MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Kremla

Girsanovova věta v diskrétním čase

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D.
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

V první řadě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce, RNDr. Petru Čoupkovi, Ph.D., za jeho odborné vedení, cenné rady a trpělivost během celého procesu psaní. Dále bych rád poděkoval své rodině a přátelům za jejich neustálou podporu a povzbuzení nejen při psaní této bakalářské práce, ale i během celého studia na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Název práce: Girsanovova věta v diskrétním čase

Autor: Tomáš Kremla

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá Girsanovovou větou v diskrétním čase, která má široké uplatnění, například ve finanční matematice nebo teorii filtrů. Tato věta hovoří o konstrukci pravděpodobnostní míry, vůči níž je daný proces martingalem do konečného času. V práci je Girsanovova věta zobecněná i pro jiné typy procesů a je ukázáno, že si tyto výsledky odpovídají. Dále je zkonstruována pravděpodobnostní míra tak, aby byl celý proces vůči této míře martingalem. Na závěr jsou uvedeny některé postačující podmínky pro absolutní spojitost této nové míry vůči té původní.

Klíčová slova: martingal, změna pravděpodobnostní míry, Girsanovova věta, Novikovova podmínka, Kazamakiho kritérium

Title: Discrete-time Girsanov theorem

Author: Tomáš Kremla

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Čoupek, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor's thesis deals with the Girsanov theorem in discrete time, which has wide applications, for example in financial mathematics or filter theory. This theorem talks about the construction of a probability measure with respect to which a given process is a martingale up to a finite time. In this paper, Girsanov theorem is generalized to other types of processes and it is shown that these results correspond. Subsequently, a probability measure is constructed under which the entire process is a martingale. Finally, some sufficient conditions for absolute continuity of this new measure with respect to the original one are given.

Keywords: martingale, change of probability measure, Girsanov theorem, Novikov condition, Kazamaki criterion

Obsah

Úvod

Pojem martingalu je v teorii náhodných procesů klíčovým konceptem, který nachází uplatnění nejen v teoretické matematice, ale také v různých aplikovaných oblastech včetně finanční matematiky nebo teorie filtrů. Obecný princip Girsanovovy věty ve spojitém čase, která byla dokázána I. Girsanovem v článku Girsanov (1960), je konstrukce pravděpodobnostní míry, vůči níž je daný náhodný proces martingal. Této větě je dodnes věnován intenzivní výzkum. Ať už v teoretické matematice, konkrétně například v teorii stochastických diferenciálních rovnic, nebo v aplikované matematice. Tato práce si klade za cíl podrobněji prozkoumat a zobecnit ekvivalent této věty v diskrétním čase, tj. pro náhodné procesy indexovanými množinou $\mathbb{N}_0$.

V první části této práce definujeme potřebné pojmy jako podmíněná střední hodnota, náhodný proces v diskrétním čase, predikovatelný proces a martingal. Dále uvedeme základní věty pro práci s podmíněnou střední hodnotou a tedy i s martingaly.

V druhé kapitole zformulujeme klasickou Girsanovovu větu v diskrétním čase, která se zaobírá konstrukcí nové pravděpodobnostní míry tak, aby byl daný proces martingal do konečného času. Na základě práce Elliott a Madan (1998) zformulujeme a dokážeme zobecněnou Girsanovovu větu pro mnohem obecnější typy procesů. Navážeme uvedením aplikace Girsanovovy věty pro výpočet určitých středních hodnot. Dále se budeme zabývat konstrukcí pravděpodobnostní míry $\tilde{P}$ tak, aby byl vůči ní celý proces martingal. Taková míra už nebude přímo definována přes Radon-Nikodýmovu hustotu. Vyvstává tedy otázka, zda je tato nová míra $\tilde{P}$ absolutně spojitá vůči původní míře P. Pro tento problém uvedeme charakterizaci, tj. ekvivalentní podmínky. Tato charakterizace pochází z knihy Širjaev (1999, strana 435), kde přidáme podmínku o střední hodnotě limity hustot skoro jistě.

V závěrečné kapitole se budeme věnovat některým lépe ověřovatelným postačujícím podmínkám pro absolutní spojitost $\tilde{P}$ vůči P v případě klasické Girsanovovy věty. Opět zde navážeme na knihu Širjaev (1999, strana 441). Nejdříve se podíváme na formulaci a důkaz tzv. Novikovovy podmínky v diskrétním čase a uvedeme její důkaz, který jsme převzali z práce Krylov (2002) a příslušně upravili do diskrétního času. Formulaci Krylovových vět uvedeme podobně jako v knize Seidler (2011, Věta 7.2). Pokračujeme formulováním diskrétního ekvivalentu tzv. Kazamakiho kritéria, kde jsme postupovali podobně jako v případě Novikovovy podmínky. Na závěr zmíníme vztah těchto dvou výsledků.

1. Zavedení základních pojmů

Abychom mohli čtenáře pohodlně uvést do problému, na kterém celý Girsanovův princip změny pravděpodobnostní míry stojí, uveďme některé základní pojmy, které budeme v dalším využívat.

1.1 Podmíněná střední hodnota

V tomto textu budeme náhodné veličiny uvažovat jako reálné náhodné veličiny, tj. pro pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je náhodná veličina měřitelné zobrazení z měřitelného prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ do měřitelného prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Častým požadavkem bude integrovatelnost náhodné veličiny a tedy zaveďme $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jako množinu všech náhodných veličin definovaných na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s konečným p-tým absolutním momentem. Často budeme zápis zkracovat na L^p, pokud bude z kontextu jasné, o jaký pravděpodobnostní prostor se jedná.

Střední hodnota je jedna ze základních popisných charakteristik náhodných veličin. Pokud chceme vzít v potaz nějakou dodatečnou informaci, kterou můžeme využít pro vylepšení střední hodnoty, musíme provést následující zobecnění tohoto pojmu.

Definice 1. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor,* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *je* σ*-algebra.* Podmíněná střední hodnota náhodné veličiny X vzhledem k σ-algebře $\mathcal{G}$ *je náhodná veličina* $\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]$*, která splňuje následující podmínky:*

i) $\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P|_{\mathcal{G}})$.

ii) Pro každou $G \in \mathcal{G}$ *platí* $\int_G X \ \mathrm{d}P = \int_G \mathrm{E}[X|\mathcal{F}] \ \mathrm{d}P$.

Pro větší názornost uveďme jednu důležitou a zajímavou vlastnost. Pokud je $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak pro klasickou střední hodnotu platí

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \min_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{E}[(X - x)^2].$$

Střední hodnota tedy minimalizuje střední čtvercovou chybu, kde argumentem je reálné číslo. Pokud vezmeme jako argument náhodnou veličinu z $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P|_{\mathcal{G}})$, pak platí

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X|\mathcal{G}])^2] = \min_{Y\in L^2(\Omega,\mathcal{G},P|_{\mathcal{G}})} \mathrm{E}[(X - Y)^2].$$

Tato vlastnost se často interpretuje tak, že podmíněná střední hodnota je nejlepší predikce hodnoty X na základě $\mathcal{G}$ ve smyslu minimalizace střední čtvercové chyby. Dále poznamenejme, že podmíněná střední hodnota je určena skoro jistě jednoznačně a je to lineární operátor. Ona dodatečná informace, kterou střední hodnotu podmiňujeme, se často týká jiné náhodné veličiny či náhodného vektoru.

Definice 2. *Nechť* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a* $\boldsymbol{Y}$ *je n-rozměrný náhodný vektor,* $n \in \mathbb{N}$. *Potom píšeme* $\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}] = \mathrm{E}[X|\sigma(\boldsymbol{Y})]$.

Nyní uveďme jedno lemma a definici, které jsou důležité pro samotný výpočet podmíněné střední hodnoty. Umožní nám totiž zacházet s podmíněnou střední hodnotou jako s klasickou střední hodnotou, máme-li k dispozici podmíněnou hustotu.

Lemma 1. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor,* X *je náhodná veličina a* $\boldsymbol{Y}$ *je* n*-rozměrný náhodný vektor,* $n \in \mathbb{N}$*. Pokud platí* $\sigma(X) \subset \sigma(\boldsymbol{Y})$*, pak existuje měřitelná funkce* $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *taková, že* $X = f(\boldsymbol{Y})$*.*

Důkaz. Lze najít v knize Lachout (2022, Lemma 7.18).

□

Definice 3. *Nechť* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a* $\boldsymbol{Y}$ *je* n*-rozměrný náhodný vektor,* $n \in \mathbb{N}$*. Pro* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *budeme značit*

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] = f(\boldsymbol{y}),$$

kde $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *je funkce splňující* $\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y}] = f(\boldsymbol{Y})$ *s.j.*

Z lemmatu 1 je zaručena existence funkce f a tedy i korektnost této definice. Ať X je náhodná veličina a $\boldsymbol{Y}$ je n-rozměrný náhodný vektor, mající sdruženou hustotu $f_{X,\boldsymbol{Y}}$ vůči $\mu \otimes \nu$, kde μ, resp. ν, je σ-konečná míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, resp. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Podmíněnou hustotou X za podmínky $\boldsymbol{Y}$ vzhledem k $\mu \otimes \nu$ rozumíme

$$f_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{y}) = \frac{f_{X,\boldsymbol{Y}}(x,\boldsymbol{y})}{f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})} \mathbf{1}_{[f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})>0]}, \ x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Známe-li tuto hustotu, můžeme již spočítat podmíněnou střední hodnotu jako

$$\mathrm{E}[X|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|\boldsymbol{Y}}(x|\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\mu(x), \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Na závěr uveďme jednu užitečnou větu, kterou budeme opakovaně využívat.

Věta 2. *Nechť* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*,* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *je* σ*-algebra,* Y *je náhodná veličina a* $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Potom platí*

$$\mathrm{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathrm{E}[X|\mathcal{G}], \ \textit{s.j.}$$

Důkaz. Lze najít v knize Lachout (2022, Věta 7.13) □

Pokud je tedy náhodná veličina $\mathcal{G}$-měřitelná, můžeme ji libovolně vytýkat. Speciálně, podmíněná střední hodnota $\mathcal{G}$-měřitelné náhodné veličiny je ona sama náhodná veličina.

1.2 Náhodné procesy

Definice 4. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor a pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *je dána na něm definovaná náhodná veličina. Kolekci náhodných veličin* $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nazveme* náhodným procesem s diskrétním časem.

Poznamenejme, že náhodný proces může být, a také typicky je, definován pro libovolnou indexovou množinu $T \neq \emptyset$. V této práci se však budeme zabývat pouze procesy s diskrétním časem a proto není obecná definice zapotřebí. Pokud budeme mluvit o náhodném procesu, myslíme tím náhodný proces s diskrétním časem.

Definice 5. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor.* Filtrací *na tomto prostoru rozumíme systém* σ*-algeber* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *splňující:*

i) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$.

ii) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$ *pro* $n \leq m$.

Čtveřici $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$ *nazveme* filtrovaný pravděpodobnostní prostor*. O náhodném procesu* $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *definovaném na prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *řekneme, že je* $(\mathcal{F}_n)$*-adaptovaný, jestliže pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *je náhodná veličina* X_n $\mathcal{F}_n$*-měřitelná.*

Pojem filtrace nám umožní dobře uchopit a zacházet s dostupnou informací vyvíjející se v čase. V této práci budeme často uvažovat takzvanou kanonickou filtraci nějakého náhodného procesu $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. Tu definujeme jako

$$\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n), \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Na kanonickou filtraci procesu X tedy můžeme nahlížet jako na informaci o vývoji tohoto procesu, kterou postupně akumulujeme v čase. Nyní už máme prostředky k zavedení speciálního typu náhodného procesu, který bude jeden ze středobodů této práce.

Definice 6. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$ *je filtrovaný pravděpodobnostní prostor. Proces* $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nazveme* $(\mathcal{F}_n)$-martingal*, jestliže:*

i) X *je* $(\mathcal{F}_n)$*-adaptovaný.*

ii) Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$*:* $X_n \in L^1$.

iii) Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$*:* $\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ *s.j.*

Pro martingal tedy platí, že nejlepší predikcí budoucí hodnoty na základě informace obsažené ve filtraci $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ve smyslu minimalizace střední čtvercové chyby, je nynější hodnota. Největší práci pro původní rozvoj teorie procesů tohoto typu odvedl americký matematik J. Doob, jehož jméno v této práci mnohokrát zazní.

Název martingal pochází z hazardních strategií z Francie, při nichž hráč při každé prohře zdvojnásobuje vklad, dokud nevyhraje. Několik možných vysvětlení týkajících se samotných etymologických kořenů tohoto slova navrhují autoři v článku Mansuy a Sverdlove (2009).

Pokud uvažujeme martingal vůči kanonické filtraci potenciálně jiného procesu, můžeme podmínku iii) uvažovat ve smyslu definice 2:

$$\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \mathrm{E}[X_{n+1}|X_n, \ldots, X_0].$$

Uveďme ještě jeden typ náhodného procesu, který, jak uvidíme později, je s martingaly úzce spojen.

Definice 7. *Nechť* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$ *je filtrovaný pravděpodobnostní prostor. Proces* $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *nazveme* $(\mathcal{F}_n)$-predikovatelný*, jestliže pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *platí, že náhodná veličina* X_{n+1} *je* $\mathcal{F}_n$*-měřitelná.*

Tuto definici můžeme interpretovat tak, že veškerá informace o hodnotě X_{n+1} je již dostupná v čase n. To tedy znamená, že budoucí hodnota je vždy známá alespoň jeden krok dopředu.

2. Zobecněná Girsanovova věta v diskrétním čase

Pojďme nyní uvést klasickou Girsanovovu větu v diskrétním čase, kterou dokážeme později jako speciální případ zobecněné Girsanovovy věty.

2.1 Klasická Girsanovova věta

Mějme proces $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tvaru

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \ \ s.j., \\ X_n &= X_{n-1} + \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n, \ \ s.j., \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

i) $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost stejně rozdělených a nezávislých náhodných veličin z rozdělení $\mathcal{N}(0{,}1)$,

ii) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou $(\mathcal{F}_n^X)$-predikovatelné procesy,

iii) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\mu_n, \sigma_n \in L^1$ a $\sigma_n \neq 0$ s.j.

Podmínka i) je ekvivalentní s tím, že pro $n \in \mathbb{N}$ je ε_n je nezávislá s $\boldsymbol{X_{n-1}} = (X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})^\top$. To platí, protože díky $\mathcal{F}_{n-1}^X$-měřitelnosti náhodných veličin μ_n a σ_n dostáváme

$$\sigma(\boldsymbol{X_{n-1}}) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}).$$

Proces X je samozřejmě $(\mathcal{F}_n^X)$-adaptovaný a jelikož pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\sigma(\sigma_n) \subset \sigma(\boldsymbol{X_{n-1}})$, je σ-algebra $\sigma(\sigma_n)$ nezávislá se σ-algebrou $\sigma(\varepsilon_n)$. Z toho plyne nezávislost veličin ε_n a σ_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Můžeme proto psát

$$\mathrm{E}|X_n| \leq \mathrm{E}|X_{n-1}| + \mathrm{E}|\mu_n| + \mathrm{E}|\sigma_n|\mathrm{E}|\varepsilon_n|.$$

Induktivně bychom tedy dokázali platnost podmínky ii) z definice martingalu. Obecně se ale nejedná o $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal, protože $\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = X_n + \mu_{n+1}$ s.j.

Ať $N \in \mathbb{N}$, zkonstruujeme novou pravděpodobnostní míru na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, takovou, že proces X bude vůči této míře martingal, ovšem pouze do konečného času N, tj. podmínka iii) z definice martingalu bude platit pro $n < N$. Položme

$$Z_N = \exp\bigg\{ - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\sigma_n} \varepsilon_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{\mu_n}{\sigma_n}\Big)^2 \bigg\}. \tag{2.2}$$

Za jistých podmínek, které specifikujeme v následující sekci, definujeme-li novou míru $\tilde{P}_N$ pomocí Radon-Nikodýmovy hustoty, tedy

$$\tilde{P}_N(A) = \int_A Z_N \, \mathrm{d}P, \ A \in \mathcal{F},$$

pak se skutečně jedná o pravděpodobnostní míru. Současně také pro všechna $n = 0{,}1, \ldots, N-1$ platí

$$\tilde{\mathrm{E}}_N[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = X_n, \ s.j.,$$

kde $\tilde{\mathrm{E}}_N[\,\cdot\,|\mathcal{F}_n^X]$ značí podmíněnou střední hodnotu za podmínky $\mathcal{F}_n^X$ počítanou vůči míře $\tilde{P}_N$. Toto tvrzení je často v literatuře nazýváno Girsanovovou větou v diskrétním čase (např. v knize Širjaev (1999, strana 439)). Důkaz tohoto tvrzení a odpověď na otázku, jak takovou míru zkonstruovat například i pro jiná rozdělení veličin ε_n, provedeme v následující kapitole v obecnější podobě.

2.2 Zobecněná Girsanovova věta

Pro důkaz zobecněné Girsanovovy věty, jednoho z hlavních výsledků této práce, budeme potřebovat následující lemma, které je často nazývané Bayesovou větou pro podmíněnou střední hodnotu.

Lemma 3. *Nechť P a $\tilde{P}$ jsou pravděpodobnostní míry na $(\Omega, \mathcal{F})$ a platí $\tilde{P}(A) = \int_A \Lambda \, \mathrm{d}P$ pro každou $A \in \mathcal{F}$, kde Λ je nezáporná náhodná veličina splňující $\mathrm{E}[\Lambda] = 1$. Ať dále $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ je σ-algebra a Y je náhodná veličina splňující $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) \cap L^1(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$. Pak platí*

$$\mathrm{E}[Y\Lambda|\mathcal{G}] = \tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}], \ \ s.j.$$

Důkaz. Náhodná veličina $\tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}]$ je z definice $\mathcal{G}$-měřitelná. Stačí tedy ověřit vlastnost ii) z definice podmíněné střední hodnoty. Ať $A \in \mathcal{G}$, potom

$$\begin{aligned} \int_A \tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}] \ \mathrm{d}P &= \int_A \mathrm{E}[\Lambda\tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] \ \mathrm{d}P = \int_A \Lambda\tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}] \ \mathrm{d}P \\ &= \int_A \tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}] \ \mathrm{d}\tilde{P} = \int_A Y \ \mathrm{d}\tilde{P} = \int_A Y\Lambda \ \mathrm{d}P. \end{aligned}$$

Z definice podmíněné střední hodnoty tedy $\mathrm{E}[Y\Lambda|\mathcal{G}] = \tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}]\mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}]$ s.j. □

Toto lemma budeme v následující větě používat ve formě

$$\tilde{\mathrm{E}}[Y|\mathcal{G}] = \frac{\mathrm{E}[Y\Lambda|\mathcal{G}]}{\mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}]}, \ \ s.j. \tag{2.3}$$

kde Λ bude P-s.j. kladná náhodná veličina. Potom je i $\mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}]$ P-s.j. kladná. Kdyby totiž pro $A = \{\omega \in \Omega; \mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}](\omega) \le 0\}$ platilo $P(A) > 0$, pak

$$0 < \int_A \Lambda \ \mathrm{d}P = \int_A \mathrm{E}[\Lambda|\mathcal{G}] \ \mathrm{d}P \le 0,$$

což je spor. Rovnost (2.3) je tedy dobře definovaná P-s.j. a díky absolutní spojitosti $\tilde{P}$ vůči P i $\tilde{P}$-s.j. V následující větě budeme opět používat značení $\boldsymbol{X_n} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)^\top$ a pro $n \in \mathbb{N}$ zavedeme značení pro přírůstky procesu X jako $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$.

Věta 4 (Zobecněná Girsanovova)**.** *Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a na něm definovaný náhodný proces $X = \{X_n\}_{n=0}^\infty$ splňující:*

i) $X_n = A_n + M_n$ s.j. pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, kde $M = \{M_n\}_{n=0}^\infty$ je $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal, $A = \{A_n\}_{n=0}^\infty$ je $(\mathcal{F}_n^X)$-predikovatelný proces.

ii) Pro každé $n \in \mathbb{N}$ mají náhodná veličina ΔM_n a náhodný vektor $\boldsymbol{X_{n-1}}$ absolutně spojité sdružené rozdělení vůči $\lambda \otimes \nu_n$, kde λ je Lebesgueova míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a ν_n je σ-konečná míra na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, přičemž nosič tohoto rozdělení je vždy celé $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $f_k(m_k|\boldsymbol{x_{k-1}}), m_k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x_{k-1}} \in \mathbb{R}^k$, podmíněnou hustotu veličiny ΔM_k za podmínky $\boldsymbol{X_{k-1}}$ vůči míře $\lambda \otimes \nu_k$ a položme

$$\lambda_k = \frac{f_k(\Delta A_k + \Delta M_k|\boldsymbol{X_{k-1}})}{f_k(\Delta M_k|\boldsymbol{X_{k-1}})}.$$

Definujeme-li proces $\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ předpisem $\Lambda_0 = 1$ a $\Lambda_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak se jedná o $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal. Nechť dále $N \in \mathbb{N}$ pevné, definujeme-li míru $\tilde{P}_N$ předpisem

$$\tilde{P}_N(A) = \int_A \Lambda_N \, \mathrm{d}P, \ A \in \mathcal{F}, \tag{2.4}$$

pak se jedná o pravděpodobnostní míru a pro $n = 0{,}1, \ldots, N-1$ platí

$$\tilde{\mathrm{E}}_N[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = X_n, \ s.j.$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že Λ je $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal. Podívejme se na integrovatelnost veličin λ_k, $k \in \mathbb{N}$. Veličina ΔA_k je $\mathcal{F}_{k-1}^X$-měřitelná a proto dle lemmatu 1 existuje měřitelná funkce $a_k : (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taková, že

$$\Delta A_k = a_k(\boldsymbol{X_{k-1}}), \ s.j. \tag{2.5}$$

Označme $g_k(m_k, \boldsymbol{x_{k-1}})$ sdruženou hustotu veličiny ΔM_k a náhodného vektoru $\boldsymbol{X_{k-1}}$ vůči $\lambda \otimes \nu_k$, která dle předpokladu ii) existuje. Potom můžeme psát

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\frac{f_k(\Delta A_k + \Delta M_k|\boldsymbol{X_{k-1}})}{f_k(\Delta M_k|\boldsymbol{X_{k-1}})}\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\frac{f_k(a_k(\boldsymbol{X_{k-1}}) + \Delta M_k|\boldsymbol{X_{k-1}})}{f_k(\Delta M_k|\boldsymbol{X_{k-1}})}\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \frac{f_k(a_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) + m_k|\boldsymbol{x_{k-1}})}{f_k(m_k|\boldsymbol{x_{k-1}})} g_k(m_k, \boldsymbol{x_{k-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_k) \otimes \nu_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \frac{g_k(a_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) + m_k, \boldsymbol{x_{k-1}})}{g_k(m_k, \boldsymbol{x_{k-1}})} g_k(m_k, \boldsymbol{x_{k-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_k) \otimes \nu_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}} g_k(a_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) + m_k, \boldsymbol{x_{k-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_k) \, \mathrm{d}\nu_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}} g_k(m_k, \boldsymbol{x_{k-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_k) \, \mathrm{d}\nu_k(\boldsymbol{x_{k-1}}) = 1.
\end{aligned}$$

Zde jsme v poslední rovnosti využili předpokladu ii) a použili lineární substituci. Veličiny λ_k jsou tedy integrovatelné a jejich střední hodnota je rovna 1. Nyní podobně ukážeme, že i veličiny Λ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, mají střední hodnotu rovnu 1. Budeme postupovat indukcí. Případ $n = 0$ je jasný a $n = 1$ už jsme dokázali v předchozím výpočtu. Nyní ať pro $n \geq 2$ platí $\mathrm{E}[\Lambda_{n-1}] = 1$. Díky vztahu (2.5) dokážeme pro všechna $k < n$ vyjádřit veličiny ΔM_k jako funkce vektoru $\boldsymbol{X_k}$. Z toho plyne, že existuje měřitelná funkce $\tilde{\Lambda}_{n-1} : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taková, že $\Lambda_{n-1} =$

$\tilde{\Lambda}_{n-1}(\boldsymbol{X_{n-1}})$. Pro střední hodnotu veličiny Λ_n tedy platí

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{\Lambda}_{n-1}(\boldsymbol{x_{n-1}}) \frac{f_n(a_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) + m_n|\boldsymbol{x_{n-1}})}{f_n(m_n|\boldsymbol{x_{n-1}})} g_n(m_n, \boldsymbol{x_{n-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_n) \otimes \nu_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{\Lambda}_{n-1}(\boldsymbol{x_{n-1}}) g_n(a_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) + m_n, \boldsymbol{x_{n-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_n) \otimes \nu_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n}} \tilde{\Lambda}_{n-1}(\boldsymbol{x_{n-1}}) \int_{\mathbb{R}} g_n(m_n, \boldsymbol{x_{n-1}}) \, \mathrm{d}\lambda(m_n) \, \mathrm{d}\nu_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) \\
&= \mathrm{E}[\Lambda_{n-1}] = 1.
\end{aligned}
$$

Předposlední rovnost plyne z toho, že vnitřní integrál je roven sdružené hustotě $\boldsymbol{X_{n-1}}$ vůči ν_n. Nyní už můžeme dokázat, že se skutečně jedná o martingal. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ totiž dle věty 2 platí

$$\mathrm{E}[\Lambda_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \Lambda_n \mathrm{E}[\lambda_{n+1}|\mathcal{F}_n^X], \; s.j.$$

díky $\mathcal{F}_n^X$-měřitelnosti Λ_n. Počítejme dále

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\frac{f_{n+1}(a_{n+1}(\boldsymbol{X_n}) + \Delta M_{n+1}|\boldsymbol{X_n})}{f_{n+1}(\Delta M_{n+1}|\boldsymbol{X_n})}\Big|\boldsymbol{X_n} = \boldsymbol{x_n}\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{f_{n+1}(a_{n+1}(\boldsymbol{x_n}) + m_{n+1}|\boldsymbol{x_n})}{f_{n+1}(m_{n+1}|\boldsymbol{x_n})} f_{n+1}(m_{n+1}|\boldsymbol{x_n}) \, \mathrm{d}\lambda(m_{n+1}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{n+1}(m_{n+1}|\boldsymbol{x_n}) \, \mathrm{d}\lambda(m_{n+1}) = 1,
\end{aligned}
$$

pro $P_{\boldsymbol{X_n}}$-s.v. $\boldsymbol{x_n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zde jsme opět využili předpoklad ii). Z toho dostáváme, že $\mathrm{E}[\Lambda_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \Lambda_n$. Proces Λ je tedy $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal a navíc je opět díky předpokladu ii) kladný skoro jistě. Buď $N \in \mathbb{N}$ pevné, pak Λ_N korektně definuje pravděpodobnostní míru dle předpisu (2.4). Nyní použijme lemma 3 tak, jak jsme avizovali, tj.

$$\tilde{\mathrm{E}}_N[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]}|\mathcal{F}_{n-1}^X] = \frac{\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]}\Lambda_N|\mathcal{F}_{n-1}^X]}{\mathrm{E}[\Lambda_N|\mathcal{F}_{n-1}^X]}, \; s.j.$$

Jmenovatel dále upravíme přímo z martingalové vlastnosti. Pro úpravu čitatele využijeme toho, že pro Y $\mathcal{F}_n^X$-měřitelnou a $A \in \mathcal{F}_{n-1}^X$ platí

$$
\begin{aligned}
\int_A \mathrm{E}[Y\Lambda_N|\mathcal{F}_{n-1}^X] \, \mathrm{d}P &= \int_A Y\Lambda_N \, \mathrm{d}P = \int_A \mathrm{E}[Y\Lambda_N|\mathcal{F}_n^X] \, \mathrm{d}P \\
&= \int_A Y\mathrm{E}[\Lambda_N|\mathcal{F}_n^X] \, \mathrm{d}P = \int_A Y\Lambda_n \, \mathrm{d}P.
\end{aligned}
$$

Zde jsme opakovaně použili vlastnost ii) podmíněné střední hodnoty z definice 1 a martingalovou vlastnost procesu Λ. Dokázali jsme, že platí

$$\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]}\Lambda_N|\mathcal{F}_{n-1}^X] = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]}\Lambda_n|\mathcal{F}_{n-1}^X], \; s.j.$$

Po dosazení máme

$$\frac{\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]}\Lambda_n|\mathcal{F}_{n-1}^X]}{\Lambda_{n-1}} = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]}\lambda_n|\mathcal{F}_{n-1}^X], \; s.j.$$

Opět počítejme

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]} \frac{f_n(a_n(\boldsymbol{X_{n-1}}) + \Delta M_n | \boldsymbol{X_{n-1}})}{f_n(\Delta M_n | \boldsymbol{X_{n-1}})} \Big| \boldsymbol{X}_{n-1} = \boldsymbol{x_{n-1}}\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a_n(\boldsymbol{x_{n-1}})+m_n \le t]} \frac{f_n(a_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) + m_n | \boldsymbol{x_{n-1}})}{f_n(m_n | \boldsymbol{x_{n-1}})} f_n(m_n | \boldsymbol{x_{n-1}}) \ \ \mathrm{d}\lambda(m_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a_n(\boldsymbol{x_{n-1}})+m_n \le t]} f_n(a_n(\boldsymbol{x_{n-1}}) + m_n | \boldsymbol{x_{n-1}}) \ \ \mathrm{d}\lambda(m_n) \\
&= \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta M_n \le t]} | \boldsymbol{X_{n-1}} = \boldsymbol{x_{n-1}}],
\end{aligned}$$

pro $P_{\boldsymbol{X_{n-1}}}$-s.v. $\boldsymbol{x_{n-1}} \in \mathbb{R}^n$. Ukázali jsme rovnost

$$\tilde{\mathrm{E}}_N[\mathbf{1}_{[\Delta X_n \le t]} | \boldsymbol{X_{n-1}} = \boldsymbol{x_{n-1}}] = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\Delta M_n \le t]} | \boldsymbol{X_{n-1}} = \boldsymbol{x_{n-1}}],$$

což je rovnost podmíněných distribučních funkcí. Z toho dostáváme i rovnost podmíněných středních hodnot, tj. pro $n = 1, \dots, N$ platí

$$\tilde{\mathrm{E}}_N[\Delta X_n | \mathcal{F}^X_{n-1}] = \mathrm{E}[\Delta M_n | \mathcal{F}^X_{n-1}] = 0, \ \ s.j.$$

To už je ekvivalentní našemu požadovanému výsledku $\tilde{\mathrm{E}}_N[X_n | \mathcal{F}^X_{n-1}] = X_{n-1}$ s.j.

□

Příklad. Vraťme se nyní k našemu procesu X z (2.1). Pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \varepsilon_k, \ \ s.j.$$

kde položíme $\sum_{k=1}^{0} \mu_k = \sum_{k=1}^{0} \sigma_k \varepsilon_k = 0$. Podle notace ze zobecněné Girsanovovy věty zde platí $\Delta A_n = \mu_n$ a $\Delta M_n = \sigma_n \varepsilon_n$. Pokud jsou splněny předpoklady předchozí věty, pak je ona podmíněná hustota ΔM_n hustota $\sigma_n \varepsilon_n$ za podmínky $\sigma_n = \tilde{\sigma}_n$, tj.

$$f_n(x | \tilde{\sigma}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \tilde{\sigma}_n^2}} \exp\Big\{ - \frac{x^2}{2\tilde{\sigma}_n^2} \Big\}, \ \ x \in \mathbb{R}, \tilde{\sigma}_n \in \mathbb{R}.$$

Veličiny λ_k, $k \in \mathbb{N}$, z předcházející věty mají v tomto případě tvar

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{f_k(\mu_k + \sigma_k \varepsilon_k | \sigma_k)}{f_k(\sigma_k \varepsilon_k | \sigma_k)} \\
&= \exp\Big\{ - \frac{(\mu_k + \sigma_k \varepsilon_k)^2}{2\sigma_k^2} + \frac{(\sigma_k \varepsilon_k)^2}{2\sigma_k^2} \Big\} \\
&= \exp\Big\{ - \frac{\mu_k}{\sigma_k} \varepsilon_k - \frac{1}{2} \Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k} \Big)^2 \Big\}.
\end{aligned}$$

Pokud pro $N \in \mathbb{N}$ položíme $Z_N = \prod_{k=1}^{N} z_k$, po upravení vyjde přesně náhodná veličina (2.2) a X je vůči míře $\tilde{P}_N$ $(\mathcal{F}^X_n)$-martingal do konečného času N.

Příklad. Zmiňme jednu zajímavou aplikaci této věty. Výpočty středních hodnot některých náhodných veličin se dají výrazně zjednodušit. Z důkazu zobecněné Girsanovovy věty vyplývá, že podmíněné rozdělení $\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$ vůči míře $\tilde{P}_N$ je stejné, jako podmíněné rozdělení $\sigma_n \varepsilon_n$ vůči původní míře P. Položme $\sigma_n = 1$ s.j.

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak ze stejného důvodu platí, že jsou veličiny $\{\mu_n+\varepsilon_n, n \leq N\}$ vůči míře $\tilde{P}_N$ vzájemně nezávislé protože ε_n je nezávislé s $\boldsymbol{X_{n-1}}$. Díky tomu můžeme lehce spočíst následující střední hodnotu s $\mu_n = \log n$ s.j.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k - N\Big)^2 \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \log k\Big\}\Big] \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\log k)^2\Big\}\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k - N\Big)^2 \exp\Big\{-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \log k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\log k)^2\Big\}\Big] \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\log k)^2\Big\}\tilde{\mathrm{E}}_N\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k + \sum_{k=1}^{N}\log k - \sum_{k=1}^{N}\log k - N\Big)^2\Big] \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\log k)^2\Big\}\Big(N + \Big(-\log N! - N\Big)^2\Big) \\
&= \exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\log k)^2\Big\}\Big(N + \Big(\log N! + N\Big)^2\Big).
\end{aligned}
$$

Ve třetí rovnosti jsme využili právě zmíněného poznatku a faktu, že součet nezávislých normálních náhodných veličin je opět normální náhodná veličina.

Nyní uveďme jednu známou větu z teorie martingalů v diskrétním čase, která ilustruje, že rozklad typu $X_n = A_n + M_n$ ve větě 4 není příliš omezující předpoklad. Předložme i důkaz, protože přímo nabízí konstruktivní návod, jak onen rozklad hledat.

Věta 5 (Doobův rozklad)**.** *Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$ je filtrovaný pravděpodobnostní prostor, $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $(\mathcal{F}_n)$-adaptovaný náhodný proces splňující $X_n \in L^1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pak existuje $(\mathcal{F}_n)$-predikovatelný proces $A = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující $A_0 = 0$ s.j a $(\mathcal{F}_n)$-martingal $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$X_n = A_n + M_n \quad s.j.$$

Tento rozklad je s.j. jednoznačný.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujme

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}), \\
M_n &= X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}[X_k|\mathcal{F}_{k-1}]).
\end{aligned}
$$

$A_0 = 0$ a $M_0 = X_0$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost $X_n = A_n + M_n$. Náhodná veličina A_n je součtem $\mathcal{F}_{n-1}$-měřitelných veličin a tedy $A = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $(\mathcal{F}_n)$-predikovatelný proces. Pro náhodnou veličinu M_n platí, že je součtem integrovatelných veličin a je tedy také integrovatelná. Dále

$$\mathrm{E}[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathrm{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathrm{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0, \quad s.j.$$

Proces $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tedy $(\mathcal{F}_n)$-martingal. Požadovaný rozklad tedy existuje. Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že existuje jiný takový rozklad $X_n =$

$\tilde{A}_n + \tilde{M}_n$. Položme $Y_n = M_n - \tilde{M}_n$, z toho nicméně plyne, že $Y_n = \tilde{A}_n - A_n$ s.j. Proces $Y = \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tedy $(\mathcal{F}_n)$-martingal a současně $(\mathcal{F}_n)$-predikovatelný. Z toho dostáváme

$$Y_n = \mathrm{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1}, \quad s.j.$$

Současně ale $Y_0 = \tilde{A}_0 - A_0 = 0$ s.j. Induktivně tedy dostáváme, že $Y_n = 0$ s.j. pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Z toho již plyne jednoznačnost rozkladu s.j.

□

Na závěr této sekce ještě uveďme, že zobecněná Girsanovova věta nedává jedinou možnost, jak takovou míru zkonstruovat. Například pro proces X definovaný v (2.1) lze definovat míru $\tilde{P}_N$ přes hustotu

$$\Lambda_N = \prod_{k=1}^{N} \frac{\sigma_k \phi(\mu_k + \sigma_k \varepsilon_k)}{\phi(\varepsilon_k)},$$

kde ϕ je hustota rozdělení $\mathcal{N}(0{,}1)$. Zde využíváme specifického tvaru procesu X a platí, že přírůstky ΔX_n mají pod touto mírou podmíněné rozdělení $\mathcal{N}(0{,}1)$ na rozdíl od rozdělení $\mathcal{N}(0{,}\sigma_k^2)$, jako při konstrukci ze zobecněné Girsanovovy věty. Myšlenka důkazu je velmi podobná jako u zmiňované věty a lze ji najít v článku Elliott (1994).

2.3 Rozšíření na celý proces

Pojďme se nyní podívat na to, jak definovat novou míru $\tilde{P}$ tak, aby celý proces $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ byl $(\mathcal{F}_n^X)$-martingalem vůči této míře a ne pouze do konečného času N. Tedy aby pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platilo

$$\tilde{\mathrm{E}}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = X_n, \; s.j.$$

Využijeme poznatků z přecházející kapitoly, kde jsme ukázali, že za jistých podmínek dokážeme takovou míru zkonstruovat, ale pouze do konečného času. Předpokládejme tedy, že máme daný konkrétní proces X a pro něj nezáporný $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal $\Lambda = \{\Lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\Lambda_0 = 1$ s.j., který definuje posloupnost pravděpodobnostních měr $\{\tilde{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde pro $N \in \mathbb{N}$ je proces X vůči míře $\tilde{P}_N$ martingal do konečného času N. Hledanou míru definujeme na σ-algebře

$$\mathcal{F}_\infty^X = \sigma(X) = \sigma\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^X\Big)$$

a to tak, aby pro $A \in \mathcal{F}_n^X$ splňovala

$$\tilde{P}(A) = \tilde{P}_n(A) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_n]. \tag{2.6}$$

Existenci takovéto míry ukážeme přes Daniellovu-Kolmogorovu větu, kterou uvedeme v její diskrétní verzi.

Věta 6 (Daniell-Kolmogorov). *Mějme systém $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde pro $n \in \mathbb{N}_0$ je μ_n je borelovská pravděpodobnostní míra na $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}))$. Ať $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje*

$$\mu_{n+k}(A \times \mathbb{R}^k) = \mu_n(A), \; \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N} \textit{ a } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})).$$

Potom existuje právě jedna pravděpodobnostní míra μ na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každou $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$ platí

$$\mu(A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots) = \mu_n(A). \tag{2.7}$$

Důkaz. Lze najít v knize Štěpán (1987, Kapitola 1, Věta 9.4)

□

Pro $n \in \mathbb{N}_0$ položme

$$\mu_n(A) = \tilde{P}_n([\boldsymbol{X_n} \in A]),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Snadno ověříme, že $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvoří konzistentní systém borelovských pravděpodobnostních měr. Ať $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, pak

$$\begin{aligned}
\mu_{n+k}(A \times \mathbb{R}^k) &= \tilde{P}_{n+k}([\boldsymbol{X_{n+k}} \in A \times \mathbb{R}^k]) = \\
&= \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\boldsymbol{X_{n+k}} \in A \times \mathbb{R}^k]} \Lambda_{n+k}] = \\
&= \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\boldsymbol{X_n} \in A]} \Lambda_{n+k}] = \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\boldsymbol{X_n} \in A]} \Lambda_{n+k} | \mathcal{F}_n^X]] = \\
&= \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\boldsymbol{X_n} \in A]} \Lambda_n] = \\
&= \mu_n(A)
\end{aligned}$$

Existuje tedy právě jedna pravděpodobnostní míra μ splňující (2.7). Dále $\mathcal{F}_\infty^X$ obsahuje přesně množiny tvaru $[X \in A]$, kde $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Definujme tedy

$$\tilde{P}([X \in A]) = \mu(A). \tag{2.8}$$

Pak $\tilde{P}$ splňuje náš poždavek (2.6). Vůči míře $\tilde{P}$ je tedy celý proces X $(\mathcal{F}_n^X)$-martingal, protože vlastnost $\tilde{\mathrm{E}}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = X_n$ je třeba vždy ověřovat na množinách v $\mathcal{F}_n^X$. Nyní by nás mohla zajímat otázka, zda platí $\tilde{P} \ll P$? A pokud ne, lze najít nutné nebo postačující podmínky? Jak později uvidíme, platnost $\tilde{P} \ll P$ se nám podaří úplně charakterizovat. Ještě předtím ale budeme potřebovat několik poznatků z teorie martingalů a náhodných veličin.

Věta 7 (Doobova věta o konvergenci)**.** *Ať $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$ je filtrovaný pravděpodobnostní prostor a $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $(\mathcal{F}_n)$-martingal. Jestliže platí*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{E}[|X_n|] < \infty, \tag{2.9}$$

pak existuje náhodná veličina X_∞ taková, že $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} X_\infty$ a $X_\infty \in L^1$.

Důkaz. Lze najít v knize Štěpán (1987, Kapitola 6, Věta 3.1).

□

Všimněme si, že podmínka (2.9) je automaticky splněna, jestliže je X nezáporný. Pak totiž pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\mathrm{E}[|X_n|] = \mathrm{E}[X_n] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X_n|\mathcal{F}_0]] = \mathrm{E}[X_0] = \mathrm{E}[|X_0|] < \infty.$$

V případě procesu Λ bychom mohli chybně dojít k závěru, že při existenci limity s konečnou střední hodnotou musí jistě platit

$$\tilde{P}(A) = \int_A \Lambda_\infty \,\mathrm{d}P,\ A \in \mathcal{F}_\infty^X. \tag{2.10}$$

To ale není automaticky zaručeno, samotná martingalová vlastnost společně s $\mathrm{E}[\Lambda_n] = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ ještě nezaručuje platnost $\mathrm{E}[\Lambda_\infty] = 1$. To ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad. Mějme dán markovský čas

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}; \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \geq 1\},$$

kde veličny ε_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou definovány jako v (2.1). Zákon iterovaného logaritmu, který lze nalézt v knize Štěpán (1987, Kapitola 7, Věta 3.6), říká, že

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k}{\sqrt{2\log\log n}} = 1, \ \ s.j.$$

Z toho plyne, že $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \infty$ s.j. a tedy platí $P(\tau < \infty) = 1$. Zvolme nyní $\sigma_n = 1$, $\mu_1 = 1$ s.j. a pro $n > 1$ položme $\mu_n = \mathbf{1}_{A_n}$, kde $A_n = [\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \varepsilon_k < 1]$. Pak platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z_\infty] &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varepsilon_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \Big\}\Big] \\
&\leq \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varepsilon_k \Big\}\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{ - \sum_{k=1}^{\tau} \varepsilon_k \Big\}\Big] \\
&\leq \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Tedy $\tilde{P}$ v (2.10) by pro případ hustot z klasické Girsanovovy věty vůbec nemohla být pravděpodobnostní míra.

Věta 8. *Buďte $X_\infty, X_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, náhodné veličiny definované na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Potom $X_\infty, X_n \in L^1$ a $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X_\infty$ právě tehdy, když $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X_\infty$ a veličiny $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ jsou stejnoměrně integrovatelné, tj.*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{E}[|X_n| \mathbf{1}_{[|X_n| \geq N]}] = 0.$$

Důkaz. Lze najít v knize Lachout (2022, Věta 6.10).

□

Už jen poznamenejme, že konvergence skoro jistě implikuje konvergenci v pravděpodobnosti. Nyní jsme již připraveni odpovědět na naši původní otázku.

Věta 9. *Ať je $\tilde{P}$ definovaná jako v (2.8), tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ splňuje*

$$\tilde{P}(A) = \tilde{P}_n(A) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_n],\ A \in \mathcal{F}_n^X.$$

Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

i) $\tilde{P} \ll P$.

ii) *Veličiny $\{\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ jsou stejnoměrně integrovatelné.*

iii) $\mathrm{E}[\Lambda_\infty] = 1$.

Důkaz. *i*) $\Rightarrow$ *ii*): Jak jsme poznamenali nad větou, nezápornost procesu Λ_n implikuje, že platí podmínka (2.9) a tedy dle věty 7 existuje náhodná veličina Λ_∞ splňující $\Lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \Lambda_\infty$ a $\Lambda_\infty \in L^1$. Z tohoto faktu a našeho předpokladu plyne

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \Lambda_n < \infty\right) = 1 = \tilde{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \Lambda_n < \infty\right).$$

Díky tomuto poznatku již můžeme dokázat stejnoměrnou integrovatelnost přímo z definice. Pro každé $n \in \mathbb{N}_0, N \in \mathbb{N}$ máme odhad

$$\mathrm{E}[\Lambda_n \mathbf{1}_{[\Lambda_n \geq N]}] = \tilde{P}(\Lambda_n \geq N) \leq \tilde{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \Lambda_n \geq N\right).$$

Dále pak ze spojitosti míry

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{E}[\Lambda_n \mathbf{1}_{[\Lambda_n \geq N]}] \leq \tilde{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \Lambda_n \geq N\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \tilde{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \Lambda_n = \infty\right) = 0.$$

ii) $\Rightarrow$ *iii*): Díky větě 8 dostáváme konvergenci v L_1, tj. $\Lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_1} \Lambda_\infty$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ pak platí

$$|\mathrm{E}[\Lambda_n] - \mathrm{E}[\Lambda_\infty]| \leq \mathrm{E}[|\Lambda_n - \Lambda_\infty|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Jelikož $\mathrm{E}[\Lambda_n] = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, pak i nutně $\mathrm{E}[\Lambda_\infty] = 1$.
iii) $\Rightarrow$ *i*): Z trojúhelníkové nerovnosti máme pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Lambda_\infty + \Lambda_n - |\Lambda_\infty - \Lambda_n| \geq 0.$$

S použitím Fatouova lemmatu dospějeme k nerovnosti

$$\begin{aligned} 2\mathrm{E}[\Lambda_\infty] &\leq \liminf_{n\to\infty} \Big(\mathrm{E}[\Lambda_\infty] + \mathrm{E}[\Lambda_n] - \mathrm{E}[|\Lambda_\infty - \Lambda_n|]\Big) \\ &= 2 - \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}[|\Lambda_\infty - \Lambda_n|]. \end{aligned}$$

Po odečtení $2\mathrm{E}[\Lambda_\infty] = 2$ z obou stran dostaneme

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}[|\Lambda_\infty - \Lambda_n|] \leq 0,$$

což už implikuje $\mathrm{E}[|\Lambda_\infty - \Lambda_n|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$, $A \in \mathcal{F}_n^X$ a všechna $m \geq n$ máme

$$\tilde{P}(A) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_n] = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_m].$$

Díky konvergenci v L_1 dostáváme

$$|\mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_m] - \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_\infty]| \leq \mathrm{E}[|\mathbf{1}_A \Lambda_m - \mathbf{1}_A \Lambda_\infty|] \leq \mathrm{E}[|\Lambda_m - \Lambda_\infty|] \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

A tedy nutně $\tilde{P}(A) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_A \Lambda_\infty]$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každou $A \in \mathcal{F}_n^X$. Z toho ihned plyne rovnost i na množině $\bigcup \mathcal{F}_n^X$. Z faktu, že $\bigcup \mathcal{F}_n^X$ je systém uzavřený na konečné průniky, plyne rovnost i na $\mathcal{F}_\infty^X$ a tedy $\tilde{P} \ll P$.

□

Dostáváme tedy velmi pěknou charakterizaci pro náš problém. Bohužel, obě ekvivaletní podmínky z předchozí věty jsou často těžko ověřovatelné v konkrétních příkladech. Proto se v následující kapitole omezíme na již několikrát komentovaný proces $Z = \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovaný v (2.2) a budeme se zajímat pouze o postačující podmínky. Na závěr jen podotkněme, že jednou postačující podmínkou pro stejnoměrnou integrovatelnost veličin $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je existence $\varepsilon > 0$ takového, že

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{E}[|Y_n|^{1+\varepsilon}] < \infty.$$

Důkaz tohoto tvrzení lze najít v Lachout (2022, Lemma 5.15).

3. Momentové podmínky pro absolutní spojitost

Již od původního zveřejnění Girsanovovy věty ve spojitém čase se mnozí matematici, hlavně ti z okolí I. Girsanova, začali zabývat postačujícími podmínkami pro $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$, samozřejmě v kontextu spojitého času. Cílem této kapitoly je tedy zformulovat a dokázat tyto podmínky pro diskrétní čas. Jelikož $Z_0 = 1$ s.j., bude stačit formulovat tyto podmínky pro veličiny $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$.

3.1 Novikovova podmínka

Začněme s nejslabším tvrzením z tohoto repertoáru, jak ale uvidíme později, použijeme ho k důkazu silnějších vět.

Lemma 10 (Lipcer-Širjaev)**.** *Nechť existuje $\varepsilon > 0$ takové, že*

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big)\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big] < \infty, \tag{3.1}$$

pak jsou $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ stejnoměrně integrovatelné.

Důkaz. Označme $\beta_k = -\mu_k/\sigma_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Pak tedy máme

$$Z_n = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\Big\}. \tag{3.2}$$

Nyní ať $\varepsilon > 0$ jako v (3.1). Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\delta(1+\delta) \leq \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)}. \tag{3.3}$$

To určitě lze, protože výraz napravo je kladné číslo a obraz funkce $x \mapsto x(1+x)$, $x \in (0,\infty)$, je interval $(0,\infty)$. Dále položme $p = 1+\varepsilon$ a $q = (1+\varepsilon)/\varepsilon$. Všimněme si, že platí $1/p + 1/q = 1$. Nyní pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$Z_n^{(1)} = \exp\Big\{(1+\delta)\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_n - \frac{p(1+\delta)^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\Big\}$$
$$Z_n^{(2)} = \exp\Big\{\Big(\frac{p(1+\delta)^2}{2} - \frac{1+\delta}{2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\Big\}.$$

Z vlastností exponenciály máme $(Z_n)^{1+\delta} = Z_n^{(1)}Z_n^{(2)}$ a tedy z Hölderovy nerovnosti platí

$$\mathrm{E}[(Z_n)^{1+\delta}] = \mathrm{E}[Z_n^{(1)}Z_n^{(2)}] \leq (\mathrm{E}[(Z_n^{(1)})^p])^{1/p}(\mathrm{E}[(Z_n^{(2)})^q])^{1/q}. \tag{3.4}$$

Na pravé straně ale můžeme výraz zjednodušit. Položíme li $\tilde{\beta}_k = p(1+\delta)\beta_k$, dostáváme nový proces

$$(Z_n^{(1)})^p = \tilde{Z}_n = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}\tilde{\beta}_k\varepsilon_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\beta}_k^{\,2}\Big\}.$$

Stejně jako u původního Z se jedná o martingal a platí $\mathrm{E}[\tilde{Z}_n] = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost (3.4) se nám tedy zjednodušuje na

$$\mathrm{E}[(Z_n)^{1+\delta}] \leq (\mathrm{E}[(Z_n^{(2)})^q])^{1/q}. \tag{3.5}$$

Pokud rozepíšeme proces ve střední hodnotě, vidíme, že platí

$$(Z_n^{(2)})^q = \exp\Big\{\phi(\varepsilon, \delta) \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\Big\},$$

kde

$$\phi(\varepsilon, \delta) = \frac{(1+\varepsilon)^2(1+\delta)^2 - (1+\varepsilon)(1+\delta)}{2\varepsilon}.$$

Nyní upravme a odhadněme výraz $\phi(\varepsilon, \delta)$ shora

$$\begin{aligned}
\phi(\varepsilon, \delta) &= \frac{(1+\varepsilon)(1+\delta)[(1+\varepsilon)(1+\delta) - 1)]}{2\varepsilon} \\
&= \frac{(1+\varepsilon)(1+\delta)(\varepsilon + \delta + \varepsilon\delta)}{2\varepsilon} \\
&= \frac{(1+\varepsilon)^2(1+\delta)\delta + (1+\delta)(1+\varepsilon)\varepsilon}{2\varepsilon} \\
&= \frac{(1+\varepsilon)^2(1+\delta)\delta + \varepsilon + \varepsilon^2 + \delta(1+\varepsilon)\varepsilon}{2\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 + \delta(1+\varepsilon)[(1+\delta)(1+\varepsilon) + \varepsilon]}{2\varepsilon} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 + \delta(1+\varepsilon)(1+\delta)(1+2\varepsilon)}{2\varepsilon} \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} \\
&= \frac{1}{2} + \varepsilon,
\end{aligned}$$

kde jsme v druhé nerovnosti použili volbu (3.3). Dohromady tedy máme

$$\mathrm{E}[(Z_n^{(2)})^q] \leq \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\Big(\frac{1}{2} + \varepsilon\Big) \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\Big\}\Big] \leq \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\Big(\frac{1}{2} + \varepsilon\Big) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2\Big\}\Big].$$

Pomocí nerovnosti (3.5) dostáváme

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[Z_n^{1+\delta}] \leq \Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big(\Big(\frac{1}{2} + \varepsilon\Big) \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2\Big)\Big]\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

což nám dává požadovaný výsledek.

□

R. Lipcer a A. Širjaev dokázali tuto podmínku v článku Lipcer a Širjaev (1972). Zde se nabízí otázka, zda je možno v podmínce (3.1) položit $\varepsilon = 0$ a zachovat platnost tvrzení. S průlomem přišel až Širjaeův student A. Novikov Novikov (1972), který dokázal, že odpověď na tuto otázku je pozitivní. Pro důkaz jeho tvrzení ale použijeme alternativní jednodušší důkaz od N. Krylovova z Krylov (2002), který převedeme do diskrétní podoby.

Věta 11 (Krylov 1)**.** *Nechť pro všechna* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ *platí*

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big] < \infty \tag{3.6}$$

a dále ať

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big]\Big)^{\varepsilon} = 1. \tag{3.7}$$

Potom platí $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$.

Důkaz. Jako v předchozím důkazu použijme značení $\beta_k = -\mu_k/\sigma_k$. Veličiny Z_n jsou nezáporné a z Fatouova lemmatu máme

$$\mathrm{E}[Z_\infty] = \mathrm{E}[\liminf_{n\to\infty} Z_n] \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[Z_n] = \liminf_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Ukažme nyní opačnou nerovnost. Pro $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$ definujme nový proces $Z^{(\varepsilon)}$ s $Z_0^{(\varepsilon)} = 1$ s.j. a pro $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n^{(\varepsilon)} = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(\varepsilon)}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\beta_k^{(\varepsilon)})^2\Big\},$$

kde $\beta_k^{(\varepsilon)} = (1-2\varepsilon)\beta_k$. Podobně jako v důkazu předchozí věty, opět se jedná o martingal a $\mathrm{E}[Z_n^{(\varepsilon)}] = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Současně pro něj platí

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1+\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k^{(\varepsilon)})^2\Big\}\Big] &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big]\\ &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon(3-4\varepsilon^2)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Jelikož $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$, pak platí $3/10 \ge \varepsilon(3-4\varepsilon^2) \ge 0$. Z předpokladu (3.6) tedy plyne

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1+\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k^{(\varepsilon)})^2\Big\}\Big] < \infty.$$

Pro všechna $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$ proces $Z^{(\varepsilon)}$ splňuje Lipcerovu-Širjaevovu podmínku a tedy platí

$$\mathrm{E}[Z_\infty^{(\varepsilon)}] = 1.$$

Za použití Hölderovy nerovnosti s $p = 1/(2\varepsilon)$ a $q = 1/(1-2\varepsilon)$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Z_\infty^{(\varepsilon)}] &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(\varepsilon)}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k^{(\varepsilon)})^2\Big\}\Big]\\ &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}^{(1-2\varepsilon)}\exp\Big\{\frac{2\varepsilon(1-2\varepsilon)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big]\\ &\le \Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big]\Big)^{(1-2\varepsilon)}\Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{(1-2\varepsilon)}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big]\Big)^{2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Pro limitní přechod $\varepsilon \to 0^+$ dostáváme v této nerovnosti, díky předpokladu (3.7), výraz $1 \le \mathrm{E}[Z_\infty]$. Dohromady $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$.

□

Jak nyní ukážeme, Novikovova podmínka je přímým důsledkem Krylovovy 1. věty. I když je tedy Krylovova 1. věta silnější tvrzení, stále je Novikovova podmínka asi nejznámější výsledek tohoto typu a také se lépe ověřuje.

Důsledek 12 (Novikov)**.** *Nechť platí*

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big] < \infty.$$

Potom platí $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$.

Důkaz. Pro $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ platí

$$1 \le \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big] \le \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big] < \infty,$$

což implikuje obě podmínky Krylovovy věty.

□

3.2 Kazamakiho kritérium

Pojďme se podívat na ještě jednu momentovou podmínku. Ta naopak vyžaduje konečnost momentů týkající se posloupnosti náhodných veličin

$$\{M_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3.8}$$

Oné podmínce se říká Kazamakiho kritérium, jehož původní důkaz je opět značně komplikovaný Kazamaki (1977). Naštěstí i tady nám práce I. Krylova z článku Krylov (2002) pomůže. K formulaci a důkazu Kazamakiho kritéria v diskrétním čase opět využijeme Krylovův elegantní důkaz. Nejprve opět jeden příspěvek od již několikrát zmiňovaného J. Dooba z teorie martingalů.

Věta 13 (Doobova L^p-nerovnost)**.** *Ať* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}, P)$ *je filtrovaný pravděpodobnostní prostor a* $X = \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ *je* $(\mathcal{F}_n)$*-martingal. Pak pro* $p > 1$ *platí*

$$\mathrm{E}[(\sup_{k\le n}|X_k|)^p] \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathrm{E}[|X_n|^p].$$

Důkaz. Lze najít v práci Kallenberg (1997, Věta 6.16). □

Nyní uveďme lemma, které je obdobou Liptserovy-Shiryaeovy podmínky a poslouží dále k důkazu Kazamakiho kritéria.

Lemma 14. *Nechť existuje* $\varepsilon > 0$ *takové, že*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big)\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big] < \infty. \tag{3.9}$$

Potom platí $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$.

Důkaz. Položme C_ε rovno výrazu ve (3.9). Opět dodržme naší notaci z předchozích vět a položme $\beta_k = -\mu_k/\sigma_k$. Buď nyní $\varepsilon > 0$ splňující předpoklad (3.9) jelikož platí

$$\lim_{x\to 1^+}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2},$$

lze najít $p > 1$ splňující

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\frac{p}{p-1} < \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále podobně

$$\lim_{x\to 1^+}\left(1-\frac{1}{\sqrt{xp}}\right)x\frac{p}{p-1} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\frac{p}{p-1}$$

a tedy existuje $p > 1$ a $\delta > 1$ takové, že

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{\delta p}}\right)\delta\frac{p}{p-1} = (1-\gamma)\delta q < \frac{1}{2}+\varepsilon,$$

kde jsme položili $\gamma = 1/\sqrt{\delta p}$ a $q = p/(p-1)$. Při použití Doobovy L^δ-nerovnosti, dostáváme následující výraz pro vhodnou konečnou kladnou konstantu c_δ

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\left(\sup_{k\le n} Z_k\right)^\delta\right] &\le c_\delta \mathrm{E}\left[\exp\left\{\delta\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k - \frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^n \beta_k^2\right\}\right] \\
&= c_\delta \mathrm{E}\left[\exp\left\{\gamma\delta\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k - \frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^n \beta_k^2\right\}\exp\left\{(1-\gamma)\delta\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k\right\}\right] \\
&\le c_\delta\left(\mathrm{E}\left[Z_n^{(p\delta\gamma)}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathrm{E}\left[\exp\left\{(1-\gamma)\delta q\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k\right\}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c_\delta\left(\mathrm{E}\left[\exp\left\{(1-\gamma)\delta q\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k\right\}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c_\delta\left(\mathrm{E}\left[\exp\left\{(1-\gamma)\delta q\left(\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k\right)^+\right\}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c_\delta\left(\mathrm{E}\left[\exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\left(\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k\right)^+\right\}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c_\delta\left(\mathrm{E}\left[\exp\left\{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\sum_{k=1}^n \beta_k\varepsilon_k\right\}\mathbf{1}_{[M_n>0]}+1\right]\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c_\delta\Big(C_\varepsilon+1\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ve druhé nerovnosti jsme použili Hölderovu nerovnost a v předposlední nerovnosti jsme si exponenciálu rozdělili pomocí indikátorů na dva případy, kdy $M_n > 0$ a $M_n \le 0$. Na množině kde $M_n \le 0$, jsme poté odhadli exponenciálu shora číslem 1. Z Fatouova lemmatu pak dostáváme následující nerovnost

$$\mathrm{E}\left[\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right)^\delta\right] \le \liminf_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\left(\sup_{k\le n} Z_k\right)^\delta\right] \le c_\delta\Big(C_\varepsilon+1\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Jelikož $\delta > 1$, pak dostáváme i konečnost prvního (absolutního) momentu, tj. $\mathrm{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n] < \infty$, a máme tedy integrovatelnou majorantu pro použití Lebesgueovy věty. Dostáváme tedy $\mathrm{E}[Z_\infty] = \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[Z_n] = 1$. □

Velmi podobně jako její 1. variantu dokážeme i 2. Krylovovu větu.

Věta 15 (Krylov 2)**.** *Nechť pro všechna* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ *platí*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big] < \infty$$

a dále ať

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big]\Big)^{\varepsilon} = 1. \tag{3.10}$$

Potom platí $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$.

Důkaz. Důkaz provedeme podobně jako v 1. Krylovově větě. Pro $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ opět definujme nový proces $Z^{(\varepsilon)}$ s $\beta_k^{(\varepsilon)} = (1-\varepsilon)\beta_k$ stejně jako v (3.2). Ověřme podmínku předchozího lemmatu

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1+\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^{(\varepsilon)}\varepsilon_k\Big\}\Big] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{(1-\varepsilon^2)}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_k\Big\}\Big] < \infty.$$

Pro každé $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tedy platí $\mathrm{E}[Z_\infty^{(\varepsilon)}] = 1$. Dále Podle Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
1 &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^{(\varepsilon)}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k^{(\varepsilon)})^2\Big\}\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k - \frac{(1-\varepsilon)^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{(1-\varepsilon)^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big)\Big\}\exp\Big\{(1-\varepsilon)\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k\Big\}\Big] \\
&\le \Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\Big\}\Big]\Big)^{(1-\varepsilon)^2}\Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varepsilon_k\Big\}\Big]\Big)^{\varepsilon(2-\varepsilon)} \\
&\le \Big(\mathrm{E}[Z_\infty]\Big)^{(1-\varepsilon)^2}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varepsilon_k\Big\}\Big]\Big)^{\varepsilon(2-\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Podle předpokladu (3.10) činíme závěr, že $\mathrm{E}[Z_\infty] \ge 1$, opačná nerovnost opět plyne z Fatouova lemmatu a tedy $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$. □

Důsledek 16 (Kazamaki)**.** *Nechť platí*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big] < \infty. \tag{3.11}$$

Potom platí $\mathrm{E}[Z_\infty] = 1$.

Důkaz. Označme výraz v (3.11) symbolem C a opět položme $\beta_k = -\mu_k/\sigma_k$. Ať $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, Podobně jako v důkazu 2. Krylovovy věty platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big] &\le \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)^{+}\Big\}\Big] \\
&\le \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)^{+}\Big\}\Big] \\
&\le \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big] + 1 \\
&\le C + 1 < \infty.
\end{aligned}$$

Naopak pro každé $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2})$ platí

$$0 < \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1-\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big].$$

Z těchto dvou nerovností plyne platnost předpokladů 2. Krylovovy věty a tedy i požadovaný výsledek.

□

Poznamenejme, že Kazamakiho kritérium je silnější tvrzení, než Novikovova podmínka. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ totiž platí

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k\Big)\Big\}\Big] \\
&\leq \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\exp\Big\{\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big] \\
&\leq \Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{\sigma_k}\varepsilon_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\Big)^2\Big\}\Big]\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Platnost Novikovovy podmínky tedy implikuje platnost Kazamakiho kritéria.

Závěr

V této práci jsme zkoumali Girsanovovu větu v diskrétním čase a její zobecnění. Nejdříve jsme zformulovali základní pojmy a vyslovili potřebné věty pro další teorii. V druhé kapitole jsme uvedli klasickou Girsanovovu větu v diskrétním čase. Poté jsme tento výsledek zobecnili, tj. zformulovali a dokázali zobecněnou Girsanovovu větu pro mnohem obecnější typ procesů. Navázali jsme příkladem o aplikaci Girsanovovy věty pro zjednodušení výpočtu konkrétní střední hodnoty. Dále jsme se zabývali konstrukcí pravděpodobnostní míry $\tilde{P}$ tak, aby byl vůči ní celý proces martingal, zároveň jsme uvedli ekvivalentní podmínky pro absolutní spojitost této nové míry $\tilde{P}$ vůči původní míře. Ve třetí kapitole jsme věnovali pozornost formulaci Novikovovy podmínky a Kazamakiho kritéria v diskrétním čase a uvedli i jejich důkazy.

Za svůj vlastní přínos považuji formulaci a důkaz zobecněné Girsanovovy věty. Na základě inspirace z článku Elliott a Madan (1998), kde je podobná konstrukce uvažovaná pro procesy typu $X_n = A_n \cdot M_n$, jsem tuto větu zformuloval a dokázal pro procesy typu $X_n = A_n + M_n$, přičemž jsem ji doplnil o nutné předpoklady. Dále jsem ukázal, že klasická Girsanovova věta v diskrétním čase opravdu odpovídá té zobecněné a že jsou pro hustoty Z_N splněny všechny předpoklady.

Na příkladu 2.3 jsem ukázal, že veličiny Z_N nejsou samy o sobě stejnoměrně integrovatelné. Pro ověření stejnoměrné integrovatelnosti jsem ve třetí kapitole uvedl Novikovovu podmínku jako v Širjaev (1999, strana 441), k čemuž jsem přidal i její důkaz pro diskrétní čas. Poté jsem zformuloval a dokázal i Kazamakiho kritérium, taktéž pro diskrétní čas. Pro jejich důkazy jsem používal Krylovovy věty, které jsem opět přeformuloval do diskrétního času.

V neposlední řadě je důležité poznamenat, že se stále nabízejí otázky k hlubšímu prozkoumání. Například lze zkoumat, zda platí, jestli je konstanta $\frac{1}{2}$ v Novikovově podmínce, stejně jako ve spojitém čase, optimální v následujícím smyslu: Pro každé $\varepsilon > 0$ existují $(\mathcal{F}_n^X)$-predikovatelné procesy $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\mathrm{E}\left[\exp\left\{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right\}\right] < \infty,$$

ale současně $\mathrm{E}[Z_\infty] < 1$. Tato otázka se nabízí i pro Kazamakiho kritérium.

Seznam použité literatury

Elliott, R. J. (1994). Exact adaptive filters for Markov chains observed in Gaussian noise. *Automatica*, **30**(9), 1399–1408.

Elliott, R. J. a Madan, D. B. (1998). A discrete time equivalent martingale measure. *Mathematical finance*, **8**(2), 127–152.

Girsanov, I. V. (1960). On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. *Theory of Probability & Its Applications*, **5**(3), 285–301.

Kallenberg, O. (1997). *Foundations of modern probability*, volume 2. Springer.

Kazamaki, N. (1977). On a problem of Girsanov. *Tohoku Mathematical Journal*, **29**(4), 597–600.

Krylov, N. (2002). A simple proof of a result of A. Novikov. *arXiv preprint math/0207013*.

Lachout, P. (2022). *Teorie pravděpodobnosti*. Charles University in Prague, Karolinum Press.

Lipcer, R. Š. a Širjaev, A. (1972). On the absolute continuity of measures corresponding to processes of diffusion type relative to a Wiener measure. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **6**(4), 839.

Mansuy, R. a Sverdlove, R. (2009). The origins of the word "martingale". *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, **5**(1), 1–10.

Novikov, A. A. (1972). On an identity for stochastic integrals. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, **17**(4), 761–765.

Seidler, J. (2011). *Vybrané kapitoly ze stochastické analysy*. Matfyzpress.

Širjaev, A. (1999). *Essentials of stochastic finance: facts, models, theory*, volume 3. World scientific.

Štěpán, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti: Matematické základy*. Academia.