

# Posudek práce

předložené na Matematicko-fyzikální fakultě  
Univerzity Karlovy

- posudek vedoucího  posudek oponenta  
 bakalářské práce  diplomové práce

Autor: Adrián Šegeda  
Název práce: Slabé řešení Navier-Stokesových rovnic  
Studijní program a obor: Fyzika, Obecná fyzika (FOF)  
Rok odevzdání: 2024

Jméno a tituly oponenta: doc. RNDr. Ondřej Souček, Ph.D.  
Pracoviště: Matematický ústav, MFF UK  
Kontaktní e-mail: ondrej.soucek@mff.cuni.cz

## Odborná úroveň práce:

- vynikající  velmi dobrá  průměrná  podprůměrná  nevyhovující

## Věcné chyby:

- téměř žádné  vzhledem k rozsahu přiměřený počet  méně podstatné četné  závažné

## Výsledky:

- originální  původní i převzaté  netriviální kompilace  citované z literatury  opsané

## Rozsah práce:

- veliký  standardní  dostatečný  nedostatečný

## Grafická, jazyková a formální úroveň:

- vynikající  velmi dobrá  průměrná  podprůměrná  nevyhovující

## Tiskové chyby:

- téměř žádné  vzhledem k rozsahu a tématu přiměřený počet  četné

## Celková úroveň práce:

- vynikající  velmi dobrá  průměrná  podprůměrná  nevyhovující

## Slovní vyjádření, komentáře a připomínky oponenta:

Předložená bakalářská práce se zabývá moderní tzv. slabou formulací Navierových Stokesových rovnic, jejím odvozením z integrálních bilančních zákonů mechaniky kontinua a souvisejícími matematickými aspekty. Práce sestává ze čtyř kapitol. Úvodní kapitola se věnuje představení základních pojmů z kinematiky kontinua a dále integrální formulaci bilančních zákonů pro hmotu, hybnost a moment hybnosti a odvození obecného tvaru konstitutivního vztahu (reologie) pro viskózní tekutiny. Ve druhé kapitole je provedeno odvození integrální formulace Navierových Stokesových rovnic přímo z integrálních bilančních vztahů pomocí konstrukce vhodných jednoduchých funkcí s využitím jejich aproximativních vlastností v teorii Lebesgueova integrálu. Ve třetí kapitole jsou diskutovány různé typy přirozených okrajových podmínek jako jsou “no-slip”, “full-slip”, “Navier’s slip”, obecná nehomogenní Dirichletovská podmínka či tzv. “do-nothing” podmínka. V poslední kapitole jsou řešeršní formou představeny některé varianty definice řešení systému Navierových Stokesových rovnic, speciálně tzv. Leray-Hopfovo slabé řešení, velmi slabé či klasické řešení.

Práce je primárně řešeršní povahy a text myslím pěkně dokumentuje studentovu snahu obsáhnout poměrně rozsáhlé partie matematické teorie proudění tekutin a vcelku úspěšný pokus o shrnutí základních poznatků do kompaktního textu, který může sloužit jako úvod do dané problematiky. Oceňuji zejména kapitolu 2, která představuje přehledně přechod od standardních integrálních bilančních vztahů v mechanice kontinua přímo k slabé formulaci, aniž je potřeba jako mezikroku použít klasickou bodovou formulaci bilančních vztahů. Podobně oceňuji i pokus ve 4. kapitole nahlédnout do technicky náročné problematiky hledání vhodné matematické definice řešení systému Navier-Stokesových rovnic a shrnutí vztahů mezi některými koncepty řešení.

Práce je povedená, formálně i odborně na vysoké úrovni a dle mého názoru proto rozhodně splňuje nároky kladené na bakalářskou práci.

### Poznámky:

- V úvodu je nedbale nakládáno s pojmy homogenita a izotropie: “homogenita je teda silnejší pojem ako izotropia”. To není pravda, tyto pojmy spolu obecně nijak nesouvisí.
- Str. 7 - hybnost množiny v textu je nepřesně zavedena jako  $m\vec{v}$ , podobně pro moment hybnosti na str. 8.
- Str. 9 - symetrie Cauchyho tenzoru napětí jako důsledek bilance momentu hybnosti je ukázána za dosatečného předpokladu rovnováhy bez působení vnějších sil a momentů. To však není potřeba.
- Str. 10. - odvození obecného reologického vztahu pro viskózní tekutinu je provedeno za předpokladu analytičnosti funkce  $\mathbf{V}$ . Platí však obecněji použitím Rivlin-Ericksenova reprezentačního teoremu.
- Str. 19 - chyba v rozkladu rychlostního pole ve výrazu pro normálovou složku:  $\vec{v}_n \cdot \vec{n} \neq \vec{v}_n$ .
- Str. 15 - v sekci 2.3. mi chybí uvedení referencí, ze kterých autor čerpal. Například Lemma 2 ukazující standardní aproximační vlastnost jednoduchých funkcí by si takovou referenci zasloužilo.
- Str. 21 - odvození slabé formulace pro nehomogenní okrajovou podmínku 3.4. je myslím chybné nebo alespoň nejasně zformulované. Je proveden rozklad rychlostního pole pomocí prodloužení  $\vec{v}_P$ , které splňuje nehomogenní okr. podmínku a části  $\vec{w}$ , která již splňuje homogenní okr. podmínku. Pro  $\vec{w}$  je ale postulována rovnice (dole na straně 21), a z ní je dále odvozena rovnice pro  $\vec{v}$ . Místo toho by se myslím měla vzít obecná rce. 2.6, do ní dosadit rozklad a hledat rovnici pro novou neznámou  $\vec{w}$ . Vyjde rce podobná 3.5., kde však místo  $\vec{v}$  je nová neznámá  $\vec{w}$  (a liší se některá znaménka).

**Poznámky Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze:**

- Při diskusi “do-nothing” podmínky v kap. 3.5. referujete na článek Braack& Mucha (2014). Nezmiňujete hlavní výsledek tohoto článku, což je tzv. “directional do-nothing” podmínka. Mohl byste ji okomentovat a případně zmínit hlavní slabinu klasické do nothing podmínky z pohledu energetických odhadů?
- Mohl byste více okomentovat význam a roli “pojmu vhodného slabého řešení z kapitoly 4.5.?”

**Práci:**

- doporučuji
- nedoporučuji

uznat jako bakalářskou.

**Navrhuji hodnocení stupněm:**

- výborně
- velmi dobře
- dobře
- neprospěl

Místo, datum a podpis oponenta:

Praha, 11. června 2024