MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marek Pásek

Vychylující teorie a reflexní funktory

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval svému vedoucímu doc. RNDr. Janu Šťovíčkovi, Ph.D. za cenné rady, trpělivost a volnou ruku při směřování práce.

Název práce: Vychylující teorie a reflexní funktory

Autor: Marek Pásek

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci se zabýváme klasickou vychylující teorií. V kompilační části představujeme její základní pojmy a dokazujeme dva základní výsledky, totiž Brennerové–Butlerovu větu a Bongartzovo lemma. Oproti předloze, standardní učebnici Assema, Simsona a Skowronského, jsme důkazy rozepsali a doplnili odkazy na užitá homologická lemmata a tím text zpřístupnili i čtenáři v homologické algebře nejistému.

Druhá část práce se zabývá konkrétním případem Brennerové–Butlerovy korespondence realizované reflexními funktory v acyklických toulcích. Vyložili jsme nutnou terminologii a dokázali některá základní tvrzení. Formulovali jsme a dokázali, jaké podoby Brennerové–Butlerovy korespondence v tomto kontextu nabývá.

Klíčová slova: toulec reflexní funktor vychylující teorie Brennerové–Butlerova věta

Title: Tilting theory and reflection functors

Author: Marek Pásek

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: In this thesis we familiarize the reader with the fundamental notions of tilting theory. Building on those, we formulate and prove two major results of classical tilting theory, Brenner–Butler theorem and Bongartz lemma. We base our exposition heavily on the classical textbook of Assem, Simson and Skowronski. A reader unsure of their proficiency in homological algebra may appreciate our efforts to wholly uncover the homological results which come to play in the proofs.

In the second part of the thesis we investigate a particular case of acyclic quivers. It turns out there is a delightful instance of Brenner–Butler correspondence in connection with reflection functors. We introduce the fundamental notions and basic facts on representations of quivers. Next we prove how the Brenner–Butler correspondence looks like.

Keywords: quiver reflection functor tilting theory Brenner–Butler theorem

Obsah

Úvod

V této práci vyložíme základy vychylující teorie a odvodíme jeden z jejích základních výsledků, totiž Brennerové–Butlerovu větu.
Vychylující teorie započala pozorováním týkajícím se tzv. reflexního funktoru vystavšího v teorii reprezentací toulců. Ty mají ve speciálních případech jasnou algebraickou motivaci (kupříkladu problém n podprostorů, studovaný již před padesáti lety Bernsteinem, Gelfandem a Ponomarjevem), ovšem bez patřičného modulového vhledu jsou nám jejich pravá podstata a význam ukryty a při jejich studiu nezbývá než přicházet s *ad hoc* lineárně-algebraickými řešeními.
Na první pohled se může zdát, že reprezentace toulců nemají souvislost s moduly. Naštěstí lze celou teorii reprezentací acyklického toulce překlopit do teorie modulů pomocí ekvivalence s kategorií modulů nad jeho tzv. algebrou cest.
Velkým překvapením je, že právě reflexní funktory, se svou bestiální definicí v jazyce reprezentací toulců, se ukazují být reprezentovatelné! A nejen to, dávají vzniknout neobyčejně pěkné instanci Brennerové–Butlerovy korespondence, kterou lze dokázat elementárními metodami. Důkaz bude představen v druhé částí práce.

1. Vychylující teorie

Následující výklad a značení je přejato především z [ASS06], ovšem s podrobnějšími důkazy nebo důkazy duálních tvrzení, která jsou v knize ponechána na čtenáři.

V celé této kapitole bude A konečnědimenzionální unitární algebra nad tělesem K. To má několik důsledků, které budou klíčové v následujících důkazech. Shrňme si základní z nich.
A je K-vektorový prostor s bilineárním zobrazením $- * -$ násobení. Máme vnoření $K \hookrightarrow \mathrm{End}_A(A) \cong A$ dáno $k \mapsto k * \mathrm{id}_A$. Z toho plyne, že $K \subseteq Z(A)$ a restrikcí skalárů je tedy každý A-modul automaticky K-modul tj. můžeme ho považovat za vektorový prostor. Jeho podmoduly jsou potom speciální vektorové podprostory (uzavřené na násobení všemi prvky z A) a morfismy mezi moduly speciální lineární zobrazení (A-lineární). Navíc konečně generovaný modul M nad A je konečnědimenziomální K-vektorový prostor, protože je to homomorfní obraz modulu A^n (n budiž počet generátorů M). Proto existuje surjektivní K-lineární zobrazení $A^n \twoheadrightarrow M$ a tvrzení plyne konečné K-dimenze A z věty o dimenzi jádra a obrazu.
Nad A jsou tedy všechny konečně generované moduly konečné délky (každou A-kompoziční řadu lze zjemnit na K-kompoziční délky $\dim_K M$).
Jako $D(-)\colon \text{mod-}A \to A\text{-mod}$ označíme $\mathrm{Hom}_K(-,K)$ kontravariantní funktor. Pro $M \in \text{mod-}A$ definujeme levou A-modulovou strukturu $*'\colon A \times DM \to DM$ předpisem $(a *' \varphi)(m) = \varphi(m * a)$ pro $*$ skalární násobení na M. Rovnosti:

$$\begin{aligned}
(a+b) *' \varphi(m) &= \varphi(m * (a+b)) = \varphi(m*a) + \varphi(m*b) = a *' \varphi(m) + b *' \varphi(m)\\
(ab) *' \varphi(m) &= \varphi(m * (ab)) = \varphi(ma * b) = b *' \varphi(ma) = a *' (b *' \varphi(m))\\
a *' \varphi(m+n) &= \varphi((m+n)*a) = \varphi(m*a) + \varphi(n*a) = a *' \varphi(m) + a *' \varphi(n)\\
0 * \varphi(m) &= \varphi(m*0) = \varphi(0) = 0\\
1 * \varphi(m) &= \varphi(m*1) = \varphi(m)
\end{aligned}$$

prokazují, že DM je skutečně levý A-modul. Navíc pro každé $f\colon M \to N$ A-lineární, je rovněž $\mathrm{Hom}_K(f,K)$ A-lineární, jelikož

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_K(f,K)(\varphi + a *' \psi)(m) &= (\varphi f + a *' \psi f)(m) = \mathrm{Hom}_K(f,K)\varphi(m) + \psi(f(m)*a) =\\
&= \mathrm{Hom}_K(f,K)\varphi(m) + \psi(f(m*a)) =\\
&= \mathrm{Hom}_K(f,K)\varphi(m) + a *' \mathrm{Hom}_K(f,K)\psi(m)
\end{aligned}$$

Je to dualita, tj. $D^2 \cong \mathrm{id}_{\text{mod-}A}$, což prokazuje vyčíslovací zobrazení $\mathrm{ev}_M\colon M \to D^2M$ dané předpisem $\mathrm{ev}_M(m)(\varphi) = \varphi(m)$, kde $m \in M$ a $\varphi \in DM$. (zde poněkud přetěžujeme značení, jednou značí D funktor $\text{mod-}A \to A\text{-mod}$, podruhé $A\text{-mod} \to \text{mod-}A$, uvědomme si však, že D na modulovou strukturu vůbec nehledí). Dokažme, že ev je přirozený izomorfismus.
ev_M *je izomorfismus:* Jelikož pracujeme s konečnědimenzionálními vektorovými prostory, duál zachovává dimenzi. Stačí dokázat prostost. Je-li $\mathrm{ev}(m)$ nulové v D^2M, musí být m v jádru všem forem z $\mathrm{Hom}_K(M,K)$. Pak je m zřejmě nulové.
přirozenost ev*:* Buďte $M,N \in \text{mod-}A$ a $f\colon M \to N$. Pro $m \in M$ a $\varphi \in DN$ máme $D^2f\,\mathrm{ev}_M(m)(\varphi) = \mathrm{ev}_N(fm)(\varphi)$, neboli $D^2f\,\mathrm{ev} = \mathrm{ev}\,f$. Proto $\{\mathrm{ev}_X : X \in \text{mod-}A\}$

tvoří přirozený izomorfismus $\mathrm{id}_{\text{mod-}A} \cong D^2$.
Nakonec si všimněme, že D je exaktní. Je-li totiž $0 \to L \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ exaktní v mod-A, je exaktní i ve vec(K). Protože K je projektivní nad K, je $0 \to DN \to DM \to DL \to 0$ exaktní ve vec(K). Proto jsou $\mathrm{Hom}_K(\iota,K)$ epimorfismus a $\mathrm{Hom}_K(\pi,K)$ monomorfismus. Dle pozorování výše jsou A-lineární. Jsou to tedy epimorfismus resp. monomorfismus v A-mod.

Další potřebná pozorování o chování duality jsou vyložena v přídavku H.

1.1 Torzní dvojice a vychylující moduly

Definice 1.1. Buďte $\mathcal{T},\mathcal{F}$ úplné podkategorie mod-A. Dvojici $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ nazveme *torzní dvojice*, pokud:

D1 $\forall M \in \mathcal{T}, \forall N \in \mathcal{F} : \mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$

D2 $\forall M \in$ mod-A $(\forall N \in \mathcal{F}\ \mathrm{Hom}_A(M,N) = 0 \implies M \in \mathcal{T})$

D3 $\forall N \in$ mod-A $(\forall M \in \mathcal{T}\ \mathrm{Hom}_A(M,N) = 0 \implies N \in \mathcal{F})$

Pak $\mathcal{T}$ nazýváme *torzní třída* a $\mathcal{F}$ *beztorzní třída.*

Poznámka 1.2. Terminologie je motivována případem $A = \mathbb{Z}$ a třídami torzních a beztorzních abelovských grup, které evidentně tvoří torzní dvojici. Tato intuice se nám bude hodit i nadále.

Věta 1.3.
a. Buď $\mathcal{T}$ úplná podkategorie mod-A. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

i. $\mathcal{T}$ je torzní třída nějaké torzní dvojice v mod-A

ii. $\mathcal{T}$ je uzavřená na obrazy a rozšíření

iii. existuje idempotentní podfunktor t identického funktoru na mod-A, že pro každé $M \in$ mod-$A : t(M/tM) = 0$ a $\mathcal{T} = \{M : tM = M\}$

b. Buď $\mathcal{F}$ úplná podkategorie mod-A. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

i. $\mathcal{F}$ je beztorzní třída nějaké torzní dvojice v mod-A

ii. $\mathcal{F}$ je uzavřená na podmoduly a rozšíření

iii. existuje idempotentní podfunktor t identického funktoru na mod-A, že pro každé $M \in$ mod-$A : t(M/tM) = 0$ a $\mathcal{F} = \{N : tN = 0\}$

Poznámka 1.4. Funktoru t z věty 1.3 se říká *torzní radikál* a v souladu s poznámkou 1.2 zobecňuje pojem torze grupy. Ta je zřejmě idempotentní podfunktor identity na **Ab** a splňuje $t(M/tM) = 0$.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení **b.**, **a.** je analogické.
i $\implies$ ii. Označme $\mathcal{T}$ příslušnou torzní třídu. Pro krátkou exaktní posloupnost $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ aplikací $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ díky jeho levé exaktnosti obdržíme posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,M') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,M'') \qquad (\alpha)$$

Je-li M' podmodul M, můžeme ho z abelovskosti mod-A vsadit do krátké exaktní posloupnosti jako výše, kde levý morfismus bude inkluze a pravý kojádro té inkluze. Nyní pro $X \in \mathcal{T}$, $M \in \mathcal{F}$ z D1 nabývá α podoby

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,M') \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,M'')$$

čili $\mathrm{Hom}_A(X,M') = 0$ pro každé $X \in \mathcal{T}$. Z D3 je tedy $M' \in \mathcal{F}$.
Nyní buďte $M',M'' \in \mathcal{F}$. Pro jakékoli rozšíření M modulů M',M'' existuje krátká exaktní posloupnost $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$. Opět pro $X \in \mathcal{T}$ dostáváme z α

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,M) \longrightarrow 0$$

čili $M \in \mathcal{F}$.
Třída $\mathcal{F}$ je tedy uzavřená na podmoduly a rozšíření. Uvědomme si ještě, že součet dvou modulů je triviální příklad jejich rozšíření. Třída $\mathcal{F}$ je proto uzavřená i na konečné součty (jiné v mod-A ani neuvažujeme). V případě součinů opět uvažujeme pouze ty konečné, z abelovskosti splývající se součty.
ii. $\Longrightarrow$ **iii.** Definujeme $t(M)$ kostopu třídy $\mathcal{F}$ v modulu M jako průnik jader morfismů $M \to N$ pro $N \in \mathcal{F}$. To je podfunktor identity, neboť pro
$X,Y \in$ mod-A, $N \in \mathcal{F}$, $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to N$ je $t(X) \subseteq \ker gf$, čili $f(t(X)) \subseteq \ker g$ neboli $f(t(X)) \subseteq t(Y)$. Zachovávání komposice a identity je automatické. Evidentně $t(M/tM) = 0$, jelikož každý morfismus $M \to N$ definující $t(M)$ lze přenést na morfismus $M/tM \to N$. Potom průnik jader těchto morfismů už dává $0_{M/tM}$.
Pro $N \in \mathcal{F}$ je zřejmě $tN = 0$, jak prokazuje id_N. Naopak buď $X \in$ mod-A takový, že $tX = 0$. Díky konečné délce X existuje konečně mnoho morfismů $f_i\colon X \to N_i$ $i \in \{1, \cdots n\}$, pro $N_i \in \mathcal{F}$, že $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i = 0$ (volme f_1 libovolně, pak $\dim_K \ker f_1 < \infty$ a díky $tX = 0$ můžeme najít f_2, že $\ker f_1 \cap \ker f_2 < \ker f_1$. To nutně sníží K-dimenzi. Konečným opakováním tedy najdeme kýžené morfismy). Tyto morfismy indukují $f\colon X \to \bigoplus_{i=1}^n N_i$, který je prostý (obraz každého $0 \neq x \in X$ má nenulovou obraz při některém f_i, tedy jádro je triviální). Proto X lze identifikovat s podmodulem konečného součtu modulů z $\mathcal{F}$. Z úplnosti $\mathcal{F}$ a předpokladu je $X \in \mathcal{F}$.
Zbývá už pouze idempotence. Pro $X \in$ mod-A označme $X' = t(tX)$. Poté existuje krátká exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow t(X)/X' \longrightarrow X/X' \longrightarrow X/t(X) \longrightarrow 0$$

Postranní členy jsou v $\mathcal{F}$, díky uzavřenosti na rozšíření je i prostřední stupeň v $\mathcal{F}$. Pak ovšem $t(X/X') = 0$, nutně tedy $X' = t(X)$.
iii. $\Longrightarrow$ **i.** Označme $\mathcal{T} = \{M : tM = M\}$. Dokážeme, že $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ je torzní dvojice:
D1: t je podfunktor, proto každý morfismus $f\colon M \to N$ musí musí posílat prvek tM do tN (jinak by t nebyl korektně definován na morfismech). Protože pro $N \in \mathcal{F}$ je $tN = 0$, musí $f(M) = f(tM) = 0$ proto $f = 0$.
D2: Buď $M \in$ mod-A, že pro každé $N \in \mathcal{F}$ máme $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$. Kdyby

$tM \neq M$, máme $M/tM \neq 0$, proto projekce a nulový morfismus jsou dva odlišné morfismy z $\mathrm{Hom}_A(M,M/tM)$. Ovšem $t(M/tM) = 0$ tedy $M/tM \in \mathcal{F}$. Spor.
D3: Ať pro každé $M \in \mathcal{T}$ je $\mathrm{Hom}_A(M,N) = 0$. Díky idempotenci t máme $t(tN) = tN$, proto $tN \in \mathcal{T}$. Nulový morfismus a inkluze jsou dva morfismy z $\mathrm{Hom}_A(tN,N) = 0$. Proto si musí být rovny, čili $tN = 0$. Pak ovšem $N \in \mathcal{F}$. ■

Z definice torzního radikálu t je jasné, že každý modul lze vyjádřit jako rozšíření modulu neměnného při aplikaci t a modulu z jádra t. Máme totiž:

$$0 \longrightarrow tM \longrightarrow M \longrightarrow M/tM \longrightarrow 0$$

Tuto posloupnost nazveme *kanonickou vzhledem k t*. V předchozí větě jsme odvodili důležitý výsledek platný pro torzní dvojice *obecně*. Nadále nás však budou zajímat pouze torzní dvojice velmi speciální, v jistém smyslu *generované* určitým modulem. V příští podkapitole pak odvodíme výsledek o takových torzních dvojicích, totiž *Brennerové–Butlerovu větu*.

Definice 1.5. Pravý A-modul T nazveme *částečně vychylující*, pokud:

- T1 $\mathrm{pd}_A T \leq 1$
- T2 $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$

Nazveme ho *vychylující* pokud vedle T1, T2 splňuje navíc

- T3 existuje krátká exaktní posloupnost $0 \to A \to T_1 \to T_2 \to 0$, kde $T_1,T_2 \in \mathrm{add}\, T$ tj. jsou to direktní součty direktních sčítanců T.

Poznámka 1.6. Ve zbytku této kapitoly budeme jako B označovat okruh endomorfismů vychylujícího modulu T.

Příklad 1.7. V tuto chvíli můžeme poskytnout pouze jeden příklad vychylujícího modulu, který ovšem nastíní smysluplnost tohoto pojmu. Každý *Moritův progenerátor* je totiž vychylující! Připomínáme v krátkosti, že Moritovým progenerátorem nad R rozumíme konečně generovaný R-modul P, který je projektivní a $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ je věrný. Pro okruhy R,S je ekvivalentní existence Moritova progenerátoru $P \in \text{mod-}A$ takového, že $\mathrm{End}_R(P) \cong S$, a kategoriální ekvivalence $\text{Mod-}R \cong \text{Mod-}S$, která je realizována funktorem $\mathrm{Hom}_R(P,-)$. Omezíme-li se na konečnědimenzionální K-algebry A,B, pak zřejmě restrikce $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ na $\text{mod-}A$ dává ekvivalenci $\text{mod-}A \cong \text{mod-}B$ (jelikož pro M modul konečné K-dimenze jsou $\mathrm{Hom}_A(P,M)$ i $M \otimes_B P$ rovněž konečné K-dimenze, proto z adjungovanosti na velkých modulech plyne esenciální surjektivita $\mathrm{Hom}_A(P,-)|_{\text{mod-}A}$). Tento výsledek platí obecně, ale není tak přímočarý k dokázání.

Podmínky T1 a T2 pro Moritův progenerátor P jsou triviálně splněny. Definujme $\mathrm{Tr}_P\, A$ stopu P v A jako součet obrazů morfismů z $\mathrm{Hom}_A(P,A)$. Kdyby $\mathrm{Tr}_P\, A \neq A$, pak $0\colon A \to A/\mathrm{Tr}_P\, A$ nulový morfismus a $\pi\colon A \to A/\mathrm{Tr}_P\, A$ kanonická projekce vyvrací věrnost $\mathrm{Hom}_A(P,-)$. Z konečné K-dimenzionality obou modulů existuje $n \in \mathbb{N}$ a epimorfismus $P^n \twoheadrightarrow A$. Z projektivity A je tedy $A \leq_\oplus P^n$ neboli $A \in \mathrm{add}\, T$. Posloupnost $0 \to A \to A \to 0 \to 0$ nyní prokazuje T3.

Je-li vychylující modul projektivní, pak je to Moritův progenerátor. Konečná generovanost a projektivita je součástí našich předpokladů, navíc $A \in \operatorname{add} T$ (protože posloupnost z T3 se štěpí). Existuje proto $n \in \mathbb{N}$, že A je direktní sčítanec T^n. To znamená, že T^n je generátor, jelikož $\mathrm{id}_{\text{mod-}A} \cong \operatorname{Hom}_A(A,-) \leq_{\oplus} \operatorname{Hom}_A(T^n,-)$ prokazuje kýženou věrnost tj. máme-li morfismus $f\colon M \to N$ v mod-A, existuje $g\colon P^n \to M$ s nenulovou složeninou fg. To je ekvivalentní nenulovosti alespoň jedné z $fg\iota_i$, kde ι_i je kanonická inkluze T na i-tou složku T^n. Nyní však $fg\iota_i$ prokazuje, že $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ je věrný a T je Moritův progenerátor.

Třetí pozorování se týká grupových algeber, které byly doposud mezi konečně-dimenzionálními K-algebrami autorovu srdci nejbližší. Bohužel se ukazuje, že pro ně vychylující teorie (respektive pojem vychylujícího modulu) nic nového nepřináší. Pojmy Moritova progenerátoru a vychylujícího modulu totiž splývají. Vzhledem k výše uvedenému stačí prokázat pouze inkluzi doleva. Mějme tedy T vychylující modul nad grupovou algebrou KG. Připomeňme, že grupové algebry jsou frobeniovské, proto regulární modul KG_{KG} je injektivní. Podmínka T3 dává posloupnost $0 \to KG \to T' \to T'' \to 0$, která se štěpí, proto $KG \in \operatorname{add} T$. Identický argument jako výše ukazuje, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je P^n generátor. Jelikož projektivní dimenze T je nanejvýš jedna, existuje krátká exaktní posloupnost $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$, kde P_1, P_0 jsou projektivní. P_1 je ale i injektivní, proto se posloupnost štěpí a T je tedy direktní sčítanec P_0. Pak je ovšem projektivní.

V lemmatu 1.12 bude prokázáno, že vychylující moduly jsou v nějakém smyslu velmi hojné, hojnější než Moritovy progenerátory. V tuto chvíli se také sluší prozradit, že náš cíl v této kapitole, Brennerové–Butlerova věta, je v jistém smyslu zobecnění Moritovy ekvivalence pro vychylující moduly.

Příklad 1.8. Nastíníme příklad neprojektivního částečně vychylujícího modulu, jenž ovšem nesplňuje T3. Formulace bohužel vyžaduje několik pojmů, které budou představeny až v příští kapitole, čtenáře neznalého teorie reprezentací toulců tedy odkazujeme k definicím 2.1,2.6,2.8 a lemmatu 2.16 Uvažme toulec A_2, tj. toulec se dvěma vrcholy 1,2 spojenými jedinou hranou $1 \to 2$. Reprezentace $S(1)$ splňuje T1 i T2, jak prokazují posloupnosti níže.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, equal] & K \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{α}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K^2 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{β}$$

Zde α je projektivní rezolventa $0 \to P(2) \to P(1) \to S(1) \to 0$. Ta naznačuje, že $\operatorname{pd}_{KA_2} S(1) \leq 1$. Navíc $S(1)$ není projektivní, diagram γ ukazuje situaci, která vyžaduje existence zobrazení $\varphi\colon K \to K$, že $0 = \mathrm{id}_K \varphi = \mathrm{id}_K$, což je absurdní.

$$
\begin{tikzcd}
S(1) \arrow[d, dashed] \arrow[dr, equal] & & \\
P(1) \arrow[r] & S(1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[d] \arrow[ddr, equal] \arrow[dd, dashed, bend right, "\varphi"'] & & \\
0 \arrow[ddr, equal] \arrow[dd, dashed, bend right] & & \\
K \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\tag{γ}
$$

Dále β ukazuje, že jediné rozšíření $S(1)$ a $S(1)$ je to triviální. To znamená přesně $\mathrm{Ext}^1_{KA_2}(S(1),S(1)) = 0$.
Podmínka T3 být splněna nemůže, neboť reprezentace z $\mathrm{add}\, S(1)$ mají vždy nulový prostor příslušný vrcholu 2. Regulární reprezentace A_2 však obsahuje $P(1)$ jako direktní sčítanec, proto má prostor příslušný vrcholu 2 nenulový.

Nyní pro T definujeme určité užitečné třídy objektů mod-A.

Definice 1.9. Buď T pravý A-modul. Definujeme:

- $\mathrm{Gen}\, T = \{M \in \text{mod-}A : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \pi\colon T^n \twoheadrightarrow M\}$ třídu modulů *generovaných* T
- $\mathrm{Cogen}\, T = \{M \in \text{mod-}A : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \iota\colon M \hookrightarrow T^n\}$ třídu modulů *kogenerovaných* T
- $\mathcal{T}(T) = \{M : \mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0\}$
- $\mathcal{F}(T) = \{M : \mathrm{Hom}_A(T,M) = 0\}$

Je zřejmé, že třída $\mathrm{Gen}\, T$ je uzavřená na obrazy a konečné součty. To dává tušit, že za určitých okolností může být $\mathrm{Gen}\, T$ torzní třída. Odvodíme kritérium, kdy toto nastává. Navíc dokážeme, že pro vychylující moduly $\mathrm{Gen}\, T$ a $\mathcal{T}(T)$ splývají.

Lemma 1.10.

i. Buďte T,M pravé A-moduly. Pak $M \in \mathrm{Gen}\, T$ právě tehdy, když homomorfismus $\varepsilon_M\colon \mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \to M$ daný předpisem $\varepsilon(f \otimes t) = f(t)$ je na.

ii. Buďte T,M pravé A-moduly. Pak $M \in \mathrm{Cogen}\, T$ právě tehdy, když homomorfismus $\eta_M\colon M \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,T),T)$ daný předpisem $\eta_M(x)(g) = g(x)$ je prostý.

Důkaz. Dokážeme **ii.**, **i.** je analogické.
$\Longrightarrow$: Buď $M \in \mathrm{Cogen}\, T$. Jelikož $\mathrm{Hom}_A(M,T)$ má konečnou K-dimenzi, zvolíme jeho bázi $(f_i)_{i=1}^d$. Potom zobrazení $f = [f_1, \cdots, f_d]^T\colon M \to T^d$ je prosté, jelikož existuje prosté zobrazení $g\colon M \to T^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ (definice $\mathrm{Cogen}\, T$). Složením g s kanonickou projekcí na i-tou složku obdržíme prvek $\mathrm{Hom}_A(M,T)$, tedy lineární kombinaci $\sum_{j=1}^d a_{ij} f_i$. Definujeme morfismus $h\colon T^d \to T^m$ A-maticí:

$$
h = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{md} \end{pmatrix}
$$

Je zřejmé, že $hf\colon M \to T^m$ je rovno g. Jelikož g je prosté, musí i f být prosté. Pak existuje krátká exaktní posloupnost $0 \to M \xrightarrow{f} T^d \to X \to 0$. Aplikujeme $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ a z jeho levé exaktnosti obdržíme posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T^d,T) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,T)} \mathrm{Hom}_A(M,T)$$

Všimněme si však, že morfismus $\mathrm{Hom}_A(f,T)$ je surjektivní. Kanonickou projekci $\pi_i\colon T^d \to T$ totiž posílá na f_i. Čili je na bázi, proto i na celý prostor $\mathrm{Hom}_A(M,T)$, čili posloupnost je krátká exaktní.
Nyní si povšimněme, že $\eta = \{\eta_X : X \in \text{mod-}A\}$ je přirozená transformace $\mathrm{id}_{\text{mod-}A} \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-,T),T)$. Pro $K,L \in \text{mod-}A$ a $f\colon K \to L$ vezměme $x \in K$ a $\lambda \in \mathrm{Hom}_A(L,T)$. Pak

$$(\eta_L f(x))(\lambda) = \lambda(f(x)) = (\kappa \mapsto \kappa f(x))(\lambda) = (\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(f,T),T)\eta_K(x))(\lambda)$$

neboli $\eta_L f = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(f,T),T)\eta_K$ což bylo dokázat. Aplikujeme $\mathrm{Hom}_B(-,T)$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\eta_M"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{T^d}"] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(M,T),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T^d,T),T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(X,T),T)
\end{tikzcd}$$

Postačuje prokázat prostost η_{T^d}, jelikož pak bude $\mathrm{Hom}_B((\mathrm{Hom}_A(f,T),T)\eta_M$ prostá, tedy i η_M prostá. Pro prvek $t \in T^d$ je být v $\ker \eta_{T^d}$ ekvivalentní tomu, že ho každý morfismus $T^d \to T$ posílá na nulu. Ovšem má-li prvek t při každé kanonické projekci nulový obraz, musí být nulový (univerzalita součinu). Tím je tvrzení dokázáno.
$\Longleftarrow$: Na $\mathrm{Hom}_A(M,T)$ lze definovat strukturu levého B-modulu působením $b * f = bf$. Jelikož B je K-algebra a $\mathrm{Hom}_A(M,T)$ má konečnou K-dimenzi, je to konečnědimenzionální levý B-modul (B-generuje ho například nějaká K-báze). Existuje tedy B-lineární surjekce $g\colon B^m \to \mathrm{Hom}_A(M,T)$. Doplňme ji na krátkou exaktní posloupnost $0 \to X \to B^m \to \mathrm{Hom}_A(M,T) \to 0$. Z levé exaktnosti $\mathrm{Hom}_B(-,T)$ je $\mathrm{Hom}_B(g,T)$ prostý A-lineární morfismus. Složením s η_M a snadnou manipulací obdržíme

$$M \xrightarrow{\mathrm{Hom}_B(g,T)\eta_M} \mathrm{Hom}_B(B^m,T) \cong T^m$$

a jelikož η_M je z předpokladu prostá, máme $M \in \mathrm{Cogen}\, T$. ■

Věta 1.11. *Buď T částečně vychylující pravý A-modul. Máme:*

i. $\operatorname{Gen} T$ *je torzní třída, k níž přísluší beztorzní třída* $\mathcal{F}(T)$ *definovaná výše*

ii. $\operatorname{Gen} T \subseteq \mathcal{T}(T)$

Důkaz. Buď $M \in \operatorname{Gen} T$. Existuje epimorfismus $\pi\colon T^m \to M$. Doplňme ho do posloupnosti $0 \to X \to T^m \to M \to 0$. Aplikací $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ dostáváme

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(T,T^m) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(T,X) = 0$$

jelikož $\operatorname{Ext}^2(T,-)|_{\text{mod-}A} = 0$, jak plyne z H.13. Proto $\operatorname{Ext}^1_A(T,-)|_{\operatorname{Gen} T} = 0$, což prokazuje **ii.** (definice $\mathcal{T}(T)$).
Jak už bylo poznamenáno, díky větě 1.3 stačí prokázat, že $\operatorname{Gen} T$ je uzavřená na rozšíření. Uvažujme tedy krátkou exaktní posloupnost $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ s $M',M'' \in \operatorname{Gen} T$. Aplikací $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ dostáváme

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M') \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M'') \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,M') = 0$$

čili $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ posílá onu posloupnost na krátkou exaktní posloupnost. Nyní aplikujeme $- \otimes_B T$ a z jeho pravé exaktnosti a přirozenosti ε z lemmatu 1.10 dostáváme diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_A(T,M') \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{M'}"] & \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & \operatorname{Hom}_A(T,M'') \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemma 1.10 rovněž říká, že $\varepsilon_{M'},\varepsilon_{M''}$ jsou epimorfismy. Komutativita pravého čtverce nyní prokazuje, že $\operatorname{im} \varepsilon_M$ protíná všechny rozkladové třídy M' (pro jednoduchost budiž levý homomorfismus spodního řádku inkluze). Zároveň díky komutativitě levého čtverce musí být ε_M na M'. Proto ε_M je na M. Tvrzení lemmatu 1.10 je ekvivalence, proto dostáváme $M \in \operatorname{Gen} T$. Tím je uzavřenost $\operatorname{Gen} T$ prokázána, je to torzní třída. Jak vypadá příslušná beztorzní třída?
Dokážeme, že je to $\mathcal{F}(T) = \{N \in \text{mod-}A : \operatorname{Hom}_A(T,N) = 0\}$. Jedna inkluze je zřejmá. Z D1 a faktu $T \in \operatorname{Gen} T$ musí pro každý beztorzní modul N příslušný $\operatorname{Gen} T$ být $\operatorname{Hom}_A(T,N) = 0$. Na druhou stranu uvažme modul X, pro něhož $\operatorname{Hom}_A(T,X) = 0$. Je třeba prokázat, že pro každé $M \in \operatorname{Gen} T$ je $\operatorname{Hom}_A(M,X) = 0$, a pak využít D3. Vezměme epimorfismus $g\colon T^m \to M$. Z levé exaktnosti $\operatorname{Hom}_A(-,X)$ je $\operatorname{Hom}_A(g,X)\colon \operatorname{Hom}_A(M,X) \to \operatorname{Hom}_A(T^d,X) = 0$ monomorfismus. Pak ale nutně $\operatorname{Hom}_A(M,X) = 0$. Proto $(\operatorname{Gen} T,\mathcal{F}(T))$ tvoří torzní dvojici, což prokazuje **i.**. ■

Následující věta ospravedlní ideu vychylujícího modulu. Doposud jsme odvozovali tvrzení o částečně vychylujících modulech, ke kterým lze snadno vymyslet mnoho příkladů. Mimo příklad 1.7 Moritova progenerátoru jsme ovšem nejmenovali žádný modul vychylující. Bylo by poněkud trpké, kdyby se nakonec ukázalo, že jako v případě grupových algeber žádné vychylující moduly krom Moritových progenerátorů neexistují. Nemůže se stát, že oslavovaná Brennerové–Butlerova věta je nakonec speciální případ Moritovy věty? Nemůže. Každý částečně vychylující modul (takže třeba ten neprojektivní z příkladu 1.8) lze totiž doplnit na vychylující.

Lemma 1.12. *(Bongartzovo) Buď T částečně vychylující modul. Existuje $E \in$ mod-A, že $E \oplus T$ je vychylující.*

Důkaz. Užijeme Yonedovy charakterizace Ext^1 grupy, rozebrané v H.15. Uvědomme si, že grupa $\mathrm{Ext}^1_A(T,A)$ je konečně K-generovaná, jelikož je to faktor dvou podprostorů konečnědimenzionálního $\mathrm{Hom}_A(P_1,A)$, kde P_1 je projektivní modul z nějaké resolventy T.
Zvolme $(\mathbf{e_i})_{i=1}^d$ jeho K-bázi. Dále pro každé $\mathbf{e_i}$ krátkou exaktní posloupnost $0 \to A \to E_i \to T \to 0$ z třídy ekvivalence rozšíření A a T příslušné $\mathbf{e_i}$. Vezmeme součet těchto krátkých exaktních posloupností a uvážíme diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^d \arrow[r] \arrow[d, "{[1,\cdots,1]}"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r] \arrow[d, "u"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Na mysteriózní modul E lze nahlížet jako na vrchol pushoutu $A \leftarrow A^d \to \bigoplus_{i=1}^d E_i$, jelikož pak je komutativita levého čtverce zaručena a pravého také díky abelovskosti mod-A (K.6). Navíc dolní řádek diagramu je přesně
$\mathrm{Ext}^1_A(T^d,[1,\cdots,1])(\oplus_i \mathbf{e_i}) \in \mathrm{Ext}^1(T^d,A)$. Označme ho $\mathbf{e}$.
Nyní prokážeme, že pro kanonickou inkluzi $u_i \colon T \to T^d$ na i-tou složku je
$\mathbf{e_i} = \mathrm{Ext}^1_A(u_i,A)\mathbf{e}$. To plyne z diagramu s exaktními řádky $\mathbf{e_i}$, $\oplus_\mathbf{i} \mathbf{e_i}$ a $\mathbf{e}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "u_i''"] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "u_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^d \arrow[r] \arrow[d, "{[1,\cdots,1]}"] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r] \arrow[d, "u"] & T^d \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Zde zřejmě lze zvolit čárkovaná u_i jako příslušné inkluze na i-tou složku. Složením vertikálních morfismů a pozorováním $[1,\cdots,1]u_i'' = \mathrm{id}_A$ dostáváme morfismus krátkých exaktních posloupností.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "uu_i'"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Chceme ukázat, že horní řádek je ekvivalentní $\mathrm{Ext}^1_A(u_i,A)\mathbf{e}$. Z H.15 víme, že reprezentant třídy $\mathrm{Ext}^1_A(u_i,A)\mathbf{e}$ je například krátká exaktní posloupnost indukovaná pullbackem $E \to T^d \overset{u_i}{\leftarrow} T$. Nakresleme si diagram s řádky $\mathbf{e_i}$, $\mathrm{Ext}^1_A(u_i,A)\mathbf{e}$, $\mathbf{e}$ a pojmenujme doposud známé morfismy

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r, "\pi"] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "\sigma"] & T \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda"] & E \arrow[r, "\tau"] & T^d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Potřebujeme prokázat existenci morfismu $\alpha\colon E_i \to P$, která učiní horní dva čtverce komutativní. Zřejmě volbou $uu_i'\colon E_i \to E$ a $\pi : E_i \to T$ dostaneme kužel na $E \to T^d \overset{u_i}{\leftarrow} T$ a tím obdržíme morfismus $\alpha : E_i \to P$ z univerzality pullbacku. Komutativita pro pravý čtverec je triviální. Pro levý vyplývá z rovností $\sigma\alpha\iota = uu_i'\iota = \lambda[1,\cdots,1]u_i'' = \lambda\,\mathrm{id}_A = \lambda = \sigma\kappa$ a $\varrho\alpha\iota = \pi\iota = 0 = \varrho\kappa$. Jelikož $\tau\lambda = 0 = u_i 0$, jsou $(A,\sigma\alpha\iota,\varrho\alpha\iota)$ a $(A,\sigma\kappa,\varrho\kappa)$ stejné kužele na $E \to T^d \overset{u_i}{\leftarrow} T$, proto z univerzality pullbacku $\alpha\iota = \kappa$. Máme tedy morfismus krátkých exaktních posloupností.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Z 5-lemmatu vyplývá, že α je izomorfismus, proto je skutečně $\mathbf{e_i} = \mathrm{Ext}^1_A(u_i,A)\mathbf{e}$. Aplikací $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ na $\mathbf{e}$ dostáváme

$$
\mathrm{Hom}_A(T,T^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_A(T,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,T^d) = 0
$$

Díky lemmatu H.16 máme $\mathbf{e_i} = \mathrm{Ext}^1_A(u_i,A)\mathbf{e} = \delta(u_i)$ (ty konstrukce jsou identické), proto δ je na ($\mathbf{e_i}$ tvoří K-bázi $\mathrm{Ext}^1_A(T,A)$). Z toho plyne $\mathrm{Ext}^1_A(T,E) = 0$. Dále na $\mathbf{e}$ aplikujeme kontravariantní $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ a $\mathrm{Hom}_A(-,E)$ a obdržíme

$$
0 = \mathrm{Ext}^1_A(T^d,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(E,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A,T) = 0
$$

$$
0 = \mathrm{Ext}^1_A(T^d,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A,E) = 0
$$

Díky projektivitě A mají obě posloupnosti nulový pravý stupeň. Levý stupeň je v prvním případě nulový z T2 a v druhém z výpočtu výše. Díky komutativitě $\mathrm{Ext}^1(-,-)$ s konečnými součty jest

$$
\mathrm{Ext}^1_A(E \oplus T,E \oplus T) = \mathrm{Ext}^1_A(E,T) \oplus \mathrm{Ext}^1_A(T,T) \oplus \mathrm{Ext}^1_A(T,E) \oplus \mathrm{Ext}^1_A(E,E) = 0
$$

To prokazuje podmínku T2 pro $E \oplus T$. Z podkovového lemmatu H.6 je $\mathrm{pd}_A(E) \leq 1$ čili $\mathrm{pd}_A(E \oplus T) \leq 1$, máme tedy T1. Evidentně $E,T^d \in \mathrm{Gen}(E \oplus T)$, proto krátká exaktní posloupnost $\mathbf{e}$ prokazuje T3. ■

Nyní vidíme, že vychylující modul vzniknuvší z příkladu 1.8 nemůže být projektivní (má neprojektivní direktní sčítanec), tedy to není Moritův progenerátor.

V následující větě uvedeme charakterizaci vychylujícího modulu, kterou pak budeme neustále využívat.

Věta 1.13. *Buď T částečně vychylující pravý A-modul. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

i. *T je vychylující pravý A-modul*

ii. $\operatorname{Gen} T = \mathcal{T}(T)$

iii. *každé $M \in \mathcal{T}(T)$ má presentaci $0 \to L \to T_0 \to M \to 0$, kde $T_0 \in \operatorname{add} T$ a $L \in \mathcal{T}(T)$*

Důkaz. **i.** $\Longrightarrow$ **ii.** Díky lemmatu 1.11 stačí ukázat $\mathcal{T}(T) \subseteq \operatorname{Gen} T$. Buď $M \in \mathcal{T}(T)$. Dále buď t torzní radikál příslušný dvojici $(\operatorname{Gen} T, \mathcal{F}(T))$. Nyní stačí ukázat $tM = M$. Aplikací $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ na kanonickou posloupnost M vzhledem k $(\operatorname{Gen} T, \mathcal{F}(T))$ dostáváme

$$\operatorname{Ext}^1_A(T,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(T,tM) = 0$$

$\operatorname{Ext}^2_A(T,tM)$ se nuluje díky T1 a větě H.13 Máme tedy epimorfismus
$\operatorname{Ext}^1_A(T,M) \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM)$. Z definice $\mathcal{T}(T)$ je $\operatorname{Ext}^1_A(T,M) = 0$ čili i $\operatorname{Ext}^1_A(T,M/tM) = 0$.
Z vlastnosti T3 vychylujících modulů existuje presentace $0 \to A \to T' \to T'' \to 0$, kde $T', T'' \in \operatorname{add} T$. Aplikací $\operatorname{Hom}_A(-,M/tM)$ dostáváme

$$\operatorname{Hom}_A(T',M/tM) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(A,M/tM) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T'',M/tM)$$

Z definice t je $M/tM \in \mathcal{F}(T)$, proto $\operatorname{Hom}_A(T,M/tM) = 0$. Jelikož $T' \in \operatorname{add} T$, existuje $X \in$ mod-A, že $T' \oplus X$ je konečný direktní součet T^n. Bifunktor $\operatorname{Hom}_A(-,-)$ komutuje s konečnými součty v obou složkách, proto máme $\operatorname{Hom}_A(T',M/tM) \leq_\oplus \operatorname{Hom}_A(T^d,M/tM) = 0$. Stejně tak $\operatorname{Ext}^1_A(-,-)$, jakožto derivovaný funktor hom funktoru, komutuje s konečnými součty, stejnou úvahou tedy obdržíme $\operatorname{Ext}^1_A(T'',M/tM) = 0$. Díky tomu máme $0 \to \operatorname{Hom}_A(A,M/tM) \to 0$, aproto $0 = \operatorname{Hom}_A(A,M/tM) \cong M/tM$. Pak ovšem $M = tM$ což dává **ii.** z definice t.
ii. $\Longrightarrow$ **iii.** Buď $M \in \mathcal{T}(T)$. Pracujeme s konečně generovanými moduly nad konečnědimenzionální K-algebrou, proto lze vybrat konečnou K-bázi $(f_i)_{i=1}^d$ prostoru $\operatorname{Hom}_A(T,M)$. Jelikož je M generované T, je kodiagonální zobrazení $f = [f_1, \cdots, f_d] \colon T^d \to M$ epimorfismus (duální argument jako v důkazu 1.10). Aplikací $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ na posloupnost $0 \to L \to T^d \xrightarrow{f} M \to 0$ dostáváme

$$\operatorname{Hom}_A(T,T^d) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,f)} \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,T^d) = 0$$

Proto $\operatorname{Ext}^1_A(T,L) = \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(T,f)$. Zobrazení $\operatorname{Hom}_A(T,f)$ je ale surjektivní (volbou $\iota_i \in \operatorname{Hom}_A(T,T^d)$ kanonických inkluzí na i-tou souřadnici je jasné, že $\operatorname{Hom}_A(T,f)$ je na bázi $(f_i)_{i=1}^d$, proto na celé $\operatorname{Hom}_A(T,M)$). Tudíž $\operatorname{Ext}^1_A(T,L) = 0$, proto z definice $\mathcal{T}(T)$ je $0 \to L \to T^d \to M \to 0$ hledaná presentace.
iii. $\Longrightarrow$ **i.** Buď $\mathbf{e}$ posloupnost $0 \to A \to E \to T^d \to 0$ z Bongartzova lemmatu 1.12 taková, že $E \oplus T$ je vychylující. Ukážeme, že $E \in \operatorname{add}(T)$. Za předpokladu **iii.** toto nastává právě tehdy, když $E \in \mathcal{T}(T)$ a pro každé $M \in \mathcal{T}(T)$ je $\operatorname{Ext}^1_A(E,M) = 0$. Implikace doprava je zřejmá, protože z komutativity $\operatorname{Ext}^1_A(-,-)$ s konečnými

součty a definice $\mathcal{T}(T)$ je $\operatorname{add}(T) \subseteq \mathcal{T}(T)$. Druhá podmínka snadno plyne z faktu, že každý prvek $X \in \operatorname{add}(T)$ lze doplnit na konečnou mocninu T, tj. existuje $T' \in$ mod-$A : X \oplus T' = T^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$.
Pro implikaci doleva pro X splňující ony dvě podmínky vezměme posloupnost $0 \to L \to T' \to X \to 0$ z **iii.** Máme $\operatorname{Ext}^1_A(X,L) = 0$, proto se tato posloupnost štěpí a X je tedy direktní sčítanec $T' \in \operatorname{add}(T)$.
Nyní vezměme $M \in \mathcal{T}(T)$. Aplikujeme $\operatorname{Hom}_A(-,M)$ na **e** a obdržíme

$$\operatorname{Ext}^1_A(T^d,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(E,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(A,M)$$

Levý stupeň je nulový z definice $\mathcal{T}(T)$, pravý z projektivity A. Proto $\operatorname{Ext}^1_A(E,M) = 0$. Navíc v důkazu 1.12 bylo dokázáno, že $\operatorname{Ext}^1_A(T,E) = 0$, čili $E \in \mathcal{T}(T)$. Nyní $E \in \operatorname{add}(T)$ a **e** prokazuje T3 pro T, neboli T je vychylující. ■

Věta 1.13 má dva užitečné důsledky.

Důsledek 1.14. *Buď T vychylující modul:*

i. Buď $M \in \mathcal{T}(T)$. Pak existuje posloupnost $\cdots \to T_2 \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$, kde $\forall i \in \mathbb{N}_0 : T_i \in \operatorname{add} T$

ii. $M \in \mathcal{T}(T)$ právě tehdy, když kanonický morfismus $\varepsilon_M : \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \to M$ je bijekce.

Důkaz.
i. Snadná indukce, povšimněme si, že v 1.13*(iii.)* je $L \in \mathcal{T}(T)$.
ii. Implikace doleva vyplývá z věty 1.10 a 1.13*(ii.)*. Užitím 1.13*(iii.)* na M a pak znovu na L dostáváme krátké exaktní posloupnosti:

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{\alpha} T_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow T_1 \xrightarrow{\beta} L_0 \longrightarrow 0$$

Jelikož $L_0, L_1 \in \mathcal{T}(T)$, máme $\operatorname{Ext}^1_A(T,L_i) = 0,\ i \in \{0,1\}$ aproto aplikací $\operatorname{Hom}_A(T,-)$ dostáváme:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L_0) \longrightarrow 0$$

Můžeme tedy aplikovat pravoexaktní funktor $- \otimes_B T$ a obdržet:

$$\operatorname{Hom}_A(T,L_0) \otimes_B T \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,\alpha) \otimes_B T} \operatorname{Hom}_A(T,T_0) \otimes_B T \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \longrightarrow 0$$

$$\operatorname{Hom}_A(T,L_1) \otimes_B T \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,T_1) \otimes_B T \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(T,\beta) \otimes_B T} \operatorname{Hom}_A(T,L_0) \otimes_B T \longrightarrow 0$$

Jak vidno, $\mathrm{Hom}_A(T,\beta) \otimes_B T$ je stále surjektivní. Z přirozenosti ε dostáváme homomorfismus posloupností:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T,T_1) \otimes_B T \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(T,\alpha\beta)\otimes_B T"] \arrow[d, "\varepsilon_{T_1}"] & \mathrm{Hom}_A(T,T_0) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{T_0}"] & \mathrm{Hom}_A(T,M) \otimes_B T \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"] & 0 \\
T_1 \arrow[r, "\alpha\beta"] & T_0 \arrow[r] & L_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\varepsilon|_{\mathrm{Gen}\,T}$ je na díky 1.10*(i.)*, proto ε_T je epimorfismus. Navíc $\mathrm{Hom}_A(T,T) \otimes_B T \cong B \otimes_B T \cong T$, čili mají stejnou konečnou K-dimenzi a ε_M je tedy izomorfismus. Standardním trikem pro moduly z $\mathrm{add}(T)$ (doplněním do direktního součtu a díky komutativitě tensorového součinu se součty) dostáváme, že pro každé $X \in \mathrm{add}\,T$ je ε_X izomorfismus (je to restrikce izomorfismu na direktní sčítanec). Proto $\varepsilon_{T_0},\varepsilon_{T_1}$ jsou izomorfismy. Z 5-lemmatu je i ε_M izomorfismus, což bylo dokázat. ■

Díky 1.11 a 1.13 tedy můžeme psát $(\mathcal{T}(T),\mathcal{F}(T))$ torzní dvojici *indukovanou* vychylujícím modulem T.

1.2 Brennerové–Butlerova věta

Nyní se zaměříme na kategorii B-mod levých konečné generovaných B modulů. Připomeňme, že T je levý B-modul při působení $f * x = f(x)$ pro $f \in \mathrm{End}(T)$.

Věta 1.15. *Buď T vychylující pravý A-modul.*

i. $D(T) \cong \mathrm{Hom}_A(T,DA)$ *jako pravé B-moduly*

ii. *T je vychylující levý B-modul*

iii. *homomorfismus K-algeber $\iota : A \hookrightarrow \mathrm{End}({}_BT)^{op}$ dán předpisem $a \mapsto (t \mapsto ta)$ je izomorfismus*

Důkaz. **i.** Toto je pouze hom-tensorová adjunkce, jelikož

$$D(T) = \mathrm{Hom}_K(T,K) = \mathrm{Hom}_K(T\otimes_A A,K) \cong \mathrm{Hom}_A(T, \mathrm{Hom}_K(A,K)) = \mathrm{Hom}_A(T,DA)$$

ii. Stačí ověřit axiomy T1-T3.
T1: Z T3 pro T_A existuje krátká exaktní posloupnost pravých A-modulů $0 \to A \to T' \to T'' \to 0$, kde $T',T'' \in \mathrm{add}(T)$. Aplikací $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ díky T2 pro T_A jest

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T'',T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T',T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A,T) \longrightarrow 0 \qquad (\alpha)$$

Zřejmě $\mathrm{Hom}_A(A,{}_BT) \cong {}_BT$. Navíc standardním trikem doplnění na násobek T je vidět, že pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ jsou $\mathrm{Hom}_A(T'',T), \mathrm{Hom}_A(T',T)$ direktní sčítance $\mathrm{Hom}_A(T^m,T) = B^m$, čili jsou projektivní. α je tedy projektivní rezolventa T jako levého B-modulu.

T2: Chceme dokázat $\mathrm{Ext}^1_B(T,T) = 0$. To je ekvivalentní $\mathrm{Ext}^1_B(DT,DT) = 0$, jelikož $\mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}B}(DY,DX)$ jsou izomorfní jako funktory. Ukážeme, že $\mathrm{Ext}^1_B(DT,DT) = \mathrm{Ext}^1_A(DA,DA) = 0$ (plyne z A-injektivity DA).
Nejdříve si povšimněme přirozeného izomorfismu
$\xi_{T'}\colon \mathrm{Hom}_A(T',DA) \to \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T'), \mathrm{Hom}_A(T,DA))$ pro $T' \in \operatorname{add} T$. Ten je definován na $f \in \mathrm{Hom}_A(T',DA)$ jako $\mathrm{Hom}_A(T,f) \in \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T'), \mathrm{Hom}_A(T,DA))$. Výsledek stačí dokázat pro T, zbytek plyne z komutativity s konečnými součty. Pro T je to však zřejmé, neboť $B \cong \mathrm{Hom}_A(T,T)$, neboli ξ_T vede mezi prostory stejné K-dimenze. Morfismus $\mathrm{id}_T \in \mathrm{Hom}_A(T,T)$ prokazuje prostost, proto ξ_T je izomorfismus. Tím je pozorování dokázáno.
Z injektivity DA plyne $DA \in \mathcal{T}(T)$, proto z lemmatu 1.14*(i.)* existuje exaktní posloupnost $\mathbf{T}\colon \cdots \overset{d_2}{\to} T_1 \overset{d_1}{\to} T_0 \overset{d_0}{\to} DA \to 0$, kde $T_i \in \operatorname{add} T_A$. Aplikací $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ obdržíme projektivní rezolventu $\mathrm{Hom}_A(T,DA)$ v mod-B. Moduly $\mathrm{Hom}_A(T,T_i)$ jsou zřejmě B-projektivní, neboť vždy existuje $n_i \in \mathbb{N}$, že $\mathrm{Hom}_A(T,T_i) \leq_\oplus B^{n_i}$. Navíc pro $n \geq 1$ můžeme n-tou kohomologii $\mathrm{Hom}_A(T,\mathbf{T})$ počítat jako $\mathrm{Ext}^1_A(T, \operatorname{im} d_{n+1})$, což je nula z definice $\mathcal{T}(T)$, jelikož $\operatorname{im} d_n$ je obraz $T_n \in \operatorname{add} T \subseteq \mathcal{T}(T)$ a $\mathcal{T}(T)$ je uzavřená na obrazy. Proto můžeme psát

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^1_B(DT,DT) \cong \mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{Hom}_A(T,DA), \mathrm{Hom}_A(T,DA)) = \\ &\qquad = H^1 \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,\mathbf{T}), \mathrm{Hom}_A(T,DA)) \cong H^1 \mathrm{Hom}_A(\mathbf{T},DA) = \mathrm{Ext}^1_A(DA,DA)\end{aligned}$$

což bylo dokázat.
T3: Zvolíme A-projektivní resolventu $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$ (díky T1 pro T_A). Aplikací $\mathrm{Hom}_A(-,T)$ dostaneme

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$$

Z projektivity je pro $i \in \{0,1\}$ $\mathrm{Hom}_A(P_i,T) \leq_\oplus \mathrm{Hom}_A(A^n,T) \cong T^n$, čili $\mathrm{Hom}_A(P_i,T) \in \operatorname{add}({}_BT)$. Jelikož $B = \mathrm{Hom}_A(T,T)$, je tato poslopnost hledanou presentací B.
iii. Rozmysleme si, že se jedná o homomorfismus K-algeber. K-linearita je jasná, je třeba prokázat komutativitu s binární operací. Buď $x \in T$. Jest

$$\iota(ab)(x) = (t \mapsto tab)(x) = (t \mapsto ta)(t \mapsto tb)(x) = \iota(a)\iota(b)(x)$$

jelikož skládání endomorfismů značíme obráceně (je to opačný okruh endomorfismů).
Buď $a \in \ker \iota$ tj. a zprava anihiluje celé T. Díky T3 existuje monomorfismus $\nu\colon A \to T^m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Označme π_i i-tou kanonickou projekci $T^m \to T$. Morfismus $\pi_i\nu \in \mathrm{Hom}_A(A,T) \cong T$ odpovídá násobení nějakého $t = \pi_i\nu(1)$ zprava. Proto $\pi_i\nu(a) = ta = 0$. Z limitní vlastnosti součinu je tedy $\nu(a) = 0$. Proto $a = 0$ a ι je prostá. Porovnáme K-dimenze A a $\mathrm{End}({}_BT)^{op}$. K-dimenze opačného okruhu je zřejmě rovna K-dimenzi okruhu původního. Z lemmatu 1.14*(ii.)* a hom-tensorové adjunkce dostáváme

$$\mathrm{Hom}_A(DA,DA) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(T,DA) \otimes_B T,DA) \cong \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,DA), \mathrm{Hom}_A(T,DA))$$

Proto máme izomorfismus:

$$A \cong \mathrm{Hom}_A(A,A) \cong \mathrm{Hom}_A(DA,DA) \cong \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,DA), \mathrm{Hom}_A(T,DA)) \cong \mathrm{End}_B DT$$

z něhož plyne $\dim_K A = \dim_K \mathrm{End}({}_BT)^{op}$ a surjektivita ι. To bylo dokázat. ■

Máme tedy vychylující modul v B-mod. Obdobnou úvahou jako ve větách 1.11 a 1.13 můžeme pro levý vychylující modul v kategorii levých konečně generovaných modulů nad konečnědimenzionální K-algebrou odvodit, že $(\mathcal{T}(T),\mathcal{F}(T))$ tvoří torzní dvojici. Z definice torzní dvojice a faktu $\mathrm{Hom}_{B\text{-mod}}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\text{mod-}B}(DY,DX)$ pak snadno vidíme, že $(D(\mathcal{F}(T)),D(\mathcal{T}(T)))$ je torzní dvojice v mod-B. Toto pozorování shrneme a značení zavedeme v následující definici.

Definice 1.16. Buď ${}_BT_A$ pravý vychylující A-modul. Pak v B-mod definujeme třídy:

- $\mathcal{T}(T) = \mathrm{Gen}\,{}_BT = \{U \in B\text{-mod} : \mathrm{Ext}^1_B(T,U) = 0\}$
- $\mathcal{F}(T) = \{V \in B\text{-mod} : \mathrm{Hom}_B(T,U) = 0\}$

Poté $(\mathcal{T}(T),\mathcal{F}(T))$ je torzní dvojice v B-mod. Navíc dostáváme torzní dvojici $(D(\mathcal{F}(T)),D(\mathcal{T}(T)))$ v mod-B. Označíme:

- $\mathcal{X}(T) = D(\mathcal{F}(T))$
- $\mathcal{Y}(T) = D(\mathcal{T}(T))$

Duální třídy však mají i pohodlnější popis:

Lemma 1.17. *Buď T pravý vychylující A-modul. Pak platí:*

i. $\mathcal{X}(T) = \{X \in \textit{mod-}B : X \otimes_B T = 0\}$

ii. $\mathcal{Y}(T) = \{Y \in \textit{mod-}B : \mathrm{Tor}^B_1(Y,T) = 0\}$

Důkaz.
i. Z definice $\mathcal{F}(T)$, $D(-)$ a hom–tensorové adjunkce máme pro $X \in \mathcal{X}(T)$

$$0 = \mathrm{Hom}_B(X,DT) = \mathrm{Hom}_K(X \otimes_B T,K) = D(X \otimes_B T) \implies X \otimes_B T = 0$$

protože $X \otimes_B T$ je vektorový prostor nad K a pro každý konečnědimenzionální vektorový prostor V je $\dim_K V = \dim_K DV$.
ii. Opět z definice $\mathcal{T}(T)$ a $D(-)$ vidíme, že pro $Y \in \mathcal{Y}(T)$ máme $\mathrm{Ext}^1_B(Y,DT) = 0$ Uvažujme nyní projektivní resolventu $\mathbf{P} \to Y \to 0$. Díky H.9 pak máme:

$$\begin{aligned}0 = \mathrm{Ext}^1_B(Y,DT) = H^1(\mathrm{Hom}_B(\mathbf{P},DT)) &\cong DH_1(D\,\mathrm{Hom}_B(\mathbf{P},DT)) \cong \\ &\cong DH_1(DD(\mathbf{P} \otimes_B T)) \cong DH_1(\mathbf{P} \otimes_B T) = D\,\mathrm{Tor}^B_1(Y,T)\end{aligned}$$

Čili stejným argumentem jako v **i.** pomocí K-dimenze obdržíme závěr. ■

Lemma 1.18. *Buď T vychylující pravý A-modul. Dále nechť $Y \in \mathcal{Y}(T)$ je pravý B-modul.*

i. existuje krátká exaktní posloupnost $0 \to Y \to T^* \to Z \to 0$, kde $T^* \in \mathrm{add}\,DT$ a $Z \in \mathcal{Y}(T)$

ii. morfismus $\delta_Y : Y \to \mathrm{Hom}_A(T,Y \otimes_B T)$, že $\delta_Y(y) = (t \mapsto y \otimes t)$ je izomorfismus.

Důkaz. **i.** Užijeme levé verze věty 1.13*(iii.)* pro $\mathcal{T}({}_BT)$. Pro $Y \in \mathcal{Y}(T)$ máme totiž $DY \in \mathcal{T}({}_BT)$. Proto existuje posloupnost $0 \to Z' \to T' \to DY \to 0$ levých B-modulů, kde $T' \in \operatorname{add}({}_BT)$ a $Z' \in \mathcal{T}({}_BT)$. Aplikací D z její exaktnosti a faktu $D^2 \cong \mathrm{id}_{\text{mod-}B}$ je $DT' \in \operatorname{add}(DT)$, $DZ \in \mathcal{Y}$ a $0 \to Y \to DT' \to DZ' \to 0$ hledaná krátká exaktní posloupnost.
ii. Pro $f\colon M \to N$ a $m \in M$ prokazuje rovnost

$$\delta_N f(m) = (t \mapsto f(m) \otimes t) = \operatorname{Hom}_A(T, f \otimes_B T)(t \mapsto m \otimes t) = \operatorname{Hom}_A(T, f \otimes_B T)\delta_M(m)$$

přirozenost δ. Nejdříve tvrzení dokážeme pro moduly z $\operatorname{add} DT$. Z důkazu 1.15*(iii.)* a hom-tensorové adjunkce máme $DA \cong D\operatorname{End}_B(DT) \cong DT \otimes_B T$, proto díky 1.15*(i.)* je $\delta_{DT} : DT \to \operatorname{Hom}_A(T, DA) \cong \operatorname{Hom}_A(T, DT \otimes_B T)$ izomorfismus. Komutativitou příslušných funktorů s konečnými součty lze výsledek zřejmě zobecnit na libovolný $T^* \in \operatorname{add} DT$.
Užijeme dvakrát **i.** na Y, tj. máme krátké exaktní posloupnosti

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow T_0^* \longrightarrow Y_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Y_0 \longrightarrow T_1^* \longrightarrow Y_1 \longrightarrow 0$$

kde $T_i^* \in \operatorname{add}(DT)$ a $Y_i \in \mathcal{Y}(T)$ pro $i \in \{0,1\}$. Na obě aplikujeme $- \otimes_B T$

$$0 = \operatorname{Tor}_1^B(Y_0, T) \longrightarrow Y \otimes_B T \longrightarrow T_0^* \otimes_B T \longrightarrow Y_0 \otimes_B T \longrightarrow 0$$

$$0 = \operatorname{Tor}_1^B(Y_1, T) \longrightarrow Y_0 \otimes_B T \longrightarrow T_1^* \otimes_B T \longrightarrow Y_1 \otimes_B T \longrightarrow 0$$

z charakterizace $\mathcal{Y}(T)$. Tak obdržíme posloupnost (jelikož pravý člen první posloupnosti je identický levému členu druhé)

$$0 \longrightarrow Y \otimes_B T \longrightarrow T_0^* \otimes_B T \longrightarrow T_1^* \otimes_B T$$

na níž aplikujeme $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ a dostaneme

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, Y \otimes_B T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, T_0^* \otimes_B T) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T, T_1^* \otimes_B T)$$

z jeho levé exaktnosti. Z přirozenosti δ, 5-lemmatu a diagramu

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\delta_Y"] & T_1^* \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{T_1^*}"] & T_0^* \arrow[d, "\delta_{T_0^*}"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(T, Y \otimes_B T) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(T, T_0^* \otimes_B T) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(T, T_1^* \otimes_B T)
\end{tikzcd}$$

dostáváme závěr, poněvadž $\delta_{T_i^*}$ $i \in \{0,1\}$ jsou izomorfismy, jak dokázáno výše. ■

Konečně můžeme vyslovit a dokázat **Brennerové–Butlerovu větu**!

Věta 1.19. *Buď T_A vychylující modul, $B = \operatorname{End}(T_A)$. Platí:*

i. Funktory $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ a $- \otimes_B T$ indukují ekvivalenci $\mathcal{T}(T_A) \cong \mathcal{Y}(T_A)$.

ii. Funktory $\operatorname{Ext}_A^1(T, -)$ a $\operatorname{Tor}_1^B(-, T)$ indukují ekvivalenci $\mathcal{F}(T_A) \cong \mathcal{X}(T_A)$.

Důkaz.
i. Postupujeme dle definice K.1:
Vezměme $M \in \mathcal{T}(T)$. Ukážeme $\mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,M),T) = 0$. Z věty 1.13*(ii.)* máme posloupnost $0 \to L \to T' \to M \to 0$, kde $L \in \mathcal{T}(T)$ a $T' \in \mathrm{add}(T)$. Aplikací $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ obdržíme

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,T') \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(T,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,L) = 0$$

z definice $\mathcal{T}(T)$. Nyní aplikací $- \otimes_B T$ dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,T'),T) &\to \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,M),T) \\ &\to \mathrm{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \xrightarrow{\ *\ } \mathrm{Hom}_A(T,T') \otimes_B T \end{aligned}$$

kde nula nalevo plyne z projektivity $\mathrm{Hom}_A(T,T')$. Zároveň díky $\mathrm{add}(T) \subseteq \mathcal{T}(T)$ a z důsledku 1.14*(ii.)* jsou $\varepsilon_L,\varepsilon_{T'}$ izomorfismy. Morfismus * je tedy součástí komutativního čtverce

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\varepsilon_L"] & \mathrm{Hom}_A(T,T') \otimes_B T \arrow[d, "\varepsilon_{T'}"] \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & T' \end{tikzcd}$$

je to tedy monomorfismus. Z toho bezprostředně plyne $\mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,M),T) = 0$ neboli $\mathrm{Hom}_A(T,M) \in \mathcal{Y}(T)$.
Dále musí být pro $Y \in \mathcal{Y}(T)$, $Y \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$. Dokazujeme $\mathrm{Ext}_A^1(T,Y \otimes_B T) = 0$. Z 1.18*(i.)* máme posloupnost $0 \to Y \to T^* \to Z \to 0$ v mod-B takovou, že $T^* \in \mathrm{add}(DT)$ a $Z \in \mathcal{Y}(T)$. Aplikací $- \otimes_B T$ dostáváme

$$0 = \mathrm{Tor}_1^B(Z,T) \longrightarrow Y \otimes_B T \longrightarrow T^* \otimes_B T \longrightarrow Z \otimes_B T \longrightarrow 0$$

kde $\mathrm{Tor}_1^B(Z,T) = 0$ z charakterizace $\mathcal{Y}(T)$. Dále aplikací $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ obdržíme

$$\mathrm{Hom}_A(T,T^* \otimes_B T) \xrightarrow{\ *\ } \mathrm{Hom}_A(T,Z \otimes_B T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,Y \otimes_B T) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(T,T^* \otimes_B T)$$

Díky 1.18*(ii.)* obdržíme jako výše komutativní čtverec

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(T,T^* \otimes_B T) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\delta_{T^*}"] & \mathrm{Hom}_A(T,Z \otimes_B T) \arrow[d, "\delta_Z"] & \\ T^* \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kde svislé morfismy jsou izomorfismy, proto * je epimorfismus. Jelikož $DA \in \mathcal{T}(T)$, z 1.15*(i.)* jest

$$T^* \otimes_B T \leq_\oplus DT^m \otimes_B T \cong \mathrm{Hom}_A(T,DA)^m \otimes_B T \cong DA^m$$

Proto $\mathrm{Ext}^1_A(T,T^* \otimes_B T) \leq_\oplus \mathrm{Ext}^1_A(T,DA^m) = 0$, což dává $\mathrm{Ext}^1_A(T,Y \otimes_B T) = 0$. Z definice tedy $Y \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$.
Navíc díky 1.14*(ii.)* máme $\varepsilon\colon \mathrm{Hom}_A(T,-) \otimes_B T|_{\mathcal{T}(T)} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{T}(T)}$ a díky 1.18*(ii.)* $\delta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{Y}(T)} \cong \mathrm{Hom}_A(T,- \otimes_B T)|_{\mathcal{Y}(T)}$, čili skutečně $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a $- \otimes_B T$ jsou hledané kvaziinverzní ekvivalence $\mathcal{T}(T) \cong \mathcal{Y}(T)$.
ii. Opět dle K.1:
Buď $N \in \mathcal{F}(T)$. Chceme $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T = 0$. Vezmeme libovolnou krátkou exaktní posloupnost $0 \to N \to E \to L \to 0$, ve které je E injektivní. Ta existuje, protože modulové kategorie mají dostatek injektivních objektů. Z definice $E \in \mathcal{T}(T)$. Díky uzavřenosti $\mathcal{T}(T)$ na obrazy je tedy i $L \in \mathcal{T}(T)$. Aplikací $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ obdržíme

$$0 = \mathrm{Hom}_A(T,N) \to \mathrm{Hom}_A(T,E) \to \mathrm{Hom}_A(T,L) \to \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(T,E) = 0$$

kde $\mathrm{Hom}_A(T,N)$ je nulový z definice $\mathcal{F}(T)$ a $\mathrm{Ext}^1_A(T,E)$ díky injektivitě E.
Nyní aplikujeme $- \otimes_B T$ a dostaneme

$$\begin{tikzcd} 0 = \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Hom}_A(T,L),T) \arrow[r] & \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,N),T) \arrow[dll, out=0, in=180] & & \\ \mathrm{Hom}_A(T,E) \otimes_B T \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

neboť dle **i.** je $\mathrm{Hom}_A(T,L) \in \mathcal{Y}(T)$, čili z charakterizace 1.17 máme $\mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Hom}_A(T,L),T) = 0$
Z 1.14*(ii.)* máme přirozené izomorfismy $\varepsilon_E,\varepsilon_L$. Jednoduchý hon dává izomorfismy α_N, β v diagramu

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \mathrm{Tor}^B_1(\mathrm{Ext}^1_A(T,N),T) \arrow[r, "\alpha_N"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_A(T,E) \otimes_B T \arrow[r, "\varepsilon_E"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_A(T,L) \otimes_B T \arrow[r, "\varepsilon_L"] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ \mathrm{Ext}^1_A(T,N) \otimes_B T \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & 0 \\ 0 & \end{tikzcd}$$

Charakterizace $\mathcal{X}(T)$ a β prokazuje $\mathrm{Ext}^1_A(T,N) \in \mathcal{X}(T)$. Navíc z H.17 α je přirozená. Tak dostáváme jednu z přirozených ekvivalencí vyžadovaných v K.1.
Opačný směr je duální. Uvažujme $X \in \mathcal{X}(T)$ pravý B-modul. Díky dostatku projektivních objektů v mod-B máme krátkou exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

kde z charakterizace $\mathcal{Y}(T)$ je $P \in \mathcal{Y}(T)$ a z jeho uzavřenosti na podmoduly (plyne z uzavřenosti $\mathcal{T}({}_BT)$ na obrazy a faktu, že D posílá epimorfismy na monomorfismy) je i $Y \in \mathcal{Y}(T)$. Duálně k postupu výše aplikujeme $- \otimes_B T$:

$$0 = \mathrm{Tor}_1^B(P,T) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^B(X,T) \longrightarrow Y \otimes_B T \longrightarrow P \otimes_B T \longrightarrow X \otimes_B T = 0$$

kde $\mathrm{Tor}_1^B(P,T) = 0$ díky projektivitě (tedy plochosti) P a $X \otimes_B T = 0$ plyne z charakterizace $\mathcal{X}(T)$. Aplikujeme $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ a obdržíme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(T,\mathrm{Tor}_1^B(X,T)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,Y \otimes_B T) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(T,P \otimes_B T) \arrow[dll, rounded corners] \\
\mathrm{Ext}_A^1(T,\mathrm{Tor}_1^B(X,T)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_A^1(T,Y \otimes_B T) = 0 &
\end{tikzcd}$$

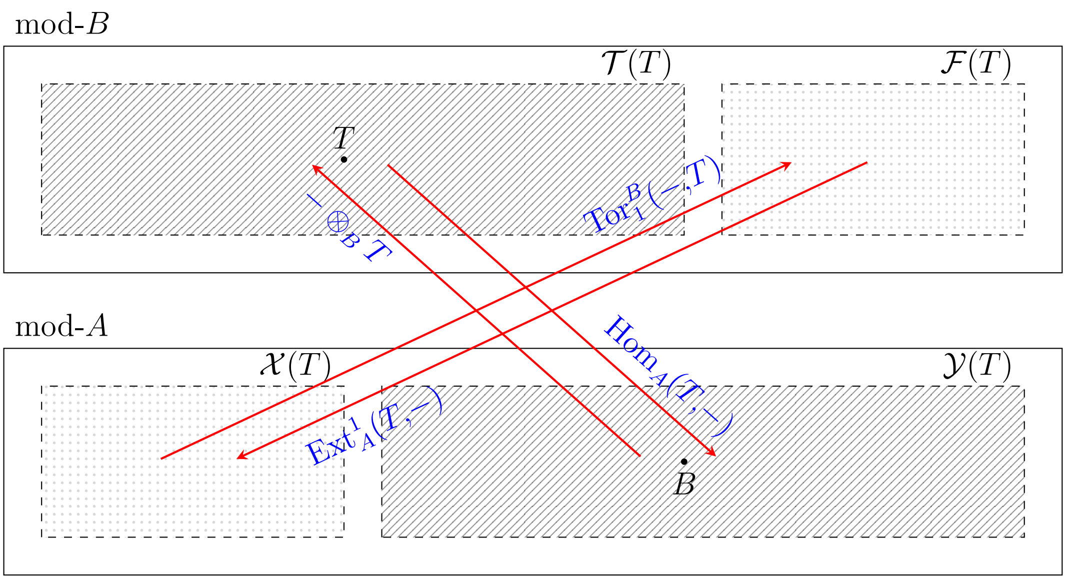
neboť dle *i.* $Y \otimes_B T \in \mathcal{T}(T)$. Z 1.18*(ii.)* dostáváme isomorfismy $\delta_Y \colon Y \to \mathrm{Hom}_A(T,Y \otimes_B T)$ a $\delta_P \colon P \to \mathrm{Hom}_A(T,P \otimes_B T)$, jednoduchým honem získáme izomorfismy ζ,ϑ_X v diagramu

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(T,\mathrm{Tor}_1^B(X,T)) \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\delta_Y"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(T,Y \otimes_B T) \arrow[d] \\
P \arrow[r, "\delta_P"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(T,P \otimes_B T) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\vartheta_X"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}_A^1(T,\mathrm{Tor}_1^B(X,T)) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

který prokazuje $\mathrm{Hom}_A(T,\mathrm{Tor}_1^B(X,T)) = 0$ čili $\mathrm{Tor}_1^B(X,T) \in \mathcal{F}(T)$. Dále ϑ definuje přirozenou ekvivalenci $\mathrm{id}_{\mathcal{X}(T)} \cong \mathrm{Ext}_A^1(T,\mathrm{Tor}_B^1(-,T))|_{\mathcal{X}(T)}$.
To bylo dokázat, $\mathcal{F}(T) \cong \mathcal{X}(T)$. ∎

Důsledek 1.20. *Je-li T projektivní, jsou kategorie mod-A a mod-B ekvivalentní.*

Tvrzení Brennerové–Butlerovy věty si ještě vizualizujme. Tomuto budeme říkat *Brennerové–Butlerova korespondence*



2. Brennerové–Butlerova korespondence pro acyklické toulce

V této kapitole podrobně popíšeme situaci, která koncem sedmdesátých let vedla k vzniku vychylující teorie. Ačkoli je tak historicky významná, v moderní literatuře dle naší znalosti celistvě popsána není. Základní definice jsou převzaty z [Kra10], není-li řečeno jinak. Převzaté výsledky jsou označeny odkazem na příslušnou literaturu. Skladba finálního důkazu je autorova.

2.1 Toulce a jejich reprezentace

V tomto oddíle zavedeme pojem toulce a popíšeme základní výsledky týkající se jejich reprezentací.

Definice 2.1. Buďte Q_0,Q_1 konečné disjunktní množiny a s,t : $Q_1 \to Q_0$ libovolné funkce. Čtveřici $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ nazveme *toulec*, prvky Q_0 *vrcholy* Q, prvky Q_1 *hrany* Q. Obraz $\alpha \in Q_1$ při s nazveme *začátek* α a při t *konec* α. Tato data vyjádříme značením $\alpha \colon s(\alpha) \to t(\alpha)$.

Jinými slovy toulce jsou orientované multigrafy. Toto pojetí je instruktivní pro pochopení následující teorie, ovšem definice 2.1 více souzní s námi užívaným formalismem. Jelikož pojem multigrafu není ustálený, zdůrazňujeme, že na s,t nejsou kladeny žádné podmínky, tedy vícenásobné hrany a smyčky jsou povoleny.

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
3 \arrow[r, "\beta"] & 1 \\
4 \arrow[ur, "\gamma"] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[loop left] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & b \arrow[r, bend right] & c \arrow[l, bend right] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Levému toulci (přesněji klasifikaci jeho reprezentací) se někdy říká *problém tří podprostorů* (označme ho P3P). Budeme ho využívat pro ilustraci níže představeným pojmů.

Poznámka 2.2. Vrcholy budeme označovat přirozenými čísly, popř. malými latinskými písmeny. Hrany zase malými písmeny řeckými.

Definice 2.3. Buď $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ toulec. Posloupnost hran $c = (\alpha_i)_{i=1}^n$ nazveme *cestou délky* n, je-li pro každé $i \in \{1, \cdots ,n-1\} : t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$. *Začátkem cesty* $s(c)$ nazýváme $s(\alpha_1)$ a *koncem cesty* $t(c)$ zase $t(\alpha_n)$. Jako pro hrany tato data označíme $c \colon s(c) \to t(c)$. Hrany identifikujeme s cestami délky 1. Dále definujeme prázdnou cestu ε_i, která neobsahuje žádné hrany a $s(\varepsilon_i) = t(\varepsilon_i) = i$. Jsou-li c,d dvě cesty, že $t(c) = s(d)$, definujeme jejich *složení* dc jako cestu vzniknuvší spřažením příslušných posloupností hran tak, že $s(dc) = s(c)$ a $t(dc) = t(d)$.

Navíc definujme pro každou cestu c složení $\varepsilon_{t(c)}c = c\varepsilon_{s(c)} = c$. Množinu cest v toulci Q označíme $\mathcal{C}_Q$. Pro dané dva vrcholy $i,j \in Q_0$ označíme $Q(i,j)$ množinu cest $c\colon i \to j$.
Pokud se v každé cestě v Q objevuje každý vrchol nanejvýš jednou
(tj. pro $c = (\alpha_i)_{i=1}^n$ je $|\bigcup_{i=1}^n \{s(\alpha),t(\alpha)\}| = n+1$), nazveme Q *acyklickým.*

Acyklické toulce nás v této kapitole budou zajímat nejvíce, mimo jiné v nich totiž existují určité užitečné vrcholy.

Definice 2.4. Buď Q toulec. Jeho vrchol v nazveme *zdroj*, nekončí-li v něm žádná hrana. Pokud v něm naopak žádná nezačíná, nazveme ho *stok.*

V toulci P3P jsou vrcholy 2,3,4 zdroje a vrchol 1 stok. Dobrá zpráva je, že v acyklickém toulci vždy existují.

Lemma 2.5. *Buď Q acyklický toulec. Pak existují vrcholy $i,j \in Q_0$, že i je zdroj a j je stok.*

Důkaz. Z definice acyklického toulce se v žádné cestě nesmí vyskytovat jeden vrchol dvakrát. Protože uvažujeme pouze konečné toulce, jsou délky cest omezeny (počtem vrcholů). Vezměme cestu maximální délky. Její začátek je nutně zdroj a její konec nutně stok. ∎

Definice 2.6. *Reprezentací X* toulce Q nad tělesem K rozumíme dvojici $((X_i)_{i\in Q_0},(X_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$, kde X_i jsou vektorové prostory nad K a $X_\alpha\colon X_{s(\alpha)} \to X_{t(\alpha)}$ lineární zobrazení. Navíc budeme požadovat, aby všechny X_i byly konečnědimenzionální.
Buďte X,Y dvě reprezentace toulce Q nad K. *Morfismem reprezentací* $\varphi\colon X \to Y$ rozumíme kolekci $(\varphi_i)_{i\in Q_0}$ zobrazení $\varphi_i\colon X_i \to Y_i$ splňující *podmínku přirozenosti*, tj. formuli $\forall \alpha \in Q_1 : \varphi_{t(\alpha)}X_\alpha = Y_\alpha\varphi_{s(\alpha)}$. Skládání morfismů reprezentací je dáno skládáním po složkách, tím je patrně podmínka přirozenosti zachována.

Zdůrazňujeme, že žádné podmínky na lineární zobrazení X_α v definici reprezentace nejsou požadovány. Prostoru X_i budeme někdy říkat *vrcholový prostor*, zobrazení X_α *hranové zobrazení* a φ_i *vrcholové zobrazení* nebo *zobrazení příslušné vrcholu i.*

Definice 2.7. Buďte X,Y reprezentace toulce Q. *Direktní součet $X \oplus Y$* je definován po vrcholech tj. $\forall i \in Q_0, \forall \alpha \in Q_1 : (X \oplus Y)_i = X_i \oplus Y_i, (X \oplus Y)_\alpha = X_\alpha \oplus Y_\alpha$.
Buď X nenulová reprezentace. Nazveme ji *nerozložitelnou*, pokud
$X = X_1 \oplus X_2 \implies (X_1 = 0 \vee X_2 = 0)$.

Definice 2.8. Buď X reprezentace toulce $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ nad K. Pro hranu $\xi\colon k \to l$ a vrchol $i \in Q_0$ definujeme zobrazení $Q(i,\xi)\colon Q(i,k) \to Q(i,l)$ vztahem $Q(i,\xi)\alpha = \xi\alpha$. Naopak $Q(\xi,j)\colon Q(l,j) \to Q(k,j)$ je dáno vztahem
$Q(\xi,j)\alpha = \alpha\xi$.

Definujeme:
$S(i)$ *jednoduchou reprezentaci příslušnou vrcholu i* tak, že $S(i)_j = 0$ pro $i \neq j$, $S(i)_i = K$ a všechny $S(i)_\alpha$ jsou nulové.

Dále pro Q acyklický definujeme.
$P(i)$ *projektivní reprezentaci příslušnou vrcholu* i tak, že pro každé $j \in Q_0$ je $P(i)_j = K^{Q(i,j)}$ (K-lineární prostor s bazí cest z i do j) a pro každé $\alpha \in Q_1$ je $P(i)_\alpha \colon P(i)_{s(\alpha)} \to P(i)_{t(\alpha)}$ je linearizace $Q(i,\alpha)$.

$I(i)$ *injektivní reprezentaci příslušnou vrcholu* i tak, že pro každé $j \in Q_0$ je $I(i)_j = DK^{Q(j,i)}$ (duál K-lineárního prostoru s bazí cest z j do i) a pro každé $\alpha \in Q_1$ je $I(i)_\alpha \colon I(i)_{t(\alpha)} \to I(i)_{s(\alpha)}$ duál linearizace $Q(\alpha,i)$.

Acykličnost v definici $P(i)$ a $I(i)$ je potřeba k tomu, aby dané reprezentace byly konečnědimenzionální. Následují příklady $S(1)$, $P(2)$, $I(1)$ toulce P3P.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & K \\
0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "\mathrm{id}_K"] & \\
0 \arrow[r] & K \\
0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "\mathrm{id}_K"] & \\
K \arrow[r, "\mathrm{id}_K"] & K \\
K \arrow[ur, "\mathrm{id}_K"] &
\end{tikzcd}
$$

Je zřejmé, že třída konečnědimenzionálních reprezentací daného toulce Q nad tělesem K s morfismy reprezentací tvoří kategorii (identityobjektů jsou morfismy s identickými zobrazeními ve všech vrcholech). Budeme ji označovat $\mathrm{rep}_K Q$.
Doposud není jasné, jak definice 2.1 a 2.6 souvisí s teorií představenou v první kapitole. Vždyť vychylující teorie hovoří o kategoriích modulů. Platí však, že kategorie $\mathrm{rep}_K Q$ je ekvivalentní mod-KQ kategorii pravých konečně generovaných modulů nad tzv. *algebrou cest* Q.

Definice 2.9. Buď $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ toulec. Uvažme $V = K^{\mathcal{C}_Q}$ tj. K-vektorový prostor s bazí $\mathcal{C}_Q$ množinou cest v Q. *Algebru cest* KQ toulce Q nad K definujeme na V zavedením bilineárního zobrazení $- * -\colon V^2 \to V$ takového, že pro každé dvě cesty $c,d \in \mathcal{C}_Q$:

$$
\begin{aligned}
c * d &= dc \quad s(d) = t(c) \\
c * d &= 0 \quad\;\; \text{jindy}
\end{aligned}
$$

Z chování na bázi pak rozšíříme $- * -$ na celé V^2 tak, aby to opravdu bylo bilineární zobrazení.

Poznámka 2.10. V 2.9 máme definován okruh $(V, * , + , - ,0)$. Je snadné si rozmyslet, že algebra cest toulce má jednotku vůči násobení. Je jí součet $\sum_{i \in Q_0} \varepsilon_i$ (zde užíváme konečnosti námi uvažovaných toulců). KQ je tedy unitární okruh. Je-li Q acyklický, je zřejmě $|\mathcal{C}_Q| \leq |Q_1|^{|Q_0|} + |Q_0|$, proto je v tomto případě KQ konečnědimenzionální unitární K-algebra.

Věta 2.11. *([ASS06, Věta III.1.6]) Buď Q acyklický toulec. Jest $\mathrm{rep}_K Q \cong$ mod-KQ.*

Důkaz je elementární a sestává z explicitní konstrukce kvaziinverzních ekvivalencí. Víme, že kategorie konečně generovaných modulů nad okruhem je abelovská. Z výše uvedené ekvivalence plyne, že $\mathrm{rep}_K Q$ je také abelovská. Pomocí ní můžeme navíc v $\mathrm{rep}_K Q$ správně definovat kategoriálně motivované koncepty.

Lemma 2.12. *Buď Q toulec a X,Y jeho reprezentace.*

i. *Morfismus $\iota : X \to Y$ má jádro. Platí $(\ker\iota)_i = \ker\iota_i$, $(\ker\iota)_\alpha$ je příslušná restrikce X_α a kanonický morfismus sestává z inkluzí $\ker\iota_i \hookrightarrow X_i$.*
ι to monomorfismus právě tehdy, když pro každé $i \in Q_0 : \iota_i$ je prosté.

ii. *Morfismus $\pi : X \to Y$ má kojádro. Platí $(\operatorname{coker}\pi)_i = \operatorname{coker}\pi_i$, $(\operatorname{coker}\pi)_\alpha$ je příslušná projekce Y_α (ta je dobře definovaná díky podmínce přirozenosti) a kanonický morfismus sestává z projekcí $Y_i \twoheadrightarrow \operatorname{coker}\pi_i$.*
π to epimorfismus právě tehdy, když pro každé $i \in Q_0 : \pi_i$ je surjektivní.

iii. *$X \prod Y \cong X \coprod Y \cong X \oplus Y$ v $rep_K Q$ a konečně generované nerozložitelné KQ-moduly odpovídají nerozložitelným reprezentacím Q*

Důkaz. Snadno plyne z konstrukcí v nezmíněném důkazu věty 2.11, jelikož obdobná fakta platí v mod-KQ. ∎

Na samém počátku této práce jsme zmínili, že všechny konečně generované moduly nad konečnědimenzionální K-algebrou A jsou konečné délky. Pro takové moduly existuje jednoznačný rozklad na nerozložitelné sčítance tj. pro libovolný $M \in$ mod-A existují $(X_i)_{i=1}^n$ nerozložitelné konečně generované A-moduly, že $M = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ a tento rozklad je v nějakém smyslu jednoznačný. Nerozložitelné konečně generované A-moduly pak můžeme chápat jako jakési cihly kategorie mod-A, z nichž jsou všechny ostatní moduly vystaveny. Pochopením nerozložitelných modulů a morfismů mezi nimi pak obdržíme úplný popis mod-A. Zformulujme nyní výše uvedenou myšlenku.

Věta 2.13. *(Krull–Remak–Schmidt)([ASS06, Věta I.4.10])*
Buď A konečnědimenzionální K-algebra.

i. *Pak každý modul $M \in$ mod-A má rozklad $M \cong \bigoplus_{i=1}^n X_i$, kde všechny X_i jsou nerozložitelné.*

ii. *Jsou-li $M \cong \bigoplus_{i=1}^n X_i \cong \bigoplus_{i=1}^m Y_i$ dva rozklady jako v (i.), pak $m = n$ a existuje π permutace $\{1, \cdots ,n\}$, že $\forall i \in \{1, \cdots ,n\} : X_i \cong Y_{\pi(i)}$.*

Důkaz lze nalézt v uvedené literatuře, jedná se ovšem o klasický výsledek z úvodního kurzu teorie reprezentací. Spolu s 2.11 dává vědět, že jakákoli reprezentace acyklického toulce Q se rozkládá na nerozložitelné reprezentace.

Prozkoumejme nyní podrobněji projektivní a injektivní reprezentaci příslušnou vrcholu.

Lemma 2.14. *([Kra10, Lemma 1.7.1.]) Buď X reprezentace acyklického toulce Q*
a i vrchol Q.

i. *Jakékoli lineární zobrazení $f\colon X_i \to I(i)_i$ lze jednoznačně rozšířit na morfismus reprezentací $\varphi\colon X \to I(i)$ takového , že $\varphi_i = f$.*

ii. *Jakékoli lineární zobrazení $g\colon P(i)_i \to X_i$ lze jednoznačně rozšířit na morfismus reprezentací $\psi\colon P(i) \to X$ takového , že $\psi_i = g$.*

Důkaz. Dokažme nejdříve tvrzení **ii.** Z acykličnosti Q plyne, že $P(i)_i = K^{Q(i,i)} = K$ je generovaný prázdnou cestou ε_i. Vezměme zobrazení $g\colon P(i)_i \to X_i$. To je dáno hodnotou $x = g(\varepsilon_i)$. Nyní definujeme $\psi\colon P(i) \to X$ ve vrcholu j a bázové cestě $c = (\alpha_l)_{l=1}^n \colon i \to j$ jako $\psi_j(c) = X_c(x)$, kde $X_c = X_{\alpha_n} \cdots X_{\alpha_1}$. To je možné díky lineární nezávislosti cest $i \to j$ v $P(i)_j$. Tak zřejmě definujeme každé ψ_j. Podmínka přirozenosti je zřejmá, neboť pro každé $\alpha \in Q_1$ a $\sum_{l=1}^n k_l c_l \in P_{s(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}\psi_{t(\alpha)}P_\alpha(\sum_{l=1}^n k_l c_l) = \psi_{t(\alpha)}(\sum_{l=1}^n k_l \alpha c_l) = \sum_{l=1}^n k_l \psi_{t(\alpha)}(\alpha c_l) = \sum_{l=1}^n k_l X_{\alpha c_l}(x) = \\ = \sum_{l=1}^n k_l X_\alpha X_{c_l}(x) = \sum_{l=1}^n k_l X_\alpha \psi_{s(\alpha)}(c_l) = X_\alpha \psi_{s(\alpha)}(\sum_{l=1}^n k_l c_l)\end{aligned}$$

Nyní dokážeme **i.** Opět z acykličnosti $I(i)_i \cong K$. Zobrazení f je tedy nějaká forma na X_i. Prvku $x \in X_i$ přiřadí lineární formu $f(x) : K^{Q(i,i)} \to K$. Tu můžeme definovat její hodnotou na ε_i. Definujeme zobrazení $\varphi_j\colon X_j \to I(i)_j$. Buď $x \in X_j$, formu $\varphi_j(x) : K^{Q(j,i)} \to K$ definujeme na bázové cestě $c\colon j \to i$ jako $\varphi_j(x)(c) = f(X_c(x))(\varepsilon_i)$. Takto jsme definovali kolekci lineárních zobrazení $(\varphi_j)_{j\in Q_0}$. Ověřme podmínku přirozenosti pro $\alpha \in Q_1, x \in X_{s(\alpha)}$ na bázové cestě $c\colon t(\alpha) \to i$

$$\begin{aligned}\varphi_{t(\alpha)}X_\alpha(x)(c) = f(X_c X_\alpha(x))(\varepsilon_i) = f(X_{c\alpha}(x))(\varepsilon_i) = \varphi_{s(\alpha)}(x)(c\alpha) = \\ = \varphi_{s(\alpha)}(x)(Q(\alpha,i)(c)) = I(i)_\alpha \varphi_{s(\alpha)}(x)(c)\end{aligned}$$

Naše konstrukce zřejmě popisuje jedinou možnou volbu, která splňuje podmínku přirozenosti. Ovšem v obecném případě (chtěli-li bychom rozšiřovat zobrazení mezi dvěma libovolnými reprezentacemi), nechává některá vrcholová zobrazení nedefinována (či částečně definovována). Ovšem z definic vrcholových prostorů a hranových zobrazení pro $P(i)$ a $I(i)$ plyne, že ve výše zmíněných případech dostáváme totální morfismus. ■

Důsledek 2.15. *Buď Q acyklický toulec a i libovolný vrchol. Reprezentace $P(i)$ a $I(i)$ jsou nerozložitelné.*

Důkaz. Buď $P(i) = X \oplus Y$ rozklad na direktní sčítance. Pak speciálně musí být $P(i)_i = X_i \oplus Y_i$. Jelikož $\dim_K P(i)_i = 1$, bez újmy na obecnosti ať $\dim_k X_i = 0$. Buď $\pi_X\colon P(i) \to X$ kanonická projekce. Musí mít nulovou i-tou složku, z jednoznačnosti v předchozím lemmatu je tedy nulová, neboli $X = 0$. ■

Následující dva důsledky nám pomohou provozovat homologickou algebru v $\mathrm{rep}_K Q$.

Důsledek 2.16. *Buď Q acyklický toulec a i jeho vrchol.*

i. $I(i)$ je injektivní objekt a $P(i)$ projektivní objekt v $\mathrm{rep}_K Q$.

ii. Buď X libovolná reprezentace Q. Existují $(n_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ a monomorfismus $X \to \bigoplus_{i\in Q_0} I(i)^{n_i}$.

Důkaz. **i.** Buďte $X,Y \in \mathrm{rep}_K Q$ reprezentace a $\iota\colon X \to Y$ monomorfismus. Dále buď $\varphi\colon X \to I(i)$ libovolné. Poté ι_i je prosté lineární zobrazení a najdeme $\psi_i\colon Y_i \to I(i)_i$ takové, že $\psi_i\iota_i = \varphi_i$ (to lze ve $\mathrm{vec}\, K$ udělat vždy). Z předchozího lemmatu můžeme toto zobrazení rozšířit na morfismus $\psi\colon Y \to I(i)$. Složenina $\psi\iota\colon X \to I(i)$ má stejnou i-tou složku jako φ, z jednoznačnosti v předchozím lemmatu tedy $\varphi = \psi\iota$, což bylo dokázat.

Stejný argument prokazuje projektivitu $P(i)$.
ii. Prostor X_i je konečnědimenzionální (položme $n_i = \dim_K X_i$), $I(i)_i$ je jednodimenzionální. Můžeme definovat konečně mnoho lineárních forem
$f_k\colon X_i \to I(i)_i$ $k \in \{1,\cdots,n_i\}$, že průnik jejich jader bude nulový. Díky předchozímu lemmatu každou tuto formu rozšíříme na morfismus $\varphi^i_k\colon X \to I(i)$. Poté diagonální morfismus $\varphi^i\colon X \to I(i)^{n_i}$ má prostou i-tou složku. Pak ovšem $\varphi\colon X \to \bigoplus_{i\in Q_0} I(i)^{n_i}$ diagonální morfismus těch diagonálních morfismů má prostou každou složku, dle 2.12 je to tedy monomorfismus v $\mathrm{rep}_K Q$. ■

Hlavní důsledek ovšem vypovídá o globální dimenzi (ve smyslu H.4) algeber cest.

Věta 2.17. *Buď Q acyklický toulec. Pak* $\mathrm{gl}\, KQ \leq 1$.

Důkaz. Auslander [Aus55, Tvrzení 7] dokázal, že pro okruh R, v němž existuje nilpotentní ideál I takový, že R/I je totálně rozložitelný, platí rovnost
$\mathrm{gl}\, R = \sup_{S\in\mathcal{S}}(\mathrm{pd}\, S)$, kde $\mathcal{S}$ označuje množinu jednoduchých pravých R-modulů. Konečnědimenzionální K-algebry jsou artinovské, proto z Hopkins-Lewitzkého věty plyne, že Jacobsonův radikál je nilpotentní a faktor podle něj je totálně rozložitelný. Prozkoumejme tedy jednoduché reprezentace acyklického toulce Q
(tj. reprezentace mající pouze triviální podreprezentace).
Tvrdíme, že $\{S(i) : i \in Q_0\}$ je úplný výčet vzájemně neizomorfiních jednoduchých reprezentací. Buď X jednoduchá reprezentace Q. Označme $Q' = (Q'_0, Q'_1, s|_{Q'_1}, t|_{Q'_1})$, kde Q'_0 je množina vrcholů $i \in Q_0$, že $X_i \neq 0$. Dále Q'_1 buď množina těch hran z Q_1, které začínají i končí v Q'_0. Je zřejmé, že byl-li Q acyklický, je i Q' acyklický. Z lemmatu 2.5 víme, že existuje stok v Q'_0, označme ho k. Nyní libovolná kolekce zobrazení $(\varphi_j\colon S(k)_j \to X_j)_{j\in Q_0}$ je morfismus reprezentací. Z nenulovosti X_k existuje nenulový morfismus $S(k) \to X$, proto $X \cong S(k)$.
Nakonec prokážeme, že pro každé $i \in Q_0$ je $\mathrm{pd}_{KQ}\, S(i) \leq 1$. Má totiž rezolventu

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ s(\alpha)=i}} P(t(\alpha)) \longrightarrow P(i) \longrightarrow S(i) \longrightarrow 0$$

Zde pro hranu $\alpha\colon i \to t(\alpha)$ je morfismus $\alpha^*\colon P(t(\alpha)) \to P(i)$ definován po složkách jako $\alpha^*_j = kQ[\alpha,j]$. To je zjevně monomorfismus. Příslušné kodiagonální zobrazení je v každé složce krom i na. Exaktnost je potom zřejmá. To dává závěr. ■

Předchozí věta spolu s 2.16 říká, že pro každý konečně generovaný KQ-modul existuje projektivní a injektivní rezolventa délky 1 sestávající z konečně generovaných modulů. Pro projektivní případ je to jasné, můžeme vzít konečně generovaný volný modul a jádro příslušného epimorfismu už bude konečně generovaný projektivní KQ-modul (plyne ze Schanuelova lemmatu H.7 a K-vektorové struktury všech KQ-modulů).
V případě modulů nad obecným okruhem nelze zaručit, že pro každý konečně generovaný modul M existuje konečně generovaný injektivní modul I a monomorfimus $\mu\colon M \to I$ (vzpomeňme kupříkladu $\mathbb{Z}$, nad kterým ani žádné konečně generované injektivní moduly neexistují!). Lemma 2.16 říká, že taková situace nad algebrami cest acyklických toulců nenastává, konečně generovaných injektivních modulů je dostatek. Existence injektivní rezolventy minimální délky je poté zaručena stejně jako výše, tentokrát s pomocí duálního Schanuelova lemmatu.

2.2 Reflexní funktory

V tomto oddíle zevedeme reflexní funktory a odvodíme o nich několik výsledků. Nejdříve však definujme několik pomocných pojmů.

Definice 2.18. Buď $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ toulec a i jeho vrchol. Toulec $\sigma_i Q$ *reflektovaný podle* i definujeme jako čtveřici $(Q_0,Q_1,\sigma_i s,\sigma_i t)$, kde pro každé $\alpha \in Q_1$

$$\sigma_i s(\alpha) = \begin{cases} s(\alpha) & i \notin \{s(\alpha),t(\alpha)\} \\ t(\alpha) & i \in \{s(\alpha),t(\alpha)\} \end{cases} \quad \sigma_i t(\alpha) = \begin{cases} t(\alpha) & i \notin \{s(\alpha),t(\alpha)\} \\ s(\alpha) & i \in \{s(\alpha),t(\alpha)\} \end{cases}$$

Buď i **stok** a X reprezentace Q, pak definujeme reprezentaci $\tilde{X}$ toulce $\sigma_i Q$ následovně:

$$\tilde{X}_j = \begin{cases} X_j & i \neq j \\ \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ i = t(\alpha)}} X_{s(\alpha)} & i = j \end{cases} \quad \tilde{X}_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & i \neq t(\alpha) \\ \pi_j & i = t(\alpha) \wedge j = s(\alpha) \end{cases}$$

Buď i **zdroj** a X reprezentace Q, pak definujeme reprezentaci $\tilde{X}$ toulce $\sigma_i Q$ následovně (se stejným značením, neboť volba konstrukce je vždy zřejmá z kontextu, neizolovaný vrchol nemůže být zároveň zdroj a stok):

$$\tilde{X}_j = \begin{cases} X_j & i \neq j \\ \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ i = s(\alpha)}} X_{t(\alpha)} & i = j \end{cases} \quad \tilde{X}_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & i \neq s(\alpha) \\ \iota_j & i = s(\alpha) \wedge j = t(\alpha) \end{cases}$$

Výše π_j,ι_j označují kanonickou projekci a injekci na j-tou složku. Dále pro libovolné i definujeme $S(i)^X$ reprezentaci $\sigma_i Q$, takovou, že:

$$S(i)^X_j = \begin{cases} X_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad S(i)^X_\alpha = 0 \quad \alpha \in Q_1$$

Níže ilustrujeme po řadě reprezentaci X a příslušná $\tilde{X},S(i)^X$ pro vrchol 1.

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
X_3 \arrow[r, "\beta"] & X_1 \\
X_4 \arrow[ur, "\gamma"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_2 & \\
X_3 & X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 \arrow[ul, "\pi_2"'] \arrow[l, "\pi_3"] \arrow[dl, "\pi_4"] \\
X_4 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & \\
0 & X_1 \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] \\
0 &
\end{tikzcd}$$

Všimněme si ještě, že reflektujeme-li podle stoku nebo zdroje, zachováváme acykličnost.

Nyní zavedeme nejdůležitější definici této kapitoly, *reflexní funktory* S_i^+ a S_i^-.

Definice 2.19.
Buď i **stok toulce** Q. Definujeme $S_i^+ : \mathrm{rep}Q \to \mathrm{rep}\sigma_i Q$ následovně:
Na objektech pro $X = ((X_i)_{i \in Q_O},(X_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$ je $(S_i^+ X)_j = X_j$ pro $j \neq i$ a $(S_i^+ X)_\alpha = X_\alpha$ pro každé α nekončící v i. Uvažme kodiagonální zobrazení:

$$\xi^+\colon \bigoplus_{\alpha\in Q_1:t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \to X_i$$

Pak definujeme $(S_i^+X)_i = \ker\xi^+$ a pro $\beta \in Q_1$ že $t(\beta) = i$ jako $(S_i^+X)_\beta = \pi_{s(\beta)}\check{\xi}$, kde $\pi_{s(\beta)}$ je kanonická projekce (součet je konečný, proto izomorfní součinu) $\bigoplus_{\alpha\in Q_1:t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \to X_{s(\beta)}$ a $\check{\xi}$ je kanonické vnoření $\ker\xi^+ \to \bigoplus_{\alpha\in Q_1:t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)}$.
Nyní buď $\varphi\colon X \to Y$ morfismus reprezentací. Potom $S_i^+\varphi_j = \varphi_j$ pro $j \neq i$ a $S_i^+\varphi_i$ je restrikce součtového zobrazení na jádra (dobře definované díky podmínkce přirozenosti pro φ), tj.:

$$\begin{tikzcd}
S_i^+X_i \arrow[r, "S_i^+\varphi_i"] \arrow[d] & S_i^+Y_i \arrow[d] \\
\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \arrow[r, "\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ t(\alpha)=i}} \varphi_{s(\alpha)}"] & \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ t(\alpha)=i}} Y_{s(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

Buď i zdroj toulce Q. Definujeme S_i^- : rep$Q \to$ rep$\sigma_i Q$ následovně:
Na objektech pro $X = ((X_i)_{i\in Q_O},(X_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ je $(S_i^-X)_j = X_j$ pro $j \neq i$ a $(S_i^-X)_\alpha = X_\alpha$ pro každé α nezačínající v i. Uvažme diagonální zobrazení:

$$\xi^-\colon X_i \to \bigoplus_{\alpha\in Q_1:s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)}$$

Pak definujeme $(S_i^-X)_i = \operatorname{coker}\xi^-$ a pro $\beta \in Q_1$ že $t(\beta) = i$ jako $(S_i^-X)_\beta = \hat{\xi}\iota_{t(\beta)}$, kde $\iota_{t(\beta)}$ je kanonická inkluze do $\bigoplus_{\alpha\in Q_1:s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)}$ a $\hat{\xi}$ je projekce $\bigoplus_{\alpha\in Q_1:s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)} \to \operatorname{coker}\xi^-$.

Nyní buď $\varphi\colon X \to Y$ morfismus reprezentací. Potom $S_i^-\varphi_j = \varphi_j$ pro $j \neq i$. Zobrazení $S_i^-\varphi_i$ je projekce součtového zobrazení na kojádra (opět dobře definované díky podmínkce přirozenosti pro φ), tj.:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \arrow[r, "\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ s(\alpha)=i}} \varphi_{t(\alpha)}"] \arrow[d] & \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ s(\alpha)=i}} Y_{t(\alpha)} \arrow[d] \\
S_i^-X_i \arrow[r, "S_i^-\varphi_i"] & S_i^-Y_i
\end{tikzcd}$$

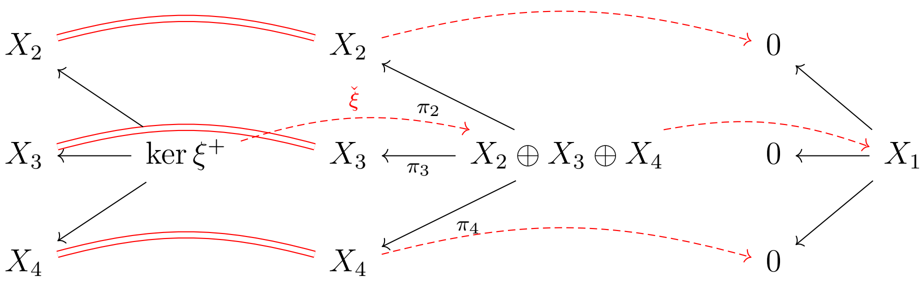
Buď nyní i znovu stok. Definujeme přirozenou transformaci $\iota^i\colon S_i^-S_i^+ \to \mathrm{id}_{\mathrm{rep}_K Q}$ na reprezentaci X:

$$(\iota^iX)_j = \mathrm{id}_{X_j}\ \ j \neq i \qquad (\iota^iX)_i\colon\ \operatorname{coker}\check{\xi} \to X_i$$

Pro i zdroj naopak definujeme přirozenou transformaci $\pi^i\colon \mathrm{id}_{\mathrm{rep}_K Q} \to S_i^+S_i^-$ na reprezentaci X:

$$(\pi^iX)_j = \mathrm{id}_{X_j}\ \ j \neq i \qquad (\pi^iX)_i\colon X_i \to \ker\hat{\xi}$$

Poznámka 2.20. Konstrukci reflexních funktorů můžeme popsat pomocí definic 2.18. Buď i stok. Zřejmě můžeme definovat zobrazení $\xi_X\colon \tilde{X} \to S(i)^X$ nulové na vrcholech odlišných od i a jako ξ^+ z definice 2.19 na i. Potom $S_i^+X = \ker\xi_X$. Duálně pro i zdroj je $S_i^-X = \operatorname{coker}\xi_X$ (s patřičnou obměnou v definici ξ_X). Ilustrujeme pro P3P a stok 1.



Věta 2.21. *([Kra10, Lemma 3.3.2]) Buď Q toulec.*

i. Buď i stok. Přiřazení $S_i^+ \colon rep_K Q \to rep_K \sigma_i Q$ je K-additivní funktor. Pro každou reprezentaci X toulce Q máme $X \cong S_i^- S_i^+ X \oplus \operatorname{coker} \iota^i X$.

ii. Buď i zdroj. Přiřazení $S_i^- \colon rep_K Q \to rep_K \sigma_i Q$ je K-additivní funktor. Pro každou reprezentaci X toulce Q máme $X \cong S_i^+ S_i^- X \oplus \ker \pi^i X$.

Důkaz. Dokažme **i.**, **ii.** se dokáže analogicky
Přiřazení S_i^+ zřejmě zachovává identitu a skládání. Navíc komutuje se sčítáním morfismů reprezentací a skalárním násobením (posložkách). Je to tedy K-additivní funktor. Proto zachovává i direktní součty.
Označme $\varrho \colon X \to \operatorname{coker} \iota^i X$ kanonickou projekci. Ta má sekci $\varrho' : \operatorname{coker} \iota^i X \to X$ definovanou jako $\varrho'_j = 0$ pro $i \neq j$ a ϱ'_i jako sekci příslušnou ϱ_i (ve vec K je každý epimorfismus retrakce). Je zřejmé, že $\operatorname{coker} \iota^i X$ má jediný nenulový prostor ve vrcholu i. Jelikož i je stok, ϱ' je zřejmě morfismus reprezentací. Pak $\varrho\varrho' = \mathrm{id}_{\operatorname{coker} \iota^i X}$, proto $\operatorname{im} \varrho'_i \cap \ker \varrho_i = 0$. Máme ovšem $\sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \colon \\ t(\alpha) = i}} \operatorname{im} X_\alpha \subseteq \ker \varrho_i$. Porovnáním dimenzí je proto $X_i = \operatorname{im} \varrho'_i \oplus \operatorname{im} \iota^i_i X$ a navíc $\operatorname{im} \varrho' \leq_\oplus X$ je direktní sčítanec izomorfní součtu jednoduchých $S(i)$. Z toho plyne závěr. ∎

Pohled z poznámky 2.20 nám nyní dovolí dokázat nesmírně užitečné lemma.

Lemma 2.22. *([Kra10, Lemma 7.4.1]) Buď $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ krátká exaktní posloupnost v $rep_K Q$.*

i. Buď i stok Q. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že posloupnost $0 \to S_i^+ X \to S_i^+ Y \to S_i^+ Z \to S(i)^n \to 0$ je exaktní v $rep_K \sigma_i Q$.

ii. Buď i zdroj Q. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že posloupnost $0 \to S(i)^n \to S_i^- X \to S_i^- Y \to S_i^- Z \to 0$ je exaktní v $rep_K \sigma_i Q$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení **i.**, **ii.** se dokáže duálně.
Uvědomme si, že exaktnost posloupnosti morfismů reprezentací je ekvivaletní exaktnosti zobrazení v každém vrcholu (plyne z 2.12). Proto zřejmě původní exaktní posloupnost dává exaktnost řádků v diagramu (uvažujeme zřejmé horizontální morfismy):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_X"] & \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_Y"] & \tilde{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\xi_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S(i)^X \arrow[r] & S(i)^Y \arrow[r] & S(i)^Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nyní z hadího lemmatu K.8 dostáváme posloupnost

$$0 \to S_i^+ X \to S_i^+ Y \to S_i^+ Z \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \xi_X \to \operatorname{coker} \xi_Y \to \operatorname{coker} \xi_Z \to 0$$

Ona kojádra jsou ovšem pouze součty $S(i)$ jednoduché reprezentace. Každá jejich podreprezentace je zřejmě opět izomorfní nějakému součtu té jednoduché reprezentace. Vezměme tedy $0 \to S_i^+ X \to S_i^+ Y \to S_i^+ Z \xrightarrow{\delta} \operatorname{im} \delta \to 0$ Tím je tvrzení dokázáno. ■

Jak se reflexní funktory chovají na nerozložitelných reprezentacích? Nejdříve si dokažme užitelné lemma, nutné kritérium pro existenci jistého jednoduchého sčítance.

Lemma 2.23.

i. *Buď Q toulec, i stok a $X \in rep_K Q$. Pak $S(i) \leq_\oplus X$ právě tehdy, když kodiagonální zobrazení $\xi^+ : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \to X_i$ není surjektivní.*

ii. *Buď Q toulec, i zdroj a $X \in rep_K Q$. Pak $S(i) \leq_\oplus X$ právě tehdy, když diagonální zobrazení $\xi^- : X_i \to \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1: \\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)}$ není prosté.*

Důkaz. Dokážeme **i.**, **ii.** se dokáže analogicky.
$\Longrightarrow$ Monomorfismus posílající $S(i)$ na příslušný direktní sčítanec je sekce, proto existuje epimorfismus $\varrho \colon X \to S(i)$. Zobrazení ϱ_j jsou nutně nulová pro $j \neq i$. Z podmínky přirozenosti plyne, že $\varrho_i X_\alpha = 0$ pro každé $\alpha \in Q_1$, že $i = t(\alpha)$. Proto $\operatorname{im} X_\alpha \subseteq \ker \varrho_i$. Nutně tedy $\operatorname{im} \xi^+ = \sum_{\alpha \in Q_1 : t(\alpha)=i} \operatorname{im} X_\alpha \leq \ker \varrho_i$. Zobrazení ϱ_i je však nenulové, proto $\operatorname{im} \xi^+ \leq \ker \varrho_i < X_i$.
$\Longleftarrow$. Máme $\operatorname{im} \xi^+ < X_i$. Zvolme podprostor $V \geq \operatorname{im} \xi^+$ prostoru X_i s kodimenzí 1 a C jeho doplněk. Nyní stačí definovat morfismus $\iota \colon S(i) \to X$ nulové na vrcholech různých od i a jako identifikaci K s podprostorem $C \leq X_i$ na vrcholu i. Poté je ι morfismus a navíc je to sekce, jak prokazuje ϱ, nulový na vrcholech různých od i a v i definovaný jako projekce na $C \cong K$. ϱ je skutečně morfismus, neboť $\forall \alpha \in Q_1 : \varrho_{t(\alpha)} X_\alpha = 0$.
Argument pro i zdroj je totožný, pracujeme ovšem s $\ker \xi^-$. ■

Lemma 2.24. *([Kra10, 3.3.3])*

a. *Buď X nerozložitelná reprezentace Q a i stok Q. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

  i. $X \ncong S(i)$

  ii. $S_i^+ X$ *je nerozložitelná reprezentace* $\sigma_i Q$

  iii. $S_i^- S_i^+ X \cong X$

b. *Buď X nerozložitelná reprezentace Q a i zdroj Q. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

  i. $X \ncong S(i)$

  ii. $S_i^- X$ *je nerozložitelná reprezentace* $\sigma_i Q$

  iii. $S_i^+ S_i^- X \cong X$

Důkaz. Dokážeme tvrzení **a.**, **b.** se dokáže analogicky.
i. $\implies$ **iii.** Obecně $X \cong S_i^- S_i^+ X \oplus \operatorname{coker} \iota^i$. Z nerozložitelnosti plyne buď **iii.** nebo $X \cong \operatorname{coker} \iota^i$. To je ovšem reprezentace s jediným nenulovým prostorem ve vrcholu i. Pak ovšem $X \cong S(i)$, spor s předpokladem.
ii. $\implies$ **i.** Jasné, neboť $S_i^+ S(i) = 0$ (ve vrcholech různých od i jsou nuly a v i podprostor nuly).
iii. $\implies$ **ii.** Ať $S_i^+ X$ není nerozložitelná. Potom je buď nulová a pak $X = S_i^- S_i^+ X = 0$ je ve sporu s nerozložitelností X nebo můžeme psát $S_i^+ X \cong Y \oplus Z$ pro dvě nenulové reprezentace Y,Z. Jsou-li obě $S_i^- Y, S_i^- Z$ nenulové, máme spor s nerozložitelností X. Bez újmy na obecnosti buď $S_i^- Y = 0$. Jelikož reflexní funktory S_i^+,S_i^- zachovávají K-dimenze prostorů příslušných vrcholům odlišných od i, musí být $\dim_K Y_j = 0$ pro $j \neq i$. Pak ovšem $Y \cong S(i)^n$. Z definice S_i^+ je zřejmé, že reprezentace $S_i^+ X$ nemůže mít direktní sčítanec izomorfní $S(i)$, neboť hranová zobrazení vedoucí z $(S_i^+ X)_i$ jsou restrikce kanonických projekcí, průnik jejich jader je tedy nulový, což z užitím lemmatu 2.23 dává spor. ■

Díky tvrzení 2.24 *iii.* tedy S_i^+,S_i^- dávají inverzní bijekce mezi nerozložitelnými reprezentacemi Q a $\sigma_i Q$, až na jednoduchou reprezentaci $S(i)$, kterou nulují.

Funtory S_i^+,S_i^- spolu však souvisí ještě hlouběji.

Věta 2.25. *Buď Q toulec a i stok. Funktor $S_i^+ \colon rep_K Q \to rep_K \sigma_i Q$ je pravý adjunkt k $S_i^- \colon rep_K \sigma_i Q \to rep_K Q$.*

Důkaz. Buďte $X \in \operatorname{rep}_K Q$, $Y \in \operatorname{rep}_K \sigma_i Q$ a $\varphi \in \operatorname{Hom}_{KQ}(S_i^- Y, X)$. Definujeme $\psi \colon Y \to S_i^+ X$ jako $\psi_j = \varphi_j$ pro $i \neq j$ a ψ_i jako morfismus vzniklý z diagramu:

$$\begin{tikzcd}
 & Y_i \arrow[r, "\xi^-"] \arrow[d, dashed, "\psi_i"] & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \sigma_i s(\alpha)=i}} Y_{\sigma_i t(\alpha)} \arrow[r, "\hat{\xi}"] \arrow[d, "\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \varphi_{s(\alpha)}"] & (S_i^- Y)_i \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (S_i^+ X)_i \arrow[r, "\check{\xi}"] & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \arrow[r, "\xi^+"] & X_i &
\end{tikzcd}$$

Vezměme $y \in Y_i$. Definujeme $\psi_i(y) = \check{\xi}^{-1} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \varphi_{t(\alpha)} \xi^-(y)$. Inverz $\check{\xi}$ je dobře definován, protože je $\check{\xi}$ prosté. Navíc $\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \varphi_{t(\alpha)} \xi^-(y) \in \operatorname{im} \check{\xi}$, což plyne bezprostředně z exaktnosti obou řádků a komutativity pravého čtverce. Komutativita levého čtverce je evidentní z konstrukce ψ a navíc přesně prokazuje podmínku přirozenosti pro ψ (jelikož na všech ostatních složkách je rovno φ).
Obráceně pro $\psi \in \operatorname{Hom}_{K\sigma_i Q}(Y, S_i^+ X)$ definujeme morfismus $\varphi \in \operatorname{Hom}_{KQ}(S_i^- Y, X)$ jako $\varphi_j = \psi_j$ pro $i \neq j$ a φ_i jako morfismus vzniklý z diagramu:

$$\begin{tikzcd}
 & Y_i \arrow[r] \arrow[d, "\psi_i"] & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \sigma_i s(\alpha)=i}} Y_{\sigma_i t(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \varphi_{s(\alpha)}"] & (S_i^- Y)_i \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (S_i^+ X)_i \arrow[r] & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \arrow[r] & X_i &
\end{tikzcd}$$

Ověření existence a podmínky přirozenosti je stejné jako výše. Vidíme, že uvažovaný diagram je pořád stejný. V obou situacích je konstruovaný morfismus dán jednoznačně, neboť musí dávat jednu složeninu zprava s monomorfismech (resp. zleva s epimorfismem). Proto jsou to inverzní konstrukce a dávají izomorfismus $\mathrm{Hom}_{KQ}(S_i^- Y,X) \cong \mathrm{Hom}_{K\sigma_i Q}(Y,S_i^+ X)$, který prokazuje kýženou adjunkci. ∎

Nakonec zaveďme ještě značení. Označme $\operatorname{ind}\operatorname{rep}_K Q$ množinu tříd nerozložitelných reprezentací acyklického toulce Q až na izomorfismus . Buď i stok Q. Zavedeme následující značení:

V kategorii $\operatorname{rep}_K Q$:	V kategorii $\operatorname{rep}_K \sigma_i Q$:
$\mathcal{T} = \operatorname{ind}\operatorname{rep}_K Q \setminus \{S(i)\}$	$\mathcal{X} = \{S(i)\}$
$\mathcal{F} = \{S(i)\}$	$\mathcal{Y} = \operatorname{ind}\operatorname{rep}_K \sigma_i Q \setminus \{S(i)\}$

Věta 2.25 má několik klíčových důsledků. První z nich si nyní vyslovíme.

Důsledek 2.26. *Buď Q toulec a i stok. Dále buďte $X,Y \in \operatorname{add}\mathcal{T}$. Pak S_i^+ indukuje izomorfismus* $\mathrm{Hom}_{KQ}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{K\sigma_i Q}(S_i^+ X,S_i^+ Y)$.

Důkaz. Díky additivitě stačí tvrzení dokázat pro $X,Y \in \mathcal{T}$. Užitím lemmat 2.25 a 2.24*(iii.)* dostáváme:

$$\mathrm{Hom}_{K\sigma_i Q}(S_i^+ X,S_i^+ Y) \cong \mathrm{Hom}_{KQ}(S_i^- S_i^+ X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{KQ}(X,Y)$$

Jelikož hom-sety v $\operatorname{rep}_K Q$ jsou konečnědimenzionální K-vektorové prostory a S_i^+ je věrný, z rovnosti dimenzí je také úplný, což bylo dokázat.
Dokážme tedy věrnost S_i^+ v dané situaci ($X,Y \in \operatorname{add}\mathcal{T}$). Z aditivity stačí uvažovat morfismus $\varphi\colon X \to Y$ takový, že $S_i^+\varphi = 0$. Z definice reflexních funktorů zřejmě musí být pro každé $j \neq i : \varphi_j = 0$. Dokážeme, že $\varphi_i = 0$. Z podmínky přirozenosti a předpokladu, že i je stok, musí být pro každé α končící v i $\operatorname{im} X_\alpha \subseteq \ker \varphi_i$. Proto $V = \sum_{\alpha \in Q_1, t(\alpha)=i} \operatorname{im} X_\alpha \subseteq \ker\varphi_i$. Je-li φ_i nenulové, má V nenulový doplněk v X_i. Pak ovšem díky 2.23 $S(i) \leq_\oplus X$, což je spor s $X \in \operatorname{add}\mathcal{T}$. ∎

2.3 Brennerové–Butlerova korespondence

Nyní můžeme proslovit větu, ke které celou dobu směřujeme a která, jak už bylo řečeno, vedla ke vzniku vychylující teorie.

Věta 2.27. *Buď Q acyklický toulec a i stok v Q.*
Poté reprezentace $T = S_i^-(K\sigma_i Q)$ je vychylující a navíc:

i.
- $\mathcal{T}(T) = \operatorname{add}(\mathcal{T})$
- $\mathcal{F}(T) = \operatorname{add}(\mathcal{Y})$
- $\mathcal{X}(T) = \operatorname{add}(\mathcal{X})$
- $\mathcal{Y}(T) = \operatorname{add}(\mathcal{Y})$

ii. $\mathrm{Hom}_{KQ}(T,-) \cong S_i^+$ *jako funktory*

Nejdříve si vůbec rozmysleme, že třídy $\operatorname{add}\mathcal{T}, \operatorname{add}\mathcal{F}$ a $\operatorname{add}\mathcal{X}, \operatorname{add}\mathcal{Y}$ tvoří torzní dvojice.

Lemma 2.28.

i. Buď X nerozložitelná reprezentace Q a i stok Q. Pak $\operatorname{Hom}_{KQ}(X,S(i)) \neq 0$ právě tehdy, když $X \cong S(i)$.

ii. Buď Y nerozložitelná reprezentace Q a i zdroj Q. Pak $\operatorname{Hom}_{KQ}(S(i),Y) \neq 0$ právě tehdy, když $Y \cong S(i)$.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení **i.**, **ii.** se dokáže analogicky.
Implikace doleva je triviální. Buď $\varphi \in \operatorname{Hom}_{KQ}(X,S(i))$. Z podmínky přirozenosti a definice $S(i)$ máme pro každé $\alpha \in Q_1$ končící v i $\varphi_i X_\alpha = 0$. Proto $\sum_{\substack{\alpha\in Q_1:\\ t(\alpha)=i}} \operatorname{im} X_\alpha \subseteq \ker \varphi_i$. Lemma 2.23 dává závěr, neboť nerozložitelná reprezentace může mít za nenulový direktní sčítanec pouze sama sebe. ■

Díky komutativitě $\operatorname{Hom}(-,-)$ s konečnými součty v obou složkách máme prokázánu podmínku D1 pro dvojice $(\operatorname{add}\mathcal{T}, \operatorname{add}\mathcal{F})$ a $(\operatorname{add}\mathcal{X}, \operatorname{add}\mathcal{Y})$. Uvažujme nyní libovolné $X \in \operatorname{rep}_K Q$. Ať $\operatorname{Hom}_{KQ}(X,-)|_{\operatorname{add}\mathcal{F}} = 0$. Jelikož existuje rozklad X na nerozložitelné reprezentace, je zřejmě $X \in \operatorname{add}\mathcal{T}$, jinak by projekce na direktní sčítanec izomorfní $S(i)$ dávala nenulový morfismus. Obdobně pokud $\operatorname{Hom}_{KQ}(-,X)|_{\operatorname{add}\mathcal{T}} = 0$, musí být $X \cong S^n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Jinak by inkluze nerozložitelného sčítance neizomorfního $S(i)$ do X dávalo nenulový morfismus. Identická úvaha prokazuje D2 a D3 i pro dvojici $(\operatorname{add}\mathcal{X}, \operatorname{add}\mathcal{Y})$.

Lemma 2.29. *Buď Q acyklický toulec a i stok. Funktor $S_i^+\colon \operatorname{rep}_K Q \to \operatorname{rep}_K \sigma_i Q$ je reprezentovatelný.*

Důkaz. Je zřejmé, že regulární reprezentace acyklického toulce $K\sigma_i Q$ je objekt v $\operatorname{rep}_K \sigma_i Q$. Položme $T = S_i^-(K\sigma_i Q)$. Z adjungovanosti 2.25 dostáváme pro libovolné $X \in \operatorname{rep}_K Q$:

$$S_i^+(X) \cong \operatorname{Hom}_{K\sigma_i Q}(K\sigma_i Q, S_i^+ X) \cong \operatorname{Hom}_{KQ}(S_i^-(K\sigma_i Q),X) = \operatorname{Hom}_{KQ}(T,X)$$

Všechny rovnosti jsou funktoriální, proto dostáváme izomorfismus funktorů
$S_i^+ \cong \operatorname{Hom}_{KQ}(T,-)$. ■

Derivované funktory příslušné izomorfním funktorům jsou patrně izomorfní. Navíc z K.4 jsou i jejich pravé adjunkty izomorfní. Z toho okamžitě plynou funktoriální izomorfismy $R^n S_i^+ \cong \operatorname{Ext}^n_{KQ}(T,-)$, $S_i^- \cong - \otimes_{K\sigma_i Q} T$ a $L_n S_i^- \cong \operatorname{Tor}_n^{K\sigma_i Q}(-,T)$. Zdarma jsme obdrželi následující lemma.

Lemma 2.30. *Buď Q acyklický toulec a i stok. Pak:*

i. Pro $n > 1$ jsou $R^n S_i^+ = 0$ a $L_n S_i^- = 0$.

ii. Buď X injektivní reprezentace Q, pak $R^1 S_i^+ X = 0$.

iii. Buď Y projektivní reprezentace $\sigma_i Q$, pak $L_1 S_i^- Y = 0$.

Důkaz.
Elementarní vlastnosti $\mathrm{Ext}^n_{KQ}(T,-)$ a $\mathrm{Tor}_n^{K\sigma_i Q}(-,T)$ a $\operatorname{gl} KQ, \operatorname{gl} K\sigma_i Q \leq 1$. ■

Nesmírně užitečný výsledek o derivovaných funktorech nám nyní vyplývá z lemmatu 2.22.

Lemma 2.31. *Buď Q acyklický toulec a i stok. Poté pro každé $X \in \mathrm{rep}_K Q$ je $R^1 S_i^+ X$ direktní součet $S(i)$ v $\mathrm{rep}_K \sigma_i Q$ a pro každé $Y \in \mathrm{rep}_K \sigma_i Q$ je $L_1 S_i^- X$ direktní součet $S(i)$ v $\mathrm{rep}_K Q$.*

Důkaz. Dokážeme tvrzení pro S_i^+, pro S_i^- je argument duální.
Mějme $X \in \mathrm{rep}_K Q$. Díky globální dimenzi KQ a lemmatu 2.16 prokazující existenci injektivních rezolvent sestávajících z konečně generovaných injektivních reprezentací, existuje krátká exaktní posloupnost $0 \to X \to I_0 \to I_{-1} \to 0$ v $\mathrm{rep}_K Q$, která je injektivní rezolventou X. Z lemmatu 2.22 a z dlouhé exaktní posloupnosti pro pravý derivovaný funktor dostáváme diagram:

$$\begin{tikzcd}
S_i^+ I_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & S_i^+ I_{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & S(i)^n \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
S_i^+ I_0 \arrow[r] & S_i^+ I_{-1} \arrow[r] & R^1 S_i^+ X \arrow[r] & R^1 S_i^+ I_0 = 0
\end{tikzcd}$$

Jednoduchým honem můžeme definovat čárkovaný morfismus a z 5-lemmatu získáme, že je to izomorfismus. Tím je tvrzení dokázáno. Obdobným způsobem užitím vhodné projektivní rezolventy lze tvrzení dokázat i pro S_i^-. ■

Prozkoumáme-li situaci v předchozím lemmatu podrobněji, dozvíme se ještě více.

Důsledek 2.32. *Buď Q acyklický toulec a i stok. Pak pro nerozložitelnou reprezentaci $X \in \mathrm{rep}_K Q$ a nerozložitelnou reprezentaci $Y \in \mathrm{rep}_K \sigma_i Q$.*

$$R^1 S_i^+ X = \begin{cases} S(i) & X \cong S(i) \\ 0 & X \not\cong S(i) \end{cases} \qquad L_1 S_i^- Y = \begin{cases} S(i) & Y \cong S(i) \\ 0 & Y \not\cong S(i) \end{cases}$$

Důkaz. Z lemmatu 2.16 a Schanuelova lemmatu můžeme pro $X \in \operatorname{ind} \mathrm{rep}_K Q$ najít injektivní rezolventu $0 \to X \to I_0 \to I_{-1} \to 0$, ve které je I_0 direktní součet injektivních reprezentací přislušných nějakým vrcholům Q_0. Z jejich definice je evidentní, že pro i stok nemůže být $S(i)$ izomorfní některému z nich. Z 2.15 a 2.23 plyne, že ξ_{I_0} ve smyslu 2.20 je na. Proto v 2.22 dostáváme exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow S_i^+ X \longrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{\xi_X} S(i)^X \longrightarrow \operatorname{coker} \xi_X \longrightarrow 0.$$

Z předchozího lemmatu je $\operatorname{coker} \xi_X \cong R^1 S_i^+ X$. Užitím lemmatu 2.23 dostáváme pro $S(i) \not\cong X \in \operatorname{ind} \mathrm{rep}_K Q$, že morfismus $\xi_X \colon \tilde{X} \to S(i)^X$ je na. Proto z exaktnosti $R^1 S_i^+ X = 0$. Naopak pro $S(i)$ je $\widetilde{S(i)} = 0$, proto rovněž z exaktnosti $R^1 S_i^+ S() \cong S(i)^{S(i)} = S(i)$. Tvrzení o $L_1 S_i^-$ se dokáže obdobně. ■

Tento nevinný důsledek dokončuje **důkaz věty 2.27**, našeho cíle v této kapitole.

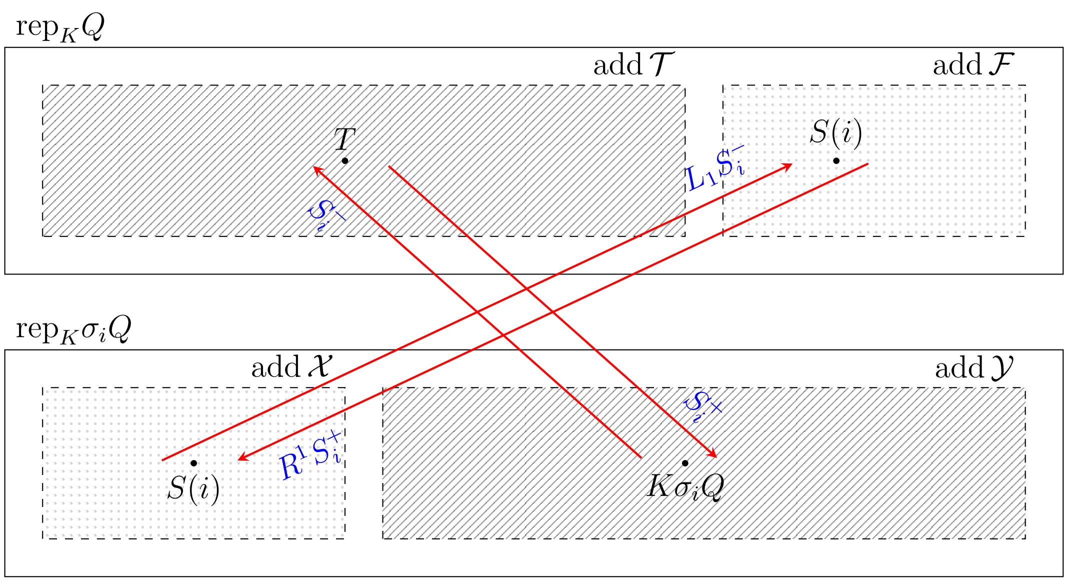
Důkaz. Část **ii.** je přesně lemma 2.29. Dvojice $(\operatorname{add} \mathcal{T}, \operatorname{add} \mathcal{F})$ v $\mathrm{rep}_K Q$ a $(\operatorname{add} \mathcal{X}, \operatorname{add} \mathcal{Y})$ v $\mathrm{rep}_K \sigma_i Q$ jsou torzní díky lemmatu 2.28. Dle lemmat 2.26 a 2.25 jsou $S_i^+|_{\operatorname{add} \mathcal{T}}$ a $S_i^-|_{\operatorname{add} \mathcal{Y}}$ hledané kvaziinverzní ekvivalence (užijeme charakterizace ekvivalence kategorií K.3).

Nyní chceme dokázat, že $R^1S_i^+$ a $L_1S_i^-$ jsou inverzní ekvivalence $\operatorname{add}\mathcal{F} \cong \operatorname{add}\mathcal{X}$. Z additivity tak stačí prokázat, že $R^1S_i^+L_1S_i^-S(i) = S(i)$, $L_1S_i^-R^1S_i^+S(i) = S(i)$ a jeden z funktorů je úplný a věrný. První dvě rovnosti plynou z důsledku 2.32 a oba funktory jsou úplné věrné, jak snadno plyne z K-additivity a Schurova lemmatu (neboť $\operatorname{End}(S_i) \cong K$, z additivity dané funktory indukují endomorfismus K, který je nenulový, proto prostý a na). Z toho plyne, že pro každé dva objekty $S(i)^n, S(i)^m \in \operatorname{add}\{S(i)\}$ indukují oba funktory grupový izomorfismus $\operatorname{Hom}_{KQ}(S(i)^n, S(i)^m) \cong \operatorname{Hom}_{K\sigma_iQ}(S(i)^n, S(i)^m)$ (neboť ty hom-sety jsou izomorfní sčítací grupě matic $m \times n$). Tímto máme větu už v podstatě dokázánu, stačí argumentovat, proč reprezentace $T = S_i^-(K\sigma_iQ)$ reprezentující S_i^+ je skutečně KQ-vychylující a uvažované torzní třídy splývají s toznímí třídami příslušnými T.

Z lemmatu 2.24 plyne, že $\operatorname{add}\mathcal{F} = \{X : S_i^+X = 0\} = \{X : \operatorname{Hom}_{KQ}(T,X) = 0\} = \mathcal{F}(T)$ a $\operatorname{add}\mathcal{X} = \{Y : S_i^-Y = 0\} = \{Y : Y \otimes_{K\sigma_iQ} T = 0\} = \mathcal{X}(T)$. Rovnosti $\operatorname{add}\mathcal{T} = \mathcal{T}(T)$ a $\operatorname{add}\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(T)$ plynou bezprostředně z additivity a důsledku 2.32.

Dokažme nakonec, že T je vychylující. Podmínka T1 je v případě T triviálně splněna, splňují ji totiž všechny reprezentace Q nad K. T2 plyne z faktu $T \in \operatorname{add}\mathcal{T}$. Fakt plyne z kanonické posloupnosti $0 \to tT \to T \to T/tT \to 0$ pro t torzní radikál příslušný $(\operatorname{add}\mathcal{T}, \operatorname{add}\mathcal{F})$. Kdyby tT nebyl roven T, byl by pravý morfismus nenulový $T \to T/tT \in \operatorname{add}\mathcal{F}$, spor s výše dokázanou charakterizací $\operatorname{add}\mathcal{F}$. Dokázali jsme, že T je částečně vychylující. Dle věty 1.13 charakterizující vychylující moduly stačí dokázat, že $\operatorname{add}\mathcal{T} = \operatorname{Gen} T$. Uvažujme $X \in \operatorname{add}\mathcal{T}$. Zvolme $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n)$ K-bázi $\operatorname{Hom}_{KQ}(T,X)$. Morfismus $f = [f_1, \cdots, f_n] \colon T^n \to X$ je na. Jinak uvažujme projekci $\pi \colon X \to X/\operatorname{im} f$, která se nuluje při složení s jakýmkoli morfismem z $\operatorname{Hom}_{KQ}(T,X)$. Jelikož $\operatorname{add}\mathcal{T}$ je torzní třída, je uzavřená na obrazy, čili $X/\operatorname{im} f \in \operatorname{add}\mathcal{T}$. Nyní $S_i^+(\pi) = \operatorname{Hom}_{KQ}(T,\pi) \colon S_i^+(X) \to S_i^+(X/\operatorname{im} f)$ je nulový, z věrnosti S_i^+ máme $\pi = 0$ neboli $X = \operatorname{im} f$. To dokazuje **i.** ■

Tvrzení věty 2.27 ilustruje tento obrázek (srovnej s tím na konci kapitoly 1).



Přídavek

V přídavcích zmíníme matematický aparát nutný k pochopení práce, který ovšem není standardně vyučován na bakalářských kurzech a jehož průběžné zavádění by narušilo plynulost výkladu. Výsledky jsou vyjmenovány bez důkazu s odkazem na literaturu důkaz obsahující.

K Teorie kategorií

V této kapitole vyslovíme několik důležitých vět z teorie kategorií, které se nám budou hodit. Formulace je převzata z [Lan98].

Definice K.1. Buďte $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ kategorie. $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ jsou *ekvivalentní*, psáno $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, pokud existují funktory $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, že FG je přirozeně ekvivalentní $\mathrm{id}_\mathcal{D}$ a GF přirozeně ekvivalentní $\mathrm{id}_\mathcal{C}$. Pak F nazýváme *ekvivalencí* kategorií a G *pseudoinverzem* F (a naopak, definice je symetrická).

Definice K.2. Buď $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. *Esenciálním obrazem* F rozumíme úplnou podkategorii $\operatorname{im} F \subseteq \mathcal{D}$ danou formulí $x \in \operatorname{obj} \mathcal{D} : \exists y \in \operatorname{obj} \mathcal{C}, F(y) \cong x$. Její třída objektů je tedy sjednocení tříd izomorfismu všech obrazů prvků z $\mathcal{C}$. Je-li esenciální obraz celá $\mathcal{D}$, nazýváme F *esenciálně surjektivní.*

V první kapitole hovoříme o ekvivalencích určitých podkategorií dvou kategorií modulů. Pro daný funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lze pochopitelně uvažovat jeho restrikci na danou podkategorii $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ a hovořit o ekvivalenci $\mathcal{C}' \cong \operatorname{im} F$. Následující věta dává pohodlnou charakterizaci ekvivalence kategorií.

Věta K.3. *(Věta IV.4.1) Buď $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

- *F je úplný, věrný a esenciálně surjektivní*
- *existuje funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ a $FG \cong \mathrm{id}_\mathcal{D}$, $GF \cong \mathrm{id}_\mathcal{C}$ (tj. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ jsou ekvivalentní)*
- *F je úplný a věrný a má úplný a věrný pravý adjunkt*

Lemma K.4. *(Důsledek IV.1.1) Buď $G\colon A \to B$ funktor. Každé dva jeho levé adjunkty jsou přirozeně ekvivalentní.*

Definice K.5. (VIII.4.3) Kategorie $\mathcal{C}$ se nazývá *additivní*, splňuje-li:

- pro každé dva objekty A,$B \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ je $\operatorname{Hom}_\mathcal{C}(A,B)$ abelovská grupa a skládání morfismů v $\mathcal{C}$ je distributivní vůči operacím na příslušných hom-setech
- $\mathcal{C}$ má nulový objekt
- $\mathcal{C}$ má konečné limity a kolimity, konečné součty a součiny splývají

Dále $\mathcal{C}$ nazveme *abelovskou*, je-li additivní, každý morfismus má jádro a kojádro a každý epimorfismus je kojádrem a monomorfismus jádrem. Všimněme si symetrie v definici abelovské kategorie. Platí, že $\mathcal{C}^{op}$ je abelovská právě tehdy, když $\mathcal{C}$ je abelovská.
Buďte $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ additivní kategorie a $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor. F nazveme *additivní*, komutuje-li s operací na každém hom-setu, tj. pro každé $f,g\colon M \to N$ morfismy v $\mathcal{C}$ je $F(f+g) = Fg + Ff$.

V této prací nebudeme pracovat s abelovskými kategoriemi v plné obecnosti. Zmiňujeme je proto, že izolují důležité vlastnosti kategorií modulů. Je sandné dokázat, že kategorie modulů jsou abelovské.

Lemma K.6. *(Lemma VIII.4.2) Buď $\mathcal{A}$ abelovská a uvažujme pullback (P,p_1,p_2) diagramu $B_1 \xrightarrow{f} A \xleftarrow[g]{} B_2$. Je-li f epimorfismus, je i p_2 epimorfismus a navíc existuje izomorfismus $\ker p_2 \to \ker f$, že následující diagram komutuje*

$$\begin{tikzcd}
\ker p_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong"] & P \arrow[r, dashed, "p_2"] \arrow[d, dashed, "p_1"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\ker f \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "f"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Díky samoduálnosti pojmu abelovské kategorie máme i duální tvrzení pro pushouty, zmíníme jen příslušný diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "i_1"] & \operatorname{coker} f \arrow[d, dashed, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, dashed, "i_2"] & P \arrow[r] & \operatorname{coker} i_2
\end{tikzcd}$$

Lemma K.7. *(Lemma VIII.4.4)(5-lemma) Buď $\mathcal{A}$ abelovská a v ní následující diagram s exaktními řádky:*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

Jsou-li f_i pro $i \in \{1,2,4,5\}$ izomorfismy, pak je i f_3 izomorfismus. Speciálně je-li

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diagram v $\mathcal{A}$ s exaktními řádky, pak jsou-li jakékoli dva morfismy z $\{f,g,h\}$ izomorfismy, je i ten třetí izomorfismus.

Lemma K.8. *(Lemma VIII.4.5)(hadí lemma) Buď $\mathcal{A}$ abelovská a v ní následující diagram s exaktními řádky:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pak existuje exaktní posloupnost

$$0 \to \ker f \to \ker g \to \ker h \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} h \to 0$$

Nakonec vyslovme ještě poslední lemma, které rovnou plyne z exaktnosti standardní duality a duálnosti pojmů projektivního a injektivního modulu.

Lemma K.9. *Buď A konečnědimenzionální K-algebra a P projektivní modul v mod-A. Pak DP je injektivní modul v A-mod.*

H Homologická algebra

Homologická algebra resp. derivované funktory a jejich vlastnosti hrají ústřední roli ve formulaci i důkazu Brennerové-Butlerovy věty. Konstrukce derivovaných funktorů a důkaz jejich korektnosti jsou technicky náročné a nesouvisí s tématem práce, proto je podrobně rozebírat nebudeme. Důležité definice a ideje však nastíníme a především vyslovíme nejdůležitější vlastnosti derivovaných funktorů. Výklad se opírá o [Wei94]. V celé sekci fixujeme unitární okruh R (nejobecnějším prostředím pro studium homologické algebry jsou abelovské kategorie K.5, které izolují ty vlastnosti kategorií modulů užitečné pro její studium. Ovšem pro naše účely je taková obecnost zbytečná a všechny výsledky vyslovíme v řeči modulů).

Lemma H.1. *([ASS06, I.2.10]) Buď N pravý R-modul a M S-R-bimodul. Pak můžeme definovat pravou S-modulovou strukturu na* $\operatorname{Hom}_R(M,N)$ *a levou S-modulovou strukturu* $\operatorname{Hom}_R(N,M)$.
Buď N pravý R-modul a M R-S-bimodul. Pak můžeme definovat pravou S-modulovou strukturu na $N \otimes_R M$.

Definice H.2. Buď M pravý R-modul. *Projektivní rezolventou M* rozumíme exaktní posloupnost

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to M \to 0,$$

kde každý $P_n : n \in \mathbb{N}$ je projektivní pravý R-modul. Značíme $\mathbf{P}_M \to M \to 0$. Duálně definujeme $0 \to M \to \mathbf{I}_M$ *injektivní rezolventu M*. Posloupnost $\mathbf{P}_M \to 0$ (resp. $0 \to \mathbf{I}_M$) nazýváme *zkrácenou projektivní (injektivní) rezolventou M*. Jejich *délkou* rozumíme supremum $n \in \mathbb{N}$, že n-tý či $-n$-tý stupeň je nenulový.

Věta H.3. *Buď M pravý R-modul.*

- *existuje projektivní R-modul P a surjektivní zobrazení $P \to M$.*
- *existuje injektivní R-modul I a prosté zobrazení $M \to I$.*

Z věty H.3 snadno vyplývá existence projektivních (injektivních) rezolvent. V kategorické řeči se tato vlastnost nazývá *s dostatkem projektivních (injektivních) objektů.* Idea konstrukcí homologické algebry, speciálně derivovaných funktorů, je nahrazení modulu jeho zkrácenou rezolventou.

Definice H.4. (4.1.1) Buď R libovolný okruh a $M \in$ Mod-A. Definujeme $\operatorname{pd}_R M$ *projektivní dimenzi* modulu M nad R jako minimální délku projektivní rezolventy M (je to hodnota z $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Obdobně definujeme $\operatorname{id}_R M$ *injektivní dimenzi* modulu M nad R.
Globální projektivní dimenzi $\operatorname{pd} R$ okruhu R definujeme jako supremum projektivních dimenzí modulů nad R. Obdobně definujeme i $\operatorname{id} R$ *globální injektivní dimenzi.*

Lemma H.5. *(4.1.2) Buď R okruh. Platí* $\operatorname{pd} R = \operatorname{id} R$. *Společnou hodnotu nazýváme globální dimenzí* $\operatorname{gl} R$.

Lemma H.6. *(podkova, 2.2.8) Buď $0 \to A \to A'' \to A' \to 0$ krátká exaktní posoupnost R-modulů a buďte $\mathbf{P}$,$\mathbf{P}'$ zkrácené projektivní rezolventy A a A'. Pak existuje zkrácená projektivní rezolventa $\mathbf{P}''$ modulu A'' taková, že máme komutativní diagram s exaktními řádky*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P_1'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & P_1' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & P_0'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & P_0' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Duální výsledek platí rovněž pro injektivní rezolventy.

Z podkovového lemmatu plyne, že projektivní (resp. injektivní) dimenze B rozšíření A,C je omezena supremem projektivních (resp. injektivních) dimenzí A, C.

Lemma H.7. *(Schanuel) Buďte $0 \to K \to P \to M \to 0$,*
$0 \to K' \to P' \to M \to 0$ krátké exaktní posloupnosti R-modulů, kde P,P' jsou projektivní. Pak $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.

Definice H.8. Buď (K,δ) komplex pravých R-modulů. Faktorgrupu $\ker \delta^n / \operatorname{im} \delta^{n+1}$ nazveme *n-tou kohomologií K*. Označme $\operatorname{Komp}(R)$ kategorii komplexů nad R. Funktor $H^n \colon \operatorname{Komp}(R) \to \mathbf{Ab}$ přiřazuje komplexu jeho n-tou kohomologii a morfismu komplexů $f \colon K \to L$ restrikci f^n na n-tou kohomologii.

Lemma H.9. *Buď $F\colon$ mod-$R \to \mathbf{Ab}$ exaktní additivní funktor a C komplex R-modulů. Pak $H^n F(C) \cong F H^n(C)$.*

Nyní zavedeme derivované funktory.

Definice H.10. (2.4 & 2.5) Buď $F\colon \text{Mod-}R \to \mathbf{Ab}$ additivní kovariantní funktor. Potom *n-tý levý derivovaný funktor* $L_n F\colon \text{Mod-}R \to \mathbf{Ab}$ definujeme na objektech $L_n F(M) = H_n F \mathbf{P}_M$ a na morfismu $f\colon M \to N$ jako $H_n F(f^*)$, kde $f^*\colon P_M \to P_N$ je morfismus indukovaný f (ten vždy existuje a byť není dán jednoznačně, jeho restrikce na homologie už jednoznačná je).
Obdobně definujeme *n-tý pravý derivovaný funktor* $R^n F\colon \text{Mod-}R \to \mathbf{Ab}$, ale užijeme injektivní resolventy.
Buď $G\colon Mod_R \to \mathbf{Ab}$ additivní kontravariantní funktor. Potom je to kovariantní funktor $(\text{Mod-}R)^{op} \to \mathbf{Ab}$ a definice je stejná jako výše.

Definice H.11. (2.5.2 & 2.6.4) Buďte $M,N \in$ Mod-R. Potom n-tý pravý derivovaný funktor ke kovariantnímu funktoru $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ nazýváme $\mathrm{Ext}^n_R(\underline{M},-)$. Obdobně n-tý pravý derivovaný funktor ke kontravariantnímu funktoru $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ nazýváme $\mathrm{Ext}^n_R(-,\underline{N})$. Pro M,N libovolné pravé R-moduly platí $\mathrm{Ext}^n_R(\underline{M},N) = \mathrm{Ext}^n_R(M,\underline{N})$ a společnou hodnotu označíme $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ (bez podtržítek). Z levé exaktnosti hom funktoru plyne $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)$
Buďte $M \in$ Mod-R a $N \in R$-Mod. Potom n-tý levý derivovaný funktor ke kovariantnímu funktoru $M \otimes_R -$ nazýváme $\mathrm{Tor}^R_n(\underline{M},-)$. Obdobně n-tý levý derivovaný funktor ke kovariantnímu funktoru $- \otimes_R N$ nazýváme $\mathrm{Tor}^R_n(-,\underline{N})$. Pro M,N libovolné pravé a levé R-moduly platí $\mathrm{Tor}^R_n(\underline{M},N) = \mathrm{Tor}^R_n(M,\underline{N})$ a společnou hodnotu označíme $\mathrm{Tor}^R_n(M,N)$ (bez podtržítek). Z pravé exaktnosti tenzorového součinu plyne $\mathrm{Tor}^R_0(M,N) = M \otimes_R N$.

Lemma H.12. *(2.4.6 & 2.4.7) Buď $F\colon$ Mod-R $\to$* **Ab** *additivní kovariantní funktor a $0 \to A \to B \to C \to 0$ krátká exaktní posloupnost v Mod-R. Poté máme dlouhé exaktní posloupnosti:*

$$\cdots \to R^{-n-1}F(C) \to R^{-n}F(A) \to R^{-n}F(B) \to R^{-n}F(C) \to R^{-n+1}F(A) \to \cdots$$

$$\cdots \to L_{n+1}F(C) \to L_nF(A) \to L_nF(B) \to L_nF(C) \to L_{n-1}F(A) \to \cdots$$

Speciálně pro M pravý R-modul a $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ a $M \otimes_R -$ máme posloupnosti

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,A) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,B) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Tor}^R_1(M,B) \to \mathrm{Tor}^R_1(M,C) \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$$

Podobné posloupnosti máme i pro derivované funktory kontravariantních funktorů.

Věta H.13. *(4.1.6) Buď M pravý R-modul a $n \in \mathbb{N}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

i. $\mathrm{pd}_R\, M \leq n$.

ii. pro každý pravý R-modul N jest $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M,N) = 0$.

Definice H.14. (3.4) *Rozšířením R* modulů A,B obvykle rozumíme R-modul X takový, že existuje krátká exaktní posloupnost $\xi\colon 0 \to B \to X \to A \to 0$. Nyní jí však označíme právě tu posloupnost ξ (zdůrazněme, že ξ není jednoznačně dána svým prostředním členem). Dvě rozšíření ξ,ξ' nazveme *ekvivalentními*, existuje-li izomorfismus komplexů

$$\begin{tikzcd}
\xi\colon & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\xi'\colon & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & X' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Na třídách ekvivalence rozšíření A,B lze definovat sčítání a inverzi vůči sčítání, tzv. *Baerovu sumu*, jejíž neutrální prvek je štěpitelná posloupnost $0 \to B \to A \oplus B \to A \to 0$. Lze zkonstruovat grupový izomorfimus

$$(\text{třídy rozšíření } A,B, +_{\text{Baer}}, -_{\text{Baer}}, [0 \to B \to A \oplus B \to A \to 0]) \cong \operatorname{Ext}^1_R(A,B).$$

Nezapomeňme, že derivované funktory mají **Ab** za kodoménu, proto na Extech máme dánu jakousi abstraktní grupovou strukturu. Podstatou této definice je, že tu grupovou strukturu můžeme konkrétně interpretovat pomocí Baerových operací na rozšířeních.

Lemma H.15. *(Yonedův Ext) Výše uvedená interpretace Ext grup je funktoriální. Mějme prvek* $\mathbf{e} \in \operatorname{Ext}^1_R(A,B)$ *a zobrazení* $f\colon B \to C$*. Obraz prvku* $\mathbf{e}$ *při* $\operatorname{Ext}^1_R(A,f)$ *můžeme spočítat pomocí diagramu (buď* ξ *rozšíření odpovídající* $\mathbf{e}$*).*

$$\begin{tikzcd}
\xi\colon & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near end] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\operatorname{Ext}^1_R(A,f)(\xi)\colon & 0 \arrow[r] & C \arrow[r, dashed] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nyní třída $[\operatorname{Ext}^1_R(A,f)(\xi)]$ *odpovídá prvku* $\operatorname{Ext}^1_R(A,f)\mathbf{e} \in \operatorname{Ext}^1_R(A,C)$*. Doplnění pravého členu je možné díky vlastnostem pushoutů v abelovských kategoriích popsaných v předchozím přídavku.*
Naopak pro $g\colon C \to A$ *můžeme prvek* $\operatorname{Ext}^1(g,B)\mathbf{e} \in \operatorname{Ext}^1_R(C,B)$ *spočítat pomocí pullbacku (*ξ *je opět rozšíření odpovídající* $\mathbf{e}$*):*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^1_R(g,B)(\xi)\colon & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\xi\colon & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemma H.16. *([Buc59, Věta 3.1]) Buď* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *krátká exaktní posloupnost v Mod-R a* $X \in$ *Mod-R libovolný. Potom spojovací morfismus* $\delta_0\colon \operatorname{Hom}_R(X,C) \to \operatorname{Ext}^1_R(X,A)$ *z dlouhé exaktní posloupnosti derivovaného funktoru můžeme konkrétně popsat na morfismu* $\mu \in \operatorname{Hom}_R(X,C)$ *následovně.*

$$\begin{tikzcd}
\delta_0(\mu)\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pozorování H.17. Tato poznámka se týká situace vyvstavší v důkazu Brennerové–Butlerovy věty. Je třeba ukázat, že morfismy α tvoří přirozenou transformaci. Existence je zřejmá z 5-lemmatu. Buď $f\colon M \to N$ homomorfismus modulů. Z tzv. srovnávacího lemmatu (2.3.7) plyne, že pro jakoukoli volbu injektivních rezolvent $\mathbf{I}_N \to N \to 0$, $\mathbf{I}_M \to M \to 0$ existuje morfismus $\tilde{f}$ těch rezolvent (ve smyslu morfismu komplexů), že $\tilde{f}_0 = f$ (pozor, není dán jednoznačně). Jelikož třída modulů, na nichž je ε z lemmatu 1.14 izomorfismus, obsahuje injektivní moduly, máme komutativní diagram (označme $G(X) = \operatorname{Tor}^B_1(\operatorname{Ext}^1_A(T,X),T)$ a $F(X) = \operatorname{Hom}_A(T,X) \otimes_B T$)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 \arrow[rr] & & G(N) \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "\alpha_N"] & & F(E_1) \arrow[rr] \arrow[dd, "\eta_{E_1}"] & & F(L_1) \arrow[rr] \arrow[dd, "\eta_{L_1}"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & G(M) \arrow[rr] \arrow[ur, "G(f)"] \arrow[dd, dashed, "\alpha_M"] & & F(E_2) \arrow[rr] \arrow[ur, "F(\tilde{f}_{-1})"] \arrow[dd, "\eta_{E_2}"] & & F(L_2) \arrow[rr] \arrow[ur, "F(\tilde{f}_{-2}|_{L_2})"] \arrow[dd, "\eta_{L_2}"] & & 0 & \\
 & 0 \arrow[rr] & & N \arrow[rr, "\mu_N"] & & E_2 \arrow[rr] & & L_2 \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & M \arrow[rr] \arrow[ur, "f"] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[ur, "\tilde{f}_{-1}"] & & L_1 \arrow[rr] \arrow[ur, "\tilde{f}_{-2}|_{L_1}"] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

jenž prokazuje přirozenost α jelikož $\mu_N f \alpha_M = \mu_n \alpha_N G(f)$ a μ_N je monomorfismus. Pro δ je argument stejný, užijeme ovšem projektivních rezolvent (třída $\mathcal{Y}(T)$ obsahuje všechny projektivní moduly).

Závěr

> Tilting theory is one of the main tools in the representation theory of algebras. It originated with the study of reflection functors...
>
> [ASS06, strana 184]

Těmito slovy bývá odbyto historické pozadí vychylující teorie. Ona slova jsou doplněna odkazem na několik klasických článků z šedesátých a sedmdesátých let, které přímo vedly k příspěvku Brennerové a Butlera na Druhé mezinárodní konferenci k reprezentacím algeber v Ottawě roku 1979, který výzkum vychylující teorie odstartoval. Jak konkrétně se její výsledky v případě toulců a reflexních funktorů projevují, však dosud dle naší znalosti celistvě vyloženo nebylo. Naším cílem v druhé kapitole bylo v tuto mezeru zaplnit. Zavedli jsme toulce a uvedli základy teorie jejich reprezentací. Definovali jsme reflexní funktory a pro případ acyklického toulce jsme popsali jejich derivované funktory. S jejich pomocí jsme formulovali a dokázali větu 2.27, která možná v koncem sedmdesátých let vedla Brennerovou a Butlera k izolaci pojmu vychylujícího modulu a založení klasické vychylující teorie.

Nutno přiznat, že z hlediska pragmatického není Brennerové–Butlerova korespondence v acyklických toulcích příliš zajímavá. Fakt, že reflexní funktory indukují ekvivalence určitých podtříd kategorie reprezentací daného toulce Q a toulce $\sigma_i Q$ reflektovaného podle stoku i, je sám o sobě poměrně snadný. Netriviální úsilí bylo vynaloženo v důkazu druhé ekvivalence. Ta je ovšem triviální (obě podkategorie jsou ekvivalentní kategorii konečnědimenzionálních K-vektorových prostorů), obtížné je jen dokázat, že ony ekvivalence jsou realizovány derivovanými funktory reflexních funktorů. Historický význam tohoto faktu je však nesporný, neboť vychylující teorie, nejen ve své klasické podobě (tj. pro konečnědimenzionální K-algebry), ale i v mnoha svých zobecněních, je dnes živoucím matematickým odvětvím, které rodí výsledky daleko přesahující teorii reprezentací.

V první kapitole jsme její klasickou formu stručně představili. Byla zavedena torzní dvojice a vychylující modul a oba pojmy byly zhruba prozkoumány. Vyložili jsme souvislost s Moritovou ekvivalencí a pojem vychylujícího modulu jsme konkrétněji prozkoumali pro případ grupových algeber. Mimo mnohokrát skloňované Brennerové–Butlerovy věty jsme dokázáli i další zajímavé tvrzení, totiž Bongartzovo lemma, které nejenže dává vědět o hojnosti vychylujících modulů, ale poskytuje i pěknou netriviální aplikaci Yonedova extu.

Seznam použité literatury

[ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press, 2006.

[Aus55] Maurice Auslander. On the dimension of modules and algebras (iii): Global dimension. *Nagoya Mathematical Journal*, 9:67–77, 1955.

[Buc59] David A. Buchsbaum. A note on homology in categories. *Annals of Mathematics*, 69:66, 1959.

[Kra10] Henning Krause. Representations of quivers via reflection functors, 2010.

[Lan98] S.M. Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.

[Wei94] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.