec{x},t)\\
\frac{\partial}{\partial t}\det\mathbf{F}(\vec{X},t) &= \det\mathbf{F}(\vec{X},t)\,\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{x},t).
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

V treťom kroku sme použili zámennosť druhých parciálnych derivácií a inverziu deformačného gradientu, v piatom retiazkové pravidlo a nakoniec sme si uvedomili, že stopa gradientu je divergencia.

Po dosadení (1.8) do (1.12) dostaneme známy vzťah z klasickej teórie popisujúci bodovú nestlačiteľnosť

$$
\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{x},t) = 0,\ \forall\vec{x}\in\kappa_t(\mathcal{B}),\ \forall t\in\mathbb{R}. \tag{1.13}
$$

Tento vzťah v budúcnosti veľakrát použijeme. Teraz sa pozrime z Eulerovho pohľadu na fyzikálne zákony zachovania hmoty, hybnosti a momentu hybnosti.

1.2.2 Zachovanie hmoty

Zákon zachovania hmoty môžeme vyjadriť tak, že hmotnosť každej množiny $m_{\mathcal{P}_t}$ sa v čase nemení

$$
\begin{aligned}
m_{\mathcal{P}_t}(t) = \text{const.} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_{\mathcal{P}_t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\mathrm{d}m =\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\rho(\vec{x},t)\ \mathrm{d}x = 0,\ \forall\mathcal{P}_t\subset\kappa_t(\mathcal{B}),\,\forall t\in\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

kde $\rho(\vec{x},t)$ je hustota v priestore a čase, ktorá sa môže meniť v dôsledku nehomogenity tekutiny, aj keď je nestlačiteľná.

1.2.3 Zachovanie hybnosti

Prvá veta impulzová, resp. zákon zachovania hybnosti pre množinu $\mathcal{P}_t$ vyjadruje celkovú časovú zmenu hybnosti $\vec{p} := m\vec{v}$ tejto množiny v dôsledku pôsobenia výslednice všetkých vonkajších síl $\vec{F}_{\text{celk}}$ na túto množinu, ktoré môžu byť objemové $\vec{F}_{\text{obj}}$ a plošné $\vec{F}_{\text{plo}}$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(\mathcal{P}_t) = \vec{F}_{\text{celk}}(\mathcal{P}_t)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(\mathcal{P}_t) &= \vec{F}_{\mathrm{obj}}(\mathcal{P}_t) + \vec{F}_{\mathrm{plo}}(\mathcal{P}_t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\mathrm{d}\vec{p} &= \int_{\mathcal{P}_t}\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{obj}} + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{plo}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\underbrace{\rho\vec{v}}_{\text{hustota hybnosti}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{P}_t}\underbrace{\rho\vec{f}}_{\text{hustota }\vec{F}_{\mathrm{obj}}}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\underbrace{\mathbf{T}^T\cdot\vec{n}}_{\text{hustota }\vec{F}_{\mathrm{plo}}}\mathrm{d}S,\ \forall\mathcal{P}_t\subset\kappa_t(\mathcal{B}),\ \forall t\in\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

kde $\vec{f}(\vec{x},t)$ je hustota špecifickej objemovej sily a $\mathbf{T}(\vec{x},t)$ je tenzor napätia. Pravú stranu rovnice (1.15) upravme pod jeden integrál, pretože ju neskôr budeme potrebovať. Počítajme jej k-tú zložku (cez opakujúce indexy sa sčíta) a použitím Gauss-Ostrogradského vety na plošný integrál cez $\partial\mathcal{P}_t$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\left[\int_{\mathcal{P}_t}\rho\vec{f}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\mathbf{T}^T\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}S\right]_k &= \int_{\mathcal{P}_t}\rho f_k\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{P}_t}T_{lk}n_l\ \mathrm{d}S\\
&= \int_{\mathcal{P}_t}\rho f_k\ \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{P}_t}\partial_l T_{lk}\ \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_t}\Big(\rho f_k + \partial_l T_{lk}\Big)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

1.2.4 Zachovanie momentu hybnosti

Druhá veta impulzová, resp. zákon zachovania momentu hybnosti pre množinu $\mathcal{P}_t$ vyjadruje celkovú časovú zmenu momentu hybnosti $\vec{L} := \vec{x}\times\vec{p} = \vec{x}\times m\vec{v}$ tejto množiny v dôsledku pôsobenia výslednice všetkých vonkajších momentov síl $\vec{M}_{\mathrm{celk}} := \vec{x}\times\vec{F}_{\mathrm{celk}}$ na túto množinu, ktoré môžu byť objemové $\vec{M}_{\mathrm{obj}} := \vec{x}\times\vec{F}_{\mathrm{obj}}$ a plošné $\vec{M}_{\mathrm{plo}} := \vec{x}\times\vec{F}_{\mathrm{plo}} = \vec{x}\times(\mathbf{T}^T\cdot\vec{S})$. Takže pre $\forall\mathcal{P}_t\subset\kappa_t(\mathcal{B})$, $\forall t\in\mathbb{R}$ platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}(\mathcal{P}_t) &= \vec{M}_{\mathrm{celk}}(\mathcal{P}_t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}(\mathcal{P}_t) &= \vec{M}_{\mathrm{obj}}(\mathcal{P}_t) + \vec{M}_{\mathrm{plo}}(\mathcal{P}_t)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\mathrm{d}\vec{L} &= \int_{\mathcal{P}_t}\mathrm{d}\vec{M}_{\mathrm{obj}} + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\mathrm{d}\vec{M}_{\mathrm{plo}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{p} &= \int_{\mathcal{P}_t}\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{obj}} + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{plo}}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{P}_t}\underbrace{\vec{x}\times\rho\vec{v}}_{\text{hustota momentu hybnosti}}\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{P}_t}\underbrace{\vec{x}\times\rho\vec{f}}_{\text{hustota }\vec{M}_{\mathrm{obj}}}\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\underbrace{\vec{x}\times\Big(\mathbf{T}^T\cdot\vec{n}\Big)}_{\text{hustota }\vec{M}_{\mathrm{plo}}}\mathrm{d}S.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Analogicky ako predtým budeme chcieť dať pravú stranu rovnice (1.17) pod jeden integrál. Rozpíšme si ju po zložkách — počítajme i-tú zložku, Levi-Civitov tenzor označme ϵ_{ijk} a použime Gauss-Ostrogradského vetu na plošný integrál cez $\partial\mathcal{P}_t$

$$
\int_{\mathcal{P}_t}\epsilon_{ijk}x_j\rho f_k\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{P}_t}\epsilon_{ijk}x_jT_{lk}n_l\ \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{P}_t}\epsilon_{ijk}x_j\rho f_k\ \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{P}_t}\partial_l\Big(\epsilon_{ijk}x_jT_{lk}\Big)\ \mathrm{d}x.
$$

Teraz môžeme oba integrandy dať do jedného integrálu

$$
\int_{\mathcal{P}_t}\bigg(\epsilon_{ijk}x_j\rho f_k + \epsilon_{ijk}\partial_l\Big(x_jT_{lk}\Big)\bigg)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_t}\bigg(\epsilon_{ijk}x_j\rho f_k + \epsilon_{ijk}\Big(\delta_{lj}T_{lk} + x_j\partial_l T_{lk}\Big)\bigg)\mathrm{d}x.
$$

Po preusporiadaní členov v súčte dostávame

$$\int_{\mathcal{P}_t}\left(\epsilon_{ijk}x_j\rho f_k+\epsilon_{ijk}\Big(T_{jk}+x_j\partial_l T_{lk}\Big)\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathcal{P}_t}\left(\epsilon_{ijk}x_j\Big(\rho f_k+\partial_l T_{lk}\Big)+\epsilon_{ijk}T_{jk}\right)\mathrm{d}x.$$

V rovnováhe bez pôsobenia vonkajších síl a teda aj ich momentov sú pravé strany zákonov zachovania hybnosti (1.15) a momentu hybnosti (1.17) identicky nulové. Nakoľko je $\mathcal{P}_t$ ľubovoľné, tak z (1.16) vyplýva jedine, že $\rho f_k+\partial_l T_{lk}=0$ (predpokladáme rozumnú spojitosť všetkých výrazov, aby mali dobrý fyzikálny zmysel, takže množiny nulovej miery teraz nehrajú rolu), čo po dosadení do predchádzajúceho výsledku a zopakovaní rovnakého argumentu implikuje $\epsilon_{ijk}T_{jk}=0$ všade. Pripomeňme, že Levi-Civitov tenzor je totálne antisymetrický. Jeho zúženie s tenzorom napätia musí byť vždy nula. To ale znamená, že tenzor napätia musí byť symetrický! Táto úvaha je lepšie vidieť z nasledujúceho výpočtu, v ktorom rozložíme tenzor napätia na jeho antisymetrickú časť $A_{jk}:=\frac{1}{2}(T_{jk}-T_{kj})$ a symetrickú časť $S_{jk}:=\frac{1}{2}(T_{jk}+T_{kj})$

$$\begin{aligned}0=\epsilon_{ijk}T_{jk}&=\epsilon_{ijk}A_{jk}+\epsilon_{ijk}S_{jk}=(-1)^2\epsilon_{ikj}A_{kj}-\epsilon_{ikj}S_{kj}\\&=\epsilon_{ijk}A_{jk}-\epsilon_{ijk}S_{jk}\\0&=\epsilon_{ijk}A_{jk},\end{aligned}$$

kde sme v prvom riadku vymenili indexy j,k a využili symetriu, resp. antisymetriu objektov. V druhom riadku sme premenovali indexy k,j na j,k, keďže na názve sčítacieho indexu nezáleží, je to len označenie. Nakoniec sme si uvedomili, že číslo, ktoré sa rovná samo sebe s opačným znamienkom je jedine nula. Prenásobením a vysčítaním oboch strán získanej rovnosti s ϵ_{ilm} dostaneme

$$0=\epsilon_{ilm}\epsilon_{ijk}A_{jk}=\Big(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj}\Big)A_{jk}=A_{lm}-A_{ml}=2A_{lm}.$$

Takže vidíme, že podmienka na nulové zúženie Levi-Civitova tenzoru s tenzorom napätia je ekvivalentná s podmienkou na nulovú antisymetrickú časť. V tenzore napätia sa teda uplatní iba jeho symetrická časť $T_{jk}=S_{jk}$, takže musí byť symetrický $T_{jk}=T_{kj}$, resp. $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$.

Týmto sme prišli k záveru, že ako dôsledok zákona zachovania momentu hybnosti je požiadavka na tenzor napätia, aby bol symetrický.

1.3 Odvodenie tenzoru napätia

Doteraz odvodené vzťahy a rovnice platia pre všetky materiály, ktoré je možné popísať ako kontinuum. Konkrétne vyjadrenie tenzora napätia $\mathbf{T}$ sa nazýva *konštitučná rovnica* — priamo súvisí s materiálom, čo popisujeme. My sa v tejto práci zaoberáme s nestlačiteľnou Newtonovskou tekutinou, preto potrebujeme konštitučnú rovnicu pre tento model.

Symetrickú časť gradientu rýchlosti označme

$$\mathbf{D}:=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{grad}\vec{v}+\operatorname{grad}^T\vec{v}\Big). \tag{1.18}$$

Za predpokladu, že sa nekoná žiaden pohyb, teda $\vec{v}=0\implies\mathbf{D}=0$, tak nám Pascalov zákon z hydrostatiky hovorí, že tlak p je v každom smere rovnaký. To znamená, že v tomto prípade má tenzor napätia tvar

$$\mathbf{T}_0=-p\mathbf{1}. \tag{1.19}$$

Vo všeobecnom prípade podľa Stokesovho princípu (Stokes, 1845, str. 289 a 290) má tenzor napätia tvar

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{V}, \tag{1.20}$$

kde $\mathbf{V}$ spĺňa nasledujúce postuláty (Serrin, 1959)

1. $\mathbf{V}$ je spojitá funkcia od $\mathbf{D}$ a nezávisí od žiadnych iných veličín vrátane polohy a času, teda $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{D})$.

2. $\mathbf{V} = 0$ keď $\mathbf{D} = 0$.

3. Tekutina je izotropná, resp. neexistujú žiadne preferované smery. To znamená, že pre každú ortogonálnu transformáciu $\mathbf{S}$ platí

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{V}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1}).$$

Za predpokladu, že $\mathbf{V}(\mathbf{D})$ je analytická funkcia, tak sa dá napísať v tvare

$$\mathbf{V} = c_0\mathbf{1} + c_1\mathbf{D} + c_2\mathbf{D}^2 + c_3\mathbf{D}^3 + \dots, \tag{1.21}$$

kde koeficienty $c_i = c_i(D_I,D_{II},D_{III})$ sú funkciami len invariantov tenzoru $\mathbf{D}$

$$\begin{aligned} D_I &:= \operatorname{tr}\mathbf{D}, \\ D_{II} &:= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}^2\mathbf{D} - \operatorname{tr}\mathbf{D}^2\Big), \\ D_{III} &:= \det\mathbf{D}. \end{aligned}$$

Z Cayley-Hamiltonovej vety (každá matica je koreňom vlastného charakteristického polynómu) vyplýva, že tretia mocnina $\mathbf{D}$ sa dá vyjadriť z charakteristického polynómu $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D}^3 = D_I\mathbf{D}^2 - D_{II}\mathbf{D} + D_{III}\mathbf{1},$$

čo môžeme opakovane dosadzovať do (1.21) koľkokrát to len pôjde, čím vlastne vyjadríme všetky mocniny $\mathbf{D}$ vyššie ako dva pomocou lineárnych kombinácií mocnín $\mathbf{D}$ rovných nanajvýš dva. Po preusporiadaní členov dostaneme

$$\mathbf{V} = \tilde{c}_0(D_I,D_{II},D_{III})\mathbf{1} + \tilde{c}_1(D_I,D_{II},D_{III})\mathbf{D} + \tilde{c}_2(D_I,D_{II},D_{III})\mathbf{D}^2,$$

čo platí aj bez predpokladu, že $\mathbf{V}(\mathbf{D})$ je analytická (Serrin, 1959, Theorem 1). Po dosadení predchádzajúceho výsledku do (1.20) a využitím (1.19) dostaneme tenzor napätia pre všeobecnú tekutinu

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \tilde{c}_0(D_I,D_{II},D_{III})\mathbf{1} + \tilde{c}_1(D_I,D_{II},D_{III})\mathbf{D} + \tilde{c}_2(D_I,D_{II},D_{III})\mathbf{D}^2.$$

Newtonovské tekutiny sú z definície také, pre ktoré je predchádzajúci vzťah lineárny v $\mathbf{D}$. V tomto prípade druhý invariant D_{II} a aj tretí D_{III} vo vzťahu pre $\mathbf{T}$ vystupovať nemôžu. Ďalej jedine $\tilde{c}_2 = 0$, čím dostaneme

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \tilde{c}_0(D_I)\mathbf{1} + \tilde{c}_1(D_I)\mathbf{D}.$$

Aby bol predchádzajúci výsledok lineárny v $\mathbf{D}$, tak je vidieť, že $\tilde{c}_0$ môže byť jedine lineárna funkcia stopy $\mathbf{D}$ — smernicu označme λ. Ďalej $\tilde{c}_1$ už musí byť nezávislá od $\mathbf{D}$, resp. je to len konštanta, ktorú označíme 2μ

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{1}\lambda \operatorname{tr} \mathbf{D} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Aplikáciou operátoru stopy na vzťah (1.18) a využitím nestlačiteľnosti (1.13)

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr} \operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{tr} \operatorname{grad}^T \vec{v}\Big) = \operatorname{tr} \operatorname{grad} \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

nezávisle od parametru λ

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}.$$

Hneď vidíme, že získaný tenzor napätia je symetrický. Po dosadení (1.18) do predchádzajúceho vzťahu dostaneme tenzor napätia v tvare

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mu\Big(\operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad}^T \vec{v}\Big). \tag{1.22}$$

Vzťah (1.22) je konštitučná rovnica pre nestlačiteľnú Newtonovskú tekutinu. Neskôr uvidíme, že *dynamická viskozita* μ súvisí s kinematickou viskozitou. Tlak p vyjadríme z (1.22) tak, že na rovnosť aplikujeme operátor stopy a použijeme nestlačiteľnosť (1.13)

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \mathbf{T} &= \operatorname{tr}(-p\mathbf{1}) + \operatorname{tr} \mu\Big(\operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad}^T \vec{v}\Big) \\
&= -p \operatorname{tr} \mathbf{1} + \mu\Big(\operatorname{tr} \operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{tr} \operatorname{grad}^T \vec{v}\Big) \\
&= -3p + 2\mu \underbrace{\operatorname{tr} \operatorname{grad} \vec{v}}_{\operatorname{div} \vec{v} = 0} \\
&= -3p + 0 \implies p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T}, \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

kde sme si uvedomili, že stopa jednotkovej matice je rovná dimenzii priestoru a stále pracujeme v $\mathcal{E}^3$.

2. Slabá formulácia

V minulej kapitole sme vybudovali teóriu na popis kontinua a formulovali všetky potrebné zákony zachovania z klasickej fyziky. Na záver predchádzajúcej kapitoly sme odvodili tenzor napätia pre náš model tekutiny. V tejto kapitole dáme všetko dokopy a odvodíme slabú formuláciu Navier-Stokesových rovníc. K tomu ešte budeme potrebovať jeden veľmi dôležitý výsledok, ktorý si teraz dokážeme:

Lemma 1 (Reynolds, 1903, str. 12 a 13 — Reynolds transport theorem)**.**
Nech $\mathcal{P}_t = \vec{\chi}(\mathcal{P}_R, t)$ pre $\mathcal{P}_R \subset \kappa_R(\mathcal{B})$ a $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x}, t)$ je hladká vektorová, resp. skalárna funkcia definovaná $\forall \vec{x} \in \mathcal{P}_t$, potom platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{P}_t} \vec{y} \;\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{y} \otimes \vec{v} \right) \right) \mathrm{d}x.$$

Poznámka. Zvyčajne sa ešte používa Gauss-Ostrogradského veta na objemový integrál z $\operatorname{div}(\vec{y} \otimes \vec{v})$ cez $\mathcal{P}_t$, čo ho prevedie na plošný integrál cez $\partial \mathcal{P}_t$ z argumentu divergencie. Týmto smerom my nepôjdeme kvôli tomu, že v slabej formulácii chceme iba objemové integrály.

Dôkaz. Stále používame definície (1.1), (1.6) a (1.3), teda $\vec{y} \equiv \vec{y}_E$. Ďalej platí, že $\mathcal{P}_t = \vec{\chi}(\mathcal{P}_R, t)$ a na integrál z ľavej strany môžeme použiť vetu o substitúcii integrálu

$$\int_{\vec{\chi}(\mathcal{P}_R, t)} \vec{y}(\vec{x}, t) \;\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_R} \vec{y}(\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \det \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial \vec{X}} \;\mathrm{d}X = \int_{\mathcal{P}_R} \vec{y}_L(\vec{X}, t) \det \mathbf{F}(\vec{X}, t) \;\mathrm{d}X.$$

Počítajme ľavú stranu z definície derivácie a použitím predchádzajúcej identity

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{P}_t} \vec{y} \;\mathrm{d}x &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\mathcal{P}_{t+\Delta t}} \vec{y}(\vec{x}, t + \Delta t) \;\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{P}_t} \vec{y}(\vec{x}, t) \;\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{P}_R} \left(\vec{y}_L(\vec{X}, t + \Delta t) \det \mathbf{F}(\vec{X}, t + \Delta t) - \vec{y}_L \det \mathbf{F} \right) \mathrm{d}X \\
&= \int_{\mathcal{P}_R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{y}_L(\vec{X}, t + \Delta t) \det \mathbf{F}(\vec{X}, t + \Delta t) - \vec{y}_L \det \mathbf{F} \right) \mathrm{d}X \\
&= \int_{\mathcal{P}_R} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{y}_L \det \mathbf{F} \right) \mathrm{d}X \\
&= \int_{\mathcal{P}_R} \left(\frac{\partial \vec{y}_L}{\partial t} \det \mathbf{F} + \vec{y}_L \frac{\partial}{\partial t} \det \mathbf{F} \right) \mathrm{d}X,
\end{aligned}$$

kde sme v poslednom kroku použili Leibnizovo pravidlo pre deriváciu súčinu. Do druhého členu v integráli teraz dosadíme (1.12), čím dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{P}_t} \vec{y} \;\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{P}_R} \left(\frac{\partial \vec{y}_L}{\partial t} \det \mathbf{F} + \vec{y}_L \det \mathbf{F} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \right) \mathrm{d}X \\
&= \int_{\mathcal{P}_R} \left(\frac{\partial \vec{y}_L}{\partial t}(\vec{X}, t) + \vec{y}_L(\vec{X}, t) \operatorname{div} \vec{v}(\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \right) \det \mathbf{F}(\vec{X}, t) \;\mathrm{d}X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{P}_R} \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{y} + \vec{y} \operatorname{div} \vec{v} \right) (\vec{\chi}(\vec{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\vec{X}, t) \; \mathrm{d}X \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{y} + \vec{y} \operatorname{div} \vec{v} \right) (\vec{x}, t) \; \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \vec{y}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{y} \otimes \vec{v} \right) \right) \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde sme v treťom kroku využili vzťah pre materiálovú deriváciu (1.5) a ďalej prešli od Lagrangeovho popisu funkcie $\vec{y}$ k Eulerovému. V štvrtom kroku sme použili vetu o substitúcii integrálu a posledný krok je lepšie vidieť, keď si ho rozpíšeme v zložkovom zápise použitím Einsteinovej sumačnej konvencie

$$
\left[\operatorname{div} \left(\vec{y} \otimes \vec{v} \right) \right]_i = \partial_j \left(y_i v_j \right) = v_j \partial_j y_i + y_i \partial_j v_j = \vec{v} \cdot \operatorname{grad} y_i + y_i \operatorname{div} \vec{v}.
$$

Je vidieť, že celý výpočet by prešiel úplne rovnako aj pre skalárnu funkciu $y(\vec{x}, t)$, čím je dôkaz dokončený.

$\square$

Tak a už máme všetko pripravené, aby sme pristúpili k odvodeniu slabej formulácie Navier-Stokesových rovníc. Budeme postupovať v štyroch krokoch:

1. Aplikácia zákonov zachovania — čo nám zákony dohromady poskytujú.
2. Prechod k fixným množinám — zafixujeme množiny, cez ktoré integrujeme.
3. Limitný prechod — počet množín pošleme do nekonečna.
4. Oslabenie formulácie — rozšírime triedu funkcií.

2.1 Aplikácia zákonov zachovania

Zákon zachovania momentu hybnosti (1.17) nám nedáva žiadnu informáciu, nakoľko pre náš model je tenzor napätia (1.22) symetrický — v minulej kapitole sme to podrobne zdôvodnili. Z rovnakého dôvodu už v zákone zachovania hybnosti (1.15) nebudeme písať transpozíciu tenzoru napätia. Prederivujeme časové derivácie na ľavých stranách cez integrály v zákonoch zachovania hybnosti (1.15) a hmoty (1.14) použitím Lemma 1 a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} \right) \right) \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho \vec{f} \; \mathrm{d}x + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \\
\int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \right) \right) \mathrm{d}x &= 0, \; \forall \mathcal{P}_t \subset \kappa_t(\mathcal{B}), \, \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Ďalej využijeme predpokladanú homogenitu tekutiny, t. j. ρ je kladná nezávislá konštanta, $\partial \rho / \partial t = 0$ a obe rovnice vydelíme s hustotou, keďže je to len nezávislé číslo, tak prejde cez všetky diferenciálne operátory aj integrály. Ešte rozvinieme člen $\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{v})$ pomocou výpočtu na konci dôkazu Lemma 1 pre špeciálny prípad $y_i = v_i$

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_t} \vec{f} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\rho} \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

$$\int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}x = 0, \ \forall \mathcal{P}_t \subset \kappa_t(\mathcal{B}), \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teraz využijeme nestlačiteľnosť, teda do oboch rovníc dosadíme vzťah (1.13). Vidíme, že zákon zachovania hmoty dá $0 = 0$, je identicky splnený, neprináša nám žiadnu novú informáciu a teda sa nemusíme už oň starať. Počet rovníc sa nám zredukuje na jednu, len zákon zachovania hybnosti. Na integrál cez $\partial \mathcal{P}_t$ použijeme Gauss-Ostrogradského vetu, ktorá ho prevedie na integrál cez $\mathcal{P}_t$ z divergencie jeho argumentu

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{P}_t} \vec{f} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\rho} \int_{\mathcal{P}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \, \mathrm{d}x, \ \forall \mathcal{P}_t \subset \kappa_t(\mathcal{B}), \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nakoniec všetky členy prevedieme na ľavú stranu pod jeden integrál

$$\int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) \mathrm{d}x = 0, \, \forall \mathcal{P}_t \subset \kappa_t(\mathcal{B}), \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Prechod k fixným množinám

Nastavme $\kappa_t(\mathcal{B}) \equiv \kappa_R(\mathcal{B}) =: \Omega$ (predpokladajme, že Ω je otvorená ohraničená súvislá oblasť s dostatočne hladkou hranicou podľa potreby), pre $\forall t \in (t_0, T) =: I$, $-\infty < t_0 < T < \infty$ (zvyčajne berieme $t_0 = 0$) a odíďme od doterajšej konštrukcie pomocou množín $\mathcal{P}_t$ pohybujúcich sa v $\mathcal{E}^3$ k zafixovaným množinám $\mathcal{O} \subset \Omega \subset \mathcal{E}^3$

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) \mathrm{d}x = 0, \, \forall \text{ fixné } \mathcal{O} \subset \Omega, \ \forall t \in I. \tag{2.1}$$

Tento krok je netriviálny, aj keď sa na prvý pohľad môže zdať pravý opak. Fixné $\mathcal{O}$ bude vždy v nejakej $\mathcal{P}_t$, ktorá keď aj náhodou odcestuje preč, tak na jej miesto pricestuje iná $\mathcal{P}_t$. Zafixovaním $\mathcal{O}$ neprídeme o žiadnu voľnosť, nakoľko $\mathcal{O}$ aj $\mathcal{P}_t$ sú úplne ľubovoľné (môžeme ich voliť tak, aby medzi nimi existovala bijekcia).

Nech $n \in \mathbb{N}$ a rozdeľme Ω na množiny $\sigma_i \subset \Omega$, kde $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, za podmienky, aby platilo

$$\bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i = \Omega \qquad \wedge \qquad \int_{\sigma_i \cap \sigma_j} \mathrm{d}x = 0 \text{ pre } i \neq j.$$

Inak povedané, aby všetky σ_i dali spolu naspäť presne Ω (aby nič nechýbalo, ani nič nebolo navyše) a zároveň boli po dvoch disjunktné, nanajvýš sa prekrývali len na prienikoch nulovej miery (typicky hranice „susediacich“ σ_i a σ_j). Potom pre každú σ_i platí rovnaká rovnica ako (2.1), nakoľko $\mathcal{O}$ bolo úplne ľubovoľné, resp. za $\mathcal{O}$ môžeme postupne brať $\mathcal{O} := \sigma_1$, $\mathcal{O} := \sigma_2$, $\mathcal{O} := \sigma_3$, ... až $\mathcal{O} := \sigma_n$ a dosadzovať do (2.1). Z tejto úvahy dostávame sústavu n rovníc

$$\left\{ \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n\colon \int_{\sigma_i} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) \mathrm{d}x = 0 \right\}, \ \forall t \in I.$$

2.3 Limitný prechod

Na $\Omega \setminus \sigma_i$ môžeme argument integrálu dodefinovať nulou a teda prejsť na integrovanie cez celé Ω z charakteristickej funkcie χ_i množiny σ_i

$$\left\{\forall i = 1,2,3,\dots,n\colon\ \int_\Omega \chi_i(\vec{x}) \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{T}\right]_j \mathrm{d}x = 0\right\},\ \forall t \in I,$$

kde sme ešte prešli do zložkového zápisu pre $j = 1,2,3$, takže už máme celkovo $3n$ rovníc. Násobenie rovnice ľubovoľným nenulovým reálnym číslom je ekvivalentná úprava, takže i,j-tú rovnicu môžeme prenásobiť s $c_{ij} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a dostaneme (tentokrát <u>ne</u>používame Einsteinovu sumačnú konvenciu)

$$\left\{\forall i = 1,2,3,\dots,n\colon\ \int_\Omega c_{ij}\chi_i \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{T}\right]_j \mathrm{d}x = 0\right\},\ \forall t \in I.$$

Teraz rovnice v našej sústave posčítame cez i, takže z $3n$ rovníc nám ostanú len 3, jedna pre každú zložku $j = 1,2,3$. Keďže v každej rovnici sme integrovali cez Ω, tak všetky členy súčtu môžeme dať pod jeden integrál a vytiahneme zátvorku nezávisiacu na i zo sumy

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\chi_i\right)}_{=:\,\varphi_{nj}} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{T}\right]_j \mathrm{d}x = 0,\ \forall t \in I, \tag{2.2}$$

kde $\varphi_{nj}(\vec{x})$ nazveme *jednoduchou funkciou.* Jednoduché funkcie majú očividne konečný počet prvkov vo svojom obore hodnôt. Nakoľko n môžeme brať ľubovoľne veľké a čísla c_{ij} sú tiež ľubovoľné, tak je prirodzené očakávať, že ich vhodnou voľbou vieme zabezpečiť, aby ku každej „peknej“ funkcii $\varphi_j\colon \Omega \to \mathbb{R}$ konvergovala nejaká nami zvolená postupnosť jednoduchých funkcií. Skutočne tomu tak je:

Lemma 2 (aproximácia merateľných funkcií)**.** *Nech $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^*$ je merateľná. Potom existuje postupnosť $\{\varphi_a\}_{a\in\mathbb{N}}$ jednoduchých funkcií, tak že $\varphi_a \xrightarrow{a\to\infty} \varphi$ na Ω.*

Dôkaz. Pre každé $1 < n \in \mathbb{N}$ definujeme delenie oboru hodnôt

$$\mathcal{M}(n) := \left\{1-n^2,\, 2-n^2,\, 3-n^2,\ \dots,\ -1,\, 0,\, 1,\ \dots,\, n^2-4,\, n^2-3,\, n^2-2\right\},$$

kde počet prvkov $\mathcal{M}$ označíme $M \in \mathbb{N}$. Ďalej definujeme delenie definičného oboru pre $\forall m \in \mathcal{M}(n)$ pomocou

$$\tilde{\Omega}(n,m) := \left\{\forall \vec{x} \in \Omega\colon\ \frac{m}{n} \le \varphi(\vec{x}) < \frac{m+1}{n}\right\}.$$

Postupnosť jednoduchých funkcií $\{\varphi_a\}_{a\in\mathbb{N}}$, kde

$$\varphi_a(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{a} c_i\chi_i(\vec{x}),\ c_i \in \mathbb{R},$$

definujeme nasledovne v dvoch krokoch

$$\varphi_{M+2}(\vec{x}) := \begin{cases} -n, & \vec{x} \in \Omega \setminus \bigcup_{m=1-n^2}^{n^2-2} \tilde{\Omega}(n,m) \ \wedge \ \varphi(\vec{x}) < 0, \\ \frac{m}{n}, & \vec{x} \in \tilde{\Omega}(n,m), \\ n, & \vec{x} \in \Omega \setminus \bigcup_{m=1-n^2}^{n^2-2} \tilde{\Omega}(n,m) \ \wedge \ \varphi(\vec{x}) > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Nech $k, l \in \mathbb{N}$: $k > l$ a tie φ_k, ktoré sme nedefinovali vzťahom (2.3), tak dodefinujeme $\varphi_k := \varphi_l$, kde φ_l, ak je to možné, je definované s (2.3) a zároveň $\forall r \in \mathbb{N} : l < r \leq k$, $\forall \varphi_r$ nie sú definované pomocou (2.3). Zvyšné nedefinované φ_s dodefinujeme identicky nulou. Takto sme skonštruovali postupnosť jednoduchých funkcií $\{\varphi_a\}_{a\in\mathbb{N}}$ pre $a = a(n)$ definovaných na celom Ω s oborom hodnôt

$$\left\{ -n,\ \frac{1}{n} - n,\ \frac{2}{n} - n,\ \frac{3}{n} - n,\ \ldots,\ n - \frac{3}{n},\ n - \frac{2}{n},\ n - \frac{1}{n},\ n \right\}.$$

Takže od dostatočne veľkého n (existuje k nemu práve jedno a), pre nejaké $\vec{x} \in \Omega$ platí

$$|\varphi(\vec{x})| \leq n \leq M \leq a \implies |\varphi_a(\vec{x}) - \varphi(\vec{x})| \leq \frac{1}{n},$$

odkiaľ vyplýva, že pre $n \to \infty$ musí $\varphi_a \xrightarrow{a\to\infty} \varphi$ na Ω, čím je dôkaz hotový.

$\square$

Teraz budeme chcieť aplikovať na našu konštrukciu Lemma 2, ktoré sme dokázali pre ľubovoľnú merateľnú funkciu, čo je veľmi široká trieda funkcií. Pre budúcu potrebu nám postačí, ak budeme uvažovať funkcie iba hladké $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alebo z Lebesgueovho priestoru $\varphi \in L^p(\Omega)$ pre $p \in [1, \infty]$ alebo zo Sobolevovho priestoru $\varphi \in W^{k,p}(\Omega)$, pre $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1, \infty]$, resp. z nejakého podpriestoru týchto priestorov funkcií. Konečne preveďme limitu $n \to \infty$ pre „rovnomerné" delenie Ω, t. j. aby miera σ_i pre všetky $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ išla k nule so zväčšujúcim sa n. Aplikáciou Lemma 2 na všetky tri zložky $j = 1, 2, 3$ rovnice (2.2) dostaneme

$$\int_\Omega \varphi_j \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right]_j \mathrm{d}x = 0,\ \forall \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall t \in I.$$

Teraz všetky tri rovnice posčítame dokopy a keďže všade integrujeme cez Ω, tak jednotlivé členy súčtu dáme pod jeden integrál, čím dostávame jedinú skalárnu rovnicu

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right]_j \mathrm{d}x = 0,\ \forall \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall t \in I.$$

Nakoniec si uvedomíme, že táto suma je z definície skalárny súčin

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T} \right) \cdot \vec{\varphi}\ \mathrm{d}x = 0,\ \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall t \in I, \tag{2.4}$$

kde sme zaviedli $\vec{\varphi} := (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)^T$.

2.4 Oslabenie formulácie

Od konštrukcie pomocou množín $\mathcal{P}_R$ a $\mathcal{P}_t$ sme už odišli. Ďalej si môžeme všimnúť, že už dlhšiu dobu sme vôbec nepracovali so zobrazením $\vec{\chi}$ definovaným vzťahom (1.1), na základe čoho sme vybudovali celú túto teóriu. Skutočne už môžeme úplne zabudnúť na prvotnú konštrukciu pomocou tohto zobrazenia, rovnako tak aj zabudneme na všetky predpoklady čo sme použili na odvodenie (2.4). Ako štartovný bod pre definíciu rôznych pojmov riešení budeme brať práve (2.4), čo sa nazýva aj ako *Eulerova rovnica*. Vystupuje v nej už iba rýchlosť $\vec{v}$, žiadne $\vec{\chi}$, takže od definície rýchlosti (1.4) odhliadneme a budeme ju považovať za novú primitívnu premennú.

Navier-Stokesové rovnice odvodíme tak, že do Eulerovej rovnice (2.4) dosadíme tenzor napätia pre nestlačiteľnú newtonovskú tekutinu (1.22). Najpr si pripravíme jeho divergenciu — počítajme v zložkách

$$\begin{aligned}
\partial_j T_{ij} &= -\partial_j p \delta_{ij} + \partial_j \mu \Big(\partial_i v_j + \partial_j v_i \Big) \\
&= -\partial_j \delta_{ji} p + \mu \Big(\partial_i \partial_j v_j + \partial_j \partial_j v_i \Big) \\
&= -\partial_i p + \mu \Big(\partial_i \operatorname{div} \vec{v} + \Delta v_i \Big) \\
&= -\partial_i p + \mu \Delta v_i \\
\operatorname{div} \mathbf{T} &= -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v},
\end{aligned}$$

kde v treťom kroku sme si uvedomili ako vyzerá divergencia a Laplaceov operátor v zložkovom zápise. V štvrtom kroku sme využili nestlačiteľnosť (1.13) a nakoniec sme sa vrátili zo zložiek do invariantného zápisu.

Dosadením predchádzajúceho výsledku do (2.4) a zavedením *kinematickej viskozity* $\nu = \mu/\rho$ dostávame *silnú formuláciu* Navier-Stokesových rovníc $\forall t \in I$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta \vec{v} \right) \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x = 0, \ \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}). \qquad (2.5)$$

Keďže hustota ρ je konštanta, tak môžeme preškálovať tlak p tak, aby v rovnici už nevystupovala. Inak povedané, zavedieme také fyzikálne jednotky, v ktorých je $\rho = 1$. Rovnica (2.5) pre rôznu voľbu *testovacej funkcie* $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ dáva tri informácie (dimenzia $\mathcal{E}^3$ je 3), ale vystupujú v nej štyri neznáme: tri pre zložky rýchlosti $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ a tlak p. Z tohto dôvodu musíme k rovnici (2.5) pridať ešte štvrtú informáciu, konkrétne už odvodenú podmienku pre nestlačiteľnosť $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ v Ω, vzťah (1.13). V rovnici (2.5) vystupuje jediná nelinearita $\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$, ktorá je kvadratická a nazýva sa *konvektívny člen*.

Zatiaľ sme o testovacej funkcii $\vec{\varphi} \colon \Omega \to \mathcal{E}^3$ predpokladali iba jej hladkosť, čo zahŕňuje pomerne širokú triedu funkcií. Niekedy v budúcnosti, ale chceme za testovaciu funkciu zobrať samotné riešenie rýchlostného poľa $\vec{v}$ (riešenie čoho a s akými okrajovými a počiatočnými podmienkami sme zatiaľ nedefinovali). Z tohto dôvodu budeme ďalej od testovacej funkcie požadovať, aby kopírovala niektoré vlastnosti rýchlostného poľa. Konkrétne, aby na $\partial\Omega$ spĺňala rovnaké okrajové podmienky ako rýchlostné pole a ďalej spĺňala podmienku $\operatorname{div} \vec{\varphi} = 0$ v Ω.

Rovnica (2.5) sa nazýva silná formulácia, lebo od tlaku potrebujeme, aby existovali jeho priestorové derivácie (aby mal gradient zmysel). Ďalej vyžadujeme od rýchlostného poľa, aby bolo dvakrát diferencovateľné v priestore — posledný člen obsahuje Laplaceov operátor, čo je druhá derivácia $\Delta \equiv \partial_i \partial_i$ (v ostatných členoch stačí, aby existovala prvá derivácia rýchlosti). Otázka teda znie, či sa dajú tieto dosť silné predpoklady nejako *oslabiť*? Odpoveď je kladná, pretože poznáme nástroje, pomocou ktorých vieme derivácie v integráli presúvať medzi jednotlivými členmi. Konkrétne integráciou *per-partes* vieme „odsunúť" deriváciu funkcie v súčine na druhú funkciu. Samozrejme nebude to úplne „zadarmo", ale za cenu, že v rovnici sa objavia nové okrajové členy (integrály cez $\partial\Omega$).

Rozpíšme si teda posledné dva členy v rovnici (2.5) po zložkách a použime „per-partes", resp. *Greenovu identitu* (preto sme aj požadovali hladkosť testovacej funkcie a pripomeňme ešte, že $\rho = 1$)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{grad} p \cdot \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \Big(\partial_i p\Big)\varphi_i \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} n_i p \varphi_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega p\Big(\partial_i \varphi_i\Big) \,\mathrm{d}x, \\ -\nu \int_\Omega \Delta\vec{v} \cdot \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x &= -\nu \int_\Omega \Big(\partial_i \partial_i v_j\Big)\varphi_j \,\mathrm{d}x \\ &= -\nu \int_{\partial\Omega} n_i \Big(\partial_i v_j\Big)\varphi_j \,\mathrm{d}S + \nu \int_\Omega \Big(\partial_i v_j\Big)\Big(\partial_i \varphi_j\Big) \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

odkiaľ máme už v invariantnom zápise

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{grad} p \cdot \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} p\vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_\Omega p \underbrace{\operatorname{div} \vec{\varphi}}_{=0} \,\mathrm{d}x, \\ -\nu \int_\Omega \Delta\vec{v} \cdot \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x &= -\nu \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad} \vec{v} : \Big(\mathrm{d}\vec{S} \otimes \vec{\varphi}\Big) + \nu \int_\Omega \operatorname{grad} \vec{v} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Všimnime si, že na pravých stranách stačí o jedna menšia diferencovateľnosť tlaku a rýchlosti ako na ľavých stranách. Testovacie funkcie vždy berieme s rovnakými vlastnosťami ako rýchlostné pole, takže $\operatorname{div} \vec{\varphi} = 0$ v Ω a objemový integrál s tlakom vypadne vždy, nezávisle na voľbe okrajových a počiatočných podmienok.

Dosadením predchádzajúceho výsledku do silnej formulácie (2.5) dostávame *slabú formuláciu* Navier-Stokesových rovníc

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f}\right) \cdot \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \operatorname{grad} \vec{v} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(p\vec{\varphi} \cdot \vec{n} - \nu \operatorname{grad} \vec{v} : \Big(\vec{n} \otimes \vec{\varphi}\Big)\right) \mathrm{d}S = 0, \ \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}}, \forall t \in I, \end{aligned} \tag{2.6}$$

kde sme ešte zaviedli značenie

$$\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}} \iff \vec{\varphi} \in \left\{ \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \colon \operatorname{div} \vec{\varphi} = 0 \text{ v } \Omega \right\}.$$

Vidno, že v slabej formulácii (2.6) nám už stačí iba integrovateľnosť prvých derivácií rýchlosti v Ω. Oslabením predpokladov na rýchlosť a tlak sme rozšírili ich triedu funkcií za cenu dvoch nepríjemných okrajových členov. Čo sa dá robiť s týmito integrálmi cez $\partial\Omega$ sa bližšie pozrieme v nasledujúcej kapitole venovanej vplyvu okrajových podmienok.

3. Vplyv okrajových podmienok

V predchádzajúcej kapitole sme odvodili slabú formuláciu Navier-Stokesových rovníc (2.6), ale vôbec sme nedefinovali, čo rozumieme pod pojmom „riešenie“. Aby bol vôbec problém prúdenia tekutiny v ohraničenej oblasti Ω s dostatočne hladkou hranicou dobre definovaný, tak je potrebné špecifikovať, ako sa tekutina správa na $\partial\Omega$. Voľba okrajovej podmienky bude očividne vstupovať priamo do slabej formulácie (2.6), konkrétne ovplyvní vzniknuté okrajové integrály cez $\partial\Omega$. Ešte predtým ako sa pozrieme do rôznych typov okrajových podmienok, pripomeňme, že testovacie funkcie $\vec{\varphi}$ berieme tak, aby kopírovali vlastnosti rýchlostného poľa, teda spĺňali rovnaké okrajové podmienky.

3.1 „No-slip“

„No-slip“ zakazuje akýkoľvek pohyb tekutiny na $\partial\Omega$, takže patrí medzi najjednoduchšie možné okrajové podmienky. Ide o homogénnu Dirichletovu podmienku, teda rýchlostné pole je na hranici nulové

$$\vec{v}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0 \implies \vec{\varphi}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Táto podmienka je veľmi prirodzená pre viskózne tekutiny a poznáme ju z každodenného života. Každý predsa vie, že voda pri brehu tečúcej rieky v skutočnosti netečie žiadnym smerom. Samozrejme, tak ako všetko, má aj toto svoje limity a podmienka platí iba pri malých rýchlostiach.

Dosadením „no-slip“ okrajovej podmienky do slabej formulácie (2.6) ihneď vidíme, že oba okrajové integrály vypadnú vďaka nulovosti testovacej funkcie na hranici Ω

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v} - \vec{f}\right)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x + \nu\int_\Omega \operatorname{grad}\vec{v} : \operatorname{grad}\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x = 0,\\ &\qquad\qquad \forall\vec{\varphi}\in\left\{\vec{\varphi}\in\mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}}:\ \vec{\varphi}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0\right\},\ \forall t\in I. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 „Full slip“

Pri rozumnej voľbe Ω môžeme v každom bode na $\partial\Omega$ rozložiť rýchlosť na tangenciálnu $\vec{v}_t$ a normálovú $\vec{v}_n$ zložku tak, že

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_n, \qquad \vec{v}_t\cdot\vec{n} = 0, \qquad \vec{v}_n\cdot\vec{n} = \vec{v}_n, \tag{3.2}$$

je dané jednoznačne a analogicky pre každé iné vektorové pole definované na $\partial\Omega$.

Pod „full slip“ rozumieme okrajovú podmienku, ktorá umožňuje ľubovoľné kĺzanie modelovej tekutiny po hranici, ale jej tok cez hranicu nedovoľuje, naviac

$$\Big[\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\Big]_t\,\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \wedge \qquad \vec{v}_n\,\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Použitím (3.2) je vidieť, že podmienka $\vec{v}_n = 0$ sa dá zapísať ako $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$, teda normálová zložka rýchlosti musí byť nulová na $\partial\Omega$ (o tangenciálnej zložke nič nehovoríme, čo umožňuje spomínané kĺzanie po hranici). Bežne, keď máme oblasť s pevnou hranicou, napríklad potrubie, tak predsa nechceme, aby tekutina mala nenulový tok cez túto hranicu.

Tento princíp výborne zachytáva práve „full slip“, čo keď dosadíme do integrálov cez $\partial\Omega$ v slabej formulácii (2.6), tak hneď vidíme, že člen s tlakom je nulový vďaka $0 = \vec{\varphi}\cdot\vec{n}\,\Big|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi}_n\,\Big|_{\partial\Omega}$. Počítajme ďalej

$$
\begin{aligned}
-\nu\int_{\partial\Omega}\operatorname{grad}\vec{v} : \left(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\right)\,\mathrm{d}S &= -\nu\int_{\partial\Omega}\left(\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}S\\
&= -\nu\int_{\partial\Omega}\left(\underbrace{\left[\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right]_t}_{=0} + \left[\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right]_n\right)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}S\\
&= -\nu\int_{\partial\Omega}\left[\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right]_n\cdot\left(\vec{\varphi}_t + \underbrace{\vec{\varphi}_n}_{=0}\right)\,\mathrm{d}S\\
&= -\nu\int_{\partial\Omega}\underbrace{\left[\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right]_n\cdot\vec{\varphi}_t}_{\text{sú kolmé}}\;\mathrm{d}S\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Znova oba okrajové členy vypadnú, takže slabá formulácia pre „full slip“ okrajovú podmienku bude mať rovnakú rovnicu ako pre „no-slip“ (3.1), ale tentokrát berieme testovacie funkcie z iného priestoru

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v} - \vec{f}\right)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x + \nu\int_\Omega\operatorname{grad}\vec{v} : \operatorname{grad}\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x = 0,\\
\forall\vec{\varphi}\in\left\{\vec{\varphi}\in\mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}} :\ \vec{\varphi}_n\,\Big|_{\partial\Omega} = 0\right\},\ \forall t\in I.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

3.3 „Navier’s slip“

Ďalšou možnou okrajovou podmienkou je tzv. „Navier’s slip“, čo je vlastne modifikovaný „full slip“ pre nezáporný koeficient trenia $\kappa \geq 0$

$$
\left[\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v} + \kappa\vec{v}\right]_t\,\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \wedge \qquad \vec{v}_n\,\Big|_{\partial\Omega} = 0.
$$

Rovno vidíme, že pre $\kappa = 0$ dostaneme priamo „full slip“ a pre $\kappa\to\infty$ bude dominantný člen $\kappa\vec{v}$ oproti $\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}$, teda tangenciálna zložka rýchlosti sa bude blížiť k nule na $\partial\Omega$ (normálová je nulová), takže celá podmienka prejde na „no-slip“. Inak povedané, voľba koeficientu κ umožňuje škálovanie od úplného „full slip“ až do „no-slip“.

Keď dosadíme „Navier’s slip“ okrajovú podmienku do integrálov cez $\partial\Omega$ v slabej formulácii (2.6), tak hneď vidíme, že člen s tlakom už zase vypadne, nakoľko stále $\vec{\varphi}_n\,\Big|_{\partial\Omega} = 0$. Upravujme teraz druhý okrajový člen

$$
\begin{aligned}
-\nu\int_{\partial\Omega}\operatorname{grad}\vec{v} : \left(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\right)\,\mathrm{d}S &= -\nu\int_{\partial\Omega}\left(\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}S\\
&= -\nu\int_{\partial\Omega}\left(\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{\varphi}_t + \underbrace{\vec{\varphi}_n}_{=0}\right)\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\nu \int_{\partial\Omega} \left(\left[\vec{n} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}\right]_t \cdot \vec{\varphi}_t + \underbrace{\left[\vec{n} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}\right]_n \cdot \vec{\varphi}_t}_{\text{sú kolmé}} \right) \mathrm{d}S \\
&= -\nu \int_{\partial\Omega} \left[\vec{n} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}\right]_t \cdot \vec{\varphi}_t \ \mathrm{d}S \\
&= \nu\kappa \int_{\partial\Omega} \vec{v}_t \cdot \vec{\varphi}_t \ \mathrm{d}S.
\end{aligned}
$$

Posledný integrál všeobecne nevypadne. Pre „Navier's slip" okrajovú podmienku tak dostaneme slabú formuláciu v tvare

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} \right) \cdot \vec{\varphi} \ \mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \operatorname{grad} \vec{v} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \ \mathrm{d}x \\
&+ \nu\kappa \int_{\partial\Omega} \vec{v}_t \cdot \vec{\varphi}_t \ \mathrm{d}S = 0, \ \forall \vec{\varphi} \in \left\{ \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}} : \ \vec{\varphi}_n \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \ \forall t \in I.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

3.4 Nehomogénna okrajová podmienka

Všeobecná úloha môže mať zadanú funkciu $\vec{v}_B$ na $\partial\Omega$ ako okrajovú podmienku pre rýchlostné pole, teda v zmysle

$$
\vec{v} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{v}_B.
$$

Budeme predpokladať, že sa predpísané $\vec{v}_B$ dá dostatočne hladko predĺžiť do celého Ω. Toto predĺženie označme $\vec{v}_P$ na Ω, a musí spĺňať navyše podmienku na nestlačiteľnosť $\operatorname{div} \vec{v}_P = 0$ v Ω. Hneď je teda jasné, že $\vec{v}_B$ nemôže byť úplne ľubovoľné, ale musí zachovávať podmienku nestlačiteľnosti, ktorú keď preintegrujeme cez Ω, tak na jednej strane dostaneme identickú nulu, ale na druhej strane môžeme použiť Gauss-Ostrogradského vetu

$$
0 = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{v}_P \ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{v}_P \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial\Omega} \vec{v}_B \cdot \mathrm{d}\vec{S}.
$$

Získaný integrál hovorí, že celkový tok cez celú hranicu musí byť nulový, čo je logické, ak má byť tekutina nestlačiteľná (nemôže sa nikde hromadiť), tak koľko vtečie dnu do Ω, tak toľko musí aj vytiecť von z Ω, resp. celková bilancia musí byť nulová. Teraz zaveďme

$$
\vec{w} := \vec{v} - \vec{v}_P \implies \vec{w} \Big|_{\partial\Omega} = \vec{v} \Big|_{\partial\Omega} - \vec{v}_B = 0.
$$

Pomocou tejto konštrukcie vieme úlohu pre $\vec{v}$ s nehomogénnou okrajovou podmienkou previesť na „no-slip" úlohu (3.1) pre $\vec{w}$, teda

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \operatorname{grad} \vec{w} - \vec{f} \right) \cdot \vec{\varphi} \ \mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \operatorname{grad} \vec{w} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \ \mathrm{d}x = 0, \\
&\qquad \forall \vec{\varphi} \in \left\{ \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}} : \ \vec{\varphi} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \ \forall t \in I,
\end{aligned}
$$

kam keď dosadíme definíciu $\vec{w}$ a využijeme linearitu derivácií, tak dostaneme hromadu členov

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{v}_P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{v}_P \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_P + \vec{v}_P \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_P - \vec{f} \right) \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x$$

$$+ \nu \int_\Omega \left(\operatorname{grad} \vec{v} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} - \operatorname{grad} \vec{v}_P : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \right) \mathrm{d}x = 0,$$

$$\forall \vec{\varphi} \in \left\{ \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}} \colon \; \vec{\varphi} \,\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \; \forall t \in I.$$

V druhom integráli na druhý člen môžeme použiť „per-partes“ vďaka predpokladanej hladkosti predĺženia $\vec{v}_P$, čím sa zbavíme gradientu na $\vec{\varphi}$. Okrajový člen je nulový vďaka „no-slip“ okrajovej podmienke. Novovzniknutý člen $\nu \Delta \vec{v}_P$ spolu s ostatnými členmi z prvého integrálu závisiacich iba od $\vec{v}_P$ hrajú rolu ďalších zdrojov. Všetky tieto zdroje spoločne s $-\vec{f}$ označíme $\vec{f}_P$. Dokopy tak dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{v}_P \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_P + \vec{f}_P \right) \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x \\ &+ \nu \int_\Omega \operatorname{grad} \vec{v} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x = 0, \; \forall \vec{\varphi} \in \left\{ \vec{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty_{\Omega,\mathrm{div}} \colon \; \vec{\varphi} \,\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \; \forall t \in I, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde

$$\vec{f}_P := -\frac{\partial \vec{v}_P}{\partial t} + \vec{v}_P \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_P - \vec{f} + \nu \Delta \vec{v}_P,$$

je dané. V porovnaní s homogénnou okrajovou podmienkou (3.1) vidno, že do rovnice pre nehomogénnu podmienku (3.5) pribudli dva lineárne členy a vystupujú v nej upravené zdroje. Pre voľbu $\vec{v}_B = 0$ na $\partial\Omega$ a teda $\vec{v}_P = 0$ v Ω prejde rovnica (3.5) na rovnicu pre „no-slip“ (3.1).

3.5 Kombinácia podmienok a „do-nothing“

V tejto kapitole sme ukázali jednotlivo rôzne okrajové podmienky, ktoré sa používajú pri modelovaní prúdenia nestlačiteľných tekutín, ale chýba tomu nejaký ucelený záver. Preto ešte nakoniec ukážme jeden príklad, v ktorom skombinujeme predchádzajúce výsledky a ukážeme jeden špeciálny prípad okrajovej podmienky.

„Do-nothing“ (Braack a Mucha, 2014) je dobrá charakteristika okrajovej podmienky, ktorá „nerobí nič“, teda nijako neovplyvní rýchlostné pole pri výtoku von z Ω. Numerické riešenie Navier-Stokesových rovníc (napr. metódou konečných prvkov) vyžaduje ohraničenosť Ω, aj keď skutočné fyzikálne problémy sa môžu odohrávať vo veľmi veľkých alebo aj neohraničených Ω. Preto potrebujeme nejaké umelé hranice, ktoré budú mať vlastnosti odtoku, kadiaľ môže modelová tekutina vytekať von.

Uvažujme potrubie v tvare valca (t. j. Ω je valec, $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$). Jeho podstavy označme S_1, S_2 a plášť S_{pl}. Očividne $S_1 \cup S_2 \cup S_{pl} = \partial\Omega$. Z jednej podstavy, napr. S_2 (je to aj tak jedno zo symetrie) nech tečie dnu nestlačiteľná homogénna tekutina, ktorej rýchlostné pole je dané predpisom $\vec{v}_B$ na S_2. Na plášti S_{pl} zaveďme prirodzene „no-slip“ okrajovú podmienku a na druhej podstave S_1 nech je výtok von, resp. „do-nothing“.

Na jednej strane potrebujeme mať nejakú konkrétnu okrajovú podmienku na hranici výtoku S_1, ale na druhej strane zvyčajne nemáme žiadne informácie o výtoku tekutiny. Ide o dlhotrvajúci problém, na ktorý neexistuje žiadna postačujúca teória, čo by sa týmto zaoberala (Bathory a Stefanelli, 2022), nakoľko väčšina existujúcej matematickej teórie o nestlačiteľných tekutinách uvažuje len vnútorné toky, čo je v realite splnené iba málokedy.

Braack a Mucha (2014) konštrukciu delenia $\partial\Omega$ iba na dve časti s okrajovými podmienkami „no-slip“ a „do-nothing“ (teda žiadny tok dnu do Ω) analyzovali matematicky vo svojom článku — za akých predpokladov existuje riešenie v zmysle distribúcií a taktiež jeho stabilita. Pracujú tam ale od samého začiatku s nesymetrickým tenzorom napätia, ktorý nemôže spĺňať zákon zachovania momentu hybnosti (1.17). Ide čisto o matematický model, ktorý nemá fyzikálny význam. To nevadí, nakoľko môžeme „do-nothing“ okrajovú podmienku analogicky zadefinovať aj pre náš prípad. Upravme integrál cez $\partial\Omega$ v slabej formulácii (2.6)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}\Big(p\vec{\varphi}\cdot\vec{n}-\nu\,\mathrm{grad}\,\vec{v}:\big(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\big)\Big)\mathrm{d}S &= \int_{S_1}\Big(p\vec{\varphi}\cdot\vec{n}-\nu\,\mathrm{grad}\,\vec{v}:\big(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\big)\Big)\mathrm{d}S\\
&= \int_{S_1}\Big(p\vec{n}-\nu\vec{n}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}\Big)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}S\\
&= \int_{S_1}\big(p\mathbf{1}-\nu\,\mathrm{grad}\,\vec{v}\big):\big(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\big)\mathrm{d}S\\
&= -\int_{S_1}\tilde{\mathbf{T}}:\big(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\big)\mathrm{d}S\\
\int_{\partial\Omega}\Big(p\vec{\varphi}\cdot\vec{n}-\nu\,\mathrm{grad}\,\vec{v}:\big(\vec{n}\otimes\vec{\varphi}\big)\Big)\mathrm{d}S &= -\int_{S_1}\big(\vec{n}\cdot\tilde{\mathbf{T}}\big)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

kde sme označili $\tilde{\mathbf{T}} := \nu\,\mathrm{grad}\,\vec{v}-p\mathbf{1}$. Toto je ten bod, v ktorom sa odlišujeme od spomínaného článku (Braack a Mucha, 2014), nakoľko v ňom je $\tilde{\mathbf{T}}$ tenzorom napätia. Pre náš fyzikálny model tekutiny sme odvodili tenzor napätia $\mathbf{T}$ daný vzťahom (1.22), čiže $\tilde{\mathbf{T}} \neq \mathbf{T}$. „Do-nothing“ okrajovú podmienku v našom prípade zadefinujeme ako

$$\big(\vec{n}\cdot\tilde{\mathbf{T}}\big)\Big|_{S_1} = \big(\nu\vec{n}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}-p\vec{n}\big)\Big|_{S_1} = 0.$$

Z predchádzajúcich úvah a analogickým postupom ako pri odvodení nehomogénnej okrajovej podmienky (3.5) prídeme k rovnici popisujúcej spomínaný príklad potrubia v tvare valca

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}-\vec{v}_P\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}-\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}_P+\vec{f}_P\right)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x\\
&+\nu\int_{\Omega}\mathrm{grad}\,\vec{v}:\mathrm{grad}\,\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x = 0,\ \forall\vec{\varphi}\in\left\{\vec{\varphi}\in\mathcal{C}^{\infty}_{\Omega,\mathrm{div}}\colon\ \vec{\varphi}\,\Big|_{S_2\cup S_{pl}}=0\right\},\ \forall t\in I,
\end{aligned}$$

kde dostatočne hladké predĺženie $\vec{v}_B$ z S_2 do celého Ω sme označili $\vec{v}_P$ (navyše toto predĺženie musí spĺňať $\mathrm{div}\,\vec{v}_P = 0$ v Ω) a

$$\vec{f}_P := -\frac{\partial\vec{v}_P}{\partial t}+\vec{v}_P\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v}_P-\vec{f}+\nu\Delta\vec{v}_P.$$

Keď podmienku na nestlačiteľnosť $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ v Ω integrujeme cez Ω, tak na jednej strane dostaneme nulu, a na druhej strane použitím Gauss-Ostrogradského vety dostaneme

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{S_{pl}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Integrál cez S_{pl} vypadne vďaka „no-slip“ okrajovej podmienke, takže máme

$$-\int_{S_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

čo je rovnica kontinuity pre náš príklad. Na ľavej strane máme celkový tok dnu do Ω, a na pravej strane je celkový výtok von z Ω. Oba toky sa musia rovnať, keďže je Ω plná nestlačiteľnej tekutiny, ktorá sa nikde nemôže hromadiť. Čo vtečie dnu, tak musí aj vytiecť von. Znamienko mínus je tam kvôli voľbe normály k ploche, ktorá smeruje vždy von z Ω, t. j. na toku dnu cez S_2 predpokladáme záporný skalárny súčin a na výtoku von cez S_1 kladný.

4. Rôzne pojmy riešení

V minulej kapitole sme ukázali, že voľba konkrétnej okrajovej podmienky priamo vstupuje do slabej formulácie Navier-Stokesových rovníc. Z tohto dôvodu budeme ďalej v tejto kapitole uvažovať iba jednu konkrétnu okrajovú podmienku, a tou bude „no-slip“ (3.1). Uvidíme, že ako existujú rôzne okrajové podmienky, tak existujú aj rôzne pojmy riešení slabej formulácie Navier-Stokesových rovníc, ktoré so sebou navzájom súvisia.

Vďaka tomu, že uvažujeme funkcie z Lebesgueových priestorov, tak v (3.1) môžeme prejsť (pri definovaní slabého riešenia na ohraničenom časovom intervale) od splnenia danej rovnosti pre všetky časy, iba k s.v. $t \in (0, T)$. Rýchlostné pole v čase $t = 0$, čo chceme vyvíjať do času $t = T > 0$ (nazýva sa *počiatočná podmienka*) označíme $\vec{v}_0(\vec{x})$ pre $\vec{x} \in \Omega$. Z matematického hľadiska je integrovateľnosť časovej derivácie v nelineárnych evolučných úlohách nepríjemnou záležitosťou. Z tohto dôvodu namiesto skalárneho súčinu v (3.1) budeme uvažovať dualitu, a naviac môžeme zobrať všeobecnejšie zdroje (Pokorný, 2022, str. 27)

$$\left\langle \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \vec{\varphi} \right\rangle + \int_\Omega \left(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right) \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \operatorname{grad} \vec{v} : \operatorname{grad} \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x = \left\langle \vec{f}, \vec{\varphi} \right\rangle, \qquad \forall \vec{\varphi} \in W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) \text{ a s.v. } t \in (0,T), \tag{4.1}$$

kde už používame Sobolevove priestory z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc (Bulíček a kol., 2018). Ďalej budeme používať z teórie o Navier-Stokesových rovniciach (Pokorný, 2022, kap. 2 — Základní prostory funkcí) Bochnerove priestory a ďalšie príslušné priestory s nulovou divergenciou, ktoré budeme označovať rovnako. V (4.1) sme prešli oproti (3.1) od hladkých testovacích funkcií (s kompaktným nosičom a nulovou divergenciou) k testovacím funkciám zo Sobolevovho priestoru (taktiež s kompaktným nosičom a nulovou divergenciou) vďaka tomu (Pokorný, 2022, Lemma 2.3.3), že ak $\Omega \in C^{0,1}$, potom

$$W^{1,p}_{0,\mathrm{div}}(\Omega) = \overline{\{\vec{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^N; \operatorname{div} \vec{v} = 0\}}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}} = \left\{ \vec{v} \in (W_0^{1,p}(\Omega))^N; \operatorname{div} \vec{v} = 0 \right\}.$$

Stále sme nedefinovali pojem slabého riešenia Navier-Stokesových rovníc. To teraz konečne napravíme:

Definícia 1 (Pokorný, 2022, Definice 3.1.1)**.** *Nech* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *pre* $N \in \{2, 3\}$*, potom funkcia* $\vec{v}(\vec{x}, t)$ *taká, že*

$$\vec{v} \in L^2(0, T; W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)) \ \cap \ L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^N),$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \in L^1(0, T; (W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*),$$

sa nazýva slabým riešením Navier-Stokesových rovníc zodpovedajúcim dátam

$$\vec{f} \in L^2(0, T; (W^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega))^*),$$

$$\vec{v}_0 \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega),$$

ak je splnená slabá formulácia Navier-Stokesových rovníc (4.1) *a súčasne*

$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \vec{v}_0(\vec{x}) \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x, \ \forall \vec{\varphi} \in L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega).$$

V Definícii 1 nehovoríme nič o tlaku p, ktorý v slabej formulácii (4.1) ani vôbec nevystupuje — z rovnice úplne vypadol vďaka „per-partes“ a následnej aplikácii nestlačiteľnosti a „no-slip“ okrajovej podmienky. Dá sa ukázať (Pokorný, 2022, kap. 3.2 — Rekonstrukce tlaku), že za určitých dodatočných predpokladov tlak existuje, všeobecne však existovať nemusí.

Takéto slabé riešenie nám rozhodne nestačí. Asi tušíme, že navyše bude existovať nejaký problém s jeho jednoznačnosťou, nakoľko je vypísaná odmena za dôkaz existencie klasického riešenia v $\mathcal{E}^3$ pre ľubovoľne dlhý čas (dostaneme sa k tomu neskôr). Ak teda čisto matematicky existuje viacej nejednoznačných slabých riešení, tak niektoré z nich budú určite nefyzikálne — napríklad nebudú zachovávať energiu alebo budú nejakým spôsobom „divoké“.

4.1 Leray-Hopfovo slabé riešenie

Do východzej slabej formulácie (3.1) dosadíme za $\vec{\varphi} := \vec{v}$, resp. budeme rovnicu testovať samotným slabým riešením

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v}\right)\cdot \vec{v}\ \mathrm{d}x + \nu \int_\Omega \operatorname{grad}\vec{v} : \operatorname{grad}\vec{v}\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\ \mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

kde sme ešte zdroje previedli na pravú stranu. Upravme prvý integrál — počítajme po zložkách a na druhý člen použime Gauss-Ostrogradského vetu

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v}\right)\cdot \vec{v}\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \Big(\partial_t v_i + v_j \partial_j v_i\Big) v_i\ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega v_i \partial_t v_i\ \mathrm{d}x + \int_\Omega v_i v_j \partial_j v_i\ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \partial_t \frac{v_i^2}{2}\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \underbrace{v_i v_j v_i}_{\text{z „no-slip“ je 0}} n_j\ \mathrm{d}S - \int_\Omega v_i \partial_j \Big(v_i v_j\Big) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t v_i^2\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \Big(v_i v_j \partial_j v_i + v_i v_i \underbrace{\partial_j v_j}_{\operatorname{div}\vec{v}=0}\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t v_i^2\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

kde sme využili nestlačiteľnosť a nakoniec si uvedomili, že integrál pochádzajúci z konvektívneho členu sa v druhom a štvrtom kroku má rovnať samému sebe, ale s opačným znamienkom. Jediné číslo, čo spĺňa túto vlastnosť je nula. Získaný výsledok dosadíme naspäť do (4.2)

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}|\vec{v}|^2\ \mathrm{d}x + \nu\int_\Omega |\operatorname{grad}\vec{v}|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{v}\ \mathrm{d}x,$$

čo keď preintegrujeme cez časový interval $(0, t)$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|\vec{v}(\vec{x},t)|^2 - |\vec{v}(\vec{x},0)|^2\Big)\mathrm{d}x + \nu\int_0^t\int_\Omega |\operatorname{grad}\vec{v}|^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t \Big\langle \vec{f},\vec{v}\Big\rangle\ \mathrm{d}\tau,$$

a upravíme, aby dáta boli na pravej strane, tak dostaneme

$$\underbrace{\int_\Omega |\vec{v}(\vec{x},t)|^2\,\mathrm{d}x}_{\text{kinetická energia v čase } t} + \underbrace{2\nu\int_0^t\int_\Omega |\operatorname{grad}\vec{v}|^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}\tau}_{\text{disipovaná energia}} = \underbrace{\int_\Omega |\vec{v}_0|^2\,\mathrm{d}x}_{\text{počiatočná kinetická energia}} + \underbrace{2\int_0^t \Big\langle \vec{f},\vec{v}\Big\rangle\ \mathrm{d}\tau}_{\text{dodaná energia}}, \tag{4.3}$$

čo sa nazýva *energetická rovnosť*. Až na polovicu hustoty dáva do súvislosti celkovú kinetickú energiu tekutiny v čase t s počiatočnou hodnotou a disipovanou energiou do času t a dodanou energiou objemovými silami do času t. My ale budeme potrebovať slabšie tvrdenie — tzv. *energetickú nerovnosť*

$$\int_{\Omega} |\vec{v}(\vec{x},t)|^2 \,\mathrm{d}x + 2\nu \int_0^t \int_{\Omega} |\mathrm{grad}\,\vec{v}|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\tau \le \int_{\Omega} |\vec{v}_0|^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^t \left\langle \vec{f}, \vec{v} \right\rangle \mathrm{d}\tau. \quad (4.4)$$

Pri voľbe „Navier's slip“ okrajovej podmienky by sme ešte dostali na ľavej strane energetickej (ne)rovnosti nezáporný integrál cez $\partial\Omega$ z $|\vec{v}_t|^2$ = disipácia na hranici.

Definícia 2 (Pokorný, 2022, Definice 3.1.2)**.** *Riešenie $\vec{v}$ budeme nazývať Leray-Hopfovým slabým riešením Navier-Stokesových rovníc, ak je $\vec{v}$ riešením slabým, t. j. Definícia 1 a naviac spĺňa pre s.v. $t \in (0,T)$ energetickú nerovnosť* (4.4).

Konečne môžeme vysloviť existenčné vety o slabom riešení Navier-Stokesových rovníc. V dvoch rozmeroch platí:

Veta 3 (Pokorný, 2022, Věta 3.1.1)**.** *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblasť, $\vec{f}$ a $\vec{v}_0$ spĺňajú predpoklady Definície 1 a $0 < T < \infty$. Potom existuje práve jedno slabé riešenie Navier-Stokesových rovníc. Toto riešenie je súčasne Leray-Hopfovým slabým riešením a spĺňa počiatočnú podmienku v zmysle*

$$\lim_{t\to 0^+} \|\vec{v}(\vec{x},t) - \vec{v}_0(\vec{x})\|_2 = 0.$$

Naviac

$$\vec{v} \in C([0,T];(L^2(\Omega))^2),$$
$$\vec{v} \in C([0,T];L^2_{0,\mathrm{div}}(\Omega)),$$

a ďalej spĺňa energetickú rovnosť (4.3).

V troch rozmeroch je zmena:

Veta 4 (Pokorný, 2022, Věta 3.1.2)**.** *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je ohraničená oblasť, $\vec{f}$ a $\vec{v}_0$ spĺňajú predpoklady Definície 1 a $0 < T < \infty$. Potom existuje aspoň jedno Leray-Hopfovo slabé riešenie Navier-Stokesových rovníc. Toto riešenie spĺňa počiatočnú podmienku v zmysle*

$$\lim_{t\to 0^+} \|\vec{v}(\vec{x},t) - \vec{v}_0(\vec{x})\|_2 = 0.$$

Dôkaz oboch viet je podrobne rozpísaný v skriptách o Navier-Stokesových rovniciach (Pokorný, 2022). Vidíme, že v dvoch rozmeroch máme zaručené jednoznačné riešenie, ale v troch rozmeroch (čo je viacej zaujímavé) je situácia úplne iná — stratili sme jednoznačnosť. Rozdiel v dôkazoch oboch viet je spôsobený horšou integrovateľnosťou nelinearity — konvektívneho členu, ktorý je všeobecne zodpovedný za vírivé prúdenie a turbulencie.

4.2 Veľmi slabé riešenie

Urobme jednu úvahu: predpoklad pre rýchlosť sme na konci druhej kapitoly oslabili z dvojnásobnej diferencovateľnosti iba na jednonásobnú pomocou „per-partes“. Dalo by sa použiť „per-partes“ znovu tak, aby sme od rýchlosti nevyžadovali žiadnu hladkosť? Odpoveď znie áno — dokonca môžeme v slabej formulácii (3.1) uvažovať aj časovo závislú testovaciu funkciu s kompaktným nosičom a nulovou priestorovou divergenciou $\vec{\varphi} \in C^{\infty}_{0,\mathrm{div}}([0,T] \times \Omega)$.

Toto sme ale neodvodili. Pri konštrukcii pomocou jednoduchých funkcií v druhej kapitole sme mohli namiesto koeficientov $c_{ij} \in \mathbb{R}$ v rovnici (2.2) uvažovať merateľné funkcie od času $c_{ij}(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, resp. časovo závislé v priestore jednoduché funkcie $\varphi_{nj}(\vec{x}, t)$. Tento krok je v tom momente oprávnený, nakoľko integrujeme iba cez priestor. Dôkaz Lemma 2 by prešiel úplne rovnako, keďže dokazujeme bodovú konvergenciu v priestore na Ω — len by sme všade ešte pridali aj závislosť na čase. Odtiaľ všetky ostatné kroky by sme urobili analogicky, až by sme dospeli k slabej formulácii (3.1) s časovo závislou testovacou funkciou.

Pre jednoduchosť uvažujme nulové zdroje $\vec{f} \equiv 0$ a integrujme východziu slabú formuláciu (3.1) cez časový interval $(0, T)$ a použime „per-partes" na všetky derivácie rýchlosti — okrajové členy vypadnú vďaka tomu, že $\vec{\varphi}$ má kompaktný nosič, resp. „no-slip" okrajovej podmienke

$$\int_0^T \int_\Omega \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{\varphi} - \nu \Delta \vec{\varphi} \right) \mathrm{d}x \ \mathrm{d}t = 0, \ \forall \vec{\varphi} \in C^\infty_{0,\mathrm{div}}([0, T] \times \Omega). \quad (4.5)$$

Všimnime si istú podobnosť získanej rovnice (4.5) so silnou formuláciou (2.5). V tomto prípade stačí ak $\vec{v} \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Pomerne nedávno bolo dokázané (Buckmaster a Vicol, 2019, Theorem 1.2), že takýmto úplným oslabením predpokladov na rýchlosť, by sme dostali až príliš veľa riešení. Týchto *veľmi slabých riešení* by mohlo byť až nespočetne veľa, nakoľko ich energia ako nezáporná hladká funkcia času je voľným parametrom. Z tohto dôvodu pre nás nemá význam pojem slabého riešenia ešte viacej oslabiť. Skôr nás bude zaujímať regularita a za akých okolností sa môžeme priblížiť k jednoznačnosti v troch rozmeroch.

4.3 Silné riešenie

Dá sa ukázať (Pokorný, 2022, Věta 3.3.1), že pre hladšie dáta je jediné riešenie v dvoch rozmeroch z Vety 3 tiež hladšie. V troch rozmeroch je to zaujímavejšie, a pre jednoznačnosť platí nasledujúca veta:

Veta 5 (Pokorný, 2022, Věta 3.4.1)**.** *Nech $\vec{u}, \vec{v}$ sú dve slabé riešenia Navier-Stokesových rovníc zodpovedajúce rovnakým dátam. Nech $\vec{u}$ spĺňa energetickú nerovnosť* (4.4) *a nech $\vec{v}$ spĺňa naviac*

$$\vec{v} \in L^t(0, T; (L^s(\Omega))^3), \frac{2}{t} + \frac{3}{s} = 1, s \in [3, \infty].$$

Potom $\vec{u} = \vec{v}$ s.v. na $(0, T) \times \Omega$.

Dôkaz. Jednotlivé kroky sú podrobne popísané v skriptách o Navier-Stokesových rovniciach (Pokorný, 2022).

□

Podmienky na $\vec{v}$ z Vety 5 sa nazývajú *Prodi-Serrinove podmienky.* Riešenie $\vec{v}$ spĺňajúce tieto podmienky sa nazýva *silné riešenie.* Z Vety 5 vidno, že ak existuje „dosť dobré", t. j. silné riešenie, tak už je jednoznačné v triede Leray-Hopfových slabých riešení. Silné riešenie $\vec{v}$ naviac spĺňa energetickú rovnosť (Pokorný, 2022, Lemma 3.4.1) a je hladšie (Pokorný, 2022, Věta 3.5.1)

$$\vec{v} \in L^2(\epsilon, T; (W^{2,2}(\Omega))^3) \cap L^\infty(\epsilon, T; (W^{1,2}(\Omega))^3), \forall \epsilon > 0.$$

Táto jednoznačnosť typu slabé riešenie = silné riešenie sa nazýva „weak-strong uniqueness“. Vidno teda, že regularita a jednoznačnosť sú celkom previazané. Ak na nejakom intervale $I \subseteq (0,T)$ existuje silné riešenie, tak už je jednoznačné v triede Leray-Hopfových riešení na I. Ak mimo I toto silné riešenie prestane existovať, tak jednoznačnosť stratíme — môže nastať napríklad bifurkácia.

4.4 Klasické riešenie

Klasickú formuláciu Navier-Stokesových rovníc dostaneme zo silnej formulácie (2.5) pomocou argumentácie, že za predpokladu dostatočnej hladkosti všetkých veličín a na základe toho, že testovacia funkcia je ľubovoľná, jedine zátvorka vnútri integrálu v (2.5) musí byť rovná nule bodovo (stále platí, že $\rho = 1$)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \vec{f} + \operatorname{grad} p - \nu \Delta \vec{v} = 0,$$

k čomu musíme ešte pridať podmienku pre nestlačiteľnosť (1.13) a okrajové podmienky — stále uvažujeme „no-slip“. Doteraz sme mali obe informácie obsiahnuté v priestore testovacích funkcií. *Klasickým riešením* nazveme dvojicu hladkých funkcií rýchlosti $\vec{v}$ a tlaku p

$$\begin{aligned} \vec{v} &\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N, \\ p &\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pre $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ a $N \in \{2,3\}$ spĺňajúce sústavu Navier-Stokesových rovníc v *klasickej formulácii*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad} p - \nu \Delta \vec{v} &= \vec{f}, \text{ v } (0,T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \text{ v } (0,T) \times \Omega, \\ \vec{v}\,\Big|_{\partial\Omega} &= 0, \text{ na } (0,T) \times \partial\Omega, \\ \vec{v}\,\Big|_{t=0} &= \vec{v}_0, \text{ v } \Omega, \end{aligned}$$

kde $\vec{f}$ sú zdroje a $\vec{v}_0$ je počiatočná podmienka (spolu s Ω sa nazývajú dáta úlohy). Rozumné bude ďalej predpokladať hladkosť dát a kompatibilitu počiatočnej podmienky, t. j. $\vec{v}_0\,\Big|_{\partial\Omega} = 0$ a $\operatorname{div} \vec{v}_0 = 0$ v Ω. V tomto prípade pre $N = 2$, klasické riešenie existuje jednoznačne (Pokorný, 2022).

Čo sa týka troch rozmerov, tak otázka existencie klasického riešenia ešte stále nie je vyriešená pre ľubovoľne dlhý čas T. Dokonca ide o tak závažný problém, že Clayov matematický ústav ho zaradil na zoznam problémov tisícročia. Ide o sedem najdôležitejších otvorených matematických problémov. Na každý z nich je vypísaná odmena rovná jednému miliónu dolárov — a existencia klasického riešenia Navier-Stokesových rovníc pre $N = 3$ a T ľubovoľné je na tomto zozname.

Dá sa ukázať (Pokorný, 2022, kap. 3.6 — Lokální regularita), že pre nejaký krátky čas $\exists T^* > 0$ také, že na časovom intervale $(0, T^*)$ existuje silné riešenie, čo má najbližšie ku klasickému riešeniu zo všetkých predstavených pojmov riešení. Problémom sú práve už spomínané vznikajúce turbulencie a singularity.

Zhrňme si, ako jednotlivé predstavené pojmy riešení spolu navzájom súvisia:

1. Klasické riešenie je súčasne silné riešenie, aj Leray-Hopfovo slabé riešenie, aj slabé riešenie (môžeme ho všade dosadiť a všetky integrály sú konečné).
2. Silné riešenie je súčasne Leray-Hopfovo slabé riešenie, aj slabé riešenie.
3. Každé Leray-Hopfovo slabé riešenie je zároveň slabé riešenie a pojem slabého riešenia už v tomto momente nemá význam ďalej oslabiť.
4. Slabé riešenie spĺňajúce energetickú nerovnosť je Leray-Hopfovým slabým riešením.
5. Leray-Hopfovo slabé riešenie spĺňajúce Prodi-Serrinove podmienky je silné riešenie a naviac vďaka „weak-strong uniqueness" je už jednoznačné v triede Leray-Hopfových slabých riešení.
6. Odpoveď na otázku klasického riešenia v troch rozmeroch pre ľubovoľný čas nie je známa.

4.5 Vhodné slabé riešenie

Koncom tejto kapitoly ešte spomeňme tzv. *vhodné slabé riešenie*, čo je dôležitým pojmom riešenia pri dokazovaní lokálnej regularity. Rovnakým argumentom ako pri veľmi slabom riešení môžeme aj tentokrát v silnej formulácii (2.5) zobrať časovo závislú testovaciu funkciu, konkrétne $\vec{\varphi} := 2\Phi\vec{v}$, kde $\Phi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ a celú rovnicu integrovať na časovom intervale $(0,t)$, pre $t \le T$, takže

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot \operatorname{grad}\vec{v} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \nu\Delta\vec{v} \right)\cdot 2\Phi\vec{v}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau = \int_0^t\int_\Omega \vec{f}\cdot 2\Phi\vec{v}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau,$$

kde sme ešte zdroje previedli na pravú stranu. Upravujme všetky členy v integráli na ľavej strane pomocou „per-partes". Prvý člen

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot 2\Phi\vec{v}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau &= \int_0^t\int_\Omega \Phi\frac{\partial}{\partial t}\left|\vec{v}\right|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau \\ &= \left[\int_\Omega \Phi\left|\vec{v}\right|^2 \mathrm{d}x\right]_0^t - \int_0^t\int_\Omega \left|\vec{v}\right|^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau \\ &= \int_\Omega \Phi(\vec{x},t)\left|\vec{v}\right|^2(\vec{x},t)\;\mathrm{d}x - \int_0^t\int_\Omega\left|\vec{v}\right|^2\frac{\partial\Phi}{\partial t}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

kde okrajový člen pre $\tau = 0$ vypadol vďaka tomu, že Φ má kompaktný nosič. Druhý člen

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega 2\Phi\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{v}\right)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau &= \int_0^t\int_\Omega \Phi\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\left|\vec{v}\right|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^t\int_\Omega\left|\vec{v}\right|^2\operatorname{div}\left(\Phi\vec{v}\right)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^t\int_\Omega\left|\vec{v}\right|^2\left(\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\Phi + \Phi\underbrace{\operatorname{div}\vec{v}}_{=0}\right)\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_0^t\int_\Omega\left|\vec{v}\right|^2\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\Phi\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

kde v druhom kroku okrajový integrál cez $\partial\Omega$ vypadol, lebo Φ má kompaktný nosič a v treťom kroku sme využili nestlačiteľnosť. Tretí člen ($\rho = 1$)

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega \operatorname{grad} p \cdot 2\Phi\vec{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau &= -\int_0^t \int_\Omega 2p \operatorname{div}\left(\Phi\vec{v}\right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= -2\int_0^t \int_\Omega p\vec{v} \cdot \operatorname{grad}\Phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

kde okrajový integrál cez $\partial\Omega$ vypadol z rovnakého dôvodu ako minule a analogicky sme upravili divergenciu v integráli. Štvrtý člen

$$\begin{aligned}-\nu\int_0^t \int_\Omega 2\Phi\vec{v} \cdot \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau &= 2\nu\int_0^t \int_\Omega \operatorname{grad}\left(\Phi\vec{v}\right) : \operatorname{grad}\vec{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{2\nu\int_0^t \int_\Omega \Phi \left|\operatorname{grad}\vec{v}\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau}_{=:\mathcal{I}} \\ &+ 2\nu\int_0^t \int_\Omega \left(\vec{v} \otimes \operatorname{grad}\Phi\right) : \operatorname{grad}\vec{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \mathcal{I} + 2\nu\int_0^t \int_\Omega \vec{v} \cdot \operatorname{grad}\vec{v} \cdot \operatorname{grad}\Phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \mathcal{I} + \nu\int_0^t \int_\Omega \operatorname{grad}\left|\vec{v}\right|^2 \cdot \operatorname{grad}\Phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \mathcal{I} - \nu\int_0^t \int_\Omega \left|\vec{v}\right|^2 \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

kde okrajové členy vždy vypadli vďaka „no-slip“ okrajovej podmienke a Laplaceov operátor sme vyjadrili ako divergenciu gradientu. Celkovo teda máme

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi(\vec{x},t) \left|\vec{v}\right|^2 (\vec{x},t) \, \mathrm{d}x + 2\nu\int_0^t \int_\Omega \Phi \left|\operatorname{grad}\vec{v}\right|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \int_\Omega \left|\vec{v}\right|^2 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nu\Delta\Phi\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_\Omega \left(\left|\vec{v}\right|^2 + 2p\right) \vec{v} \cdot \operatorname{grad}\Phi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \vec{f} \cdot 2\Phi\vec{v} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau, \ \forall\Phi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega), \forall t \in (0,T),\end{aligned}$$

čo sa nazýva *zovšeobecnená energetická rovnosť*. Rovnako ako pri Leray-Hopfovom slabom riešení, využijeme iba nerovnosť:

Definícia 3 (Pokorný, 2021, Definice 2.1). *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je ohraničená oblasť a $\vec{f} \in L^2(0,T;(L^{6/5}(\Omega))^3) + L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$. Potom dvojica $(\vec{v},p)$ sa nazýva vhodným slabým riešením Navier-Stokesových rovníc, ak*

1. *$(\vec{v},p)$ spĺňa Navier-Stokesové rovnice v zmysle distribúcií (silnú formuláciu* (2.5) *integrujeme cez časový interval* $(0,T)$ *a použijeme „per-partes“ s „no-slip“ okrajovou podmienkou), takže pre $\forall\vec{\varphi} \in (C_0^\infty((0,T)\times\Omega))^3$ platí*

$$-\int_0^T \int_\Omega \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\operatorname{grad}\vec{\varphi} + p\operatorname{div}\varphi + \nu\Delta\vec{\varphi}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau = \int_0^T \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{\varphi} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\tau,$$

$$\int_\Omega \vec{v} \cdot \operatorname{grad}\psi \, \mathrm{d}x = 0, \ \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ a s.v. } t \in (0,T).$$

2. *$\vec{v} \in L^2(0,T;W_{0,\mathrm{div}}^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;(L^2(\Omega))^3)$, $p \in L^{3/2}((0,T)\times\Omega)$.*

3. Pre s.v. $t \in (0,T)$ je splnená zovšeobecnená energetická nerovnosť

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Phi(\vec{x},t)\,|\vec{v}|^2(\vec{x},t)\;\mathrm{d}x + 2\nu\int_0^t\int_\Omega \Phi\,|\mathrm{grad}\,\vec{v}|^2\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau\\ \leq &\int_0^t\int_\Omega |\vec{v}|^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\nu\Delta\Phi\right)\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_\Omega \left(|\vec{v}|^2+2p\right)\vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau\\ &+\int_0^t\int_\Omega \vec{f}\cdot 2\Phi\vec{v}\;\mathrm{d}x\;\mathrm{d}\tau,\;\;\forall\Phi\in C_0^\infty((0,T)\times\Omega),\Phi\geq 0.\end{aligned}$$

V prvom bode Definície 3 vystupuje aj slabá formulácia nestlačiteľnosti (1.13), čo je dobre, nakoľko teraz neuvažujeme testovacie funkcie s nulovou priestorovou divergenciou. Túto podmienku musíme zahrnúť zvlášť, aby bola informácia o nestlačiteľnosti zachovaná. Dokonca ju vieme aj rovno odvodiť z našej konštrukcie — v druhej kapitole sme mali v istom bode zákon zachovania hmoty

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathrm{div}\,\vec{v}\;\mathrm{d}x = 0,\;\;\forall\mathcal{P}_t\subset\kappa_t(\mathcal{B}),\;\forall t\in\mathbb{R},$$

kam sme dosadili nestlačiteľnosť (1.13), čím je rovnica identicky splnená. Namiesto toho môžeme na túto rovnicu použiť úplne rovnakú konštrukciu s jednoduchými funkciami z druhej kapitoly (robili sme pre zákon zachovania hybnosti) a použitím Lemma 2 a „no-slip“ okrajovej podmienky

$$\int_\Omega \psi\,\mathrm{div}\,\vec{v}\;\mathrm{d}x,\;\;\forall\psi\in C_0^\infty(\Omega),\forall t\in\mathbb{R},$$

čo po oslabení pomocou „per-partes“ dá požadovaný výsledok, kde znovu môžeme prejsť od splnenia pre $\forall t\in(0,T)$ k s.v. $t\in(0,T)$, nakoľko sa pohybujeme v Lebesgueových priestoroch.

Na rozdiel od slabých riešení, vo vhodnom slabom riešení (Definícia 3) vystupuje aj tlak, ale nevyskytuje sa tam počiatočná podmienka. Keďže vhodné slabé riešenie je spojité v slabej topológii (Pokorný, 2021, Poznámka 2.2) t. j.

$$\lim_{\tau\to t}\int_\Omega \vec{v}(\vec{x},\tau)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x = \int_\Omega \vec{v}(\vec{x},t)\cdot\vec{\varphi}\;\mathrm{d}x,\;\forall\vec{\varphi}\in L^2(\Omega),$$

tak môžeme predpokladať splnenie počiatočnej podmienky v zmysle Definície 1, ak je daná počiatočná podmienka dostatočne hladká.

Dá sa ukázať (Pokorný, 2021), že za dodatočných predpokladov istej hladkosti dát $(\Omega,\vec{f},\vec{v}_0)$, takto definované riešenie existuje aspoň jedno a ďalej, že množina prípadných singularít vhodného slabého riešenia je „dostatočne“ malá.

Záver

V prvej kapitole sme vybudovali metódy na popis kontinua, formulovali všetky fyzikálne zákony zachovania z mechaniky a nakoniec odvodili tenzor napätia pre Newtonovskú tekutinu. V druhej kapitole sme rovno nadviazali na tieto výsledky a priamo z fyzikálnych princípov — formulované prirodzene v integrálnom tvare, teda makroskopických rozmeroch — sme odvodili slabú formuláciu Navier-Stokesových rovníc pre všeobecné okrajové podmienky. Týmto sme ukázali, že slabá formulácia je úplne prirodzená a priamočiara pre popis tohto systému. V tretej kapitole sme ukázali rôzne zaužívané okrajové podmienky, čo rovno vstupujú do tvaru slabej formulácie. V poslednej štvrtej kapitole sme predstavili rôzne pojmy riešení s existenčnými vetami a vzťahy medzi nimi.

Pri konštrukcii slabej formulácie sme v istom momente násobili rovnice nejakými konštantami (pri konštrukcii jednoduchých funkcií). Ak by bola nejaká fyzikálna rovnica prenásobená konštantou, tak to nikdy nezistíme, keďže je táto konštanta nespočítateľná a nemerateľná (nedá sa pre ňu vyjadriť explicitný vzťah). Dokonca sa nedá ani jednoznačne určiť jej rozmer. Z tohto dôvodu a z dôvodu samotnej konštrukcie slabej formulácie by sme sa nemali na tieto konštanty pozerať z fyzikálneho hľadiska, ale skôr z celkového. Skúmame celok — nestlačiteľnú Newtonovskú tekutinu — a konkrétnou voľbou týchto „testovacích čísiel“ dostaneme iba časť tohto celku, t. j. niečo ako projekciu. Význam týchto čísiel spočíva v niečom analogickom ako je uhol, pod ktorým sa pozeráme na nejaký celok — až keď zohľadníme všetky uhly, tak budeme mať kompletnú informáciu o danom celku. Vo výslednej slabej formulácii aj tak nakoniec vystupuje kvantifikátor pre každú testovaciu funkciu, takže čo sa týka týchto čísiel, tak ani nemajú pevnú hodnotu — musí to platiť pre všetky, čím sa zase dostávame na začiatok, že ich hodnota sa nedá určiť ani z teórie ani z experimentu, keďže vlastne ani nemajú fixnú hodnotu.

Úplne na záver poznamenajme, že naše úvahy na odvodenie slabej formulácie Navier-Stokesových rovníc boli úplne všeobecné, teda dali by sa analogicky použiť aj na iné rovnice ako samotné Navier-Stokesové rovnice. Slabá formulácia je mocný nástroj, ktorý sa používa nielen vo fyzike, ale aj v technike a rôznych aplikáciách. Všade tam, kde sa vychádza z nejakých integrálnych rovností pri odvodení cieľovej slabej formulácie, je možné použiť konštrukciu s jednoduchými funkciami a odvodiť slabú formuláciu priamo.

Zoznam použitej literatúry

Bathory, M. a Stefanelli, U. (2022). Variational resolution of outflow boundary conditions for incompressible Navier-Stokes. *Nonlinearity*, **35**(11), 5553–5592.

Braack, M. a Mucha, P. B. (2014). Directional Do-Nothing Condition for the Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Mathematics*, **32**(5), 507–521.

Buckmaster, T. a Vicol, V. (2019). Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation. *Annals of Mathematics*, **189**(1), 101–144.

Bulíček, M., Černý, R., John, O., Málek, J., Pokorný, M., Rokyta, M. a Stará, J. (2018). Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic. URL `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/LectureNotes/moderni_teorie_color.pdf`. [Online; 22-April-2024].

Feistauer, M. (1993). *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. ISBN 0-582-20988-9.

Magnus, J. R. a Neudecker, H. (2007). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Third Edition. Tilburg University, Tilburg, The Netherlands. ISBN 0-471-98633-X.

Málek, J. a Rajagopal, K. R. (2005). *Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of their generalizations*. Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Sokolovská 83, 186 75 Prague 8, Czech Republic.

Pokorný, M. (2021). Regularita Řešení Navier-Stokesových Rovnic. URL `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/LectureNotes/regularita_NS_2021.pdf`. [Online; 30-April-2024].

Pokorný, M. (2022). Navier-Stokesovy rovnice. URL `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pokorny/LectureNotes/NS.pdf`. [Online; 22-April-2024].

Reynolds, O. (1903). *Papers on Mechanical and Physical Subjects*. Cambridge University Press.

Serrin, J. (1959). The Derivation of Stress-Deformation Relations for a Stokesian Fluid. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **8**(4), 459–469.

Stokes, G. G. (1845). *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society.