Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Taxikářská geometrie jako prostředek pro pochopení geometrických pojmů

Taxicab geometry as a tool for understanding geometric concepts

Bc. Lukáš Barborka

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: N M

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma Taxikářská geometrie jako prostředek pro pochopení geometrických pojmů potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. července 2024

Tímto bych chtěl velmi poděkovat Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D., za jeho motivaci, vedení, ochotu, cenné a podnětné připomínky a trpělivost.

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá jednou z neeuklidovských geometrií, nazývanou taxikářská geometrie, a poskytuje tak materiál vhodný ke studiu této problematiky, aniž by kladla velké nároky na matematické znalosti čtenáře. Je totiž podobná euklidovské souřadnicové geometrii.

Dosavadní výzkum ukazuje, že pozorováním vlastností útvarů a formulováním hypotéz v neeuklidovských geometriích mohou žáci a studenti lépe rozvíjet své pochopení euklidovské geometrii. Je navíc známo, že v matematice jsou definice nedílnou součástí pochopení pojmů, ale často nejsou žáky a studenty správně používány. Tato práce proto zkoumá a poskytuje důkazy o tom, jak žáci přenášejí své stávající poznání do prostředí taxikářské geometrie a analyzuje, jak mohla případně tato jejich činnost přispět k lepšímu porozumění pojmů a definic, a to díky častým krizovým momentům, na které zde naráželi. Poskytuje navíc i důkazy o tom, že přizpůsobováním a přenášením znalostí mezi euklidovskou a taxikářskou geometrií dochází u žáků k interakci mezi jejich stávajícími a nově nabytými schématy. Toto propojení může podpořit vznik koherentnějších a lépe strukturovaných kognitivních schémat, která jsou základem pro pokročilejší matematické myšlení a schopnost aplikovat získané poznatky i v jiném kontextu. Při návrhu vhodných pedagogických aktivit byla použita teorie APOS a teoretické rámce pro vzájemnou interakci schémat.

Výsledky práce ukazují, že začlenění taxikářské geometrie do výuky matematiky může obohatit vzdělávání žáků a přispět k jejich lepšímu matematickému myšlení a porozumění geometrickým pojmům.

KLÍČOVÁ SLOVA

Taxikářská geometrie, neeuklidovská geometrie, APOS, schéma, představa pojmu, definice pojmu.

ABSTRACT

This master's thesis focuses on one of the non-Euclidean geometries known as Taxicab geometry, providing material suitable for studying this subject without imposing significant demands on the reader's mathematical knowledge. It is akin to Euclidean coordinate geometry.

Existing research indicates that by observing the properties of shapes and formulating hypotheses in non-Euclidean geometries, students can develop a better understanding of Euclidean geometry. It is also known that, in mathematics, definitions are integral parts of understanding its concepts, and yet students often use them incorrectly. Therefore, this thesis examines and provides evidence of how students transfer their existing knowledge into the realm of Taxicab geometry and analyzes how this activity could potentially contribute to a better understanding of concepts and definitions, taking into account frequent misconcepts students encountered therein.

Additionally, it provides evidence that by adapting and transferring knowledge between Euclidean and Taxicab geometries, students engage in interaction between their existing and newly acquired schemas. This connection can support the development of more coherent and better structured cognitive schemas, which are fundamental for achieving a more advanced mathematical thinking and being able to apply acquired knowledge in different contexts. The design of suitable pedagogical activities drew upon APOS theory and theoretical frameworks for schema interaction.

The results of the thesis demonstrate that integrating Taxicab geometry into mathematics education can enrich students' learning experience and contribute to the enhancement of their mathematical thinking and understanding of geometric concepts.

KEYWORDS

Taxicab geometry, non-Euclidean geometry, APOS, schema, concept image, concept definition.

Obsah

Úvod

Matematika je často považována za vědu, která nás vede k logickému uspořádání světa: k „logu“. „Logos“ zde znamená v původním řeckém smyslu „legein“ nejen „slovo“ nebo „rozum“, ale také „usebrat“. Heidegger pak k tomuto termínu přidává další dimenzi – „uvlastnit“, tedy pochopit něco tak, že to přijmeme za své. Když se ponoříme hlouběji do matematiky, zjistíme, že její podstata spočívá v abstrakci. Aristotelova koncepce abstrakce jako „legein“ – schopnosti vybrat a pojmenovat – se rozšiřuje u Piageta o „reflexivní abstrakci“, která zahrnuje schopnost uvědomovat si v průběhu poznávání vlastní myšlenkové procesy a nakonec toto nové poznání „uvlastnit“.

Historie matematiky je sama o sobě takovým příkladem reflexivní abstrakce. Od empirických poznatků starých Egypťanů, kteří používali praktickou geometrii pro zeměměřičství a stavby, až po revoluční koncepty neeuklidovských geometrií, zde ve své podstatě sledujeme cestu lidského poznání. Každý nový matematický objev a koncept je výsledkem reflexe a abstrakce předchozích znalostí. Tato evoluce myšlenek ukazuje, jak se toto lidské myšlení neustále vyvíjí a prohlubuje.

Definice pojmů se často liší od našich představ o nich, což platí obzvláště v geometrii, kde vizuální aspekt hraje silně dominantní roli, což je hluboce zakořeněno v historickém vývoji lidského mozku. Evoluce člověka totiž dávala přednost rozvoji vizuálního systému jako prostředku k přežití. Zrakové centrum mozku se tak vyvíjelo déle a podstatně dříve než vyšší racionální funkce umožňující reflexi a abstraktní myšlení. To se pak odráží v tom, jak lidé přistupují ke geometrickým problémům a pojmům, kde vizuální vnímání často převládá nad analytickým a racionálním uvažováním.

Podle Piageta se člověk učí neustálým porovnáváním. Taxikářská geometrie, specifický druh geometrie založený na odlišné metrice než euklidovská geometrie, je bohatá na tyto kontrasty, nabízí nám tím mnoho možností pro toto porovnávání a následnou reflexi. Stejně jako naše představy o světě mohou být různé, ale dokud nedojde ke střetu různých názorů, nejsme schopni provést reflexi a změnit svůj pohled na věc. Tato geometrie nás tak nejen učí netradičním způsobem o prostoru a vzdálenostech, ale také nám nabízí filozofický přesah: naše vnímání reality může být odlišné, teprve konfrontace různých perspektiv nás vede k jejímu hlubšímu pochopení.

Cílem této diplomové práce je prozkoumat taxikářskou geometrii jako prostředek k porozumění geometrickým pojmům na střední škole. Práce je rozdělena do dvou částí: první část se zabývá matematickými východisky, druhá část se zaměřuje na didaktické aspekty a didaktický experiment.

První část se skládá ze čtyř kapitol. První kapitola nám poskytuje motivaci, jak by mohla tato geometrie obohatit výuku matematiky na střední škole prostřednictvím zmíněného kontrastu s euklidovskou geometrií a podnítit tím žáky k aktivnímu a kritickému myšlení v souvislosti s matematickými definicemi a jejich aplikací. Ve druhé kapitole se zabýváme velmi stručným popisem historického vývoje geometrie od praktických měření ve starověkém Egyptě, přes analýzu řecké axiomatiky a Euklidových Základů, polemiku kolem pátého postulátu, až po vznik neeuklidovských geometrií. Tato krátká historická vsuvka nám otevírá prostor k zamyšlení se nad evolucí lidského poznání. Kapitolu uzavíráme pojednáním o možných přístupech ke geometrii, které nám pomáhají překročit naše čistě intuitivní představy o ní. Ve třetí kapitole se věnujeme pojmu metrika a metrický prostor. Pomocí intuitivního přístupu zde uvádíme různé příklady metrik v rovině, přičemž na příkladu kružnice ilustrujeme, jak se její podoba překvapivě mění v závislosti na daném měření vzdálenosti. Nakonec vysvětlujeme pojem manhattanská (taxikářská) metrika, který je zásadní pro tuto práci. Pomocí ní a uvedené metrické definice euklidovské geometrie pak již vstupujeme do světa taxikářské geometrie. Ve čtvrté kapitole zkoumáme rozdíly mezi taxikářskou a euklidovskou geometrií, s důrazem na platnost axiomu sus. Poukazujeme zde na skutečnost, že nejkratší cesta mezi dvěma body v této geometrii nemusí být vždy jediná. Sledujeme také, jak se nám v tomto světě mění podoba známých geometrických útvarů, jako jsou kružnice, osa úsečky, elipsa, parabola a hyperbola. Tím i upozorňujeme na možné nedostatky našich intuitivních představ. Zabýváme se také konstrukcemi těchto množin bodů, ke kterým přistupujeme přes množinu nejkratších cest.

Didaktická část se skládá ze čtyř kapitol. V první kapitole zde představujeme teoretická východiska, přičemž klademe důraz na psychologické a vzdělávací teorie. Jelikož je celá tato práce koncipována v duchu konstruktivismu, ihned v úvodu se zabýváme vysvětlením tohoto pojmu jakožto přístupu, který klade důraz na konstrukci poznání skrze mentální modely a schémata. Pokračujeme seznámením s Piagetovou teorií poznávání prostřednictvím procesů abstrakce, akomodace a asimilace, které formují naše mentální reprezentace světa. V kontextu taxikářské geometrie pro nás totiž bude důležité, aby jedinec adaptoval svá existující mentální schémata (akomodace) na nové typy prostorových vztahů a pravidel (abstrakce), které jsou odlišné od euklidovské geometrie. Tento proces je podporován asimilací nových informací do již existujících kognitivních struktur. Následuje popis teorie APOS (Action, Process, Object, Schema), která navazuje na Piagetovo učení a umožňuje nám pochopit mentální struktury a mechanismy poznávacího procesu se zaměřením na interakci mezi různými schématy. Poté se snažíme objasnit, co jsou to v geometrii pojmy a jejich mentální obrazy, a upozornit na skutečnost, že jedinci mají často představy o pojmech, které nejsou v souladu s formálními definicemi. Tento problém pak podrobněji vysvětlujeme prostřednictvím teorie Talla a Vinnera (concept definition a concept image), která nám pomáhá objasnit, jak žáci vnímají matematické pojmy a jak je vést k jejich přesnému a hlubšímu porozumění. Podáváme také vysvětlení, proč má u žáků vizuální aspekt silný vliv na jejich představy pojmů v kontextu takzvaných Fischbeinových figurálních pojmů. Snažíme se rovněž osvětlit, proč se žákům na hodinách geometrie často zdá, jako by na ně učitel mluvil jiným jazykem, a to v kontextu van Hielovy teorie učení. Pro taxikářskou geometrii rovněž poskytujeme vhodnou alternativu pro neeuklidovské geometrie.

Druhá kapitola této části se zaměřuje na popis didaktického experimentu, který má za cíl ukázat, jak by začlenění taxikářské geometrie do středoškolského vzdělávacího procesu mohlo přispět k porozumění geometrickým pojmům. Formulujeme zde dvě výzkumné otázky. V první z nich se snažíme zjistit, jak žáci v rámci připravených aktivit přenášejí a aplikují své osobní definice geometrických pojmů, jako jsou kružnice, elipsa, parabola, hyperbola a osa úsečky, které získali během svého středoškolského studia, do kontextu taxikářské geometrie, a analyzovat, jak tyto aktivity mohly přispět k jejich porozumění těmto pojmům. Ve druhé otázce se pak snažíme zjistit, zda je možné na základě vhodně navržených aktivit v prostředí euklidovské a taxikářské geometrie, které byly sestaveny v kontextu teorie APOS a s ohledem na vzájemnou interakci schémat, dosáhnout toho, aby žáci ztematizovali pojem „kružnice“ a byli schopni odvodit její rovnici v maximální metrice. Ve třetí a čtvrté kapitole se zabýváme nejdříve stručnou rešerší a poté popisem aktivit k jednotlivým výzkumným otázkám, průběhem experimentu, analýzou jeho výsledků v kontextu poskytnutých teoretických rámců a závěrečnými zjištěními. V páté kapitole pak podáváme odpovědi na výzkumné otázky. Šestá kapitola se zabývá možnými návrhy pro pokračování výzkumu v této oblasti. Poslední kapitola obsahuje shrnutí celé práce s ohledem na matematická a didaktická východiska.

Část I

Matematická východiska

Kapitola 1

Motivace

Matematika je nástrojem pro řešení problémů. Je to způsob modelování. Je svým vlastním jazykem. Matematici jsou inovátoři. Jsou tvůrci problémů a jsou hledači řešení. Přesto se spousta našeho vzdělávání v matematice skládá z postupů a návodů, které se lze naučit mechanickým opakováním. Žáci jsou pak schopni je jen aplikovat bez skutečného pochopení. Jak ale překlenout onu propast od bezduchého napodobování ke schopnosti používat matematiku k řešení náročnějších problémů? Klíčem je porozumění matematice. Jen žáci, kteří chápou, proč dané postupy fungují, je mohou dále aplikovat v nových a odlišných situacích. Otázkou však je, jakým způsobem zajistit toto porozumění a co můžeme v této oblasti my, učitelé matematiky, zlepšit?

„Žáka nelze chápat jako pouhou pasivní nádobu matematických znalostí. Je to naopak právě on, kdo musí tyto své matematické znalosti poskytnuté v rámci různých situacích na hodinách vytáhnout z kontextu a znovu je rekonstruovat. I když se můžeme zjednodušeně bavit o předávání znalostí, a dokonce je možné v každé generaci rozpoznat podobný klastr stejných znalostí, jsou to právě oni žáci, kteří jsou zaměstnáni přetvářením a rekonstrukcí matematických znalostí generace svých rodičů a kteří ve svém důsledku strukturují a převádějí matematické znalosti do jiného kontextu, z něhož ho mohou zase generace jejich dětí vytáhnout a zasadit do úplně jiných souvislostí a vytvořit znalosti nové. “Bishop (Bishop a kol., 1992, vlastní překlad). [1]

Matematické definice nám slouží jako základní stavební kameny pro porozumění matematickým pojmům. Je však otázkou, zda žáci dokážou pojmy, které se naučili, definovat a jakou roli vůbec hrají definice v rámci jejich porozumění. Ukazuje se, že učitelé by se v rámci podpory porozumění v matematice měli snažit zasít semínko rigoróznějšího přístupu k zdůrazňování významu definic a jejich používání již dříve, než začnou tito žáci navštěvovat vysokoškolské kurzy, v nichž se hojně objevují důkazy. Podněcováním žáků k formulacím a používáním definic v rámci problémových úloh tak můžeme podpořit porozumění daným matematickým pojmům a pomoci tak odhalit případné nedorozumění či mezery v porozumění. Budeme-li u nich zdůrazňovat důležitost pochopení „proč“, nikoli jen „jak“, můžeme tím podpořit i rozvoj jejich kritického myšlení a zlepšit jejich schopnosti aplikovat matematiku v různých kontextech. Samotná historie je nám příkladem toho, že právě kontext je v matematice velmi důležitý. Například dobře známá věta, která říká, že součet úhlů v trojúhelníka je roven 180°, neplatí vždy.

[1]The pupil is not to be thought of as a receptive vessel for mathematical knowledge. On the contrary the pupil is the person who must decontextualise and reconstruct the mathematical knowledge from the contextualised situation offered in the classroom. Although we can glibly talk of 'knowledge transmission', and although it is clearly possible to recognise similar knowledge existing in consecutive generations, it is the pupils in any one generation who are busy recreating and reconstructing the mathematical knowledge of their parents' generation and who in their tum structure and recontextualise the mathematical knowledge into situations within which their children's generations can do their own de-contextualising and re-creation of the knowledge.

Je sice pravdivá v euklidovské geometrii, ale není pravdivá v neeuklidovské geometrii. Malá modifikace předpokladů může totiž vést k novým, poněkud překvapivým závěrům.

Protože však tradiční euklidovská geometrie dobře souzní s naším vlastním pojetím fyzické reality, jsme nakloněni věřit, že matematika je pouhým odhalením toho, co vždy existovalo. Žáci tak často mohou vnímat pojmy euklidovské geometrie jako něco, co je přece samozřejmé, dokud nedostanou příležitost se setkat s okolnostmi, které budou odporovat jejich dosavadní představě. Seznámení s jakoukoliv jinou geometrií může pomoci poukázat na fakt, že právě kontext je v matematice velmi důležitý, prohloubit porozumění samotné euklidovské geometrii a navíc i ukázat, že matematika je vlastně tvorbou lidské mysli a vyjádřením svobody lidského ducha.

Dobře známé neeuklidovské geometrie, které jsou sice dost jednoduché, aby je žáci na střední škole pochopili, mají tendenci být až příliš odlišné od euklidovské geometrie, aby pro ně byly dostatečně atraktivní. Naopak dobře známé neeuklidovské geometrie, které jsou dostatečně podobné euklidovské geometrii na to, aby vyvolaly případný zájem žáků, mají zase tendenci být příliš obtížné. Naštěstí existuje neeuklidovská geometrie, která z nějakého záhadného důvodu unikla systematickému zkoumání a publikování, a která by mohla být žákům přístupná jak ve své velmi konkrétní formě, tak v základní struktuře, která je velmi blízká euklidovské geometrii (Krause, 1973). Tou je taxikářská geometrie, jejímž modelem je městská geografie, se kterou žáci přichází běžně do kontaktu. Učiteli tak umožnuje integrovat známé pojmy a jejich definice do řešení skutečných problémů a situací v takovém kontextu, se kterým mají žáci každodenní zkušenosti. Nenásilnou a přirozenou cestou je může dovést k poznání existence jiných geometrií, čímž se rozšíří i jejich pohled na nové směry a oblasti matematiky. Geometrie z taxikářské perspektivy je plná porovnávání a kontrastu a je to velmi účelný nástroj k tomu, aby donutil žáka se na chvíli zastavit a přehodnotit to, co se doposud (ne)naučil. Může také podnítit zdravou diskusi o definicích a pojmech, což žákům umožní tyto koncepty lépe pochopit a osvojit si je novým a netradičním způsobem.

Kapitola 2

Počátky geometrie

2.1 Historie jako zrcadlo rozumu

„Lze nahlížet na vzdělávání v matematice jako na dějinami matematiky nastíněnou (evoluční) větev, která vyrůstá na základě jakýchsi skrytých předpokladů, jak se matematika sama o sobě vyvíjí a jak na ni máme pohlížet?“ (Benediktová, 2011, str.173).

„Zoologové říkají, že embryonální vývoj zvířete opakuje ve velmi krátké době celé dějiny jeho předků v rozsahu geologických období. Zdá se, že je tomu stejně s vývojem rozumu. Učitel musí nechat projít žáka tím, čím prošli jeho předci. Rychle, ale bez vynechání některé etapy. K tomu pak nám mají být prvním vodítkem dějiny vědy (Poincaré, 2010, str. 33)“.

Celou historii vývoje matematiky od starověku až po současnost lze považovat za příklad procesu reflexivní abstrakce (Piaget, 1985, str. 149).

„První matematické teorie v geometriii vznikaly ve snaze porozumět našemu světu. Geometrické poučky jako podobnost trojúhelníku či Pythagorova věta nevznikaly jako výplody práce abstraktní matematiky, ale jako nástroj pro vyměřování reálných útvarů. Jejich pravdivost nebyla prvotně založena na dokazatelnosti z nějakých axiomů, ale na tom, že fungovaly při aplikaci na reálný svět (Krtouš, 2011, 69).“

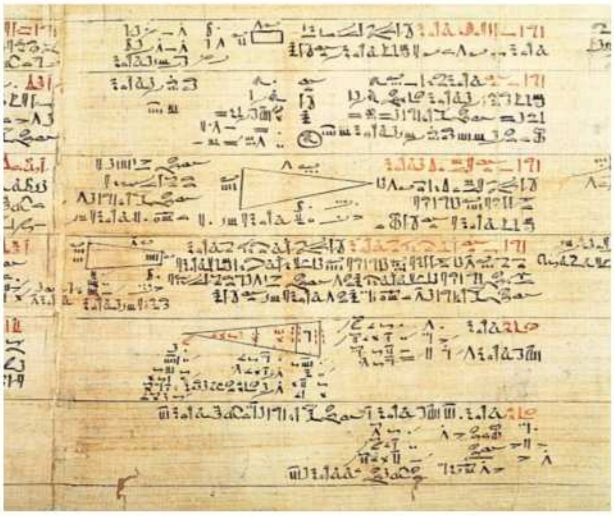
Abstraktní pojmy matematiky dnes představují obrovský pokrok, avšak skutečné porozumění jejich významu není možné bez znalosti historického vývoje. Tento vývoj jasně ukazuje, že matematické abstrakce nejsou pouze "svobodným výtvorem čistého rozumu", ale spíše syntézou mnoha konkrétních faktů, které odrážejí zákony reálného světa. Abstraktní matematické teorie přinášejí skutečný pokrok vědy, pouze pokud vedou k řešení nových praktických problémů.(Pavlíček, 1953, str. 5).

Je proto nutné, aby si tak každý z nás byl dobře vědom toho, že matematika nemůže být nikdy chápána odděleně od obklopující reality, od praxe, ale na druhé straně také toho, že v důsledku vysokého stupně abstraktnosti matematiky není její vztah k praxi vždy bezprostřední, nýbrž je často až později zprostředkován jinými vědeckými a technickými disciplinami (Pavlíček, 1953, str. 14).

Matematici tak v průběhu historie nejen vyvíjeli nové matematické myšlenky a postupy, ale také reflektovali a zdokonalovali existující, což vedlo k postupnému pokroku v matematických znalostech a porozumění.

2.2 Vliv Egypta a Mezopotamie na starověkou řeckou geometrii

Z hlediska etymologie vychází slovo geometrie (řecky *geometrein*) z měření Země a je vědou, která vznikla právě k tomuto účelu. Začala se rozvíjet již před mnoha lety v Egyptě, a to s prvními zeměměřiči. Ti byli pověřeni přesným měřením pozemků po povodních Nilu a již tehdy používali Pythagorovu větu. Na papyru z Rhindu (obr. 2.1) a z Moskvy lze najít výpočty obsahů a objemů různých geometrických útvarů (Cajori, 2010). Ve stejné době se v dávné Babylónii

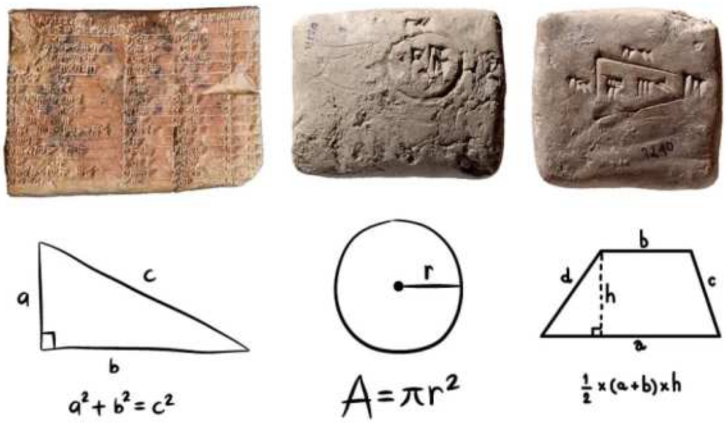


Obrázek 2.1: Rhindův matematický papyrus (2000 př. n.l)
`https://www.mathematicsmagazine.com/Articles/AncientMathematicalTexts.php`

(Mezopotámie) postupně vyvinuly geometrické znalosti, které dokonce překonávaly ty egyptské. Babylóňané kromě výpočtů obsahů a objemů navíc zdárně měřily i úhly a znaly trigonometrické vztahy, tyto výpočty pak prováděli s číselným systémem o základu 60. Celá matematika tohoto období však byla charakterizována přísně dogmatickým přístupem. Nejstarší učebnice (obr. 2.2) pouze ukazovaly, a to bez zdůvodnění, postupy řešení konkrétních geometrických úloh a základní otázkou veškerých problémů bylo „JAK?“ a ne „PROČ?“ (Lavička, 2007). Proto zde nelze ještě hovořit o geometrii jako o vědě.

2.3 Řecká axiomatika

Řecká matematika pak představovala velmi důležitou změnu ve způsobu myšlení. Babylóňané a Egypťané sice prováděli konkrétní výpočty, jako například měření ploch pozemků nebo výšek pyramid, vycházeli však pouze na základě empirických zkušeností. Až Řekové byli schopni vytvářet abstraktní pojmy a myšlenky a zavedli do matematiky důkaz, kterému mohli všechny dosavadní „pravdy“ podrobit. Pravděpodobně to pak byl Thales z Milétu (640-546 př. n. l.), kdo na svých cestách pozoroval rozpory v prehelénské matematice - například v egyptských a babylónských pravidlech pro výpočet obsahu kruhu - a díky tomu si uvědomoval i důležitost přísnějšího racionálního přístupu. Zavedl tak systém geometrie, kdy místo měření fyzických objektů hodnotil vlastnosti abstraktních tvarů. Umožnilo mu to poté prozkoumávat hutný mix všech těch geometrických postupů, pravidel a empirických vzorců, které byly předávány z Babylónie a Egypta, a vytvořit v nich systém a pořádek. Začíná tak vznikat teoretická matematika.



Obrázek 2.2: Vlevo: Tabulka obsahující pythagorejské trojice (Plimptonova sbírka na Kolumbijské univerzitě). Uprostřed: Vyryté poznámky o výpočtu obsahu kruhu (Babylonská sbírka na Yale University). Vpravo: Vyryté poznámky o výpočtu plochy lichoběžníku (Babylonská sbírka na Yale University). Zdroj:`https://shroudedscience.medium.com/ancient-mathematical-origins-c59096bd2920`

Tento přístup však vyžadoval již přesné definice pojmů, o které by se při odvozování a dokazování dalších skutečností dalo opřít. Kresby a schémata již měly jen pomocnou roli a nebyly prostředkem k ověřování pouček (Mlodinow, 2001).

V období helénismu, v egyptském městě Alexandrii, dosáhli řečtí matematici ohromujících výsledků. Ptolemaios I. zde položil základy dvěma institucím, které ji učinily předním centrem vzdělanosti po několik dalších generací. Bylo to muzeum a knihovna (dnes známá jako Alexandrijská knihovna, největší a nejslavnější knihovna starověku). Obě instituce byly hojně podporované nejen jím samotným, ale i jeho synem Ptolemaiem II., který do tohoto výzkumného centra přivedl výjimečné učence z různých oblastí. Mezi nimi byl i Euklides, autor nejúspěšnější učebnice matematiky, která kdy byla napsána. Ta nesla název Základy (Mlodinow, 2001). Matematika, a zejména geometrie, tak začala být postupně chápaná jako samostatná věda a začala se rozvíjet s přesně danými a pevnými pravidly.

2.4 Eukleidovy Základy

Euklides (3. stol. př. n. l.) byl významným matematikem starověkého Řecka, který se snažil systematicky shromáždit a uspořádat všechny známé geometrické výsledky své doby. Jeho významným přínosem v tomto oboru představuje již zmíněné dílo s názvem „Základy“. Tento matematický traktát je složen z třinácti knih, z nichž každá obsahuje sled vět týkajících se geometrie, aritmetiky a algebry. Všechny tyto knihy mají stejný způsob výkladu. Nejprve jsou definovány pojmy, které se v dané knize zmiňují, poté následují postuláty (požadavky) a obecné principy, které již Aristoteles nazýval axiomy. Další poučky, které jsou v jednotlivých oddílech obsaženy, jsou poté odvozeny na základě těchto definic, postulátů a axiomů. Jednotlivé věty jsou nejdříve formulovány, potom se konstatuje, co je dáno a co je třeba dokázat. Následuje důkaz se všemi odkazy na předchozí věty, postuláty a axiomy. Vše je zakončeno zopakováním a standardní formulí „Což bylo třeba dokázat“, konstrukce pak spojením „Což bylo třeba provést“ (Halas, 2016).

Obrázek 2.3: Fragment papyru Euklidových Základů.
(zdroj:`https:personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/tha.jpg`)

Celkem jeho dílo obsahuje 131 definic a 465 vět (Bečvářová, 2005). Jedná se tak o první pokus o axiomatický výklad matematiky, v čemž také spočívá jeho velký význam a zásluha. Euklides však nebyl všude zcela důsledný, a proto jsou jeho Základy skutečně jen pokusem o axiomatizaci matematiky. Svůj výklad sice začíná výčtem axiomů, při důkazech se však nevědomky dovolává také těch vět, které neuvádí ani mezi axiomy, ani je nedokazuje. Podat důsledný axiomatický výklad geometrie nebo jiné matematické disciplíny však nebylo v jeho době ještě úplně dost možné, uvážíme-li, že to byla doba, kdy se matematika jakožto abstraktní věda teprve začala vytvářet (Pavlíček, 1953). Přesto je dílo důkazem toho, že zde již matematické myšlení postoupilo daleko za empirické metody, které byly charakteristické pro matematiku provozovanou starověkými civilizacemi. Až do 19. století pak byly Základy ceněny pro svůj přínos geometrii a sloužily jako učebnice geometrie. Jedná se o knihu, která po Bibli dosáhla vůbec největšího počtu vydání (Šír, 2011). Euklidovy Základy jsou tímto jedno z nejvlivnějších děl všech dob a tvoří neodmyslitelnou součást naší kultury a vzdělanosti.

Zde je pro představu ukázka prvních osmi Euklidových definic, které se objevují na začátku knihy I (Šír, 2011):

(I) Bod je to, co nemá žádnou část.

(II) Čára je délka bez šířky.

(III) Hranice čáry jsou body.

(IV) Přímá čára je ta, která je vůči bodům na ní ležícím umístěna stejně.

(V) Plocha je to, co má pouze délku a šířku.

(VI) Hranice plochy jsou čáry.

(VII) Rovinná plocha je ta, která je vůči přímým na ní ležícím umístěna stejně.

(VIII) Rovinný úhel je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v jedné přímé.

Pět postulátů Euklida představují základní geometrické konstrukce, v nichž pak požadoval následující (Šír, 2011):

(I) Nechť se požaduje vést přímou čáru z každého bodu do každého bodu.

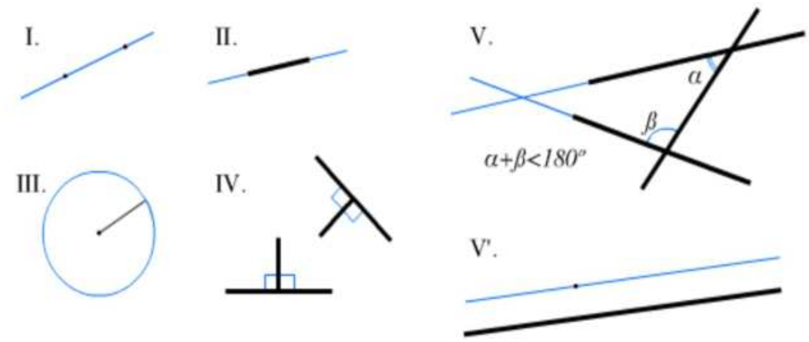
(II) A omezenou přímou čáru souvisle prodloužit přímým směrem.

(III) A pro každý střed a každý rozestup narýsovat kruh.

(IV) A aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.

(V) A jestliže nějaké dvě přímé protne jiná přímá tak, že vytvoří na jedné straně vnitřní úhly menší než dva pravé, pak aby se tyto přímé, budou-li prodlouženy do nekonečna, setkaly na té straně, na které jsou úhly menší než dva pravé.

Při zvážení výše uvedených postulátů je zřejmé, že Euklidův přístup ke geometrii se výrazně odlišuje od empirického přístupu Egypťanů. V prvních třech postulátech se Euklides neodvolává na konkrétní pozemní měření, neboť si pravděpodobně uvědomoval, že tyto konstrukce nemusí vždy být možné v reálném světě kvůli možným překážkám, jako jsou moře a řeky. Pro Euklida bylo teoreticky možné tyto konstrukce provést kdykoliv. Jeho geometrie tedy obsahovala tvrzení o ideálních podmínkách v ideálním světě, a lze proto tvrdit, že euklidovská rovina je vlastně jen součástí určité představivosti, stejně jako rovina, na niž se vztahují pozdější neeuklidovské geometrie. Čtvrtý postulát se nám může zdát jako zjevné tvrzení, avšak Euklides definoval pravý úhel jako úhel rovný svému doplňku, a tak zde nebylo logicky zřejmé, že všechny pravé úhly jsou stejné, což musel explicitně stanovit (Šír, 2011). Pátý postulát je na první pohled mnohem složitější než ty předchozí. Euklides si totiž pravděpodobně uvědomoval, že postulát o tom, co se děje v nekonečnu, by nebyl příliš přesvědčivý, protože přesahuje omezené zkušenosti člověka. Proto ho formuloval tak, aby zahrnoval podmínky, za kterých se dvě přímky setkají v konečné vzdálenosti, spíše než podmínky, za kterých by se nesetkaly po celé své délce (Kline, 1980). Všechny postuláty kromě posledního jsou ve své podstatě jednoduché. Pátý postulát se však zdál matematikům složitý už za Euklidova života a nakonec sehrál klíčovou roli při objevu neeuklidovských geometrií.



Obrázek 2.4: Ilustrace Euklidových postulátů (I-V) a alternativní verze pátého postulátu (V') podle Playfaira
zdroj: `https://ru.wikipedia.org`

2.5 Polemika kolem pátého postulátu

První čtyři postuláty byly v průběhu historie vesměs přijaty všemi matematiky. Nicméně co se týká pátého postulátu, vznikla kolem něj velká polemika, protože se věřilo, že ho lze dokázat z předchozích čtyř. Až do 18. století se ho tak mnozí matematici jako Ptolemaios (2. stol. n. l.), Proklos (410–485 n.l.), Nasiraddin (1201-1274), John Wallis (1616–1703), Gerolamo Saccheri (1667–1733), Johann Heinrich Lambert (1728–1777), Adrien-Marie Legendre (1752–1833), pokoušeli bezúspěšně dokázat. Tato štvanice trvala šestkrát déle než honba za důkazem velké

Fermatovy věty. D'Alembert (1717 - 1783) dokonce označil pátý postulát jako „skandál geometrie" (Trudeau, 1987).

Mnoho matematiků v domnění, že jej dokázalo, nalezlo jen mnoho různých ekvivalentních formulací. Skotský matematik John Playfair (1748-1819) tak publikoval slavný Playfairův postulát (obr. 2.4V'), který pro svou jednoduchou podobu získal značnou popularitu a nahradil tak původní verzi Euklida. Jeho znění je: „Pro každou danou přímku l a pro každý bod P mimo ní existuje jediná přímka procházející tímto bodem P, která je rovnoběžná s danou přímkou l" (Trudeau, 1987).

Historie nám ukazuje, že práce matematiků zahrnuje více než jen nalezení správného řešení daného problému, což je patrné u tohoto postulátu o rovnoběžkách. Důležité je také přetvoření problému, jeho umístění do kontextu a kritická reflexe.

2.6 Neeuklidovské geometrie

Zdá se, že to byl až Karl Friedrich Gauss (1777–1855), kdo dospěl k závěru, že přijetím prvních čtyř axiomů a negací pátého nedojdeme k žádnému sporu. Toto však nezveřejnil z velké obavy z možné kritiky svých současníků. Problematiku důkazu pátého postulátu hodnotil jen v několika dopisech svým přátelům. Gauss však byl naštěstí pečlivým kronikářem všeho kolem sebe a vše si proto pečlivě zaznamenával. Po jeho smrti se tak odborníci důkladně zabývali jeho poznámkami a korespondencí a objevili tak jeho výzkum o poněkud jiné geometrii, u které právě on použil jako první označení „neeuklidovská".

„Věty této geometrie se mohou zdát paradoxní a pro nezasvěcené absurdní; ale klidná a důkladná reflexe odhaluje, že neobsahují nic nemožného. "(Gauss v dopise napsaném 8. listopadu 1824 F.A. Taurinovi) [1]

Nakonec to však byli Nikolaj Lobačevskij (1792–1856) a János Bolyai (1802–1860), kteří dokázali širší veřejnosti nezávislost pátého postulátu na předchozích čtyřech, tedy dokázali, že se z ostatních Euklidových základních postulátů odvodit nedá. Začali tak uvažovat o nové geometrii, v níž místo pátého postulátu platí jeho negace.

Obrázek 2.5: Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) a Nikolaj Lobatševskij (1792–1856) (Zdroj: Wikipedia)

Objev neeuklidovských geometrií byl nevyhnutelný a ukazuje, jak matematici staví na práci svých předchůdců a využívají nové poznatky. Přestože pro ně doba nebyla příliš příznivá, tyto objevy se zrodily současně u několika nezávisle pracujících matematiků.

[1] „The theorems of this geometry appear to be paradoxical and, to the uninitiated, absurd; but calm, steady reflection reveals that they contain nothing at all impossible" Gauss (in a letter written on 8th November, 1824 to F.A. Taurinus)

Začalo se tak ukazovat, že neexistuje pouze jediná „správná“ geometrie, a že je občas nutné se odchýlit od svých ustálených představ, které nám sice na jedné straně mohou pomoci porozumět složitým abstraktním pojmům, jindy nám však naopak mohou zcela zkreslit naše chápání. Před objevem Lobačevského byla totiž již mnohá tvrzení neeuklidovské geometrie dávno známa, protože však odporovala běžně užívané geometrii, byla zamítnuta jako absurdní. Neeuklidovská geometrie nám dala možnost přijmout obecnější pohled na geometrii, kterou lidstvo do 19. století znalo pouze jako jednu její část - euklidovskou geometrii.

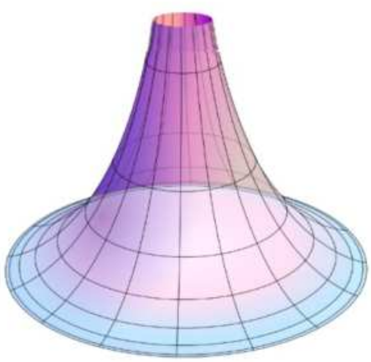
2.6.1 Hyperbolická geometrie

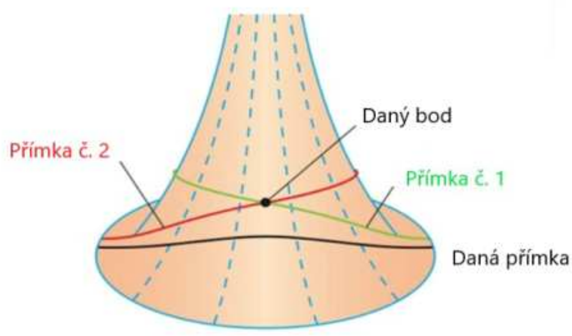
Jednalo se o úplně první z neeuklidovských geometrií, která byla objevena. Za konstrukci této logicky jednotné geometrie stáli již výše zmínění Nikolaj Lobačevskij (1792-1856) a János Bolyai (1802-1860).

Mladý matematik Lobačevskij byl první, kdo se odvážil v roce 1829 zveřejnit své výsledky v práci „O načalach geometrii“, toto rozhodnutí mu však přišlo nakonec poměrně draze. Byl anonymně šikanován a posléze i úředně degradován. Jeho matematický kolega Michaill Ostrogradskij (1801 - 1862) totiž neakceptoval Lobačevského pochybnosti o Euklidově postulátu a postaral se tak o jeho propuštění z práce. Seznámilo se s ní nakonec i velmi málo lidí a ani pozdější německé vydání mu nepřineslo o mnoho víc čtenářů, a to i přesto, že o práci tehdy projevil zájem i samotný Gauss. Ten však veřejně tuto myšlenku nikdy nepodpořil (Gray, 2007).

Nezávisle na Lobačevském publikoval výsledky své práce v roce 1832 i mladý Bolyai jako dodatek knihy svého otce pod názvem „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens“. Zde se i poprvé objevil pojem „absolutní geometrie“ pro označení geometrického systému, který je nezávislý na pátém postulátu (Kline, 1981). Ani jeho práci se však nedostalo příliš velké pozornosti a zklamaný Bolyai se poté úplně přestal matematikou zabývat (Pavlíček, 1953).

Tato geometrie byla po určitou dobu odmítána jako nesmyslná teorie s nesrozumitelnou tématikou. Význam objevů obou vědců se projevil až po jejich smrti, kdy byly vytvořeny euklidovské modely, které potvrzovaly platnost jejich principů. Prvním takovým modelem byl Beltramiho model na pseudosféře z roku 1868 (Trudeau, 1987).

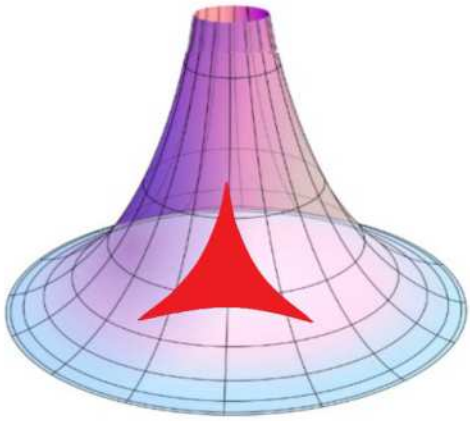




Obrázek 2.6: Pseudosféra a ilustrace hyperbolického postulátu, kdy jsou daným bodem vedeny dvě přímky rovnoběžné s danou přímkou.
Zdroj: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PseudoSphere.svg`

Hyperbolická geometrie je výsledkem nahrazení pátého postulátu tímto následujícím (Wolfe, 1945):

Daným bodem, který neleží na dané přímce, lze vést více než jednu přímku, která danou přímku neprotíná.



Obrázek 2.7: Pokud bychom sestrojili na pseudosféře trojúhelník, součet jeho vnitřních úhlů bude menší než 180°.
(Zdroj: Zdroj: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PseudoSphere.svg`, upraveno).

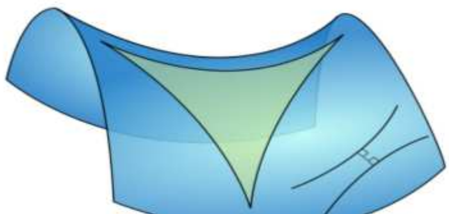
Ten pak vede k velmi překvapivým závěrům. První z nich je, že součet vnitřních úhlů v hyperbolickém trojúhelníku je menší než 180° (obr. 2.7) :

$$\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ. \tag{2.1}$$

Dalším překvapením je, že obsah hyperbolického trojúhelníku závisí na úhlech, nikoliv na jeho stranách:

$$S = (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \cdot C^2, \tag{2.2}$$

kde C je konstanta, která je daná zakřivením hyperbolické roviny, na níž se zrovna daný trojúhelník nachází (Wolfe, 1945).



Obrázek 2.8: Hyperbolický paraboloid jako model hyperbolické roviny
Zdroj: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/89/Hyperbolic_triangle.svg`

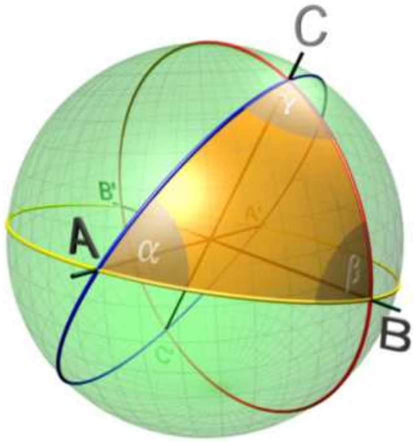
Model „sedla na koňském hřbetě“ nám může poskytnout jinou názornou grafickou reprezentaci této hyperbolické roviny. Na obrázku (2.8) se pak můžeme znovu přesvědčit, že libovolný trojúhelník, který zde sestrojíme, bude mít součet úhlů menší než 180°, navíc zde vidíme i tu skutečnost, že rovnoběžky zde nezůstávají vůči sobě ve stejné vzdálenosti, ale postupně se od sebe vzdalují.

2.6.2 Eliptická geometrie

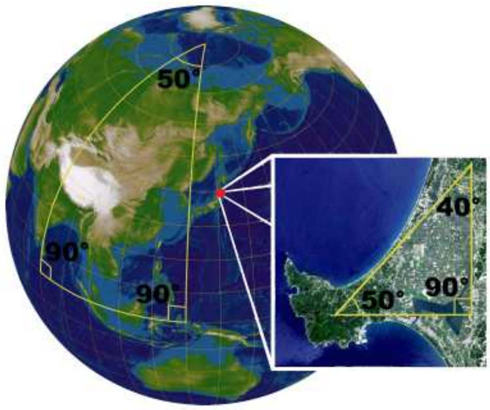
Krátce po objevu a zdůvodnění hyperbolické geometrie se objevila na řadě další z neeuklidovských geometrií nazvaná eliptická geometrie. Vytvořil ji matematik Bernhard Riemann (1826-

1866), který byl první, kdo neeuklidovským geometriím zcela porozuměl a začal postupně zkoumat jejich vzájemné vztahy. Své myšlenky pak představil v roce 1854 během své habilitační přednášky nazvané „O hypotézách tvořících základy geometrie“ (Mlodinow, 2001). Dnes všechny tyto geometrie souhrnně nazýváme Riemannovy geometrie.

Eliptická geometrie je pak tou geometrií v rovině, u které je pátý postulát euklidovské geometrie nahrazen tímto následujícím (Wolfe, 1945): **Dvě přímky se vždy protínají.**



(a) Sférický trojúhelník je trojúhelník na povrchu koule, tvořený průsečíky tří hlavních kružnic.



(b) Součet úhlů sférického trojúhelníka není 180°. Lokálně v malém trojúhelníku na povrchu Země se součet úhlů již blíží 180, lze ho zde tak aproximovat euklidovským trojúhelníkem.

Obrázek 2.9: Model sférické geometrie.
Zdroj: Zdroj: `https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry`

Stejně jako v hyperbolické geometrii, i zde získáváme překvapivé závěry. Prvním z nich je, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je větší než 180° (obr. 2.9b):

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ. \tag{2.3}$$

V případě sférické geometrie je dán obsah trojúhelníku následujícím vztahem:

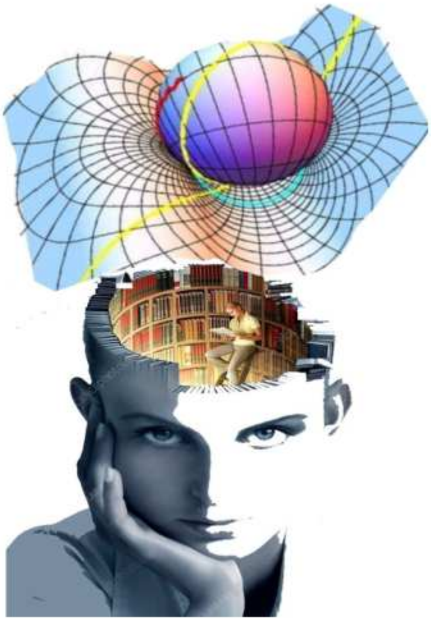
$$S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot C^2, \tag{2.4}$$

kde konstanta C je koeficient úměrnosti, který lze určit, jakmile je vybrán trojúhelník s jednotkovým obsahem (Wolfe, 1945).

Na obrázku 2.9a) vidíme model dvourozměrné eliptické geometrie, povrch koule. Na kulové ploše zjevně neexistují přímky a úsečky, jak je známe z euklidovské geometrie. Přímky zde jsou hlavními kružnicemi na sféře, tedy kružnice, které mají střed ve středu koule. Na povrchu ideální Země by to byl rovník, a také všechny poledníky. Tyto přímky pak vždy vymezí i nejkratší spojnici dvou bodů-úsečku. Úsečkou je tedy kratší část hlavní kružnice mezi dvěma body (kruhový oblouk). Je pak navíc i zřejmé, že dvěma body (například Severním a Jižním pólem) prochází nekonečně mnoho takových přímek.

2.6.3 Filozofické a jiné úvahy neeuklidovských geometrií

Ukazuje se, že lidská mysl nemusí být vždy schopná si okamžitě uvědomit všechny své zaryté předpoklady, na kterých staví své úvahy. Ty mohou být silně ukotveny v naší kultuře, zkušenostech nebo přesvědčeních a mohou ovlivňovat naše postoje a chování, aniž bychom si toho byli plně vědomi. Pro starověké Řeky byly postuláty euklidovské geometrie brány jako samozřejmé pravdy, které nemusely být ověřovány. Nicméně skutečnost, že neeuklidovské geometrie lze rovněž použít k popisu fyzického prostoru, později naznačila, že matematika jako absolutní pravda je vlastně iluze. Matematici tak začali najednou svou práci provádět s mnohem větší svobodou a tím se ukázalo, do jakých výšin může nakonec lidská mysl vystoupat po překonání všech těch omezujících účinků „zdravého selského rozumu“, „intuice“ či nejpopulárnějších filozofických doktrín své doby. Slovy George Cantora (1883, str. 564, vlastní překlad): „Podstata matematiky spočívá ve svobodě“[2].



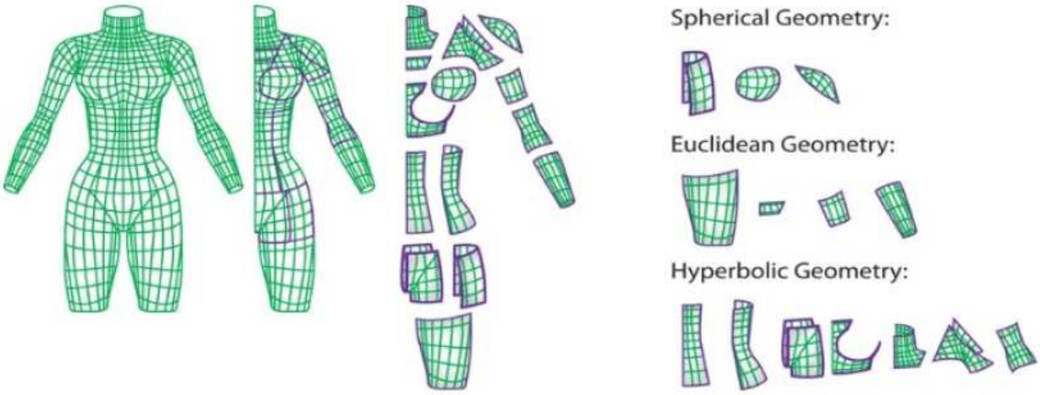
Obrázek 2.10: Při volbě geometrie je nutné zvážit kontext. Teorie relativity například využívá zakřiveného prostoru. Zdroj: `https://physicsworld.com/a/a-simpler-route-to-invisibility/`

Vzhledem k tomu, že matematika úzce souvisí s vědou a filozofií, jakákoli hluboká změna v tomto pojetí matematiky se nakonec projevila i v těchto oblastech. V okamžiku, kdy se přestaly považovat postuláty euklidovské geometrie za samozřejmé pravdy, i vědecké teorie, které byly na nich postavené, ztratily tento svůj status. Vědci si proto začali pokládat otázky, zda vůbec jsou schopni objevit pravdu o přírodních jevech. Například kosmolog, teoretický fyzik a matematik John Barrow ve svém bestselleru „Theories of Everything“ zkoumá hledání jediné sjednocující teorie, která by odhalila tajemství přírody, a poskytuje reflexivní komentář k tomu, co by skutečná Teorie všeho měla obsahovat. Zatímco Řekové považovali člověka za toho, kdo jen odhaluje dané zákony přírody, dnešní vědecká komunita si již uvědomuje, že jejich teorie jsou pouze popisem těchto zákonů jen z jakési lidské perspektivy a v daném kontextu. Stejně jako filozofové již nehledají dokonalý systém vlády nebo dokonalý ekonomický systém, ale spíše takové řešení, které nejlépe odpovídá daným okolnostem.

Nelze tedy tvrdit, že jedna geometrie je lepší než druhá. Volíme konkrétní geometrii podle toho, jak nejlépe odpovídá daným situacím. Zedník například použije euklidovskou geometrii k postavení domu, zatímco vědec zkoumající gravitační přitažlivost mezi tělesy ve vesmíru použije eliptickou geometrii. Nové pohledy na geometrii tak začaly překračovat hranice matematiky, a nakonec i Albert Einstein ve své Teorii relativity využil zakřivený prostor. Tato teorie

[2] „The very essence of mathematics is its freedom“

tvrdí, že přítomnost hmoty může „ohýbat“ prostor (obr. 2.10) a měnit čas, což dokazuje, že neeuklidovské geometrie mají své praktické využití (Mlodinow, 2001).



Obrázek 2.11: Lidské tělo je složitá trojrozměrná forma, kde každá jeho část má svůj vlastní typ geometrie se specifickými vlastnostmi. Zdroj: Liu (2015).

Nemusíme však letět až do vesmíru. V oděvním průmyslu se například objevovaly časté problémy s tím, aby oblečení perfektně sedělo na zákaznících. Snahou módních návrhářů a výrobců tak bylo tyto problémy najít a vyřešit. Mark Liu (2015) použil k vysvětlení těchto systémových problémů právě neeuklidovskou geometrii (obr. 2.11). Vynalezl nové zařízení nazvané „drape measure“ (měřící křivky), kterými bylo možné měřit zakřivení povrchu a zaznamenat ho jako úhlovou hodnotu. Tento neeuklidovský systém, který má v daném kontextu vyšší přesnost, tak pomohl zlepšit efektivitu módní výroby. Přivádí nás to k tomu, že by bylo více než vhodné zahrnout do vzdělávacího programu i jiné geometrie, aby žáci a studenti byli postupně vystaveni těmto různým přístupům a byli schopni vidět, jaké nové výsledky a myšlenky tak mohou v rámci různých axiomatických systémů vznikat.

2.7 Přístupy k neeuklidovské geometrii

S velkým rozvojem geometrie, který přinesl vznik neeuklidovských geometrií, bylo nezbytné poskytnout její formální definici, která by překračovala pouze naší intuitivní představu o ní. Bylo tak postupně praktikováno několik přístupů, kterými se matematici snažili geometrii formulovat rigorózně, styčnými se však nakonec staly tyto dva odlišné pohledy (Hlavatý, 1926):

1. Kleinův přístup: Toto pojetí je formalizováno v Erlangenském programu Felixe Kleina (1849–1925), který využil práce Arthura Cayleye (1821–1895). Podstatou tohoto programu je, že každá geometrie ve skutečnosti studiem určitých vlastností, které zůstávají zachovány při aplikaci určitých transformací. Tyto neměnné vlastnosti se nazývají invarianty a bylo vypozorováno, že operace, které tyto invarianty zachovávají, mají strukturu grupy. Podle Kleina je tak například euklidovská geometrie studium invariantů pomocí grupy symetrií, rotací a translací; afinní geometrie se pak omezuje jen na translace. A obdobně to funguje pro další geometrie. Klein dokonce tvrdí, že geometrie neindukuje skupinu tranformací, ale že se daná geometrie konstruuje na základě přijatelné skupiny transformací. Volbou různých grup transformací tak získáváme různé geometrie (Trkovská, 2015).

2. Axiomatický přístup: Jak již bylo řečeno v úvodu, první pokus o axiomatický výklad geometrie se objevuje u Euklida. Navzdory tomu, že jeho práce byla velmi důkladně promyšlena, vedly některé aspekty jeho geometrie mezi matematiky k dlouhým diskuzím. Týkaly se především vlastností a konstrukcí, jejichž pravdivost se zdála být intuitivně zřejmá, ale které nebylo možné přímo odvodit z Euklidovy sady postulátů a axiomů. Kvůli těmto mezerám tak vznikla potřeba zavést nový axiomatický systém geometrie. Cílem bylo vytvořit takový soubor axiomů, který by byl kompletní a umožňoval vybudovat geometrii takovým způsobem, aby bylo možné každé tvrzení z těchto axiomů odvodit. Navíc bylo důležité zajistit, aby jednotlivé axiomy nebyly na sobě logicky závislé, což by znamenalo, že žádný axiom nemůže být odvozen z jiných axiomů. První novodobé snahy vylepšit tradiční geometrii pozorujeme u německého matematika Moritza Pasche [3]. Jeho pozornosti neušlo právě několik skrytých předpokladů, které Euklides ve svých důkazech použil, ale které nevyplývaly z jeho ustanovených axiomů ani postulátů. Vyjádřil také nesouhlas s některými Euklidovými definicemi. Největším jeho přínosem jsou pak jeho komentáře k problematice uspořádání bodů na přímce (Trudeau, 1987).

   Na úrovni matematiky dvacátého století pak zpracoval eukleidovskou geometrii německý matematik David Hilbert v knize „Grundlagen der Geometrie" z r. 1899. Ten provedl logickou rekonstrukci geometrie, a to odstraněním jakýchkoliv vazeb s konkrétními fyzikálními charakteristikami, a učinil tak přechod k modernímu axiomatizovanému systému. Výsledkem jeho úsilí bylo představení geometrie v čistě abstraktní a idealizované formě, aby pak mohla v enormní jednoduchosti, lehkosti a průzračné čistotě vystoupit její logická struktura (Čižmár, 2012). Hilbert proto začíná výčtem základních pojmů (tři různé systémy objektů: body, přímky a roviny) a popisuje vztahy mezi nimi (incidence, uspořádání, shodnost, rovnobežnost a spojitost). Všechny tyto pojmy jsou nedefinované, nepřisuzují se jim apriórně žádné atributy, není zde žádná zmínka o jejich povaze, a všechno, co lze říci o jejich vlastnostech a vztazích, je obsaženo v axiomech (Čižmár, 2012). Sám Hilbert velmi výstižně vyjádřil abstraktní charakter své geometrie frází: „Namísto bodů, přímek a rovin by kdykoliv mělo být možné mluvit o stolech, židlích a pivech [4]".

   Pojem vzdálenost se však v Hilbertově axiomatice nevyskytuje. Problematika zavedení vzdálenosti v takto budované geometrii byla dosti složitá a nelze se divit, že řada autorů hledala k vzdálenosti „schůdnější" cesty. Již v r. 1902 se snažil zavést axiomatiku s primitivním pojmem vzdálenost ruský matematik Benjamim Fedorovič Kagan (1869-1953). Patrně pod silným vlivem hilbertovského přístupu se však toto pojetí uplatnilo až po zavedení pojmu metrický prostor, který v roce 1906 definoval francouzský matematik Maurice Fréchet [5] a který je dodnes všeobecně přijímán. V rámci metrického prostoru pak pojem vzdálenost jako primitivní pojem geometrické axiomatiky zavedl v roce 1932 americký matematik George D. Birkhoff (Kuřina, 2016).

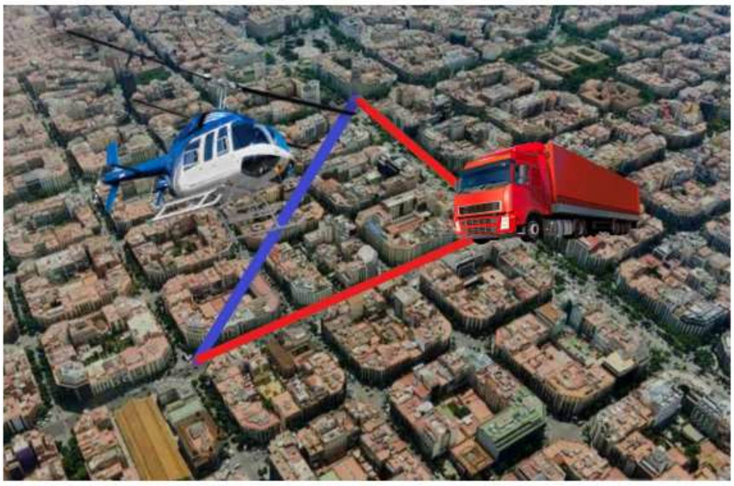
[3]Pasch M., Vorlesungen über neuere Geometrie, Druck und Verlag von B. G. Teubner,. Leipzig, 1882
[4]Reid, C. Tables, Chairs, and Beer Mugs. In: Hilbert. Springer, New York, NY. 1996
[5]Fréchet, M.: Sur quelques points du Calcul fonctionnel, Rend. Circ. Math. Palermo. 1906.

Kapitola 3

Metrika

3.1 Metry, metriky a triky měření

Vstupujeme do tajemného světa metrik, kde se vzdálenosti mezi body stávají našími průvodci. Ať už se ztratíme v městských ulicích nebo na dobrodružné cestě mezi vzdálenými městy, velmi často zaznívá otázka: „Jak je to daleko?“ V případě měst, jejichž ulice vytváří pravoúhlou síť, jako je například slavný Manhattan v New Yorku nebo čtvrť Eixample v Barceloně, můžeme jako obchodníci stát nad tímto dilematem: „Jak nejefektivněji dopravit zboží z obchodu k zákazníkům?“ A co když máme na výběr mezi vrtulníkem a nákladním autem? Rozhodnutí o zvoleném dopravním prostředku totiž může zásadně ovlivnit náklady spojené s touto přepravou (obr. ??).



Obrázek 3.1: Přeprava nákladu ve čtvrti Eixample v Barceloně.

Pokud zvolíme vrtulník, bude nás zde zajímat vzdušná vzdálenost mezi těmito dvěma místy. Přeprava zboží nákladním autem nás ale donutí si zjistit délku lomené čáry, která nás postupně provede danými ulicemi. Bude totiž záležet na tom, kolik bloků projedeme. Právě tento způsob měření vzdálenosti totiž v tomto daném kontextu věrně odráží naší skutečnou vzdálenost, i když může být delší než ta vzdušná.

Podobně můžeme uvažovat i o vzdálenostech na naší planetě. Představme si Prahu a Tokio. Nejkratší vzdáleností mezi těmito městy rozumíme délku kratšího oblouku hlavní kružnice zemského povrchu, která je spojuje.

Všechny tyto koncepty vzdálenosti však spojuje jeden pojem: metrika.

3.2 Definice metriky

Jak jsme již v úvodu kapitoly naznačili, metrika je matematický pojem, který odpovídá naší každodenní a intuitivní představě o vzdálenosti. Denně se setkáváme s pojmem vzdálenosti, který nás provází na každém kroku. Ať už cestujeme z jednoho města do druhého, nebo se jen pohybujeme po místnosti, vždy víme, že tato vzdálenost nebude nikdy záporná. Bez ohledu na to, zda jdeme tam nebo zpátky, vzdálenost těchto dvou míst bude stále stejná. A pokud si po cestě do práce vybereme okliku přes oblíbenou hospůdku, můžeme si být jisti, že naše cesta nebude kratší než ta přímá. Tyto tři intuitivní vlastnosti vzdálenosti pak tvoří základ pro matematickou definici metriky (Fréchet, 1906).

Metrikou na množině M rozumíme zobrazení

$$\rho : M \times M \to \mathscr{R}$$

splňující pro všechna $A,\ B,\ C \in M$ tyto podmínky: :

1. $\rho(A,\ B) \geq 0$; $\rho(A,\ B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
2. $\rho(A,\ B) = \rho(B,\ A)$,
3. $\rho(A,\ B) + \rho(B,\ C) \geq \rho(A,\ C)$.

Množinu, na které je daná metrika zavedena , nazýváme spolu s touto metrikou metrickým prostorem $(M,\ \rho)$.

Metrika je nástrojem, který nám umožňuje měřit vzdálenost mezi body v různých prostorových strukturách. Je to jakési matematické pravítko, které nám umožňuje určovat vzdálenosti a porozumět geometrickým vztahům mezi objekty. Definice metriky nám proto poskytne klíč k pochopení a popisu různých vzdáleností a jejich vlivu na geometrii okolního světa. Objevíme totiž, jak může různý způsob měření vzdálenosti tento svět zcela zásadně ovlinit.

3.3 Kartézská soustava souřadnic

Vzhledem k tomu, že se v následujících sekcích budeme zabývat metrikami pro měření vzdálenosti mezi body v rovině na základě jejich souřadnic, je vhodné stručně připomenout definici souřadnic bodů. Při tomto výkladu výjdeme z geometrického modelu, který je známý již ze školní geometrie. Chceme se totiž nejdříve intuitivně seznámit s touto problematikou, přičemž podrobnější matematická definice euklidovské roviny bude představena až v pozdější části. Začněme proto tím, že v rovině zavedeme kartézský souřadnicový systém.

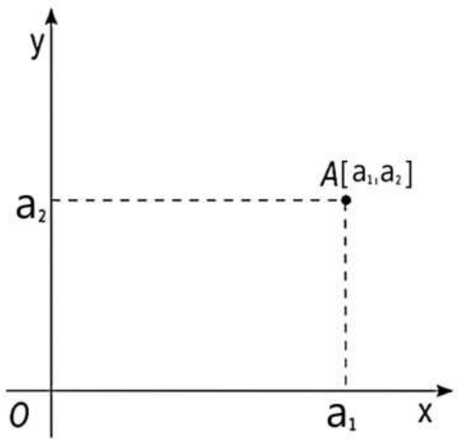
Dvojice stejných číselných os x, y v rovině, pro které platí, že

1. jsou obě tyto osy navzájem kolmé;
2. jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0;

   se nazývá kartézská soustava souřadnic v rovině a označuje se $0xy$.

Bod O se nazývá *počátek kartézské soustavy souřadnic*, přímky x, y se nazývají *souřadnicové osy* (Kočandrle & Boček, 1999).

Pokud již máme danou soustavu souřadnic Oxy (obr. 3.2), můžeme každému bodu A v rovině jednoznačně přiřadit uspořádanou dvojici čísel, označme ji $[a_1, a_2]$. Jak toho dosáhneme? Představme si, že vedeme z bodu A rovnoběžky s osami x a y. Rovnoběžka s osou y, která prochází bodem A, protíná osu x v bodě, který zastupuje určité číslo – nazvěme ho a_1. Rovnoběžka s osou x, která prochází tímtéž bodem A, protíná osu y a tím získáme druhé číslo, a to a_2 (Kočandrle & Boček, 1999).

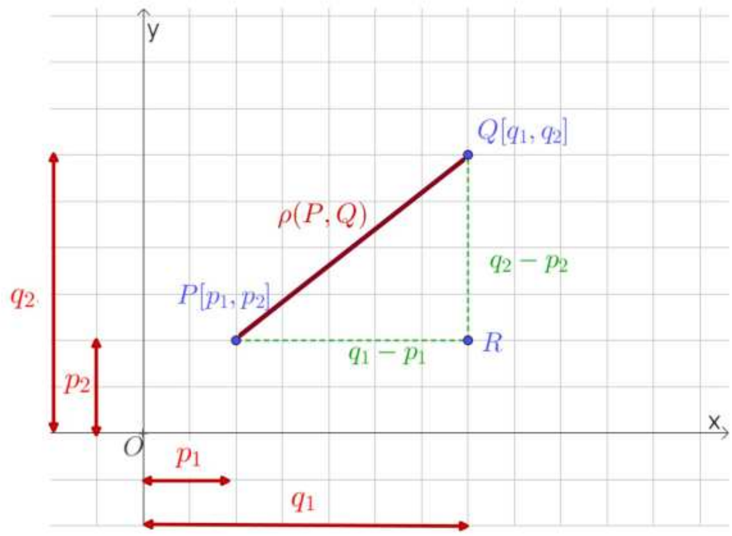


Obrázek 3.2: Kartézská soustava a souřadnice bodu v rovině.

3.4 Ukázky metrik v rovině

Toto téma zde zavedeme spíše názornou intuitivní cestou, přičemž korektní definice v plném znění lze pak v případě hlubšího zájmu dohledat například u Veselého (1997).

3.4.1 Euklidovské metrika

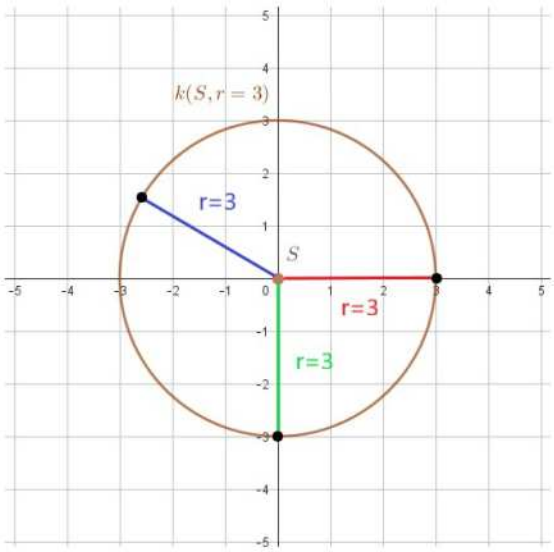


Obrázek 3.3: Euklidovská vzdálenost.

Euklidovská vzdálenost v kartézské rovině je ta, kterou běžně a intuitivně používáme. Je to vzdálenost zřejmě s nejnázornější geometrickou interpretací. Jak vyplývá z obr. 3.3, tato metrika přiřazuje dvěma bodům vzdálenost odpovídající délce úsečky, která je spojuje. Hodnoty $|q_1 - p_1|$ a $|q_2 - p_2|$ představují délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku $\triangle PRQ$, a délka úsečky PQ se rovná délce přepony tohoto trojúhelníku, kterou lze vypočítat pro dané dva body $P[p_1, p_2]$ a $Q[q_1, q_2] \in \mathscr{R}^2$ pomoci Pythagorovy věty jako

$$\rho(P,\, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2)} \tag{3.1}$$

Jinými slovy, je to délka přepony pravoúhlého trojúhelníku definovaného v kartézské soustavě souřadnicemi dvou bodů. Geometrickým místem bodů s toutéž euklidovskou vzdáleností od daného bodu je ve dvourozměrném prostoru klasická euklidovská kružnice. V případě euklidovské metriky mají kružnice tvar, který je nám přirozený a intuitivní (obr. 3.4).



Obrázek 3.4: Kružnice v euklidovské metrice s třemi vyznačenými poloměry.

3.4.2 Maximální metrika

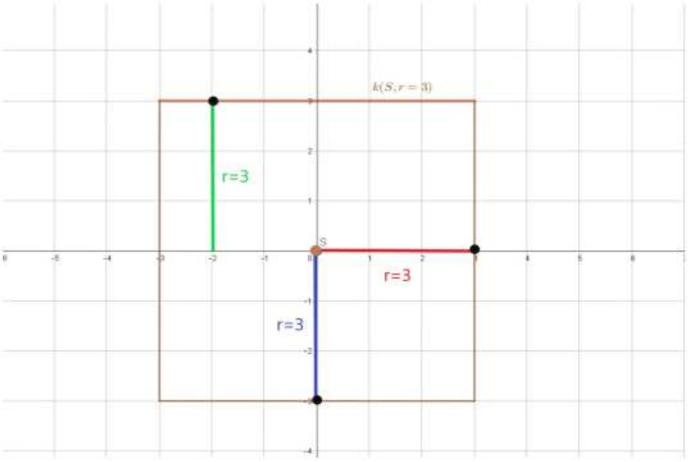
Tato metrika je také nazývána jako Čebyševova nebo šachová metrika.

Obrázek 3.5: Ukázka maximální metriky na šachovnici(`www.translatorscafe.com`)

Vzdálenost mezi dvěma body je maximem absolutních hodnot rozdílů mezi souřadnicemi:

$$d(P,\, Q) = max\{|p_1 - q_1|,\, |p_2 - q_2|\}.$$

Na obrázku 3.5 vidíme možnou diskrétní interpretaci této „šachové“ metriky pomocí pohybů, které figurka krále provádí na šachovnici. Ten se může pohybovat pouze po 8 políčkách, která ho obklopují. Vzdálenost mezi dvěma políčky je minimální počet pohybů, které musí král udělat, aby se dostal z jednoho místa na druhé. Geometrickým místem bodů s toutéž šachovou vzdáleností od daného bodu je ve dvourozměrném prostoru čtverec. V případě této metriky tak kružnicí s poloměrem r odpovídá čtverec se stranou $2r$ (obr. 3.6).



Obrázek 3.6: Kružnice v maximální metrice s třemi vyznačenými poloměry.

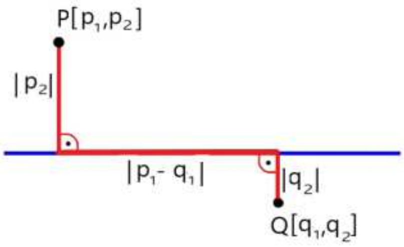
3.4.3 Říční metrika

Představme si nyní, že jsme v hustém lese, kterým protéká divoká řeka. Chceme-li se dostat z jednoho místa na druhé na stejné straně řeky, můžeme chodit pouze po stezkách kolmých na tok řeky, které vytvořila divoká zvířata, nebo po břehu řeky (obr. 3.7). Pokud bychom se chtěli dostat přes les na opačnou stranu, musíme využít vytvořených stezek a navíc se plavit lodí po řece (obr. 3.8).

Obrázek 3.7: Ilustrativní obrázek říční metriky

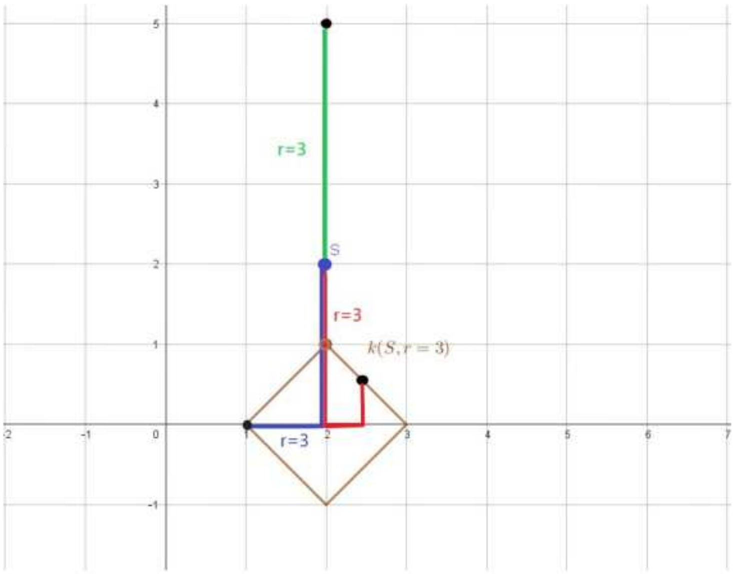
Nyní si tak můžeme udělat již lepší představu o definici této „říční“ metriky v rovině pro každé $P,\ Q \in \mathscr{R}^2$:

$$\rho(P,\ Q) = \begin{cases} |p_2 - q_2|\,, \text{ pokud } p_1 = q_1; \\ |p_2| + |p_1 - q_1| + |q_2|, \text{ pokud } p_1 \neq p_2. \end{cases} \tag{3.2}$$



Obrázek 3.8: Měření vzdálenosti v „říční“ metrice

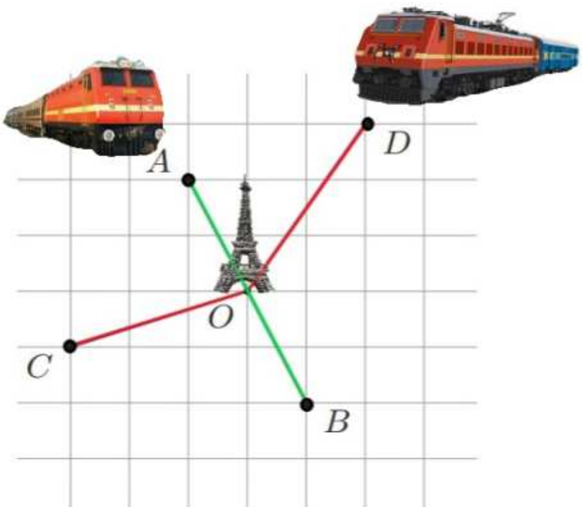
Podívejme se, jak v této metrice vypadají kružnice. Sestrojíme proto geometrické místo bodů, které jsou ve stálé „říční “vzdálenosti r od bodu S (obr. 3.9). Vidíme, že i zde kružnice ztrácí svůj obvyklý tvar a jedná se o jakýsi excentricky postavený čtverec vzhledem k zadanému středu S, který je navíc neúplný, součástí této množiny je pak i bod v $S + (0, r)$.



Obrázek 3.9: Kružnice v „říční“ metrice s třemi vyznačenými poloměry.

3.4.4 Pařížská metrika

K naší další metrice si opět najdeme inspiraci ze života. Představme si, že potřebujeme cestovat z jednoho francouzského města do druhého vlakem. Často se zde pak stává, že abychom se dostali do svého cílového místa, musíte nejprve cestovat do Paříže a odtud pak pokračovat dál do svého cíle. Všechny vlaky totiž jedou většinou právě přes Paříž (obr. 3.10).



Obrázek 3.10: Vzdálenost mezi body A, B v pařížské metrice je rovna eukleidovské vzdálenosti ρ_e, jelikož leží na stejné přímce jdoucí počátkem O. V případě bodů C, D je vzdálenost rovna $\rho_e(C, O) + \rho_e(D, O)$, jelikož přímka s body C, D počátkem neprochází

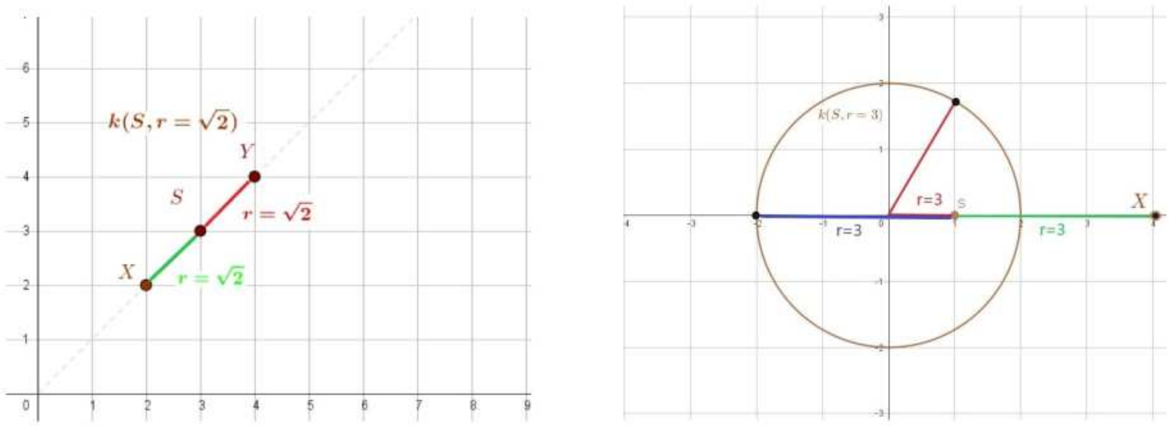
Pokud se dva body P a Q nacházejí na stejné trati, pak vzdálenost mezi nimi je eukleidovská. Pokud ale leží každý na jiné trati, pak jejich vzdálenost je rovna součtu eukleidovské vzdálenosti X od Paříže a eukleidovské vzdálenosti Y od Paříže. Podle tohoto modelu definujeme pařížskou metriku pro každé $P,\ Q \in \mathscr{R}^2$ jako

$$\rho(P,\ Q) = \begin{cases} \rho_e(P, Q), \text{ pokud } P \text{ a } Q \text{ leží s počátkem } O \text{ na téže přímce} \\ \rho_e(P, O) + \rho_e(O, Q) \text{ v ostatních případech.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Pokud nahlédneme, jak by mohla vypadat kružnice v této metrice, zjistíme, že pro střed S a poloměr r mohou nastat v rámci definice kružnice jako množiny bodů stejně vzdálených od středu tyto možnosti:

a. Pro $r \leq \rho_e(S, O)$ („do Paříže bych se nedostal“) se pařížská kružnice skládá ze dvou bodů X a Y na polopřímce $\overrightarrow{OS}$, pro které platí $\rho_e(X, S) = \rho_e(Y, S) = r$ (obr. 3.11a).

b. Pro $r > \rho_e(S, O)$ („do Paříže se mohu dostat“) se pařížská kružnice skládá z euklidovské kružnice se středem v počátku O a poloměrem $r' = r - \rho_e(S, O)$, navíc z bodu X na polopřímce $\overrightarrow{OS}$, pro který platí $\rho_e(XO) = \rho(S, O) + r$ (obr. 3.11b).



(a) Pro $r \leq \rho_e(S, O)$. **(b)** Pro $r > \rho_e(S, O)$.

Obrázek 3.11: Možné podoby kružnic v pařížské metrice s barevně vyznačenými poloměry.

3.5 Manhattanská metrika

V tomto oddílu se podrobněji zaměříme na studium manhattanské metriky. Budeme se věnovat jejímu původu, definici a také představíme její klíčové vlastnosti, protože pro naši práci bude mít zásadní roli.

Vznik

Taxikářskou geometrii poprvé vážně navrhl Hermann Minkowski (1864-1909), matematik narozený v Rusku, který byl učitelem mladého Alberta Einsteina v Curychu. Ten na přelomu století publikoval v Německu své „Souborné spisy“[1], ve kterých analyzoval různé metrické

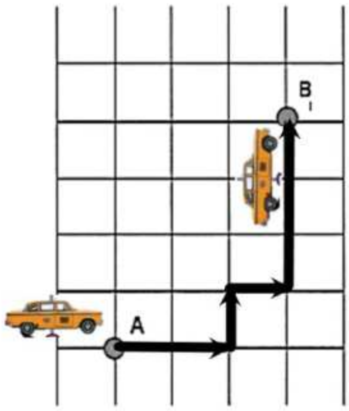
[1]Minkowski, H. Gesammelte abhandlungen von Hermann Minkowski, unter mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl hrsg. von David Hilbert.Leipzig,: B. G. Teubner, 1911

systémy: topologické prostory, které se skládají z dobře definované množiny bodů a pravidla pro měření „vzdálenosti“ mezi jakýmikoli dvěma body (Gardner, 1997). Ačkoli Minkowski publikoval základy této metriky již na počátku 20. století, termín „taxikářská“ byl zaveden až v roce 1952. Karl Menger tehdy vytvořil geometrickou expozici v Muzeu vědy a průmyslu v Chicagu. Součástí ní byla vydaná brožura nazvaná „You Will Like Geometry“, ve které byl daný termín poprvé použit. Tento okamžik znamenal oficiální zavedení názvu „taxikářská“ metrika a „taxikářská“ geometrie a jejich následovné rozšíření v matematických a vědeckých kruzích (Reinhardt, 2005).

Obrázek 3.12: Manhattan
Zdroj: Susan Hall Frazier/Getty Images,joSon/Getty Images

Základní myšlenka

Základní myšlenka taxikářské metriky je v tom, že například v Manhattanu jsou (převážně) jen dva směry ulic. Představme si proto, že se zde jako místní taxikář pohybujeme po těchto mřížových ulicích a potřebujeme se dostat z nějakého místa A do místa B. Zvolíme si proto například cestu, která je zobrazena na obrázku 3.13. Jakou konečnou vzdálenost to nakonec pro nás bude představovat? Samozřejmě nám Pythagorova věta říká, že vzdušnou čárou je to



Obrázek 3.13: Jak se dostat mezi dvěma body v taxikářské metrice?

$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ jednotek (v jednotkách délky městského bloku). To by však byla vzdálenost pro holuba, který může létat přímo (obr. 3.12), my se ale jako taxikáři musíme řídit pravidly ulic. Existuje několik možných tras, a ta vyznačená na obrázku má délku 7. Ve skutečnosti mají všechny efektivní trasy taxikáře délku 7, výjimku pak tvoří ty neefektivní, u kterých bychom se snažili zákazníka ošidit a jezdili bychom proto většima oklikama, abychom nahnali větší vzdálenost a zákazníkovi mohli kalkulovat vyšší cenu.

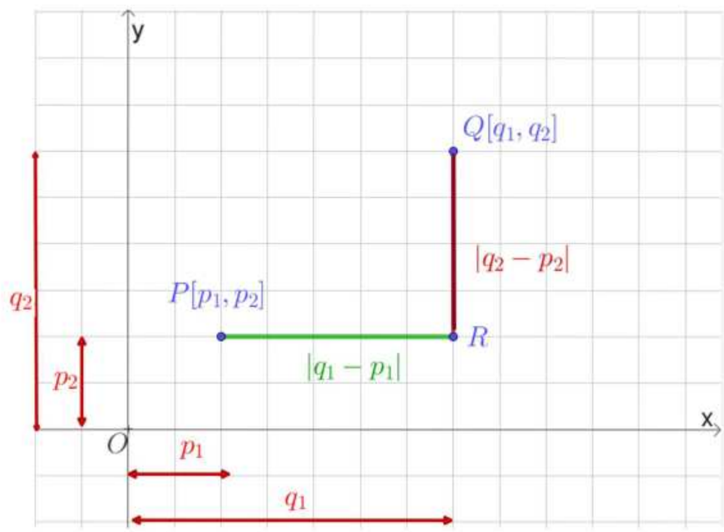
Definice

Definice manhattanské (taxikářské) metriky je proto následující:

Pro libovolné body $P[p_1, p_2]$ a $Q[q_1, q_2] \in \mathscr{R}^2$ platí:

$$\rho_t(P_1, P_2) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|.$$

Pokud tento vztah platí obecně pro všechny body v rovině, hovoříme zde o *spojitém* modelu manhattanské metriky. V urbanistické síti ulic, kde musí mít každý bod alespoň jednu souřadnici celočíselnou, aby se stále nacházel na ulici, hovoříme o *diskrétním modelu* manhattanské metriky.



Obrázek 3.14: Manhattanská metrika a její vizualizace v kartézské soustavě souřadnic.

Z geometrické reprezentace na obrázku 3.14 vidíme, že pro výpočet vzdálenosti mezi dvěma body v taxikářské geometrii potřebujeme sečíst jejich horizontální a vertikální vzdálenosti. Vzdálenost například mezi body $A[-2, 1]$ a $B[3, 5]$ proto je:

$$|-2-3| + |1-5| = 5 + 4 = 9.$$

Tento formální výpočet nám neříká nic jiného než to, že abychom se dostali z bodu A do bodu B, musíme se celkem přesunout „o 5 kroků doprava a 4 kroky nahoru“.

Nyní ale ještě musíme ověří, že se skutečně jedná o metriku. Musíme ukázat, že zafungují tři vlastnosti, které metriku definují (str. 27).

1.
   - $\rho_t(P, Q) \geq 0$ pro $\forall P,\ Q \in \mathscr{R}^2$

     Tato vlastnost vychází ze samotné definice manhattanské metriky, která je dána součtem dvou absolutních hodnot, takže výsledná hodnota je vždy nezáporná. ■
   - $P = Q \Rightarrow \rho_t(P, Q) = 0$

     $P = Q \Rightarrow \rho_t(P, Q) = \rho_t(P, P) = |p_1 - p_1| + |q_1 - q_1| = 0 + 0 = 0.$■
   - $\rho_t(P, Q) = 0 \Rightarrow P = Q$

     $\rho_t(P, Q) = 0 \Rightarrow |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = 0 \Rightarrow$

     $\Rightarrow (p_1 - q_1 = 0) \wedge (p_2 - q_2 = 0) \Rightarrow (p_1 = q_1) \wedge (p_2 = q_2) \Rightarrow P = Q.$■

2.
   - $\rho_t(P, Q) = \rho_t(Q, P)$ pro $\forall P,\ Q \in \mathscr{R}^2$

     $\rho_t(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = |q_1 - p_1| + |q_2 - p_2| = \rho_t(Q, P).$■

3. • $\rho_t(P,R) \leq \rho_t(P,Q) + \rho_t(Q,R)$ pro $\forall P,\ Q \in \mathscr{R}^2$

$$\begin{aligned}\rho_t(P,R) = |p_1 - r_1| + |p_2 - r_2| &= |p_1 - q_1 + q_1 - r_1| + |p_2 - q_2 + q_2 - r_2| = \\ &= |(p_1 - q_1) + (q_1 - r_1)| + |(p_2 - q_2) + (q_2 - r_2)| \leq \\ &\leq |p_1 - q_1| + |q_1 - r_1| + |p_2 - q_2| + |q_2 - r_2| = \\ &= |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |q_1 - r_1| + |q_2 - r_2| = \\ &= \rho_t(P,Q) + \rho_t(Q,R). \blacksquare\end{aligned}$$

3.6 Metrická definice geometrie

Abychom mohli diskutovat o taxikářské geometrii a případně o její souvislosti s euklidovskou geometrií, je potřeba se nejdříve dohodnout na tom, co se rozumí pod metrickým přístupem k euklidovské geometrii. Pro naše potřeby se tak soustředíme na rovinnou euklidovskou geometrii a rovinnou taxikářskou geometrii. Následující Birkhoffova metrická definice euklidovské geometrie je převzata od Moiseho (1990) a přehledně zpracována Krausem (1973).

3.6.1 Euklidovská geometrie

Euklidovská geometrie se skládá z:

- množiny P, nazývané rovina, jejíž prvky se nazývají body;
- množiny $\mathscr{L}$ podmnožin P, které nazveme přímkami patřících do P;
- funkce vzdálenosti ρ;
- funkce měření úhlů m.

Platí poté následujících třináct vlastností:

Axiomy incidence

1. Pro libovolné dva body existuje právě jedna přímka, která je oba obsahuje.
2. Každá přímka obsahuje alespoň dva body. Rovina P obsahuje alespoň tři nekolineární body.

Axiomy vzdálenosti

3. Funkce ρ pak každé uspořádané dvojici bodů (A, B) přiřazuje nezáporné reálné číslo $\rho(A, B)$. Kromě toho $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ [ρ je pozitivně definitní].
4. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ [ρ je symetrická].
5. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$ [ρ splňuje trojúhelníkovou nerovnost].

Jak již bylo uvedeno v kapitole 3.2, tato funkce ρ, která splňuje výše uvedené vlastnosti 3 – 5 , se nazývá metrika na množině P.

Axiom měřítka

6. Pro libovolnou přímku L existuje bijektivní funkce $f_L : L \to \mathscr{R}$, že $\forall A, B \in L$ platí $|f(A) - f(B)| = \rho(A, B)$.

Definováním toho, co je bod „ležící mezi“ dvěma pomocí kolinearity a vzdálenosti, definováním úsečky pomoci tohoto náležení „mezi“ dvěma, pojmu konvexnosti díky již zadefinované úsečky, se zde přechází k uvedení dalšího axiomu.

Axiom rozdělení roviny

7. Pokud L představuje libovolnou přímku, existují podmnožiny H_1 a H_2 množiny P (nazývané poloroviny), takové, že
   (a) H_1 a H_2 jsou konvexní množiny;
   (b) $H_1 \cup H_2 = P - L$;
   (c) pokud je bod $A \in H_1$ a bod $B \in H_2$, pak $\overline{AB} \cap L \neq \emptyset$.

Definováním pojmu polopřímka pomocí kolinarity a „náležení mezi“, definici pojmu úhel pomoci již definovaných polopřímek, vnitřku úhlu pomoci pojmu polorovina, se pak přechází k následujícímu axiomu.

Axiomy velikostí úhlů

8. m přiřazuje každému úhlu reálné číslo v intervalu 0 až 180.

9. Nechť je $\overrightarrow{AB}$ hraniční polopřímka poloroviny H a nechť je dáno reálné číslo r v intervalu $(0, 180)$, pak existuje právě jedna polopřímka $\overrightarrow{AP}$ taková, že $P \in H$ a $m\angle PAB = r$. („Axiom konstrukce úhlu“)

10. Pokud je bod D uvnitř úhlu $\angle ABC$, pak platí měření $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle ABC$. („Axiom sčítání úhlů“)

11. Je-li bod B mezi body A a C a bod $D \notin \overleftrightarrow{AC}$, pak platí $m\angle ABD + m\angle DBC = 180$. („Axiom doplňku úhlu“)

Pro pochopení dalšího axiomu probíhá nejdříve vysvětlení těchto myšlenek a pojmů: shodnost úseček, shodnost úhlů, vzájemná korenspondence stran a úhlů při dané korenspondenci vrcholů, shodnost trojúhelníků. Každý však bude mít i intuitivní pochopení tohoto axiomu, který je všeobecně známý jako „strana-úhel-strana“.

12. Nechť je dán vzájemně jednoznačný vztah mezi vrcholy dvou trojúhelníků, pak platí, že pokud jsou shodné dvě odpovídající strany a odpovídající uhel prvního a druhého trojúhelníka, je tento vzájemný vztah shodností obou trojúhelníků.

Poslední, rozhodně však ne méně důležitý, je „Euklidův pátý axiom o rovnoběžkách“ v podobě Playfairovy formulace:

Euklidův axiom o rovnoběžkách

13. Je-li dán bod P mimo přímku L, existuje právě jedna přímka procházející P, která se neprotíná s L.

3.7 Neeuklidovské geometrie

Ty geometrie, které nerespektují alespoň jeden z axiomů euklidovské geometrie, jsou nazývány neeuklidovskými geometriemi. Z tohoto důvodu mezi ně patří i taxikářská geometrie.

Absolutní geometrie V tomto metrickém kontextu můžeme popsat absolutní geometrii jako systém $[P, \mathscr{L}, \rho, m]$, kde jsou splněny vlastnosti $1 - 12$.

Hyperbolická geometrie Hyperbolickou geometrii definujeme jako systém [P, $\mathscr{L}$, ρ, m], kde jsou splněny vlastnosti $1 - 12$, ale vlastnost 13 je nahrazena následujícím způsobem:

13. Hyperbolický axiom rovnoběžnosti: Je-li dán bod P mimo přímku L, existují alespoň dvě přímky procházející P a neprotínající se s L.

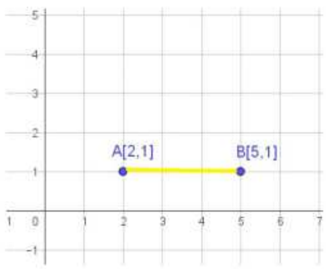
Taxikářská geometrie Taxikářskou geometrii definujeme jako systém [P, $\mathscr{L}$, ρ, m], kde platí vlastnosti $1 - 11$ a 13, ale vlastnost 12 selhává, jak se ukáže v další části.

Kapitola 4

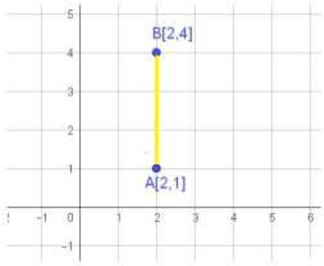
Taxikářská geometrie

V této kapitole použiji přístup profesorky Ruth Berger, který prezentovala ve svých přednáškách na Luther College University (Berger, 2015). Budu se proto držet i její zavedené terminologie v rámci vlastního překladu.

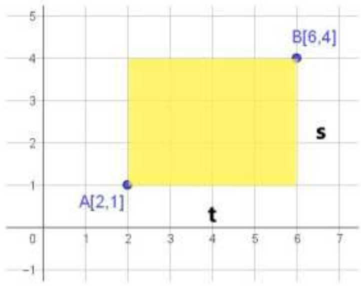
- Dva body, které mají jednu souřadnici shodnou (obr. 4.1a/b), budeme označovat h/v zarovnané (myšleno horizontálně a vertikálně podle souřadnicových os).
- Obdélník s diagonálními vrcholy A a B pak budeme označovat jako $AB-$box (obr. 4.1c). Pokud jsou body A a B zarovnané h/v, $AB-$box dostává podobu úsečky AB (obr. 4.1a/b).
- Kratší stranu $AB-$boxu budeme označovat s, delší pak t (obr. 4.1c).



(a) Horizontálně zarovnané body.



(b) Vertikálně zarovnané body.



(c) AB-box a značení stran.

Obrázek 4.1: Zarovnání bodů h/v a AB-boxy.

V následující části výjdeme z Krause (1973). Taxikářská geometrie je zvláštní typ geometrie, kde P, $\mathscr{L}$ a m jsou zcela stejné jako pro souřadnicový model roviny v euklidovské geometrii. Rozdílná je pouze funkce vzdálenosti. Eukleidovská metrika je zde nahrazena metrikou manhattanskou.

Připomeňme jen formální definici taxikářské (manhattanské) vzdálenosti (kapitola 3.5, str.32):

$$\forall P[p_1, p_2], \forall Q[q_1, q_2] \in \mathscr{R}^2 : \rho_t(P, Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|.$$

Nyní zkontrolujme, zda systém $[P, \mathscr{L}, \rho_t, m]$ splňuje opravdu všechny definující vlastnosti euklidovské geometrie kromě již zmíňované vlastnosti „strana-úhel-strana"(sekce 3.6.1).

Vlastnosti incidence 1 a 2 jsou okamžitě zřejmé, protože se týkají pouze bodů a přímek. Proto budou platit jak pro taxikářskou geometrii $[P, \mathscr{L}, \rho_t, m]$, tak pro euklidovskou geometrii $[P, \mathscr{L}, \rho_e, m]$. Vlastnosti 3 – 5 jsme prokázali již v rámci definice manhattanské metriky na str. 34. Axiom 6 bude vyžadovat trochu více práce. Funkci f_t můžeme definovat následovně (Krause, 1973):

- Pro případ, že má přímka l vertikální polohu, definujme $\forall X[x, y] \in l : f_l([x, y]) = y$.

  To, že je funkce bijekcí, je pro tento případ zřejmé, i to, že pro $\forall A,\ B \in l$ platí $|f_l(A) - f_l(B)| = \rho_t(A, B)$.

- Pro ostatní případy je tudíž přímka l daná rovnici $y = m \cdot x + b$. Definujeme tak $\forall X[x, y] \in l : f_l(X) = (1 + |m|) \cdot x$. Funkce f_l je bijekcí $l \to \mathscr{R}$.

  $$\begin{aligned}|f_l(A) - f_(B)| &= |f_l[a_1, a_2] - f_l[b_1, b_2]| = |(1 + |m|) \cdot a_1 - (1 + |m|) \cdot b_1| = \\ &= |(1 + |m|) \cdot |(a_1 - b_1)| = |a_1 - b_1| - |m| \cdot |a_1 - b_1| = |a_1 - b_1| - |a_2 - b_2| = \rho_t(A, B),\end{aligned}$$

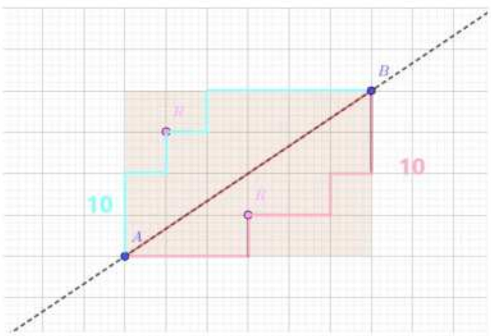
  neboť směrnice přímky l je $m = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$, takže $|m| \cdot |a_1 - b_1| = |a_2 - b_2|$.

Abychom potvrdili, že i axiom 7 zde platí, je potřeba zjistit, jak vypadá pro body náležení „mezi dvěma" v taxikářské geometrii. Budeme vycházet z toho, že pojem „kolineární" se na základě axiomu 1 a 2 chápe stejně jako euklidovsky kolineární. Definice zní: Bod B je „mezi dvěma body" A a C, právě tehdy, když platí:

1. $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$;

2. body A, B, C jsou různé a kolinární.

Intuitivně by nám mohlo zdát, že první vlastnost je již dostatečná k zajištění toho, že bod leží mezi dvěma jinými body. To je však pravda jen v euklidovské geometrii, nikoliv v taxikářské. Pokud jsou body A a B zarovnané h/v, žádný rozdíl zde není. V ostatních případech však



Obrázek 4.2: Všechny body R ve zvýrazněném AB-boxu splňují tu vlastnost, že $\rho_t(A, R) + \rho_t(R, B) = \rho_t(A, B)$.

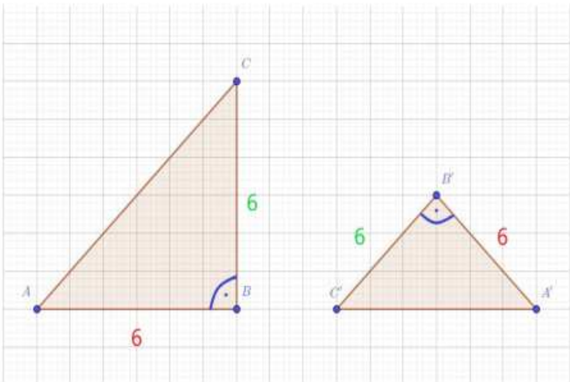
pro všechny body uvnitř AB-boxu platí, že součet jejich vzdáleností od protilehlých vrcholů

A a B je rovna celkové vzdálenosti mezi těmito vrcholy. Na obrázku 4.2 tak všechny body R uvnitř zvýrazněné oblasti splňují, že součet jejich vzdáleností od A a B je 10. Dodáním druhé podmínky však docílíme toho, že nakonec množina bodů „mezi“ A a B v taxikářské geometrii s metrikou ρ_t (průnik stínované a čárkované množiny) je stejná jako množina bodů mezi A a B v klasické euklidovské geometrii s eukleidovskou metrikou ρ_e. Úsečky v taxikářské geometrii jsou stejné jako úsečky v euklidovské geometrii, a proto konvexní množiny v taxikářské geometrii jsou stejné jako konvexní množiny v geometrii euklidovské. Je proto zřejmé, že i v této geometrii platí axiom 7.

Axiomy 8 – 11 musí platit automaticky pro $[P, \mathscr{L}, \rho_t, m]$, pokud platí pro $[P, \mathscr{L}, \rho_e, m]$, protože obě geometrie používají stejnou funkci pro měření úhlu. Pojmy úhel, polopřímka, polorovina, vnitřek úhlu a „mezi dvěma“ mají v obou geometriích stejný význam.

Axiom 13 o rovnoběžkách platí v geometrii taxikářské stejně jako v geometrii eukleidovské, protože se týká pouze bodů a přímek, které mají v obou geometriích stejný význam.

Na obrázku 4.3 pak můžeme pozorovat, že strany CA, CB, $C'A'$ a $C'B'$ mají všechny stejnou délku (6 jednotek) a úhly, které tyto strany svírají, jsou shodné a mají 90°. Přesto tyto trojúhelníky shodné nejsou a porušují tím kritérium shodnosti *sus* .



Obrázek 4.3: Ilustrace porušení axiomu shodnosti sus v taxikářské geometrii.

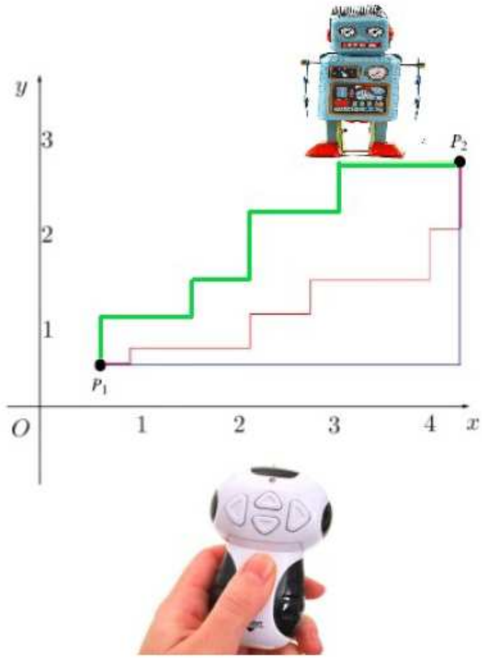
4.1 Nejkratší cesta

V případě spojitého modelu taxikářské geometrie existuje nekonečně mnoho cest mezi dvěma body, které mají nejmenší vzdálenost. Můžeme si zde například představit robota, jehož manévrovací schopnosti jsou omezeny jen do směrů os x a y, přičemž ale můžeme směr pohybu tohoto robota kdykoliv změnit (obr.4.4).

V diskrétním modelu, což je příklad taxikáře v ulicích Manhattanu, můžeme dokonce spočítat, kolik je nejkratších cest. Než se pustíme do obecného vzorce, podívejme se nejdříve na situaci mřížky o rozměrech 3×2 (obr. 4.5). Všechny tyto nejkratší cesty (zleva doprava) jsou různé způsoby uspořádání dvou pohybů nahoru (↑) a tří pohybů doprava (→). První cestu bychom tak mohli symbolicky zapsat jako ↑↑→→→ .

Celkový počet cest v AB-bohu 2×3 získáme jako permutace s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje třikrát a druhý dvakrát.

$$p_{2\times 3} = P^{'}(2, 3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

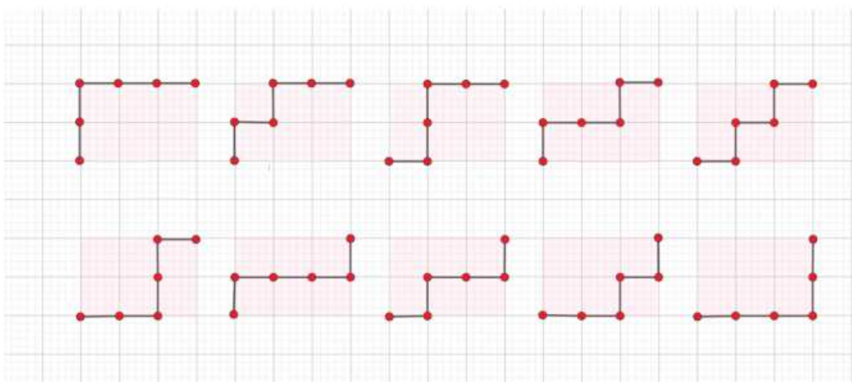


Obrázek 4.4: Vizualizace některých nejkratších cest ve spojitém modelu jako pohyb robota.

V obecném případě s h pohyby horizontálně a v pohyby vertikálně dostáváme pro počty cest v tomto AB-boxu $h \times v$ vztah:

$$p_{h \times v} = P'(h, v) = \frac{(h+v)!}{h! \cdot v!}$$

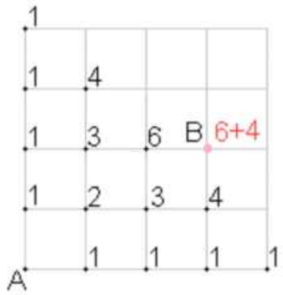
.



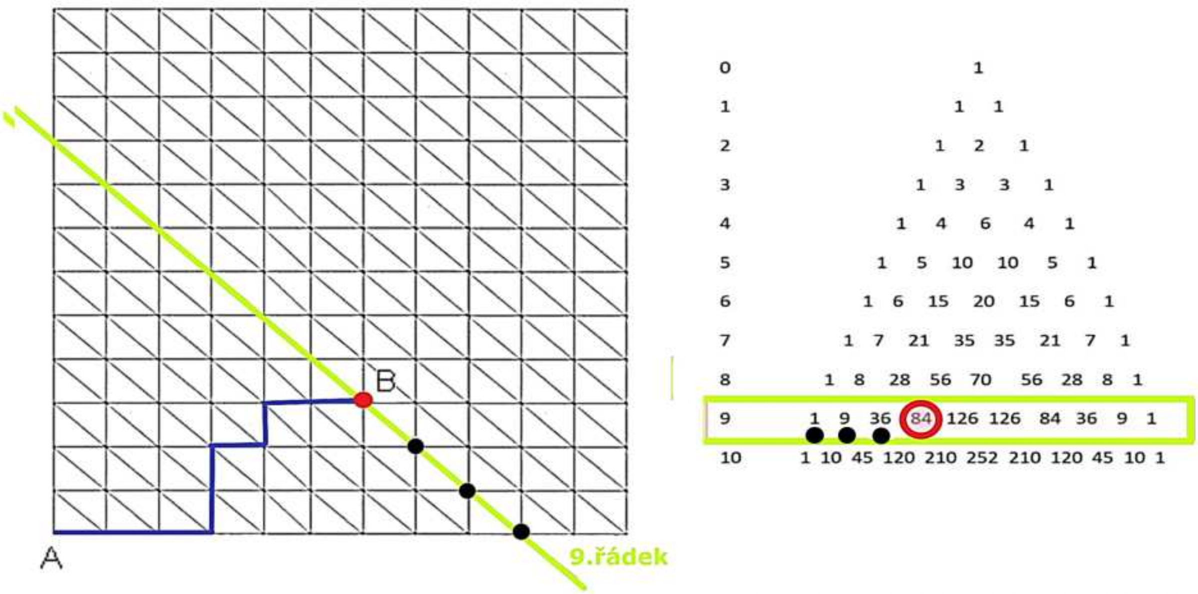
Obrázek 4.5: Vizualizace všech nejkratsších cest v diskrétním modelu v $AB-$boxu 3×2.

Při systematickém pohledu na počet nejkratších cest v diskrétním modelu taxikářské geometrie můžeme navíc objevit i jedno významné schéma, které dobře znázorňuje některé vlastnosti kombinačních čísel. Počet nejkratších cest vedoucích k danému mřížovému bodu je vždy roven součtu nejkratších cest, které vedou k předchozím nejbližším mřížovým bodům (obr. 4.6).

Výsledkem je pak Pascalův trojúhelník, jehož řádky jsou zde orientovány diagonálně. Na obrázku 4.7 vidíme, že bod B zde leží na deváté diagonální přímce a tedy na 9. řádku Pascalova trojúhelníku, navíc je zde umístěn jako čtvrtý v pořadí. Zde se nachází číslo $28 + 56 = 84$ neboli kombinační číslo $\binom{9}{3}$.



Obrázek 4.6: Počty nejkratších cest z bodu A k daným mřížovým bodům.



Obrázek 4.7: Pascalův trojúhelník v kontextu nejkratších cest v taxikáře.

Existuje tak celkem 84 nejkratších cest z bodu A do bodu B, což jsou všechny možné kombinace pohybů „6 jednotek doprava a 3 nahoru“. Obecně to můžeme vyjádřit kombinačním číslem $\binom{h+v}{v}$ pro případ „ h doprava, v nahoru“.

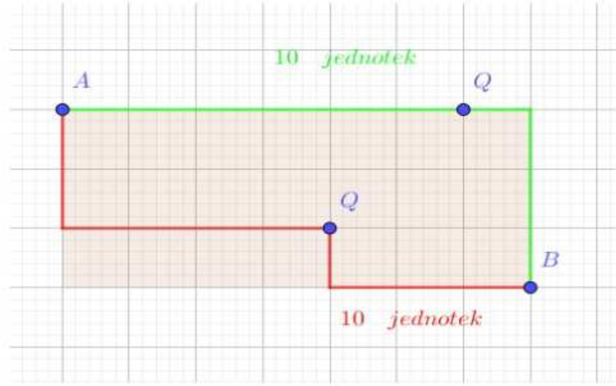
4.2 Množiny bodů v taxikářské geometrii

Určení množin bodů v taxikářské geometrii představuje zajímavý a důležitý úkol v rámci geometrického zkoumání. Zaměříme se proto v této sekci na vlastnosti a charakteristiky těchto množin vzhledem k taxikářské metrice a ukážeme, jak se liší od těch ve standardní euklidovské geometrii.

4.2.1 Množina nejkratších cest a její vlastnosti

Jak jsme ukázali v sekci 4.1, každým bodem Q uvnitř nebo na obvodu AB-boxu lze vést nejkratší cestu z bodu A do bodu B (obr. 4.8). Platí tak následující vlastnost:

$$\rho_t(A, Q) + \rho_t(Q, B) = \rho_t(A, B). \tag{4.1}$$

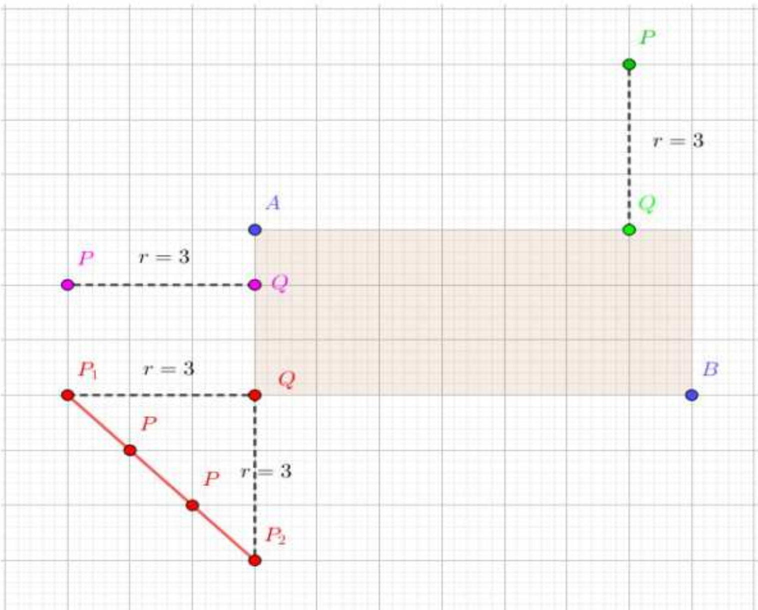


Obrázek 4.8: *AB*-box a vztahy pro body na/uvnitř.

V taxikářské geometrii je proto zjevné, že mezi různými body A a B může existovat více cest nejkratší délky, zatímco v euklidovské geometrii existuje vždy pouze jedna taková cesta. Množinou nejkratších cest v taxikářské geometrii je již zmíněný AB-box.

Podívejme se na obrázek 4.9. Pokud si zvolíme bod Q libovolně „na" obvodu AB-boxu a mimo něj zvolíme libovolný bod P tak, aby byl umístěn kolmo na jeho příslušnou stranu ve vzdálenosti r, pak musí platit:

$$\rho_t(A, P) = \rho_t(A, Q) + r \quad \text{a} \quad \rho_t(B, P) = \rho_t(B, Q) + r. \tag{4.2}$$



Obrázek 4.9: *AB*−box a vztahy pro body mimo něj.

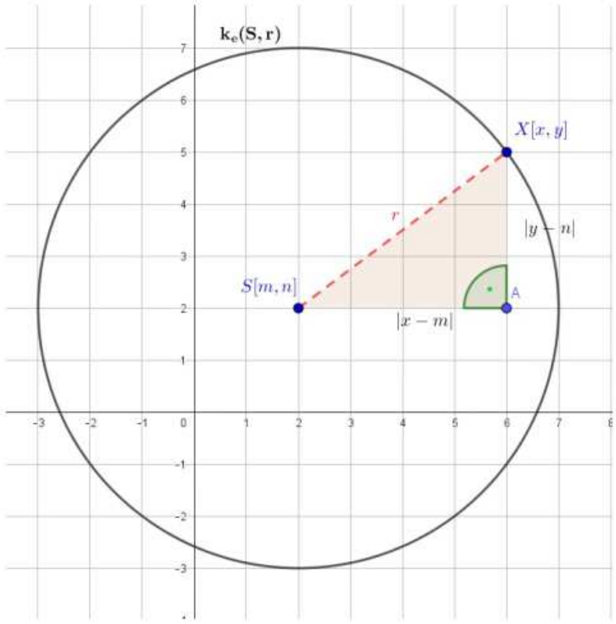
Pro situaci, kdy je bod Q umístěn v jednom ze zbylých diagonálních vrcholů AB-boxu, platí tento vztah navíc ještě pro všechny body body P diagonálně mezi P_1P_2 (v další části zjistíme, že jsou to body tvořící část taxikářské kružnice se středem v bodě Q a poloměrem r). Ve všech případech zde využíváme toho, že nejkratší cesta z bodu P do A (nebo B) vždy může vést přes daný bod Q.

4.2.2 Kružnice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu zvaného střed kružnice. Tuto vzdálenost pak nazýváme poloměr kružnice.

Na obrázku (4.10) vídíme, že pro jakýkoliv bod $X \in k_e([m,n];r)$ v euklidovské geometrii musí platit:

$$\rho_e(X,S) = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r.$$

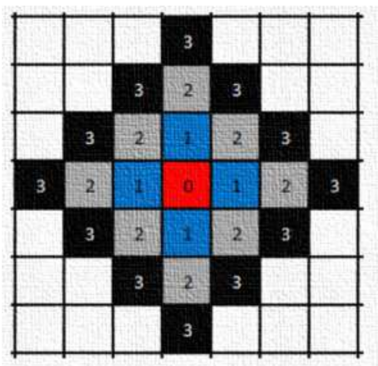


Obrázek 4.10: Euklidovská kružnice $k_e(S[2,2]$,r=5)

Kružnice k se středem $S[m,n]$ a poloměrem r je proto v euklidovské geometrii určena následující středovou rovnici:

$$k_e : (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2.$$

Výpočet taxikářské vzdálenosti v rámci diskrétního modelu čtvercové sítě spočívá v odpočítávání jednotlivých čtverečků v horizontálním a vertikálním směru. Pojďme si pohybem figurky na čtvercové síti vizualizovat, jak se asi bude vyvíjet tvar kružnice v této geometrii. Na obrázku



Obrázek 4.11: Vizualizace taxikářské kružnice pohybem figurky po mřížce.
Zdroj:`https://chris3606.github.io`

4.11 je červený čtvereček, který reprezentuje libovolné výchozí místo. Modré čtverečky označují místa, kam se figurka dostane v rámci taxikářské metriky posunutím se z výchozího místa o 1 políčko. Stejně tak nám šedé čtverečky označují ta místa, která jsou ve vzdálenosti 2 políček, a černé čtverečky reprezentují ta místa, která jsou ve vzdálenosti 3 políček. Konkrétní poloměr tak postupně kolem daného červeného políčka vykreslí útvar ve tvaru jakéhosi diamantu.

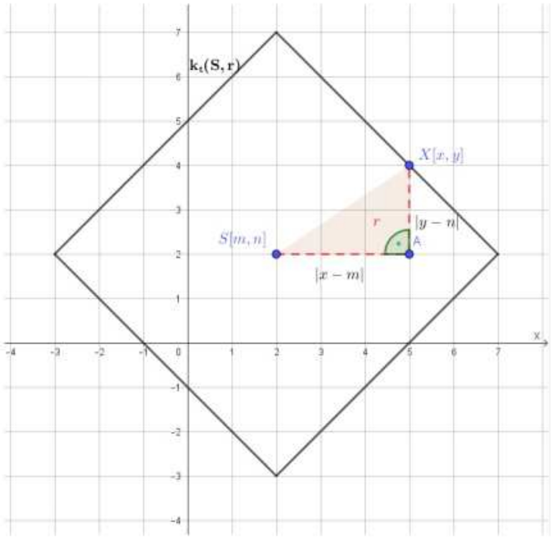
Podívejme se, co se stane s rovnicí kružnice, pokud zaměníme euklidovskou vzdálenost za vzdálenost taxikářskou. Pro jakýkoliv bod $X \in k_t$ musí platit:

$$\rho_t(X, S) = |x - m| + |y - n| = r$$

V taxikářské geometrii tak bude středová rovnice kružnice se středem $S[m, n]$ a poloměrem r určena následujícím výrazem:

$$k_t : |x - m| + |y - n| = r$$

Pokud bychom pak tento vztah pro libovolně zvolenou kružnici zadali do vstupu programu



Obrázek 4.12: Taxikářská kružnice $k_t(S[2, 2]$, r=5).

Geogebra, zjistili bychom, že taxikářská kružnice má čtvercový tvar (obr. 4.12). Všechny body na tomto čtverci jsou opravdu ve vzdálenosti r od daného středu S, což je výsledek, který není úplně intuitivní.

Není π jako π

Číslo π je jednou z nejznámějších a nejdůležitějších konstant v matematice. Je definováno jako poměr dvou délek: obvodu kruhu k jeho průměru.

V euklidovské geometrii víme, že jeho hodnota hodnota je přibližně 3, 14. Historie aproximace čísla π sahá až do dávné minulosti, konkrétně do roku přibližně 1900 př. n. l. Již od těchto dob se lidé snažili pochopit toto mystické číslo, které se vyskytuje v celé řadě matematických souvislostí.

Ale co se s tímto číslem stane, pokud se na něj podíváme v kontextu taxikářské geometrie? Vzdálenost mezi dvěma vrcholy na taxikářské kružnici bude $2 \cdot r$, což je v podstatě průměr kružnice d. Obvod je tudíž $4 \cdot d$ (čtyři strany). Z toho vyplývá, že vztah mezi obvodem a průměrem bude:

$$\pi = \frac{O}{d} = \frac{4 \cdot d}{d} = 4.$$

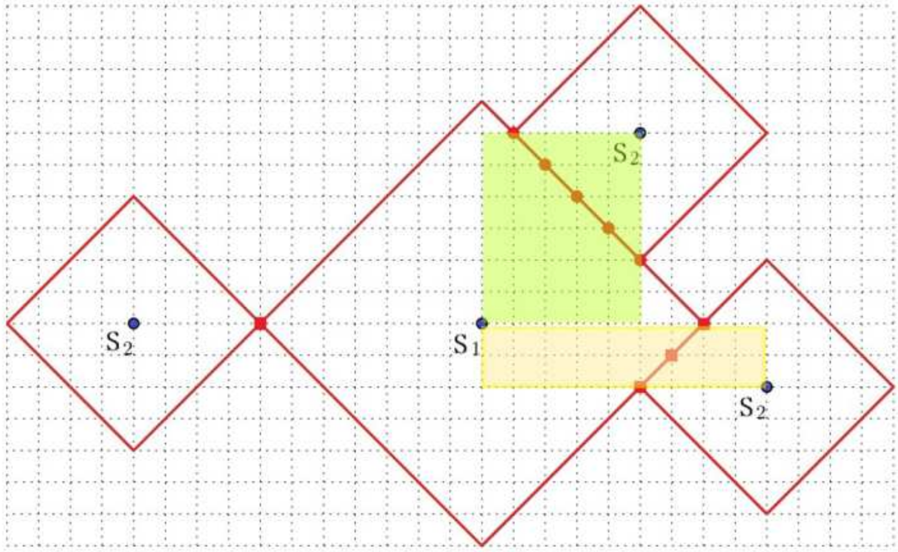
Jak zde vidíme, matematika je nekonečně rozmanitá a plná překvapení. Změna úhlu pohledu může zcela změnit to, co jsme si dříve mysleli o základních matematických pojmech. To platí i v případě definice čísla π, které je závislé na konkrétním měření vzdálenosti. Při použití různých způsobů měření můžeme dostat i různé hodnoty π.

Vzájemná poloha dvou kružnic

Nechť $D = \rho_t(S_1, S_2)$ představuje taxikářskou vzdálenost mezi středy S_1 a S_2 dvou kružnic o poloměrech r_1 a r_2.

1. Pokud platí $r_1 + r_2 < D$, kružnice se neprotínají.

2. Pokud platí $r_1 + r_2 = D$, kružnice mají společnou úsečku uvnitř S_1S_2-boxu, nebo společný bod, pokud jsou jejich středy h/v zarovnané (obr. 4.13).



Obrázek 4.13: Případy pro $r_1 + r_2 = D$. Průnikem dvou kružnic může být buď bod, nebo úsečka, v závislosti na vzájemné poloze obou středů kružnic.

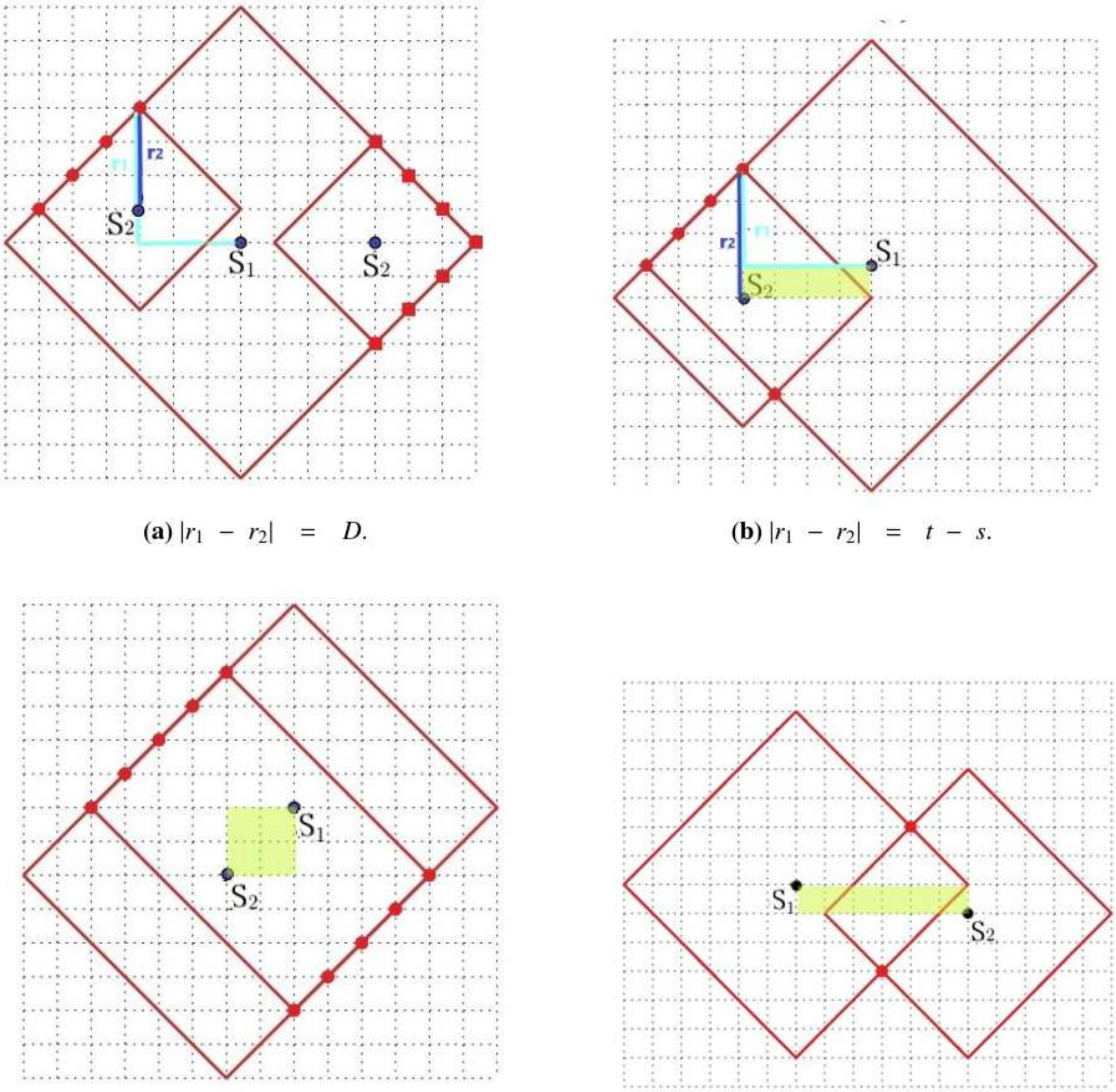
3. Pokud platí $r_1 + r_2 > D$, pak rozlišíme tyto případy (obr. 4.14):

   a) Pokud $|r_1 - r_2| = D$, pak je průnikem jedna úsečka, nebo dvě sousední úsečky, pokud jsou středy S_1 a S_2 navíc h/v zarovnané.

   b) Pokud $|r_1 - r_2| = t - s$, kde $0 < s < t$ jsou strany S_1S_2-boxu, průnikem je úsečka a bod.

   c) Pokud je S_1S_2-box čtvercový ($s = t$) a $r_1 = r_2$, pak je jejich průnik tvořen dvěma úsečkami.

   d) Ve zbylých případech se kružnice protínají ve dvou bodech.



(a) $|r_1 - r_2| = D$.

(b) $|r_1 - r_2| = t - s$.

(c) $s = t$ a $r_1 = r_2$.

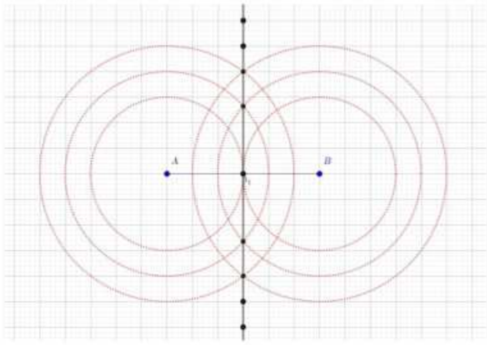
(d) Ve zbylých případech.

Obrázek 4.14: Vzájemná polohy kružnic pro $r_1 + r_2 > D$.

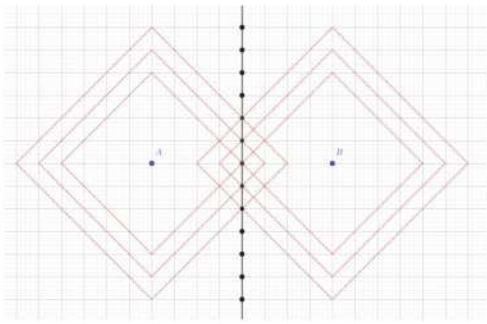
4.2.3 Osa úsečky

Osou úsečky AB je množina všech bodů X v rovině, které mají stejnou vzdálenost od krajních bodů A a B. Znamená to, že $\rho(X, A) = \rho(X, B)$.

V případě euklidovské metriky víme, že osou úsečky je přímka, která prochází středem této úsečky a je na ni kolmá (obr. 4.15a). Máme-li sestrojit osu úsečky v taxikářské geometrii, vyjdeme ze stejné definice. Požadujeme zde, aby $\rho_t(X, A) = \rho_t(X, B)$. Začneme tím, že sestrojíme dvojice shodných taxikářských kružnic různých poloměrů se středy v bodech A a B a najdeme jejich průsečíky. Pokud jsou tyto body zarovnány h/v, výsledkem je stejná osa, kterou známe z euklidovské geometrie (obr. 4.15b).



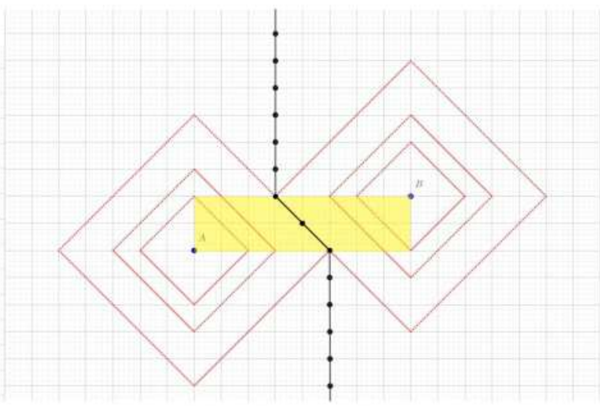
(a) V euklidovské geometrii.



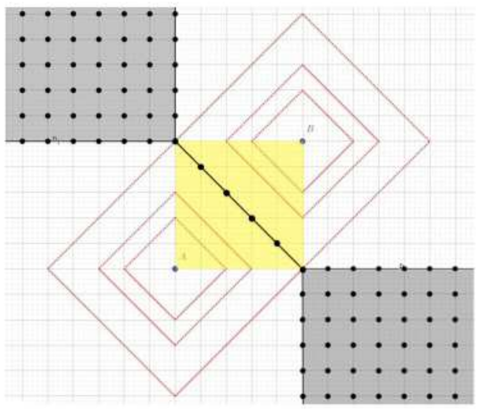
(b) V taxikářské geometrii pro body h/v zarovnané.

Obrázek 4.15: Osy úsečky.

Pro jiné vzájemné polohy bodů A a B má však tato množina překvapivější podoby (obr. 4.16). Nejmenší shodné kružnice, které se protínají, mají poloměr $r = \frac{\rho(A,B)}{2}$. Jak již víme ze sekce4.2.2, průsečíkem těchto kružnic je úsečka uvnitř AB-boxu s krajními body na jeho obvodu. Ze sekce 4.2.1 o obecných vlastnostech AB-boxu rovněž víme, že pokud sestrojíme v těchto krajních bodech polopřímky kolmé na příslušnou stranu AB-boxu, budou i tyto polopřímky součásti této množiny bodů X, které jsou od A a B stejně vzdálené. Pokud bude AB-box čtvercem, padnou krajní body této úsečky do zbylých diagonálních vrcholů tohoto AB-boxu a kromě daných kolmých polopřímek budou do dané množiny patřit i všechny body mezi nimi.



(a) Pro obdélníkový AB-box ($s \neq t$).

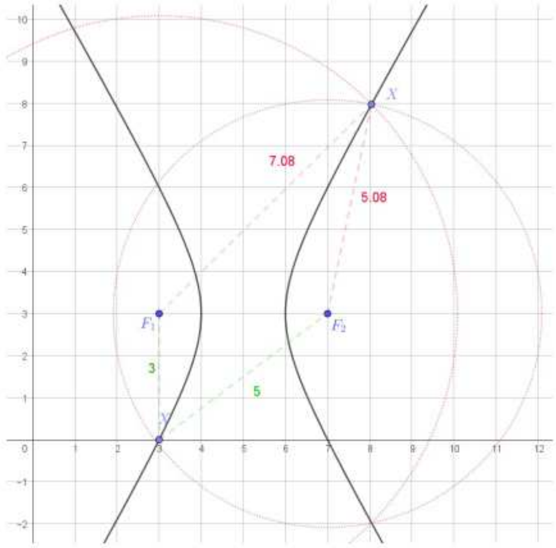


(b) Pro čtvercový AB-bod ($s = t$).

Obrázek 4.16: Osa úsečky pro body, které nejsou h/v zarovnané.

4.2.4 Hyperbola

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, pro které platí, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou pevně daných bodů nazývaných ohniska, je konstantní. Pokud tak máme dána ohniska F_1 a F_2, která jsou od sebe vzdálená D, a kladné reálné číslo $k < D$, pak množina všech bodů X takových, že $|\rho(X, F_1) - \rho(X, F_2)| = k$, je hyperbola. Použitím euklidovské metriky ρ_e tak získáváme typický tvar hyperboly, který můžeme vidět na obrázku (4.17).



Obrázek 4.17: Hyperbola v euklidovské geometrii ($k = 2$)

Pro konstrukci hyperboly v taxikářské geometrii proto hledáme průsečíky kružnic s různými poloměry r a $r + k$ a středy v zadaných ohniskách. Pokud bychom začali na $r = 0$ a postupně tento poloměr zvětšovali, první průsečíky ležící na F_1F_2-boxu dostaneme na základě závěrů v sekci (4.2.2) pro takovou hodnotu r, že $r + (r + k) = 2 \cdot r + k = D$. Musí proto platit:

$$r = \frac{D - k}{2}.$$

Jedna z kružnic tak bude mít poloměr

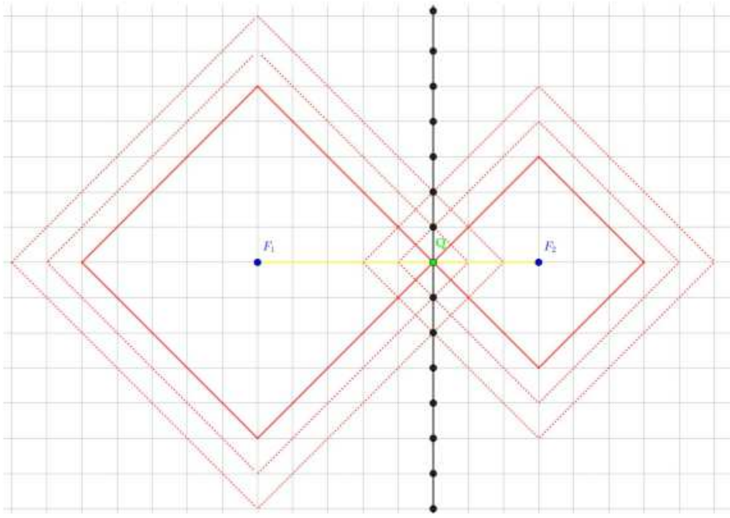
$$r_1 = r + k = \frac{D - k}{2} + k = \frac{D + k}{2};$$

druhá pak poloměr

$$r_2 = r = \frac{D - k}{2}.$$

Popišme nyní konstrukci jedné z obou větví hyperboly na základě vzájemné polohy obou ohnisek F_1 a F_2. Pokud zachováme poloměry r_1 a r_2 a pouze přehodíme středy těchto kružnic (ohniska), stejným způsobem získáme druhou větev hledané hyperboly. Existují tyto dvě možnosti:

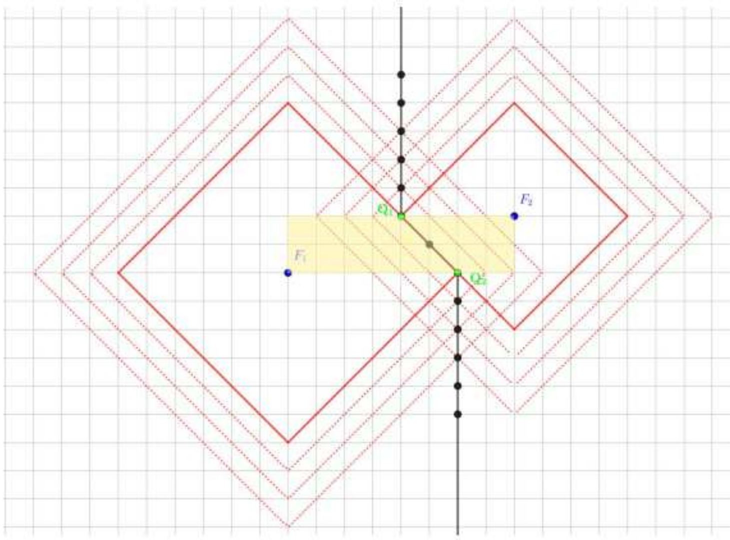
1. Pokud jsou ohniska F_1 a F_2 zarovnaná h/v, pak má F_1F_2-box podobu úsečky F_1F_2 a ze závěru v sekci 4.2.2 se obě tyto kružnice s poloměry r_1 a r_2 budou protínat právě v jednom bodě Q, který leží na této úsečce. Na obrázku 4.18 je znázorněna tato situace, včetně dalších možných dvojic kružnic a jejich průsečíků. Je však dostačující využít závěru ze sekce (4.2.1) o obecných vlastnostech AB-boxu a sestrojit kolmici na úsečku F_1F_2 v prvním průsečíku Q. Tato přímka je pak hledaná větev hyperboly.



Obrázek 4.18: Konstrukce jedné z větví taxikářeké hyperboly pro ohniska F_1 a F_2, které jsou h/v zarovnaná ($k = 2$).

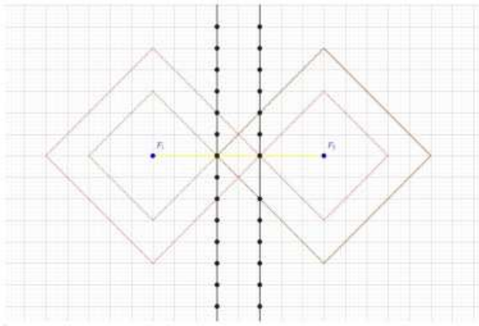
2. Pokud ohniska F_1 a F_2 nejsou h/v-zarovnaná, pak se podle závěru v sekci 4.2.2 kružnice protínají v celé úsečce Q_1Q_2 uvnitř F_1F_2-boxu, s krajními body na jeho obvodu.

   Na obrázku 4.19 je znázorněna tato situace, včetně dalších možných dvojic kružnic a jejich průsečíků. Ze závěrů v sekci 4.2.1 o obecných vlastnostech AB-boxu je zřejmé, že pokud sestrojíme v bodech Q_1 a Q_2 kolmé polopřímky na příslušnou stranu AB-boxu, tyto polopřímky budou součástí hledané větve hyperboly (viz obr. 4.20b, c). Pokud navíc jeden z těchto bodů padne do vrcholu F_1F_2-boxu, lze sestrojit dvě kolmé polopřímky, které obě patří do hledané množiny, a to včetně všech bodů mezi nimi (viz obr. 4.20d).

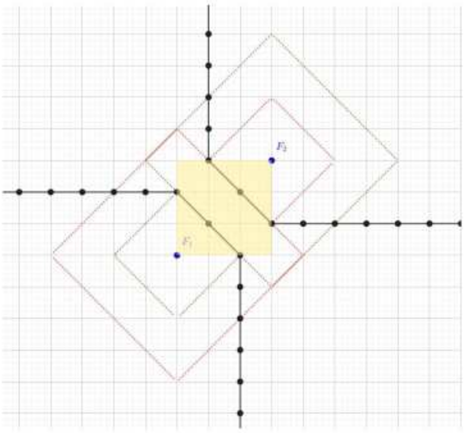


Obrázek 4.19: Konstrukce hyperboly pro ohniska F_1 a F_2, které nejsou h/v zarovnané ($k = 2$).

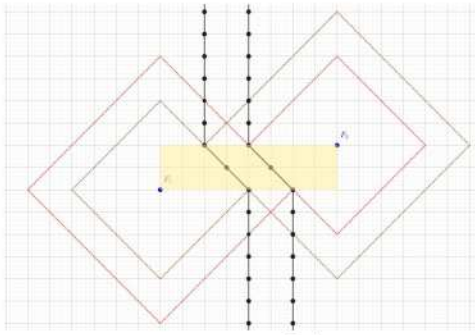
Na obrázku 4.20 je pak rekapitulace možných podob hyperboly v taxikářské geometrii. Konečná podoba hyperboly závísí na velikosti s menší strany F_1F_2-boxu vzhledem k poloměru r_2. Vše navíc může být otočeno o 90°, záleží na vzájemné poloze obou ohnisek.



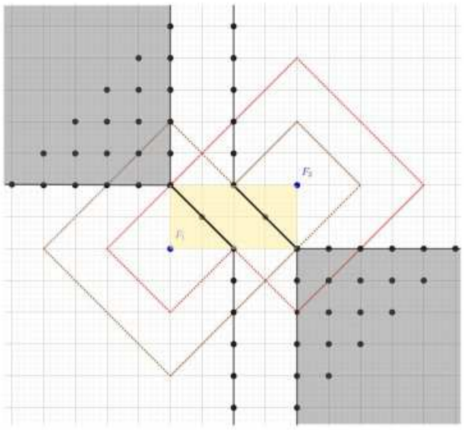
(a) $s = 0$.



(b) $s > \frac{D-k}{2}$.



(c) $s < \frac{D-k}{2}$.



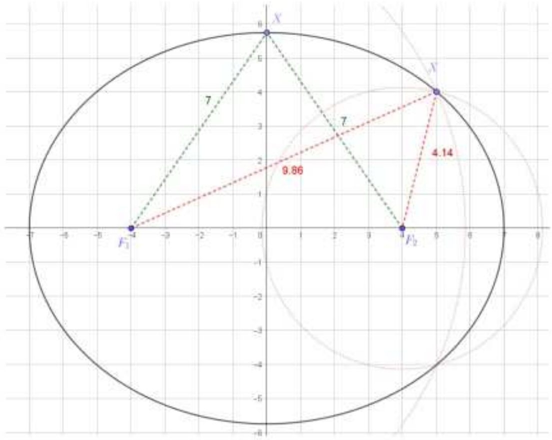
(d) $s = \frac{D-k}{2}$.

Obrázek 4.20: Různé typy hyperbol v závislosti na vzájemné poloze ohnisek a délce kratší strany F_1F_2-boxu ($k = 2$).

4.2.5 Elipsa

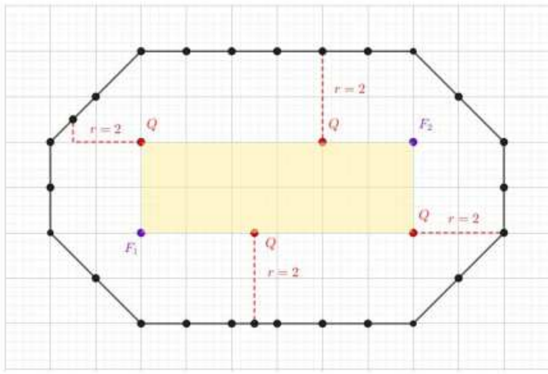
Elipsa je množina všech bodů v rovině, pro které platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevně daných bodů, které nazýváme ohniska elipsy, je konstantní (obr. 4.21). Nechť jsou dána ohniska F_1 a F_2, která jsou od sebe vzdálená D a kladné reálné číslo $k > D$, potom množina všech bodů X takových, že platí $\rho(X, F_1) + \rho(X, F_2) = k$, tvoří elipsu.

Pro jeji konstrukci v taxikářské geometrii využijeme vlastnosti F_1F_2-boxu v sekci 4.2.1. Použijeme zde vztahy (4.1) a (4.2) a výše uvedenou definici elipsy pro zjištění r, které nám bude udávat potřebnou kolmou vzdálenost hledaných bodů X od stran F_1F_2-boxu. Uvažujte



Obrázek 4.21: Elipsa v euklidovské geometrii ($k = 14$).

tak libovolný bod Q na obvodu F_1F_2-boxu a nechť X je hledaným bodem elipsy s kolmou vzdáleností r od Q.



Obrázek 4.22: Konstrukce taxikářské elipsy užitím F_1F_2-boxu a jeho vlastností.

Definice elipsy nám říká:

$$\rho_t(F_1, X) + \rho_t(F_2, Q) = k. \tag{4.3}$$

Ze vztahu (4.2) na str. 43 platí:

$$\rho_t(F_1, X) = \rho_t(F_1, Q) + r, \tag{4.4}$$

$$\rho_t(F_2, X) = \rho_t(F_2, Q) + r. \tag{4.5}$$

Dosazením (4.4) a (4.5) do (4.3) pak dostáváme:

$$\rho_t(F_1, Q) + r + \rho_t(F_2, Q) + r = k. \tag{4.6}$$

Použitím vztahu (4.1) proto platí:

$$D + 2 \cdot r = k. \tag{4.7}$$

Proto pak

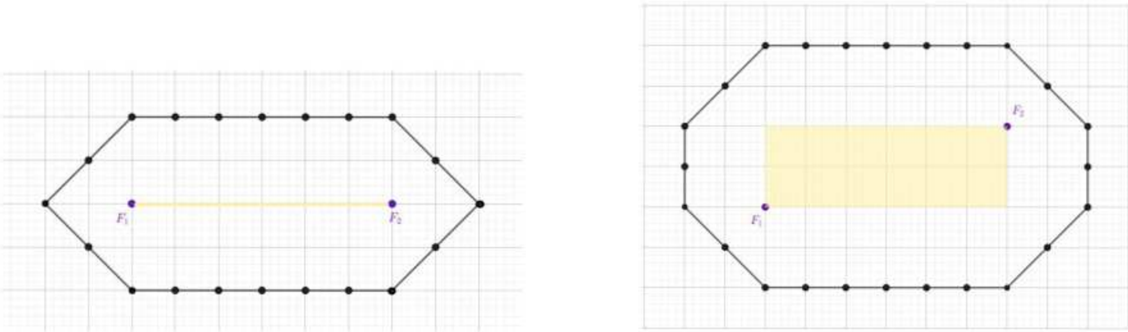
$$r = \frac{k - D}{2}. \tag{4.8}$$

Připomeňme zde ještě závěr ze sekce 4.2.1, že pokud je bod Q vrcholem obdélníkového F_1F_2-boxu, pak všechny body X na taxikářské čtvrtkružnici o poloměru $r = \frac{k-D}{2}$ a středem v Q splňují požadavek na stejnou vzdálenost od bodu Q (obr. 4.22).

Na základě vzájemné polohy ohnisek F_1 a F_2 mohou nastat dvě možné situace (a otočení o 90°), které ovlivní výslednou podobu elipsy:

a) Pokud jsou ohniska F_1 a F_2 zarovnána h/v, má F_1F_2-box podobu úsečky a výsledná elipsa se skládá pouze ze šesti úseček (obr. 4.23 a).

b) Pokud nejsou ohniska F_1 a F_2 zarovnána h/v, má F_1F_2-box tradiční podobu obdélníku a výsledná elipsa se skládá z osmi úseček (obr. 4.23 b).



(a) Ohniska F_1 a F_2 jsou h/v zarovnaná ($k = 10$). **(b)** Ohniska F_1 a F_2 nejsou h/v zarovnaná ($k = 12$).

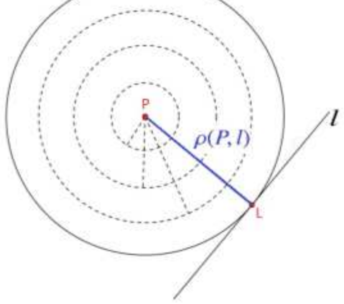
Obrázek 4.23: Konstrukce taxikářské elipsy užitím F_1F_2-boxu a jeho vlastností.

4.2.6 Parabola

Vzdálenost bodu od přímky

Máme-li dán bod P a přímku l, pak vzdálenost bodu P od přímky l definujeme jako nejmenší hodnotu všech vzdáleností mezi bodem P a libovolným bodem na přímce l:

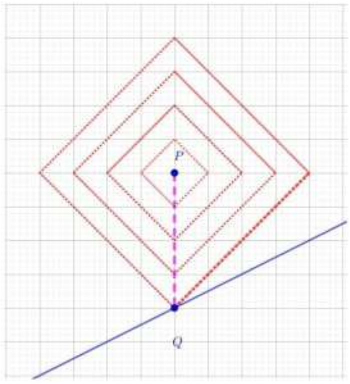
$$\rho(P, l) = min\{\rho(P, L) : L \in l\}.$$



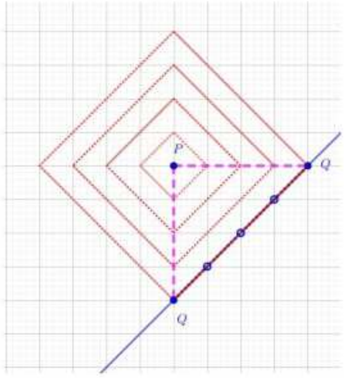
Obrázek 4.24: Metoda postupného zvětšování poloměru kružnice pro určení vzdálenosti bodu od přímky v euklidovské geometrii.

Pro vizuálně intuitivní přístup k tomuto problému si představme euklidovskou kružnici se středem v bodě P a zvětšujme postupně spojitě její poloměr, dokud se nedotkne přímky l. Tento bod Q, ve kterém se tato zvětšující se kružnice poprvé dotkne dané přímky, je pak nejblíž k bodu P a jeho poloha nám vymezí hledanou nejkratší vzdálenost (obr. 4.24).

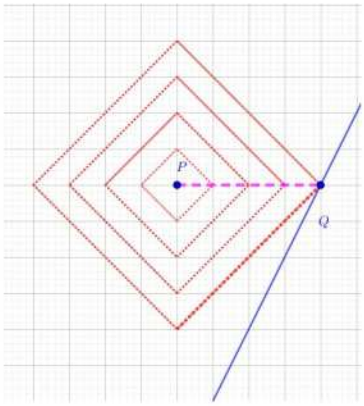
Tuto myšlenku můžeme využít i k určení vzdálenosti bodu od přímky v taxikářské geometrii, musíme vzít jen v úvahu, že kružnice zde mají poněkud odlišný tvar.



(a) $|m| < 1.$



(b) $|m| = 1.$



(c) $|m| > 1.$

Obrázek 4.25: Určení nejkratší vzdálenosti bodu od přímky v závislosti na její směrnici.

Jak vidíme na obrázku (4.25), nejkratší cesta z bodu P k přímce l závisí na směrnici m této přímky. Mohou proto nastat tyto tři základní situace:

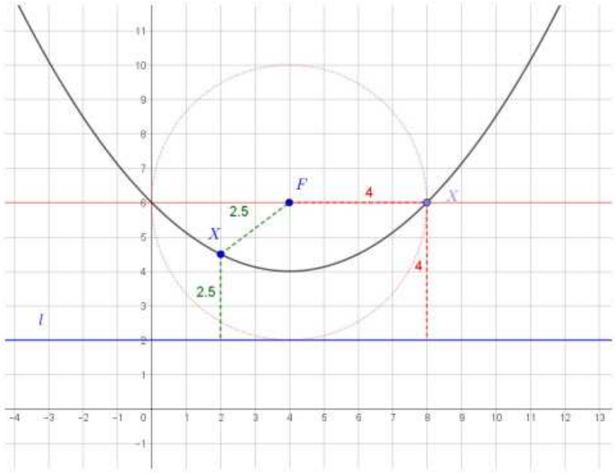
a) $|m| < 1$: V tomto případě stačí směřovat od bodu P k přímce l po vertikální linii. Právě tato cesta nám určí nejkratší vzdálenost (obr. 4.25a).

b) $|m| = 1$: Zde můžeme směřovat vertikálně i horizontálně (případně k jakémukoliv bodu mezi nimi). Všechny tyto vzdálenosti budou stejné a navíc ty nejkratší (obr. 4.25b).

c) $|m| > 1$: V tomto případě stačí směřovat od bodu P k přímce l po horizontální linii. Právě tato cesta nám zde určí nejkratší vzdálenost (obr. 4.25c).

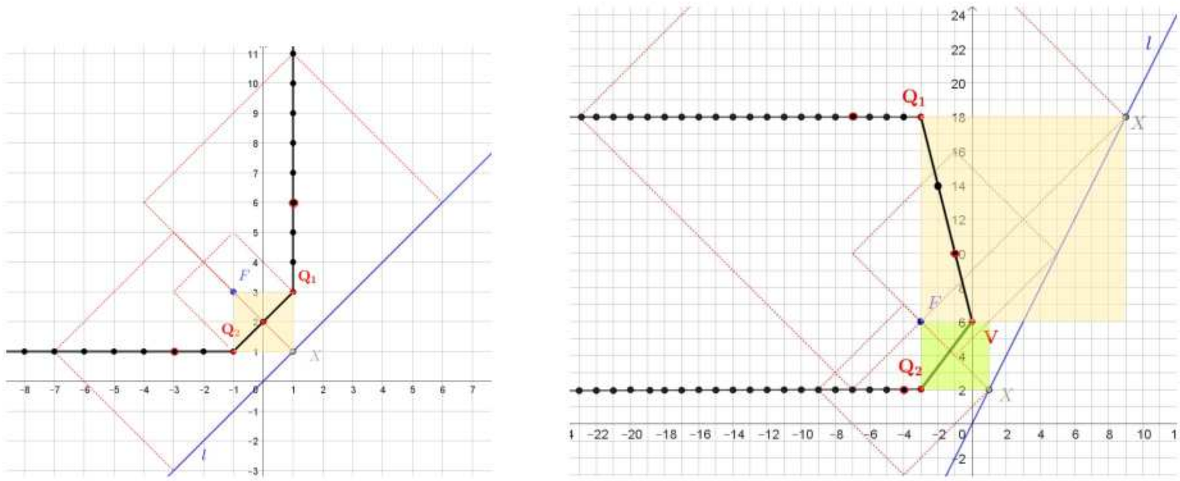
Konstrukce paraboly

Nechť je daná přímka l (řídicí přímka) a bod F (ohnisko), který na této přímce neleží. Parabolou je pak množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od bodu F jako od přímky l. Použitím euklidovské metriky ρ_e tak získáváme typický tvar paraboly, který můžeme vidět na obrázku (4.26).



Obrázek 4.26: Parabola v euklidovské geometrii.

I pro konstrukci taxikářské paraboly můžeme vhodně využít AB-boxy a jejich obecné vlastnosti ze sekce 4.2.1, konkrétně pomocných čtvercových FX-boxů. Je zřejmé, že do této množiny budou určitě patřit všechny body, které leží uprostřed nejkratších cest z ohniska F k přímce l. Na obrázku 4.27 a) je tvar taxikářské paraboly s řídící přímkou se směrnicí $m = 1$. Zde neexistuje pouze jedna nejkratší cesta od bodu F k přímce l; parabola proto obsahuje celou jednu stranu taxikářské kružnice se středem v bodě F a poloměrem $\frac{\rho_t(F,l)}{2}$. Tato strana je současně úhlopříčka pomocného čtvercového FX-boxu s bodem X na přímce l, který lze sestrojit stejnolehlostí vhodného jednotkového čtverce (obr. 4.27a). Od krajních bodů Q_1 a Q_2 této úsečky (zbylých dvou vrcholů FX-boxu) pak parabola pokračuje vodorovnou a svislou polopřímkou, což vyplývá z obecných vlastností AB-boxů v sekci 4.2.1. V tomto případě má parabola dva „rohové“ body. Pokud má řídící přímka směrnici $m = -1$, je situace analogická.

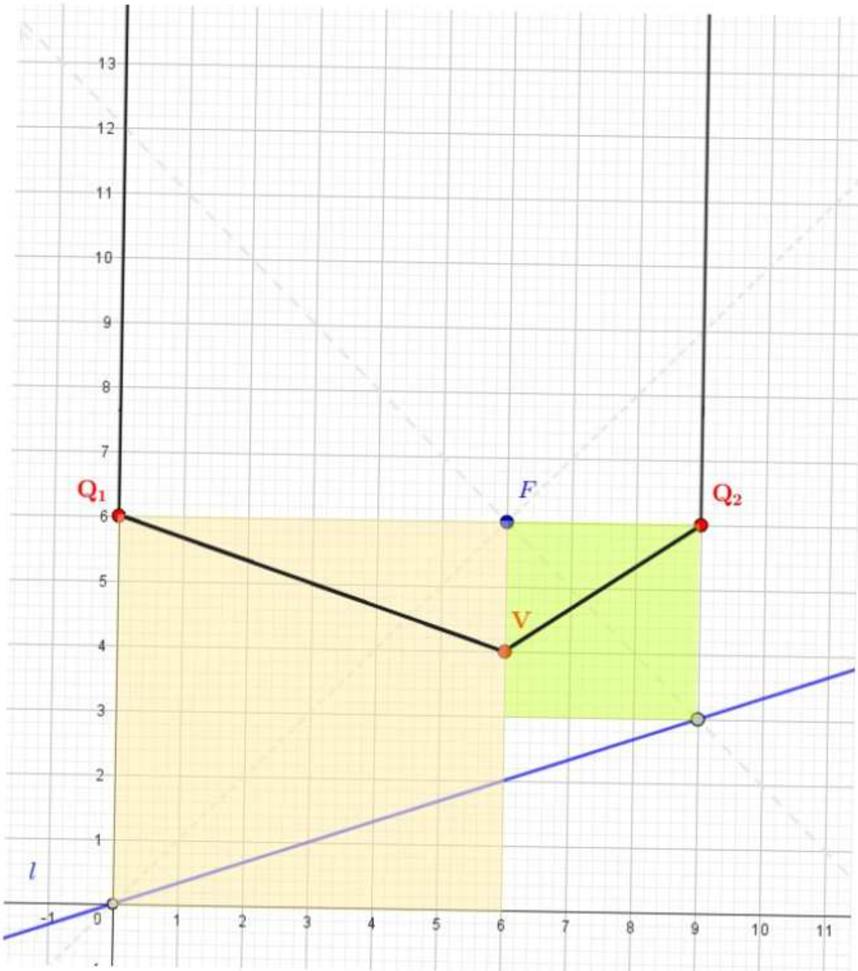


(a) $|m| = 1$. **(b)** $|m| \neq 1$.

Obrázek 4.27: Dvě základní podoby paraboly a role žlutě vyznačených pomocných FX-boxů k jejímu sestrojení.

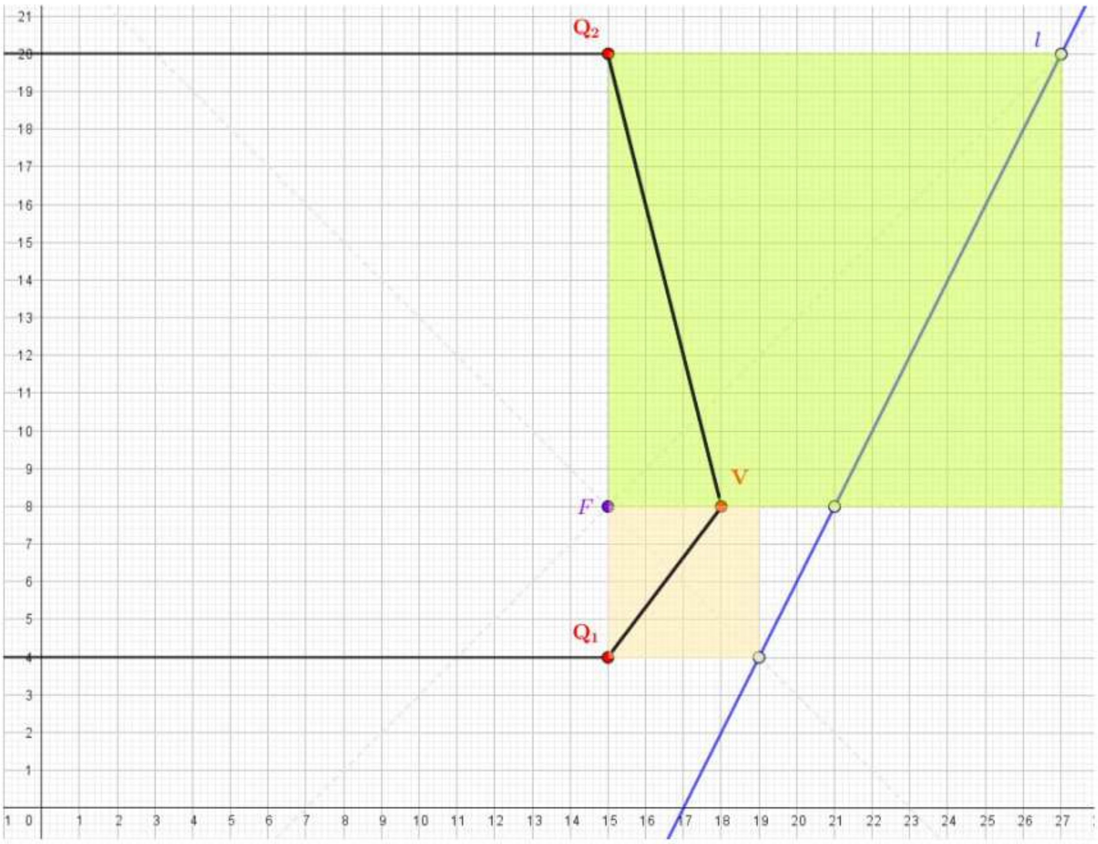
Podíváme-li se na obrázek 4.27 b), můžeme zde pozorovat, že parabola s řídící přímkou se směrnicí $|m| \neq 1$ bude mít tři „rohové“ body: vrchol V uprostřed nejkratší cesty od bodu F k přímce l a dva body Q_1 a Q_2.

- Pokud je $|m| < 1$, pak jsou její „rohové" body Q_1 a Q_2 ve vodorovné vzdálenosti od bodu F a lze je určit jako vrcholy dvou pomocných čtvercových FX–boxů s bodem X na přímce l, které lze setrojit stejnolehlostí vhodného jednotkového čtverce se středem stejnolehlosti F, jako je to naznačeno na obrázku 4.28. Z obecných vlastností AB–boxů v sekci 4.2.1 pak tato parabola obsahuje i svislé polopřímky s počátkem v nalezených bodech Q_1 a Q_2.



Obrázek 4.28: Konstrukce taxikářské paraboly s ohniskem $F[6,6]$ a řídící přímkou $l : y = \frac{1}{3} \cdot x$ s použitím pomocných FX-boxů a jejich vlastností.

- Pokud je $|m| > 1$, pak jsou její „rohové" body Q_1 a Q_2 ve svislé vzdálenosti od bodu F a lze je určit jako vrcholy pomocných čtvercových FX–boxů, které vzniknou stejnolehlostí vhodného jednotkového čtverce se středem stejnolehlosti F, jako je to vyznačeno na obrázku 4.29. Z obecných vlastností AB–boxů v sekci 4.2.1 obsahuje tato parabola i vodorovné polopřímky s počátkem v daných bodech Q_1 a Q_2.



Obrázek 4.29: Konstrukce taxikářské paraboly s ohniskem $F[15,8]$
a řídící přímkou $l\ :\ y\ =\ 2x\ -\ 34$ s použitím pomocných FX-boxů a jejich vlastností.

Část II

Didaktická východiska a experiment

Kapitola 5

Teoretická východiska

5.1 Konstruktivismus

Konstruktivismus je teoretický přístup, který se uplatňuje v oblasti filozofie, psychologie a pedagogiky. Z epistemologického pohledu zdůrazňuje aktivní konstrukci poznání jedincem na základě jeho zkušeností s příslušnými pojmy. Jak uvádí Piaget (1985), poznání není pouze pasivní přijímání, ale spíše aktivním konstruováním v mysli jedince. Odkazuje proto na mentální struktury, tzv. *schémata*, což jsou ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohonásobně opakované zkušenosti a umožňují mu interpretovat různé významy, vyvolávat v mysli jejich představy nebo efektivně zkoumat nové problémy. Jsou také nositelem mnoha konkrétních poznatků, které člověk dovede ze schématu odvodit, např. ze schématu svého bytu dovedeme většinou každý z nás odvodit počet oken, které v bytě máme, aniž bychom je aktuálně museli fyzicky přepočítávat, nebo ze schématu krychle jsme schopni odvodit počet jejích tělesových úhlopříček (Hejný a kol., 2014). Jedinec navíc může využívat toto staré poznání k vytváření toho nového. Celkově lze konstatovat, že konstruktivismus představuje významný teoretický základ pro moderní vzdělávací systémy, kde je kladen velký důraz na aktivní účast žáka a jeho interakci s okolím. Tento pedagogický koncept zaujímá významné místo i v českém školství, což je patrné z různých definic v psychologickém a pedagogickém kontextu.

V psychologickém slovníku je konstruktivismus definován jako „směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností" (Hartl & Hartlová, 2015, str. 271).

V pedagogickém slovníku je definice konstruktivismu o něco komplexnější a je zde popsána jako „široký proud teorií ve vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností. V tomto smyslu je také interakční teorií překonávající jednostrannost empirismu a nativismu. V oblasti didaktiky patří mezi dominantní soudobá paradigmata, dělící se do několika proudů" (Průcha a kol., 2013, str. 132).

Existuje několik dalších různých definic konstruktivismu, které mohou vykazovat odlišnosti, především kvůli různorodosti přístupů k tomuto směru. Navíc v rámci konstruktivismu samotného existuje mnoho odlišných proudů, které se liší zejména v jejich zaměření na roli jedince a sociálních aspektů. Nicméně všechny tyto proudy sdílejí odpor k pasivitě jednotlivce během procesu učení a zdůrazňují jeho interakci s okolím.

Tato studie byla provedena v rámci aktivit, které byly navrženy z konstruktivistické perspektivy a příslušná data byla analyzována s využitím různých konstruktivistických rámců.

5.2 Piaget a abstrakce

5.2.1 Abstrakce

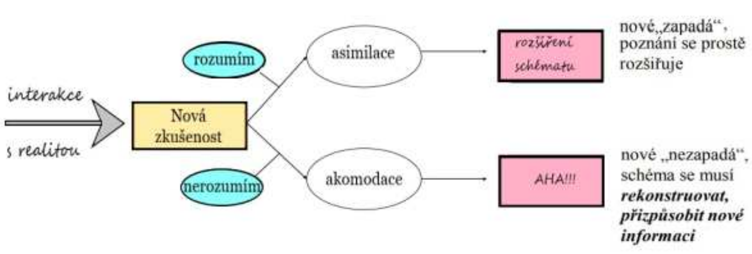
Matematika a abstrakce byly vždy vzájemně spojovány. Jedno z častých hesel, které mnohdy slouží pro ospravedlnění obtíží v matematice zní: „Matematika je abstraktní".

Tento termín představuje důležitý pojem v terminologii psychologů a pedagogů a objevuje se v odborných kruzích při diskuzích o různých aspektech lidské kognice, kde se tato schopnost abstrakce přisuzuje vyšší inteligenci. Setkáváme se s ním již u Aristotela, který zdůrazňoval důležitost tohoto procesu při tvorbě znalostí. Pro něj totiž jediné smysluplné poznání vychází z abstrakce ze smyslového světa, a to prostřednictvím několika kroků. Výchozím bodem pro něj je samotná skutečnost. Abstrakce jsou pak prováděny na základě zohlednění společných vlastností objektů. Při vzestupu z jednoho stupně na další jsou pak objekty seskupeny do jejich ekvivalentních tříd a obecný pojem , který shrnuje všechny společné charakteristiky, ve kterých si všechny tyto objekty odpovídají, je pak vrcholem pyramidy a tvoří jejich abstraktní reprezentaci (Bäck, 2014). Pojem abstrakce tak znamená odpoutání se od něčeho konkrétního a zaměření se na obecné a důležité vztahy mezi věcmi nebo pojmy. V matematice abstrahujeme konkrétní množství nebo tvary, abychom dosáhli obecných pojmů jako „číslo" nebo „trojúhelník". Tyto pojmy jsou nezávislé na konkrétních příkladech, které jsme mohli vidět nebo si představit. Aktivní intelekt je klíčovým nástrojem, který umožňuje oddělit esence od konkrétních projevů, což je základní proces při hledání univerzálních pravd a zákonitostí (Piaget, 1980).

5.2.2 Akomodace a asimilace

V současné době je výzkum ve vědě o vzdělávání stále více zaměřen na pojem abstrakce skrze výzkumný program Piageta a jeho teorii kognitivního vývoje. Tato teorie zdůrazňuje kombinaci a prolínání dvou klíčových procesů, asimilace a akomodace (Kohoutek, 2011).

Asimilace je proces, při kterém jedinec přijímá, osvojuje si nebo „pohlcuje" nové zkušenosti. Asimilace tak zahrnuje integraci nových objektů a událostí do existujících schémat, kdy kognitivní organismus začleňuje nové zkušenosti do již existující struktury, čímž může nový materiál považovat za příklad něčeho známého (von Glasersfeld, 1995). Piaget je označuje jako asimilační schémata nebo kognitivní schémata (Piaget, 1980). Ta ovlivňují naši citlivost k podnětům z prostředí a proces učení se řídí tím, jak koherentně jsou tato schémata vytvořena. Nové poznatky však nemusí ihned korespondovat s existujícím poznáním, což vede k potřebě akomodace – přizpůsobení se novým informacím s cílem obnovit rovnováhu, podobně jako se čočka oka přizpůsobuje změnám světelných podmínek (viz obr. 5.1).



Obrázek 5.1: Schéma reakce jedince na novou zkušenost.
(zdroj: Malčík&Miklošíková, 2017, upraveno)

Schopnost asimilovat nové poznatky a následně se na ně akomodovat závisí na různých faktorech, včetně biologického vývoje, který se mění v souladu se zákonitým vývojem a maturací nervové soustavy, ale také na množství a kvalitě podnětů, s nimiž jedinec přichází do kontaktu (Kohoutek, 2011). Piaget tak pohlíží na jedince jako na malého badatele, který zkoumá svět kolem sebe, vytváří si pracovní teorie (schémata) o tom, jak svět funguje. Při každé nové události, při setkání s novým objektem pak zkouší nejdříve použít tuto dosavadní pracovní teorii, teprve když tato jeho teorie nefunguje, obmění ji (proces asimilace), nebo vypracuje novou (proces akomodace). Výsledná úroveň poznání je produktem předchozího vývoje, který zahrnuje reorganizaci a transformaci úrovní poznání v důsledku nových zkušeností (obr. 5.2). Skrze budování, rozšiřování a propojování mentálních struktur jedinec nejenom jedná (jak mentálně, tak behaviorálně) podle jistých logických principů, ale také se stále více zlepšuje v přesném předvídání budoucích událostí (Piaget, 1971). Každá zkušenost je individuální a jedinečná, což činí asimilační (kognitivní) schémata vytvořená z těchto zkušeností subjektivní záležitostí.

Obrázek 5.2: Piaget pohlíží na jedince jako na neustálého „badatele“.
Zdroj: `https://sproutsschools.com/piaget-cognitive-development-theory/` (upraveno)

5.2.3 Typy poznání

Piagetovo použití termínu abstrakce je paralelně s jeho obecnou definicí stručně popsáno v jeho knize „Genetic Epistemology“ (Piaget, 1970). Jeho diskuse o tomto termínu však začíná nejprve rozlišením tří základních typů poznání:

- Fyzické poznání: Toto poznání získává jedinec manipulací s konkrétními objekty prostřednictvím jeho interakce s okolím. Výsledkem pak je, že tyto objekty začíná postupně rozlišovat podle jednotlivých charakteristik (textura, barva, váha, tvrdost, zvuk, který vydávají ...).

- Sociální poznání: Toto poznání si jedinec buduje ze vzájemných společenských vztahů a může být dále rozděleno na konvenční a nekonvenční. Sociální poznání konvenční je výsledkem dohody sociální skupiny a jeho zdrojem jsou ti druzí (přátelé, rodiče, učitelé...). Příkladem tohoto poznání pak je, že v neděli není škola, že při zkoušce není vhodné dělat hluk, atd. Toto pojetí sociálního poznání zahrnuje přijetí jistých společenských norem a struktur, což mělo hluboké důsledky i pro matematiku. Historicky vzato, přijetí euklidovské geometrie jako jediného správného modelu prostoru bylo hluboce zakořeněno ve vědecké a vzdělávací komunitě, což vedlo k odporu vůči neeuklidovským geometriím a k výraznému zpoždění v jejich přijetí. Sociální poznání nekonvenční se týká pojmů nebo sociálních reprezentací, které jsou již budovány a osvojovány samotným subjektem. Zahrnuje tak pojetí bohatství a chudoby, pojetí zisku, pojetí práce, reprezentace autority, atd.

- Logicko-matematické poznání: Toto poznání získává jedinec tím, že již vzájemně propojuje zkušenosti, které nabyl manipulací s objekty. Začne proto rozlišovat například již mezi objektem s drsnou texturou a objektem s hladkou texturou a stanovuje, proč jsou pro něj odlišné. Toto poznání již není pozorovatelné a je to již pouze jedinec samotný, kdo si ho vytváří ve své mysli právě prostřednictví vzájemných vztahů s těmito objekty. Nepřichází již z vnějšku, nemůže být viděno, slyšeno, cítěno nebo sděleno. Rozvíjí se postupně od nejjednodušších forem k těm složitějším a po získání se již nezapomíná, protože tato zkušenost již nepochází z objektů samotných, ale z jednání s těmito objekty. Toto poznání má proto již vlastní charakteristiky, které ho odlišují od jiných typů poznání.

Je tedy patrné, že podle Piageta tak existují vnější a vnitřní zdroje poznání. Zdroje fyzického a sociálního poznání jsou z velké části vnější, zatímco zdroje logicko-matematického poznání jsou pak z velké části vnitřní.

5.2.4 Empirická abstrakce a reflexivní abstrakce

Aktuální úroveň poznání je podle Piageta výsledkem abstrakce a vzniká tak postupnou reorganizací a transformací úrovně předchozí. Jedinec nejdříve vyčleňuje a zobecňuje v rámci prováděných operací nebo akcí jejich podstatné charakteristiky. „Abstrakce tvaru zahrnuje mnohem více než jen abstrakci charakteristických vlastností studovaného objektu (Piaget a Inhelderová, 1950, str. 25)“. Jedinec pak navíc myšlenkově rekonstruuje svou dosavadní úroveň a zamýšlí se nad přechodem k úrovni vyšší.

Při utváření logicko-matematického myšlení proto Piaget (1970) trval na potřebě rozlišit podle převládajících vnějších či vnitřních zdrojů dva typy abstrakcí: empirickou a reflexivní. Je to dvojice klíčových názvů, které popisují způsoby, jakými lidé formují jednotlivé pojmy a abstraktní myšlenky a představy.

1. Empirická abstrakce: Empirická abstrakce je proces, při kterém daný jedinec tvoří pojmy a abstraktní myšlenky na základě pozorování konkrétního smyslového materiálu a pozorovatelných charakteristik objektů a dějů (Beth & Piaget, 1966). Vychází ze smyslových zkušeností a zachycuje informace z vnímaného světa. V empirické abstrakci jsou abstrahované vlastnosti stále obsaženy v realitě: barva, tvar, váha, nebo sofistikovanější vlastnosti jako hmotnost nebo teplota.

2. Reflexivní abstrakce: Reflexivní abstrakce je rozšířením abstrakčního procesu, kdy již jedinec nepozoruje pouze vnější svět a jeho charakteristiky, ale také se zaměřuje na své vlastní myšlenkové operace a procesy. Tímto způsobem tak provádí reflexi nad vlastními mentálními operacemi a myšlenkovými pochody, které tvoří základ pro formování abstraktních pojmů. V reflexivní abstrakci je tak abstrakce odvozena z činnosti mysli samotné, nikoli pouze z pozorovaných objektů. Vychází z toho, co Piaget (1980, s. 89–97) nazývá obecnou koordinací akcí. Vytváří tak „nové syntézy, v nichž jednotlivé zákony získávají nový význam“ (Piaget & Garcia, 1989, str. 299). Projekce zde znamená přenesení systému akcí nebo operací na vyšší úroveň; reflexe je reorganizace celého stávajícího systému.

Oba tyto typy abstrakce jsou důležité pro formování a porozumění abstraktním představám a pojmům a nacházejí se na každé úrovni vývoje jedince. Reflexivní abstrakce však časem získává mnohem důležitější roli a empirická abstrakce na ní začíná být postupně více a více závislá. Empirická abstrakce je možná jen díky asimilačním schématům, která byla zkonstruována pomocí reflexivní abstrakce (Piaget, 1985, s. 18–19). Jean Piaget věřil, že reflexivní abstrakce je „klíčová pro rozvoj pokročilejších matematických pojmů"(Beth & Piaget, 1966, str. 205), že „ona sama podporuje a oživuje tu obrovskou stavbu logicko-matematické konstrukce" (Piaget, 1980, str. 92, vlastní překlad) a že právě ti žáci, kteří mají aktivní zkušenosti s vzájemným propojováním, kombinováním, vytvářením vzájemných vztahů a tvorbou pojmů, mají větší porozumění a schopnost paměťového uchopení těchto pojmů než ti, kterým jsou předkládány přímo učitelem (Piaget, 1973).

Další pozorování, které Piaget učinil, je, že reflexivní abstrakce nemá absolutní začátek, ale je přítomna již v nejmladším věku při koordinaci senzoricko-motorických struktur (Beth & Piaget, 1966), že pokračuje až do vyšší matematiky, a že celá historie vývoje matematiky od antiky po současnost může být považována za příklad procesu reflexivní abstrakce (Piaget, 1985).

5.3 APOS

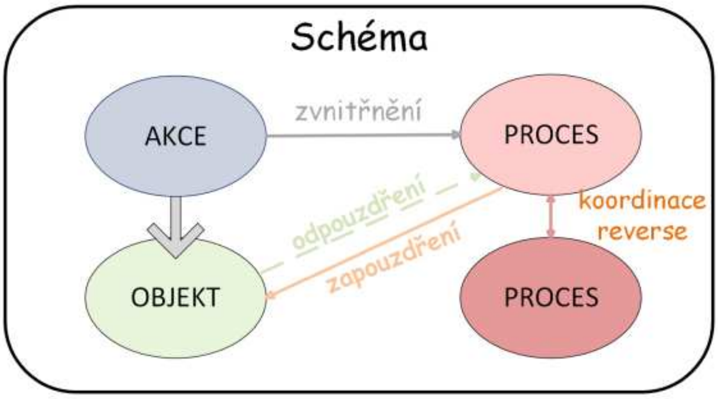
Teorie APOS je konstruktivistický rámec založený na genetické epistemologii J. Piageta. Zatímco Piagetův výzkum se soustředil na logické myšlení dětí, teorie APOS, představená Edem Dubinskym v roce 1984, rozšiřuje a upravuje jeho koncept reflexivní abstrakce pro konstrukci matematických znalostí. Zaměřuje se zejména na matematiku na středních a vysokých školách. Jejím cílem je co nejlépe analyzovat, jak studenti chápou a vnímají matematické pojmy, sledovat vývoj těchto pojmů a využít tyto poznatky k vytváření vhodných výukových materiálů, které umožní zhodnotit výsledky tohoto teoretického rámce (Arnon a kol., 2014).

Zkratka APOS znamená „Akce-Proces-Objekt-Schéma" a představuje nelineární (dialektickou) cestu, po níž jednotlivec postupuje při osvojování si matematických pojmů (Dubinsky & McDonald, 2001). Teorie se snaží objasnit, jakým způsobem se lze matematické pojmy efektivně naučit (Arnon a kol., 2014). Podle ní matematické pojmy nevznikají přímo, ale vyžadují konstrukci potřebných mentálních základů. Předpokládá, že každý jedinec se může naučit jakýkoli matematický pojem, pokud byly předem vybudovány potřebné struktury (Dubinsky, 2002). Výuka by proto měla být zaměřena na podněcování žáků a studentů k vytváření těchto konstrukcí a na pomoc při tomto procesu. Reflexivní abstrakce umožňuje postupné zdokonalování porozumění danému pojmu, pokud s ním jedinec pravidelně pracuje a řeší úkoly, které s ním souvisejí. Porozumění se pak vyvíjí z nižší úrovně na vyšší úroveň kognitivního vývoje. Tento proces často vyžaduje přepracování již existujícího znalostního základu a pokračuje neustále dle potřeby, čímž vytváří nové a pevnější vazby mezi již existujícími kognitivními strukturami (Dubinsky, 2002).

5.3.1 Mentální struktury a mechanismy

Mentální struktura je jakákoliv relativně stabilní struktura (stále však schopná vývoje), vytvořena v mysli jedince, kterou používá k jeho porozumění matematickým situacím. Mentální mechanismus je pak prostředek, pomocí kterého se tato struktura může vyvíjet v mysli jedince nebo celé skupiny jedinců. (Stenger a kol., 2008)

Hlavním zaměřením této kapitoly je popsat charakteristiky mentálních struktur (obr. 5.3), které tvoří podstatu APOS teorie - *akci, proces, objekt* a *schéma*, a mechanismy, kterými jsou *zvnitřnění, zapouzdření, koordinace, reverze, odpouzdření, tematizace* a *generalizace*, kterými jsou tyto mentální struktury konstruovány (Dubinsky, 2002).



Obrázek 5.3: Mechanismy a struktury APOS teorie (Arnon a kol., 2014)

Akce

Podle Piageta a v rámci teorie APOS je matematický pojem nejprve uchopen jako *akce*. To znamená, že jedinec provádí transformaci pouze na základě vnějších podnětů, přičemž potřebuje vodítka poskytující přesné detaily o jednotlivých krocích, nebo používá zapamatovaná pravidla k provádění operací a úkolů. Každý krok následuje po předchozím, což znamená, že si jednotlivé kroky akce není schopen v mysli představit a nemůže žádný z nich přeskočit. I když jsou nejjednodušší strukturou, tvoří základní kámen teorie APOS. Pochopení na této úrovni je nezbytné pro vývoj složitějších struktur (Arnon a kol., 2014). Bohužel jsou v tradiční výuce často upřednostňovány jako jediné.

Proces

Pokud provede jedinec dostatek akcí a reflektuje nad nimi, je schopen je postupně *zvnitřnit*. Tímto způsobem se posouvá od závislosti na vnějším vodítku k vnitřní kontrole. Dokáže si již představit vykonávání těchto akcí, aniž by je skutečně prováděl. Jednotlivé kroky již dovede ve svých myšlenkách přeskočit. O této zvnitřněné akci pak hovoříme jako o *procesu*. Jedinec pak může tento proces *zkoordinovat* s ostatními procesy uvnitř daného schématu, aby vytvořil propojení mezi jednotlivými dílčími pojmy. Kromě toho je schopen celý proces obrátit, hovoříme zde o *reverzi* procesu (Asiala a kol., 1997; Arnon a kol., 2014).

Objekt

Jakmile je již jedinec schopný myslet na proces jako na celek, na který lze aplikovat jiné akce nebo jiné procesy, a dovede takové transformace skutečně konstruovat (přímo nebo v představách), říkáme, že byl vytvořen *objekt*, a to *zapouzdřením* procesu (Asiala a kol., 1997). V některých situacích však potřebuje objekt, který již dříve vytvořil, znovu *odpouzdřit*, aby ke svým předchozím znalostem matematického pojmu přidal některé nové. Jinými slovy, aplikací mechanismu odpouzdření se může jednotlivec vrátit zpět k procesu, který dal vzniknout danému objektu. Může odpouzdřit i několik objektů současně. Poté zkoordinovat jednotlivé procesy a vytvořit z nich nový objekt (Asiala a kol., 1997; Arnon a kol., 2014).

Schéma

Celá výše uvedená kolekce akcí, procesů, objektů, které jsou spojeny s původním pojmem a vytváří jeho souvislé porozumění, se nazývá *schéma* (Asiala a kol., 1997). Podle Arnon a kol.

(2014) je schéma charakterizováno svou dynamikou a neustálou rekonstrukcí. Jeho míra soudržnosti se pak projevuje ve schopnosti jedince zjistit, zda může být použito k řešení konkrétní matematické situace. Pokud jednotlivec dokáže myslet na schéma jako na celistvou entitu, říkáme, že je toto schéma *ztematizované* do objektu. Takové schéma pak může být zahrnuto do schémat vyšších úrovní matematických struktur (Asiala a kol., 1997). Při jeho dalším vývoji tak mohou být v mysli jedince navázány nové vztahy mezi jeho složkami, prostřednictvím těchto nových vztahů mohou být do něj začleněny nové akce, procesy nebo objekty (Arnon a kol., 2014). Navíc se toto schéma může také vztahovat k jiným, což pak vede k vytvoření nového schématu, které zahrnuje složky obou (Clark a kol., 1997). *Generalizace* je pak klíčovým mechanismem, který umožňuje rozšíření schématu na stále větší počet objektů. Jak asimilace, tak akomodace jsou pak její součástí. Při asimilaci jsou nové situace řešeny novým způsobem s použitím existujících struktur. Akomodace zahrnuje přestavbu existující struktury za účelem zvládnutí této neznámé situace (Arnon a kol., 2014). Generalizace je tudíž schopnost jedince přenášet poznatky a dovednosti z jedné matematické situace na jinou.

5.3.2 Fáze vývoje schématu

Znalost struktury schématu a průběhu jeho vývoje nám může pomoci vysvětlit, proč mají studenti v podobných situacích obtíže s různými aspekty daného tématu (Arnon a kol., 2014). Piaget a García (1989) navrhli, že vytváření schématu probíhá podle určitých mechanismů, a to ve třech fázích, které se nazývají *triády*. Ty mají charakter funkční, nikoliv strukturální; popisují obecné psycho-dynamické aspekty jeho vývoje (Cooley, 2007). Piaget a García předpokládali, že tyto úrovně lze nalézt při analýze jakéhokoli rozvíjejícího se schématu. Ve výzkumech, například od Clark et al. (1997), Cottrill (1999), Baker a kol. (2000), pak bylo zjištěno, že začlenění této triády do jejich analýzy přispělo k lepšímu porozumění tomu, jakým způsobem se mohou jednotlivé části různých schémat vzájemně ovlivňovat. V teorii APOS, v souladu s myšlenkami Piageta a Garcíi (1989), se vývoj schématu skládá ze tří fází: *intra, inter a trans*. Přechod z jedné této fáze do druhé probíhá prostřednictvím rozvoje vzájemných vztahů a vlivem transformací, které daný jedinec provádí mezi konkrétními dílčími konstrukcemi uvnitř tohoto schématu. Každá z těchto fází je popsána níže podle Arnon a kol. (2014).

- Fáze *intra*: Je charakterizována izolovaným zaměřením se na jednotlivé složky schématu (akce, procesy a objekty), kdy jedinec sice může začít identifikovat společné nebo rozdílné vlastností, každopádně všechna tato vzájemná spojení jsou zatím jen na lokální a velmi konkrétní úrovni.

- Fáze *inter*: S rozvojem znalostí, kdy jedinec používá, porovnává a reflektuje izolované objekty z fáze *intra*, se v jeho mysli začíná rozvíjet potřeba jejich vzájemného logického propojení. Pokouší se proto o porozumění všem těm důvodům, které stojí za těmito spojeními. Tato fáze je proto charakterizována postupnou konstrukcí vztahů a transformací mezi kognitivními strukturami, které toto schéma tvoří. Jedinec zde již může začít seskupovat jednotlivé položky dohromady a nazývat je stejným jménem.

- Fáze *trans*: Jedinec zde již konstruuje relativně stabilní základní strukturu, skrze niž plně porozumí vztahům vyvinutým v předchozí fázi. Tato struktura poskytuje schématu větší soudržnost, což je patrné ve schopnosti jedince určit, co patří do rozsahu daného schématu a co ne (Dubinsky & McDonald, 2001). Tím je připraven vnímat nové globální vlastnosti a souvislosti, které mu byly na předchozích úrovních nedostupné.

  Na každém stupni triády tak jedinec přeorganizovává znalosti získané během stupně předchozího. Vývoj tak je postupný, ale nemusí být vždy nutně lineární (Baker a kol., 2000).

5.3.3 Vzájemná interakce schémat

Jak již bylo uvedeno, konstrukce znalostí je dynamický proces. V procesu učení tak může jedinec konstruovat i několik vzájemně souvisejících schémat, ty se poté postupně mění, vzájemně ovlivňují a nacházejí se tak v různých stadiích svého vývoje (Baker a kol., 2000). Každé schéma se samo o sobě skládá z akcí, procesů, objektů a dalších schémat a vztahů mezi těmito strukturami. Nové akce, procesy, objekty nebo schémata mohou být začleněny do již dříve vytvořeného schématu nebo asimilovány schématem, které tak je postupně rekonstruováno (Arnon, 2014). Při řešení problémové situace tak může daný jedinec potřebovat zkoordinovat různá schémata. Jedním z cílů výzkumu v rámci APOS je identifikovat všechna možná schémata, která je potřeba k danému pojmu vyvinout, a také i způsoby, kterými mohou být vzájemně koordinována nebo ovlivněna (Cooley, 2007).

5.3.4 Shrnutí a genetická dekompozice

Autoři APOS teorie definují genetickou dekompozici jako popis toho, jak může být daný pojem zkonstruován v mysli jednotlivce. Nový matematický pojem často vzniká jako transformace existujícího pojmu. Genetická dekompozice je proto konkrétní analýzou akcí, které musí jedinec provést na existujících mentálních objektech, dále pak zahrnuje vysvětlení toho, jak jsou tyto akce postupně zvnitřněny do procesů. V tomto okamžiku by byl pojem ale stále vnímán jako něco, co se dělá. Aby byl chápán jako samostatná entita a něco, co lze dále transformovat, je zde popis toho, jak může být tento proces zapouzdřen do mentálního objektu. Je však zcela možné, že se daný pojem může skládat z několika různých akcí, procesů a objektů. Genetická dekompozice tak může zahrnovat i popis toho, jak jsou tyto jednotlivé struktury vzájemně propojeny a organizovány do větší mentální struktury nazvané schéma. Součástí popisu schématu může být vysvětlení toho, jakým způsobem je nakonec schéma ztematizováno do objektu. Genetická dekompozice rovněž popisuje, co vše je již známo o možných výkonech jedinců, popisuje i případné rozdíly ve vývoji mentálních konstrukcí. Opakovaným procesem zdokonalování, revize a analýzy dat se postupně vytváří genetická dekompozice, která více a více napodobuje kognitivní vývoj daného pojmu pro většinu jedinců. V rámci APOS teorie proto představuje mohutný nástroj nejen pro samotný výzkum, ale i pro samotnou výuku matematiky. Její aplikace nejen pomáhá porozumět procesům myšlení žáků a studentů, ale napomáhá k vytváření efektivnějších výukových strategií pro zkvalitnění porozumění matematickým pojmům.(Arnon a kol., 2014)

5.4 Pojem, definice, představa

5.4.1 Definice

V matematice hrají definice velmi významnou roli. Reprezentují myšlenky, popisují objekty a pojmy, identifikují klíčové vlastnosti matematických entit, ale také podporují proces řešení problémů a důkazů a usnadňují vzájemnou komunikaci mezi matematiky (Zaslavsky & Shir, 2005). Filozof Richard Robinson (1962) rozlišuje mezi dvěma typy definic - lexikálními a konvenčními. Lexikální definice slouží k vysvětlení toho, jakým způsobem určitá osoba použila konkrétní slovo, zatímco konvenční definice zavádějí jasný významový vztah mezi slovem a objektem a jsou těmi definicemi, které užívá matematika.

Samotná myšlenka definování pojmu je poněkud v rozporu s naší praxí, kdy se většinou pojmy utvářejí bez využití formálních definic, a to prostřednictvím každodenních zkušeností a jejich používáním v příslušných kontextech. Například pojem „pták“ byl nejdříve vyvinut především prostřednictvím našeho setkání s konkrétními příklady ptáků a soustředěním se na jejich výrazné rysy. „To je pták. ... Pták létá, ... má křídla ... a peří ... a zobák ... a snáší vejce.“ Pak přichází testování nových tvorů podle těchto různých kritérií. Je slepice pták? „Má křídla, peří, zobák a snáší vejce, ale nelétá. Dobře, někteří ptáci asi nelétají.“ Řekneme tak, že slepice je pták. Je netopýr pták? „Létá a má křídla, ale ve skutečnosti spíše připomíná létající myš, takže to asi nebude pták.“

Tímto způsobem si jedinec vytváří komplex vzájemně propojených prototypů, které mu pomáhají testovat, zda lze nově objevené příklady klasifikovat jako příklady obecného pojmu Je tučňák pták? „Má křídla (nějaká), zobák a snáší vejce, ale nelétá.“ Má ale podobné vlastnosti jako slepice, takže ho za ptáka nakonec přijmeme. Je vakoveverka pták? „Stejně jako netopýr asi není pták.“

V každodenním životě je proto budování pojmů závislé na neustálém porovnávání podobného charakteru, které je hluboce zakořeněné v lidské mysli. Dá se proto očekávat, že i žáci a studenti budou používat stejná kritéria při setkání s pojmy ve výuce matematiky. Při vyslovení jména daného pojmu si proto mohou vybavit něco zcela odlišného než jeho přesnou konvenční definici.

5.4.2 Pojmy a mentální obrazy

Pojmy a jejich *mentální obrazy* jsou v současných psychologických teoriích vzájemně rozlišovány. Piéron (1957) tak ve svém díle definuje *pojem* následovně: „Symbolická reprezentace (téměř vždy verbální) používaná v procesu abstraktního myšlení a mající obecný význam odpovídající souboru konkrétních reprezentací s ohledem na to, co mají společného“. To, co charakterizuje daný pojem, je skutečnost, že vyjadřuje obecnou myšlenku, ideální reprezentaci třídy objektů na základě jejich společných rysů.

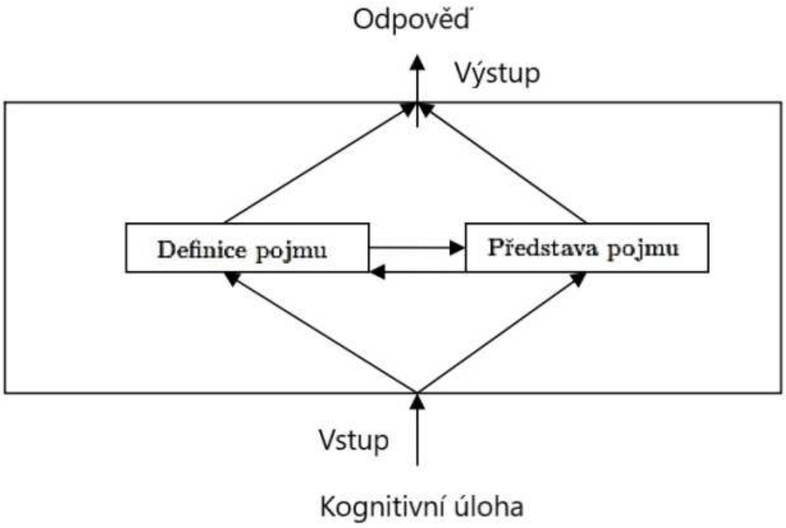
Fischbein (1993) pak popisuje *mentální obraz* jako smyslovou reprezentaci objektu nebo jevu. Pojem kov je například obecná představa třídy látek majících určité společné vlastnosti (elektricky vodivé, ...). Mentální obraz kovového objektu je pak smyslová reprezentace příslušného objektu (barva, velikost, ...).

5.4.3 Definice pojmu a představa pojmu

Tall a Vinner (1981) v této souvislosti zavádějí dva termíny:*definice pojmu* a *představa pojmu*. Definice pojmu je konvenční definice, která byla přiřazena danému pojmu, zatímco představa pojmu je reprezentace porozumění danému pojmu a představuje velmi složitou kognitivní strukturu, propojenou s konkrétním pojmem, která zahrnuje všechny mentální obrazy a související vlastnosti a procesy.

Když například slyšíme slovo „stůl“, můžeme si vybavit obrázek stolu, situaci ze stolování, specifické jídlo, případně i další možné asociace. V okamžiku, kdy je tato představa pojmu vybudována, definice v běžném životě ztrácí většinou svůj význam. Zůstává neaktivní, nebo se dokonce vytrácí, jak popisuje Tall a Vinner (1981) ve své „metafoře lešení“, podle které slouží definice jen jako dočasný opěrný prvek při budování pojmu. Tato skutečnost nám v životě pomáhá se snadněji orientovat a získávat i případné vhledy do jednotlivých problémů, které jdou velmi často nad rámec logiky.

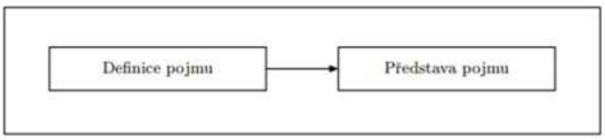
V procesu myšlení se pak většinou v daném okamžiku může aktivovat jen část této představy pojmu, která se nazývá *vyvolaná představa pojmu* (Tall & Vinner, 1981). Může však navíc



Obrázek 5.4: Vinnerův obecný kognitivní model (Vinner, 1983)

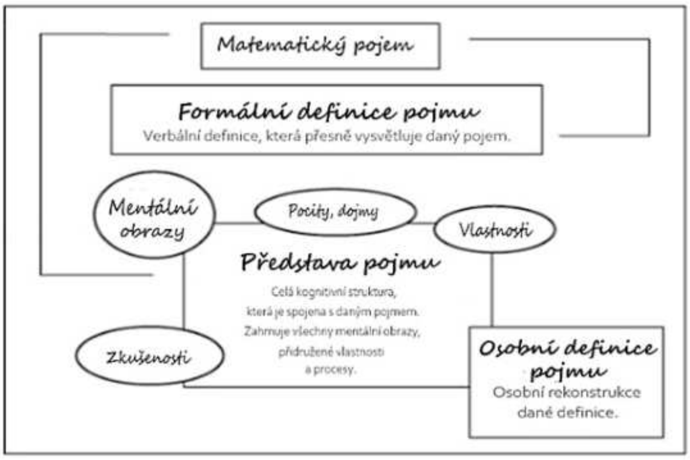
dojít k vyvolání několika představ, které se mohou dostat do vzájemného rozporu a stát se zdrojem kognitivního konfliktu, kdy se žák buď snaží napravit jeho příčinu, nebo se konflikt projeví alespoň jeho pocitem nejistoty. Vinner (1983) však tvrdí, že k podobné situaci bohužel nedochází většinou tehdy, kdy je představa pojmu v rozporu pouze s formální definicí, která nebyla integrována do jeho stávajících představ. V takových případech se pak s jistotou spoléhá na tuto svou vyvolanou představu a „jednoduše považuje formální definici za neúčinnou nebo nadbytečnou" (Vinner, 1983, str. 4).

Vinner(1983) prezentoval svůj jednoduchý model (obr. 5.4), ve kterém znázornil kognitivní procesy, které vznikají mezi definicí pojmu a představou pojmu. Učitelé matematiky podle něj obecně věří a doufají, že představa pojmu bude u jejich žáků vytvořena pouze prostřednictvím definice pojmu a bude s ní vždy velmi úzce propojená (obr. 5.5). Definice pojmu však vytváří



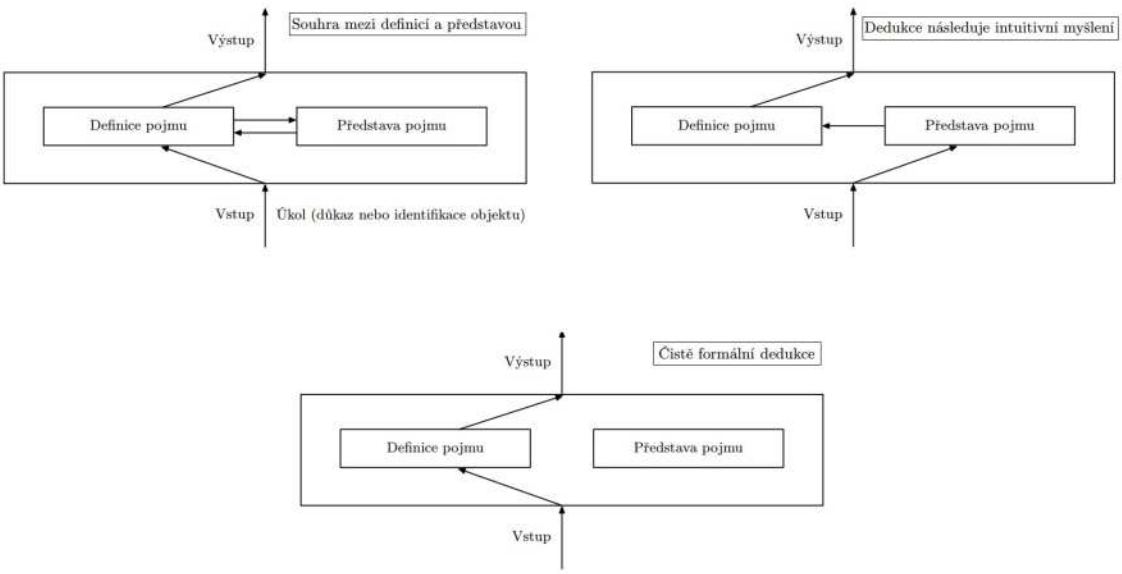
Obrázek 5.5: Idealizovaný vývoj formálního matematického pojmu (Vinner, 1991)

v mysli každého jednotlivého žáka či studenta jeho osobní představu pojmu, která je ovlivněna nejen jeho zkušenostmi v rámci hodin matematiky, ale i mimo ni. Tall a Vinner (1981) proto v této souvislosti dále rozlišují mezi osobní definici pojmu a formální definicí pojmu. Formální je právě ta, která je všeobecně přijímána matematiky, zatímco u osobní definice jde o formu slov, kterou žák či student používá k vlastnímu vysvětlení své vyvolané představy pojmu (obr. 5.6)).



Obrázek 5.6: Představa pojmu a (osobní) definice pojmu.

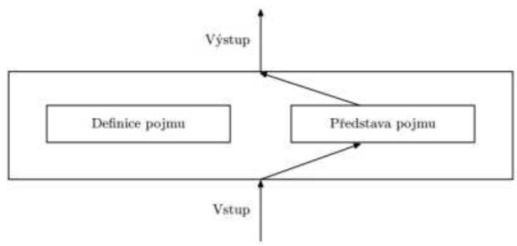
Formální definice v matematice nám nejen pomáhají utvářet samotnou představu pojmu, ale také slouží k ochraně před jeho nesprávným pochopením a stávají se proto i klíčovými nástroji při řešení matematických úloh. Pokud ty obsahují určitý matematický pojem, je nezbytné dodržovat rigorózní povahu matematiky a držet se jednoho ze schémat Vinnerova kognitivního modelu (obr. 5.7).



Obrázek 5.7: Vinnerův kognitivní model dodržující rigorózní povahu matematiky(Vinner, 1991)

To nám říká, že bez ohledu na to, jak se představa pojmu zapojí do procesu řešení úlohy nebo problému, musí být konečný výsledek vždy spojen pouze s jeho formální definicí. Pinto (1998) a Pinto a Tall (1999) však prokázali, že studenti raději staví na své osobní definici pojmu než na té formální a že jejich definice jsou navíc velmi často zkreslené nebo nedostatečné. Tuto situaci popisuje Vinnerův intuitivní model (obr. 5.8), který zde poukazuje na nedodržení rigorózní povahy matematiky (Vinner, 1991).

Na základě všech těchto poznatků tak získáváme hlubší pochopení toho, jak jedinci mohou vytvářet a používat své představy pojmů a zaměřit se tím na takové výukové materiály a situace, které umožní jejich hlubší porozumění povaze a roli definic a podpoří budování pevnějších



Obrázek 5.8: Vinnerův intuitivní model nedodržující rigorózní povahu matematiky(Vinner, 1991)

konceptuálních základů. Je klíčové vytvářet aktivity, které spíše podpoří vyvolávání současně několika různých představ pojmů, jež se mohou následně dostat mezi sebou do konfliktu, než spoléhat na to, že přímé představení definice povede k její automatické a přesné aplikaci v praxi. To znamená, že žáci by měli být vedeni k tomu, aby si nejen zapamatovali formální definice, ale aby je také dokázali propojit se svými existujícími znalostmi a představami. Tento proces může být posílen například prostřednictvím aktivních diskusí, praktických cvičení a reflexí, které pomohou žákům identifikovat a překonat případné rozpory mezi jejich intuitivními představami a formálními definicemi. K tomu se nabízí taxikářská geometrie, která právě tyto možnosti poskytuje.

5.4.4 Teorie figurálních pojmů

Kromě *pojmu* a *mentálního obrazu* jakožto dvou oddělených mentálních kategorií kognitivní psychologie pak Fischbein navíc identifikoval geometrické útvary jako třetí kategorii mentální reprezentace (Fischbein, Nachlieli, 1998):

„*Pojem je obvykle definován jako abstraktní, obecná reprezentace kategorie objektů nebo jevů. Na druhé straně obraz (zejména vizuální obraz) je smyslová reprezentace objektů nebo jevů. Vizuální obrazy jsou někdy popisovány jako 'obrazy v mysli', protože mají prostorové vlastnosti jako rozsah, tvar, umístění, velikost. Tyto dvě kategorie, obrazy a pojmy, ačkoli se v průběhu mentální činnosti obvykle vzájemně ovlivňují, zdají se být ve své podstatě nekompatibilní. Pojem jako takový totiž nevlastní prostorové vlastnosti, je ideální a abstraktní, obraz pak zase není redukovatelný na myšlenku kvůli svým smyslovým vlastnostem. Avšak je možné identifikovat třetí kategorii mentálních reprezentací, která v sobě obsahuje obě tyto vlastnosti. Jsou jimi geometrické útvary.*“ (Fischbein, Nachlieli, 1998, vlastní překlad) [1]

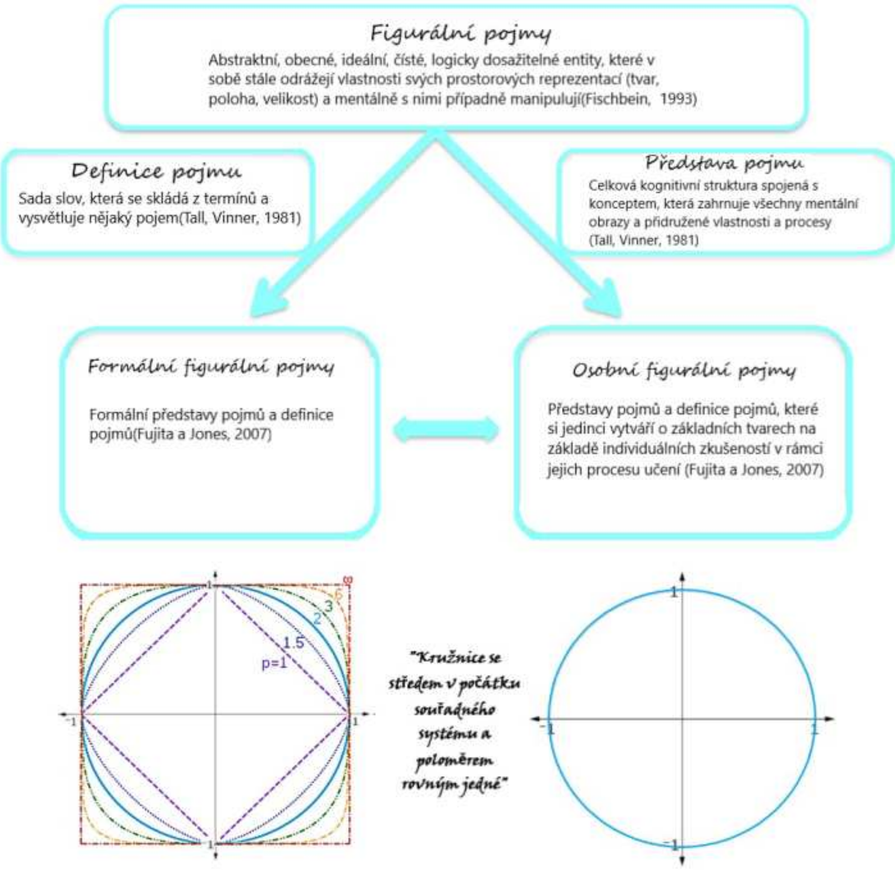
Podle Fischbeina jsou tak geometrické útvary charakterizovány dvěma aspekty: obrazovým a konceptuálním (Fischbein, 1993). Zatímco obrazový aspekt v sobě zahrnuje prostorové vlastnosti (tvar, pozici a velikost), konceptuální složka má abstraktní teoretickou povahu (ideálnost, abstraktnost, obecnost a dokonalost), kterou jednotlivé geometrické útvary sdílejí s těmi ostatními. Fischbein je proto nazývá figurálními pojmy (*figural concepts*).

Například u kola u automobilu, ve snaze popsat jeho „kulatost“, můžeme získat nejenom pouhou představu oblého tvaru, nejen obraz kola spojený s touto představou, ale také třetí typ

[1] „A concept is usually defined as an abstract, general representation (an idea) of a category of objects or events. On the other hand, an image (especially a visual image) is a sensorial representation of an object or event. Visual images are sometimes described as 'pictures in the mind' because they possess spatial properties like extension, shape, location, magnitude. These two categories, images and concepts, though usually interacting in the course of mental activity, seem to be basically incompatible. A concept does not possess spatial properties, it is ideal and abstract, and an image is not reducible to an idea because of its sensorial properties. Nevertheless, one may identify a third category of mental representations which possess simultaneously both categories of properties. These are the geometrical figures.“

konstruktu, kterým je geometrický útvar nazvaný kružnice. Pokud budeme řešit úlohu, ve které máme například vypočítat vzdálenost, kterou urazí vozidlo, známe-li poloměr kol, počet otáček za časovou jednotku a celkový čas, budeme provádět výpočet s ohledem k abstraktnímu modelu kola, který není ani čistým obrazem, ani čistým pojmem. Pojmy samy o sobě se totiž neotáčejí, nepohybují, a obrazy jako takové zase nemají onu dokonalost, obecnost, abstraktnost, která je předpokladem pro provádění výpočtů (Fischbein, 1993). Kružnice je proto *figurálním pojmem*. Je to geometrický útvar, má prostorovou (smyslovou) reprezentaci a je to geometrický pojem (ideální, abstraktní, obecný, dokonalý). Fischbein navíc zdůrazňuje, že úplná harmonie mezi pojmem a obrazem je v geometrickém úsudku jen jistou ideální situací, která však nemusí být v praxi dosažena z důvodu různých psychologických omezení. Tuto úplnou harmonii mezi oběma aspekty figurálního pojmu nazývá Fischbein (1993) *ideální figurální pojem*. Figurální složka je však podle něj obvykle silně dominantní a konceptuální složka tak bývá velmi často upozaděna.

Z čistě kognitivního hlediska Fujita a Jones (2007) rozšířili původní definici figurálního pojmu (viz obr. 5.9) následujícím způsobem. Jak již bylo uvedeno, Fischbein považoval figurální pojem za proces, ve kterém se vzájemný vztah mezi figurální a konceptuální složkou postupně vyvíjí směrem ke své ideální formě, avšak nezabýval se podrobně tímto vývojem ve vztahu k jednotlivci. Fujita a Jones proto přišli s tím, že jedinci mohou mít své vlastní figurální pojmy a definice, které si konstruují prostřednictvím svých osobních zkušeností, a nazývají je souborně jako *osobní figurální pojmy* (u Tall a Vinnera by to odpovídalo jejich *představě pojmu*). Fujita a Jones se poté odkazují na formálních definice pojmů a jejich obrazy jako na *formální figurální pojmy*.



Obrázek 5.9: Figurální pojmy(Fujita a Jones, 2007)

5.5 Teorie učení v geometrii

5.5.1 Van Hieleho teorie učení v euklidovské geometrii

Existuje celá řada literatury, která poukazuje na to, že geometrie prezentovaná formálním axiomatickým způsobem je na střední škole srozumitelná pouze malé skupině žáků (Mayberry, 1983; Burger & Shaughnessy, 1986; van Hiele, 1986; Fuys et al., 1988). V mnoha zemích tak začala být postupně čistě euklidovská geometrie na tomto typu škol kritizována jako příliš formální a příliš složitá a došlo postupně k reformám, které odrážely především změny v didaktice, a to ve světle výzkumu provedeného na konci 50. let dvěma nizozemskými matematickými pedagogy, Pierrem van Hiele a jeho manželkou Dinou van Hiele-Geldof, kteří zformulovali jejich vlastní teorii učení euklidovské geometrii.

Byla vytvořena na základě celkových frustrací, které nejen oni, ale i jejich žáci v hodinách zažívali. Van Hiele (1986) vysvětluje, že při výuce geometrie „se vždy zdálo, jako bych mluvil jiným jazykem". Jejich zjištěním pak bylo, že geometrie prezentovaná tradičním euklidovským způsobem naivně předpokládá, že již žáci uvažují na deduktivní úrovni. Navíc si začali uvědomovat tu skutečnost, že tito žáci nebudou nikdy schopni ocenit význam a podstatu axiomatických systémů, dokud se postupně krok po kroku nedostanou na nejvyšší úroveň porozumění v rámci jejich představené hierarchie (Van Hiele, 1999) .

Mnoho odborníků popisuje jednotlivé van Hielovy úrovně různými způsoby, nicméně zde a ilustrováno na obrázku 5.10 je shrnutí podle Battista & Clements (1992):

1. Vizuální (Visualization): Jedinci zde identifikují tvary podle vizuálního vzhledu a pracují s nimi na základě celkového dojmu. Vytvářejí si mentální představy útvarů, ale nevěnují pozornost jejich geometrickým vlastnostem. Do tohoto období se obvykle dostávají již v průběhu mateřské školy, když jsou konfrontovány s předměty ve tvaru geometrických obrazců, a setrvávají v něm zpravidla i na začátku základní školy (Budínová, 2021).

2. Analytická (Descriptive): Jedinci již začínají rozpoznávat a charakterizovat tvary podle jejich vlastností. Věnují se tak experimentálnímu stanovování vlastností a začínají chápat, jak některé z nich vytvářejí společnou třídu geometrických útvarů. Na tuto úroveň se žák dostává v průběhu třetího ročníku základní školy, ve čtvrtém ročníku by již této úrovně měla dosahovat většina z nich (Budínová, 2021).

3. Abstraktní (Abstract Reasoning): Jedinci již stále víc vnímají vztahy mezi vlastnostmi útvarů, jsou schopni tyto útvary třídit podle různých charakteristik a vytvářet jednoduché definice. Na této úrovni se již nenechávají ovlivňit tím, jak na ně daný útvar působí a zvažují vždy jen jeho vlastnosti. Na tuto úroveň se dostávají žáci v průběhu druhého stupně (Budínová, 2021). Mohou se tak již rodit počátky deduktivního uvažování, ještě však stále bez porozumění pravidlům a významu formální dedukce.

4. Deduktivní (Deduction): Jedinci již mohou provádět důkazy na středoškolské úrovni, vyvozují závěry z předchozích známých tvrzení, rozumějí významu definic a axiomů a chápou význam nutné a postačujícího podmínky. Jsou schopni používat abstraktní pojmy a vyvozovat závěry založené spíše na logice než na intuici. V případě optimálního poznávacího procesu žáci této úrovně dosáhnou na střední škole (Budínová, 2021).

5. Axiomatická (Rigor): Na této úrovni již jedinci formálně uvažují o matematických systémech a jsou schopni studovat geometrii nezávisle na vizuálních modelech. Manipulují

formálně s axiomy, definicemi a větami. Úrovně axiomatizace dosahují studenti vysokých škol, kteří již dokážou axiomy chápat i mimo samotný euklidovský prostor (Žilková, 2018)

Obrázek 5.10: Van Hieleho úrovně geometrického myšlení.

Uvažujeme-li čtverec, na vizuální úrovni by ho jedinec rozpoznal pouze podle jeho vzhledu. Na analytické úrovni by již dokázal popsat čtverec pomocí vlastností, například popisem, že má všechny strany stejně dlouhé. Na abstraktní úrovni by již chápal definici čtverce a jeho vztah s jinými útvary. Na úrovni dedukce by byl navíc schopen sestavit důkazy o vlastnostech čtverce, na úrovni axiomatizace pak dovedl formálně manipulovat s tímto pojmem i v rámci jiných matematických systémů, například sestrojil čtverec v taxikářské geometrii.

Manželé van Hiele zdůrazňují obdobně jako Piaget aktivní roli jedince při konstrukci vlastního poznání. Podle nich se jedinec neučí fakta, jména nebo pravidla, ale vytváří sítě vztahů, kterými propojuje geometrické pojmy a procesy a vše organizuje do schémat (van Hiele, 1959). Musí proto abstrahovat matematiku ze svých vlastních systematických činností a zkušeností.

Tato teorie je hierarchická. Znamená to, že jedinec nemůže pracovat s porozuměním na jedné úrovni, aniž by prošel těmi předchozími (van Hiele, 1986). Senk (1989) v této souvislosti dodává, že dvě osoby, které uvažují na různých úrovních, se dokonce nemusí navzájem chápat. Ten, kdo je na úrovni n, nemusí pak porozumět myšlení na úrovni $n + 1$ nebo vyšší. Pokud učitel vyučuje geometrii na vyšší úrovni van Hieleho, je takové vyučování neefektivní, protože žáci nerozumí, co učitel říká. Podobně učitel, který očekává odpovědi na úrovni van Hieleho, která se liší od úrovně jeho žáků, nemůže pochopit jejich odpovědi (van Hiele, 1984). Pegg (1995) však tvrdí, že žáci a studenti mohou vyšší úroveň simulovat tím, že se naučí daná pravidla a definice nazpaměť nebo používají jen rutinní algoritmy, kterým však nerozumí. Ukázalo se, že jednotlivé úrovně nejsou diskrétní a jedinci mezi nimi mohou oscilovat, jak naznačují Burger a Shaughnessy (1986). V tomto případě je nižší úroveň van Hieleho kompletnější a zůstává důležitou součástí kognitivních schémat žáka (Matos, 1999). To může vést k tomu, že při řešení složitějších problémů budou žáci inklinovat k jednodušším způsobům myšlení. V takových situacích mohou vizuální aspekty, jako je tvar nebo vzhled geometrického objektu, převažovat nad abstraktními geometrickými vlastnostmi, které tento objekt definují.

Oproti Piagetovi, Pegg (1995) a Mason (2003) tvrdí, že posun z jedné úrovně na druhou je více ovlivněn vzdělávacími zkušenostmi, než věkem nebo fyzickou a mentální zralostí žáků. Pegg (1995) proto doporučuje, aby měl jedinec pro tento přechod dostatek vhodných příležitostí čelit časté osobní „krizi myšlení“. Měly by mu být poskytovány takové úkoly, které by ho donutily přemýšlet a vymýšlet vlastní strategie řešení, a u kterých tak získá do dané problematiky i potřebné vhledy. Aktivity by měly být postavené na objevování a následné reflexi, navíc navrženy tak, aby mu umožnily procházet jednotlivými úrovněmi van Hieleho postupně a jedinec tak nebyl nucen přemýšlet na úrovni vyšší. Měly by navíc natolik flexibilní, aby kompenzovaly jedince na různých úrovních této hierarchie (Battista & Clements, 1992).

V rámci středoškolské geometrie bychom se proto měli snažit přizpůsobit všem těmto možným rozdílům v jednotlivých úrovních geometrického myšlení a postupně přivádět žáky k hlubšímu poznání klíčových pojmů. Je důležité, aby jim bylo vždy umožněno využívat vizuálního uvažování a empirického myšlení, neboť tyto přístupy jsou základními stavebními kameny pro dosažení vyšších úrovní geometrického myšlení. Současně je však potřeba postupně zdokonalovat jejich myšlenkové procesy a pomáhat jim rozpoznávat případné nedostatky v jejich vizuálních a empirických argumentech, aby mohli postupně objevovat a používat kritické atributy formálního důkazu. Dále by měli mít příležitost k tomu, aby prezentovali a zdůvodňovali své myšlenky, což jim nakonec pomůže porozumět významu a nezbytnosti formálního důkazu. Zde může sehrát významnou úlohu taxikářská geometrie jako prostředek pro lepší porozumění geometrickým pojmům a jejich aplikacím. Poskytuje žákům jednoduchý a intuitivní způsob, jak vizualizovat geometrické pojmy a pracovat s jejich definicemi. Tento názorný přístup může žákům pomoci lépe porozumět základním geometrickým principům a významu definic v rámci nižší úrovně Van Hieleho hierarchie, což pak usnadní jejich přechod k vyšším úrovním.

5.5.2 Teorie učení v neeklidovské geometrii

Manželé van Hiele se ve své práci zabývali pouze jednotlivými úrovněmi porozumění v euklidovské geometrii, ale vůbec se již nezabývali geometriemi neeuklidovskými. Ty považovali za příliš teoretické k tomu, aby byly zařazeny do učebního plánu matematiky na základních a středních školách. Taxikářská geometrie má však značný potenciál právě zlepšit porozumění žáků samotné euklidovské geometrii, bylo by proto užitečné se zabývat i tím, jak mohou tito žáci rozvíjet své myšlení také v této geometrii a jaké jsou tudíž i zde obdobné úrovně.

Existuje velmi málo výzkumu v této oblasti; nicméně Guven a Baki (2010) ve své studii sestavili úrovně porozumění ve sférické geometrii, které lze nakonec aplikovat i v rámci taxikářské geometrie, jak to ukázal například Barbosa (2019). Úrovně porozumění v taxikářské geometrii by se tak daly popsat takto:

1. Přechod (Transition): V této fázi má jedinec intuitivní chápání taxikářské geometrie. Uvědomuje si sice tu skutečnost, že v důsledku rozdílu v metrice studuje geometrii odlišnou od té euklidovské, není si však vědom všech jejích základních principů a axiomů a neuvědomuje si proto dostatečně, jakou roli hrají při její konstrukci. Při práci na nových úkolech zde proto silně dominují představy dříve naučených pojmů euklidovské geometrie a jejich vlastností.

2. Porovnávání geometrií (Geometry Comparison): V této fázi již začínají definice a z nich vyplývající vlastnosti geometrických útvarů nahrazovat původní představy založené jen na jejich vzhledu. Jedinec tak může začít porovnávat tyto definice v rámci obou geometriích a vytvářet nové znalosti, které nahrazují jeho čistě intuitivní a vizuální představu. Nedovede však tyto nové znalosti ještě využít k řešení složitějších problémů.

3. Před-deduktivní (Pre-deductive): Jedinec již dovede řešit složitější úlohy pomocí konstrukcí v taxikářské geometrii, ale zatím stále není schopen řešit problémy, které vyžadují deduktivní úsudek. Dokáže sice sledovat formální důkazy, je schopen jim porozumět, ale není schopen vytvořit nový důkaz nebo přizpůsobit existující důkaz v rámci nových požadavků.

4. Deduktivní (Deductive): Jedinec již dovede deduktivně dokazovat věty pomocí obecných definic místo těch specifických, které jsou platné jen v rámci konkrétní geometrie. Jinými slovy tak může z definic provádět odvozování, které jsou univerzálně platné i v rámci jiných geometrií, například, že osa usečky je zde ve smyslu ekvivalence právě ta množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od krajních bodů této úsečky.

Existují zde některé obecné podobnosti mezi úrovněmi van Hieleho a výše uvedenými úrovněmi taxikářské geometrie. Obě úrovně začínají shodně vizuálním chápáním a poté pokračují intuitivním vnímáním definic a vlastností. Nakonec tak v obou teoricích jedinci dosahují deduktivního uvažování a provádějí logické závěry. Tyto podobnosti lze shrnout v tabulce na obrázku (5.11).

Vlastnosti	Geometrie	Úroveň geometrického myšlení
Vizuální vlastnosti	taxikářská euklidovská	PŘECHODOVÁ VIZUÁLNÍ
Definice a související vlastnosti	taxikářská euklidovská	DEFINICE A SROVNÁNÍ ANALYTICKÁ
Neformální závěry	taxikářská euklidovská	PŘED-DEDUKTIVNÍ ABSTRAKTNÍ
Formální důkazy	taxikářská euklidovská	DEDUKTIVNÍ DEDUKTIVNÍ

Obrázek 5.11: Srovnání jednotlivých úrovní geometrického chápání euklidovské (van Hiele) a taxikářské geometrie

Pokud se podíváme podrobněji na jednotlivé úrovně taxikářské geometrie, zjistíme, že se jejich charakteristiky mírně liší. Na úrovni vizualizace jedinec nezná vlastnosti rovinných obrazců, ale na úrovni přechodu už ano, včetně platnosti těchto vlastností v taxikářské geometrii. Na úrovni analýzy podle van Hieleho dokáže jedinec popsat vlastnosti rovinných útvarů a porovnat je s jinými útvary v rámci euklidovské geometrie. Na úrovni srovnání geometrií dokáže navíc porovnávat tyto vlastnosti napříč oběma geometriemi. Jedinec na úrovni před-deduktivní obvykle dospívá k logickým závěrům prostřednictvím speciálních případů v obou geometriích. Na abstraktní úrovni podle van Hieleho tyto speciální případy nepoužívá (Guven, Baki, 2010).

Obě teorie ukazují, že jedinci postupují postupně přes různé úrovně porozumění, které jsou hierarchické. Jak je již známo, jeden z hlavních důvodů selhání žáků a studentů v porozumění euklidovské geometrii je nedostatečné zohlednění úrovní porozumění podle van Hieleho ve výuce. Proto by tyto úrovně porozumění neeuklidovským geometriím měly být rovněž brány v úvahu při návrhu vhodných výukových aktivit, aby se předešlo podobným problémům.

Kapitola 6

Didaktický experiment

6.1 Úvod

Výuka geometrie je nejen klíčovým prostředkem pro rozvoj prostorového myšlení a vizualizačních dovedností u žáků, ale také zásadní příležitosti k rozvoji jejich schopnosti deduktivního uvažování a dokazování (Battista & Clements, 1992). French (2004) pak uvádí, že geometrické znalosti jsou důležité pro úspěch žáka v matematice jako takové.

Gonseth (1955) rozlišuje tři paradigma geometrie v závislosti na propojení s reálným světem: a) přirozená geometrie, b) přirozená axiomatická geometrie a c) formální axiomatická geometrie. V primárním a sekundárním vzdělávání jsou klíčové pouze první dvě. V přirozené geometrii jsou vjemy a pozorování fyzických objektů základem tvrzení a geometrických úvah, vycházejících ze zkušeností s reálným světem. Přirozená axiomatická geometrie používá axiomatický model reálného světa, kde axiomy těsně souvisejí s naším vnímáním prostoru. Formální axiomatická geometrie je odosobněná od reálného světa a zahrnuje úplný a bezesporný systém axiomů, relevantní až pro vysokoškolské studium.

Geometrie má tři roviny: tvary reprezentující pojmy, definice a vlastnosti. Jinými slovy, vizuální obraz, který reprezentuje geometrický pojem, má definici, která pomáhá porozumět různým jeho vlastnostem a jiným pojmům a rozlišovat mezi nimi (Türnüklü, Alayli & Akkaş, 2013). Definice jsou proto nedílnou součástí k pochopení pojmů a rovněž zásadní při konstrukci důkazů v matematice. Je tedy důležité, aby žáci vyvinuli hluboké porozumění jejich obsahům a rolím.

Úrovně geometrického myšlení jsou podle van Hiele uspořádány hierarchicky a žáci a studenti procházejí těmito úrovněmi postupně krok za krokem. Pro úspěšné zvládnutí určité úrovně je nezbytné zvládnout strategii úrovní předchozích (van Hiele, 1959; Crowley, 1987). Výzkum naznačuje, že pokud žáci nepostoupí ke čtvrté úrovni, nebudou pravděpodobně úspěšní ve vysokoškolském kurzu geometrie, kde se obvykle očekává, že budou uvažovat deduktivně (Mayberry, 1983). Pegg (1995) uvádí, že přechod mezi úrovněmi závisí spíše na vzdělávacích zkušenostech než na věku samotném. Doporučuje proto, aby bylo žákům pro tento postup poskytováno dostatek příležitostí čelit osobním „krizím myšlení“, a to prostřednictvím takových zvolených situací, které by jim umožnily vzájemně propojovat to, co již znají, s tím, co je jim neznámé.

Při výzkumu v geometrii, zejména té přirozené axiomatické geometrii, se pracuje s mentálními entitami nazývanými figurální koncepty, které odrážejí prostorové charakteristiky (tvar, poloha, množství), stejně jako konceptuální vlastnosti jako je dokonalost, abstraktnost, obecnost a ideálnost (Fischbein, 1993). Fischbein považuje geometrické myšlení za neustálou interakci mezi figurálními a konceptuálními složkami. V jeho teorii upozorňuje na častý rozpor mezi těmito aspekty, kdy figurální struktura přechodně získává autonomii a výrazně ovlivňuje úsudek jednotlivce. Tento jev je dobře zdokumentován výzkumem Fujity a Jonese (2006), kteří zjistili, že prototypové obrazy v osobních figurálních pojmech mají silný vliv na to, jak žáci a studenti definují tvary v geometrii a odvozují jejich vlastnosti. Tento jev je znám jako „prototypový fenomén“ (Hershkowitz, 1990), kde obraz často převažuje nad formální definicí a může bránit hlubšímu učení (Matos, 1999). Prevost (1985) toto potvrzuje a dodává, že žáci často používají prototypové příklady k definici geometrických útvarů, i když znají jejich konvenční definice. Tento jev ukazuje, že ve smyslu van Hieleho zůstávají na úrovni vizualizace a nedosahují úrovně analýzy. Smith (2013) doplňuje, že naše předpoklady tak mohou omezovat naši schopnost vidět problém v celém jeho rozsahu. Hollebrands a kol.(2010) zjišťují, že vysokoškolská geometrie je pro studenty obtížná proto, že jsou zvyklí tvořit své logické úsudky v rámci svého intuitivního chápání a zkušeností než z požadavků kladených axiomatickými systémy. Velká část z nich proto nepracuje s definicemi tak, jak to činí matematici, a to i přesto, že jsou schopni je správně vyslovit a vysvětlit (Edwards a Ward, 2004). Tito autoři se domnívají, že je to způsobeno tou skutečností, že žáci mají dlouhá léta zkušenost s matematikou, v nichž se pěstuje pouze toto intuitivní porozumění. Edwards a Ward (2004) navíc zjistili, že spousta úspěšných studentů matematiky často dokonce nerozumí samotné povaze matematických definic. Jejich naivní přístup pak bývá velmi často stejný jako přístup obyčejného člověka k lexikálním definicím a tento konflikt mezi empirickým (lexikálním) přístupem a teoretickým může být zdrojem jejich případných obtíží na vysoké škole (Vinner, 1976).

Jak již bylo uvedeno dříve, vzhledem ke konstruktivní povaze samotného budování pojmu si tak jedinec ve snaze o jeho porozumění vytváří vlastní mentální reprezentaci. Pokud s tímto pojmem získá mnohem více zkušeností, může být postupně upravena, nebo může být vytvořen úplně jiný a nový typ reprezentace. Žáci proto dlouhou dobu mohou vnímat pojmy, které znají z euklidovské geometrie, jako jistou samozřejmost, která nevyžaduje oporu definic, dokud se nesetkají právě s okolnostmi, které začnou odporovat jejich dosavadním představám. Proto „pokud je pojem výsledkem reflektivní abstrakce, což je abstrakce odvozená z aktivity, pak by mělo být možné navrhnout řadu úkolů, která vyvolá vhodnou aktivitu podporující abstrakci z této aktivity“ (Simon a kol., 2018). Edwards a Ward (2004) pak doporučuji zařazovat takové aktivity spojené s definicemi, které by mohly podporovat hlubší porozumění matematických pojmů, porozumění povaze matematických definic a porozumění roli definic v matematice již v rámci vzdělávacích cílů středních škol. Již zde by se podle nich učitelé měli alespoň pokusit zasít semínko rigoróznějšího přístupu k použití definic. To podporuje i Fischbein (1999) a doporučuje „vytvoření takových [výukových] situací, ve kterých se může projevit konflikt mezi intuitivní reakcí figurálního aspektu a poznáním dosaženým prostřednictvím logické analýzy“.

Taxikářská geometrie má proto v těchto ohledech obrovský potenciál a může sehrát velmi významnou roli v učebním plánu matematiky. „Žáci a studenti, kteří mají zkušenost s vytvářením, spojováním, kombinováním pojmů a jejich používáním v různých kontextech, vykazují lepší porozumění těmto pojmům a snadnější zapamatování než ti, kterým je pojem přímo předáván učitelem (Wafiqoh & Kusumah, 2019)“. Ukazuje se, že zkoumání pojmů v neeuklidovské geometrii může žákům a studentům pomoci lépe porozumět euklidovské geometrii (Dreiling, 2012; Hollebrands, Conner, & Smith, 2010). Krause (1975) preferuje zavedení taxikářské geometrie před ostatními neeuklidovskými geometriemi, protože tento jednoduchý prostor umožňuje snazší uvažování a usnadňuje pozdější přechod k mnohem abstraktnějším pojmům. Christina Janssen (2007) uvádí, že při pohledu na geometrii z této odlišné perspektivy [taxikářské] se musela sama zastavit a přehodnotit to, co se doposud naučila. Říká: „Není možné lépe porozumět euklidovské geometrii než s pomocí tohoto typu porovnávání a kontrastu. Moje geometrické chápání se rozvinulo do neuvěřitelných rozměrů ... “ [1] (Janssen, 2007, str. 60-61, vlastní překlad). Toto prostředí taxikářské geometrie umožňuje navrhovat výukové situace, které podporují integraci konceptuálních a figurálních aspektů s cílem vytvořit sjednocené mentální objekty. Toto je podporováno i vzájemnou interakcí schémat dle teorie APOS. Taktéž poskytuje vhodnou příležitost k tomu, aby se ukázalo, že geometrie slouží jako způsob popisu fyzické reality. Podobně jako různé literární styly mohou popisovat stejnou scénu, různé geometrie mohou sloužit k popisu téže reality, a žádná z nich není lepší než jiná. Geometrie je vždy vybírána podle její vhodnosti pro dané okolnosti.

6.2 Metodologie

Tato studie využila metodu didaktického experimentu, která je součástí kvalitativních výzkumných metod v pedagogice a slouží k systematickému zkoumání a ověřování efektivity výukových postupů, metod a technik. Je tedy neocenitelným nástrojem pro pedagogický výzkum, který přispívá k inovaci a k zlepšování vzdělávacích metod a technik. Podle Steffa a Thompsona (2000) nebyla struktura didaktického experimentu nikdy formálně stanovena, ani by podle jejich názoru být neměla. Tento přístup pak umožňuje, aby charakteristiky experimentu závisely na konkrétním zaměření každého experimentátora. Pro Steffa a Thompsona je proto didaktický experiment živou metodologií, která byla navržena pro zkoumání a vysvětlování matematické aktivity žáků. Podle Cobb et al. (2003) by však „návržné experimenty měly být prováděny za účelem rozvoje teorií, nikoli pouze empirického ladění toho, co funguje.“ Jako výzkumný pedagog jsem se proto aktivně podílel na tvorbě takových výukových aktivit, které jsou v souladu s relevantními teoretickými rámci a následovně jsem se u žáků pokusil sledovat rozvoj jejich učebních dovedností a matematického myšlení.

6.3 Výzkumné otázky

Pro stanovení výzkumných otázek bylo nejprve nutné identifikovat činnosti nebo úkoly v oblasti taxikářské geometrie, které by mohly pomoci žákům lépe porozumět matematickým pojmům a jejich definicím a prohloubit v této oblasti jejich znalosti. Následně pak byly vybrány ty aktivity, které by umožnily sledovat, jak žáci přenášejí své stávající porozumění některým pojmům z euklidovské geometrie do kontextu taxikářské geometrie, a jak aplikace těchto definic v netypickém prostředí taxikářské geometrie může obohatit jejich pochopení těchto pojmů.

Ve rámci didaktického experimentu jsme se nakonec zaměřili na tyto dvě výzkumné otázky:

1. Jak žáci v rámci připravených aktivit přenášejí a aplikují své osobní definice geometrických pojmů, jako jsou kružnice, elipsa, parabola, hyperbola a osa úsečky, které získali během svého středoškolského studia, do kontextu taxikářské geometrie, a jak mohly tyto aktivity podpořit jejich porozumění těmto pojmům?

2. Zda je možné na základě vhodně navržených aktivit v prostředí euklidovské a taxikářské geometrie, které jsou sestaveny s ohledem na vzájemnou interakci schémat (APOS), dosáhnout toho, aby žáci ztematizovali pojem „kružnice“ a byli schopni odvodit její rovnici v maximální metrice.

[1] „How can you not understand Euclidean Geometry better with that type of comparing and contrasting[?] My geometric understanding has grown beyond belief...“

Kapitola 7

První výzkumná otázka

7.1 Výzkumný proces

Metoda

V souladu s cílem výzkumu sledovat, jak žáci přenášejí a aplikují své osobní definice geometrických pojmů, jako jsou kružnice, elipsa, parabola, hyperbola a osa úsečky, které poznali během svého středoškolského studia, do kontextu taxikářské geometrie, a jestli tato činnost může podpořit jejich porozumění těmto pojmům, byla několika žákům střední školy předložena série aktivit v taxikářské geometrii. Po žácích, kteří se účastnili této studie, byla požadována aktivní spolupráce a společné dokončení všech těchto úloh. Jednalo se zde o kvalitativní sběr dat a tato data byla shromážděna prostřednictvím pozorování, zaznamenaných diskusí, rozhovorů a vyplněných pracovních listů. Realizace proběhla v samotném prostředí školy. Chování žáků považované za důležité během tohoto procesu bylo zaznamenáno a interpretováno.

Účastníci

Tato studie byla provedena se skupinou osmi dobrovolných žáků posledního ročníku gymnázia J. Seiferta v Praze, ve dvou dnech, a to v rámci dvou 90minutových bloků. Přítomen byl ještě jeden učitel, který pomáhal zaznamenávat rozhovory a pořizovat fotodokumentaci. Žáky budu v textu označovat pseudonymy.

Průběh

Studie probíhala v několika fázích. Nejprve bylo nutné tyto žáky seznámit s konceptem taxikářské vzdálenosti a s rozdíly mezi touto novou geometrií a tradiční euklidovskou geometrií, kterou již znali z předchozího studia. Po stručném přehledu historie proto následovala první část aktivit, zahrnující pět úvodních cvičení (1-5). Teprve po jejich absolvování žáci navštívili fiktivní zemi Taxizem, kde platí pravidla taxikářské geometrie. Zde pak mohli v rámci 9 navržených úloh (1/T-9/T) zkoumat vlastnosti geometrických pojmů, které se v této specifické geometrii projevují jinak než v té euklidovské. Jako zdroj inspirace a příkladů jsem použil knihu „Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry (Krause, 1986)“.

7.2 Rešerše

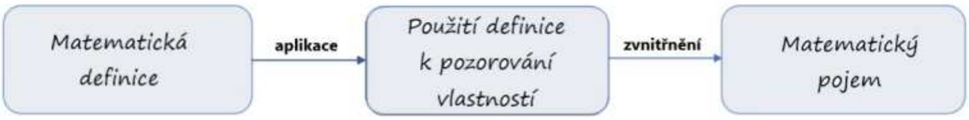
7.2.1 Přístupy k definicím pojmů

Na střední škole bývají definice využívány při psaní matematických důkazů. Dále už se však po žácích příliš nepožaduje, aby je aplikovali i v jiném kontextu. Jak již bylo řečeno dříve, představa pojmu se může shodovat, ale může se i podstatně lišit od formální definice tohoto matematického pojmu. Podle von Glasersfelda (1995) jsou fakta považována za platná, dokud nejsou v rozporu se zkušeností. Teprve pokud jedinec narazí na nesoulad mezi svými současnými znalostmi (představou pojmu) a tím, co říká například učitel, učebnice nebo daná aktivita v rámci formální definice pojmu, může začít prožívat frustraci a „pokud se rozhodne systematicky a pečlivě prozkoumávat problém, aby tak svůj narušený stav úspěšně obnovil, vede to k učení“ (Pritchard & Woollard, 2010).

Tento stav nerovnováhy a úsilí vyvinuté k jejímu překonání jsou zvláště důležité pro rozvoj hlubokého porozumění daného pojmu. Jeho nedostatečné chápání se pak projevuje jako nevhodná, alternativní nebo neúplná představa. Makonye (2012) ji popisuje jako „miskoncept“.

„Miskoncepty často vycházejí z již získaného systému pojmů a přesvědčení, které jsou chybně aplikovány na širší oblasti. Neměly by být považovány za závažné chyby, které je třeba odstranit, neboť to může žáka zmást a otřást jeho důvěrou v jeho předchozích znalostech. Místo toho by nové poznatky měly být propojeny s předchozím konceptuálním rámcem žáka či studenta a začleněny do správné perspektivy.“ [1] (Nesher, 1987, str. 38-39, vlastní překlad)

Existuje mnoho různých způsobů, jak může žák pracovat s matematickým pojmem, jeho vlastnostmi a definicí, aby tím upevnil své celkové porozumění a odstranil své případné miskoncepty. Hlavní přístup, který je použit v úlohách v rámci této studie, je postavený na utváření matematického pojmu prostřednictvím poskytnuté definice (obr. 7.1). Ta je však skrytě zasazena



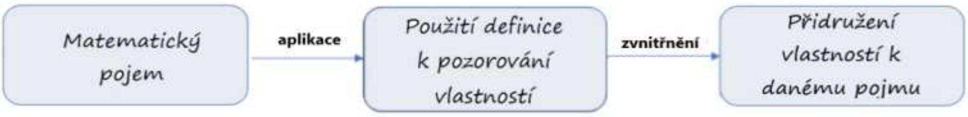
Obrázek 7.1: Vytváření matematického pojmu na základě vlastností v rámci definice

do nějakého kontextu (reálné i fiktivní situace), aniž by se zmínilo, o jaký matematický pojem se skutečně jedná. Po žákovi se pak požaduje, aby se pokusil identifikovat, jaký matematický objekt tato definice skrývá, a to prostřednictvím nezávislého zkoumání. Fischbein (1993, str. 153) totiž tvrdí, že při geometrickém uvažování je hlavní překážkou tendence „zanedbávat definici pod tlakem figurálních omezení“. Snažíme se proto vyhnout tomu, aby daný pojem u žáka hned na začátku vyvolal jeho nepřesnou nebo neúplnou představu. Měl by proto nejdříve samostatně usilovat o hledání svých modelů a nemodelů, ale pouze těch, které jsou v přímém spojení s poskytnutou definicí, nikoli s předem určeným matematickým objektem. V netypickém kontextu taxikářské geometrie je nakonec žák přiveden k pozorování vlastností, které si s ním původně vůbec nespojoval, což by mohlo rozšířit a upevnit jeho mentální představu o tomto pojmu. Může tak nakonec asimilovat jeho podstatné a nezaujaté vlastnosti do své stávající představy. Jelikož v rámci axiomatického systému jsou vlastnosti geometrických útvarů odvozeny z definic, jedi-

[1] „Misconceptions are usually an outgrowth of an already acquired system of concepts and beliefs wrongly applied to an extended domain. They should not be treated as terrible things to be uprooted since this may confuse the learner and shake his confidence in his previous knowledge. Instead, the new knowledge should be connected to the student’s previous conceptual framework and put in the right perspective“

nec si zde v ideálním případě nakonec uvědomí, že útvar je skutečně vždy „řízen svou definicí“ (Fischbein, 1993, str. 141).

Další přístup, který je zde použit, je postavený na pozorování vlastností matematického pojmu v rámci jeho definice (obr. 7.2). Žák může v poněkud jiném kontextu taxikářské geometrie porovnávat svou osobní definici matematického pojmu s vlastnostmi, které z ní vyplývají v tomto novém prostředí. Tyto nové vlastnosti pak může vhodně spojit s daným matematickým pojmem a upravit tak svou původní osobní představu a definici, aby do ní tuto získanou novou zkušenost asimiloval. Jeho osobní definice a představa pojmu se tím může začít více shodovat s formální definicí.



Obrázek 7.2: Pozorování vlastností matematického objektu na základě jeho definice.

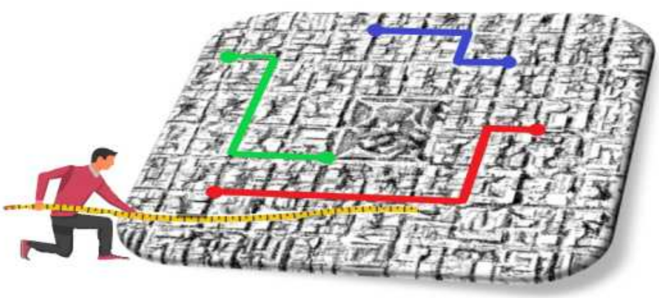
Žáci často čelí kritice ze strany učitelů kvůli nedostatečné kreativitě, nezávislosti a originalitě, ačkoliv u nich ve skutečnosti není dostatečně podporováno rozvíjení těchto schopností. V této práci je proto kladen důraz na výukovou strategii objevování, která je klíčová pro seznámení s touto alternativní geometrií. Očekává se, že tato strategie podnítí kritické myšlení žáků a jejich reflexi nad zjištěnými závěry, neboť zde budou nuceni přehodnotit některé základní pojmy. Mělo by to být doprovázeno i společnou diskusí v rámci třídy.

Kontrast mezi taxikářskou a euklidovskou geometrií tak může žákům pomoci lépe porozumět některým pojmům euklidovské geometrie tím, že aktivně porovnají rozdíly a společné rysy. Toto srovnání posílí navíc jejich celkové chápání geometrie a ukáže, že existuje více než jeden typ geometrického systému. Nám zase poslouží jako skvělý diagnostický nástroj při odhalování skutečného porozumění a případných žákovských miskonceptů.

7.3 Navržené aktivity

7.3.1 Taxizemě

Taxizemě je fiktivní svět, který je skoro stejný, jako ten náš. Body jsou stejné, přímky zůstávají přímkami, úhly se měří stejným způsobem. Ale přeci je v něm něco odlišného. Pokud se totiž zeptáte místního obyvatele, jak daleko je od jeho domu do práce, nebude měřit vzdálenost v přímce (obr. 7.3).



Obrázek 7.3: Taxizemě a měření vzdálenosti.

Namísto měření přímé trasy nejprve změří vzdálenost na sever nebo na jih, poté na východ nebo na západ a poté sčítá tato dvě čísla dohromady. Nepoužívá totiž naši euklidovskou metriku, používá jiný geometrický systém známý jako taxikářská metrika. Abychom nebyli v Taxizemi ihned úplně ztraceni, půjdeme se nejdříve na skok podívat do nedaleké Barcelony a a navštívíme její slavnou čtvrť Eixample.

7.3.2 Barcelona: Přechod do světa kontrastu

Eixample (obr. 7.4) je jedním z nejpůsobivějších příkladů urbanistického plánování, navrženého Ildefonsem Cerdou (1815-1876). Vyniká totiž svým fascinujícím mřížovým vzorem ulic. Pokud by dnes slavný Euklides žil, pravděpodobně by začal pochybovat o tom, že „nejkratší cesta je vždy ta přímá".

Obrázek 7.4: Slavná čtvrť Example v Barceloně
Zdroj: `https://miro.medium.com`

Úloha 1

Nad čtvrti Eixample v místě *A* se vznáší holub Euklides. Jaká je jeho vzdušná vzdálenost od místa *B* (obr. 7.5)?

Obrázek 7.5: Holub Euklides nad čtvrti Eixample.
Úloha 1

Úloha 2

Nyní se již nacházíme přímo v ulicích Eixample a na mapě je znázorněno několik možných cest místního taxikáře z místa A do místa B (obr. 7.6).

Obrázek 7.6: Trasy taxikáře v ulicích Eixample.
Úloha 2

a) Která z cest je nejkratší?

b) Kterou trasu z těch nejkratších by si zvolil pravděpodobně místní řidič taxíku za normálního provozu?

c) Dokážete najít ještě kratší cestu?

d) Zakreslete na mapě okrsek, ve kterém se nachází všechny možné nejkratší cesty taxikáře z místa A do místa B.

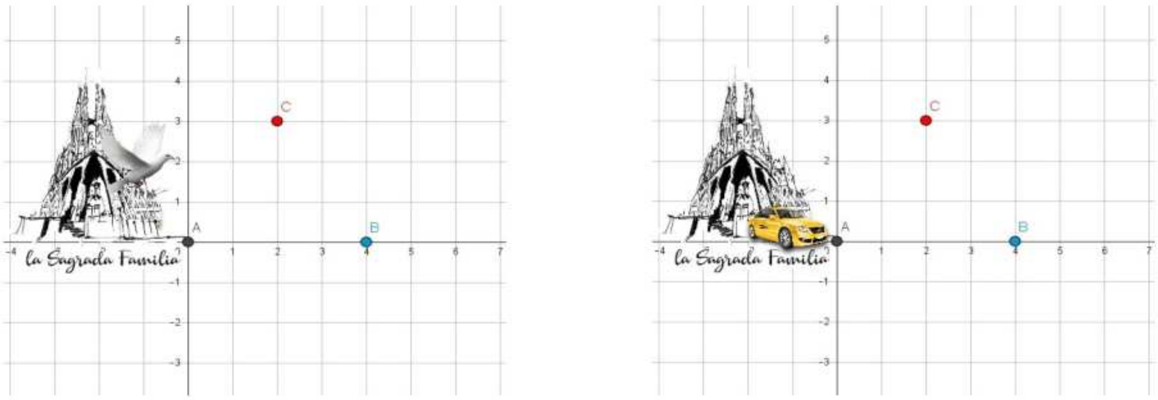
Úloha 3

Čtvrť Eixample jsme nyní zakreslili do kartézské soustavy souřadnic s katedrálou Sagrada Familia v $A[0,0]$, bodem $B[4,0]$ a bodem $C[3,3]$ (obr. 7.7).

a) Na věžičce katedrály zde sedí holub Euklides. Který z bodů B nebo C je pro něj nejblíž?

b) Který z bodů B a C je blíž pro nás, pokud si u katedrály vezmeme taxík?

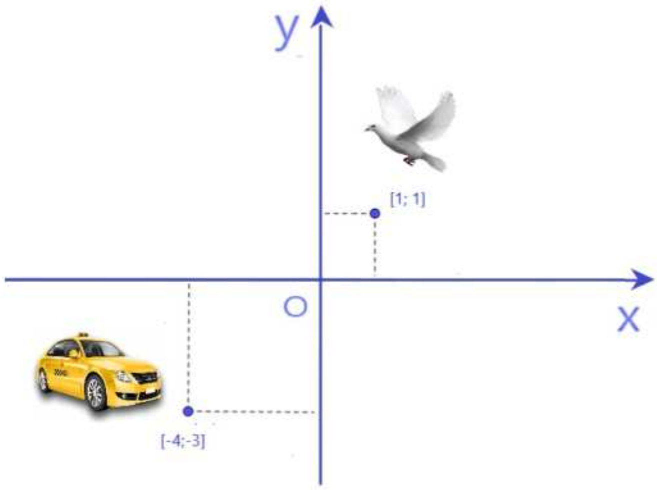
c) Pokus se vysvětlit, kdy se taxikářské a euklidovské vzdálenosti dvou bodů rovnají.



Obrázek 7.7: Cesta od katedrály pro holuba Euklida a pro taxikáře.
Úloha 3

Úloha 4

S použitím závěrů předchozích úloh se pokus zakreslit a vypočítat vzdálenost jak pro let holuba Euklida k taxikáři, tak pro jízdu taxíkaře k holubovi Euklidovi (obr. 7.8).



Obrázek 7.8: Holub k taxikáři a naopak.
Úloha 4

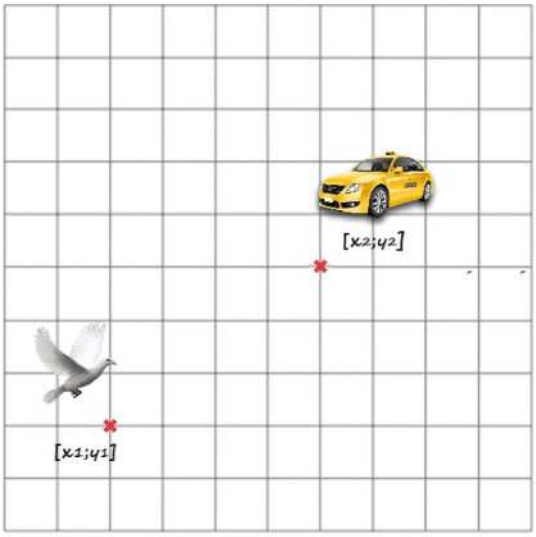
.

Úloha 5

Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$ v euklidovské geometrii lze vypočítat jako $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, v taxikářské geometrii pak pomoci vztahu $|PQ| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

a) Svými slovy shrň, jak jsou tyto vzorce znázorněny v přiložené čtvercové síti (obr. 7.9).

b) Vysvětli, proč je do vzorce taxikářské vzdálenosti nutné zahrnout i uvedené absolutní hodnoty?

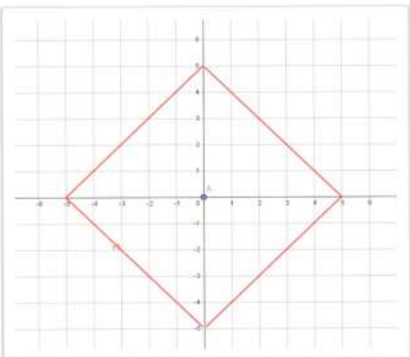


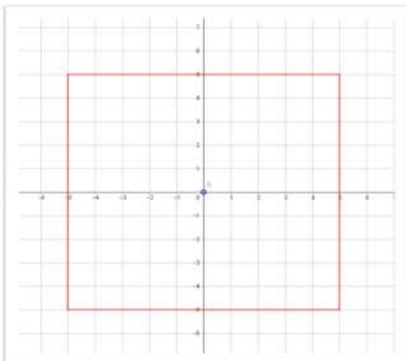
Obrázek 7.9: Holub letí k taxikáři a naopak
Úloha 5.

7.3.3 Taxizemští dva písaři.

Úloha 1/T

Vítejte v Taxizemi. V tomto zvláštním světě žili jednou dva písaři. Už je tomu dobrých pár let. Jeden z nich se jmenoval Bartoloměj Buvár, druhý Cyril Petyše. Sám Bůh ví, jakými cestami prozřetelnosti bylo zařízeno, aby se ti dva spolu setkali jednoho letního večera na malé lavičce v městském parku. Leč, stalo se! Zde, uprostřed zelené oázy ve tvaru kružnice o poloměru pěti taxizemských jednotek, začalo vznikat jedno velké přátelství.





Obrázek 7.10: Kruhový park v Taxizemi (Úloha 1/T).

a) Jak zní definice pojmu kružnice?

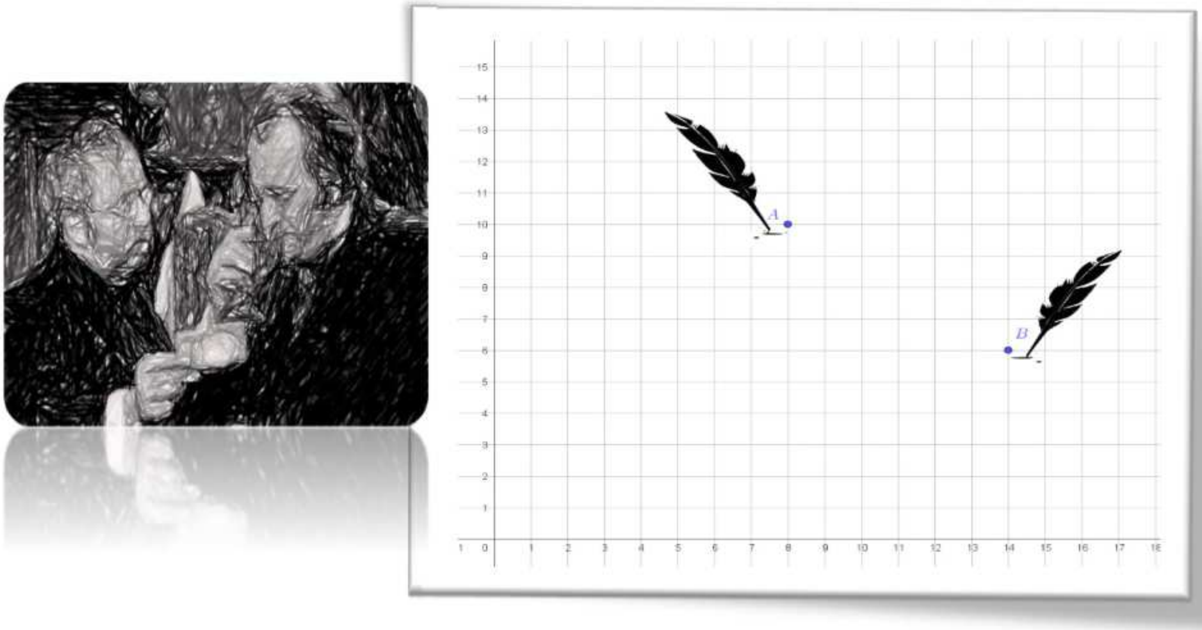
b) Který z poskytnutých nákresů by mohl vyhovovat plánu zahrady, na které se potkali Buvár s Petyšem (obr. 7.10)? Vysvětli.

Pedagogický cíl: Úloha 1/T

Cílem této aktivity je, aby si žáci začali uvědomovat, že změna způsobu měření vzdálenosti bude mít v Taxizemi obrovské důsledky pro tvary a vlastnosti dobře známých geometrických obrazců. Práce s touto geometrií tak vyžaduje pečlivou pozornost definicím. Oba obrázky představují v euklidovské geometrii čtverec, v taxikářské geometrii však levý obrázek odkazuje na zmíňovanou taxikářskou kružnici, jelikož je to opravdu množina všech bodů, jejichž vzdálenost je od daného středu ($A[0,0]$) pět jednotek. Skládá se tak ze všech bodů $X[x,y]$ takových, že $|x| + |y| = 5$. Výsledkem řešení rovnice jsou pak čtyři úsečky, které leží na přímkách $y = \pm x + 5$ a $y = \pm x - 5$.

Úloha 2/T

Jejich řeč od prvního okamžiku plynula jako voda, anekdoty se střídaly s historkami a filozofickými úvahami. Když navíc zjistili, že jsou oba písaři, úžasem zvedli ruce a málem se objali. Pomluvili, co se dalo – jednotvárnost jejich kancelářské práce, kolegy, obchod, divadlo, správu silnic a lidský rod vůbec. Byli jeden druhým natolik fascinováni, že když už se chystali odejít, nenašli k tomu sílu a zase si sedli. Blížil se však soumrak. Začali se loučit a podávat si ruce, když v tom Buvár řekl: „A co kdybychom spolu povečeřeli?" „Mě to taky napadlo!" zvolal Petyše. „Ale netroufal jsem si vám to navrhnout." Odešli tak do malé hospůdky na náměstí před radnicí, kde prý se dobře vaří. U večeře následovala medicínská diskuse a poté horlili pro nejrůznější vědecké obory. Co věcí je k poznávání! Co výzkumu! Jen kdyby na to byl čas. Když zjistili, kolik toho mají společného, napadla je v této euforii taková spásná myšlenka. Co se přestěhovat do společného bytu, kde by se mohli po práci společně potkávat a oddávat své velké vášni: vědeckému bádání. Začali proto diskutovat nad tím, kde takový byt hledat. Buvár přišel s nápadem, že by měl být situován tak, aby to oba měli do práce stejně daleko a potkávali se proto doma ve stejný čas. Petyše vytáhl z kapsy mapu, kam vše pečlivě vyznačil .



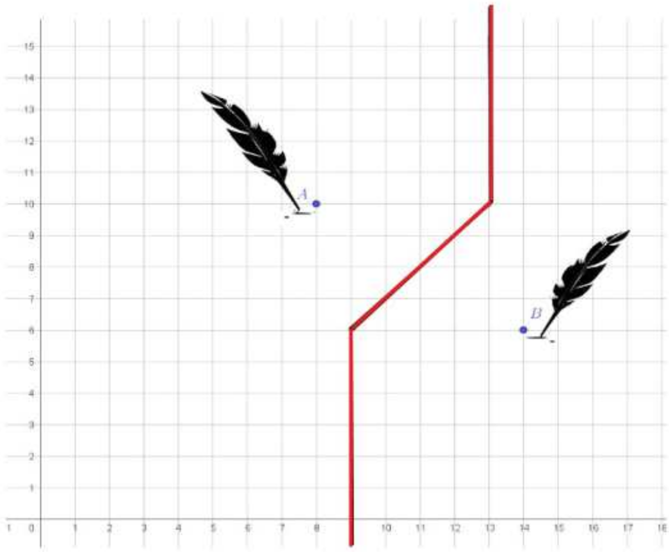
Obrázek 7.11: Do práce stejně daleko (Úloha 2/T).

a) Jak tento problém Petyše nakonec do mapy zakreslil (obr. 7.11)?

b) Jak bys pojmenoval tuto množinu bodů?

Pedagogický cíl: Úloha 2/T

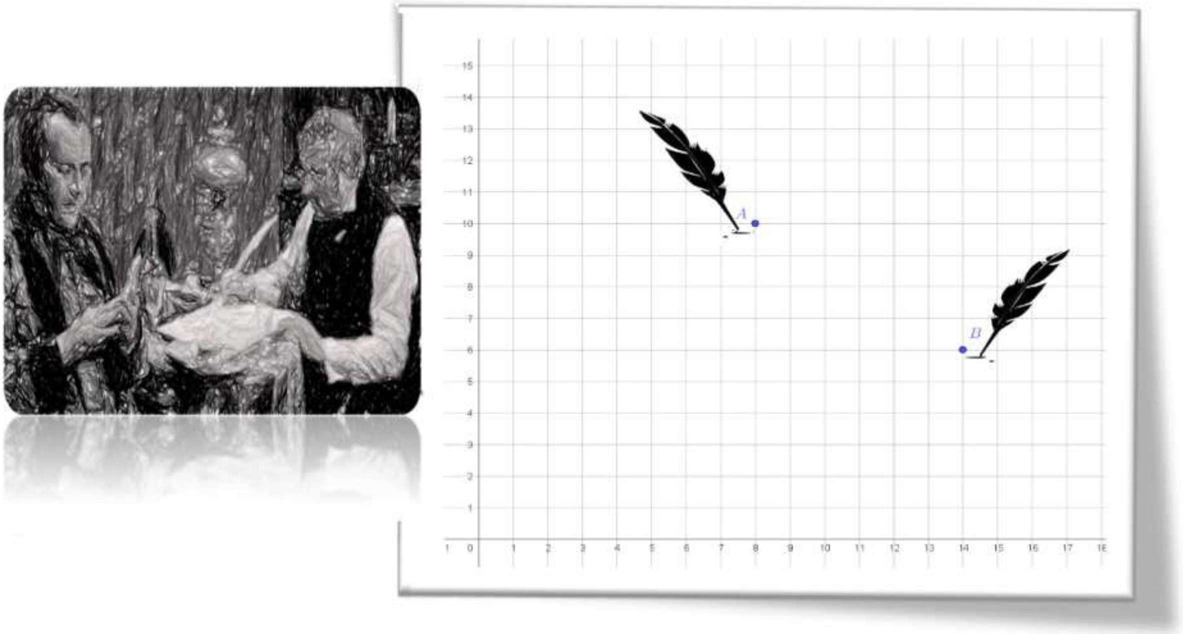
Cílem této aktivity je, aby se žáci pokusili najít množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různých bodů $A[8, 10]$ *a* $B[14, 6]$. *Tuto množinu by měli znát důvěrně z euklidovské geometrie pod pojmem osy úsečky AB. V ideálním případě zde nakonec uvidí útvar, který se podstatně liší od jejich stávající představy tohoto pojmu, kterou mají zažitou z euklidovské geometrie.*



Úloha 3/T

Když dojedli, vzal Buvár svého přítele ještě do blízké kavárny. Jako starý bohém zde začal ihned obhlížet svůj „terén“. Petyše však zde byl poněkud nesvůj a začal si okamžitě stěžovat Buvárovi na přehnaný luxus tohoto podniku. Ten ho však příliš nevnímal. Aby tak trochu zakryl svou nervozitu, vytáhl z kapsy mapu a upřeně do ní hleděl. Po chvíli sám pro sebe tichým hlasem pronesl: „Pokud opravdu chceme našemu vědeckému bádání věnovat potřebné množství času, bude navíc nutné, aby naše cesty do práce byly co nejkratší.“ „Čeho, prosím?“, dotázal se Buvár, kterého to vyrušilo od koketování s dámou u protějšího stolu. Petyše zopakoval svá slova a zakreslil tento svůj postřeh do mapy. Vše přitom Buvárovi důkladně zvýraznil ulomeným kouskem žluté pastelky, kterou našel v kapse. Buvár poklepal svého nového kamaráda po rameni a ocenil jeho geniální nápad.

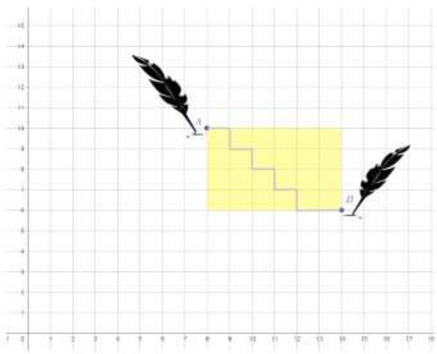
- Jak tuto podmínku Petyše nakonec do mapy zvýraznil (obr. 7.12)?



Obrázek 7.12: Cesty do práce musí být nejkratší (Úloha 3/T).

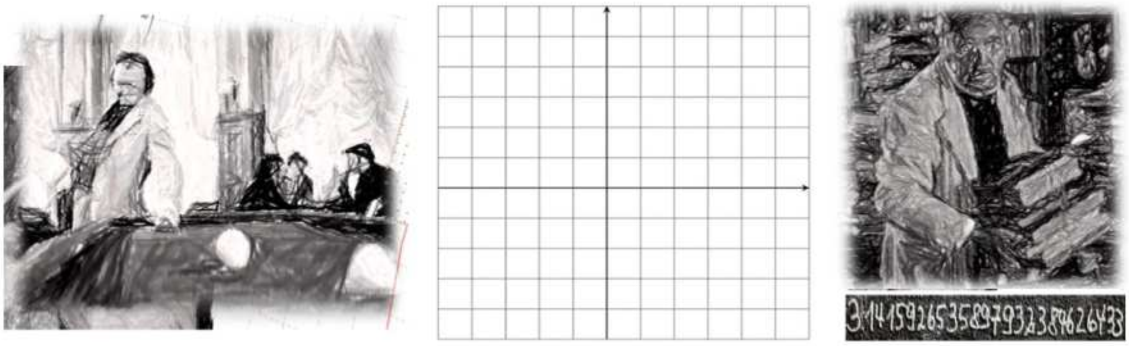
Pedagogický cíl: Úloha 3/T

Cílém této aktivity je, aby si žáci uvědomili, že nejkratší cesta zde v Taxizemi nemusí být jediná. Od bodu $A = [8, 10]$ *k bodu* $B = [14, 6]$ *je zde potřeba vykonat například tento pohyb:* $\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow$. *Pokud bychom přeházeli pořadí těchto šipek, cesta se změní, nicméně stále povede z bodu A do bodu B a bude mít stejnou délku. Žáci by nakonec měli dojit ke zjištění, že všechny tyto cesty budou ohraničené žlutě znázorněným obdélníkem. Množinou všech nejkratších cest je takzvaný AB−box.*



Úloha 4/T

Po kávě se rozhodl Buvár ukázat Petyšemu své kulečníkové umění. Bohužel, koule mu neustále padaly, kutálely se mezi nohama hostů a mizely kdesi daleko. Číšník pokaždé klekl, lezl pro ně po čtyřech, nakonec ale nevydržel a začal nadávat. Petyše se s ním pustil do hádky. Mezitím přišel majitel kavárny. Petyše však ani nevyslyšel jeho omluvy a okamžitě si začal stěžovat na kvalitu obsluhy a vůbec celého podniku. Situaci se pokusil zachránit nakonec Buvár a navrhl svému příteli, aby tento mimořádný večer zakončili raději u něj doma.



Obrázek 7.13: Jak je to teda s π (Úloha 4/T)?

Jakmile dorazili na místo, Buvár okamžitě svého vzácného hosta bytem provedl. Uprostřed obývací místnosti byl velký psací stůl z jedlového dřeva a všude kolem-na poličkách, na třech židlích, na starém křesle i v rozích, bez ladu a skladu-kupily se svazky knih, většinou encyklopedií. Vrstva prachu je pokrývala jako sametový šátek. Petyše pomohl svému příteli přenést knihy z židlí na zem, aby se oba měli kam posadit. Lehce tímto výkonem znaven přitom nechtěně upustil jednu z nich na zem. Když ji začal zvedat, upoutala ho na otevřené stránce ihned první věta. Nahlas ji začal Buvárovi číst: „V Euklidzemi dokonce ani v dnešní době stále nedospěli k přesné hodnotě π“. Buvár zvědavě zareagoval: „Jak je tohle vůbec možný?“ Petyše, stále ponořený do čtení, odpověděl: „To bude asi nějaká blbost, pane Buváre. Píší zde, že jednoduše to prý není možné – jde totiž o iracionální číslo a jeho hodnota je přibližně $3,14$“. Buvár podrážděně vytrhl Petyšemu knihu z ruky a hodil ji do kamen. „Blbost kvete na každém rohu a navíc už i v knihách. Každé školní dítě přece zná přesnou hodnotu π,“ dodal na závěr. S výrazem mistra sommeliéra a s nečekanou elegancí pak otevřel láhev vína, aby náležitě pohostil svého vzácného hosta. Dopřávali si jednu skleničku za druhou a dlouze u nich filozofovali o životě – o frivolitě, haštěřivosti a umíněnosti žen, jak je vlastně lépe žít bez nich, a nakonec o svých snech, hlavně o důchodu stráveném na venkově. Ve vinném opojení se nakonec vydali k spánku.

a) Zakresli do přiloženého obrázku taxizemskou kružnici se středem $S[1;2]$ a poloměrem 4 jednotky (obr. 7.13).

b) Pomocí této kružnice ověř hodnotu π v Taxizemi.

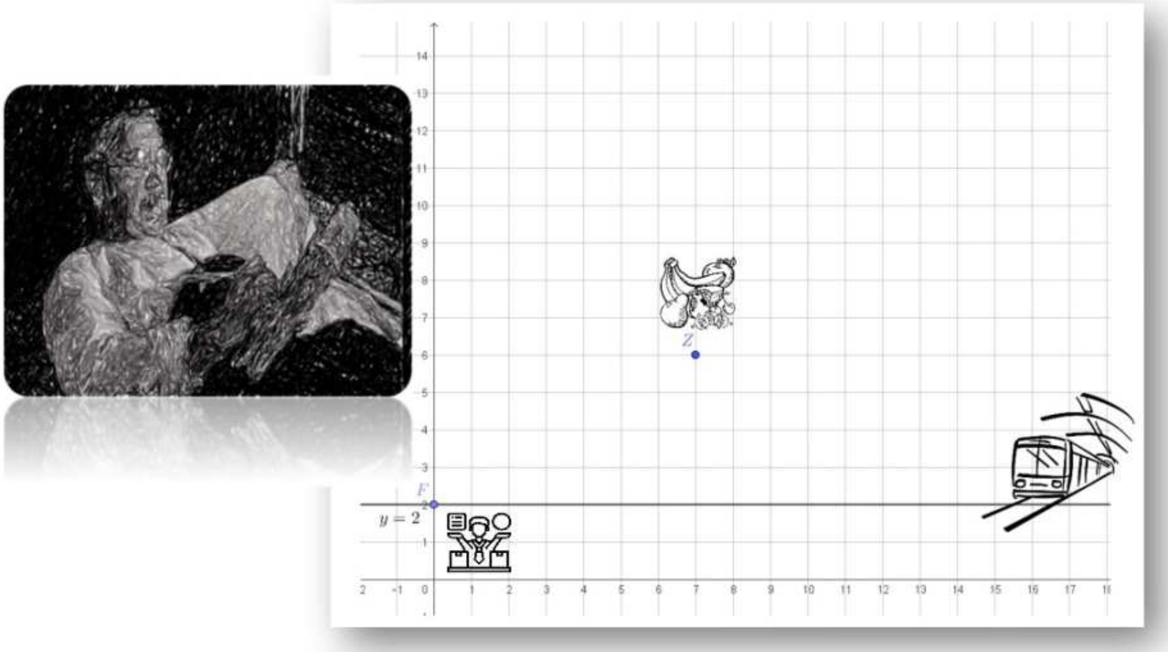
c) Měl Buvár důvod se opravdu zlobit? Jak se projevila jeho neznalost?

Pedagogický cíl: Úloha 4/T

Cílem této aktivity je, aby i zde žáci vycházeli z definice, konkrétně z definice konstanty π, která je „numerickou hodnotou poměru obvodu kružnice k jejímu průměru“. To již naznačuje, že v rámci jiné metriky se tato hodnota může lišit. V ideálním případě by zde oproti jejich stávající představě tohoto pojmu měli žáci zjistit, že konstanta π může mít taky hodnotu 4.

Úloha 5/T

Ráno po probuzení Buvár náhle vyhrkl: „Jak to uděláme s jídlem?“ Petyše mu okamžitě začal vysvětlovat, že k Fašónovi ($F = [0;2]$), místnímu hokynáři, vede linka starého metra L ($y = 2$). Navíc, že je možné nakupovat na zeleninovém trhu ($Z[7;6]$). Vytáhl z kapsy mapu a ukázal na ní Buvárovi, že by bylo úplně nejlepší se zaměřit na takový byt, aby cesta od něj k nejbližší stanici metra L i na trh byla stejně dlouhá. Důkladně přitom tento požadavek zaznamenal do mapy, kterou si k tomuto účelu podložil knihou. „No, původně jsem svou otázkou myslel, jak to uděláme s jídlem tady a teď, začínám mít hlad. Ale oceňuji vaše zapálení, milý příteli," odvětil Buvár.

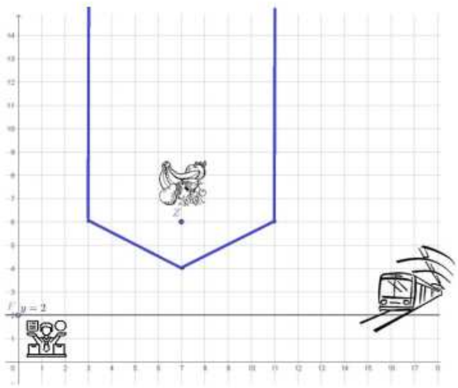


Obrázek 7.14: Hokynář, trh a metro (Úloha 5/T).

- Jak tentokráte danou podmínku Petyše do mapy znázornil (obr. 7.14)?
- Jak se jmenuje tato množina bodů?

Pedagogický cíl: Úloha 5/T

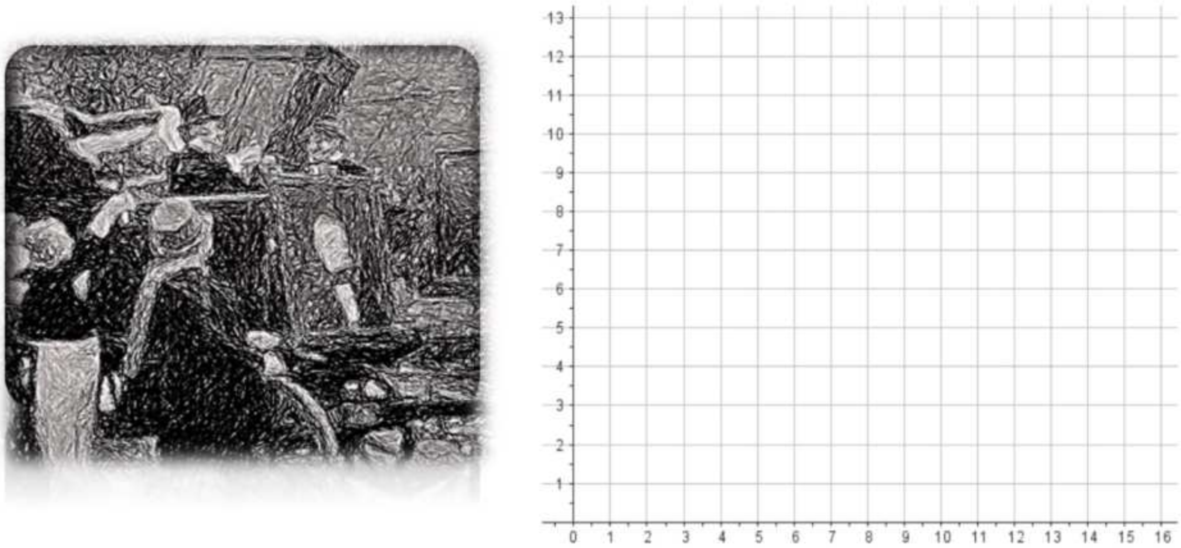
Cílem této aktivity je, aby žáci identifikovali množinu všech bodů, které mají od dané přímky (řídící přímky) a daného bodu mimo tuto přímku (ohniska) stejnou vzdálenost. Tato množina je podle definice parabola, avšak v kontextu Taxizemě má poněkud odlišný tvar a vlastnosti. Jak jsme již navíc uvedli, tvar této paraboly se může měnit v závislosti na sklonu řídící přímky.



Úloha 6/T

Před návštěvou vyhlédnuté lokality se oba přátelé nejprve zastavili na snídani v nedaleké restauraci. Petyše byl zpočátku bez chuti k jídlu, protože ho přemáhala obrovská nervozita ohledně dostupnosti bytu ve vysněné čtvrti. Naopak Buvár si vychutnával každou minutu, hlasitě pomlaskával a s radostí vyprávěl spoustu pikantních příběhů, které Petyšeho postupně rozesmávaly natolik, že zapomněl na veškeré své chmury a pustil se také do hodování.

Po jídle se okamžitě vydali na cílové místo. Zadařilo se! Našli tam jeden krásný a prostorný byt k dispozici. Oba byli nadšení a během několika dní se sem i odstěhovali. Strávili zde pak společně několik krásných posledních měsíců před odchodem do důchodu.



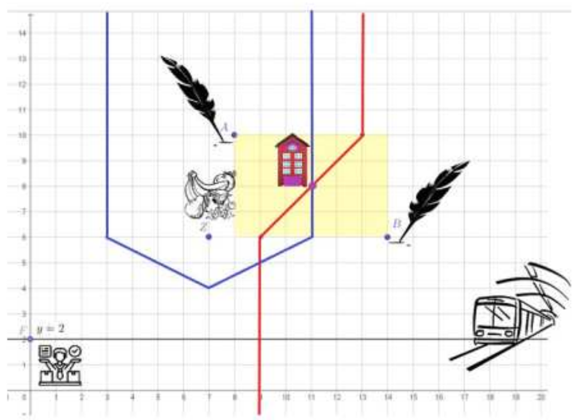
Obrázek 7.15: Lokalita nového domova (Úloha 6/T).

a) Zakresli všechny předchozí situace do jednoho obrázku (obr. 7.15).

b) Vyznač místo, kde Petyše a Buvár nakonec našli své vysněné bydlení.

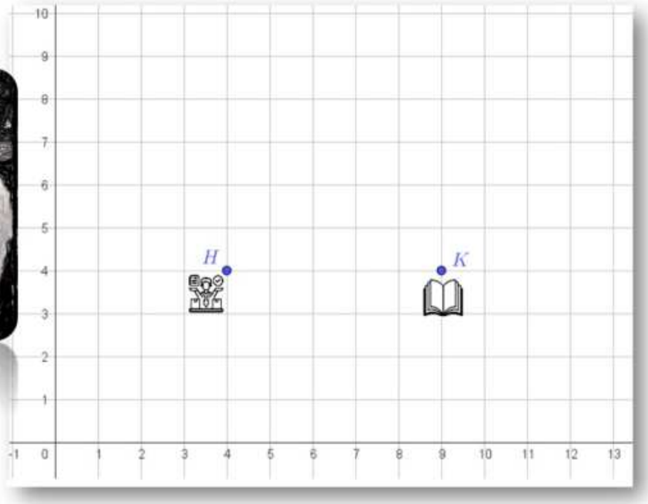
Pedagogický cíl: Úloha 6/T

Cílem této aktivity je, aby žáci do jednoho obrázku zakreslili všechny výsledné množiny, znovu tím reflektovali jejich současnou podobu v Taxizemi a nakonec našli jejich společný bod.



Úloha 7/T

Jednoho dne přišel Buvárovi dopis. Jeho otec si na smrtelné loži vzpomněl na svého nemanželského syna a odkázal mu velkolepou částku: 250000 taxifranků. Buvár se ani na okamžik nerozmýšlel a rozhodl se zakoupit pro sebe a svého přítele statek v Šaviňol, aby se tam mohli plně oddávat vědám. Brzy tak společně navštívili realitního makléře. Ten se na ně snažil okamžitě zapůsobit: „Tři dny jsem kvůli vám nejedl. Dlouho jsem přemýšlel, čím bych vás uspokojil. Říkal jsem si, že by to mělo být něco zvláštního, něco jiného, než co prodáváme místním zbohatlíkům. Našel jsem nakonec pro vás toto.“ Poté podal oběma pánům prospekty dvou statků v Šaviňol a nechal jim několik dní na rozhodnutí. Buvár a Petyše celou cestu od makléře mlčeli, až doma se Buvár rozhovořil. „Na ty prospekty pozor, pane Petyše, to je podvod. Ono je to barevný, ono se vám to líbí, pak tam přijdete a ono je to úplně šedivý. Nejlépe bude si to prohlédnout osobně!“. V tu chvíli však zjistili, že cestou domů nejspíš vytratili papírek s přesnými adresami obou míst. „Vzpomínám si, že makléř říkal, že vzdálenost od statku ke knihovně a od



Obrázek 7.16: Hledání statku v Šaviňov (Úloha 7/T).

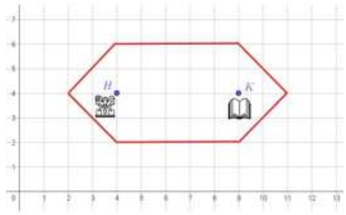
statku k hokynáři je celkem 9 taxijednotek“, konstatoval Petyše a zakreslil Buvárovi v plánku, kde ty dva statky v Šaviňol asi hledat.

a) Jak tuto situaci Petyše do mapy zakreslil (obr. 7.16)?

b) Jak se jmenuje tato množina bodů?

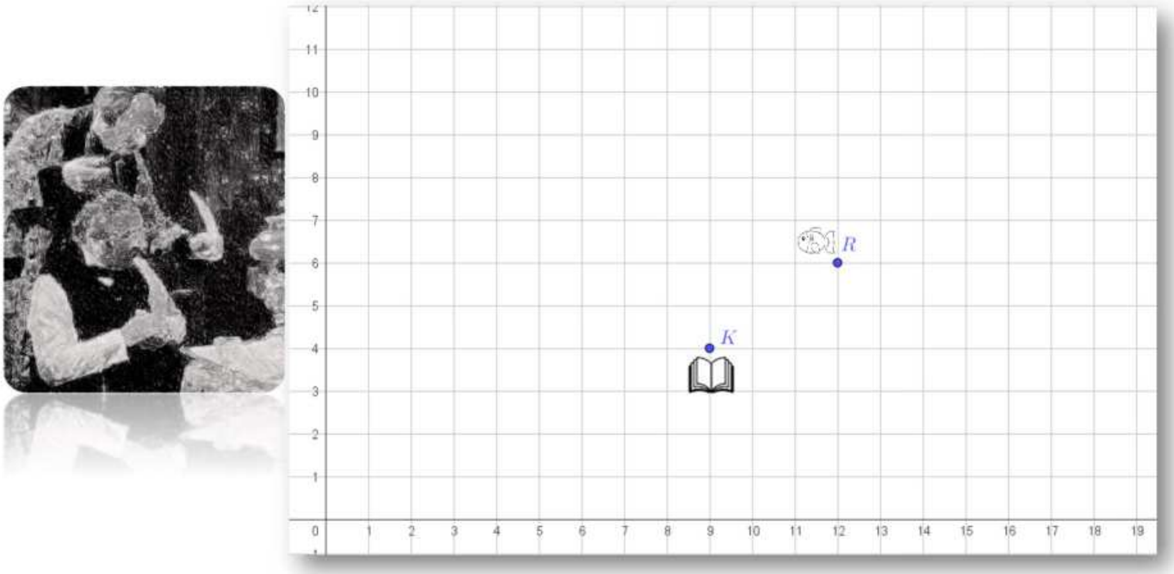
Pedagogický cíl: Úloha 7/T

Cílem této aktivity je, aby žáci identifikovali množinu všech bodů v rovině, které mají stálý součet vzdáleností 9 jednotek od dvou daných bodů (ohnisek) a aby si uvědomili, že v rámci definice je touto množinou elipsa. Ta má ovšem v Taxizemi poněkud jinou podobu než tu, na kterou byli doposud zvyklí.



Úloha 8/T

„Pokud já k tomu teda také mohu něco poznamenat, pane Petyše, tak si vybavuji, že makléř pronesl něco o tom, že vzdálenosti obou cest do knihovny a k rybímu trhu se liší o 3 taxijednotky.“ „Takže když se na to podívám více vědecky, pane Buváre, říkáte tím v podstatě, že absolutní hodnota rozdílu těchto vzdáleností je 3,“ dodal zamyšleně Petyše a začal hledat v kapse svou barevnou pastelku, aby i Buvárův postřeh do plánku zakreslil.



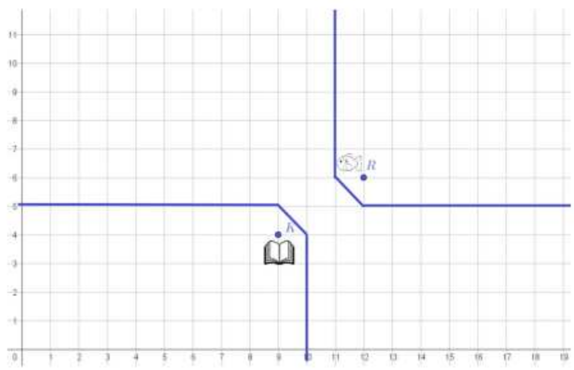
Obrázek 7.17: Hledání statku v Šaviňol (Úloha 8/T).

a) Jak tuto situaci Petyše v mapě vyznačil?

b) Jak se jmenuje tato množina bodů?

Pedagogický cíl: Úloha 8/T

Cílem této aktivity je, aby žáci identifikovali množinu všech bodů v rovině, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdálenosti od dvou daných bodů (ohnisek) je rovna třem jednotkám. Měli by si uvědomit, že podle definice tato množina odpovídá hyperbole, která má však v Taxizemi odlišnou podobu než v euklidovské geometrii, se kterou byli doposud obeznámeni.

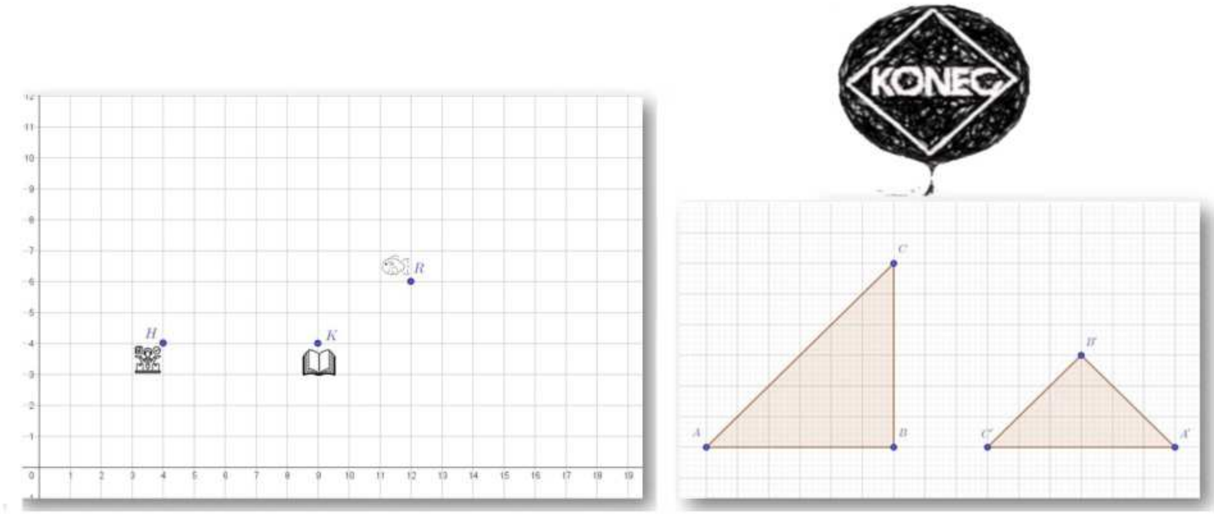


Úloha 9/T

Když pak jejich postřehy společně zakreslili do mapy Šaviňol, získali právě dvě místa, kde se oba statky nacházely. Druhý den tam proto ihned vyrazili, aby si tak na vlastní oči prohlédli to, co zatím viděli jen z prospektů realitního makléře. A pro co se nakonec rozhodli? Věříte, že už sám nevím. A ono to asi ani není důležité. Každopádně se zde uzavřel životní kruh, nebo čtverec chcete-li, dvou podivínských staříků. Jejich diletantské pokusy pěstovat melouny, konzervovat jídlo nebo rozbít atom končily obvykle naprostou katastrofou. Rozhádali se postupně snad se všemi sousedy, při studiu geometrie například s místním učitelem, se kterým vedli spor o platnosti věty sus v Taxizemi. Staříci přesto nepolevují a žijí životem, po jakém vždy toužili.

a) Zakresli obě množiny do jednoho obrázku a vyznač místa obou statků (obr. 7.18).

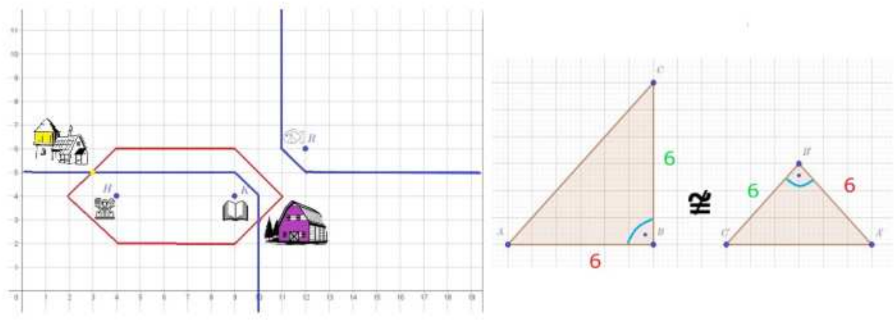
b) Platí věta sus o shodnosti trojúhelníků i v Taxizemi? Využij k vysvětlení přiložený obrázek dvou trojúhelníků.



Obrázek 7.18: Konec i s větou sus (Úloha 9/T).

Pedagogický cíl: Úloha 9

Cílem této aktivity je, aby žáci do jednoho obrázku zakreslili obě výsledné množiny, znovu tím reflektovali jejich podoby a našli nakonec i jejich společné body. Měli by si pak v rámci přiloženého obrázku dvou trojúhelníku uvědomit, že jeden axiom v této geometrii neplatí, a to axiom sus o shodnosti trojúhelníků.



7.4 Zjištění

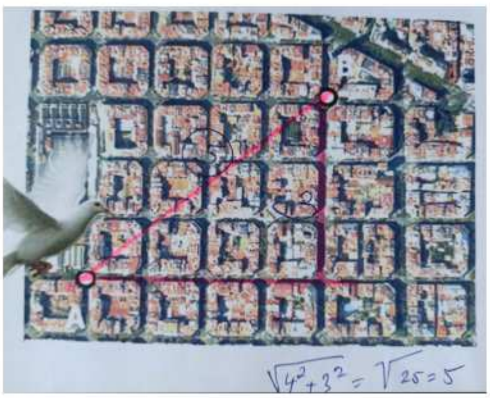
Po krátké historické vsuvce začala hodina úvodním úkolem. „Zaznamenejte vše, co vám přijde na mysl, když se řekne kružnice.“ Ačkoliv všichni začali kreslit poměrně přesnou geometrickou reprezentaci tohoto útvaru, nikdo ve třídě nebyl schopný poskytnout úplnou a přesnou definici. Většina z žáku uváděla spíše svůj osobní popis. Velká část z nich tak charakterizovala kružnici pomocí tvaru „kulatý“. V rámci společné diskuse jsem na tuto jejich osobní definici reagoval tím, že parabola je také zakřivená a svým způsobem taky „kulatá“, takže tento popis není dostatečně jednoznačný. Jeden z žáků tak přidal podmínku, že kružnice je ale uzavřená. Zde jsem pak položil doplňující otázku, jakým způsobem by pak rozlišili mezi elipsou a kružnicí, které jsou obě uzavřené a „kulaté“. Ve třídě v tu chvíli zavládlo ticho a bylo možné jen pozorovat, jak se někteří s mírnou frustrací mají nutkání ve vzduchu prstem kreslit kružnici, aby ukázali tvar, který je jim vlastně samozřejmý. Nakonec se to podařilo Pavlovi, který se svými vlastními slovy přiblížil k formální definici. Zkrátili jsme ji nakonec společně na „množinu bodů ve stejné vzdálenosti od daného bodu“.

I když všichni žáci měli osvojenou euklidovskou geometrií, nikdo z nich však neměl žádné předchozí zkušenosti, ba dokonce ani povědomí o těch neeuklidovských. I když je euklidovská geometrie ve škole tradičně vyučována, přídavné jméno „euklidovská“ bývá samotnými učiteli zřídka kdy používáno k jejímu popisu. Když jsem se tak třídy dotázal, jakou geometrii ve škole tedy studovali, zaslechl jsem odpovědi ve stylu „obyčejnou geometrii“, „vždyť geometrie je jen jedna“, nebo „analytickou“.

Prvním krokem před zavítáním do samotné Taxizemě tak bylo žákům nejdříve přiblížit, co se skrývá pod pojmem taxikářská vzdálenost a jaké jsou rozdíly mezi touto novou geometrií a tou, se kterou již byli obeznámeni v rámci svého dosavadního studia. Po malé odbočce do samotné historie a několika poznámek o vzniku taxikářské geometrie byla realizována první část aktivit, která se skládala z 5 cvičení. Po jejich absolvování následovala serie 9 úloh fiktivní Taxizemě.

7.4.1 Úloha 1

Cílem této úlohy bylo, aby žáci rozpoznali tradiční euklidovskou vzdálenost. Zadání zahrnovalo mapu se dvěma body A a B, mezi nimiž měli vyznačit nejkratší cestu pro holuba. Poté měli tuto vzdálenost také vypočítat. Výpočet pomocí Pythagorovy věty jim nedělal téměř žádné problémy, bylo však nutné společně si upřesnit, že vzdálenost zde budeme počítat na jednotlivé městské bloky.



Obrázek 7.19: Ukázka výpočtu euklidovské vzdálenosti s použitím Pythagorovy věty.

7.4.2 Úloha 2

Cílem této aktivity bylo žákům představit nový pohled na měření vzdálenosti. Řidič taxíku nemůže projíždět skrz domy, proto pro něj tradiční euklidovská geometrie není vhodná. Musí zvolit jinou cestu, odlišnou od té, kterou v první úloze zvolil holub Euklides. Žáci tak byli postupně uvedeni do světa jiné geometrie, kde byli povzbuzováni k aplikaci něčeho, s čím jsou již dávno obeznámeni – městské geografie a cest, které denně používají. Bylo zajímavé sledovat jejich reakce, protože pravděpodobně netušili, že něco tak běžného by mohlo mít jakékoliv hlubší uplatnění.

Před sebou měli několik možných tras taxíku, který vyjíždí z bodu A vyzvednout zákazníka do bodu B. Okamžitě se dostali do role taxikáře, který se může pohybovat pouze po vymezených ulicích. Všichni tak úspěšně odpověděli na otázku a určili všechny nejkratší trasy – zelenou, žlutou a červenou. Na otázku *b*), zda dokážou najít ještě kratší cestu, Adam odpověděl: „Kratší už nejde, protože ty dvě místa jsou od sebe tři vodorovné a čtyři svislé ulice a přes ty se ten taxikář musí dostat vždy.“ Magda to popsala následovně: „Je to logické, protože abychom se posunuli na výšku bodu B, musíme jet sem a pak … přejet rovně [využívala červenou trasu] … takže to vždy bude součet těchto vzdáleností.“ Dodala, že každá nejkratší vzdálenost bude vždy stejně dlouhá jako cesta po obvodu. Jinými slovy, obě tyto výpovědi, že k výpočtu vzdálenosti od počátku k libovolnému bodu je nutné najít hodnotu rozdílu v $x-$souřadnicích a přidat ji k hodnotě rozdílu v $y-$souřadnicích, jasně dokazují, že tito žáci byli schopní zvnitřnit svou akční představu o této vzdálenosti do procesu a vysvětlit, jak ji vypočítat obecně, aniž by museli tyto akce skutečně provádět.

Obrázek 7.20: Ukázka výpočtu taxikářské vzdálenosti a zakreslení AB-boxu.

V úloze *d*) prakticky všichni buďto zvýraznili, vyšrafovali, nebo perem naznačili oblast obdélníkového tvaru, jehož protilehlé vrcholy jsou body A a B. Adam nakonec podal vysvětlení svými slovy: „Taxikář musí držet přímý směr a udržovat ho v rámci těch svých čtyř svislých a tří vodorovných bloků ulic, aby si zbytečně nezajížděl … jinak by se musel třeba takhle vracet (ukazuje na situaci na modré trase).“

Eliška však po krátkém okamžiku reagovala: „Proč je to tedy stejné?“. Pavel jí odpověděl: „Je přece jedno, kudy pojedeš, všechno to vyjde stejně …, pokud teda nepojedeš zbytečně dál. Musíš se vlastně pořád jen přibližovat k tomu místu [má na mysli bod B]“. Tím naznačil, že i on chápe, že všechny efektivní trasy taxikáře v obdélníku mezi stanovištěm A a místem vyzvednutí B jsou stejně dlouhé. „Je potřeba, aby se taxikář posunul vždy o stejný počet dílků nahoru a stejný počet dílků doprava, protože v těch ulicích přece nejde cestovat šikmo,“ dodal navíc. Adam to doplnil komentářem: „Jen když budeš pořád udržovat směr k bodu B podél vymezených ulic, dojedeš k němu tou nejkratší cestou. Aby ses pak zbytečně nevracela, musíš být pořád v tom obdélníku ..., podívej se jinak na tu modrou cestu“. Adam tak zde podal Elišce svým způsobem jisté zobecnění na všechny nejkratší trasy. Eliška nakonec s pochopením přikývla: „Už chápu, to dává smysl“. Tyto výpovědi ukazují, že žáci získali postupně povědomí o tom, že efektivní trasa taxikáře je ta nejkratší a že může existovat více než jedna nejkratší trasa.

Většina třídy se shodla, že červená trasa po obvodu bude pravděpodobně pro taxikáře nejpříjemnější, protože „se skládá z nejmenšího počtu zatáček“, jak popsal Adam. Pavel to komentoval s mírnou nadsázkou, že záleží na kvalitě cesty a na možných uzavírkách. Žáci si v této chvíli mohli pravděpodobně i uvědomovat, že trasa taxikáře po obvodu bude pro ně také nejvhodnější pro výpočet vzdálenosti všech nejkratších cest.

Vzájemná diskuse byla v těchto okamžicích klíčová a podpořila jejich hlubší porozumění. Představovala hlavní okamžik, kdy žáci prozkoumávali povahu tohoto prostoru a budovali si základní myšlenky nezbytné k řešení následujících úloh. Společně si například uvědomili, jaké jsou základní objekty taxikářské geometrie (body, úsečky, cesty) a získali základní povědomí o tomto světě (že může existovat více než jedna nejkratší cesta). Povšimli si také rozdílů mezi euklidovskou a taxikářskou geometrií (jak se měří vzdálenost). To se nejvíce projevilo v okamžiku, kdy Pavel Elišce vysvětlil, že v dané situaci nelze cestovat „šikmo“. Svými slovy tak poukázal na zásadní rozdíl mezi metrikou euklidovské geometrie a metrikou taxikářské geometrie.

V závěru této aktivity mě napadlo položit žákům ještě dodatečnou otázku, která nebyla součástí původního zadání: „Kolik existuje všech nejkratších možných cest taxikáře mezi body A a B?“

Mia se pustila do úlohy tak, že nejprve kreslila různé trasy, ale později se pokusila najít systematický přístup k řešení a možnému zobecnění. Po chvíli však působila poněkud rezignovaně a komentovala to slovy: „Jakmile se posunu dál od počátku, tak je to už poměrně složité, protože musím vždy přidávat všechny ty cesty, které jsem zjistila dříve“ Mia si pracovně po-

Obrázek 7.21: Ukázka zakreslené nmožiny nejkratších cest a strategie při hledání počtu nejkratších cest.

psala pár mřížových bodů čísly a postupně se posouvala o jednotku, evidovala však všechny předchozí cesty a snažila se je použít k získání celkového počtu tras. Pokoušela se vypozorovat nějaký rekurzivní vztah v závislosti na poloze daného bodu. To se jí moc nedařilo, prokázala tím však alespoň své objektové chápání taxikářské vzdálenosti, protože na ty své získané byla schopna aplikovat akci. Tou byla transformace vstupních vzdáleností na výstup nějaké mentální funkce.

(a) Objev Pascalova trojúhelníku.

(b) Klasifikace cest pomocí symbolů.

Obrázek 7.22: Ukázka dvou žákovských strategií při hledání celkového počtu nejkratších cest.

Adam mezitím nahlas prohlásil: „To budou nejaké permutace nebo kombinace … něco podobného už jsme kdysi myslím delali". Tím pravděpodobně navázal spojení mezi touto aktivitou a předchozími zkušenostmi z hodin kombinatoriky. Toto prohlášení pravděpodobně ovlivnilo Pavla, který po chvíli představil svou myšlenku (obr. 7.22a). V ohraničené oblasti nejkratších cest měl vyznačené některé diagonální řádky a vysvětlil, že každý z těchto řádků obsahuje mřížové body, ke kterým vedou trasy stejné délky. Ukázal na diagonální řádek s doplněnými čísly 1, 2, 1 u jednotlivých mřížových bodů a dodal, že každé číslo označuje křižovatku, ke které vede daný počet cest. Dále vysvětlil, že číslo 2 na řádku signalizuje, že „každý bod v tomto řádku má nejkratší trasu délky dvě jednotky". Když pak obrátil tento diagram, okamžitě upozornil, že se jedná o Pascalův trojúhelník.

Na otázku, jak by zdůvodnil, že se jedná opravdu o Pascalův trojúhelník, poukázal na druhý řádek, kde měl již v rámci svého zkoumání na úrovni akce zapsány počty cest a pomoci něj začal automaticky doplňovat řádek další, a to na základě pravidla pro sčítání v Pascalově trojúhelníku. Popisoval to současně těmito slovy: „Mohu sem (mřížový bod) dojet z těchto předchozích křižovatek, z jedné pohybem doprava a z druhé pohybem nahoru … ke každé je pak vždy už jen jedna cesta se sem dostat." Pavel tak své pozorování zobecnil do dvou různých směrů:

- Odkazoval na úhlopříčné řádky AB-boxu jako na řádky čísel v Pascalově trojúhelníku;
- poznamenal, že nejkratší cesty k těmto mřížovým bodům mají sice stejnou délku, ale počty cest k nim se mohou lišit.

Adam mezitím pracoval na jiné strategii (obr. 7.22b). Ukázal na konkrétní mřížový bod v daném okrsku efektivních cest taxikáře a popsal to následovně: : „Sem se dostanu odtud (má na mysli bod A) buď posunutím o jednotku na sever a pak o jednotku na východ, nebo naopak," a ukázal přtitom na popisky SV a VS s tím, že k tomuto místu proto vedou dvě cesty. Pak ukázal na další bod v daném okrsku a dodal: „ . . . a sem se dostanu přes jeden dílek na sever a dva na východ (SVV), nebo jeden na východ, pak na sever a nakonec zase na východ (VSV) . . . nakonec už myslím zbývá poslední možnost, a to dva dílky na východ a jeden na sever (VVS). Tedy jsou to tři různé cesty, ale vždy se dostanu sem [poukázal na daný mřížový bod na mapě]". Nakonec dodal, že „do bodu B to budou celkem tři pohyby na sever a čtyři na východ ($SSSVVVV$)". Adamova strategie ukázala, jak lze systematicky analyzovat a klasifikovat nejkratší cesty v taxikářské geometrii. Tento přístup nejenže usnadňuje identifikovat konkrétní trasy, ale také naznačuje možnost zobecnění pro nalezení všech nejkratších cest v kterékoliv situaci. S konečným vyřešením měl však Adam problém. „ Nevím, jestli to jsou permutace nebo kombinace, jsme to kdysi ale dělali . . . ty kombinatorické věci s opakováním". V danou chvíli tak nebyl schopný si vzpomenout na konkrétní vzorec. Zeptal jsem se proto všech, kolika způsoby by mohli vybrat v kině ze sedmi sedaček tři sedačky pro rodinu Svobodových, abychom na zbylé z nich posadili rodinu Vránových, přičemž je nám jedno, jak se pak v rámci své rodiny rozsadí. Po poskytnutí této izomorfní úlohy zareagoval Pavel, že „jsou to obyčejné kombinace". Adam, který se původně snažil v paměti vylovit nějaký ten vzorec pro permutaci s opakováním, tak nakonec úlohu zdárně dopočítal. Tato situace ilustruje, že pouhé mechanické memorování často vede k tomu, že žák může daný vzorec snadno zapomenout. Bez hlubšího porozumění se tato znalost stává pouze dočasnou a málo efektivní.

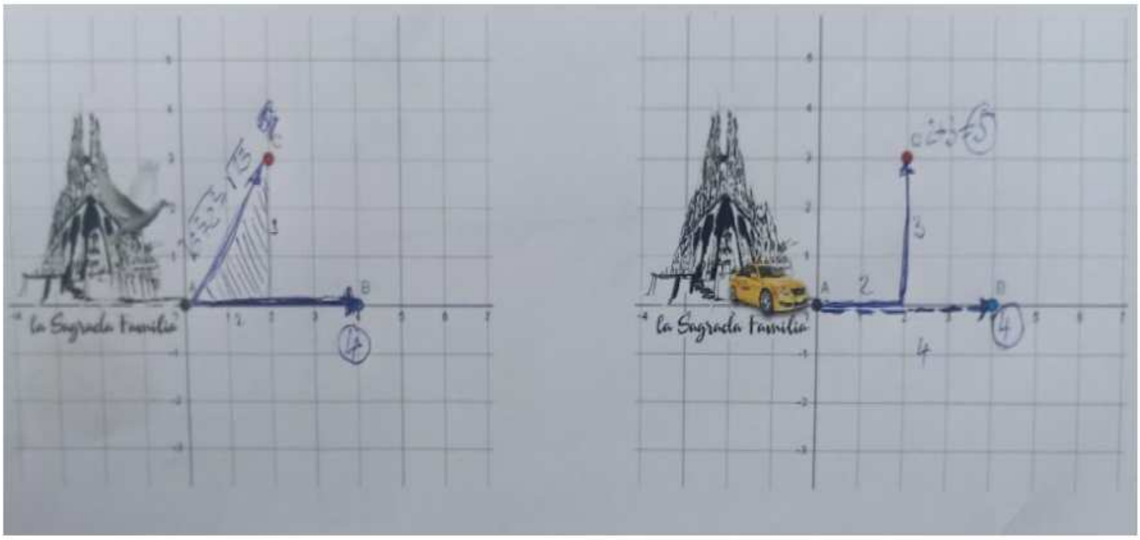
Bylo však zde fascinující sledovat, jak se žáci sami od sebe snažili nalézt obecné řešení daného problému. Zdá se, že si dobře uvědomovali, že najít takové řešení je snazší než počítat jednotlivé nejkratší trasy mezi každou dvojicí koncových bodů. Tento proces zobecňování ukazuje, že nalezení obecného řešení usnadňuje odpovědi na konkrétní otázky v rámci daného problému.

7.4.3 Úloha 3

V rámci této aktivity byla žákům představena kartézská soustava souřadnic s body $A[0, 0]$, $B[4, 0]$ a $C[2, 3]$. .

Pokud jde o otázky *a*), *b*), téměř všichni žáci snadno našli jak euklidovskou, tak i taxikářskou vzdálenost mezi požadovanými body a tyto vzdálenosti vhodně zvýraznili. U prvního obrázku proto většina žáků okamžitě vypočítala délku trasy holuba k místu C pomocí Pythagorovy věty. Zjistili, že vzdálenost od A k C je $\sqrt{13}$ a vzdálenost od A k B je 4. Protože $\sqrt{13}$ je menší než $4 = \sqrt{16}$, dokázali, že bod C je opravdu pro holuba blíže než bod B (obr. 7.23 vlevo).

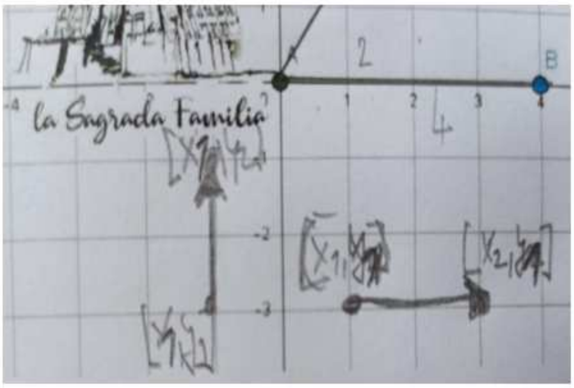
Z pozice taxikáře u druhého obrázku si již všichni uvědomovali svá nová pravidla. Nenechali se proto zmást intuitivním pocitem, že C je blíže k bodu A než bod B a věděli, že vzdálenost je v tomto případě daná počtem městských bloků, které absolvuje tento taxikář během své jízdy po nejkratší trase. Vypočítali proto správně, že vzdálenost od A k B je sice i nadále 4, ale jízda taxíkem z A do C nyní vyžaduje 5 bloků (obr. 7.23 vpravo). Adam to komentoval slovy,



Obrázek 7.23: Ukázka řešení při určování nejkratších cest v euklidovské a taxikářské geometrii.

že „pokud nás nebude chtít ten taxikář natáhnout, musí s námi jet dohromady vždy jen 2 bloky na východ a 3 bloky na sever“.

Na otázku *d*) se pak žáci snažili poskytnout odpověd v kontextu své geometrické reprezentace. Pavel tak zakreslil dvě různé situace, kdy oba body byly situovány na rovnoběžce s osou x nebo y (obr. 7.24). Na dotaz, jak se tato skutečnost projeví na souřadnicích obou bodů, po chvíli uvedl, že „jejich první nebo druhá souřadnice musí být stejná“.

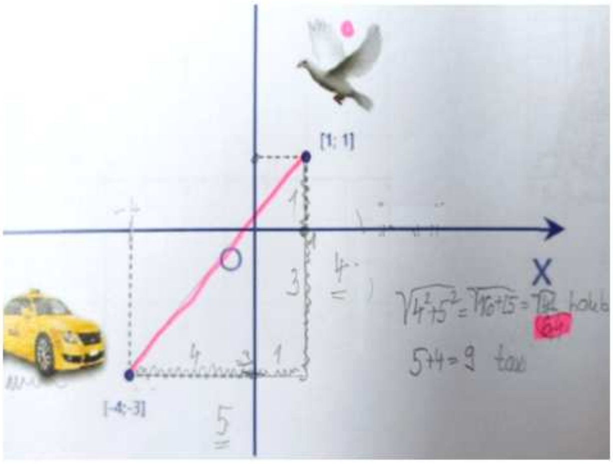


Obrázek 7.24: Ukázka žákovského řešení při porovnávání taxikářské a euklidovské vzdálenosti.

Adam pak podal své vysvětlení v kontextu taxikáře a holuba. „Aby byly pro oba tyto vzdálenosti stejné, tak ten taxikář musí být schopen sledovat toho holuba, proto holub musí letět jen rovně danou ulicí“. Oba tak podali důkaz, každý svým způsobem, o objektovém chápání vzdálenosti pro libovolné dva body v rovině, jelikož na tomto objektu byli schopni provádět akci porovnávání mezi euklidovskou a taxikářskou geometrii.

7.4.4 Úloha 4

Přechod ze čtvercové sítě na „bílý papír“ zde žákům nepůsobil žádné obtíže. Bez problémů zakreslili požadovaný pravoúhlý trojúhelník, vypočítali délky jeho odvěsen a pomocí Pythagorovy věty určili i délku přepony. Z trojúhelníku nakonec vyčetli i potřebné informace pro odpověď na zadanou otázku obr. 7.25.

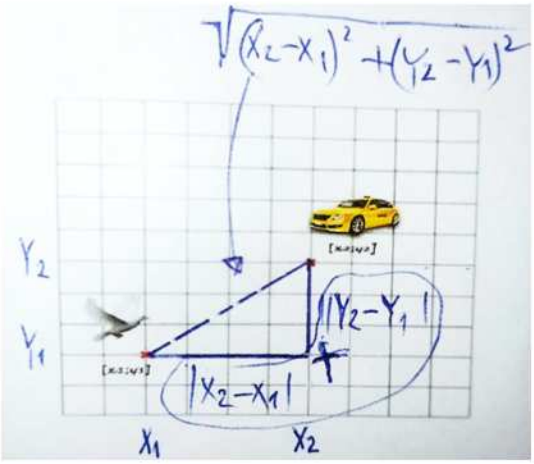


Obrázek 7.25: Ukázka žákovského řešení při koordinaci algebraické a geometrické reprezentace euklidovské a taxikářské vzdálenosti.

7.4.5 Úloha 5

Na základě předchozí úlohy byly prakticky všichni schopni zakreslit potřebný pravoúhlý trojúhelník a graficky v něm znázornit jednotlivé části poskytnutých vzorců (obr. 7.26).

Mia popsala oba vzorce svými slovy: „V té taxikářské je nutné sčítat délky těch dvou kolmých stran v tom pravoúhlém trojúhelníku a v té klasické je nutné vypočítat tu nejdelší“.



Obrázek 7.26: Ukázka vysvětlení, kdy je euklidovská vzdálenost stejná jako taxikářská.

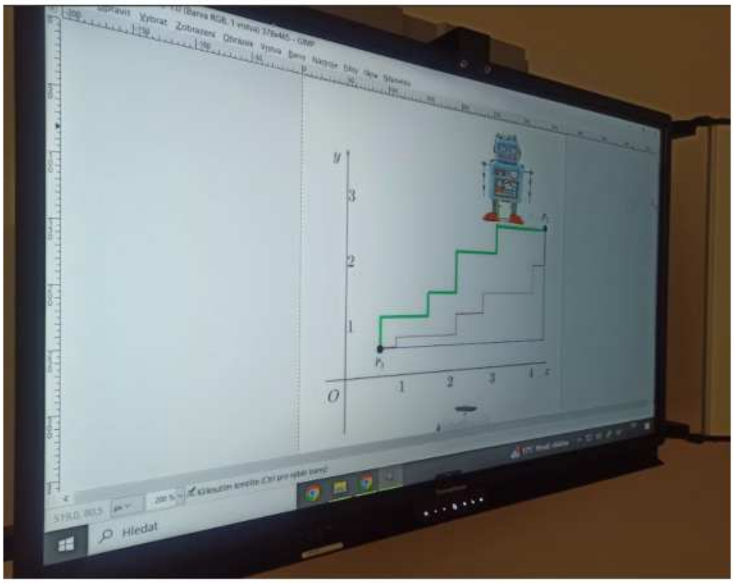
Adam pak reagoval na otázku o absolutní hodnotě slovy, že „rozdíl v těch souřadnicích by mohl vyjít také záporný, pokud bychom tam nedali ty absolutní hodnoty. Mělo by to být ale vždy kladné číslo“. Na dotaz, proč by to mělo být vždy kladné číslo a proč teda nejsou absolutní hodnoty ve vzorci pro vzdálenost v euklidovské geometrii pak Adam odpověděl: „... (v taxikářské) počítáme přece ty odvěsny ... v tom trojúhelníku ... a tady (v euklidovské) se počítá přepona pomocí Pythagorovy věty a tam je to stejně na druhou, to je tak i tak kladné číslo.“

Adam se snažil svými slovy vyjádřit tu skutečnost, že délka obou odvěsen musí být vždy nezáporná, a proto je nutné do vzorce pro taxikářskou vzdálenost zahrnout zmíněné absolutní hodnoty. Navíc zde podal důkaz o objektovém chápání již zobecněné vzdálenosti, protože ve své výpovědi zkoordinoval nejen algebraické a geometrické reprezentace euklidovské i taxikářské vzdálenosti, navíc byl schopen porovnávat obě vzdálenosti mezi sebou k vysvětlení toho, proč mu vlastně uvedená algebraická podoba taxikářské vzdálenosti dává smysl.

7.4.6 Shrnutí úvodních úloh 1-5

Při práci v taxikářské geometrií se žáci museli vypořádat s několika předpoklady, které nakonec všichni přijali prakticky bez problému. Těmito aktivitami tak dostali možnost měřit vzdálenost mezi dvěma body nejen v euklidovské geometrii, ale také v taxikářské geometrii, aniž by znali ihned její definici. Setkali se se zajímavým důsledkem, že v závislosti na způsobu měření vzdálenosti můžeme mít k dispozici pouze jednu trasu, ale také několik tras, které lze použít k tomuto měření. Na konci této fáze již mohl proběhnout zlom v ukotveném paradigmatu a přirozenou cestou si žáci mohli postupně uvědomovat, že vzdálenost mezi dvěma body nemusí být vždy měřena v přímce a že existují i jiné způsoby jejího určování. Proběhla tak nakonec rekapitulace, že způsob, který se k měření použije, závisí na konkrétních podmínkách daného problému, který je potřeba vyřešit, v našem případě zde závisel na fyzickém omezení, tudíž na povinnosti pohybovat se po vymezených ulicích.

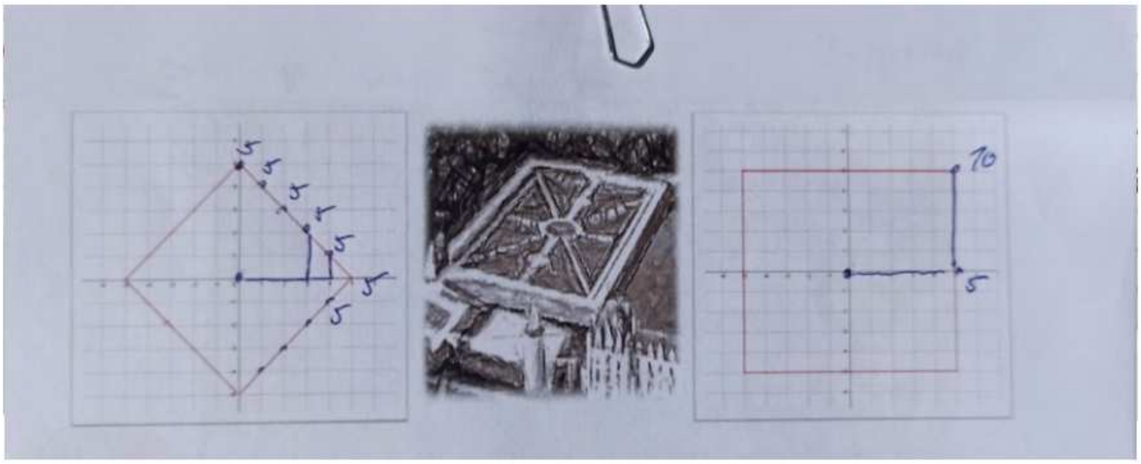
Ačkoli myšlenka taxikáře a budov dodávala problému půvabný fyzický kontext, bylo ještě potřeba společnou diskusi před návštěvou Taxizemě tento stav rozšířit z jeho přirozeně diskrétní podoby na spojitý model. Odstraněním budov, přesto ale zachováním stávajícího omezení, že taxikář může jet pouze ve směru osy x nebo y, nám bylo umožněno se od této chvíle pohybovat libovolný počet „bloků“ v oboru reálných čísel. Většina žáků tuto skutečnost přijala bez rozpaků, zbylým z nich pak pomohlo vizualizovat na tabuli tuto situaci pohybem robota, kterého lze ovládat jen ve čtyřech směrech (obr. 7.27).



Obrázek 7.27: Promítnutá vizualizace spojitého modelu taxikářské geometrie.

7.4.7 Úloha 1/T

U otázky a) si sice všichni vybavili definici kružnice z první hodiny, ale v rámci b) se u velké částí z nich projevil velmi silný vliv jejich figurálního omezení, že bez jakéhokoliv hlubšího zamyšlení začali poskytovat okamžitě odpovědi typu, že „žádný“, s odůvodněním, že se jedná o čtverce, nebo že se jedná o čtverec a kosočtverec. Pokusil jsem se je proto nasměrovat k tomu, aby se znovu podívali na svou odpověď v části a) a uvědomili si zde, že pokud má být některý z těchto obrázků plánem zahrady ve tvaru taxikářské kružnice, měl by přece splňovat tuto geometrickou definici. Mým cílem v tuto chvíli bylo, aby se obě jejich současně vyvolané představy



Obrázek 7.28: Ukázka při ověřování definice kružnice.

dostaly do vzájemného konfliktu. Postupně tak začali zakreslovat různé mřížové body, které leží na obou útvarech, a počítali jejich taxikářské vzdálenosti od středu. Někteří z nich si také zakreslili použité poloměry (obr. 7.28). Pavel pak nahlas prohlásil, že „to bude ten kosočtverec nalevo“, ale ostatní byli stále ponořeni do práce, kdy si do obrázku vyznačovali další mřížové body. O několik okamžiků později se k odpovědi Pavla rovněž přidali. Mia to například odůvodnila tím, že na pravém obrázku je bod $[5, 0]$ od středu vzdálen pět jednotek, zatímco bod $[5, 5]$ je od středu vzdálen deset jednotek, což vylučuje, že by čtverec umístěný „vodorovně“ mohl být taxikářskou kružnicí. Někteří žáci použili jiné body pro své vysvětlení, nicméně nakonec se všichni shodli na „kosočtverci“ nalevo.

Do diskuse vstoupil Pavel: „Vždyť jsou to oba čtverce!“ Vedlo to tak ve třídě ke krátké polemice o rozdílech mezi definici čtverce a kosočtverce. V určitý okamžik se však nesměle zeptala Mia: „Takže to teda není kružnice? … nebo já tomu asi nerozumím!“ Na to jí však Adam odpověděl: „Vždyť ty poloměry nalevo jsou všechny stejné, takže to je (kružnice).“ Adam si byl vědom, že daný útvar je skutečně kružnicí, protože odpovídá definici kružnice, zatímco Mia stále spojovala vizuální reprezentaci euklidovské kružnice s její osobní představou tohoto pojmu. Adam tak měl již správné představy o vzdálenosti, poloměru, středu a množině bodů a ty i vhodně zkoordinoval, což podal svým vysvětlením, že množina bodů na levém obrázku splňuje definici kružnice, zatímco Mia poskytla důkaz toho, že je stále ve stavu zvnitřňování některých z těchto pojmů, zejména pak množiny bodů, protože zde měl u ní stále silný vliv její mentální obraz „kulatosti“ kružnice získaný z euklidovské geometrie. Projevil se zde silný vliv figurálního omezení a byl to příklad prototypového fenoménu.

Povšiml jsem si úvodních záznamů Jonáše, který nezačal pracovat s geometrickou reprezentací, ale pokusil se v rámci geometrické definice o reprezentaci algebraickou. Napsal si správně rovnici s absolutními hodnotami $|x| + |y| = 5$, která popisovala hledanou množinu všech bodů ve vzdálenosti pěti taxikářských jednotek od středu. Tuto rovnici však nakonec nevyřešil a vydal se k odůvodnění cestou geometrickou. Byl to však alespoň důkaz úspěšné koordinace geometrické a algebraické reprezentace

Vyvodili jsme poté společně závěr, že i když jsou to v euklidovské geometrii oba čtverce, čtverec na levém obrázku odkazuje definici kružnice v taxikářské geometrii, ale čtverec na pravém obrázku odkazuje jen na čtverec v taxikářské geometrii.

V této úloze se tak ukázalo několik klíčových momentů. V kognitivních aktivitách se totiž vzájemně prolínají obrazy a pojmy a tato interakce může být jak kooperativní, tak konfliktní. Přirozený vývoj figurálních pojmů směrem k jejich ideální formě je složitý proces a tato situace mohla alespoň trochu podpořit u žáků integraci těchto konceptuálních a figurálních složek a pomoci jim lépe sjednotit mentální reprezentace matematických pojmů.

7.4.8 Úloha 2/T

V rámci této aktivity našla větší část žáků okamžitě střed $[1, 8]$ způsobem totožným s euklidovskou geometrií a ověřili jen, zda splňuje zadanou podmínku i v Taxizemi. Někteří se ale omezili pouze na tento jediný bod jako řešení, což naznačuje pochopení pojmu střed úsečky, avšak nedostatek porozumění ose úsečky jako množiny bodů.

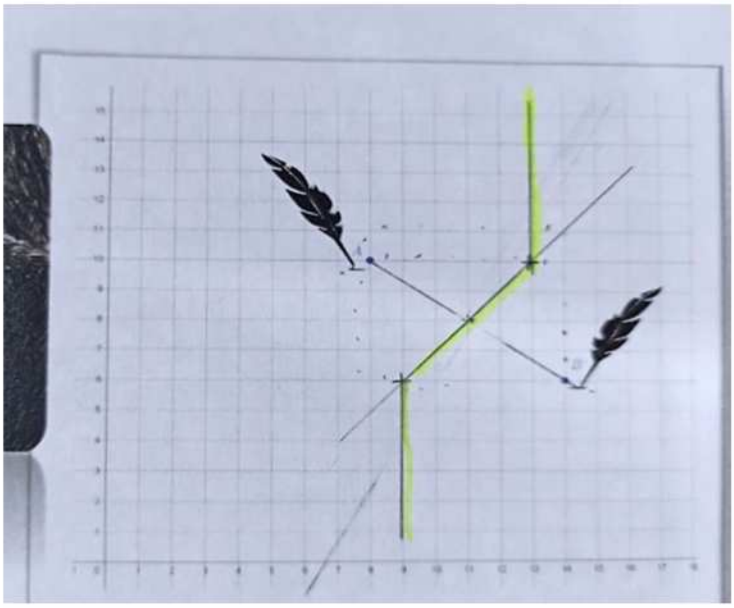
U těch žáků, kteří rozpoznali více možných řešení a prokázali pochopení pojmu osa úsečky, se však znovu projevila silná tendence figurálního omezení tohoto pojmu z euklidovské geometrie a dokončili proto zbytek úlohy tradiční euklidovskou cestou, navíc ne úplně přesně (obr. 7.29a). V euklidovské verzi tohoto problému by byl sice tento jejich způsob platný, zde ale vedl k chybnému řešení a jejich množina bodů v kontextu dané situace byla zcela nesprávná. Nechal jsem žákům ještě krátký čas na to, aby případně narazili na nějaký krizový moment. Nakonec jsem byl ale nucený je přimět k tomu, aby si ověřili, že bod $[9, 5]$ je sice správná poloha pro hledaný byt Buvára a Petyšeho, ale že bod $[7, 2]$ již požadovaným kritériím neodpovídá.

Mezistupněm, který v této chvíli byli schopni někteří žáci na úrovni mentální akce udělat, že kromě již nalezeného středu $[1, 8]$ našli postupně ještě body $[9, 6]$ a $[13, 10]$. Někteří metodou „pokus-omyl“, jiní využili dokresleného okrsku nejkratších tras taxikáře (obr. 7.29b). Připomněl jsem všem v tento okamžik zjištění Pavla v úvodní úloze 2) o vlastnostech úhlopříčných řádků v tomto okrsku. Proto těmito body okamžitě proložili přímku, celou ji však označili za výsledné řešení. Nesprávně tak zobecnili svá kritéria.

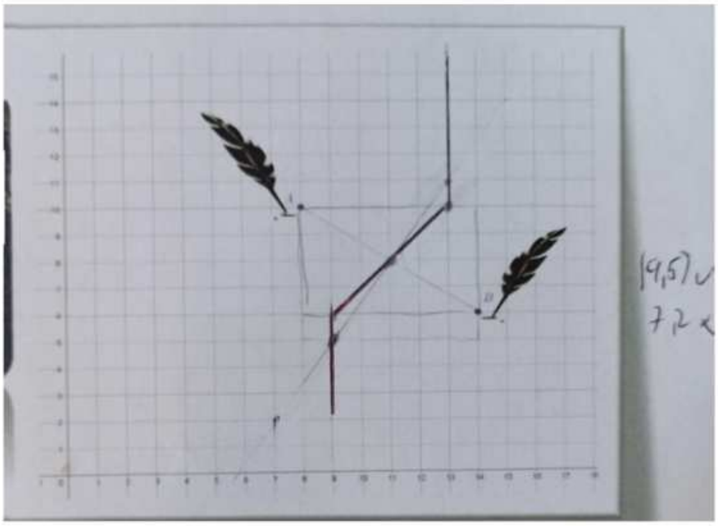
Po chvíli se však ozval Adam, který postřehl, že celá přímka to nebude, protože bod $[14, 11]$ daným podmínkám neodpovídá. Přišel však s jistým pozozováním: „Když pojede taxikář od bodu $[13, 10]$ rovně nahoru, z obou stran se mu vlastně bude už přičítat stejný kus cesty.“ Část žáků ihned nepochopila toto Adamovo zjištění. Potažmo však reaguje Pavel slovy: „Já to asi chápu. Když bych se tady (poukazuje na bod $[13, 10]$) jako taxikář posunul o dílek nahoru, tak se vzdálím od obou těch míst ... vlastně o ten jeden dílek, takže ty cesty budou z obou stran o ten dílek sice delší, ale stejně dlouhé ... Takže ty středy mohou pokračovat i zde.“ Pavel zde ve své výpovědi neozlišoval mezi pojmem střed úsečky a jakýmkoli jiným bodem na dané ose. V rámci diskuse došlo proto k upřesnění těchto dvou pojmů a ke zdůraznění té skutečnosti, že bod, který je ve stejné vzdálenosti od dvou pevných bodů, nemusí být nutně středem dané úsečky. Tento okamžik mohl žákům pomoci upravit jejich osobní představy o těchto pojmech s cílem vyhnout se v budoucnu případným nesprávným osobním definicím. Bylo patrné, že značná část žáků měla u výsledné množiny problém s pojmenováním *osa úsečky*, protože to podle nich není přímka. Tato úloha jim tak poskytla názornou ukázku toho, že je dobré se vyhnout osobním očekáváním o podobě daných množin, které zde v Taxizemi hledáme, a že by měli být vždy velmi ostražití při zobecňování, které je založené jen na malém množství zjištěných údajů. Narýsovat neuváženě přímku bez nutnosti zdůvodnění či ověření zde mohlo svést dokonce dvakrát jejich počátky správného řešení na nesprávnou kolej. Ukázalo se, že pokud je u žáků osobní představa pojmu silně spojena s vizuálními obrazy, mohou se zaměřovat jen na fyzické podoby objektů a přehlížet jejich matematické vlastnosti.

7.4.9 Úloha 3/T

Tato úloha se věnovala konstrukci množiny všech nejkratších cest mezi dvěma body. V rámci společné diskuse přišel Jonáš s tvrzením: „Pokud mají být obě cesty nejkratší, pak i celá musí



(**a**) Je zde patrná i původní (nepřesná) euklidovská osa úsečky.

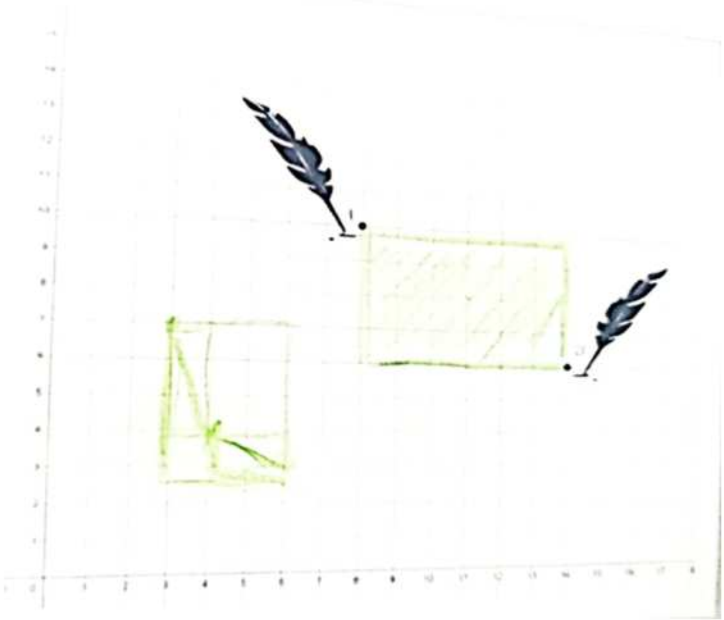


(**b**) Využití *AB*-boxu při dohledávání potřebných mřížových bodů.

Obrázek 7.29: Ukázka dvou žákovských řešení konstrukce osy úsečky.

být přece nejkratší.“ Tato podmínka opravdu zaručuje, že tato celková cesta je pak opravdu nejkratší. Vysvětlení podává takto: „Sčítám přece ty jednotlivé vzdálenosti vodorovných a svislých ulic...Pokud budou ty malé cesty nejkratší, tak bodou ty součty nakonec stejné jako u celé té dlouhé cesty.“ Svůj komentář doplňoval i náčrtkem. Projevil tím objektové chápání taxikářské vzdálenosti, protože na ní byl schopen provádět jednotlivé mentální akce (porovnávání a sčítání vzdáleností). Rovněž však i objektové chápání množiny nejkratších cest, protože byl schopen s těmito množinami jako s objekty ve svých představách manipulovat a provádět na nich akce.

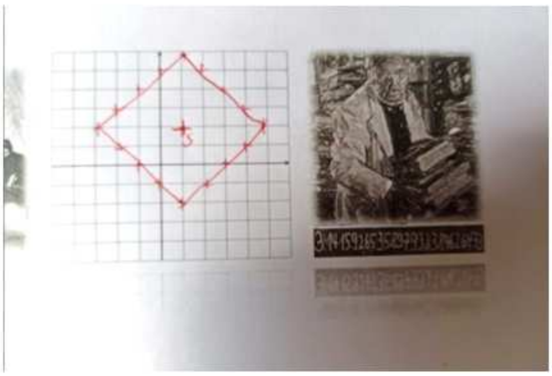
Tím pomohl přenést Jonáš celý problém do kontextu efektivních tras taxikáře, který žáci již dříve řešili. Všichni proto okamžitě zakreslili požadovaný obdélník.



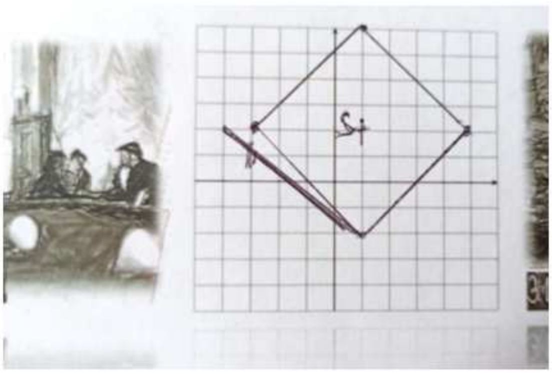
Obrázek 7.30: Vysvětlení žáka ke konstrukci $AB-$boxu (množiny nejkratších cest).

7.4.10 Úloha 4/T

V části a) prakticky všichni bez problému zakreslili danou taxikářskou kružnici (obr. 7.31). Pouze dva žáci k tomu stále potřebovali všechny mřížové body (akční úroveň), většina z nich si již dovedla pravděpodobně kružnici představit a zakreslit ji jen na základě několika vrcholů (procesní úroveň).



(a)



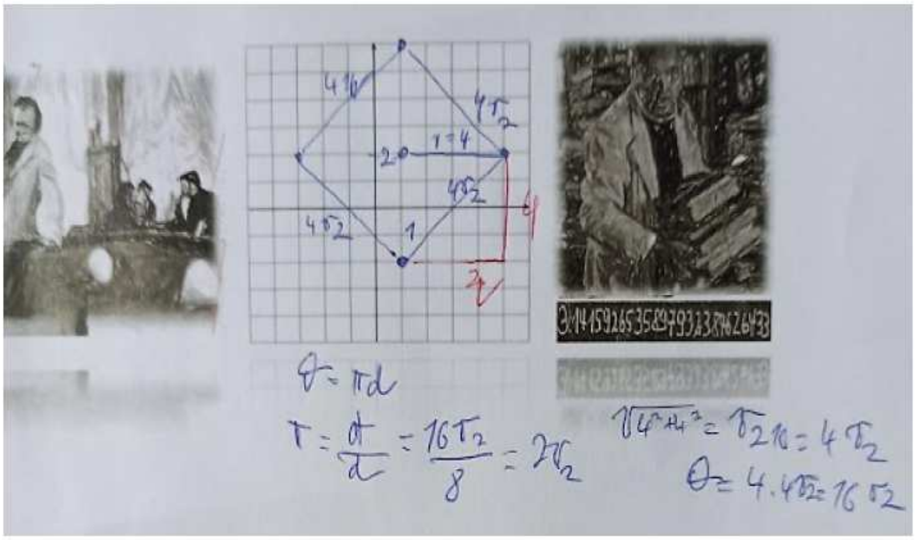
(b)

Obrázek 7.31: Ukázka dvou žákovských řešení konstrukce kružnice.

Část b) se pak týkala objevování hodnoty π v taxikářské geometrii. Položil jsem proto třídě otázku: „Jak můžeme vypočítat hodnotu π v euklidovské geometrii?"

Většina žáků odpověděla prakticky ve stejném duchu: „Je to poměr obvodu kruhu k jeho průměru". Odpověď Magdy pak byla tato: „Pokud je průměr kružnice d, její obvod je $\pi \cdot d$. Bez ohledu na to, jaké jsou obvody kružnic, jestli velmi velké nebo velmi malé, tak ten poměr obvodů k jejich průměrům bude vždy to π."

I když většina žáků přijala platnost této definice π i v Taxizemi, nikdo z nich ji nebyl nakonec schopen vhodně zkoordinovat se samotnou taxikářskou vzdáleností a tuto hodnotu správně určit. Pavel se sice pokoušel vypočítat její obvod pomocí délky strany, k potřebnému výpočtu



Obrázek 7.32: Ukázka dominantního vlivu euklidovské vzdálenosti při určování hodnoty π v Taxizemi.

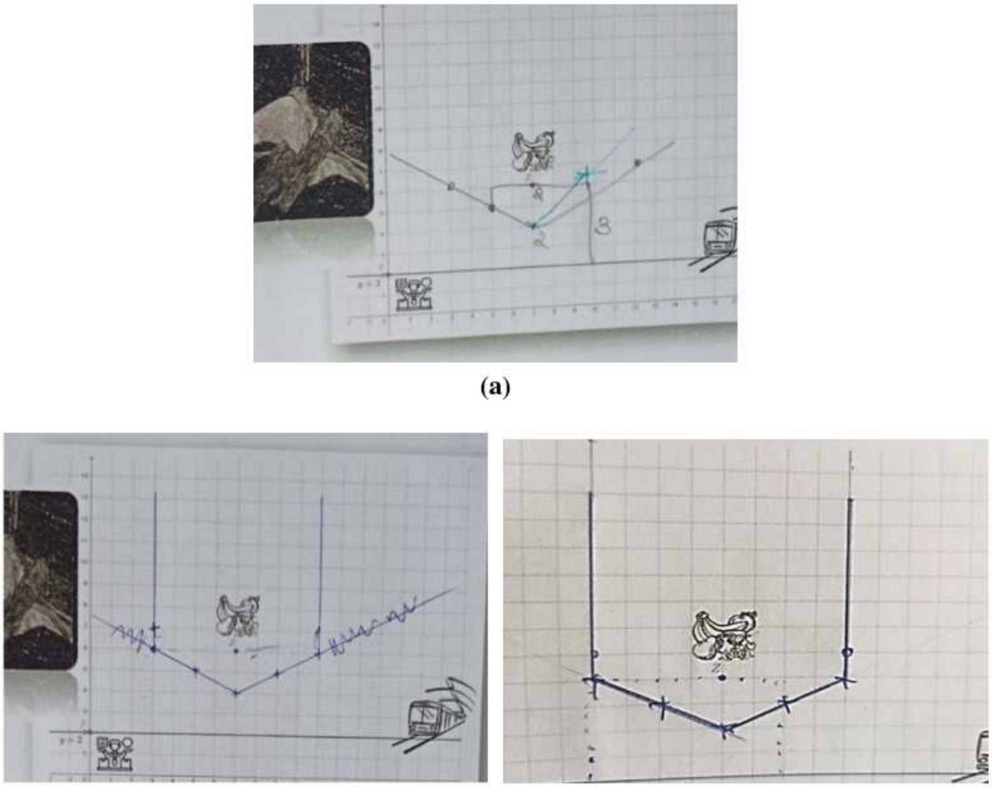
však nepoužil taxikářskou vzdálenost, ale tradiční euklidovskou, a to užitím Pythagorovy věty. Vynásobením čtyřmi pak dopočítal hledaný obvod a na základě podílu tohoto obvodu a průměru dostal číselnou hodnotu pro π, která však nebyla správná (obr. 7.32). Kdyby vypočítal délku kružnice s použitím správné taxikářské vzdálenosti, požadovaný výsledek by již získal. Po představení svého řešení ostatním a následné společné diskusi o skutečné vzdálenosti mezi dvěma sousedními vrcholy dané kružnice v taxikářské geometrii si Pavel uvědomil svůj chybný krok a úlohu nakonec správně vyřešil. V rámci celkového schématu π tak bylo u něj potřeba jednotlivé objekty odpouzdřit do procesů a znovu je vzájemně zkoordinovat.

Tato situace tak byla skvělou příležitosti sledovat, jak se sice žáci pokusili generalizovat definici π z euklidovské geometrie na Taxizemi, ale jejich mentální schéma π bylo natolik silně přizpůsobené té euklidovské, že se jim nepodařilo ho ihned úspěšně akomodovat novému kontextu Taxizemě a aplikovat zde správnou definici vzdálenosti. Je nutné si uvědomit, že euklidovská geometrie je pro žáky v těchto okamžicích pořád ještě přirozenější, což zde vedlo k automatickému použití euklidovských pravidel.

7.4.11 Úloha 5/T

Tato aktivita byla zaměřena na konstrukci paraboly v taxikářské geometrii. Většina žáků poměrně snadno našla bod $V[7,4]$. V určitém okamžiku však Pavel nahlas zahlásil: „To bude asi parabola.“ Na dotaz, co by v případě paraboly mohlo být jejím ohniskem a vrcholem, se všichni ve svých odpovědích jednoznačně shodli. Zajímavější část diskuse se však týkala samotného postavení metra, kdy nakonec většina žáků přiznala, že jim není pojem „řídící přímka“ příliš povědomý. To může být důkazem toho, že tradiční výuka paraboly má tendenci zahrnovat spíše algebraický přístup než přístup geometrický.

Část žáků pokračovala v prozkoumávání dalších bodů metodou pokus-omyl, jiní se naopak snažili najít sofistikovanější přístup. Adam navrhl ostatním svou strategii využití rovnoběžek s danou trasou metra. Přestože někteří žáci pokračovali ve svém náhodném hledání, většina z nich se rozhodla následovat tuto Adamovu cestu (obr. 7.33c). Bylo proto možné sledovat, jak si v rámci dané polohy bodu V žáci nejdříve zvolili přímku $y = 4$ a postupným ověřováním zjistili, že kromě tohoto bodu již na této přímce neexistuje žádný jiný bod, který by byl ve stejné vzdálenosti dvou taxikářských jednotek od zeleninového trhu. Podobným způsobem



(a)

(b) (c)

Obrázek 7.33: Ukázky konstrukcí taxikářské paraboly. U a) a b) je vidět patrná snaha o rychlé zobecnění na základě silného vlivu euklidovské figury.

pokračovali v dalším kroku, zvolili si přímku $y = 5$ a hledali tentokráte na ní vhodné místo pro byt Buvára a Petyšeho, které by bylo ve vzdálenosti 3 taxikářských jednotek od zeleninového trhu. Po krátkém prozkoumávání objevili body $[5, 5]$ a $[9, 5]$. Stejnou technikou pro taxikářskou vzdálenost 4 jednotek od metra pak někteří ještě dohledali body $[3, 6]$ a $[11, 6]$. V tomto okamžiku, kdy měli žáci již několik odpovídajících bodů, se znovu ukázalo, jak silný vliv mohou mít jejich figurálních představy a snahou o rychlé zobecnění učinili často stejný chybný krok jako s osou úsečky (obr. 7.33b). Očekávali totiž, že daný útvar bude pokračovat ve tvaru písmene V (pravděpodobně kvůli Pavlovu náznaku na začátku), které jim pravděpodobně již alespoň částečně evokovalo tvar paraboly. Navíc se tak i celá situace na základě pravidelnosti těchto několika zakreslených bodů jevila. Šlo na nich pozorovat, jak jsou si se svým řešením plně jistí a nemají potřebu ho dále ověřovat.

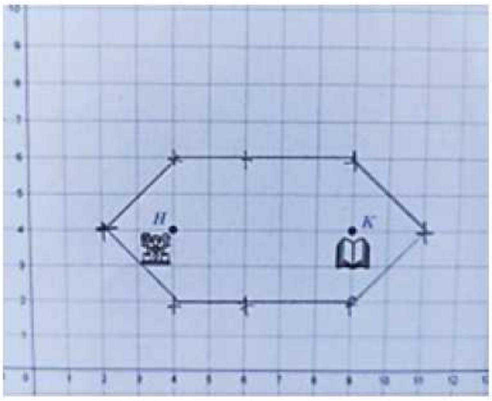
Poskytl jsem jim proto tuto nápovědu: „Bod $[11, 6]$ sice odpovídá požadavkům Buvára a Petyšeho, bod $[13, 7]$ však nikoliv.“ Tato slova jim pravděpodobně připomněla chybné kroky s rychlým zobecněním u předchozí úlohy a automaticky pokračovali ve vyhledávání dalších mřížových bodů. Nakonec se jim většině podařilo tuto množinu zakreslit (obr. 7.33 b/c).

Výsledné řešení pak bylo pro žáky překvapením. I když vizuálně připomínalo parabolu, vnímali zde i některé podstatné rozdíly. Nejen, že to nebyla již hladká křivka, na kterou byli doposud zvyklí, Mia ji navíc popsala slovy: „Tahle [parabola] se nerozevírá do nekonečna“. Měli příležitost si uvědomit, že definice slouží jako základní rámec, který určuje, jakými vlastnostmi daný geometrický útvar disponuje a jak se chová v rámci daného geometrického systému.

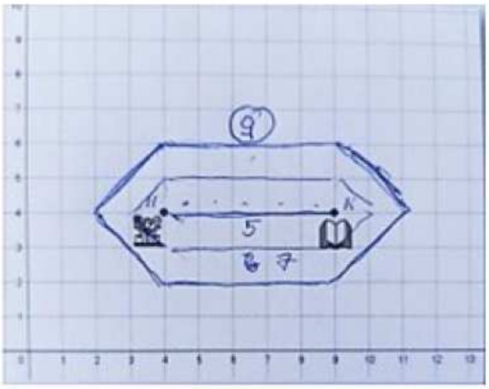
Znázornění paraboly bez její rovnice, jen na základě její geometrické definice, bylo pro žáky poměrně obtížné. Tato aktivita jim ale poskytla skvělou příležitost si uvědomit, že pouhá schopnost reprodukovat rovnici nebo mít nečinný mentální obraz konkrétního matematického pojmu je daleko od skutečného porozumění tomuto pojmu, a že opravdové porozumění v sobě zahrnuje i schopnost generalizace, kterou by měli postupně rozšiřovat své chápání geometrických pojmů a pravidel a být schopný aplikovat všechny naučené principy na nové a různorodé situace, nejen na ty, které byly přímo prezentovány ve výuce.

7.4.12 Úloha 7/T

Tato aktivita v sobě skrývala konstrukci elipsy. Ta byla pro žáky oproti mému původnímu očekávání nakonec poměrně lehce zvládnutelná. Byla však již patrná jejich zvýšená nedůvěra; mřížové body hledali s větší pozorností a pečlivostí. Na úrovni akce nejprve našli odpovídající body horizontálně a vertikálně od obou ohnisek. Pak dohledávali body mezi těmi již zakreslenými. Na základě jistých figurálních představ a předpokladů, že se bude jednat o elipsu, zde očekávali symetrii a pravděpodobně i proto elipsu poměrně rychle dokočili (obr. 7.34a). Po předchozích negativních zkušenostech však bylo patrné, že žáci pečlivě ověřují všechny nalezené body, aby se ujistili, že skutečně patří do hledané množiny. Zaujal mě i Adam, který popsal ostatním po-



(a)



(b)

Obrázek 7.34: Ukázky dvou žákovských strategií při hledání elipsy.

někud odlišný myšlenkový postup (obr. 7.34b). Na problém pohlížel očima taxikáře a vnímal součet obou vzdáleností jako pomyslnou cestu od hokynáře přes hledaný statek ke knihovně. Jeho úvaha byla postavena na tom, že pokud by zadaný součet vzdáleností byl 5 jednotek, což je taxikářská vzdálenost od hokynáře ke knihovně, musel by statek hledat přímo v ulici, která je spojuje, protože to je jediná nejkratší cesta. Jelikož však má být cesta od hokynáře přes statek ke knihovně dlouhá 9 jednotek, musel by taxikář z původního směru ke statku odbočit o dva bloky a následně se o tyto dva bloky znovu přiblížit ke knihovně, čímž by se cesta prodloužila o 4 jednotky a dosáhla by požadovaných 9 jednotek. „Statek musím hledat na odbočce z mé původní cesty,“ řekl Adam. Proto se zaměřil na taková místa, která představují vybočení taxikáře o dvě jednotky z této nejkratší trasy. Na dotaz, pokud by požadovaný součet vzdáleností byl 15 místo 9, Adam okamžitě podal správnou odpověď. Tím projevil procesní chápání taxikářské elipsy a ukázal, že by byl pravděpodobně schopen vhodně zkoordinovat tyto procesy i v případě jiných vzájemných poloh obou ohnisek.

7.4.13 Úloha 8/T

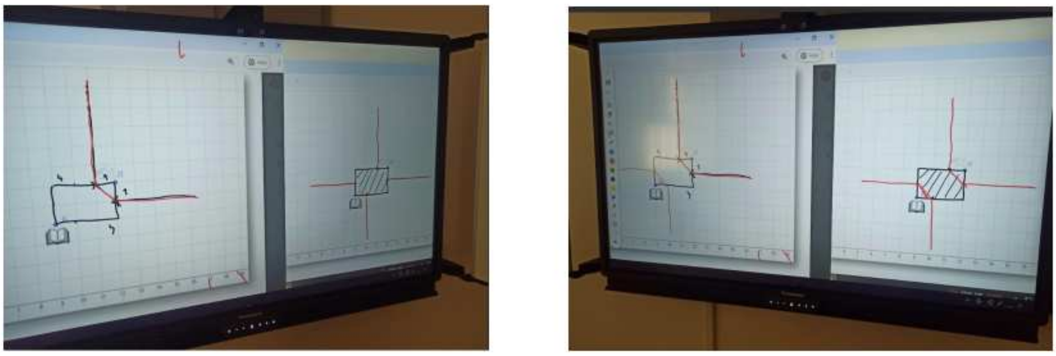
Konstrukce hyperboly byla pro žáky pravděpodobně nejnáročnější a hned na začátku si vyžádala několik návodných kroků. Nikdo zde očividně neměl již zájem se vydat cestou pokus-omyl.

Poskytl jsem tyto dvě rady:

1. Zakreslete okrsek všech nejkratších cest taxikáře mezi knihovnou a rybím trhem.
2. Najděte na obvodu tohoto okrsku všechny body splňující uvedenou podmínku.

Navíc jsem znovu na tabuli připomněl oba závěry, které již zazněly v rámci předchozích úloh:

- Nejkratší cesty k (mřížovým) bodům na úhlopříčných řádcích uvnitř daného okrsku efektivních cest mají stejnou délku (*Pavel u zjišťování počtu nejkratších cest*).
- Pokud se taxikář vzdaluje kolmo od jeho okrsku efektivních cest, pak se z mu obou vrcholů přičítá stejná vzdálenost (*Adam a Pavel u osy úsečky*).



(a) **(b)**

Obrázek 7.35: Využití podobností a rozdílů dvou neúplných řešení k dokončení konstrukce taxikářské hyperboly

Přesto se nakonec nepodařilo nikomu hyperbolu kompletně sestrojit. Pavel našel dva body poblíž rybího trhu, které odpovídaly danému rozdílu vzdáleností tří jednotek, neuvědomil si však existenci zbylých dvou. Podařilo se mu proto sestrojit jen jednu větev hledané hyperboly. Adam pro změnu zase našel všechny čtyři body na obvodu daného okrsku efektivních cest, nevzal ale v úvahu závěr o vlastnostech úhlopříčných řádků AB-boxu, proto mu v jeho množině řešení chyběly i obě úsečky uvnitř tohoto AB-boxu, které jsou spojnicemi zmíněných bodů (obr. 7.35a).

Využil jsem této situace a nechal jsem oba jejich řešení u tabule ostatním odprezentovat. Vzájemné porovnání shodností a rozdílů obou řešení tak vedlo k poměrně konstruktivní debatě, kdy si nejen oba žáci, ale i zbytek třídy mohl uvědomit potřebné souvislosti a nakonec tuto hyperbolu zdárně dokončit (obr. 7.35b). Celá situace tak pomohla rozvíjet jejich schopnost kritického myšlení a analytického přístupu k prezentovaným problémům.

7.4.14 Rekapitulace

Tato výzkumná část byla zaměřena na odpovězení první otázky: Jak žáci přenášejí a aplikují své osobní definice geometrických pojmů získané v rámci středoškolského studia (kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, osa úsečky) do kontextu taxikářské geometrie a jak významně tyto aktivity podporují jejich hlubší porozumění. Výsledky ukázaly několik klíčových zjištění:

1. Kružnice: Žáci zde nejdříve na základě vizuální podoby okamžitě zavrhli taxikářskou kružnici jako kružnici, aniž by ověřili její definici. I když znali konvenční definici kružnice, chovali se často tak, jako by byla kružnice definována pomoci stereotypního příkladu. Projevil se zde silný figurální vliv jejich představ o kružnici z euklidovské geometrie. Někteří navíc taxikářskou kružnici pojmenovali jako kosočtverec, což byl projev ikonického mentálního obrazu a prototypového fenoménu, kdy žáci spontánně rozpoznávali daný objekt na základě toho, že je vizuálně „podobný“ nějakému známému objektu.

   Podpora porozumění:

   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že jejich představa pojmu kružnice je silně ovlivněna jejich zkušeností z euklidovské geometrie a má vliv na to, jak odvozují své závěry.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit rozdíl mezi jejich mentálním obrazem kružnice a formální definicí kružnice platnou v různých geometrických systémech a tento svůj obraz mohli přehodnotit.
   - Někteří žáci dostali navíc i příležitost si uvědomit rozdíl mezi vizuální „podobností“ čtverce v netradiční poloze a jeho formální definicí a tento svůj obraz mohli přehodnotit.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, proč je důležité v rámci daného kontextu vždy vycházet pouze z definice, a né z vizuální podobnosti.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že kružnice je přímo řízená jen svou definicí a může proto v různých geometrických kontextech vypadat tvarově odlišně.

2. Osa úsečky: Při konstrukci osy úsečky žáci automaticky použili tradiční euklidovskou metodu a využívali u toho vlastnosti, které vycházeli jen z této geometrie. Někteří neidentifikovali daný problém jako osu úsečky a považovali za řešení pouze její střed. Silný figurální aspekt osy úsečky z euklidovské geometrie se pak u některých žáků projevil dokonce dvakrát v rámci jejich rychlého a nesprávného zobecnění. V tomto novém kontextu taxikářské geometrie tak nedokázali ihned propojit mentální obrazy své vyvolané představy pojmu osa úsečky s její formální definicí.

   Podpora porozumění:

   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že střed úsečky není jediným bodem, který patří do množiny všech bodů ve stejné vzdálenosti od dvou daných bodů.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že čistě intuitivní a vizuální představa a zanedbání přesných definic může vést k nesprávným výsledkům.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit rozdíl mezi formální definicí osy úsečky a jejich mentálním obrazem tohoto pojmu a tento svůj obraz mohli přehodnotit.
   - Žáci měli příležitost si uvědomit, že pojem středu úsečky má konkrétní geometrický význam, který nelze zaměňovat s libovolným bodem na této ose.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že podoba osy úsečky je řízená jen svou definicí a může tak v různých geometrických kontextech vypadat tvarově odlišně.

3. Číslo π a vzdálenost: Žáci nebyli schopni správně aplikovat taxikářskou vzdálenost při výpočtu čísla π a použili zde euklidovskou vzdálenost. Tento problém odhalil silný vliv jejich vyvolané představy pojmu vzdálenosti, která však v daný okamžik neodpovídala

kontextu a definici v rámci dané taxikářské geometrie. Neadekvátní mentální obrazy zde bránili správnému uchopení a aplikaci formální definice.

Podpora porozumění:

- Žáci dostali příležitost si uvědomit rozdíl mezi formální definicí π a jejich mentálním obrazem tohoto pojmu.
- Žáci dostali příležitost si uvědomit nezbytnost důsledného dodržování definic všech souvísejících pojmů v rámci dané geometrie.

4. Parabola: Na základě několika bodů žáci provedli rychlé zobecnění a zakreslili parabolu jako písmeno V, což jim alespoň částečně připomínalo parabolu z euklidovské geometrie. Tento přístup ukázal silnou tendenci zobecňovat na základě vizuální představy. Většina žáků pak v rámci diskuse přiznala, že jim není pojem řídící přímka příliš povědomý, což poukazuje na skutečnost, že tradiční výuka paraboly (ale i dalších kuželoseček) má tendenci zahrnovat spíše algebraický přístup než geometrický. Žáci tak mohou vnímat například graf kvadratické funkce jen čistě jako algebraickou reprezentaci paraboly, aniž by pochopili samotný geometrický přístup, který parabolu definuje jako množinu bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od daného ohniska a řídící přímky. Podobné zapojení geometrické definice do výuky se ukázalo být právě tou cestou, jak zlepšit skutečné pochopení tohoto pojmu.

   Podpora poruzumění:

   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že zobecňování založené jen na intuitivních a vizuálních představách bez dodatečného ověření v rámci formálních definic může vést k nesprávným výsledkům.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že jejich dosavadní zkušenost s parabolou měla tendenci zdůrazňovat algebraickou reprezentaci nad geometrickou definicí.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že pouhá schopnost reprodukovat rovnici nebo mít nečinný mentální obraz tohoto pojmu je daleko od jeho skutečného porozumění, a že jeho opravdové porozumění v sobě zahrnuje schopnost ho použít i v netradičním kontextu.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že parabola je přímo řízená jen svou definicí a může tak v různých geometrických kontextech vypadat tvarově odlišně.

5. Elipsa: U elipsy měli někteří žáci tendenci automaticky přenášet vlastnost symetrie z euklidovské geometrie. I přesto, že tato vlastnost opravdu platila, byli již obezřetní a svá rychlá zobecnění si na základě předchozích zkušeností pro jistotu ověřovali, což byl krok ke zlepšení jejich celkového geometrického uvažování. U „šikmých" ohnisek by již totiž osy souměrnosti byly mimo hlavní a vedlejší osy elipsy.

   Co si mohli uvědomit:

   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že symetrie může být sice vlastností elipsy i v jiných geometrických kontextech, přesto však je stále důležité mít jakékoliv intuitivní závěry podložené na základě formálních definic.
   - Žáci si mohli uvědomit, že pouhá schopnost reprodukovat rovnici nebo mít nečinný mentální obraz tohoto pojmu je daleko od jeho skutečného porozumění, a že opravdové porozumění v sobě zahrnuje schopnost ho použít i v podobném netradičním kontextu.

- Žáci dostali příležitost si uvědomit, že elipsa je přímo řízená jen svou definicí a může tak v různých geometrických kontextech vypadat tvarově odlišně a mít proto i různé vlastnosti.

6. Hyperbola: Podobně jako u paraboly, žáci často neznali nebo si neuvědomovali úplnou geometrickou definici hyperboly, což může být důsledkem tradičního pojetí výuky, kde je důraz kladen hlavně na algebraickou reprezentaci. Možná proto, nebo v důsledku zkušeností z předchozích úloh, již žáci neměli tendenci přenášet své vizuální představy o hyperbole z euklidovské geometrie. To se projevilo tím, že zakreslili buď jen jednu větev hyperboly, nebo měli hyperbolu nekompletní.

   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že jejich znalosti o hyperbole byly silně ovlivněny převážně algebraickým přístupem.
   - Žáci si mohli uvědomit, že pochopení geometrické definice hyperboly je důležité pro přesné a kompletní zakreslení obou větví hyperboly.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že pouhá schopnost reprodukovat rovnici nebo mít nečinný mentální obraz tohoto pojmu je daleko od jeho skutečného porozumění, a že opravdové porozumění v sobě zahrnuje schopnost ho použít i v podobném netradičním kontextu.
   - Žáci dostali příležitost si uvědomit, že hyperbola je přímo řízená jen svou definicí a může tak v různých geometrických kontextech vypadat tvarově odlišně a mít proto i různé vlastnosti (neměla zde asymptoty a nebyla osově souměrná).

Výsledky této studie nám ukazují, že zapojení taxikářské geometrie do tradiční výuky by mohlo umožnit žákům lépe propojit jejich mentální obrazy s formálními definicemi, čímž by se mohlo zlepšit jejich pochopení samotné euklidovské geometrii. Poskytuje nám k tomu navíc jednoduché a intuitivní prostředí, ve kterém mohou žáci pevněji budovat i základní principy deduktivního uvažování.

Geometrické objekty, jako jsou kružnice nebo elipsy, mají v této geometrii jednoduché tvary a jsou snadno vizualizovatelné. Tato vizuální jednoduchost může žákům později usnadnit přechod k abstraktním pojmům. Metoda objevování a experimentování pak vede žáky k aktivnímu řešení problémových situací a podporuje jejich kritické myšlení, kreativitu a hlubší pochopení jednotlivých pojmů. Mohou zde sami objevovat vlastnosti a pravidla této geometrie, což jim poskytuje hlubší a trvalejší porozumění.

Tento proces podporuje i vzájemnou spolupráci, kdy žáci sdílejí své myšlenky, diskutují o rozdílech mezi euklidovskou a taxikářskou geometrií a společně hledají správná řešení. Diskuse rozvíjí schopnost argumentace a zvyšuje celkovou matematickou gramotnost žáků.

Ukázalo se, že nová perspektiva taxikářské geometrie nejen obohacuje chápání samotných geometrických pojmů, ale také umožňuje propojení s jinými oblastmi matematiky, jako je kombinatorika. Tento integrativní přístup přispívá k lepšímu pochopení složitých matematických konceptů prostřednictvím konkrétních a vizuálních příkladů. Takový přístup rozvíjí hlubší porozumění matematickým pojmům a jejich aplikacím, což je klíčové pro moderní vzdělávací procesy.

Kapitola 8

Druhá výzkumná otázka

8.1 Výzkumný proces

Metoda

V souladu s cílem výzkumu sledovat proces formování pojmu kružnice v taxikářské geometrii a její tematizaci v rámci rozvoje porozumění tohoto pojmu a jeho aplikace, byla dvěma žákům střední školy navržena série aktivit v euklidovské a taxikářské geometrii. Tito dobrovolní účastníci studie měli za úkol dokončit všechny navržené aktivity. Data byla shromážděna a analyzována kvalitativně prostřednictvím pozorování, rozhovorů a vyplněných pracovních listů. Realizace probíhala v prostředí školy. Chování žáků, které bylo považováno za důležité během procesu, bylo zaznamenáno a interpretováno.

Účastníci

Tato studie byla provedena se dvěma dobrovolnými žáky, z nichž jeden byl žákem prvního ročníku Gymnázia J. Seiferta v Praze, druhý z nich byla žákyně posledního ročníku Gymnázia J. Ressela v Chrudimi. Cílem bylo ověřit tuto problematiku na dvou různých mentálních úrovních. Realizována byla s každým účastníkem individuálně, v různé dny, v prostorách ZŠ Lýčkovo náměstí v Praze, s časovou dotací 90 minut pro každého z nich. Kromě mě jako realizátora nebyl přítomen nikdo další. Oba žáky budu v textu označovat pseudonymy.

Průběh

Nejdříve došlo k sestavení modelu pro interakci schémat kružnic v euklidovské a taxikářské geometrii na základě prostudování relevantní literatury v kontextu teorie APOS. Toto schéma pak bylo odrazovým můstkem pro navržení a sestavení vhodných aktivit, které by měly nejdříve pomoci žákovi porozumět vzájemnému propojení geometrických a algebraických reprezentací vzdáleností v obou geometriích. Následovaly pak ty aktivity, které by mu měly být nápomocné ve vývoji schématu kružnice, rovněž zde ve vztahu ke geometrickým a algebraickým reprezentacím v rámci obou geometrií, a poté k jejich vzájemným koordinacím. Na závěr pak aktivita, která by mu měla pomoci v tematizaci schématu kružnice, což prokáže tím, že přenese své porozumění pojmu kružnice do nového metrického prostoru - maximální metriky. Jako zdroj inspirace a příkladů jsem použil Krause(1986), Kemp(2018) a Kurtuluş& Ada (2015).

8.2 Rešerše

8.2.1 Reprezentace pojmů

Duval (2006) uvádí, že reprezentace je něco, co stojí za něčím jiným. Reprezentace jsou znaky nebo kombinace znaků, symbolů, objektů, diagramů nebo grafů, a může to být skutečný fyzický produkt nebo mentální proces (Goldin, 2001). Mentální proces může být vnímán jako mentální obraz uvnitř mysli jednotlivce (hlavy). Termín reprezentace tak může být interpretován různými způsoby, včetně těchto následujících: odpovídat, označovat, zobrazovat, ztělesňovat, zakódovat, vyvolávat, označovat, znamenat, produkovat, odkazovat na, navrhovat nebo symbolizovat (Goldin, 2003).

V matematice hrají různé typy reprezentací důležitou roli při porozumění matematickým pojmům. Použití více reprezentací může podporovat učení, ale pouze tehdy, pokud jsou žáci a studenti povzbuzováni k aktivnímu vytváření spojení mezi nimi (Bodemer & Faust, 2006). Je proto důležité rozvíjet tyto dovednosti přechodu z jednoho typu reprezentace na druhý (Duval, 2006). Lesh, Post, Behr (1987) uvádí, že tato schopnost přechodu mezi reprezentacemi je významným faktorem, který ovlivňuje pozdější výkon žáků a studentů při řešení matematických problémů a že jejím posilováním se podporuje proces porozumění základním matematickým myšlenkám a jejich dalším užitím.

Slovo geometrie často evokuje tvary a obrázky, ale i v algebře jsou přítomné složky geometrie. Banchoff (2008, str. 107) uvádí, že „geometrická demonstrace může ukázat, proč funguje algebraický argument". Kombinace algebry s geometrií poskytuje dvě různé reprezentace pojmu, což přispívá k celkovému konceptuálnímu porozumění, propojuje symbolické a reálné světy a zároveň zvyšuje flexibilitu při řešení matematických problémů (Duval, 2006).

Bylo navíc prokázáno, že poskytnutí takových úkolů, které povzbuzují jak vizuální, tak analytické úsudky, vede i k lepšímu ukotvení pojmů v dlouhodobé paměti (Banchoff 2008). Důvodem může být fakt, že současným zapojením jak vizuálního, tak analytického myšlení se vytváří větší počet spojení mezi levou a pravou hemisférou mozku (Battista 2007).

8.2.2 Mentální konstrukce v geometrii

Vzhledem k tomu, že průzkum literatury poskytuje minimální výsledky pro existující výzkum využívající teorii APOS ve studiích zaměřených na geometrické pojmy, odkazujeme se alespoň na studie Kemp (2018) a Kemp a Vidakovic (2019, 2021a, 2021b, 2022). Tyto studie se zabývaly geometrickými a algebraickými reprezentacemi konkrétních pojmů v euklidovské a taxikářské geometrii a řešily obtíže studentů při propojování různých typů reprezentací s definicí matematického pojmu. Kemp a Vidakovic (2019) ve své studii popsaly myšlení dvou studentů při řešení otevřené otázky v taxikářské geometrii, zaměřené na vyvolání několika souvisejících pojmů kružnice. Ve studii Kemp a Vidakovic (2021a) účastníci poskytli důkazy o navazování spojení mezi souvisejícími pojmy „osy úsečky", což vedlo k hlubšímu porozumění tomuto pojmu. Kemp(2018) a Kemp a Vidakovic (2022) pak zkoumaly interakci mezi schématy taxikářské a euklidovské geometrie a analyzovaly různé úrovně této interakce.

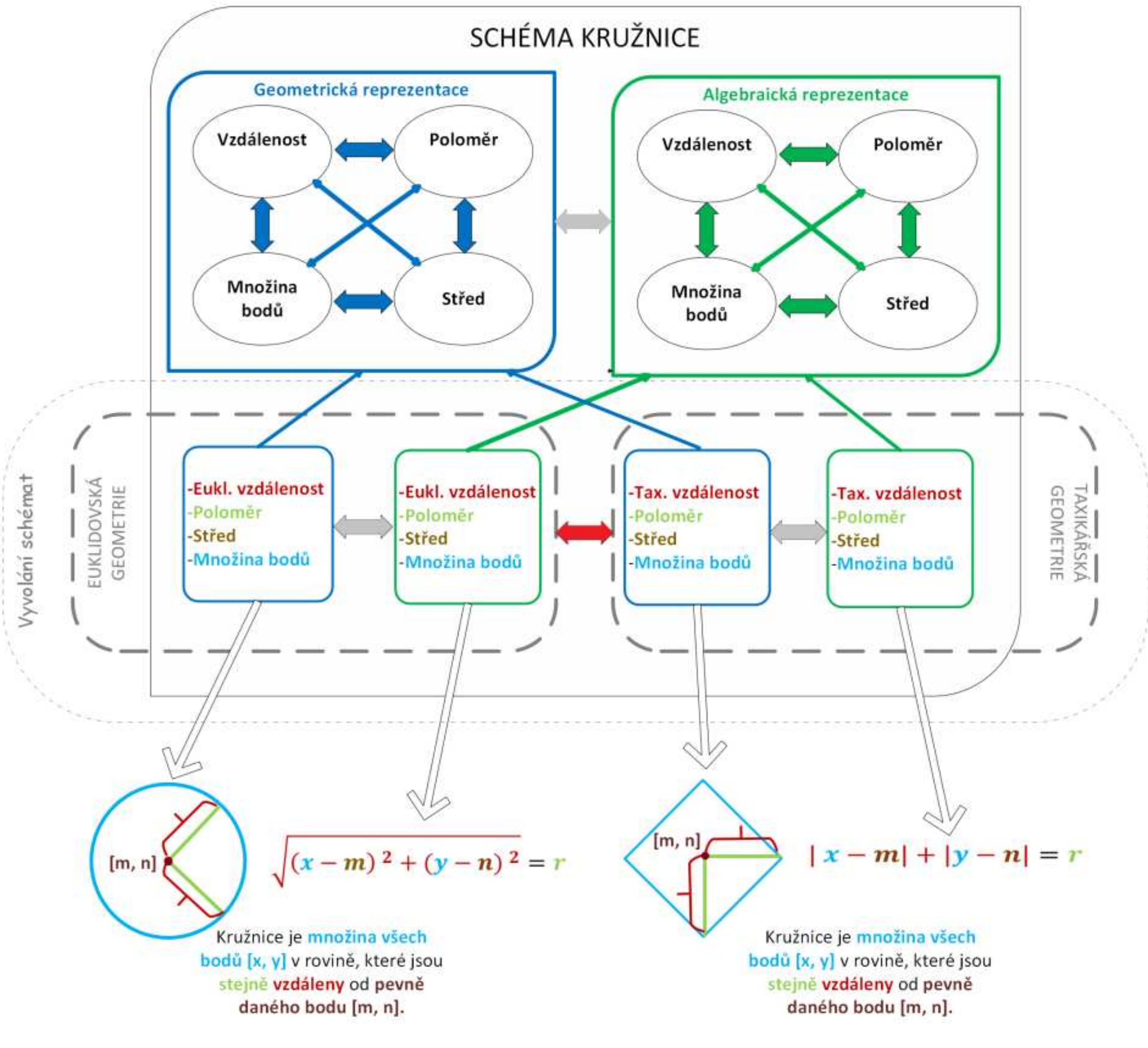
Shrneme-li všechny tyto studie, ukazuje se, že pokud se žáci snaží přenášet znalosti z euklidovské do taxikářské geometrie, pak vzájemné propojení a koordinace mezi algebraickými a geometrickými reprezentacemi hrají mnohem větší roli, než se původně očekávalo.

Pokud dokážou žáci vytvořit dostatečné spojení mezi algebraickými a geometrickými reprezentacemi pojmů v obou typech geometrií a dostatečně je zkoordinovat, jsou schopni zobecnit a generalizovat své porozumění těmto pojmům a jejich definicím (Kemp & Vidakovic, 2021a).

Existuje totiž pozitivní vztah mezi množstvím a hloubkou těchto spojení a mírou, do jaké jsou žáci schopni provést toto zobecnění (Kemp, 2018).

8.2.3 Konstrukce schématu kružnice

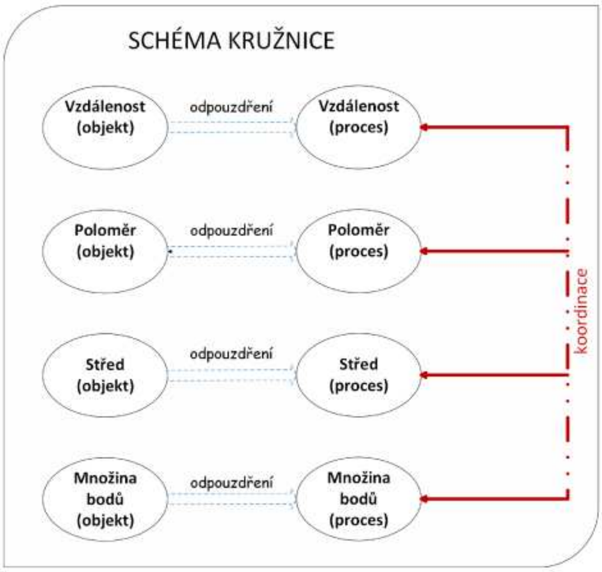
V kontextu schématu kružnice jsou klíčovými pojmy *vzdálenost, poloměr, střed a množina bodů*, protože právě ty jsou přímou součástí její definice. Hovoříme o nich jako o *souvisejících pojmech* (Kemp & Vidakovic, 2021a, vlastní překlad). Lze očekávat, že vizualizací a algebraickým definováním kružnice v netypickém prostředí taxikářské geometrie může jedinec postupně vytvářet těsné souvislosti mezi jednotlivými složkami schématu, dokud nebude plně rozvinuté. Pokud se mu to nakonec podaří a vytvoří tuto strukturu dostatečně koherentní, bude v okamžiku vyvolané představy pojmu kružnice schopen lépe rozlišit, které části této jeho představy pojmu jsou součástí formální definice a které jsou těmi vedlejšími vlastnostmi, jenž se mohou v různých geometriích lišit. Obrázek 8.1 nám poskytuje vhodnou ilustraci toho, jak by mohlo být takové schéma strukturováno vzhledem k jednotlivým souvisejícím pojmům (Kemp, 2018). Modré šipky znázorňují koordinaci geometrických reprezentací, zatímco zelené šipky popisují



Obrázek 8.1: Ilustrace příkladu podkladové struktury schématu kružnice, včetně vzájemné interakce schémat, jak je vyznačeno červenými šipkami (viz. str. 146 pro větší velikost).

koordinaci reprezentací algebraických. Šedé šipky ukazují na koordinaci mezi reprezentacemi v rámci jednotlivých schémat. Červené šipky pak označují interakci mezi schématy euklidovské a taxikářské kružnice, což bude podrobněji rozebráno v následující sekci. Naším cílem je nyní postupně analyzovat, jak mohou jedinci asimilovat novou metriku do svých stávajících schémat vzdálenosti a kružnice, aby nakonec dokázali odvodit rovnici v této nové metrice.

Kemp (2018) uvádí, že pokud chceme, aby jedinec dovedl napsat rovnici kružnice a diskutovat o ní, je potřeba, aby dosáhl objektového chápání alespoň algebraické reprezentace všech souvisejících pojmů (vzdálenost, poloměr, střed a množina bodů). Všechny tyto pojmy totiž slouží jako vstupy do mentálních procesů, jejichž výstupem je právě zmíněná rovnice. Autorka však upozorňuje, že i když jedinec dokáže tuto rovnici napsat, nemusí vždy rozumět tomu, jak její části přímo souvisejí s geometrickou definicí kružnice. To se shoduje se zjištěními Kinacha a Fosteringa (2012), kteří popsali, že jejich studenti sice chápali pojmy v geometrii prostřednictvím algebraických a numerických metod, ale chybělo jim prostorové porozumění. Jedinec proto může mít objektové pochopení všech souvisejících pojmů kružnice, přesto může postrádat souvislejší porozumění kvůli špatné vzájemné koordinaci jednotlivých složek celé této podkladové struktury jejího schématu. K dosažení koherentního porozumění je potřeba, aby jedinec



Obrázek 8.2: Odpouzdření jednotlivých složek kružnice s cílem zkoordinovat procesy v rámci jejího schématu.

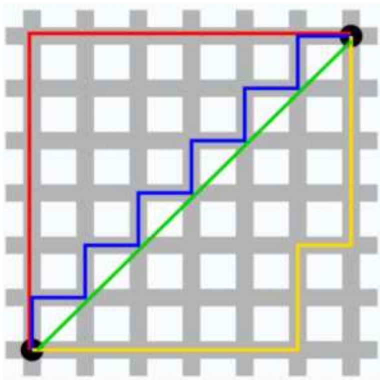
v rámci vhodně zvolených aktivit odhalil vztahy mezi těmito objekty (vzdálenost, poloměr, střed a množina bodů) a pokusil se je mezi sebou znovu vzájemně zkoordinovat, aby mohl vypozorovat jejich hlubší vzájemné vazby. Ilustrace tohoto procesu je znázorněna na obrázku 8.2, kde modré šipky naznačují odpouzdření těchto objektů do procesů a červené šipky naznačují zmíněné koordinace mezi těmito procesy. K těm pak může posloužit i vzájemná interakce schémat.

Kemp (2018) v rámci vyhodnocení své studie upozornila na dvě zásadní věci. Za prvé, že jedna z hlavních překážek, které její studenti čelili při konstrukci kružnice a sestavení její rovnice v taxikářské geometrii, byla ta, že mnoho z nich mělo potíže již s porozuměním samotnému vzorci vzdálenosti v euklidovské geometrii, což pak vedlo k problémům při přenášení konkrétních znalostí z této geometrie do taxikářské. Za druhé, že v rámci vzájemné interakce schémat se projevila mnohem větší složitost vzájemného vztahu poloměru a vzdálenosti. Bude tak užitečné mít jasnou představu o různých fázích chápání obou těchto pojmů, jejich vzájemného vztahu a o možných důsledcích tohoto chápání v kontextu celkového mentálního schématu kružnice. Soustředíme se proto na jejich analýzu v různých reprezentacích; výjdeme zde z Arnon a kol. (2014), Kemp (2018) a Kemp a Vidakovic (2019, 2021b, 2022).

Vzdálenost

Osobní definice pojmu vzdálenosti může být v mysli jedince spojena s geometrickou, algebraickou reprezentací, nebo jejich kombinací.

- Geometrická reprezentace: V euklidovské geometrii může být vzdálenost znázorněna a popsána jako úsečka spojující dva body. Naopak v taxikářské geometrii lze vzdálenost vyjádřit různými způsoby. Patří sem například schéma kroků mezi dvěma body, schéma různých vertikálních a horizontálních pohybů mezi dvěma body nebo jako schéma dvou odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, jehož přeponou je úsečka spojující oba body (obr. 8.3).



Obrázek 8.3: Geometrické reprezentace vzdáleností
Zdroj: Wikipedia

Mentální struktury:

  - Akce: Jedinec je schopen znázornit nejkratší cestu mezi dvěma konkrétními body s ohledem na danou metriku. Nemusí však být schopen popsat přesně svými slovy, jak vzdálenost v dané metrice obecně vypadá a jaké jsou její vlastnosti.
  - Proces: Jedinec je schopen v rámci dané metriky znázornit vzdálenost mezi libovolnými dvěma body. Nepotřebuje však již mít přímo dva konkrétní body, aby si tuto vzdálenost představil a je schopen o ní hovořit vlastními slovy.
  - Objekt: Jedinec dokáže znázornit a popsat několik vzdáleností a porovnávat je, aby určil, které jsou si rovny, které jsou větší a které menší než ostatní. K tomu využívá vizuální reprezentace nebo popisuje podobnosti a rozdíly ve tvaru a délce pomocí svých vlastních slov.

- Algebraická reprezentace: Vzdálenost lze algebraicky reprezentovat buď přímým uvedením vzorce pro vzdálenost nebo verbálním popisem výrazu či vzorce.

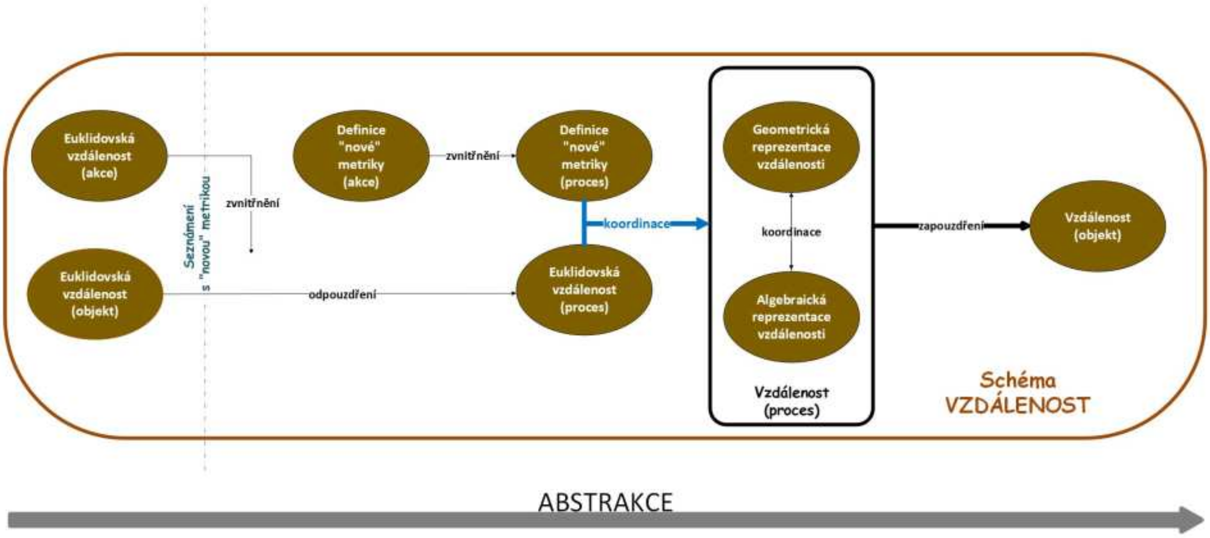
  Mentální struktury:

  - Akce: Pokud má jedinec dva konkrétní body, buď si vzpomene na vzorec pro vzdálenost, nebo mu je tento vzorec poskytnut, a je schopen správně identifikovat, které hodnoty jsou spojeny s kterými proměnnými. Poté dosadí tyto hodnoty do vzorce a určí požadovanou hodnotu vzdálenosti.

– Proces: Jedinec dokáže vypočítat vzdálenost mezi libovolnými dvěma body. Nemusí však mít přímo dané dva konkrétní body, aby si dokázal představit, jak by tuto vzdálenost vypočítal. Umí vlastními slovy popsat, co nám vlastně vzorec pro vzdálenost "říká".

– Objekt: Jedinec dokáže úspěšně vypočítat vzdálenost mezi libovolnými dvěma body a porovnávat tyto vzdálenosti mezi sebou. Je tak schopen provádět mentální akci porovnávání na objektu „vzdálenost“.

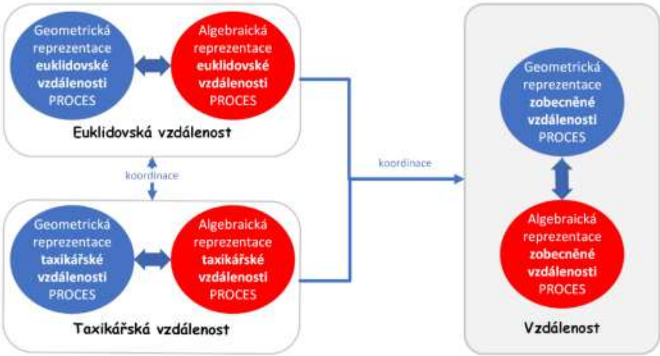
Z vyhodnocení studie Kemp (2018) tak může jedinec začít na různých úrovních porozumění vzdálenosti v euklidovské geometrii a přesto být schopný do svého celkového schématu začlenit taxikářskou vzdálenost (obr. 8.4). Pro dosažení hlubšího propojení mezi charakteristikami a vlastnostmi obou geometrií, které přesahují pouhé lokální pozorování obou metrik, je však nezbytné ho postupně přivést k procesnímu chápání jak euklidovské, tak taxikářské vzdálenosti 8.5. V této fázi pak totiž může docházet k vnitřním koordinacím jejich geometrických a al-



Obrázek 8.4: Ilustrace možných cest, kterými se žák může ubírat při začleňování {uvnové metriky do svého stávajícího chápání pojmu vzdálenost (viz. str. 147 pro větší velikost).

gebraických reprezentací, které jsou na obrázku 8.5 znázorněné oboustrannými šipkami, a ke koordinaci procesů napříč těmito schématy, což je v tomto obrázku znázorněno jednoduchou šipkou. V okamžiku, kdy jedinec dokáže uvažovat o obou těchto vzdálenostech mezi dvěma body a popsat tento vztah algebraicky nebo geometricky, projevuje tím procesní chápání zobecněné vzdálenosti, protože tento krok vyžaduje koordinaci procesů napříč oběma schématy. Tyto vzdálenosti pak může vylíčit například prostřednictvím pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona představuje euklidovskou vzdálenost a jehož odvěsny tvoří taxikářskou vzdálenost. Toto procesní chápání vzdálenosti může prokázat i tím, že podá důkazy o její koordinaci s některým z procesů v rámci jiného schématu. Například dokáže vysvětlit, jak ovlivňuje způsob měření vzdálenosti samotný vzhled kružnice, čímž podá důkaz, že zkoordinoval své pochopení vzdálenosti s alespoň jedním z pojmů poloměr, střed nebo množina bodů. Závisí na tom, jakým způsobem právě v daném okamžiku svůj výklad představil (Kemp, 2022).

Aby byl jedinec schopen napsat rovnici kružnice v dané metrice, je podle Kemp (2018) důležité, aby dosáhl objektového chápání pojmu vzdálenost v této metrice, což je nezbytným

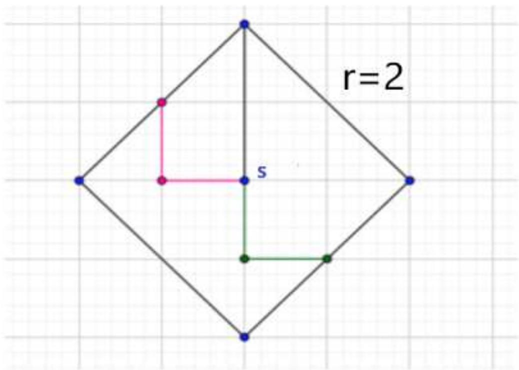


Obrázek 8.5: Znázornění vzájemných koordinací algebraických a geometrických reprezentací procesů euklidovské a taxikářské vzdálenosti

předpokladem k rozpoznání skutečnosti, že všechny body na kružnici jsou stejně vzdáleny od jejího středu. Musí si zde uvědomit, že všechny poloměry této kružnice mají stejnou délku. Toto pochopení však zahrnuje porovnávání hodnot, tedy schopnost provádět mentální akci na objektu vzdálenost.

Poloměr

Poloměr kružnice je definován jako vzdálenost od středu kružnice ke kterémukoli bodu na kružnici, nebo jako délka úsečky spojujícího střed s libovolným bodem na kružnici. Pojem poloměru má proto v sobě jako nedílnou součást související pojmy *vzdálenost, střed* a *množina bodů*, které by se měly při čtení této definice v mysli jedince aktivovat. Aby byl jedinec schopen napsat rovnici kružnice v dané metrice, je podle závěru Kemp (2018) důležité, aby dosáhl objektového chápání pojmu poloměru v této metrice, což je nezbytným předpokladem k rozpoznání skutečnosti, že všechny poloměry této kružnice mají stejnou délku. Toto pochopení však zahrnuje porovnávání hodnot, tedy schopnost provádět mentální akci na objektech vzdálenost a poloměr. Pro souvislé pochopení pojmu kružnice je však potřeba, aby v předchozí fázi zkoordinoval tyto procesy vzdálenosti a poloměru v dostatečné míře.



Obrázek 8.6: Poloměry taxikářské kružnice

Mentální struktury

- Akce: Jedinec dokáže najít poloměr kružnice v dané metrice buď tím, že se podívá na konkrétní rovnici kružnice, nebo tím, že se podívá na její geometrickou reprezentaci. Je schopen sestrojit kružnici s daným středem a poloměrem, ale není již schopen vlastními slovy vysvětlit jeho hlubší souvislost s pojmem kružnice.

- Proces: Jedinec dokáže najít poloměr libovolné kružnice v dané metrice. Uvědomuje si roli, kterou poloměr hraje v samotné definici kružnice. Může rovněž projevovat procesní chápání poloměru tím, že dokáže uvést, jak se tento pojem vztahuje k některému z dalších souvisejících pojmů kružnice. Vlastními slovy například vysvětlí, že „pokud je poloměr kružnice měřen jako přímá čára, pak je kružnice kulatá (Kemp, 2018)“, čímž předloží důkaz toho, že již musel vhodně zkoordinovat proces poloměru s procesem vzdálenosti, středu nebo množiny bodů, a to v závislosti na tom, jak přesně toto vysvětlení v daný okamžik formuloval.

- Objekt: Jedinec zde již dokáže provést s poloměrem mentální akci. Například když použije hodnotu poloměru k sestavení rovnice kružnice, využívá objekt poloměru jako vstup do mentální transformace, jejímž výsledkem je rovnice kružnice s daným poloměrem.

Kružnice

Je důležité si uvědomit, že bez ohledu na zvolenou metriku, geometrická definice kružnice je stále stejná: Kružnice je množina všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od jejího středu.

- Geometrická reprezentace kružnice: Pokud jde o geometrickou reprezentaci kružnice, jedinec zde může postupovat graficky nebo pouze vlastními slovy popisovat různé vlastnosti kružnic vzhledem k jejich vizuální podobě. Může sestrojit konkrétní kružnici nebo jen vysvětlit, jak by tato geometrická konstrukce souvisela se samotnou definicí kružnice.

  Mentální struktury

  - Akce: Jedinec je schopen sestrojit kružnici v dané metrice, pokud má k dispozici střed kružnice a její poloměr. Aby však mohl diskutovat o vlastnostech kružnice v rámci dané geometrie, potřebuje vždy konkrétní příklad této kružnice.
  - Proces: Jedinec je schopen sestrojit kružnici s libovolným středem a poloměrem. Nemusí mít konkrétní hodnoty k dispozici, aby si dokázal tuto konstrukci představit, a je schopen vlastními slovy diskutovat o budoucí podobě kružnice v dané metrice.
  - Objekt: Jedinec zde již dokáže s kružnicí provádět mentální akci. Může například uvést příklady různých kružnic a vlastními slovy popsat jejich podobnosti nebo rozdíly. Tato mentální akce, kterou provádí na tomto objektu, je pak akce porovnávání.

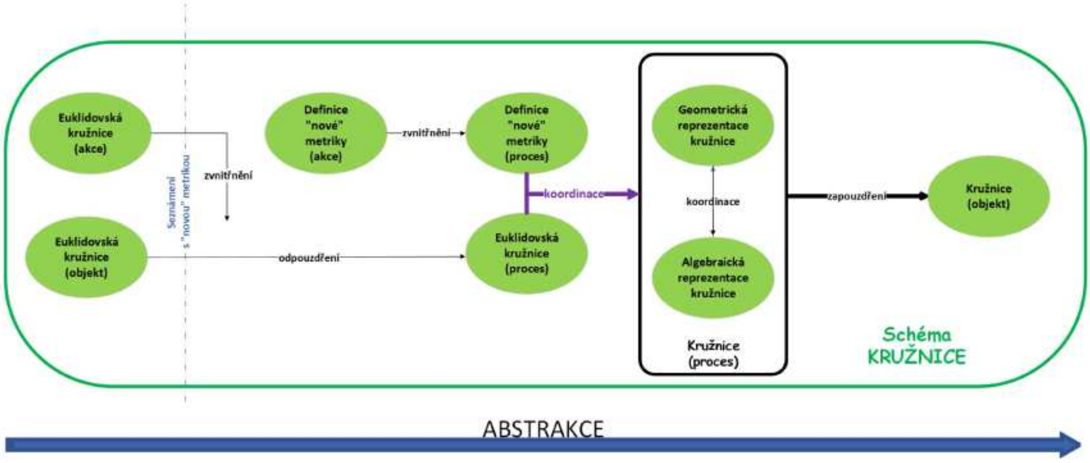
- Algebraická reprezentace kružnice: Jedinec je schopen uvést rovnici kružnice nebo ji verbálně popsat. Pokud tak nahlas popíše, že pro daný bod na taxikářské kružnici je „výraz pro jeho vzdálenost od středu této kružnice roven jejímu poloměru“, prokáže tím, že si uvědomuje, jakým způsobem je vzorec vzdálenosti zahrnut v rovnici taxikářské kružnice.

  Mentální struktury:

  - Akce: Pro daný střed a poloměr dokáže jedinec v dané metrice použít poskytnutou nebo zapamatovanou rovnici kružnice, správně identifikovat, které hodnoty ze zadaného středu a poloměru jsou spojeny s příslušnými proměnnými v rovnici, a tyto hodnoty do rovnice dosadit.
  - Proces: Jedinec je schopen v dané metrice k libovolně zadanému středu a poloměru napsat rovnici kružnice. Nepotřebuje zde již konkrétní střed a poloměr k tomu, aby si dokázal představit, jak by pokaždé tuto rovnici sestavil. Dovede popsat vlastními slovy, jak tato rovnice obecně souvisí se samotnou definicí kružnice.

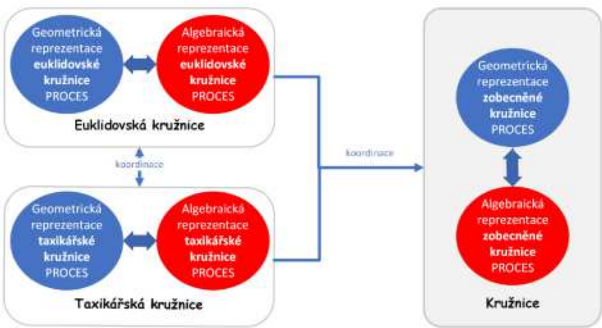
- Objekt: Jedinec zde dokáže provádět s kružnicí mentální akci. Zvládá například rovnice kružnic mezi sebou porovnávat a vysvětlit, jakým způsobem byly z v rámci definice odvozeny. Prováděnou akcí na tomto objektu algebraické reprezentace kružnice je v tomto případě akce *porovnání*.

Obdobně jako u pojmu vzdálenost, jedinec může začínat na různých úrovních chápání kružnice v euklidovské geometrii, aby byl schopen integrovat taxikářskou metriku do jejího celkového schématu (viz obrázek 8.7). Je však nezbytné ho postupně přivést k procesnímu chápání jak euklidovské, tak taxikářské kružnice.



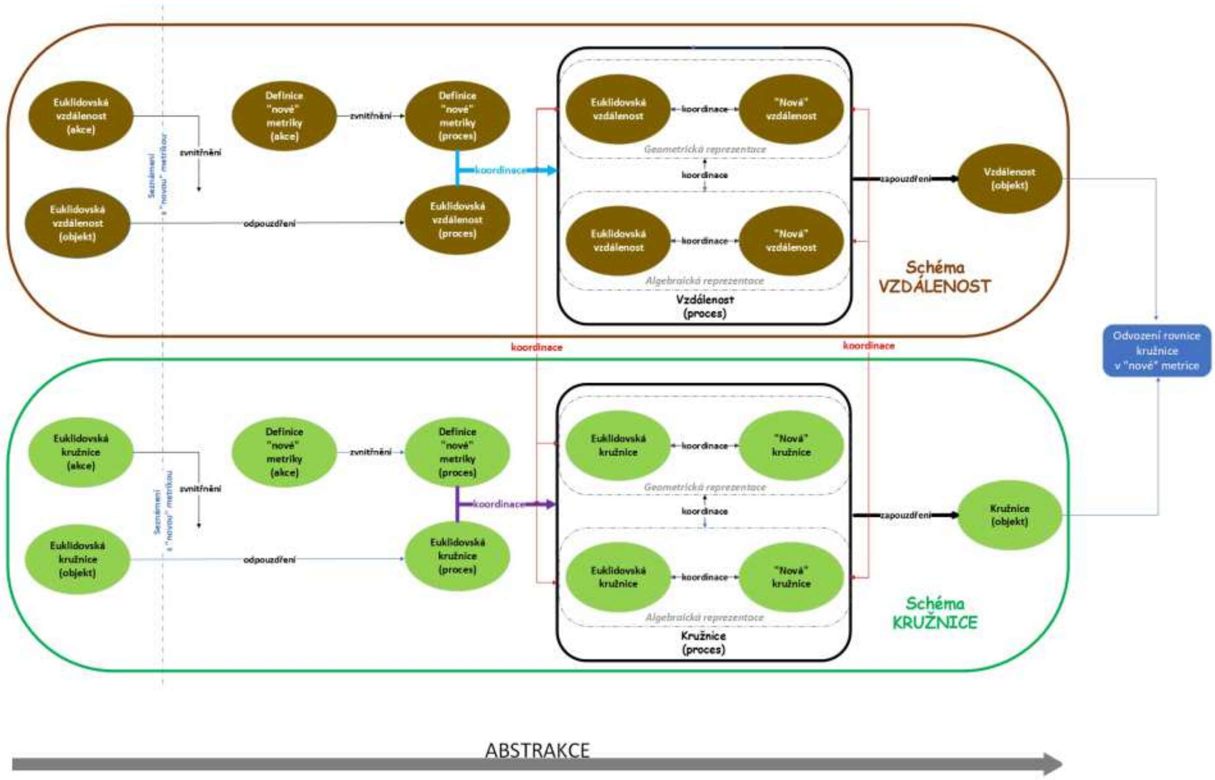
Obrázek 8.7: Ilustrace možných cest, kterými se žák může ubírat při začleňování „nové“ metriky do svého stávajícího chápání pojmu kružnice (viz. str. 148) pro větší velikost.

Teprve při setkání obou kružnic na úrovni procesů pak může postupně docházet k vnitřním koordinacím jejich geometrických a algebraických reprezentací (obr. 8.8), které jsou zde vyznačené oboustrannými šipkami, a k vzájemným koordinacím jednotlivých procesů z obou schémat, což je v obrázku znázorněno jednoduchou šipkou. Jedinec nakonec může toto porozumění zapouzdřit do objektu nazvaného kružnice.



Obrázek 8.8: Znázornění vzájemných koordinací algebraických a geometrických reprezentací procesů euklidovské a taxikářské kružnice.

Na obrázku 8.9 jsou kompilovány předchozí ilustrace možných cest, které jedinec může učinit, aby integroval novou definici vzdálenosti do svých existujících schémat vzdálenosti a kružnice a nakonec odvodil rovnici kružnice v této nové metrice. Může začít na různých úrovních porozumění euklidovské vzdálenosti a kružnice, ale musí v obou případech dosáhnout vždy jejich procesního chápání, aby byl schopen provést vzájemnou koordinaci s nově vytvořenými procesními představami taxikářské kružnice (fialové šipky) a taxikářské vzdálenosti (modré šipky). Tyto vzájemné koordinace mohou vést k vytvoření obecných procesů *kružnice* a *vzdálenosti*. Jakmile jsou tyto nové procesy vytvořeny, jedinec může začít vzájemně koordinovat libovolnou kombinaci jejich algebraických a geometrických reprezentací, aby tak dále rozvíjel své porozumění obou pojmů. Nakonec může každý z těchto nových procesů zapouzdřit do objektu, na kterém pak může provádět mentální transformaci, jejímž výsledkem je rovnice kružnice v dané metrice.



Obrázek 8.9: Možné cesty k odvození rovnice kružnice v nové metrice (viz. str. 149 pro větší velikost).

Ovlivnění schémat kružnic

Při rozvoji mentálního schématu postupně vznikají nové vztahy mezi jeho složkami. Nové akce, procesy nebo objekty jsou poté začleněny do existujícího schématu prostřednictvím vzájemných vztahů. Tento proces může zahrnovat také interakci s jinými schématy, což vede k vytvoření nového schématu, které integruje složky obou původních schémat (Arnon, 2014).

V tabulce z genetické dekompozice Kemp (2018) je shrnutí možných úrovní interakce mezi schématy euklidovské a taxikářské kružnice (obr. 8.10). Dynamika tohoto procesu je však poměrně složitá. Studenti, kteří se účastnili její studie, však měli již daleko hlubší povědomí o euklidovské geometrii než o taxikářské geometrii, což vedlo k přirozenému přenosu znalostí z jejich euklidovského schématu do taxikářského schématu. Tyto úrovně jsou v tabulce zvýrazněny červeným obrysem (inter-intra, trans-intra a trans-inter). Modře vyznačené úrovně (intra-inter, intra-trans a inter-trans) naznačují ty úrovně, kde je možné naopak očekávat přenos znalostí spíše z taxikářské geometrie do euklidovské geometrie. Úrovně s kombinací oranžových a modrých okrajů pak odkazují na ty situace, kdy jedinec přenáší znalosti buď v jednom směru nebo

Kružnice	Intrafáze v Taxikářské geometrii	Interfáze v Taxikářské geometrii	Transfáze v Taxikářské geometrii
Intrafáze v Euklidovské geometrii	Jedinec není schopen v žádné z obou geometrií najít souvislost, jak konstrukce kružnice a její rovnice souvisí s její definicí a jak jsou algebraické a geometrické reprezentace vzájemně propojeny. Není schopen sestavit rovnici kružnice ani popsat její strukturu. Pracuje pouze s lokálními vlastnostmi (např. tvar, operátory v rovnici...)	Jedinec již začíná v taxikářské geometrii nacházet souvislosti, jak by mohla konstrukce kružnice a její rovnice souviset s její definicí a jak jsou algebraické a geometrické reprezentace vzájemně propojeny. Není však schopen přenést tyto náležitosti do euklidovské geometrie a je schopen dělat pouze lokální pozorování mezi reprezentacemi napříč oběma geometriemi	V taxikářské geometrii již jedinec porozuměl tomu, jak kontrukce kružnice a její rovnice souvisí s její definicí a jak jsou algebraické a geometrické reprezentace mezi sebou vzájemně propojeny. Není schopen však přenést tuto znalost do euklidovské geometrie a je schopen dělat pouze lokální pozorování jednotlivých vztahů mezi reprezentacemi napříč oběma geometriemi.
Interfáze v Euklidovské geometrii	Jedinec již začíná v euklidovské geometrii nacházet souvislosti, jak by mohla konstrukce kružnice a její rovnice souviset s její definicí a jak jsou jejich algebraické a geometrické reprezentace vzájemně propojeny. Není však ještě schopen přenést tyto náležitosti do taxikářské geometrie a je schopen dělat pouze lokální pozorování mezi reprezentacemi napříč oběma geometriemi.	Jedinec začíná v obou geometriích nacházet souvislosti, jak by mohla konstrukce kružnice a její rovnice souviset s její definicí a jak jsou algebraické a geometrické reprezentace vzájemně propojeny. Může již začít popisovat konstrukci nebo strukturu rovnice kružnice i jinak, než pouze v rámci lokálního pozorování nebo vlastností obou reprezentací.	V taxikářské geometrii již jedinec chápe, jakou přímou souvislost má konstrukce kružnice a její rovnice s její definicí a jak jsou jejich algebraické a geometrické reprezentace vzájemně propojeny. Začíná již přenášet znalosti z taxikářské geometrie do geometrie euklidovské s cílem vytvořit zde stejná propojení, která vidí v euklidovské geometrii.
Transfáze v Euklidovské geometrii	V euklidovské geometrii již jedinec porozuměl, jak konstrukce kružnice a její rovnice souvisí s její definicí a jak je algebraická a geometrická reprezentace mezi sebou vzájemně propojena. Není schopen však přenést tuto znalost do geometrie taxikářské a je schopen dělat pouze lokální pozorování jednotlivých vztahů mezi reprezentacemi napříč oběma geometriemi.	V euklidovské geometrii již jedinec chápe , jak přímo souvisí konstrukce kružnice a její rovnice s její definicí a jak jsou jejich algebraické a geometrické reprezentace vzájemně propojeny. Začíná již přenášet znalosti z euklidovské geometrie do geometrie taxikářské s cílem vytvořit zde stejná propojení, která vidí v euklidovské geometrii.	Jedinec již úplně zobecnil pojem kružnice a má souvislé porozumění tomu, jakým způsobem jsou konstrukce kružnice a její rovnice v daném metrickém prostoru přímým důsledkem její definice. Zobecnil tuto strukturu jak geometricky, tak algebraicky.

Obrázek 8.10: Genetická dekompozice pro vzájemnou interakci schémat kružnice (Kemp, 2018)

osciluje mezi euklidovským a taxikářským schématem, přičemž cílem je vždy navázat silnější spojení mezi různými reprezentacemi kružnice v obou geometriích.

Pokud žáci navážou dostatečně pevná tato spojení mezi algebraickými a geometrickými reprezentacemi pojmů jak v euklidovské, tak v taxikářské geometrii, ty dostatečně zkoordinují, dá se pak očekávat, že již budou schopni zobecnit pochopení pojmu kružnice (úroveň trans-trans). Vizualizací a algebraickým definováním kružnice v netypickém kontextu taxikářské geometrii (případně jiné neeuklidovské geometrie) si tak jedinci budují pevnější strukturu schématu pro tento pojem, díky které pak mohou snadněji identifikovat, které části jejich představy pojmu kružnice jsou součástí formální definice a které nejsou, a toto zobecnění pak případně přenést i do jiné metriky mechanismem generalizace (Kemp & Vidakovic, 2022).

Tematizace pojmu *kružnice*

Pokud jedinec dokáže na základě předložené nové metriky sestrojit kružnici v této metrice a odvodit její rovnici, pak hovoříme o tom, že tento pojem kružnice dostatečně „ztematizoval". S velkou pravděpodobností pak již dovede poskytnout geometrické a algebraické reprezentace kružnic pro libovolnou metriku a rozumí tomu, jak jsou tyto reprezentace navzájem propojeny. Uvědomuje si totiž podstatu definice a v rámci různých metrik je chopen využívat k jejímu vyjádření všechny typy reprezentací (geometrické, algebraické, verbální).

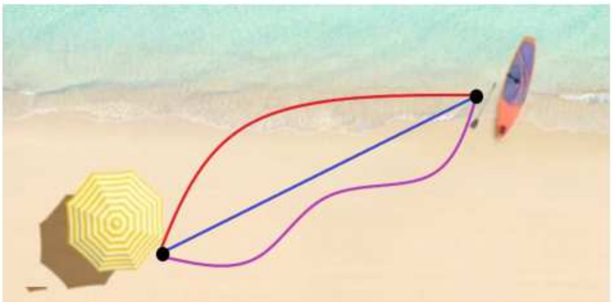
8.3 Navržené aktivity

Navštivme spolu Barcelonu a čtvrť Eixample (obr. 8.11), která je jedním z nejimpresivnějších příkladů urbanistického plánování, navrženého Ildefonsem Cerdou (1815-1876). Vyniká svým fascinujícím mřížovým vzorem ulic. Pokud by zde dnes slavný Euklides žil, pravděpodobně by pochyboval o tom, že „nejkratší" vzdálenost mezi dvěma body je vždy přímá délka úsečky spojující oba body.

Obrázek 8.11: Barcelona a její čtvrť Eixample.

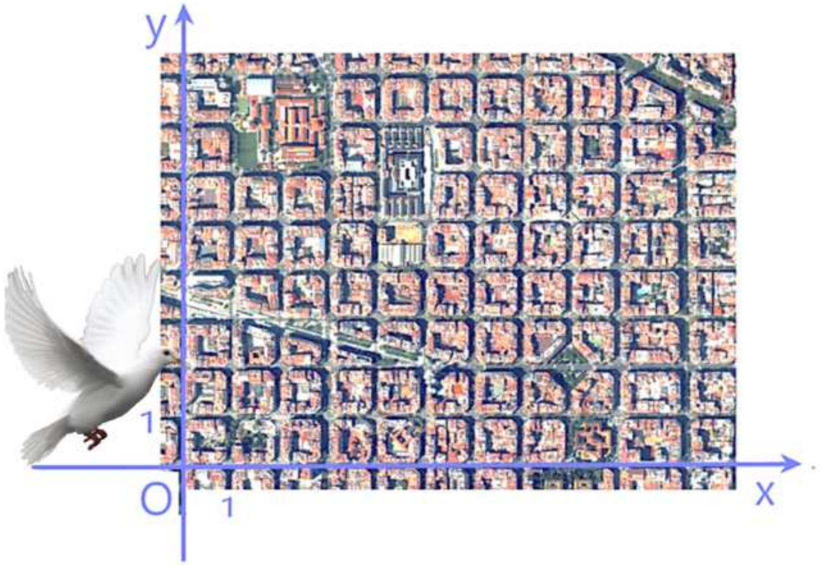
Úloha 1: Euklidovská vzdálenost

a) Jsme na slunečné pláži Barceloneta a máme vyznačené tři trasy, po kterých se můžeme přemístit od deštníku ke člunu. Která z nich představuje vzdálenost obou míst (obr. 8.12)?



Obrázek 8.12: Úloha 1 *a*).

b) Do první plánku čtvrtě Eixample (obr. 8.13) zakresli dva body o souřadnicích [1,2] a [4,6]. Vyznač červeně vzdálenost, kterou urazí mezi těmito dvěma místy letící holub Euklides, to znamená vzdálenost euklidovskou.

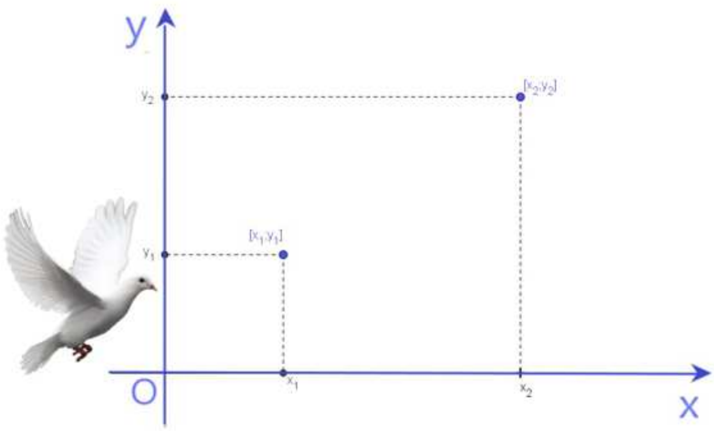


Obrázek 8.13: Úloha 1 *b*), 1 *c*), 1 *d*)

c) Vypočítej vzdálenosti mezi jejich $x-$ovými a $y-$ovými souřadnicemi (horizontální a vertikální vzdálenosti). Tyto vzdálenosti do stejného plánku zakresli modře a popiš danou hodnotou. Jaký útvar vznikl zakreslením všech těchto vzdáleností červené a modré barvy do jednoho obrázku .

d) Jak použiješ modře zakreslené vzdálenosti v části *c*) k výpočtu vzdálenosti, kterou uletěl holub Euklides mezi těmito dvěma body v části b)? Kterou známou větu k tomu použiješ?

e) Zopakuj vše po vzoru *b*) a *c*) v plánku bez zakreslených ulic a s libovolnými body $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$ (obr. 8.14).



Obrázek 8.14: Úloha 1 *e*), 1 *f*)

f) Reflexe: Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$ v euklidovské geometrii lze vypočítat jako $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Napiš stručně svými slovy, jak je tento vztah znázorněn ve tvé předchozí kartézské soustavě souřadnic.

Pedagogický cíl pro Úlohu 1

Cílém této úlohy je, aby si žák v ideálním případě uvědomil, že v rámci úloh *a*) a *b*), kdy vytvoří pravoúhlý trojúhelník, může s použitím Pythagorovy věty vypočítat délku jeho přepony, což je hledaná euklidovská vzdálenost mezi těmito dvěma body. Až tento fakt v úloze *e*) zobecní na libovolné dva body, měl by se pokusit zreflektovat podobnost mezi poskytnutým vzorcem pro vzdálenost v euklidovské geometrii a svým výpočtem v mříži v úloze *d*) a *e*), Cílem je, aby nakonec pochopil strukturu tohoto vzorce jak po stránce geometrické, tak algebraické.

Úloha 2: Taxikářská vzdálenost

a) V plánku čtvrti Eixample máme vyznačena dvě místa A a B, mezi kterými se potřebujeme přemístit, a tři možné trasy, kudy nás může taxikář vzít (obr. 8.15).

   i) Která trasa je nejkratší?

   ii) Kterou trasu si taxikář z těchto tří zakreslených pravděpodobně za normálního provozu vybere?

   iii) Existuje kratší trasa? Existuje delší trasa?

   iv) Jaký útvar zde vytvoří oblast všech najkratších tras?

Obrázek 8.15: Úloha 2 *a*)

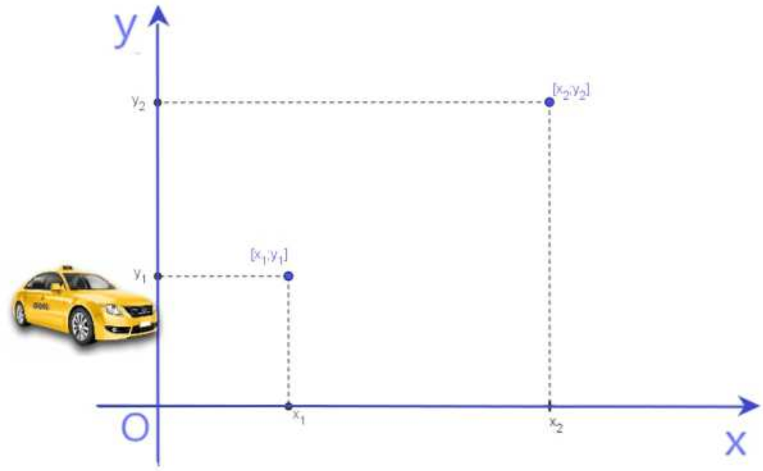
b) Zakresli do plánku místa o souřadnicích $[1, 2]$ a $[4, 6]$. Zobraz nejméně klikatou trasu taxikáře mezi těmito dvěma místy, to znamená, aby tato trasa tvořila odvěsny pravoúhlého trojúhelníka.

c) Vypočítej délku každé z jeho odvěsen pomocí $x-$ových a $y-$ových souřadnic daných dvou bodů. Tyto vzdálenosti v plánku vyznač a popiš jejich hodnotou.

d) S použitím svého řešení *c*) vypočítej celkovou délku této trasy mezi oběma body v taxikářské geometrii.

Obrázek 8.16: Úloha 2 *b*) 2 *c*), 2 *d*)

e) Zopakuj vše po vzoru *b*) a *c*) v plánku bez zakreslených ulic a s libovolnými body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$. Použij tyto informace k výpočtu vzdálenosti $|PQ|$ v taxikářské geometrii.



Obrázek 8.17: Úloha 2 *e*)

f) Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1; y_1]$ a $Q[x_2; y_2]$ v taxikářské geometrii lze vypočítat pomoci vztahu $|PQ| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Napiš stručně svými slovy, jak je tento vztah znázorněn ve tvé předchozí kartézské soustavě souřadnic a proč je nutné do vzorce zahrnout i uvedené absolutní hodnoty?

Pedagogický cíl pro Aktivitu 2

Cílem této úlohy je, aby žák v částech *a*) – *c*) pochopil, že k nalezení vzdálenosti mezi dvěma body v taxikářské geometrii lze použít rozdíl x–ových a y–ových souřadnic obou bodů. Dotazem na jiné, ale stejně dlouhé trasy pevně věřím, že si žák uvědomí, že i když existuje více způsobů znázornění taxikářské vzdálenosti, metoda výpočtu přes pravoúhlý trojúhelník povede k výpočtu délky všech těchto nejkratších cest. Poté, co tento fakt v úloze *e*) zobecní na libovolné dva body, by měl hledat souvislosti mezi poskytnutým vzorcem pro vzdálenost v taxikářské geometrii a popisy v kartézské soustavě souřadnic. Propojením těchto geometrických a algebraických reprezentací by měl nakonec lépe pochopit podstatu tohoto vzorce.

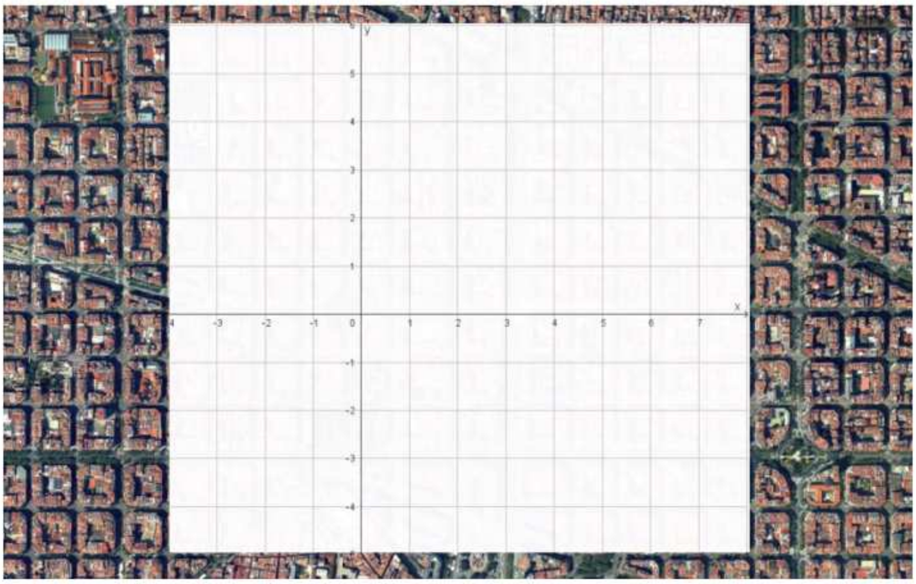
Úloha 3: Geometrická reprezentace taxikářské kružnice a její koordinace s euklidovskou kružnici

Obrázek 8.18: Úloha 3 *a*), 3 *b*)

a) Ve čtvrti Eixample se koná konference, které se máme osobně zúčastnit. Doprava má být pro účastníky co nejvíce pohodlná. Budou sice ubytováni v několika různých hotelích, všichni však poblíž a ve stejné vzdálenosti od konferenčního centra. To je na mapě znázorněno žlutým bodem. Modře jsou zde pak označeny ty hotely, které mají stále volnou kapacitu míst a jsou nám k dispozici. Znázorni v plánku taxikářskou vzdálenost mezi konferenčním centrem a každým ze znázorněných modrých hotelů. Potvrď, nebo vyvrať, zda má každý z nich od konferenčního centra opravdu stejnou taxikářskou vzdálenost.

b) Jak zní definice pojmu kružnice? Splňuje červeně zakreslený útvar tuto definici? V kladném případě vysvětli?

c) V přiložené čtvercové síti (obr. 8.19) nakresli taxikářskou kružnici se středem v bodě $S[2; 1]$ a poloměrem 4 jednotky. Zakresli nejdříve 6 různých bodů (hotelů), které na této kružnici budou ležet. Znázorni i 6 poloměrů (tras taxikáře), které jsi k nalezení těchto bodů použil.



Obrázek 8.19: Úloha 3 c), 3 d)

d) Reflexe: Mění se definice kružnice přechodem z euklidovské do taxikářské geometrie? Které vlastnosti kružnice platí současně v obou geometriích? Které vlastnosti naopak neplatí?

Pedagogický cíl pro Úlohu 3

V rámci této aktivity by měl jedinec začít přemýšlet o svém chápání definice kružnice a postupně se zaměřit na abstraktnější a obecnější uvažování. Tímto způsobem by se měl snažit odstranit omezení spojená s příliš konkrétním, figurálním nebo vizuálním chápáním tohoto pojmu. Jedinec by měl vytvářet spojení mezi svým chápáním poloměru jak v euklidovské, tak v taxikářské geometrii, a to jak geometricky, tak algebraicky.

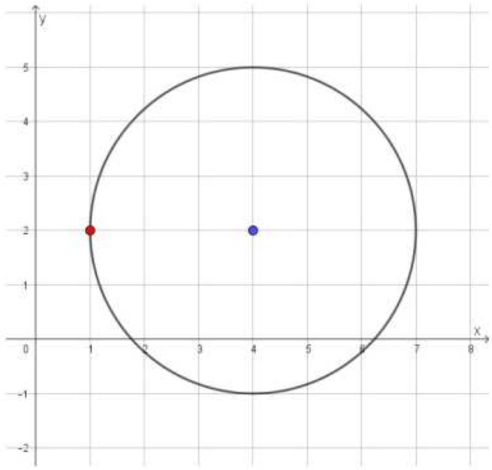
Úloha 4: Koordinace geometrických a algebraických reprezentací v euklidovské geometrii.

S použitím poskytnutého obrázku 8.20, vzorce pro vzdálenost v euklidovské geometrii a vzorového formátu vyřeš následující úlohy.

a) Uvedené body do obrázku zakresli, znázorni vzdálenosti mezi každým z nich a středem této kružnice. Tyto vzdálenosti vypočítej, výpočet pokaždé rozepiš podle vzorového formátu.

- Bod $[1, 2]$: $\sqrt{(1-4)^2 + (2-2)^2} = 3$
- Bod $[4, -1]$:
- Bod $[7, 2]$:
- Bod $[4, 5]$:

b) Pozoruješ nějaké podobnosti a rozdíly ve svých jednotlivých odpovědích v části a)? Vysvětli, jak případně tyto podobnosti a rozdíly souvisí s grafem této kružnice.



Obrázek 8.20: Úloha 4

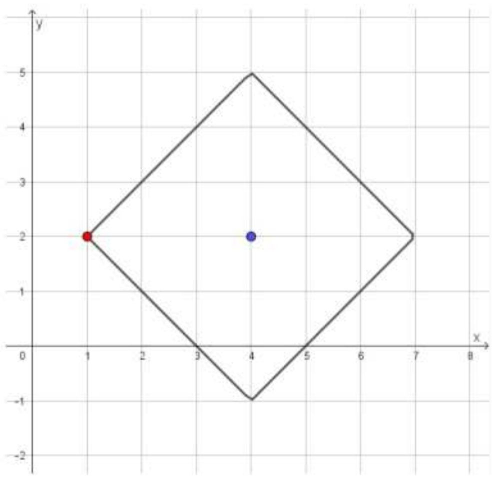
c) Reflexe: Použij nyní svých odpovědí *a*) a *b*) k napsání rovnice této kružnice v euklidovské geometrii. Na základě dvou tří vět pak vysvětli, co nám tato rovnice vlastně říká ve vztahu k danému grafu a k samotné definici kružnice.

Pedagogický cíl pro Úlohu 4

Cílem této aktivity je, aby jedinec lépe porozuměl tomu, jakým způsobem zde jednotlivé hodnoty z rovnice euklidovské kružnice korespondují s grafem této kružnice. Měl by si nejen uvědomit, že je zde použit vzorec pro euklidovskou vzdálenost, ale i důvod, proč je použit ve vztahu k samotné definici kružnice. Vzdálenost mezi libovolným bodem na kružnici a jejím středem musí být totiž konstantní a rovna poloměru této kružnice.

Úloha 5: Koordinace geometrických a algebraických reprezentací v taxikářské geometrii; vzájemná interakce schémat euklidovské a taxikářské kružnice.

S použitím poskytnutého obrázku 8.21, vzorce pro vzdálenost v taxikářské geometrii a vzorového formátu vyřeš následující úlohy.



Obrázek 8.21: Úloha 5

a) Uvedené body do obrázku zakresli, znázorni vzdálenost mezi každým z nich a středem kružnice. Tyto vzdálenosti vypočítej, výpočet pokaždé rozepiš podle vzorového formátu.

   - Bod $[1, 2]$: $|1 - 4| + |2 - 2| = 3$
   - Bod $[6, 1]$:
   - Bod $[6, 3]$:
   - Bod $[3, 4]$:

b) Pozoruješ nějaké podobnosti a rozdíly ve svých odpovědích v části *a*)? Vysvětli, jak tyto podobnosti a rozdíly souvisí s grafem této kružnice.

c) Reflexe 1: Použij nyní svých odpovědí v části *a*) a *b*) k napsání rovnice této kružnice v taxikářské geometrii. Na základě dvou tří vět pak vysvětli, co nám tato rovnice vlastně říká ve vztahu k danému grafu a k samotné definici kružnice.

d) Reflexe 2: Mění se definice kružnice přechodem z euklidovské do taxikářské geometrie? Které další geometrické či algebraické vlastnosti kružnice z euklidovské geometrie platí i v taxikářské geometrii? Které vlastnosti naopak neplatí?

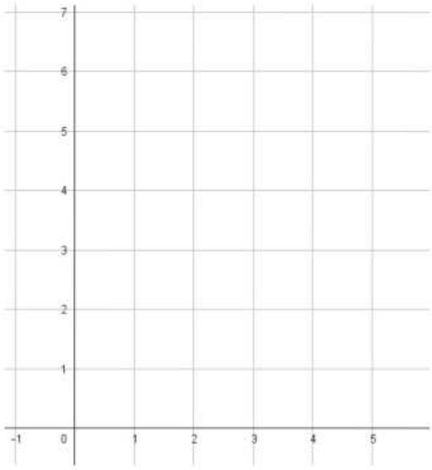
Pedagogický cíl pro Úlohu 5

Cílem této aktivity je, aby jedinec lépe porozuměl, jak jednotlivé hodnoty z rovnice taxikářské kružnice odpovídají jejímu grafu. Měl by si uvědomit nejen použití vzorce pro taxikářskou vzdálenost, ale také důvod jeho použití ve vztahu k definici kružnice. Vzdálenost mezi libovolným bodem na kružnici a jejím středem musí být konstantní a rovna poloměru. Porovnáním obou geometrií doufáme, že jedinec začne koordinovat související procesy svého euklidovského a taxikářského schématu kružnice, což povede ke zlepšení celkového porozumění tomuto pojmu.

Úloha 6: Tematizace schématu kružnice.

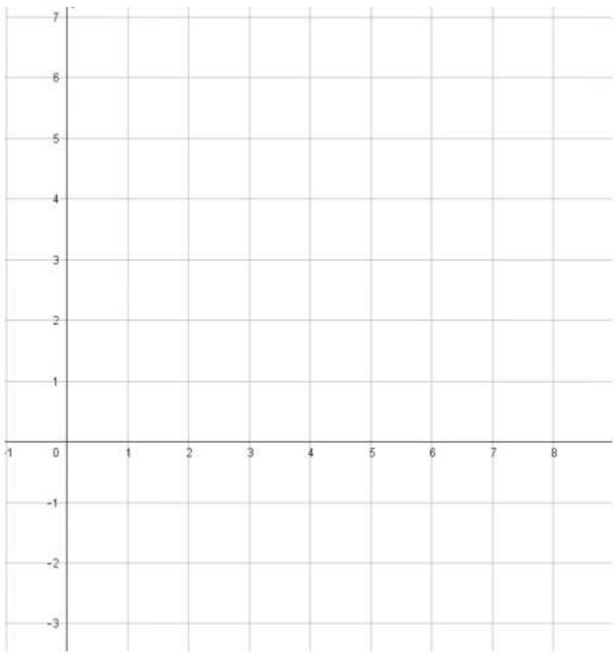
Je definována nová metrika (způsob měření vzdálenosti) mezi dvěma body $P(x_1, y_1)$ a $Q(x_2, y_2)$ jako $|PQ| = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$. Říká se jí proto *maximální* metrika.

a) Do přiložené čtvercové sítě (obr. 8.22) zakresli body $[1, 2]$ a $[4, 6]$. Použij uvedený vzorec k výpočtu vzdálenosti mezi těmito dvěma body a graficky tuto vzdálenost v dané síti znázorni. S použitím obrázku pak svými slovy vysvětli, jak se tato nová vzdálenost počítá.



Obrázek 8.22: Úloha 6 a)

b) Použij definici kružnice a poskytnutou čtvercovou síť (obr. 8.23) k sestrojení kružnice se středem v bodě $S[4,2]$ a poloměrem 3 jednotky v rámci této nové metriky. Uvědom si, jakým způsobem jsi použil předchozí způsoby měření vzdálenosti pří sestrojování jednotlivých poloměrů kružnic v euklidovské a taxikářské geometrii a pokus se tuto myšlenku přenést i sem.



Obrázek 8.23: Úloha 6 b)

c) S použitím definice kružnice napiš rovnici této konkrétní kružnice. Pokud je to nutné, použij některé body na své kružnici k ověření toho, zda je tato tvá rovnice správná.

d) Reflexe: Na základě dvou tří vět se pokus shrnout podobnosti a rozdíly mezi geometrickým znázorněním a rovnicí kružnice v této geometrii s kružnicemi v euklidovské a taxikářské geometrii. Které vlastnosti jsou společné v rámci všech tří geometrií? Které vlastnosti jsou naopak odlišné?

Pedagogický cíl pro Úlohu 5

Cílem této aktivity je, aby jedinec použil své dosavadní poznatky z euklidovské a taxikářské geometrie, které získal vzájemným porovnáváním a propojováním, a pokusil se znázornit vzdálenost a kružnici v nové metrice. Očekává se, že bude schopen určit i rovnici kružnice na základě definice, jelikož si uvědomí, že vzdálenost mezi libovolným bodem na kružnici a jejím středem musí být konstantní a rovna danému poloměru. Díky předchozím reflexivním abstrakcím by měl mít dostatečně souvislý pohled na tuto problematiku, aby úlohu úspěšně dokončil. Pokud se mu to podaří, lze předpokládat, že bude schopen nakreslit kružnici v jakékoli jiné metrice bez dodatečných pokynů, pouze s využitím svého obecného schématu kružnice a geometrických dovedností.

8.4 Zjištění

V této kapitole se zaměříme na podrobnou analýzu vyplněných pracovních listů obou žáků, které jsou naskenované a k dispozici v příloze A.1 na straně 150.

Veronika

- Úloha 1: V a) Veronika správně určila nejkratší vzdálenost mezi dvěma místy a označila ji jako „modrá čára“. V b) zakreslila nejkratší euklidovskou vzdálenost pro let holuba a dokreslila potřebný pravoúhlý trojúhelník. Uvědomila si, že odvěsny se vypočítají jako rozdíly x-ových a y-ových souřadnic, což dokázala svým numerickým výpočtem. V c) a d) vhodně zkoordinovala geometrickou a algebraickou reprezentaci euklidovské vzdálenosti a popsala použití Pythagorovy věty, kterou také správně aplikovala. V e) prokázala hlubší porozumění tím, že obecně popsala výpočet této vzdálenosti a zakreslila pravoúhlý trojúhelník, popsala odvěsny pomocí rozdílu souřadnic. Výpočet nezapsala, na dotaz byla schopna ho ale popsat vlastními slovy. V f) reflektovala vzorec pro vzdálenost dvou bodů v rovině v euklidovské geometrii a pochopila jeho význam s ohledem na geometrickou reprezentaci.

- Úloha 2: V a) Veronika dokázala porovnávat vzdálenosti a identifikovala všechny zakreslené trasy taxikáře jako stejně dlouhé, uvědomovala si, že tyto trasy jsou současně nejkratší a že neexistují kratší. Připustila, že mohou existovat trasy delší. Toto ukazuje její objektové chápání geometrických reprezentací taxikářské vzdálenosti, mentální akci na tomto objektu byla akce porovnávání. V b) správně zakreslila taxikářskou vzdálenost dvou míst jako odvěsny pravoúhlého trojúhelníka. V c) popsala tyto odvěsny pomocí rozdílu x-ových a y-ových souřadnic a provedla potřebné výpočty. V d) uvědomila si roli taxikářské vzdálenosti a správně ji určila sečtením obou odvěsen. V e) popsala obecný postup pro výpočet této vzdálenosti, ale neuvedla absolutní hodnoty. V f) reflektovala vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v taxikářské geometrii a uvědomovala si nutnost použití absolutních hodnot v rámci své vyvolané představy záporných souřadnic.

- Úloha 3: V a) Veronika správně zakreslila poloměry, určovala jejich hodnoty a porovnávala je, což dokazuje její objektové chápání taxikářské vzdálenosti. Identifikovala všechny body na taxikářské kružnici jako stejně vzdálené od středu. V b) poskytla osobní definici kružnice, která byla prakticky shodná s formální definicí kromě její chybějící části s kvantifikací. V c) zakreslila body na kružnici a související poloměry, koordinovala geometrickou reprezentaci vzdálenosti a poloměru. V d) reflektovala definici kružnice v různých metrikách a uvědomila si, že definice kružnice zůstává stejná, mění se pouze definice vzdálenosti.

- Úloha 4: V a) Veronika koordinovala geometrické a algebraické reprezentace vzdáleností jednotlivých bodů na kružnici od jejího středu, na základě poskytnutého obrázku a vzorového příkladu. V b) si uvědomila, že všechny její předchozí odpovědi popisují vzdálenosti bodů kružnice od jejího středu a že se výpočty liší jen souřadnicemi bodů. V c) zreflektovala všechny tyto souvislosti a zapsala rovnici této konkrétní kružnice. Vlastními slovy popsala, co nám tato rovnice říká, s ohledem na geometrickou i algebraickou reprezentaci. Napsala však, že neví, jak by tuto kružnici sestrojila. Po vzájemné úpravě umocněním na tvar obecné rovnice kružnice, na který byla z hodin matematiky zvyklá, si již tuto konstrukci představit uměla a byla schopna tuto konstrukci i popsat vlastními slovy. Projevila se zde nedostatečná koordinace geometrické a algebraické reprezentace kružnice z euklidovské geometrie a také skutečnost, že znalost obecné rovnice kružnice a schopnost ji použít nemusí vždy souviset s úplným koherentním porozuměním.

- Úloha 5: V a) Veronika koordinovala geometrické a algebraické reprezentace taxikářské vzdálenosti bodů na kružnici od jejího středu. V b) uvědomila si, že všechny její předchozí odpovědi popisují taxikářské vzdálenosti bodů kružnice od středu a že výpočty se liší jen souřadnicemi bodů. V c) zreflektovala tyto souvislosti a zapsala rovnici kružnice, popsala její význam geometricky i algebraicky. V d) identifikovala rozdíly mezi taxikářskou a euklidovskou kružnicí na základě vizuálních podob rovnic. Byla schopna ale slovy vysvětlit geometrické souvislosti. Na dotaz na další podobnosti a rozdíly kružnic v obou geometriích uvedla, že se mění tvar.

- Úloha 6: Problém v této úloze byla neznalost funkce maxima a jejího symbolického zápisu. Po rozhovoru se žákyní jsem se dozvěděl, že se s tím v průběhu studia nesetkala. To potvrzuje i její otázka u a) „Maximálně ujdu 3 kroky na ose x a 4 na ose y. Ale maximálně, takže můžu i míň?“ V důsledku této skutečnosti nebyla schopna úlohu samostatně vyřešit. Pro příště je tak nutné provést lepší a intuitivnější vysvětlení této metriky.

  Po vysvětlení tohoto zápisu byla navíc schopna úlohu a) vyřešit a vlastními slovy popsat, která strana z odvěsen pravoúhlého trojúhelníka by odpovídala maximální vzdálenosti. V tuto chvíli jí dával i samotný symbolický zápis smysl.

  Díky této skutečnosti byla schopna v úloze b) tuto kružnici zkonstruovat. Sestrojila si k tomu nejdříve osm pomocných bodů, které na dané kružnici leží, poté kružnici sestrojila.

  V c) si však s rovnicí kružnice nevěděla rady, pravděpodobně to souviselo právě s tím, že se s touto funkcí nesetkala a netušila, že s ní může pracovat jako s jakoukoliv jinou běžnou funkcí. Snažila se pravděpodobně hledat takovou podobu rovnice, na kterou je ze svého středoškolského studia zvyklá. Tato přirozená tendence hledat známý (podobný) vzorec je příkladem prototypového fenoménu, kdy se jedinci pokoušejí využít existující mentální modely pro řešení nových problémů.

- Závěr: Ukázalo se zde u Veroniky , že je důležité vytvářet aktivity, které podporují vyvolávání několika různých představ současně, což může vést k jejich vzájemnému konfliktu. Tento kognitivní konflikt ji poté mohl donutit hlouběji porozumět pojmům a napravit své stávající chápání euklidovské rovnice kružnice. Tím se lépe připravila na aplikaci těchto pojmů v nových situacích. Paměťové uchopení přesných postupů Veronice nestačilo, protože jí v této situaci neposkytlo dostatečně flexibilní mentální modely potřebné k vyřešení daného problému.

Jakub

- Úloha 1: V a) Jakub správně určil nejkratší vzdálenost mezi dvěma místy, jeho odpověď pak zněla: „prostřední čára, protože měří nejkratší vzdálenost“. V b) nejdříve špatně zakreslil souřadnice bodů, pravděpodobně ho na chybu upozornily číselné hodnoty v rámci Pythagorovy věty. Tuto chybu pak sám opravil. Důkazem je špatné původní znázornění a přepsaný výpočet Pythagorovy věty. Po opravě zakreslil nejkratší euklidovskou vzdálenost pro let holuba a v rámci c) pak dokreslil potřebný pravoúhlý trojúhelník. Uvědomil si, že odvěsny se vypočítají jako rozdíly x-ových a y-ových souřadnic, což dokázal svým numerickým výpočtem. V c) a d) vhodně zkoordinoval geometrickou a algebraickou reprezentaci euklidovské vzdálenosti a popsal použití Pythagorovy věty, kterou také správně aplikoval. V e) prokázal hlubší porozumění tím, že popsal obecný výpočet této vzdálenosti. Zakreslil tak pravoúhlý trojúhelník, popsal odvěsny pomocí rozdílu souřadnic (bez absolutních hodnot) a zapsal i obecný vztah pro tuto vzdálenost. Chyběly mu zde však po odmocnění rovnice druhé mocniny, na dotaz byl schopen chybu z nepozornosti okamžitě registrovat.

- Úloha 2: V a) Jakub dokázal porovnávat vzdálenosti a identifikoval všechny zakreslené trasy taxikáře jako stejně dlouhé, uvědomoval si, že tyto trasy jsou současně nejkratší a že neexistují kratší. Připustil, že mohou existovat trasy delší. Toto ukazuje jeho objektové chápání geometrických reprezentací taxikářské vzdálenosti, mentální akce na tomto objektu byla akce porovnávání. Byl navíc schopen v této konkrétní situaci popsat množinu všech nejkratších cest jako obdélník. V b) správně zakreslil taxikářskou vzdálenost dvou zadaných míst jako odvěsny pravoúhlého trojúhelníka. V c) popsal tyto odvěsny pomocí rozdílu x-ových a y-ových souřadnic a provedl potřebné výpočty. V d) si uvědomil roli taxikářské vzdálenosti a správně ji určil sečtením obou odvěsen. V e) popsal obecný postup pro výpočet této vzdálenosti, ale neuvedl absolutní hodnoty. V f) reflektoval vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v taxikářské geometrii a uvědomoval si nutnost použití absolutních hodnot, což popisuje slovy: „Mohl by být výsledek záporný, a vzdálenost nemůže být záporná“.

- Úloha 3: V a) Jakub správně zakreslil poloměry, určil jejich hodnoty a porovnával je, což dokazuje jeho objektové chápání taxikářské vzdálenosti. Identifikoval všechny body na taxikářské kružnici jako stejně vzdálené od středu. V b) poskytl osobní definici kružnice, která byla prakticky shodná s formální definicí, kromě chybějícího výrazu „v rovině“. Vlastními slovy pak popsal, proč se jedná o kružnici. V c) si zakreslil potřebné body na kružnici a s nimi související poloměry, koordinoval tak dostatečně geometrickou reprezentaci vzdálenosti a poloměru. V d) reflektoval definici kružnice v obou metrikách a uvědomil si, že zde v rámci definice zůstává stejná vzdálenost, mění se pouze tvar.

- Úloha 4: V a) Jakub úspěšně zkoordinoval geometrické a algebraické reprezentace vzdáleností jednotlivých bodů na kružnici od jejího středu, na základě poskytnutého obrázku a vzorového příkladu. V b) si poté uvědomil, že všechny jeho předchozí odpovědi popisují vzdálenosti bodů kružnice od jejího středu a že se výpočty liší jen souřadnicemi bodů. V c) zreflektoval všechny tyto souvislosti a zapsal rovnici této konkrétní kružnice.

Vlastními slovy popsal, co nám tato rovnice říká, s ohledem na její definici. Byl však schopný doplnit svými slovy i geometrický význam.

- Úloha 5: V a) Jakub úspěšně zkoordinoval geometrické a algebraické reprezentace taxikářské vzdálenosti bodů na kružnici od jejího středu, na základě poskytnutého obrázku a vzorového příkladu.. V b) si uvědomil, že všechny jeho předchozí odpovědi popisují taxikářské vzdálenosti bodů kružnice od středu a že výpočty se liší jen souřadnicemi konkrétních bodů. V c) vhodně zreflektoval tyto souvislosti a zapsal rovnici této kružnice. Neodpověděl zde však na otázku, co nám tato konkrétní rovnice říká. Vlastními slovy byl však na schopný popsat její význam geometricky s odkazem na předchozí úlohy. V d) byl schopen provést reflexi a podat důkaz o tom, že si uvědomuje, že definice kružnice se přechodem do jiné geometrie nemění, rovněž to, že poloměr zůstává stejný. Navíc dodal, že pro tyto konkrétní kružnice zůstal i střed stejný. Upozorňuje nakonec na rozdíly ve tvaru kružnice v rámci obou metrik.

- Úloha 6: Objevil se zde stejný problém jako u Veroniky, a to neznalost funkce maxima a jejího symbolického zápisu. Po rozhovoru i tento žák odpověděl, že se s ní zatím v průběhu svého studia nesetkal. Po vysvětlení jejího významu byl však okamžitě schopen poskytnout v úloze a) potřebnou geometrickou reprezentaci maximální vzdálenosti daných dvou bodů. V b) jde pozorovat, že v rámci řešení této úlohy se projevil jeho silný vliv manhattanské metriky. Vlivem předchozích úloh si proto nejdříve zakreslil dva body v taxikářské vzdálenosti 3 jednotek. Mezitím si ale asi vhodně zvnitřnil představu této nové metriky a pokračoval již správně ve vyhledávání odpovídajících bodů. Kružnici nakonec úspěšně sestrojil. V c) si však se zápisem rovnice kružnice Jakub rovněž nevěděl rady, pravděpodobně to souviselo, jako u Veroniky, rovněž s tím, že se s touto funkcí předtím nesetkal a netušil, že s ní může pracovat jako s jakoukoliv jinou běžnou funkcí. Poskytl jsem mu tak nakonec obrázek dvou obecných bodů a požádal ho, aby mi v něm ukázal maximální vzdálenost. Byl schopen odpověď okamžitě poskytnout. Vysvětlením toho, že tento uvedený jeho proces popisuje vlastně daný symbolický zápis maxima, si uvědomil, že s ním může pracovat jako s libovolnou jinou funkcí a byl schopen v c) poskytnout i její rovnici. d) Poté Jakub provedl reflexi a doložil tak, že si uvědomuje, že definice kružnice se přechodem do jiné geometrie nemění, že poloměr zůstává stejný, a že pro tyto konkrétní kružnice zůstává i střed stejný. Nakonec upozornil na rozdíly ve tvarech všech tří kružnic.

- Závěr: Jakub prokázal výraznější matematické dovednosti při koordinaci geometrických a algebraických reprezentací různých druhů vzdáleností a kružnic. Jeho schopnost rozlišovat mezi euklidovskou a taxikářskou geometrií byla zřetelná. Jeho schopnost reflexe nad výpočty a definicemi kružnic v obou geometriích ukazuje hluboké pochopení těchto a souvisejících matematických pojmů, což se ukázalo v jeho schopnosti aplikovat tyto teoretické znalosti v rámci jiné situace-maximální metriky.

Kapitola 9

Odpovědi na výzkumné otázky

1. „Jak žáci v rámci navržených aktivit přenášejí a aplikují své osobní definice geometrických pojmů, jako jsou kružnice, elipsa, parabola, hyperbola a osa úsečky, které získali během svého středoškolského studia, do kontextu taxikářské geometrie, a jak mohly tyto aktivity podpořit jejich porozumění těmto pojmům?“

   Žáci často přenášeli své nevhodné, neúplné nebo alternativní představy pojmů do kontextu taxikářské geometrie. V rámci navržených aktivit dostali příležitost si uvědomit, že aplikace naučených pojmů a postupů je někdy daleko od hlubšího porozumění. Uvědomili si zde riziko rychlého zobecnění jen na základě svých osobních představ a intuice, pochopili důležitost striktního dodržování definic v konkrétním geometrickém kontextu. Měli možnost vidět, že geometrický útvar je řízen svou definicí.

   Aktivity podnítily schopnost žáků reflektovat nad rozdíly mezi euklidovskou a taxikářskou geometrií a rozvíjeji tak jejich dovednost aplikovat matematické pojmy na nové a neznámé situace. Tento proces reflektování nad významem definic a aplikací matematických pojmů do nových kontextů je klíčovým krokem k hlubšímu porozumění matematice jako takové.

2. „Zda je možné na základě vhodně připravených aktivit v prostředí euklidovské a taxikářské geometrie, které jsou navrženy s ohledem na vzájemnou interakci schémat (APOS), dosáhnout toho, aby žáci ztematizovali pojem „kružnice“ a byli schopni odvodit její rovnici v maximální metrice.“

   Na základě provedených aktivit a výsledků jednotlivých úloh lze konstatovat, že se nám podařilo dosáhnout toho, aby žák ztematizoval pojem „kružnice“ a byl schopen odvodit její rovnici v maximální metrice. Jakub, který je zde jeho příkladem, ukázal schopnost pochopit a aplikovat geometrické pojmy v širším kontextu, a to prostřednictvím interakce schémat podle modelu APOS. Prokázal totiž následující dovednosti:

   - Správné určení vzdáleností v euklidovské a taxikářské geometrii: V úlohách ukázal, že rozumí výpočtům vzdáleností pomocí Pythagorovy věty v euklidovské geometrii a sečtení odvěsen v taxikářské geometrii. Toto prokázal správným zakreslením a výpočtem vzdáleností mezi body.
   - Koordinace geometrických a algebraických reprezentací: Jakub úspěšně propojil geometrické a algebraické reprezentace vzdáleností a kružnic. Ukázal, že dokáže přecházet mezi těmito reprezentacemi, což je klíčové pro hlubší matematické porozumění.

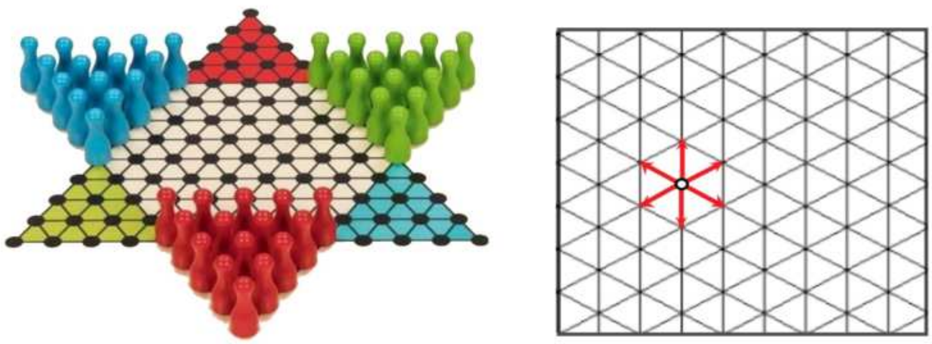
- Porozumění a aplikace definic kružnice v různých metrikách: Jakub byl schopen pochopit a aplikovat definici kružnice jak v euklidovské, tak v taxikářské geometrii. V obou geometriích identifikoval všechny body na kružnici jako stejně vzdálené od středu.
- Reflexe nad významem rovnic kružnic: Jakub byl schopen nejen zapsat rovnice kružnic v obou metrikách, ale také reflektovat jejich geometrický význam. Uvědomil si, že definice kružnice se nemění přechodem do jiné geometrie, ale mění se pouze tvar kružnice.
- Pochopení maximální metriky: Ačkoliv měl Jakub zpočátku problém s funkcí maxima, po vysvětlení tohoto konceptu byl schopen aplikovat jej na výpočet maximální vzdálenosti, následně pak setrojit a zapsat rovnici kružnice v této metrice.
- Aplikace teoretických znalostí na nové situace: Jakub prokázal schopnost generalizovat získané teoretické znalosti na nové situace. To se ukázalo v jeho schopnosti vypořádat se s novým pojmem maximální metrika.

Prostřednictvím interakce schémat (APOS) pravděpodobně oba žáci rozvinuli hlubší porozumění. Jakub byl ale nakonec ten, kdo byl schopen aplikovat tyto pojmy v širším kontextu. U Veroniky se při pokusu o tematizaci projevilo pravděpodobně nedostatečné propojení geometrických a algebraických reprezentací kružnice již v rámci euklidovské geometrie. I když znala středovou rovnici, neuvědomovala si její souvislost s geometrickou definicí kružnice a konceptem euklidovské vzdálenosti. Bylo by tak u ní ještě potřeba odpouzdřit tento objekt do dílčích procesů a ty důkladněji vzájemně zkoordinovat. Jakubova schopnost reflektovat nad definici a rovnicemi kružnic v různých metrikách však ukazuje, že vhodně navržené aktivity mohou vést k úspěšnému pochopení a aplikaci těchto pojmů.

Kapitola 10

Budoucí aktivity a výzkum

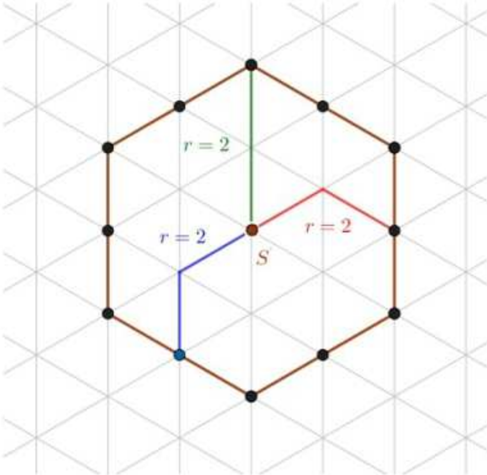
Po detailnějším prozkoumání taxikářské geometrie, například prostřednictvím Krause (1985), je možné pokračovat obdobnou cestou, a to v objevování dalšího světa, který využívá rovinu rovnostranných trojúhelníků, tzv. izometrickou mřížku. Pokud se po ní jako figurka budeme pohybovat, může být vyvinuta geometrie, která je odlišná od té euklidovské a taxikářské. Na základě rešerše některých prací je tato nová geometrie označována jako „Iso-Taxi" geometrie (Sowel, 1989). Pokud se soustředíme na fyzický vzhled mřížky, je zřejmé, že se podobá hrací ploše jedné známé deskové hry (obr. 10.1), a proto se v některých odborných pracích uvádí také



Obrázek 10.1: Desková hra Čínská dáma a izometrická mřížka jako model „Iso-Taxi" geometrie.

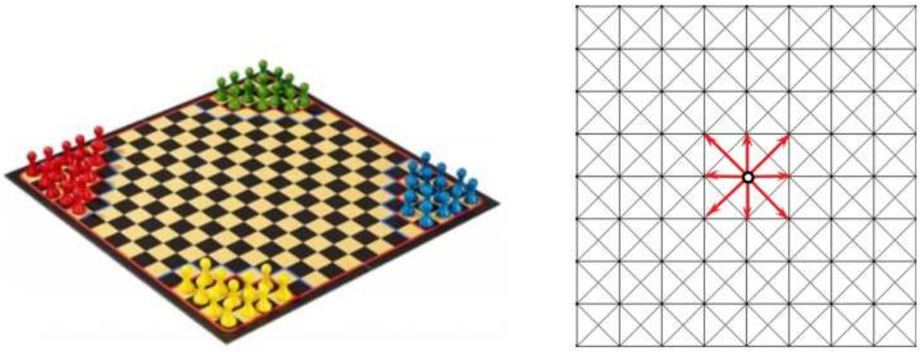
pod jménem „geometrie čínské dámy" (Yancey, 2002).

Nebudeme snad prozrazovat příliš mnoho, když poskytneme alespoň malou ochutnávku. Kružnice se i zde skládá ze všech bodů v rovině stejně vzdálených od pevně daného bodu nazývaného střed. Když tyto body vyznačíme na této mřížce, dostaneme i v tomto světě netradiční podobu kružnice: pravidelný šestiúhelník (obr. 10.2).



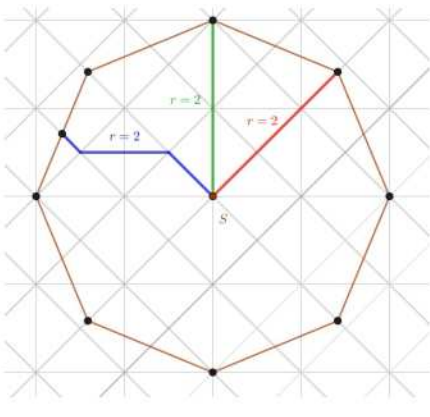
Obrázek 10.2: „Iso-Taxi“ kružnice se třemi barevně vyznačenými poloměry $r = 2$.

S matematicky nadanějšími žáky je další možnost objevovat svět „Halma“ geometrie (vlastní pojmenování). Ve stolní deskové hře Halma se figurka může přesunout na jakékoli sousední pole ve vodorovném, svislém nebo diagonálním směru (obr. 10.3).



Obrázek 10.3: Desková hra Halma a diagonální mřížka jako model „Halma“ geometrie.

Asi lze očekávat, že i v této geometrii se bude tvar kružnice vyvíjet poněkud netradičně, přičemž vznikne osmiúhelník (obr. 10.4).



Obrázek 10.4: „Halma“ kružnice se třemi barevně vyznačenými poloměry $r = 2$.

Podobně lze pozozovat všechny geometrické objekty, které byly součástí této práce. A nakonec i další jiné geometrické světy by mohly být zkoumány a nové věty by mohly být stanoveny jako platné nebo neplatné pro vybranou geometrii. Změna funkce vzdálenosti a přechod na jinou konfiguraci souřadnicové mřížky vede k velice pestrým geometriím, které se odlišují od té euklidovské a poskytují tak vhodnou inspiraci pro výuku. I zde je možné sledovat a analyzovat, jak postupně žáci přenášejí a rozvíjejí své stávající porozumění geometrickým pojmům a definicím, jak si uvědomují roli předpokladů v axiomatických systémech a jejich vliv na tvary a vlastnosti známých geometrických útvarů.

Kapitola 11

Závěr

Jak jsme hned v úvodu této práce zjistili, napsání Základů kolem roku 300 př. n. l. bylo nepochybně velkým intelektuálním počinem v dějinách matematiky, protože zavedlo pojem dedukce jako nezbytného prostředku pro ověřování znalostí získaných empirickými metodami. Euklides formuloval řadu definic, obecných pojmů a postulátů, které tvořily základ tohoto jeho systému. Pro starověké Řeky byly tyto obecné pojmy a postuláty „samozřejmými pravdami“, které byly podpořeny jejich omezenými zkušenostmi na malé části Země. Věty, které z nich logicky vyplývaly, byly proto také považovány za pravdivé. Euklidovská geometrie tak získala status skutečného výkladu fyzického prostoru.

Nepřekonatelné postavení euklidovské geometrie však zpochybnil pátý postulát o rovnoběžkách, který obsahoval tvrzení o nekonečných vzdálenostech, jež nebylo již možné ověřit lidskou zkušeností. Vyvolával proto mezi matematiky značnou úzkost, což vedlo k rozsáhlému zkoumání zaměřenému na objasnění a k lepší ukotvení samotných základů této geometrie. Dva tisíce let pokusů dokázat postulát o rovnoběžkách nebo formulovat uspokojivý náhradní postulát některými z nejzdatnějších matematiků své doby skončily žalostným neúspěchem. Nevysvětlitelnost této nepříjemné situace nakonec zrodila myšlenku, že postulát o rovnoběžkách nelze dokázat z ostatních definic, obecných pojmů a postulátů. Výzkum se proto zaměřil na geometrie, které by vznikly z jeho negace. Objevení neeuklidovské geometrie se tak stalo logickou nevyhnutelností.

U zrodu stáli Gauss, Lobatševskij a Bolyai, kteří prokázali velkou vizi a odvahu při šíření základních myšlenek této nové geometrie. Museli se ale osvobodit z pouta „zdravého rozumu“, „intuice“ a Kantovy filozofie, která byla v té době silně dominantní. Kritici doufali, že jejich teorie bude nekonzistentní a ztratí tak svou hodnotu. Konstrukce jejich modelů v rámci euklidovské geometrie tyto jejich naděje zhatila. Ve světle těchto nových poznatků se poté vědecký svět začal postupně zabývat základními otázkami o povaze prostoru a povaze matematiky, mimo jiné: Je prostor nutně euklidovský?

Všechny výše uvedené historické souvislosti nám tím poskytly tyto první cenné poznatky o tom, jak by taxikářská geometrie mohla sehrát významnou roli ve výuce na střední škole:

1. Historické okolnosti a duch doby:

   Historie nám ukazuje, že je důležité pochopit okolnosti, ve kterých byly matematické objevy učiněny. Společenské normy a přesvědčení o tom, co je „pravda“ nebo „správné“, mohou bránit objektivnímu poznání nových myšlenek. Matematici jako Gauss, Bolyai a Lobačevskij byli sice uvězněni duchem své doby, přesto však dokázali přemýšlet nezávisle a objevit tyto nové geometrické systémy. Taxikářská geometrie tak může žákům tyto okamžiky přiblížit, navíc jim pomoci pochopit, že matematika není statická, ale vyvíjí se v rámci potřeb a nových myšlenek své doby.

2. Osobní úsudky a preference:

   Historie nám ukazuje, že osobní úsudky a preference hrály ve vývoji matematiky klíčovou roli. Euklides si vybral určité definice a postuláty, které pak tvořily základ jeho geometrického systému. V kontextu taxikářské geometrie tak mohou žáci pochopit, že různé volby postulátů a definic mohou vést k odlišným geometrickým systémům, a že tyto volby mohou mít zásadní vliv na podobu a vlastnosti známých geometrických útvarů.

3. Význam různých perspektiv:

   Historie matematiky ukazuje, že mnohé významné objevy vznikly díky tomu, že matematici zkoumali problémy z různých úhlů pohledu. Porovnáním taxikářské a euklidovské geometrie se žáci naučí, že různé geometrické systémy mohou nabídnout různé pohledy na stejný problém.

4. Flexibilita myšlení:

   Dějiny matematiky nám ilustrují, jak nové myšlenky a metody mohou zcela převrátit naše dosavadní porozumění. Porovnáváním různých geometrických systémů může žákům pomoci rozvíjet flexibilitu myšlení a ochotu přijímat nové myšlenky.

5. Kritické myšlení a reflexe:

   Historie nám ukazuje, že práce matematiků zahrnuje více než jen nalezení správného řešení daného problému, což je patrné u postulátu o rovnoběžkách. Důležité je také přetvoření problému, jeho umístění do kontextu a kritická reflexe. Taxikářská geometrie proto může žákům poskytnout prostor přemýšlet o matematických problémech poněkud jiným a netradičním způsobem, což může pomoci rozvíjet jejich kritické myšlení a schopnosti reflexe nad vypozorovanými závěry.

6. Nezávislé myšlení a vytrvalost:

   Příběhy matematiků, jako byl Lobačevskij, kteří navzdory nedostatku uznání během svého života vytrvali ve svém výzkumu, ukazují hodnotu nezávislého myšlení a jejich vytrvalost. Podobně může taxikářská geometrie povzbudit žáky k tomu, aby byli odvážní ve svém myšlení a nebáli se prozkoumávat tyto nové a neobvyklé koncepty, i když se mohou zdát být na začátku v rozporu s jejich dosavadními představami nebo obecně uznávanými názory.

7. Test logického uvažování:

   Myšlenky by neměly být odmítány jen proto, že jsou v rozporu s obecně přijímanými názory. Musí být však vždy podrobeny testu logického uvažování. Taxikářská geometrie nabízí žákům příležitost testovat své myšlenky a porovnávat je s euklidovskou geometrií, čímž si mohou prohlubovat své logické a analytické dovednosti.

8. Filozofické přesahy mimo matematiku:

   Taxikářská geometrie může být i vhodnou ukázkou toho, že naše intuitivní představy o světě nejsou jedinou možnou interpretací reality. Zatímco v euklidovské geometrii je nejkratší cesta mezi dvěma body ta přímá, v taxikářské geometrii je to cesta po pravoúhlé mřížce, jako kdybychom se pohybovali po ulicích města. Tato jednoduchá myšlenka však odráží hlubší pravdu o lidském vnímání a komunikaci. Každý z nás totiž vnímá svět skrze své vlastní zkušenosti, ze svého úhlu pohledu a v rámci kulturního a společenského

> kontextu. To, co je pro jednoho člověka zřejmé, může být pro jiného zcela nepochopitelné. Tak jako v taxikářské geometrii, kde cesta z bodu A do bodu B nemusí být vždy přímá, ani naše cesty k porozumění a poznání nejsou vždy jednoduché a přímočaré. Tato myšlenka může žáky vést k větší empatii a otevřenosti vůči jiným názorům a pohledům. Uvědomění si, že naše představy mohou být odlišné od představ druhých, nám umožňuje lépe komunikovat, spolupracovat a řešit problémy. Taxikářská geometrie nám tedy nepřipomíná jen odlišné způsoby měření vzdáleností, ale i to, jak různé mohou být naše cesty k pravdě a porozumění.

Další cennou lekci nám poskytla druhá část této práce. Obsahovala kvalitativní studii, která se opírala o předem uvedené relevantní teoretické rámce. Hlavním jejím cílem bylo získat hlubší vhled do toho, jak žáci přenášejí své stávající porozumění do této nové geometrie, identifikovat klíčové momenty, na které při tomto procesu naražejí, analyzovat jejich miskoncepty, jež se v této souvislosti projeví, a zkoumat chyby, k nimž dochází. Zároveň se zaměřovala na možnosti cíleného a efektivního využití taxikářské geometrie jako nástroje k lepšímu pochopení pojmu kružnice prostřednictvím vzájemné interakce schémat.

Výsledky poskytly důkazy o tom, že taxikářská geometrie představuje netradiční a zajímavý přístup, který může u žáků výrazně přispět k pochopení geometrických pojmů. Skrze nenásilné experimentování, objevování a porovnávání byli žáci schopni postupně přehodnocovat své čistě intuitivní představy a rozvíjet hlubší porozumění matematickým pojmům a jejich definicím. Geometrické útvary jsou v taxikářské geometrii snadno vizualizovatelné, což jim umožňovalo lépe sledovat jejich vlastnosti a uvědomovat si určitá pravidla a souvislosti. Vzájemným porovnáváním tak měli příležitost zažívat relativně časté osobní krize myšlení, kdy se několik jejich současně vyvolaných představ daného pojmu dostávalo do vzájemného konfliktu. Propojováním svých mentálních obrazů s formálními definicemi měli možnost postupně přehodnotit své osobní mentální modely, uvědomit si, že pouhá intuice a vizuální odůvodňování může vést do slepých uliček skutečného poznání, a pochopit samotný význam a roli definic v matematice. Tento proces tak mohl přispět k tomu, že v budoucnu dokážou používat definice přesně a účinně.

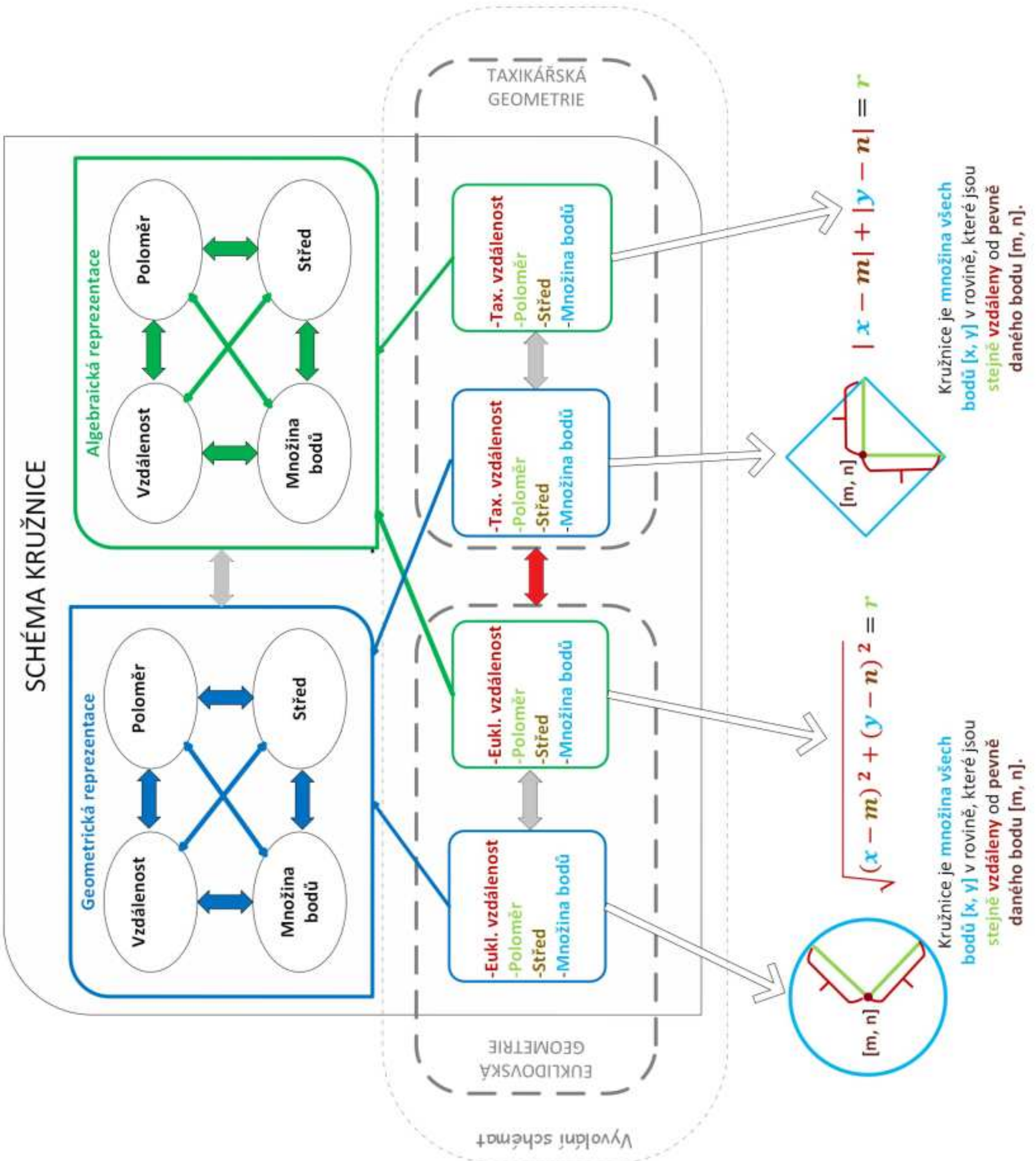
Jednotlivé aktivity v taxikářské geometrii navíc podpořily jejich proces reflexivní abstrakce, když postupně akomodovali svá stávající mentální schémata na nové typy prostorových vztahů a pravidel, které se odlišují od euklidovské geometrie, a následně pak tyto nové informace vhodně asimilovali do již existujících kognitivních struktur. Tato studie potvrdila, že cílené využití vzájemné interakce mezi schématy kružnic v rámci euklidovské a taxikářské geometrie může tento proces podpořit a že vzájemná koordinace jednotlivých dílčích částí obou schémat může přispět ke koherentnější struktuře celkového schématu. To pak může vést k hlubšímu porozumění a schopnosti přenosu a aplikace tohoto pojmu i v jiných kontextech.

Závěry této práce proto naznačují, že taxikářská geometrie může být velmi cenným nástrojem pro aktivní učení a rozvoj kritického myšlení ve výuce matematiky na střední škole. Tento přístup nejenže obohacuje chápání geometrických pojmů, pomáhá odstranit případné miskoncety, ale také podporuje žáky v rozvoji jejich schopnosti argumentace, analýzy a aplikace matematických pojmů v odlišných situacích. V rámci Van Hieleho modelu geometrického myšlení tak může tato geometrie podpořit postupný přechod mezi různými úrovněmi geometrického myšlení, což je klíčové pro hlubší a trvalejší porozumění matematice.

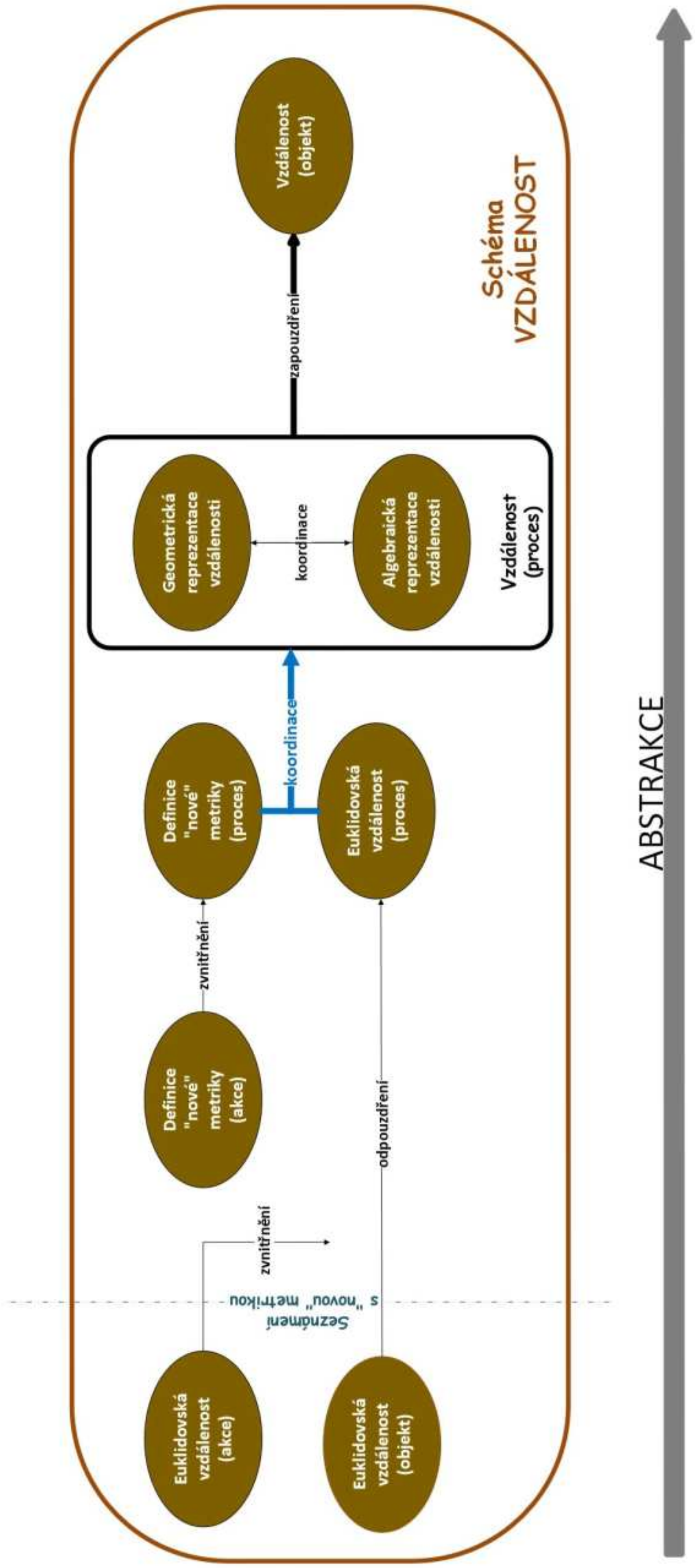
Příloha A

A.1

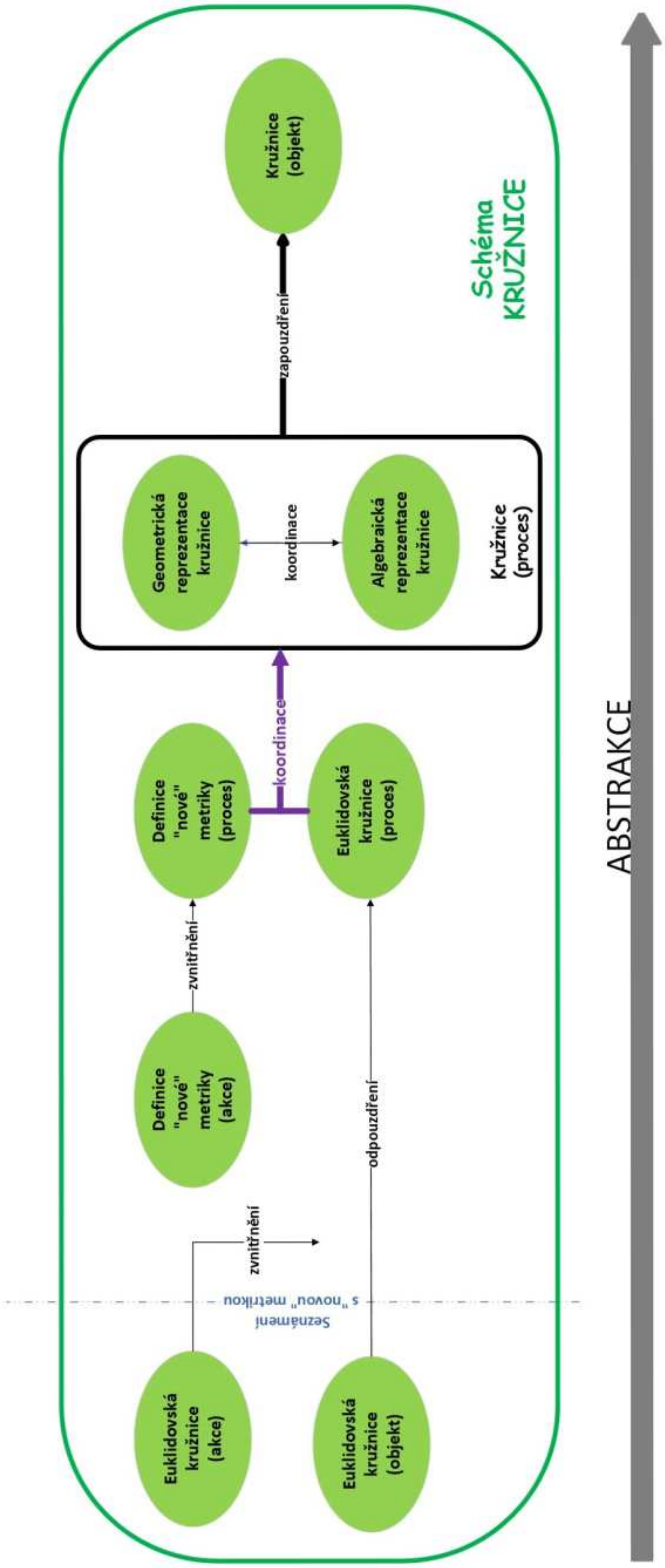
A.1 Obrázky ve větším rozlišení



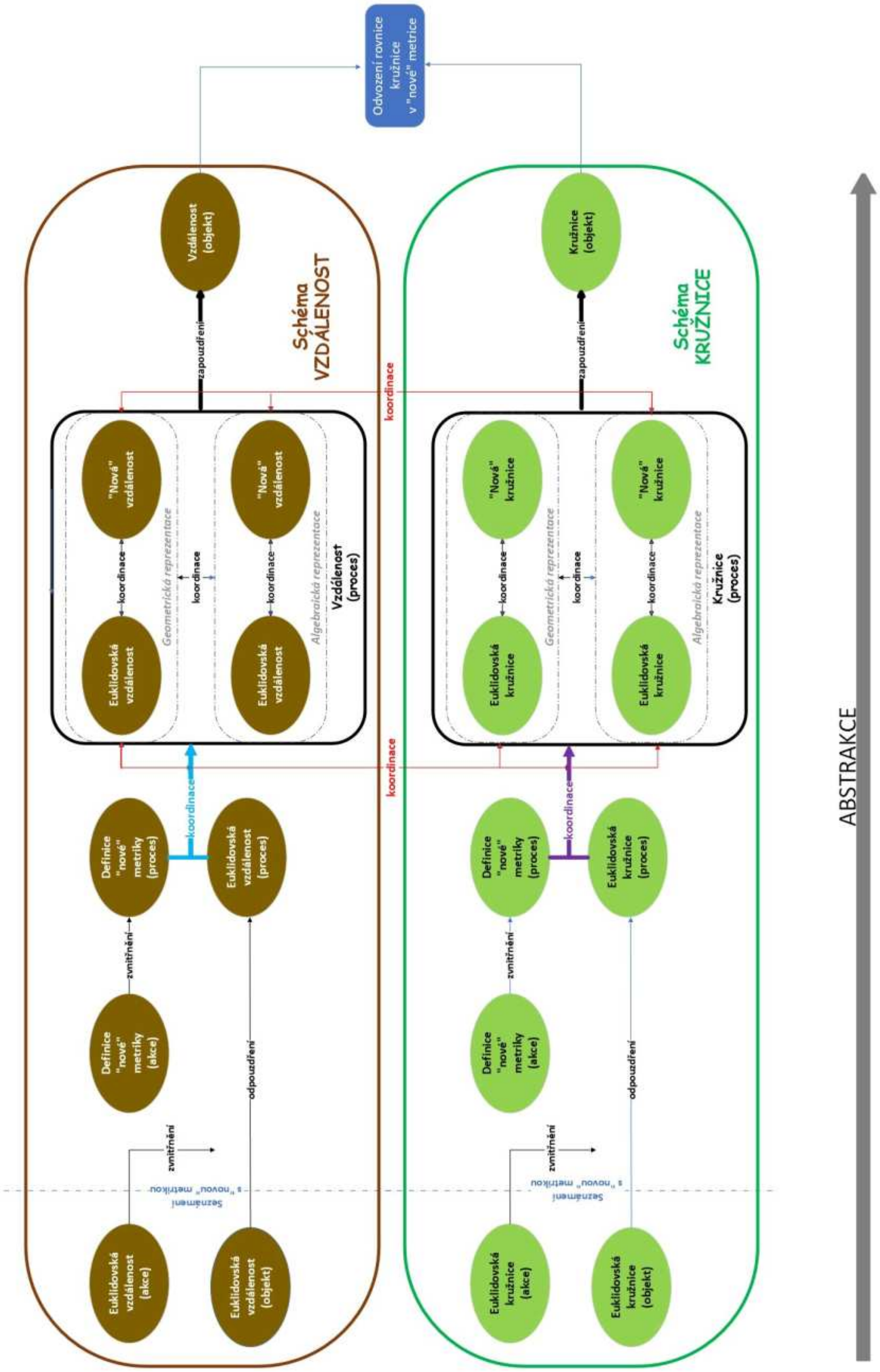
Obrázek A.1: Ilustrace příkladu podkladové struktury schématu kružnice, včetně vzájemné interakce schémat, jak je vyznačeno červenými šipkami.



Obrázek A.2: Ilustrace možných cest, kterými se žák může ubírat při začleňování {uvnové metriky do svého stávajícího schématu pojmu vzdálenost.



Obrázek A.3: Ilustrace možných cest, kterými se žák může ubírat při začleňování „nové“ metriky do svého stávajícího schématu pojmu kružnice.



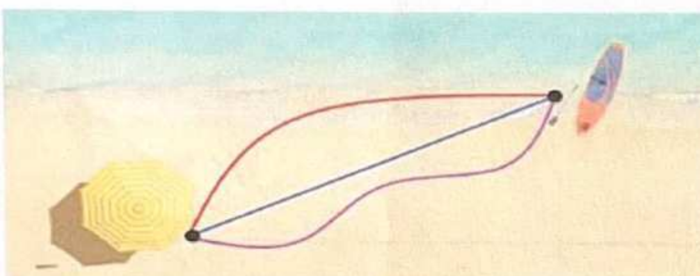
Obrázek A.4: Možné cesty k odvození rovnice kružnice v nové metrice.

A.2 Vyplněné pracovní listy k otázce č.2

Navštivme spolu Barcelonu a čtvrť Eixample, která je jedním z nejimpresivnějších příkladů urbanistického plánování, navrženého Ildefonsem Cerdou (1815-1876). Vyniká svým fascinujícím mřížovým vzorem ulic. Pokud by zde dnes slavný Euklides žil, pravděpodobně by pochyboval o tom, že „nejkratší" vzdálenost mezi dvěma body je vždy přímá délka úsečky spojující oba body.

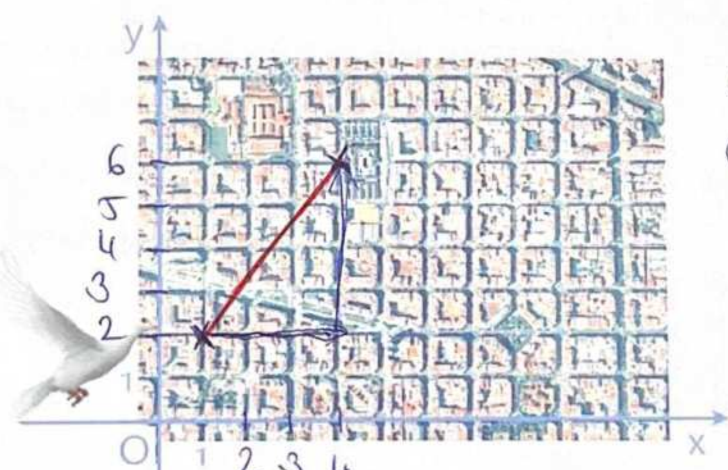
Úloha 1: Euklidovská vzdálenost

a) Jsme na slunečné pláži Barceloneta a máme vyznačené tři trasy, po kterých se můžeme přemístit od deštníku ke člunu. Která z nich představuje vzdálenost obou míst?



modrá čára

b) Do první plánku čtvrtě Eixample zakresli dva body o souřadnicích [1,2] a [4,6]. Vyznač červeně vzdálenost, kterou urazí mezi těmito dvěma místy letící holub Euklides, to znamená vzdálenost euklidovskou.



$4-1=3$
$6-2=4$

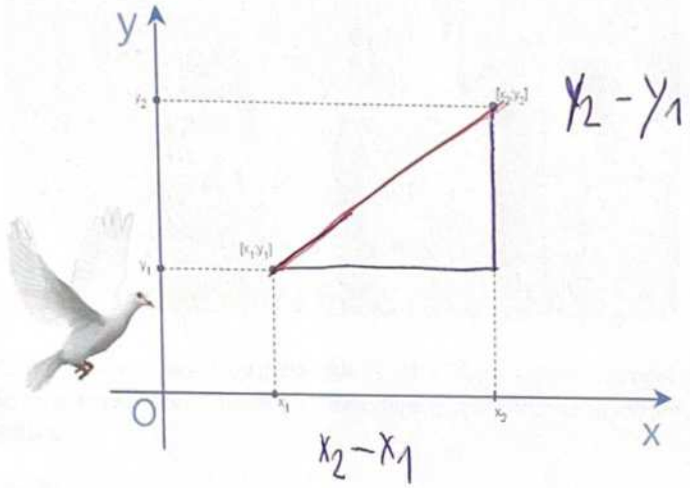
c) Vypočítej vzdálenosti mezi jejich x–ovými a y–ovými souřadnicemi (horizontální a vertikální vzdálenosti). Tyto vzdálenosti do stejného plánku zakresli modře a popiš danou hodnotou. Jaký útvar vznikl zakreslením všech těchto vzdáleností červené a modré barvy do jednoho obrázku .

Pravoúhlý trojúhelník

d) Jak použiješ modře zakreslené vzdálenosti v části c) k výpočtu vzdálenosti, kterou uletěl holub Euklides mezi těmito dvěma body v části b)? Kterou známou větu k tomu použiješ?

$\sqrt{4^2+3^2} = \underline{5}$ Pythagorova věta

e) Zopakuj vše po vzoru b) a c) v plánku bez zakreslených ulic a s libovolnými body $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$.



f) Reflexe: Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$ v euklidovské geometrii lze vypočítat jako $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Napiš stručně svými slovy, jak je tento vztah znázorněn ve tvé předchozí kartézské soustavě souřadnic.

Je znázorněn pomocí pravoúhlého trojúhelníka. Známe délky odvěsen a počítáme přeponu → vzdálenost dvou bodů.

Úloha 2: Taxikářská vzdálenost

a) V plánku čtvrti Eixample máme vyznačena dvě místa A a B, mezi kterými se potřebujeme přemístit, a tři možné trasy, kudy nás může taxikář vzít.

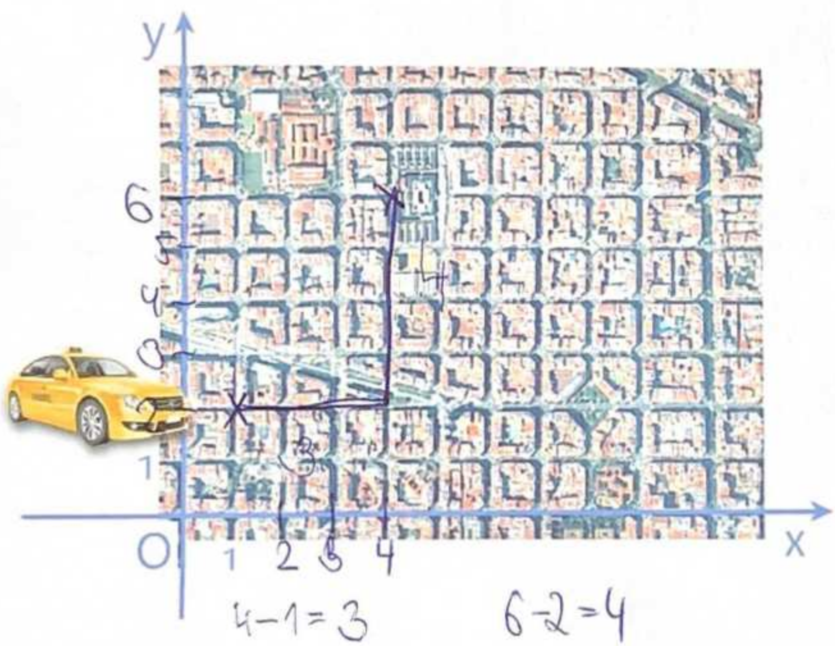
i) Která trasa je nejkratší? Žádná, všechny jsou stejně dlouhé!

ii) Kterou trasu si taxikář z těchto tří zakreslených pravděpodobně za normálního provozu vybere? Zelenou?

iii) Existuje kratší trasa? Existuje delší trasa? Kratší ne, ale delší ano.

iv) Jaký útvar zde vytváří oblast všech najkratších tras? Obdélník?

b) Zakresli do plánku místa o souřadnicích [1, 2] a [4, 6]. Zobraz nejméně klikatou trasu taxikáře mezi těmito dvěma místy, to znamená, aby tato trasa tvořila odvěsny pravoúhlého trojúhelníka.



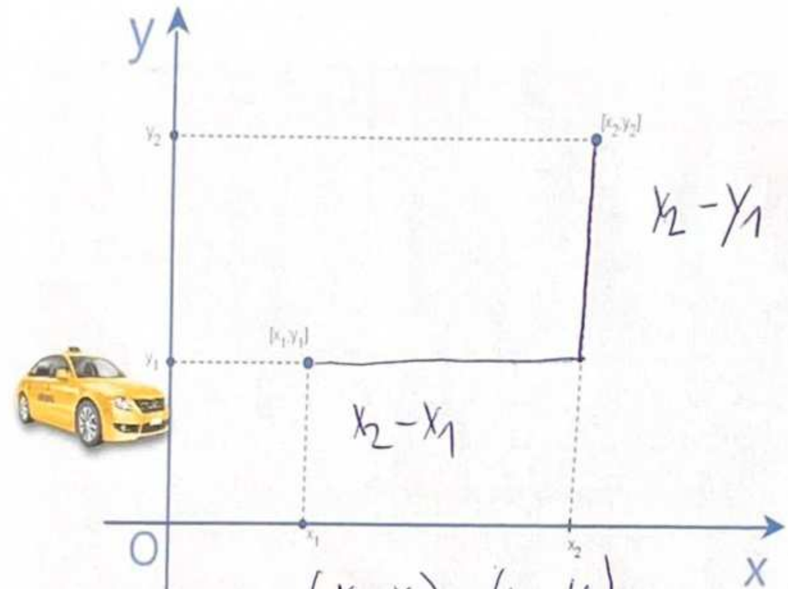
$4-1=3$ $6-2=4$

c) Vypočítej délku každé z těchto odvěsen pomocí x–ových a y–ových souřadnic daných dvou bodů. Tyto vzdálenosti v plánku vyznač a popiš jejich hodnotou.

d) S použitím svého řešení c) vypočítej celkovou délku této trasy mezi oběma body v taxikářské geometrii.

$3+4=7$

e) Zopakuj vše po vzoru b) a c) v plánku bez zakreslených ulic a s libovolnými body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$. Použij tyto informace k výpočtu vzdálenosti $|PQ|$ v taxikářské geometrii.



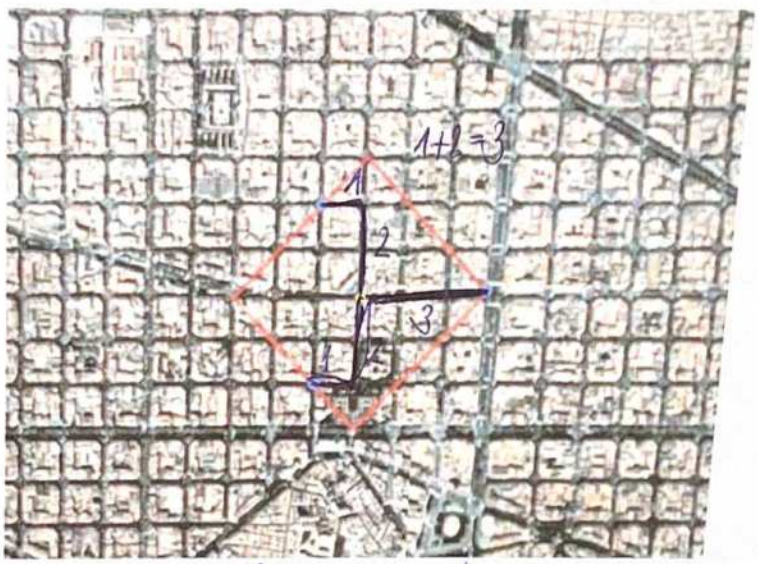
$(x_2 - x_1) + (y_1 - y_1)$

f) Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1; y_1]$ a $Q[x_2; y_2]$ v taxikářské geometrii lze vypočítat pomocí vztahu $|PQ| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Napiš stručně svými slovy, jak je tento vztah znázorněn ve tvé předchozí kartézské soustavě souřadnic a proč je nutné do vzorce zahrnout i uvedené absolutní hodnoty?

Sčítají se délky odvěsen trojúhelníku. Absolutní hodnota je asi pro záporné souřadnice?

Úloha 3: Geometrická reprezentace taxikářské kružnice a její koordinace s euklidovskou kružnici

a) Ve čtvrti Eixample se koná konference, které se máme osobně zúčastnit. Doprava má být pro účastníky co nejvíce pohodlná. Budou sice ubytováni v několika různých hotelích, všichni však poblíž a ve stejné vzdálenosti od konferenčního centra. To je na mapě znázorněno žlutým bodem. Modře jsou zde pak označeny ty hotely, které mají stále volnou kapacitu míst a jsou nám k dispozici. Znázorni v plánku taxikářskou vzdálenost mezi konferenčním centrem a každým ze znázorněných modrých hotelů. Potvrď, nebo vyvrať, zda má každý z nich od konferenčního centra opravdu stejnou taxikářskou vzdálenost.

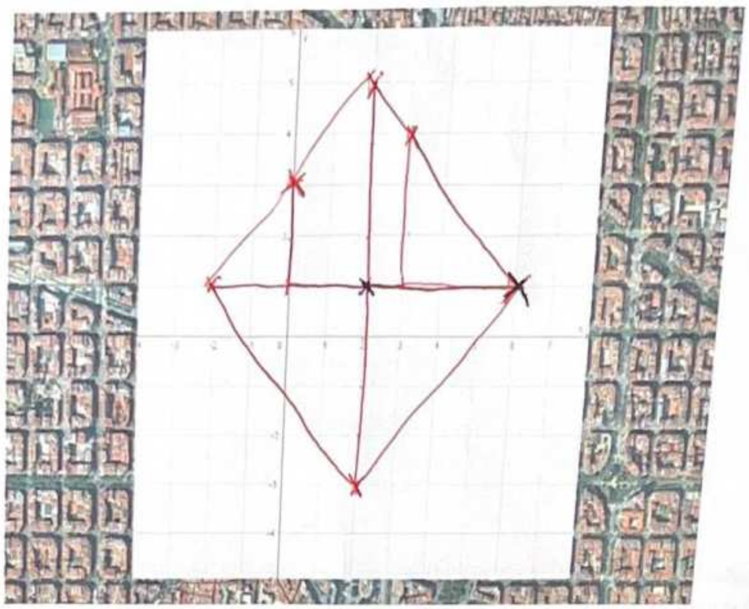


Ano, všechny hotely jsou stejně vzdálené!

b) Jak zní definice pojmu kružnice? Splňuje červeně zakreslený útvar tuto definici? V kladném případě vysvětli?

Kružnice je množina bodů, které jsou od středu stejně vzdálený.
Ano, splňuje. Taxikářskou vzdáleností uděláme vždy 3 „kroky" k středovému centru.

c) V přiložené čtvercové síti nakresli taxikářskou kružnici se středem v bodě $S[2; 1]$ a poloměrem 4 jednotky. Zakresli nejdříve 6 různých bodů (hotelů), které na této kružnici budou ležet. Znázorni i 6 poloměrů (tras taxikáře), které jsi k nalezení těchto bodů použil.

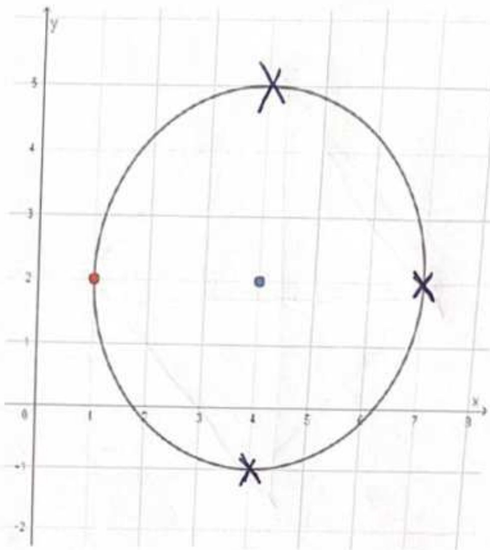


d) Reflexe: Mění se definice kružnice přechodem z euklidovské do taxikářské geometrie? Které vlastnosti kružnice platí současně v obou geometriích? Které vlastnosti naopak neplatí?

Nemění, definice je stejná. Jen záleží na tom, jakou vzdálenost bereme.

Úloha 4: Koordinace geometrických a algebraických reprezentací v euklidovské geometrii.

S použitím daného obrázku, vzorce pro vzdálenost v euklidovské geometrii a vzorového formátu vyřeš následující úlohy.



a) Uvedené body do obrázku zakresli, znázorni vzdálenosti mezi každým z nich a středem této kružnice. Tyto vzdálenosti vypočítej, výpočet pokaždé rozepiš podle vzorového formátu.

S[4;2]

- Bod [1, 2]: $\sqrt{(1-4)^2+(2-2)^2} = 3$
- Bod [4, −1]: $\sqrt{(4-4)^2+(-1-2)^2} = 3$
- Bod [7, 2]: $\sqrt{(7-4)^2+(2-2)^2} = 3$
- Bod [4, 5]: $\sqrt{(4-4)^2+(5-2)^2} = 3$

b) Pozoruješ nějaké podobnosti a rozdíly ve svých jednotlivých odpovědích v části *a*)? Vysvětli, jak případně tyto podobnosti a rozdíly souvisí s grafem této kružnice.

Vždy odečítám x-ové a y-ové souřadnice bodů, počítám vzdálenost mezi bodem na kružnici a středem, takže získávám stále stejný výsledek. Mění se jen dosazované body, střed je stejný.

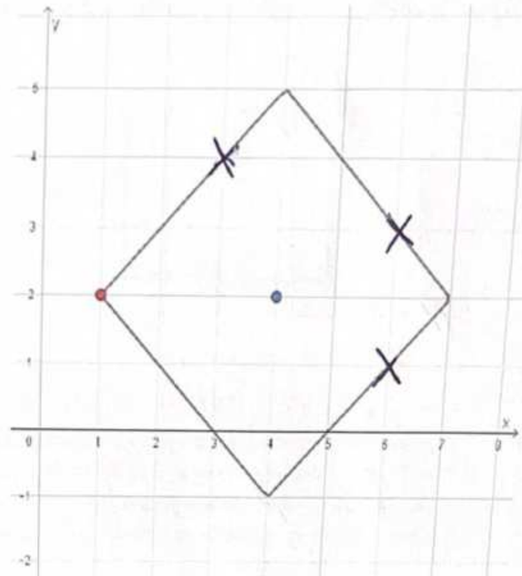
c) Reflexe: Použij nyní svých odpovědí *a*) a *b*) k napsání rovnice této kružnice v euklidovské geometrii. Na základě dvou tří vět pak vysvětli, co nám tato rovnice vlastně říká ve vztahu k danému grafu a k samotné definici kružnice.

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = 3$$

Číslo 3 je přepona v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami na ~~xay~~ osách x a y, ale v obrázku nevím, jak to nakreslit.

Úloha 5: Koordinace geometrických a algebraických reprezentací v taxikářské geometrii, interakce schémat euklidovské a taxikářské kružnice.

S použitím daného obrázku, vzorce pro vzdálenost v taxikářské geometrii a vzorového formátu vyřeš následující úlohy.



a) Uvedené body do obrázku zakresli, znázorni vzdálenost mezi každým z nich a středem kružnice. Tyto vzdálenosti vypočítej, výpočet pokaždé rozepiš podle vzorového formátu.

- Bod [1, 2]: $|1-4| + |2-2| = 3$
- Bod [6, 1]: $|6-4|+|1-2| = 3$
- Bod [6, 3]: $|6-4|+|3-2| = 3$
- Bod [3, 4]: $|3-4|+|4-2| = 3$

b) Pozoruješ nějaké podobnosti a rozdíly ve svých odpovědích v části *a*)? Vysvětli, jak tyto podobnosti a rozdíly souvisí s grafem této kružnice.

Střed je stále stejný jen dosazuji jiné body a výsledek je taky stejný.

c) Reflexe 1: Použij nyní svých odpovědí v části *a*) a *b*) k napsání rovnice této kružnice v taxikářské geometrii. Na základě dvou tří vět pak vysvětli, co nám tato rovnice vlastně říká ve vztahu k danému grafu a k samotné definici kružnice.

$|x-4|+|y-2|=3$

Popisuje všechny body vzdálené od středu [4;2] o 3 jednotky

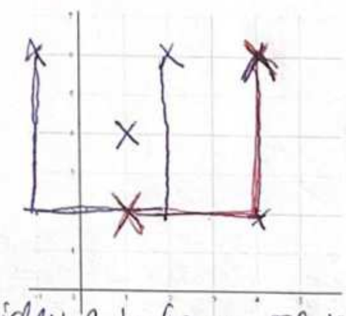
d) Reflexe 2: Mění se definice kružnice přechodem z euklidovské do taxikářské geometrie? Které další geometrické či algebraické vlastnosti kružnice z euklidovské geometrie platí i v taxikářské geometrii? Které vlastnosti naopak neplatí?

~~Ne~~ Mění se způsob jejího zápisu. V euklidovské jsou odmocniny, v taxikářské absolutní hodnoty

Úloha 6: Tematizace schématu kružnice.

Je definována nová metrika (způsob měření vzdálenosti) mezi dvěma body $P(x_1, y_1)$ a $Q(x_2, y_2)$ jako $|PQ| = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$. Říká se jí proto *maximální* metrika.

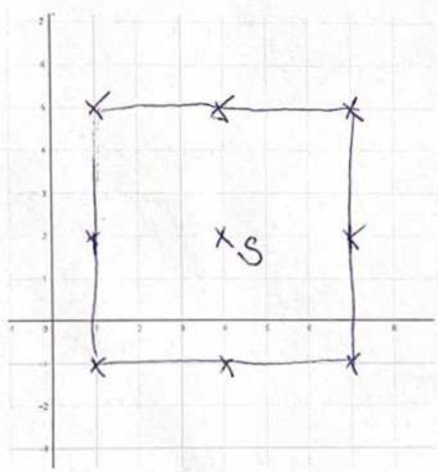
a) Do přiložené čtvercové sítě zakresli body $[1, 2]$ a $[4, 6]$. Použij uvedený vzorec k výpočtu vzdálenosti mezi těmito dvěma body a graficky tuto vzdálenost v dané síti znázorni. S použitím obrázku pak svými slovy vysvětli, jak se tato nová vzdálenost počítá.



$x_2 - x_1 = 3$
$y_2 - y_1 = 4$
$|PQ| = max\{3; 4\}$

Maximálně ujdu 3 kroky na ose x a 4 na ose y. Ale maximálně tedy může i míň?

b) Použij definici kružnice a poskytnutou čtvercovou síť k sestrojení kružnice se středem v bodě $S[4, 2]$ a poloměrem 3 jednotky v rámci této nové metriky. Uvědom si, jakým způsobem jsi použil předchozí způsoby měření vzdálenosti pří sestrojování jednotlivých poloměrů kružnic v euklidovské a taxikářské geometrii a pokus se tuto myšlenku přenést i sem.



$|SX| = max\{3; 3\}$

c) S použitím definice kružnice napiš rovnici této konkrétní kružnice. Pokud je to nutné, použij některé body na své kružnici k ověření toho, zda je tato tvá rovnice správná.

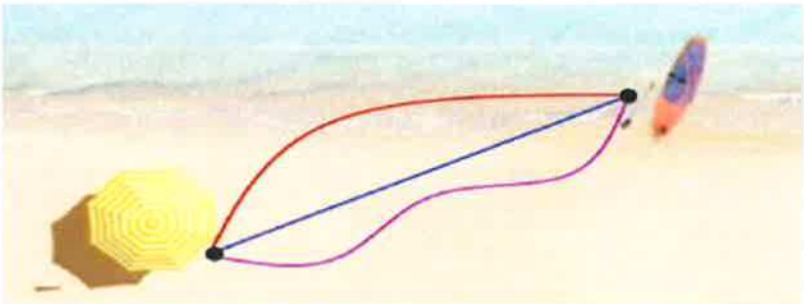
max

d) Reflexe: Na základě dvou tří vět se pokus shrnout podobnosti a rozdíly mezi geometrickým znázorněním a rovnicí kružnice v této geometrii s kružnicemi v euklidovské a taxikářské geometrii. Které vlastnosti jsou společné v rámci všech tří geometrií? Které vlastnosti jsou naopak odlišné?

Navštivme spolu Barcelonu a čtvrť Eixample, která je jedním z nejimpresivnějších příkladů urbanistického plánování, navrženého Ildefonsem Cerdou (1815-1876). Vyniká svým fascinujícím mřížovým vzorem ulic. Pokud by zde dnes slavný Euklides žil, pravděpodobně by pochyboval o tom, že „nejkratší" vzdálenost mezi dvěma body je vždy přímá délka úsečky spojující oba body.

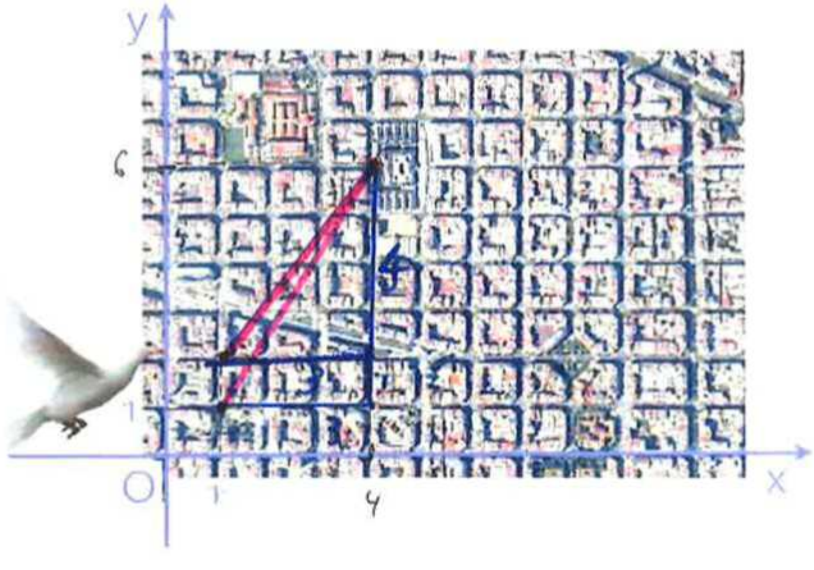
Úloha 1: Euklidovská vzdálenost

a) Jsme na slunečné pláži Barceloneta a máme vyznačené tři trasy, po kterých se můžeme přemístit od deštníku ke člunu. Která z nich představuje vzdálenost obou míst?



Prostřední čára, protože měří nejkratší vzdálenost.

b) Do první plánku čtvrtě Eixample zakresli dva body o souřadnicích [1,2] a [4,6]. Vyznač červeně vzdálenost, kterou urazí mezi těmito dvěma místy letící holub Euklides, to znamená vzdálenost euklidovskou.



c) Vypočítej vzdálenosti mezi jejich x−ovými a y−ovými souřadnicemi (horizontální a vertikální vzdálenosti). Tyto vzdálenosti do stejného plánku zakresli modře a popiš danou hodnotou. Jaký útvar vznikl zakreslením všech těchto vzdáleností červené a modré barvy do jednoho obrázku .

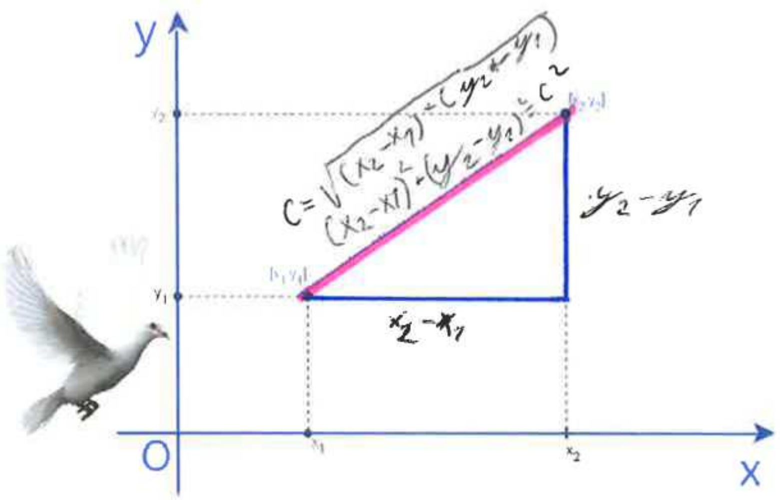
Pravoúhlý trojúhelník

d) Jak použiješ modře zakreslené vzdálenosti v části c) k výpočtu vzdálenosti, kterou uletěl holub Euklides mezi těmito dvěma body v části b)? Kterou známou větu k tomu použiješ?

Pythagorova věta $3^2+4^2=c^2$ $\quad c=\sqrt{25}=5$

$9+16=\cancel{24}\ 25=c^2$

e) Zopakuj vše po vzoru b) a c) v plánku bez zakreslených ulic a s libovolnými body $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$.



f) Reflexe: Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$ v euklidovské geometrii lze vypočítat jako $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Napiš stručně svými slovy, jak je tento vztah znázorněn ve tvé předchozí kartézské soustavě souřadnic.

Výpočet přepony pomocí pythagorovy věty a délky 2 odvěsen.

Úloha 2: Taxikářská vzdálenost

a) V plánku čtvrti Eixample máme vyznačena dvě místa A a B, mezi kterými se potřebujeme přemístit, a tři možné trasy, kudy nás může taxikář vzít.

   i) Která trasa je nejkratší? Všechny jsou stejný

   ii) Kterou trasu si taxikář z těchto tří zakreslených pravděpodobně za normálního provozu vybere? Zelenou

   iii) Existuje kratší trasa? Existuje delší trasa? Neexistuje kratší, ale delší ano

   iv) Jaký útvar zde vytváří oblast všech najkratších tras? Obdélník

b) Zakresli do plánku místa o souřadnicích $[1,2]$ a $[4,6]$. Zobraz nejméně klikatou trasu taxikáře mezi těmito dvěma místy, to znamená, aby tato trasa tvořila odvěsny pravoúhlého trojúhelníka.

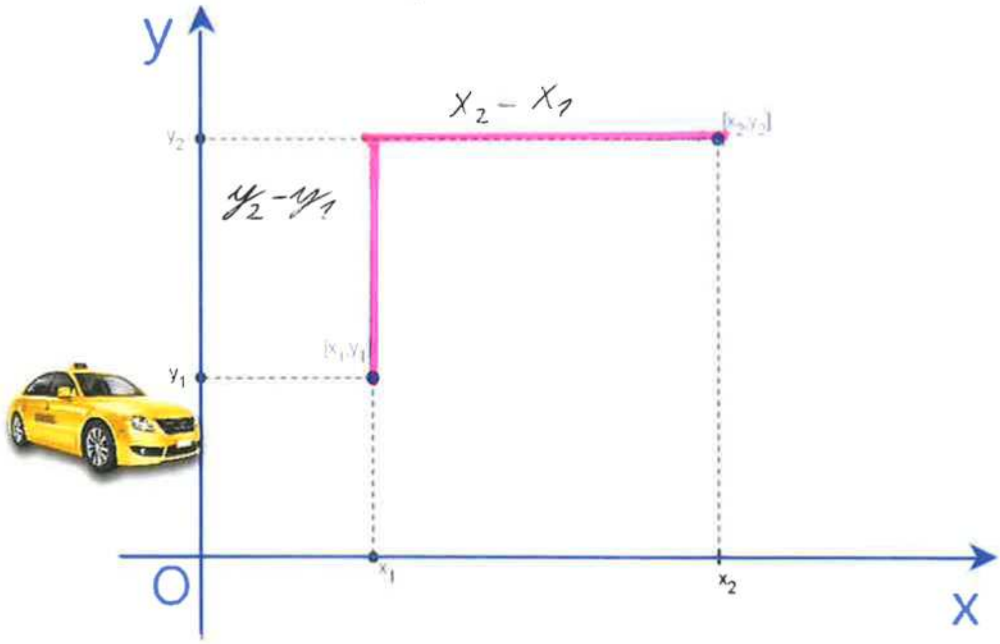
c) Vypočítej délku každé z těchto odvěsen pomocí x–ových a y–ových souřadnic daných dvou bodů. Tyto vzdálenosti v plánku vyznač a popiš jejich hodnotou.

d) S použitím svého řešení *c*) vypočítej celkovou délku této trasy mezi oběma body v taxikářské geometrii.

$4+3=7$

e) Zopakuj vše po vzoru *b*) a *c*) v plánku bez zakreslených ulic a s libovolnými body $P[x_1, y_1]$ a $Q[x_2, y_2]$. Použij tyto informace k výpočtu vzdálenosti $|PQ|$ v taxikářské geometrii.

$|PQ = (y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)$



f) Vzdálenost mezi dvěma body $P[x_1; y_1]$ a $Q[x_2; y_2]$ v taxikářské geometrii lze vypočítat pomoci vztahu $|PQ| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Napiš stručně svými slovy, jak je tento vztah znázorněn ve tvé předchozí kartézské soustavě souřadnic a proč je nutné do vzorce zahrnout i uvedené absolutní hodnoty?

Mohl by být výsledek záporný, a vzdálenost nemůže být záporná

Úloha 3: Geometrická reprezentace taxikářské kružnice a její koordinace s eukli-dovskou kružnicí

a) Ve čtvrti Eixample se koná konference, které se máme osobně zúčastnit. Doprava má být pro účastníky co nejvíce pohodlná. Budou sice ubytováni v několika různých hotelích, všichni však poblíž a ve stejné vzdálenosti od konferenčního centra. To je na mapě znázorněno žlutým bodem. Modře jsou zde pak označeny ty hotely, které mají stále volnou kapacitu míst a jsou nám k dispozici. Znázorni v plánku taxikářskou vzdálenost mezi konferenčním centrem a každým ze znázorněných modrých hotelů. Potvrď, nebo vyvrať, zda má každý z nich od konferenčního centra opravdu stejnou taxikářskou vzdálenost.

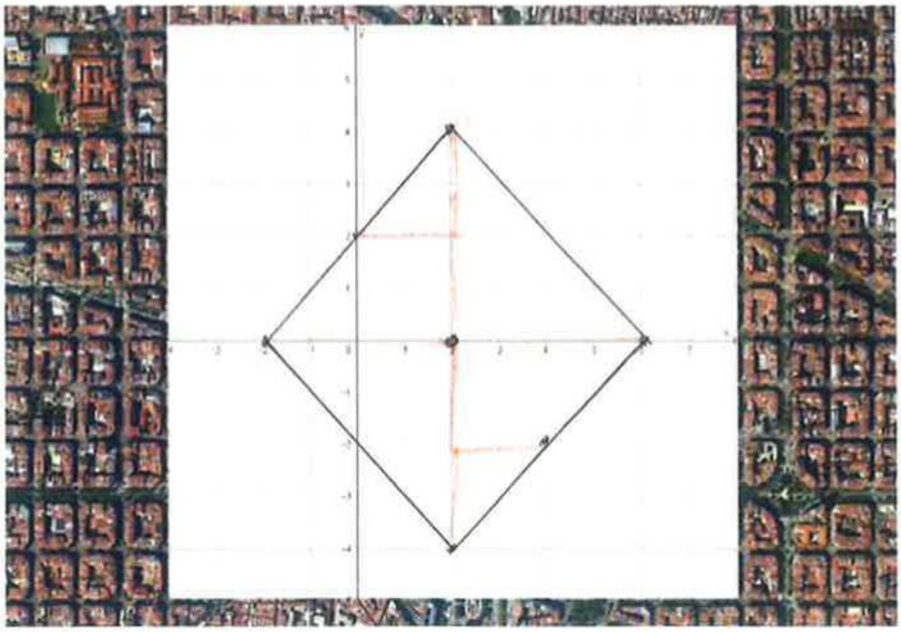
Všechny jsou 3 bloky

b) Jak zní definice pojmu kružnice? Splňuje červeně zakreslený útvar tuto definici? V kladném případě vysvětli?

Množina všech bodů, které jsou stejně daleko od středu.

Útvar splňuje, všechny body jsou stejně daleko od středu.

c) V přiložené čtvercové síti nakresli taxikářskou kružnici se středem v bodě $S[2; 1]$ a poloměrem 4 jednotky. Zakresli nejdříve 6 různých bodů (hotelů), které na této kružnici budou ležet. Znázorni i 6 poloměrů (tras taxikáře), které jsi k nalezení těchto bodů použil.

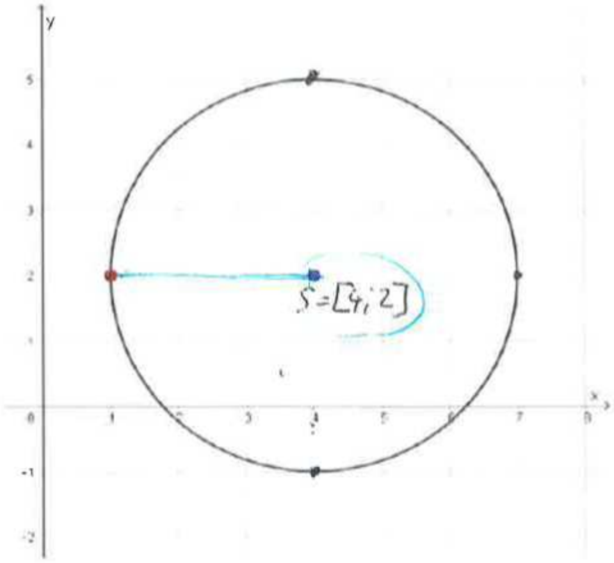


d) Reflexe: Mění se definice kružnice přechodem z euklidovské do taxikářské geometrie? Které vlastnosti kružnice platí současně v obou geometriích? Které vlastnosti naopak neplatí?

Zůstává stejná vzdálenost od středu a změnil se tvar.

Úloha 4: Koordinace geometrických a algebraických reprezentací v euklidovské geometrii.

S použitím daného obrázku, vzorce pro vzdálenost v euklidovské geometrii a vzorového formátu vyřeš následující úlohy.



a) Uvedené body do obrázku zakresli, znázorni vzdálenosti mezi každým z nich a středem této kružnice. Tyto vzdálenosti vypočítej, výpočet pokaždé rozepiš podle vzorového formátu.

- Bod [1, 2]: $\sqrt{(1-4)^2+(2-2)^2}=3$
- Bod [4, −1]: $\sqrt{(4-4)^2+(-1-2)^2}=3$
- Bod [7, 2]: $\sqrt{(7-4)^2+(2-2)^2}=3$
- Bod [4, 5]: $\sqrt{(4-4)^2+(5-2)^2}=3$

b) Pozoruješ nějaké podobnosti a rozdíly ve svých jednotlivých odpovědích v části *a*)? Vysvětli, jak případně tyto podobnosti a rozdíly souvisí s grafem této kružnice.

Střed zůstává stejný a mění se poloha bodů.

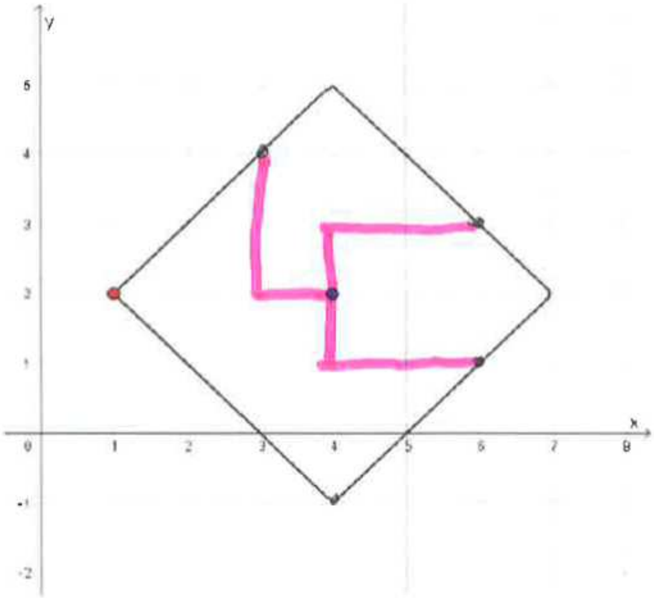
c) Reflexe: Použij nyní svých odpovědí *a*) a *b*) k napsání rovnice této kružnice v euklidovské geometrii. Na základě dvou tří vět pak vysvětli, co nám tato rovnice vlastně říká ve vztahu k danému grafu a k samotné definici kružnice.

$\sqrt{(x_1-4)^2+(y_1-2)^2}=3$

Vzdálenost bodu $[x_1; y_1]$ od středu $[4;2]$ je 3.

Úloha 5: Koordinace geometrických a algebraických reprezentací v taxikářské geometrii, interakce schémat euklidovské a taxikářské kružnice.

S použitím daného obrázku, vzorce pro vzdálenost v taxikářské geometrii a vzorového formátu vyřeš následující úlohy.



a) Uvedené body do obrázku zakresli, znázorni vzdálenost mezi každým z nich a středem kružnice. Tyto vzdálenosti vypočítej, výpočet pokaždé rozepiš podle vzorového formátu.

- Bod $[1,2]$: $|1-4|+|2-2|=3$
- Bod $[6,1]$: $|6-4|+|1-2|=3$
- Bod $[6,3]$: $|6-4|+|3-2|=3$
- Bod $[3,4]$: $|3-4|+|4-2|=3$

b) Pozoruješ nějaké podobnosti a rozdíly ve svých odpovědích v části *a*)? Vysvětli, jak tyto podobnosti a rozdíly souvisí s grafem této kružnice.

Vzdálenost, stejný střed, liší se souřadnice bodů

c) Reflexe 1: Použij nyní svých odpovědí v části *a*) a *b*) k napsání rovnice této kružnice v taxikářské geometrii. Na základě dvou tří vět pak vysvětli, co nám tato rovnice vlastně říká ve vztahu k danému grafu a k samotné definici kružnice.

$|x_1-4|+|y_1-2|=3$

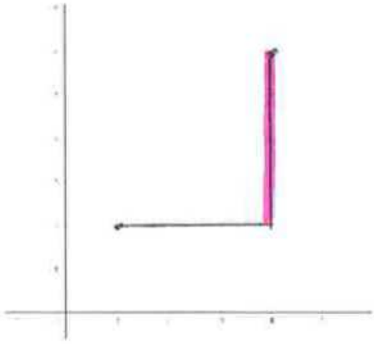
d) Reflexe 2: Mění se definice kružnice přechodem z euklidovské do taxikářské geometrie? Které další geometrické či algebraické vlastnosti kružnice z euklidovské geometrie platí i v taxikářské geometrii? Které vlastnosti naopak neplatí?

Definice ne, vlastnosti ano. (Tvar)

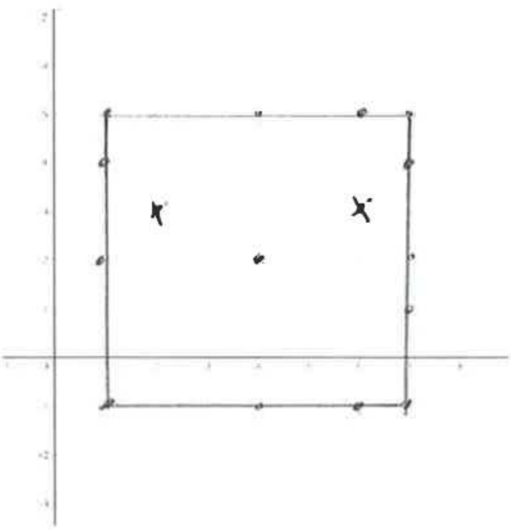
Úloha 6: Tematizace schématu kružnice.

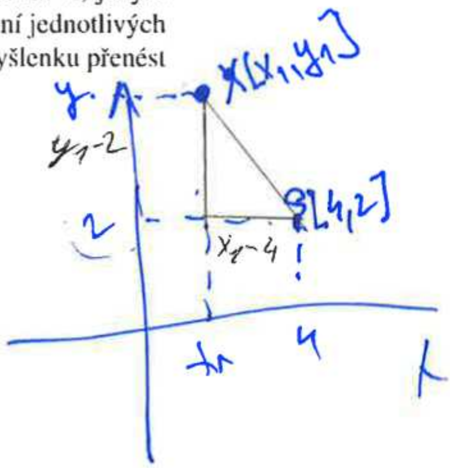
Je definována nová metrika (způsob měření vzdálenosti) mezi dvěma body $P(x_1, y_1)$ a $Q(x_2, y_2)$ jako $|PQ| = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$. Říká se jí proto *maximální* metrika.

a) Do přiložené čtvercové sítě zakresli body $[1, 2]$ a $[4, 6]$. Použij uvedený vzorec k výpočtu vzdálenosti mezi těmito dvěma body a graficky tuto vzdálenost v dané síti znázorni. S použitím obrázku pak svými slovy vysvětli, jak se tato nová vzdálenost počítá.



b) Použij definici kružnice a poskytnutou čtvercovou síť k sestrojení kružnice se středem v bodě $S[4, 2]$ a poloměrem 3 jednotky v rámci této nové metriky. Uvědom si, jakým způsobem jsi použil předchozí způsoby měření vzdálenosti při sestrojování jednotlivých poloměrů kružnic v euklidovské a taxikářské geometrii a pokus se tuto myšlenku přenést i sem.





c) S použitím definice kružnice napiš rovnici této konkrétní kružnice. Pokud je to nutné, použij některé body na své kružnici k ověření toho, zda je tato tvá rovnice správná.

$$max\{|x_1 - 4|; |y_1 - 2|\} = 3$$

d) Reflexe: Na základě dvou tří vět se pokus shrnout podobnosti a rozdíly mezi geometrickým znázorněním a rovnicí kružnice v této geometrii s kružnicemi v euklidovské a taxikářské geometrii. Které vlastnosti jsou společné v rámci všech tří geometrií? Které vlastnosti jsou naopak odlišné?

Definice zůstává stejná, poloměr zůstává stejný. Pro tyto konkrétní kružnice střed zůstává stejný. Mění se tvar a souřadnice bodů.

Literatura

[1] Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. Springer Science+Business Media New York, 2014.

[2] Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. The development of students' graphical understanding of the derivative. The Journal of Mathematical Behavior, 1997.

[3] Banchoff, T. Algebraic thinking and geometric thinking. *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics*, 70, 99–110, 2008.

[4] Battista, M. T., & Clements, D. H. Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), The Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning. New York, NY: Macmillan, 1992.

[5] Battista, Michael T. The Development of Geometric and Spatial Reasoning. In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by F. K. Lester Jr., pp. 843–908. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007.

[6] Bäck, A. Aristotle's Theory of Abstraction. Springer, 2014.

[7] Barbosa, J. S. An APOS Analysis of Student Learning of Congruence in Taxicab Geometry, 2019.

[8] Bäck, A. Aristotle's Theory of Abstraction. The New Synthese Historical Library, Springer, 2014.

[9] Barrow, J. D. (Ed.). Theories of Everything: The Quest for Ultimate Explanation. New York: Oxford University Press, 1991.

[10] Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. A calculus graphing schema. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 557–578, 2000.

[11] Beth, E. W., & Piaget, J. Mathematical Epistemology and Psychology. Springer Netherlands, 1966.

[12] Berger, R. I. From Circle to Hyperbola in Taxicab Geometry. Mathematics Teacher: Learning and Teaching, 2015.

[13] Bečvářová, M. Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady. (Czech). Praha: Prometheus, 2002.

[14] Benediktová, B., & Větrovcová, M. Zrození aritmetického a algebraického kalkulu. In Spor o matematizaci sv?ta. Pavel Mervart, Červený Kostelec, 2011.

[15] Bishop, A. J. Mathematical Values in the Teaching Process. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), Mathematical Knowledge: Its Growth through Teaching. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[16] Bodemer, D., & Faust, U. External and Mental Referencing of Multiple Representations. *Computers in Human Behavior*, 22(1), 27-42. doi: 10.1016/j.chb.2005.01.005, 2006.

[17] Burger, E. F., & Shaughnessy, J. M. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. Journal for Research in Mathematics Education, 1986.

[18] Budínová, I. Vývoj představ žáků o geometrických pojmech v průběhu základní školy (The development of pupils' images of geometric concepts during the primary school). Učitel matematiky. Jednota českých matematiků a fyziků, 2021.

[19] Cantor, G. Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V. Mathematische Annalen, 21, 545-591, str. 564, 1883.

[20] Cajori, F. A history of mathematical notations, II. New York: Cosimo, 2010.

[21] Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. Schema thematization: A theoretical framework and an example. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 370–392, 2007.

[22] Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., et al. Constructing a schema: The case of the chain rule. The Journal of Mathematical Behavior, 16, 345–364, 1997.

[23] Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. Design experiments in education research. Educational Researcher, 32(1), 9–13, 2003.

[24] Cottrill, J. F. Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, 1999.

[25] Crowley, M. L. The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In M. M. Lindquist (Ed.), Learning and Teaching Geometry, K–12, 1987 Yearbook of the NCTM, 1–16, 1987.

[26] Čižmár, J. Základy geometrie v 19. storočí. In J. Bečvář & M. Bečvářová (Eds.), Historie matematiky. 33. mezinárodní konference. Katedra didaktiky matematiky MFF UK. MATFYZPRESS, 2012.

[27] Dreiling, K. M. Triangle Construction in Taxicab Geometry. Mathematics Teacher, 105(6), 474-478, 2012.

[28] Dubinsky, E., & McDonald, M. APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education. In D. Holton (Ed.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (pp. 273–280). Dordrecht, 2001.

[29] Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. Educational Studies in Mathematics, 2005.

[30] Dubinsky, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht, 2002.

[31] Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131. DOI: 10.1007/s10649-006-0443-z, 2006.

[32] Edwards, B., & Ward, M. Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. The Mathematical Association of America, 2004.

[33] Fréchet, M. Sur quelques points du Calcul fonctionnel. Rend. Circ. Math. Palermo, 1906.

[34] French, D. Teaching and learning geometry. London: Continuum International Publishing Group, 2004.

[35] Fischbein, E. Intuitions and schemata in mathematical reasoning. Educational Studies in Mathematics, 1999.

[36] Fischbein, E. The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 1993.

[37] Fischbein, E., & Nachlieli, T. Concepts and figures in geometrical reasoning. International Journal of Science Education, 20(10), 1193-1211, 1998.

[38] Fujita, T., & Jones, K. Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. Research in Mathematics Education, 9(1), 2007.

[39] Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal of Research in Mathematics Education Monograph, 3. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

[40] Gardner, M. The Last Recreations. Springer Verlag, New York, 1997.

[41] von Glasersfeld, E. Radical constructivism: A way of knowing and learning. London: Falmer Press, 1995.

[42] Goldin, G. A., & Shteingold, N. Systems of representation and the development of mathematical concepts. In Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (Eds.), The role of representation in school mathematics (pp. 1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

[43] Gonseth, F. La géométrie et le probléme de l'espace. Lausanne: Editions du Griffon, 1955.

[44] Gray, J. Worlds out of nothing: A course in the history of geometry in the 19th Century. Springer Undergraduate Mathematics Series. London, 2007.

[45] Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.

[46] Guven, B., & Baki, A. Characterizing student mathematics teachers' levels of understanding in spherical geometry. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2010.

[47] Halas, Z. Historie a argumentace ve školské matematice. In J. Hromadová & A. Slavík (Eds.), Cesty k matematice II: Sborník konference (pp. 6-25). Praha: MatfyzPress, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2016.

[48] Hartl, P., & Hartlová, H. Psychologický slovník. Třetí aktualizované vydání. Praha, 2015.

[49] Hejný, M. Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1.stupni. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014.

[50] Hershkowitz, R. Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 71–93). Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.

[51] Hilbert, D. Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner, 1899.

[52] Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R. C. The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. Journal for Research in Mathematics Education, 324-350, 2010.

[53] Janssen, C. Taxi Geometry: Not the shortest ride across town (exploring conics with non-Euclidean metrics). 2007.

[54] Kemp, A. Generalizing and Transferring Mathematical Definitions from Euclidean to Taxicab Geometry. Dissertation, Georgia State University, 2018.

[55] Kemp, A., & Vidakovic, D. The Transfer and Application of Definitions From Euclidean to Taxicab Geometry: Circle. 2019.

[56] Kemp, A., & Vidakovic, D. Students' understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: An APOS perspective with schema interaction. Educational Studies of Mathematics, 2022.

[57] Kemp, A., & Vidakovic, D. Ways secondary mathematics teachers apply definitions in Taxicab geometry for a real-life situation: Midset. The Journal of Mathematical Behavior, Volume 62, 100848, 2021a.

[58] Kemp, A., & Vidakovic, D. The Circle Schema: An Example of Schema Interaction in College Geometry. In S. S. Karunakaran & A. Higgins (Eds.), Research in Undergraduate Mathematics Education Reports (pp. 147-155). 2021b.

[59] Kinach, B. M. Fostering spatial vs. metric understanding in geometry. Mathematics Teacher, 105(7), 534-540, 2012.

[60] Kline, M. Mathematics: The Loss of Certainty. New York: Oxford University Press, 1980.

[61] Kohoutek, Rudolf. Vývojová psychologie: učební texty. 2. vyd. Brno: Institut mezioborových studií, 2003

[62] Krtouš, P.: Pravdivost v matematice a zkušenost. In: Spor o matematizaci sv?ta. Pavel Mervart, Červený Kostelec, 2011.

[63] Kočandrle, M., & Boček, L. Matematika pro gymnázia: analytická geometrie (2. upr. vyd.). Prometheus, 1999.

[64] Krause, E. F. Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry. Dover Publications, NY, 1986.

[65] Krause, E. F. Taxicab geometry. *Mathematics Teacher*, 66, 695-706, 1973.

[66] Kuřina, F. Pojem vzdálenosti v elementární geometrii. Matematika, fyzika, informatika : Časopis pro výuku na základních a středních školách, 2016.

[67] Kurtuluş, A., & Ada, T. How does a taxi driver use geometry? Procedia - Social and Behavioral Sciences, 174, 164-171, 2015.

[68] Lávička, M. Syntetická geometrie. Z?U Plzeň, 2007.

[69] Landau, S. I. Dictionaries: The Art and Craft of Lexicography. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[70] Langmajer, J., & Krejčířová, D. Vývojová psychologie. Praha: Grada Publishing a.s., 2006.

[71] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[72] Liu, M. Z. Fashioning geometric patterns: Investigating the underlying geometry of fashion patternmaking. Ph.D. Thesis, University of Technology Sydney, 2015. Dostupné na: http://hdl.handle.net/10453/52987.

[73] Makonye, J. P. Learner mathematical errors in introductory differential calculus tasks: A study of misconceptions in the senior school certificate examinations (Doctoral dissertation). University of Johannesburg, South Africa, 2012.

[74] Malčík, M., & Miklošíková, M. Práce s chybou žáků ve výuce přírodních věd. Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Edukacja – Technika – Informatyka, 3(21), 48–55. Available at http://repozytorium.ur.edu.pl/handle/item/3118, 2017.

[75] Matos, J. M. Cognitive models for the concept of angle. Graduate Faculty of The University of Georgia, Athens, Georgia, 1999.

[76] Mason, M. The van Hiele levels of geometric understanding. Virginia: University, 2003.

[77] Mayberry, J. The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 14(1), 1983.

[78] Menger, K. *You will like geometry guidebook of the Illinois Institute of Technology geometry exhibit*. Museum of Science and Industry. Chicago, 1952.

[79] Mlodinow, L. Euclid's window: The story of geometry from parallel lines to hyperspace. Free Press, 2001.

[80] Moise, E. E. Elementary geometry from an Advanced Standpoint. 3rd ed., 1990.

[81] Nesher, P. Towards an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, **7**(3), 33-40, 1987.

[82] Pasch, M. Přednášky o moderní geometrii. Teubner, Lipsko, 1882.

[83] Pavlíček, J. B. Základy neeuklidovské geometrie Lobačevského, Praha, 1953.

[84] Pegg, J. Learning and teaching geometry. In L. Grimison (Ed.), Teaching secondary school mathematics: Theory into practice (87–103). London: Harcourt Brace, 1995.

[85] Piaget, J., & Inhelder, B. The child's conception of space. London: Routledge & Kegan Paul, 1956.

[86] Piaget, J., & Duckworth, E. Genetic Epistemology. American Behavioral Scientist, 1970.

[87] Piaget, J. Biology and knowledge: An essay on the relations between organic regulations and cognitive processes. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1971.

[88] Piaget, J. Comments on mathematical education. In A. G. Howson (Ed.), Developments in mathematical education: Proceedings of the second international congress on mathematical education. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1973.

[89] Piaget, J. Adaptation and Intelligence. Chicago: University of Chicago Press, 1980.

[90] Piaget, J. The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development. Chicago: University of Chicago Press. (New translation of the development of thought) child's conception of geometry, 1985.

[91] Piaget, J., & Garcia, R. Psychogenesis and the history of science (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press. (Original work published in 1983), 1989.

[92] Pieron, H. Vocabulaire de la Psychologie. PUF, 1957.

[93] Pinto, M. Students' Understanding of Real Analysis. Warwick University, 1998.

[94] Pinto, M., & Tall, D. Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. Proceedings of the Twenty Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Israel, 2, 41–48, 1999.

[95] Poincaré, H. Číslo, prostor, čas. OPS, Plzeň, 2010.

[96] Prevost, F. J. Geometry in the junior high school. Mathematics Teacher, 79, 1985.

[97] Pritchard, A. M., & Woollard, J. Psychology for the classroom: constructivism and social learning. Psychology for the classroom series. London: Routledge, 2010.

[98] Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. Pedagogický slovník. 3., rozšířené a aktualizované vydání. Praha: Portál, 2013.

[99] Reinhardt, C. Taxi Cab Geometry: History and Applications! The Mathematics Enthusiast, Vol. 2, No. 1, Article 6, 2005.

[100] Robinson, R. Definition. Oxford University Press, London, 1954; reprinted by D. R. Hillman & Sons, Frome, U. K., 1962.

[101] Senk, S. L. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. Journal for Research in Mathematics Education, 20(3), 309–321, 1989.

[102] Simon, M. A., Kara, M., Placa, N., & Avitzur, A. Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The learning through activity theoretical framework. Journal of Mathematical Behavior, 52, 95–112, 2018.

[103] Smith, C. E. Is That Square Really a Circle?. Mathematics Teacher, 106(8), 614-619, 2013.

[104] Sowell, K.O., Taxicab Geometry: A New Slant, Mathematics Magazine, 62, 238-248, 1989.

[105] Steffe, L. P., & Thompson, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 267-307). Mahwah: Lawrence Erlbaum, 2000.

[106] Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(N). Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2008.

[107] Šír, Z. Řecké matematické texty. Řecko-česky. Přeložili Richard Mašek a Adam Šmíd. Praha: OIKOYMENH, 2011.

[108] Tall, D., & Vinner, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educ Stud Math, 12, 151–169, 1981.

[109] Trudeau, R. J. The Non-Euclidean Revolution. Birkhäuser Boston, 1987.

[110] Trkovská, D. Historický vývoj geometrických transformací. Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2015.

[111] Türnüklü, E., Alayli, F., & Akkas, E. Investigation of prospective primary mathematics teachers' perceptions and images for quadrilaterals. Educational Sciences: Theory & Practice, 2013.

[112] Van Hiele, P. M. Structure and insight: A theory of Mathematics education. Orlando: Academic Press, 1986.

[113] Van Hiele, P. M. Development and the Learning Process. Acta Pedagogical Ultrajectra. Groningen: J. B. Wolters, 1959.

[114] Van Hiele, P. M. Summary of Pierre van Hiele's dissertation entitled: The problem of insight in connection with school children's insight into the subject-matter of geometry. In: FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (Ed.). English translation of selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. Brooklyn: City University of New York, Brooklyn College, 1984.

[115] Van Hiele, P. M. Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching Children Mathematics, 1999.

[116] Veselý, J. Matematická analýza pro učitele. Druhý díl. Praha: Matfyzpress, 1997. ISBN 80-85863-23-5.

[117] Vinner, S. The Naive Concept of Definition in Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 1976.

[118] Vinner, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Advanced Mathematical Thinking, D. Tall, ed., Kluwer, Dordrecht, 1991.

[119] Vinner, S. Concept definition, concept image, and the notion of function. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 1983.

[120] Wafiqoh, R., & Kusumah, Y. S. Reflective Abstraction in Mathematics Learning. Journal of Physics: Conference Series, 1280(4). https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1280/4/042039/pdf, 2019.

[121] Wolfe, H. E. Introduction to Non-Euclidean Geometry. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.

[122] Yancey, A. C. Iso-taxi geometry : a new approach. The Collection, 5, 45-48, 2002.

[123] Zaslavsky, O., & Shir, K. Students' conceptions of a mathematical definition. Journal for Research in Mathematics Education, 2005.

[124] Žilková, K., Partová, E., Kopáčová, J., Tkačik, Š., Mokriš, M., Budínová, I., & Gaunčaga, J. Young children's concepts of geometric shapes, 2018.