Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Diferenciace ve výuce matematiky a gradované úlohy v geometrii jako cesta k porozumění

Differentiation in the teaching of mathematics and graded problems in geometry as a path to understanding

Bc. Tomáš Šplíchal

Vedoucí práce: doc. RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.
Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy
Studijní obor: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma „Diferenciace ve výuce matematiky a gradované úlohy v geometrii jako cesta k porozumění" potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze, 11.7.2024 Bc. Tomáš Šplíchal

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí této práce doc. RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D., a to zejména za trpělivost, vstřícnost, ochotu a cenné rady, které mi při psaní této práce poskytla. Velké poděkování patří mé rodině za jejich neustálou podporu a povzbuzování. Děkuji všem respondentům za jejich ochotu a čas, který věnovali praktické části této práce. V neposlední řadě patří poděkování také Mgr. Kristýně Šplíchalové za neocenitelnou podporu a inspiraci, která významně přispěla k úspěšnému dokončení této práce.

ABSTRAKT

Následující diplomová práce s názvem „Diferenciace ve výuce matematiky a gradované úlohy v geometrii jako cesta k porozumění“ stručně prezentuje základní teoretická východiska k tématům diferenciace, porozumění a konstrukční úlohy. Dále představuje práci s gradovanými úlohami z oblasti konstrukční geometrie ve výuce matematiky na středních školách.

Cílem práce je aplikovat teoretické poznatky do tvorby didaktického materiálu, konkrétně sady gradovaných úloh, z oblasti konstrukční geometrie. Vytvořenou sadu gradovaných úloh pak využít při práci se žáky, s cílem zvýšit jejich porozumění konstrukcím v geometrii, a tím pádem také přispět k prohloubení porozumění geometrickým objektům, zejména mnohoúhelníkům.

V návaznosti na použité výzkumné nástroje (dotazníková šetření) a praktickou část této diplomové práce došel autor práce k následujícím zjištěním z práce vyplývajícím. Prvním zjištěním je skutečnost, že geometrie je považována za kritické místo v učivu matematiky, a to zejm. s ohledem na poměrně vysokou míru abstrakce a nezbytnost logického myšlení. Dalším zjištěním, které z výzkumné části práce vyplývá, je to, že u žáků po implementaci sady gradovaných úloh došlo k mírnému zvýšení porozumění zkoumaným pojmům – tuto skutečnost podporují výsledky žáků i jejich zpětná vazba. Žáci zvýšení porozumění odůvodňují nárůstem transparentnosti konstrukčních postupů díky postupné gradaci úloh.

V neposlední řadě došlo k získání konstruktivní kritiky (jak od zapojených žáků, tak od jejich pedagogů), která zlepšila celkovou kvalitu sady gradovaných úloh.

Cíle vytýčené pro tuto diplomovou práci byly naplněny.

KLÍČOVÁ SLOVA

Konstrukční geometrie, gradované úlohy, porozumění, diferenciace

ABSTRACT

The following diploma thesis entitled "Differentiation in the teaching of mathematics and graded problems in geometry as a path to understanding" briefly presents the basic theoretical starting points for the topics of differentiation, understanding and construction problems. It also presents work with graded problems in the field of structural geometry in the teaching of mathematics at secondary schools.

The goal of the thesis is to apply theoretical knowledge to the creation of didactic material, specifically a set of graded tasks, from the field of structural geometry. The created set of graded tasks can then be used when working with students, with the aim of increasing their understanding of constructions in geometry, and thus also contribute to deepening the understanding of geometric objects, especially polygons.

Based on the research tools used (questionnaire surveys) and the practical part of this diploma thesis, the author of the thesis came to the following findings resulting from the thesis. The first finding is the fact that geometry is considered a critical place in the mathematics curriculum, especially considering the relatively high level of abstraction and the necessity of logical thinking. Another finding that emerges from the research part of the work is that after the implementation of a set of graded tasks, student's understanding of the studied concepts increased slightly - this fact is supported by the results of the students and their feedback. Pupils justify the increase in understanding by the increase in transparency of construction procedures due to the gradual gradation of tasks.

Last but not least, constructive criticism was obtained (both from the students involved and from their teachers), which improved the overall quality of the set of graded tasks.

The goals set for this thesis were fulfilled.

KEYWORDS

Constructive geometry, graded problems, understanding, differentiation

Obsah

Úvod

Geometrie je považována za základní stavební kámen matematiky, neboť prostřednictvím své logické struktury vytvořila vzor pro přístup k dalším odvětvím matematiky. V souladu s touto myšlenkou bylo zvoleno téma této diplomové práce, a to „Diferenciace ve výuce matematiky a gradované úlohy v geometrii jako cesta k porozumění“.

Vzhledem k významu geometrie pro matematiku a její obtížnosti pro žáky je nezbytné zhostit se hledání efektivních způsobů, které žákům pomohou zmíněným obtížím předcházet, nebo je překonat, a které žáky přivedou, anebo alespoň nasměrují k porozumění, namísto hromadění znalostí bez vztahů či hlubšího chápání.

Jedním z klíčových nástrojů, kterými lze výuku geometrie zefektivnit jsou gradované úlohy. Ty umožňují učitelům individualizovat prvky výuky podle jedinečných potřeb žáků, což je základem diferenciace. Diferenciace je moderní přístup k výuce zaměřený na to, aby každý žák dosáhl svého maximálního potenciálu. Proto jsou pojmy „diferenciace“, „porozumění“ a „gradace“ stěžejní pro celou diplomovou práci.

Tato diplomová práce je rozdělena do dvou hlavních částí, teoretické a praktické. V teoretické části práce je možné seznámit se nejprve s cíli práce a následně s teoretickými východisky k tématům diferenciace, porozumění a konstrukční úlohy, a to včetně základních pojmů a některých jejich souvislostí. U jednotlivých témat jsou představeny např. různé pohledy na jejich klasifikaci, možné příležitosti nebo limity těchto témat, či způsoby jejich zařazení a využití ve výuce. Praktická část práce je zaměřena na vlastní výzkum a sadu gradovaných úloh. V této části jsou představeny metody získávání dat, jejich vyhodnocování a další práce s nimi, dále pak i analýza sady gradovaných úloh a metodika k implementaci této sady do výuky matematiky na středních školách (zejména na gymnáziích).

Hlavním cílem této práce je zkoumání žákovského porozumění skrze implementaci sady gradovaných úloh do výuky geometrie na středních školách. Další záměry této práce spočívají ve vytvoření teoretického podkladu v tématech „diferenciace“, „porozumění“ a „konstrukční úlohy“. Dále pak tvorba sady gradovaných úloh, která přispěje u žáků ke zvýšení porozumění v geometrických tématech. Blíže jsou cíle práce uvedeny v kapitole 1.

V této práci se vychází z předpokladu, že se ve třídách středních škol vyskytují různí žáci např. intaktní, se specifickými poruchami učení nebo nadaní. Další prerekvizitou je úvaha, že žáci na prvním stupni základní školy nejsou vedeni k zprocesnění konceptu, tj. ve škole se rovnou pustí do konstrukcí a chybí jim souvislost mezi procesem a konceptem. Setkání s důsledky je možné i na druhém stupni základní školy a lze tak očekávat, že se tyto důsledky projeví i na střední škole v podobě otázek „Co mám sestrojit? Kde to mám sestrojit? Jak to mám sestrojit?“.

Zařazena je i diskuze, kde jsou porovnána zjištění práce s teoretickými východisky, a jsou rozebrány i limity a možnosti práce.

V závěru jsou shrnuty nejdůležitější poznatky a zjištění vyplývající z představené diplomové práce.

Pojmy „učitelé“ a „žáci“ se budou zpravidla v celém textu objevovat v podobě podstatného jména rodu mužského, které plní zástupnou funkci pro obě pohlaví, a je o něm v textu uvažováno jako o rodově neutrálním.

TEORETICKÁ ČÁST

V teoretické části práce jsou stručně shrnuty poznatky k tématům diferenciace ve výuce, porozumění a konstrukční úlohy. Dále jsou zde vymezeny i základní pojmy s těmito tématy související. Všechny tyto poznatky jsou do značné míry využity v praktické části práce, a to při tvorbě sady gradovaných úloh i při jejím ověřování v praxi a vyhodnocování.

1 Cíle práce

Hlavním cílem celé diplomové práce je zkoumat žákovské porozumění (resp. jeho zvýšení) v oblasti konstrukční geometrie skrze implementaci vytvořené sady gradovaných konstrukčních úloh. Aby mohl být tento cíl naplněn, musí být nejprve vytvořen teoretický podklad a vymezeny základní pojmy, a to skrze studium odborné literatury. Na tomto základu pak vyroste praktická část této práce, tedy vlastní výzkum a autorská sada gradovaných úloh.

Na základě toho byly stanoveny dílčí cíle, a to jak pro teoretickou, tak pro praktickou část práce. Tyto cíle jsou blíž popsány na následujících řádcích.

1.1 Cíl pro teoretickou část

Hlavní cíl: Vytvořit stručný přehled teoretických poznatků z témat diferenciace, porozumění a konstrukční úlohy.

1.2 Cíle pro praktickou část

Hlavní cíl: Vytvořit sadu gradovaných geometrických úloh, které pomohou zvýšit porozumění žáků geometrickým tématům.

Dílčí cíle:

1) Specifikovat konkrétní oblast geometrie pro tvorbu sady gradovaných úloh.
2) Další (bližší) specifikace konkrétního zaměření zjištěné oblasti geometrie pro tvorbu sady gradovaných úloh.
3) Vytvořit specifickou sadu gradovaných úloh, včetně metodiky pro její implementaci do výuky.
4) Zjistit míru porozumění žáků gymnázií v oblasti geometrické terminologie před zařazením sady gradovaných úloh.
5) Ověřit vytvořenou sadu gradovaných úloh v praxi.
6) Opětovně ověřit míru porozumění žáků gymnázií v oblasti geometrické terminologie před zařazením sady gradovaných úloh.
7) Shromáždit reflexi vyučujících i žáků na práci se sadou gradovaných úloh.

2 Diferenciace

Moderní vzdělávání se neustále přizpůsobuje rostoucí rozmanitosti žáků ve třídách, kde tradiční jednorozměrný přístup již nedokáže účinně pokrýt jejich různé potřeby. Diferenciace ve výuce se tak stala zásadním nástrojem pro vytvoření inkluzivního učebního prostředí, které podporuje individuální rozvoj a úspěch každého žáka. V této kapitole je shrnuto, co diferenciace představuje, a jsou zde uvedeny i metody a zásady diferencování ve výuce, které zahrnují široké spektrum technik tak, aby se zajistilo, že všichni žáci budou zapojeni a podporováni podle svých vlastních potřeb. Dále jsou uvedeny některé výhody (resp. příležitosti) diferenciace a s nimi i nevýhody (resp. rizika).

Jedním z klíčových přístupů v rámci diferenciace je individualizace, která se zaměřuje na přizpůsobení výuky potřebám jednotlivců. V této kapitole jsou uvedeny i principy a metody individualizace. V individualizaci hrají významnou roli gradované úlohy, protože umožňují žákům zapojit se do výuky na různých úrovních obtížnosti. V závěru kapitoly jsou představeny i některé způsoby implementace gradovaných úloh a jejich zavedení.

Tento text si klade za záměr prozkoumat pojem diferenciace, metody jejího zavádění, výhody a nevýhody diferenciace, a zejména roli individualizace a gradovaných úloh v účelném vzdělávání. Úmyslem je poskytnout základní přehled o tom, jak přizpůsobit výuku rozmanitým potřebám žáků, aby bylo možné podpořit jejich celkový růst a rozvoj.

2.1 Vymezení pojmu a cíle diferenciace ve výuce

Následující text se zabývá podstatou diferenciace jako procesu dělení žáků do skupin podle specifických kritérií, která zahrnují kognitivní schopnosti, styl učení, zájmy nebo tempo práce. Rozebírá, podle jakých kritérií se žáci diferencují, a zkoumá účel tohoto dělení v kontextu diferencované výuky, tedy jak může takové dělení přispět k optimalizaci vzdělávacího procesu a podpořit efektivní a spravedlivé učení pro všechny žáky.

Kolář (2012) a Průcha a kol. (2013) zavádí pojem „diferenciace“ jako třídění žáků podle daného kritéria, kterým mohou být některé z kvalit jako např. věk, pohlaví, schopnosti, zájmy atd. K tomu Kasíková a Valenta (1994) zmiňují, že diferencovat lze i učivo, metody, pracovní tempo apod. Vališová a Kasíková (2007) zas dodávají, že v rámci diferenciace, učitel přizpůsobuje vzdělávací obsah, metody a formy práce žákům podle jejich kognitivních schopností a předpokladů.

Podrobněji ve svých publikacích zavádí pojem „diferenciace“ autoři Kalhous a Obst (2009), Kasíková a Valenta (1994) a Průcha (2009), kteří souhlasně uvádí, že diferenciace (ve vzdělávání) je rozdělením žáků do homogenních či nehomogenních skupin (typicky pracovních skupin či tříd), a to na základě předem stanovených kritérií, která jsou Průchou (2009) vymezena jako tzv. individuální zvláštnosti žáků, a jsou tvořeny jednotlivými charakteristikami, kterými se žáci navzájem liší, a které ovlivňují jejich chování, prožívání a učení (např.: pohlaví, temperament, kognice, motivace nebo etnická příslušnost). K tomu Kalhous a Obst (2009) dodávají, že například rozdíly v rodinném prostředí jsou jedním ze způsobů diferenciace a vysvětlují, že žák, který nemá v rodině podmínky ke kvalitnímu vzdělávání má předpoklady k tomu být ohrožený školním neúspěchem. Průcha (2009) ještě vysvětluje slovní spojení „homogenní třída“ a „heterogenní (nehomogenní) třída“ tak, že do homogenní třídy (popř. skupiny) jsou žáci řazeni například podle schopností, inteligence, tempa učení nebo prospěchu. Zatímco heterogenní třída je obvykle složena z žáků na základě stejné věkové kategorie.

Fakt, že diferenciace není zcela jednotně definována připomíná Zormanová (2012), která k výše uvedenému dodává, že diferencovaná výuka je široký pojem, který zahrnuje specifické postupy a strategie. K tomu Malinová a Melichar (2015) připomínají, že na diferenciaci (ve vzdělávání) lze pohlížet jako na přístup, který poukazuje na rozdílnosti požadavků na vzdělávání žáků a Tomlinsonová (2000) diferenciaci vnímá jako reakci učitelů na rozdíly ve stylu učení žáků.

Systém do různých kritérií dělení žáků vnáší autoři Kalhous a Obst (2009), Kolář (2012) a Navrátilová (2020), kteří uvádí, že diferenciace ve výuce se dělí na dvě formy: na vnitřní (dočasnou) diferenciaci a vnější (trvalou) diferenciaci. K tomu Průcha a kol. (2013) doplňují, že kvůli politice integrované výuky začala od roku 2009 významně převažovat diferenciace vnitřní nad vnější, a Mouralová (2013) doplňuje, že vnější diferenciace je v částečném rozsahu uplatňována v každém vzdělávacím systému, což je např. jak uvádí Kalhous a Obst (2009) a Navrátilová (2019) rozdělení žáků do institucí.

Naopak vnitřní diferenciace je podle Kalhouse a Obsta (2009) ohraničená rámcem školní třídy a jako příklad uvádí práci ve skupinách, dělení na soutěžní skupiny, kroužky, účasti na olympiádách atd. Kasíková a Valenta (1994) doplňují, že v rámci vnitřní diferenciace se žáci mohou vzdělávat buď individuálně, nebo kooperativně, a také doporučují, aby při rozdělování bylo přihlédnuto k názoru žáka.

K tomu Kolář (2012) doplňuje, že diferenciace do tříd se uskutečňuje na základě volby žáků, kdy si žáci volí z volitelných předmětů nabízených školou. Navrátilová (2020) ale připomíná, že ve výuce o kritériích rozdělení rozhoduje učitel.

Kolář (2012), Průcha a kol. (2013) a Tomlinsonová (2000) souhlasně uvádí, že cílem diferencované výuky je vytvořit vhodné podmínky pro všechny žáky (přiměřeně jejich předpokladům, zvláštnostem, pohlaví, schopnostem, perspektivní orientaci, zájmům apod.) k naplnění jejich individuálních schopností, zájmů a sociálních potřeb. Kalhous a Obst (2009) dodávají, že účelem diferenciace (ve výuce) je lepší organizace práce.

Shrne-li se výše uvedené, je zřejmé, že diferenciace ve výuce je klíčovým přístupem pro uspokojení rozmanitých potřeb žáků. Proces dělení žáků do skupin na základě kritérií, jako jsou kognitivní schopnosti, styl učení, zájmy nebo tempo práce, umožňuje učitelům účelně přizpůsobovat vzdělávací strategie a metody. Tím se podporuje individuální rozvoj každého žáka.

2.2 Metody diferencování ve výuce

Následující text se zaměřuje na různé metody diferenciace ve výuce, které umožňují učitelům pružně reagovat na rozdílné požadavky žáků, a účinně je zapojit do učebního procesu. Smyslem je poskytnout ucelený přehled o tom, jak lze v praxi implementovat diferenciaci, a tím podpořit úspěšné vzdělávání pro všechny žáky.

Bartlett (2016) uvádí velmi důležitou zásadu a to, že je potřeba, aby měl učitel vysoká očekávání od všech žáků, tj. všichni žáci mají nárok na setkání se s obtížnou úlohou.

Průcha (2009) uvádí, jakými prostředky lze diferenciaci provádět: vnější diferenciace se realizuje typem školy (populární jsou přechody na gymnázia), zatímco vnitřní diferenciace zase obsahem (volitelné předměty, různé varianty zadání úloh) nebo schopnostmi (slučování žáků do skupin podle výkonu). Tomlinsonová (2000) souhlasně dodává, že žáky je možno rozvíjet skrze diferenciaci obsahu, procesu, produktu nebo prostředí.

Diferenciace výukového obsahu a procesu

Weselby (2021) vysvětluje, že diferenciace obsahu spočívá v aktivitách, které pokrývají různé úrovně Bloomovy taxonomie.

Magableh a Abdullah (2020) nebo Šeďová a Švaříček (2010) vysvětlují, že diferenciace procesu jsou různé, zdánlivě běžné, činnosti, během kterých se žák učí. Zvláště pak navrhují poskytnutí opory metodou lešení (tzv. scaffolding), která umožňuje učiteli poskytovat žákům rady a návody k vyřešení úkolu, aniž by jim sděloval výsledek úlohy.

Diferenciace produktu

Tomlinsonová (2000) vysvětluje, že diferenciace produktu je odlišení zvládnutého učiva, které se po žákovi vyžaduje na konci hodiny. Další způsob diferenciace uvádí Kasíková a Valenta (1994), kteří popisují metodu spočívající v samostatné volbě tématu či samostatné práci.

Diferenciace prostředí

Kolář (2012) vysvětluje, že diferenciace roztříděním do různých prostředí (tříd) nemusí fungovat pouze na základě volby, ale třeba i na základě výkonosti a popisuje, že v takovém případě jsou žáci do třídy A vybíráni tak, že mají výborný prospěch a příležitostně se mezi nimi vyskytují nadaní žáci, žáci do třídy B jsou vybíráni na základě průměrného prospěchu a žáci do třídy C bývají voleni na základě nanejvýš průměrných výsledků a příležitostně se mezi nimi vyskytují žáci s poruchami učení. Ke zmiňované třídě A Kalhous a Obst (2009) dodávají, že jejím žákům učitelé zadávají náročnější úlohy nad rámec základního učiva, přičemž Kolář (2012) tvrdí, že ve třídách C je hlavním úkolem zvládnout osnovy základního učiva (resp. závazky z ŠVP[1]). Jako diferenciaci změnou prostředí Tomlinsonová (2000) ještě uvádí, že je možné přemístit nábytek ve třídě, nebo absolvovat výuku mimo prostory třídy (resp. školy) a připomíná, že kvalitní a bezpečný prostor je pro žáky důležitý a odráží se na klimatu třídy, které se odráží na kvalitě žákova procesu učení.

[1] Školní vzdělávací program

Bartlett (2016) uvádí, že další metody diferencování výuky jsou např. využitím různých pomůcek, respektováním žákova pracovního tempa, nebo úkolem (zadávání jedné úlohy s různými variantami obtížnosti), či otázkou (zadávání jedné otázky s různými variantami kognitivní náročnosti). K diferenciaci úkolem Šedivý a Vallo (2013) doplňují, že tzv. standardní úloha má známý postup řešení, zatímco tzv. nestandardní úloha (např. slovní úlohy a konstrukční úlohy) k řešení vyžaduje důvtip a nalezení nového řešení.

Metody diferenciace ve výuce jsou klíčové pro přizpůsobení různých faktorů vzdělávání individuálním potřebám žáků. V matematice si zvláštní pozornost zasluhuje aplikace geometrických konstrukčních úloh. Tyto úlohy nejen rozvíjejí prostorové myšlení a analytické schopnosti, ale také umožňují diferenciaci úloh podle úrovně obtížnosti. Tímto způsobem mohou učitelé zajistit, že každý žák pracuje na úkolech odpovídajících jeho schopnostem, což vede k hlubšímu pochopení geometrických konceptů a posiluje motivaci k učení.

2.3 Výhody a nevýhody diferenciace ve výuce

Diferencovaná výuka přináší vzdělávacímu systému nové možnosti přizpůsobit výuku individuálním potřebám žáků a tato kapitola se zaměřuje na představení jejích klíčových výhod (příp. příležitostí) a nevýhod (příp. rizik). Rovněž dojde k identifikaci potenciálních výzev při implementaci této formy do výuky.

2.3.1 Výhody a příležitosti

Jako velkou výhodu diferencované výuky Drew (2020) a Zormanová (2012) uvádí skutečnost, že tato forma aktivně zapojuje žáky do vzdělávacího procesu, a poskytuje jim příležitost k dosahování vzdělávacích cílů. K tomu dochází podle Tomlinsonové (2017) tak, že diferencovaná výuka skrze možnost výběru způsobu učení (podle žákových preferencí) zprostředkovává žákům větší odpovědnost za vlastní učení. Nejen z výše uvedených důvodů Mouralová (2013) v závěru ze svého výzkumu o názorech učitelů uvádí, že učitelé diferenciaci (zvlášť vnější) z velké části podporují. Jako další důvod lze uvést, co popisuje Tomlinsonová (2017), a tedy, že diferencovaná výuka poskytuje příležitosti vzdělávání pro všechny typy žáků (včetně žáků se speciálními vzdělávacími potřebami apod.).

2.3.2 Nevýhody a možná rizika

Na druhou stranu Magableh a Abdullah (2020) nebo Navrátilová (2019) uvádějí, že plánování a vedení diferencované výuky je pro pedagogy náročné a klade nároky na množství práce a času. Učitelé jsou pod velkým tlakem a školám často chybí dostatek zajištění (např. materiálního).

Drew (2020) upozorňuje na to, že je nereálné vést plnohodnotnou diferencovanou výuku pro celou třídu a dodává, že pokus o takový počin často vede k zásadnímu omezení efektivity ve smyslu naplňování vzdělávacího obsahu, který se mají žáci ve vyučovací hodině naučit (závazek vůči ŠVP). S tím koresponduje Navrátilová (2020), která diferencovanou výuku bere spíše jako ideál, ke kterému je třeba směřovat.

Bartlett (2016) varuje a upozorňuje na to, že učitel by neměl žáky škatulkovat do skupin podle toho jakou u nich očekává úspěšnost předčasně, jelikož by mohlo dojít k tomu, že žák přijme pohled učitele za svůj vlastní pohled na sebe sama. K tomu Navrátilová (2020) dodává a též varuje, že žáci mohou být rozřazeni do skupin špatně, a v takovém případě pak žák není rozvíjen odpovídajícím způsobem. K tomu typicky dochází tehdy, když učitel nezvládá včas měnit pracovní skupiny.

Mezi výhody diferencované výuky rozhodně patří skutečnost, že přenáší část odpovědnosti za učení na žáky, kteří mají možnost ovlivnit vyučovací proces. Jako příležitost lze vnímat skutečnost, že většina učitelů má na diferenciaci ve výuce pozitivní názor. Na druhou stranu dokonalá diferencovaná výuka neexistuje a je třeba ji vnímat jako nedosažitelný ideál, ke kterému je třeba neustále aktivně směřovat.

2.4 Individualizace jako součást diferenciace

Individualizace ve vzdělávání představuje klíčový aspekt diferencovaného přístupu, který se zaměřuje na unikátní potřeby a schopnosti každého žáka. Tato kapitola se zabývá vymezením a legislativním kontextem individualizace. Cílem individualizace je, podobně jako u diferenciace, optimalizovat vzdělávací proces tak, aby každý žák naplnil svůj maximální potenciál.

Kasíková a Valenta (1994) spolu s Průchou a kol. (2013) popisují individualizaci (výuky) jako způsob diferenciace výuky, při němž se žáci nerozdělují do speciálních tříd, ale provádí se diferenciace obsahová a metodická s ohledem na individuální potřeby žáka. S tím koresponduje

Průchův (2009) pohled, který popisuje individuální přístup jako ohled na žákův požadavek na styl učení nebo tempo učení a dodává, že takový počin je v běžné třídě stěží proveditelný, ale je s úspěchem uskutečňován ve speciálních školách. Skalková (2007) k tomu vysvětluje, že princip individualizace nespočívá v tom, že všichni žáci řeší stejnou úlohu, ale naopak ve vytváření takových výukových situací, které každému žákovi výměnou za námahu, které je schopen, umožní nalézt ideální příležitosti pro vlastní učení.

K individualizaci je možné přistoupit jako k závazku, který udělalo MŠMT[2] stanovením 2. strategického cíle, snížit nerovnosti v přístupu ke kvalitnímu vzdělávání a umožnit maximální rozvoj potenciálu dětí, žáků a studentů. Tento závazek byl deklarován ve Strategii 2030+ a zní: *„Ve školách budeme cíleně individualizovat výuku a zavedeme didaktické postupy umožňující vzdělávání různorodých kolektivů. Významně posílíme kompetence učitelů v inovativních formách a metodách práce zohledňujících genderovou rovnost s důrazem na specifika vzdělávání dívek a chlapců.“* (MŠMT, 2020)

Spíše, než jako o závazku ministerstva je možné, z hlediska učitele, uvažovat o individualizované formě výuky jako o úkolu, neboť ve Školském zákoně (zákon č. 561/2004 Sb.), v § 2 je uvedeno, že vzdělávání je založeno za zásadách, mezi nimiž je zásada zohlednění vzdělávacích potřeb jedince. V témže zákonu v § 22b je pak uložena povinnost pedagogickým pracovníkům vykonávat pedagogickou činnost v souladu se zásadami a cíli vzdělávání. Z toho plyne, že je povinností učitelů zohledňovat potřeby jedinců, tj. individualizovat.

Individualizace ve vzdělávání je klíčovým přístupem k diferenciaci výuky, který respektuje individuální potřeby žáků. Je to přizpůsobení obsahu a metodiky zásadní pro osobní rozvoj žáků a jejich účinného učení. Legislativní rámec klade důraz na rovnost přístupu ke kvalitnímu vzdělávání a maximální rozvoj potenciálu každého žáka prostřednictvím individualizovaných metod. Pro učitele je individualizace nejen závazkem, ale i profesním úkolem podle Školského zákona, který zdůrazňuje respektování individuálních vzdělávacích potřeb. Tento přístup nejen podporuje rovnost ve vzdělávání, ale také zvyšuje angažovanost žáků a úspěšnost v dosahování vzdělávacích cílů.

[2] Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

2.5 Principy a metody individualizace

Metody individualizované výuky jsou nezbytné pro přizpůsobení vzdělávacího procesu specifickým potřebám jednotlivých žáků. Tato kapitola přináší přehled praktických přístupů, které umožňují učitelům efektivně modifikovat obsah, postupy a tempo výuky tak, aby zohledňovaly rozdílné schopnosti a preference žáků.

Vališová a Kasíková (2007) popisují dva prolínající se principy individualizace: Princip zvládnutého učení a Princip kontinuálního pokroku učení. Dále vysvětlují, že řídit se prvním z uvedených principů znamená, že žáci, kteří pracující pomaleji, mají právo na větší časovou dotaci k dosažení vzdělávacího cíle. Takovým žákům jsou v případě potřeby poskytovány tzv. berličky, tj. korekce postupů a různé prostředky, které jsou přizpůsobeny jejich vlastním schopnostem a učebním stylům. Druhý princip vybízí k tomu, aby se před žáky neustále kladly nové učební požadavky, ale vždy tak, aby splnění těchto nových cílů bylo pro žáka proveditelné.

Jak prakticky individualizovat ve vyučovací hodině uvádí Budínová a kol. (2018) svými čtyřmi doporučeními:

- **Rozdělení do skupin**: Učitel by měl žáky rozdělit do skupin a pak věnovat pozornost jednotlivým skupinám, zatímco ostatní skupiny pracují na samostatné práci. V průběhu hodiny by měl věnovat svou pozornost všem skupinám.
- **Různé úrovně obtížnosti**: Učitel by měl zadávat práci se třemi úrovněmi obtížnosti s tím, že nejjednodušší by měli zvládnout všichni žáci a nejtěžší by měla být s úlohami pro nadané žáky. Střední úroveň by měla být kompromisem předchozích dvou jmenovaných.
- **Podpora spolupráce**: Učitel by měl vytvářet skupiny složené z žáků s různými schopnostmi a podporovat je ve spolupráci na zadaných úkolech.
- **Propojení s realitou**: Nakonec by učitel měl využívat analogie s reálným světem a praktické příklady, např. využitím konstruktivistických přístupů, jako je projektová výuka.

Kasíková a Valenta (1994) souhlasí s tím, že žákům nejlépe poslouží ty vědomosti, které si osvojí sami, individuálně. V takovém případě ale musí instrukce od učitele obsahovat oslovení, motivaci, téma, cíl, postupy a kritéria hodnocení.

K tomu Jurášková (2006) uvádí teoretická doporučení, jak individualizovat výuku modifikacemi:

- **obsahu**: Přechodem od konkrétních pojmů, které mají sloužit pouze jako příklady, k abstraktním a komplexním myšlenkám, které přesahují rámec učiva.
- **procesu**: Kladením důrazu na hodnocení informací a manipulaci s informacemi spíše než jejich získáváním, které by se mělo spočívat v indukci poznatků ze zkoumání a bádání.
- **metod**: Přechodem od vysvětlování učiva jako soustavy završené novým pravidlem k problémům, pro něž musí žáci řešení objevit.
- **prostředí**: Přeorientováním na psychosociální klima třídy a materiálním zajištění.
- **produktu**: Z parafrázování a kopírování na detailní a originální práci.

Juráčková ovšem popisuje svou individualizaci tak, aby z ní těžili nadaní žáci. Analogii s opačným směrem orientace si ovšem může čtenář snadno domyslet.

Výše jsou uvedena praktická i teoretická doporučení k individualizaci vyučovací hodiny. Zvláštní důraz je možno klást na informaci, podle které žáci nejvíce těží z vědomostí, které si získají samostatnou prací. Dále pak je důležité ponechat žákům dostatek času na práci, neustále jim předkládat nové výzvy s odstupňovanou obtížností, a k nim vhodné nápovědy s analogiemi z reálného světa. Výhody, nevýhody, příležitosti a rizika individualizované výuky jsou v zásadě totožné s diferencovanou výukou, protože obě metody sdílejí cíl přizpůsobit vzdělávání specifickým potřebám jednotlivých žáků. Tento přístup zlepšuje motivaci a výkon žáků, ale také přináší výzvy, jako je vyšší náročnost na čas a zdroje učitele (popř. školy).

2.6 Gradované úlohy jako součást individualizace

Gradované úlohy jsou efektivním nástrojem individualizace ve vzdělávání, protože umožňují přizpůsobit obtížnost úkolů různým schopnostem žáků. Úlohy jsou strukturovány od jednoduchých po složité, což umožňuje žákům postupovat podle jejich úrovně dovedností. Tento přístup zajišťuje, že každý žák pracuje na úkolech odpovídajících jeho schopnostem, čímž podporuje žákův osobní růst a motivaci k učení, a zároveň poskytuje výzvy pro pokročilejší žáky.

Brincková (2006) uvádí, že gradované úlohy jsou skupinou úloh zaměřených na opakování jedné oblasti učiva, které mají zvyšující se náročnost (typicky 3 úrovně obtížnosti). Švrček (2014) k témuž přistupuje vědečtěji a zavádí tzv. řetězec gradovaných úloh jako konečnou posloupnost na sebe navazujících úloh s tím, že každá další úloha vyžaduje zvládnutí nového poznatku nepoznaného v úlohách předchozích. Číslo označující počet gradovaných úloh v řetězci nazývá „řád gradovaného řetězce“. Cíl gradovaných úloh uvádí Hejný (2019), který tvrdí, že jejich smyslem je, aby i slabší žáci byli schopni zažít úspěch z toho, že něco vyřešili, aniž by se při tom nadaní žáci nudili.

Švrček (2014) uvádí, že gradované úlohy jsou nástrojem k diferenciaci výuky a umožňují učiteli zohlednit potřeby všech žáků. Dodává, že prostřednictvím několikastupňové obtížnosti úloh mohou i žáci se slabšími výkony zažít v hodinách matematiky úspěch, což zvyšuje jejich sebevědomí a motivaci pracovat dál. Současně nadaní žáci mohou využít své schopnosti v náročnějších úlohách k rozvíjejí svého kritického myšlení, a navíc se v hodinách nenudí. Hejný a kol. (2004) vysvětlují, že u úloh s nastavitelnou obtížností, obtížnost spočívá v různých rychlostech dospění k řešení, a uvádí, že je to způsob uchopení úlohy řešitelem, co určuje onu obtížnost, tj. je to řešitel, kdo ji upravuje podle vlastní potřeby.

Formu zadání gradované úlohy představuje Brincková (2006), která tvrdí, že může jít o příklad, nebo písemné procvičování algoritmu. S tím souhlasí Švrček (2014), který přispívá několika způsoby, jak zavést gradované úlohy do výuky, např. skrze písemné práce, domácí úkoly, nebo samostatnou práci žáků v hodině.

Otázku hodnocení gradovaných úloh, resp. individualizované výuky, se zabývá Průcha (2009), který poukazuje na to, že individualizovaná výuka by měla mít takové hodnocení, které se opírá o žákův vlastní pokrok spíše než o jednotná kritéria hodnocení. Brincková (2006) navrhuje dvoudimenzionální známky, kde první souřadnice určuje náročnost úlohy, kterou si žák vybral, a druhá souřadnice určuje míru úspěšnosti ve zvolené úloze. Nakonec ale platí, že podle §30 zákona č. 561/2004 Sb. (Školský zákon) je hodnocení určeno školním řádem, který vydává ředitel školy, takže otázka formy hodnocení není nikdy zcela na učiteli.

Gradované úlohy jsou konkrétním způsobem realizace individualizace, takže přínosy a problémy obou metod se vzájemně překrývají. Jde o prostředek, který dovoluje žákům přizpůsobit si obtížnost a díky tomu umožňuje slabším žákům zažít úspěch při řešení úloh, zatímco nadaným žákům poskytuje dostatečné výzvy k udržení jejich zájmu. Klíčem k úspěšné individualizované gradované úloze je pak hodnocení založené na individuálním pokroku žáků, spíše než na jednotných kritériích, což podporuje jejich motivaci a osobní rozvoj.

2.7 Shrnutí kapitoly

Diferenciace ve výuce je klíčovým principem pro zajištění spravedlivého vzdělávání, které reflektuje různé potřeby žáků. Zahrnuje strategie, které učitelům umožňují přizpůsobit výuku různým schopnostem a potřebám žáků, což podporuje individuální rozvoj žáků. Nejde jen o rozdělení žáků do skupin na základě kognitivních schopností, stylu učení, zájmů či tempa práce apod., ale i o využití specifických úloh a metod, které optimalizují vzdělávací proces. V matematice může jít např. o geometrické konstrukční úlohy umožňují obtížnost učiva přizpůsobit různým úrovním žákových schopností. Tyto úlohy dovolují individuální přístup, při kterém každý žák pracuje na úkolech odpovídajících jeho schopnostem. To nejen prohlubuje porozumění, ale také zvyšuje motivaci žáků k učení. Významnou výhodou diferencované výuky je přenos části odpovědnosti za učení na žáky, což jim umožňuje aktivní zapojení. Tento přístup je podpořen pozitivním názorem většiny učitelů na diferenciaci, byť její dokonalá podoba zůstává nedosažitelným ideálem, vyžadujícím neustálé přizpůsobování.

Individualizace, jako forma diferenciace, se zaměřuje na přizpůsobení obsahu a metod individuálním potřebám žáků. Legislativa podporuje rovný přístup ke kvalitnímu vzdělávání a maximální rozvoj potenciálu každého žáka. Podle Školského zákona je individualizace nejen závazkem, ale i profesním úkolem učitelů.

Gradované úlohy jsou konkrétním nástrojem individualizace ve výuce umožňující žákům řešit úkoly různé obtížnosti. Tyto úlohy umožňují slabším žákům zažívat úspěch při jednodušších úlohách, zatímco nadaní žáci se mohou věnovat složitějším výzvám. Hodnocení zaměřené na individuální pokrok podporuje motivaci a rozvoj žáků.

Záměrem této kapitoly bylo důkladně prozkoumat diferenciaci ve výuce, její metody, výhody a nevýhody, a zvláště pak roli individualizace a gradovaných úloh ve vzdělávání. Text poskytuje stručný přehled základních teoretických východisek o metodách přizpůsobení výuky různorodým potřebám žáků s cílem podpořit jejich celkový růst a rozvoj.

3 Porozumění

Porozumění je základním pilířem lidského myšlení a komunikace a následující kapitola se zaměřuje na stručný průzkum tohoto komplexního jevu. Nejprve dojde k zavedení pojmu „porozumění“, a tím k objasnění jeho významu v různých kontextech. Následně je rozebráno zlepšení a hodnocení porozumění zaměřené na metody, kterými je možné porozumění rozvíjet a měřit jeho efektivitu. Dělení porozumění pak představí různé typy a stupně porozumění, které pomohou lépe pochopit jeho mnohovrstevnatou povahu. Poslední podkapitola, „Geometrie jako kritické místo“, přináší pohled na žákovské obtíže v souvislosti s porozuměním geometrii a návrhy jejich řešení.

Přestože je porozumění proces týkající se všech osob, zavedení pojmu „porozumění“ je v této kapitole vždy vztaženo na žáka, tj. každé porozumění, není-li řečeno jinak, je porozuměním žáka.

3.1 Zavedení pojmu porozumění

Podle Průchy a kol. (2013) je porozumění elementární součástí vzdělávacího procesu a Kolář (2012) nabízí stručné vysvětlení, které osvětluje pojem „porozumění“, jako proces začlenění nových vnímaných informací do dosavadní kognitivní struktury žáka a pochopení následné kauzality. Podle Hudecové (2004) porozumění (něčemu) znamená zkonstruovat význam (něčeho) na základě získaných sdělení nehledě na formě (např. ústní, písemné nebo grafické). Sierpińska (1994) dále vysvětluje, že porozumění je založeno na mentální operaci, během které se vytvoří spojení mezi objekty, kterým je třeba porozumět. K uvedenému Průcha a kol. (2013) doplňují, že porozumění lze chápat na třech úrovních, a to jako schopnost žáka pochopit význam obsahu sdělení, nehledě na to, jakou formou bylo sdělení předáno. Dále pak jako schopnost přeměnit ono pochopené zadání tak, aby žákovi dávalo smysl, či do podoby, která byla zadána. Nakonec jako schopnost využít přeměněný obsah.

Znovu a podrobněji se k porozumění vyjadřuje Sierpińska (1994), která rozlišuje tyto tři pojmy: akt porozumění, porozumění a proces porozumění. Všechny tři uvedené sestávají z identifikace charakteristických vlastností objektu, kterému se žák snaží porozumět. Sierpińska (1994) dále vysvětluje, že samotná schopnost dojít k určitému výsledku není porozuměním. Tím se daný proces stává, když se zapojí rozum. Porozumění musí být založeno na konceptualizaci a spojení mezi koncepty musí být implikativní, nikoliv náhodná. Sierpińska (1994) pak ještě rozlišuje akt porozumění a proces porozumění. Akt porozumění je mentální zkušenost, která se dostaví v určitý moment a rychle pomine. Proces porozumění je kognitivní aktivita, která probíhá v rámci delšího období, a jako síť se skládá z dílčích aktů porozumění, které jsou spojeny úsudkem.

Hejný (2019) o porozumění hovoří jako o znalosti a tvrdí, že jde o takový poznatek, který je ve vědomí žáka příčinami a důsledky propojen s dalšími poznatky, nebo životními zkušenostmi.

3.2 Zlepšení a hodnocení porozumění

Rendl a Vondrová (2013) ve svém výzkumu zjistili souvislost, mezi uskutečněnými fázemi v procesu učení a porozumění. Vyplývá, že určitý vzorek učitelů sleduje souvislosti mezi fází „procvičování“ následovanou fází „vysvětlení“ (nebo vyvození), přičemž tvrdí, že v tomto sledu pak dojde u žáků k porozumění, pokud k němu nedošlo do té doby. Přes přirozený nesouhlas didaktiků, kteří odsuzují dril jako pouhé mechanické provádění algoritmu bez pochopení jeho logiky, tedy dotazovaní učitelé vysvětlují, že porozumění může přijít při zacházení s pojmem a užívání procedur s ním spojených. Kuřina (2005) k tomu dodává, že příklady jsou ve výuce (matematiky) daleko užitečnější a důležitější než definice, a Novotná (2008) upozorňuje, že pokud je cesta k porozumění pro žáky příliš složitá, mají tendenci uchýlit se k pamětnímu uchopení konceptu, které často doprovází zhoršení postojů. Ukázka tohoto posunu je možná na příkladu Bloomovy taxonomie kognitivních operací, kdy dochází k degeneraci z vyšších stupňů taxonomie na stupeň nejnižší (tj. zapamatování). (NPI, 2024)

Vondrová a kol. (2015) uvádí, že ke zlepšení porozumění žáků může výrazně pomoci vytvoření dobrých podmínek pro výměnu názorů, a jako dobrý materiál pro takové diskuze poslouží například úlohy, které mají více správných řešení. Totéž popisuje i Janík (2013), který dodává, že ještě efektivnější diskuze je taková, která obsahuje konflikty a kontradikce. Pak podle něj jde o konstruktivní práci s chybou.

Hejný (1995) popisuje, že míra shody mezi porozuměním řešitele úlohy a porozuměním autora úlohy je mírou správnosti porozumění čtenáře. Sierpińska (1994) důrazně doporučuje, aby hodnocení porozumění bylo vždy relativní. K tomu Rendl a Vondrová (2013) dodávají zjištění svého výzkumu, kde učitelé porozumění žáků posuzují na základě postupů, které žáci používají u tabule, a na základě reakcí žáků na tyto postupy. Za jeden z indikátorů porozumění dotazovaní učitelé považují to, když se žák opraví potom, co se jej učitel zeptá na význam kroku, který žák právě chybně provedl.

3.3 Dělení porozumění

Následující odstavce nabízí souhrn názorů různých autorů na klasifikaci porozumění.

Novotná (2008) píše, že pojem „porozumění" se vyskytuje typicky ve dvou protichůdných formách a uvádí následující příklady: formální – neformální, povrchové – hloubkové a instrumentální – relační.

Další příklad dvojího rozdělení uvádí Hejný (2019), když popisuje znalost sémanticky ukotvenou, tj. znalost, která je napojená na žákovu životní zkušenost, a znalost strukturálně ukotvenou, která je napojená na nějakou jinou znalost. Přeneseně je možné hovořit o sémantickém porozumění a strukturálním porozumění. Hejný (2019) ještě dodává, že poznatek, který ukotvení postrádá, bude nazýván také formální.

Také Průcha a kol. (2013) připouští, že porozumění může mít různé úrovně:

- **Převod**: Jednodušší popisují jako převod do jiného jazyka nebo do jiné podoby (vysvětlení matematického symbolu, grafu…).
- **Interpretace**: Složitější popisují jako interpretaci (vyjádření obsahu vlastními slovy, shrnutí…).
- **Explorace**: Nejsložitější popisují jako exploraci (formování nevyjádřených informací, domýšlení důsledků…).

Skemp (1976) představuje dva typy porozumění, a to instrumentální a relační:

- **Instrumentální porozumění** je možné chápat jako zákonitosti bez smyslu. Výhodami tohoto typu porozumění je, že je snáze uchopitelné, a odměna za učení tedy přijde dřív a je transparentnější a často je třeba zapojit jen malé množství vědomostí k rychlému dosažení správné odpovědi. Mezi nevýhody jednoznačně patří velké množství pravidel, která mají tendenci nabalovat se.

- **Relační porozumění** je možné chápat jako budování struktur z konceptů. Mezi výhody tohoto typu porozumění patří přizpůsobivost novým úkolům. Relačně uchopené koncepty jsou snadnější k zapamatování, a navíc cesta tohoto porozumění může být stejně důležitá (ne-li důležitější) než cíl. Jako nevýhodu autor vidí skutečnost, že tato metoda zabere příliš mnoho času, kterého se ve vyučovacích hodinách nemusí dostávat. Dále pak je tu na straně žáků potřeba určitých dovedností.

Obtíže, se kterými by se mohl učitel podle Skempa (1976) setkat, kdyby se pokoušel probudit v žácích relačně orientované porozumění jsou například:

- tradiční způsob výuky matematiky – zvyklostně se matematika vyučuje instrumentálně
- testy orientované na výkon a nikoliv kvalitu
- školní vzdělávací programy příliš nabyté vzdělávacím obsahem, než aby se učitel mohl věnovat učivu relačně
- velký počet žáků ve třídách, který nedovoluje učiteli efektivně u každého z žáků rozvíjet relační porozumění

Na druhou stranu Skemp (1976) také popisuje následující pozitiva: vytváření relačních schémat je samo o sobě uspokojivé, a čím kompletnější schéma je, tím sebevědomější je potom i žák; struktura schémat není nikdy kompletní, tj. žák se může (teoreticky) uspokojovat sebezdokonalováním donekonečna.

Hiebert a Lefevreová (in Vondrová, 2019) představují procedurální a konceptuální znalosti:

- **Konceptuální znalosti** jsou informace pospojované do myšlenkové sítě vztahy. Z hlediska porozumění jsou vztahy a informace jimi spojované stejně důležité.
- **Procedurální znalosti** jsou znalosti, pravidla nebo procedury, jak manipulovat se symboly. Jsou to izolované informace bez souvislostí nebo vztahů.

Fan a Bokhove (2014) představují třístupňový model porozumění algoritmům:

- **Znalost a dovednost**: Znalost postupu v algoritmu a vědomost, jak jej použít v přímočarých, standartních situacích. Odpovídá kategorii zapamatování v Bloomově revidované taxonomii vzdělávacích cílů.

- **Porozumění**: Znalost toho, proč algoritmus funguje, a jak může být využit v relativně komplexních situacích. Odpovídá kategoriím porozumění, aplikování nebo analyzování v Bloomově revidované taxonomii vzdělávacích cílů.
- **Hodnocení a konstrukce**: Schopnost posoudit a porovnat hodnotu a efektivitu algoritmu nebo různých jiných algoritmů, vytvářet nové algoritmy nebo z nich vyvozovat zobecnění. Odpovídá kategoriím hodnocení a tvoření v Bloomově revidované taxonomii vzdělávacích cílů.

3.4 Geometrie jako kritické místo

Rendl a Vondrová (2013) uvádí, že na prvním stupni základních škol mezi kritická místa patří rýsování a míra v geometrii. Na druhém stupni základních škol pak jde o konstrukční úlohy a výpočty obsahů, obvodů, objemů a povrchů.

Vondrová a kol. (2015) identifikovali některé obtíže žáků u výše zmíněných témat a formulovali, jak jim předcházet z nichž jsou zde uvedeny např.:

- Žáci si neuvědomují, že na papíře (nebo na tabuli) mají pouze model ideálního geometrického útvaru. Typicky pak vznikají sloučeniny správných řešení s řešeními od oka. Autoři doporučují, aby se učitel zaměřil na explicitní oddělení prostoru reprezentací od teoretického prostoru. S tím souhlasí i Jančaříková (2017), která se prací s modely ve výuce zabývá.
- Žáci si neumí poradit s libovolným, či obecným zavedením geometrického útvaru. Někteří žáci mají silnou potřebu po konkrétních „pěkných“ (tj. přirozených) číselných hodnotách. Autoři doporučují, aby učitel u žáků rozvíjel schopnost porozumět tomu, že ani nakreslený obrázek nemusí reprezentovat nic určitého.
- V momentě, kdy někteří žáci zjistí, že se v zadání úlohy objevuje slovo „obsah“ (nebo objem apod.) ihned začnou dosazovat do patřičného vzorce, aniž by se pokusili získat vhled do úlohy. Autoři doporučují zavádět numerické metody řešení později.

Blažková (2020) k tomu uvádí další problematické oblasti pro žáky se specifickými poruchami učení jako jsou např.: nerozlišování některých geometrických útvarů, jejich poloh nebo jejich hranic; zaměňování obsahu a obvodu; nerozlišování velikostí útvarů nebo neschopnost vymyšlení vlastního postupu konstrukce. K tomu Blažková (2020) navrhuje zařazení metod jako jsou např.: praktické činnosti, aplikační úlohy a projekty.

3.5 Shrnutí kapitoly

Porozumění je mentální proces, který se typicky vyskytuje ve dvou protichůdných formách jako např.: instrumentální a relační nebo konceptuální a procedurální. Liší se buď složitostí kontextu, do kterého jsou žáci koncepty schopni zapojit, nebo šíří pojmů, se kterými je mohou asociovat.

Zajímavým závěrem je, že i když se vždy jedna z metod zdá být nesprávnou, či neúčinnou, tak se výše uvedení autoři shodují, že i ty mají svoje uplatnění, zvlášť, když je třeba žáky motivovat nebo alespoň nepřetěžovat.

Co se týče porozumění v matematice, konkrétně v geometrii, pak lez napříč 1. i 2. stupněm základní školy sledovat fenomén vnímání témat „obvody, obsahy a objemy“ a „konstrukční úlohy“, jako kritických míst geometrii. Mezi doporučeními pro učitele, jak s těmito kritickými místy pracovat, lze najít např.: explicitní oddělování teoretického prostoru od prostoru reprezentací nebo nezařazování algebraických metod řešení příliš brzy.

4 Konstrukční úlohy

Tato kapitola je věnována těm teoretickým východiskům, která se týkají především konstrukčních úloh.

V první řadě je zde pojem „konstrukční úloha“ zaveden, a to proto, aby díky přesnému vymezení jeho smyslu došlo k položení základu logické struktury, která bude dále analyzována, tj. aby došlo k porozumění konceptům s tímto pojmem souvisejících a především, aby se předcházelo nejasnostem způsobeným změnou významu užitím tohoto pojmu v jiném než obvyklém kontextu.

Následně se může čtenář seznámit s širším kontextem pojmu, a tím tedy s ukotvením konstrukčních úloh v historii, v geometrii, v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP G) a v učebnicích pro gymnázia. Obeznámení se s uvedenými souvislostmi má za účel rozšířit celkové porozumění tématu, dotvořit komplexní pohled na něj a napomoci k identifikaci příčin a důsledků různých jevů, které celou práci (zvláště pak praktickou část) provází.

Dále pak tato kapitola pojednává o smyslu konstrukčních úloh pro žáky jako aktéry vzdělávání a velmi stručně je zde zmíněno i několik praktických aplikací. Účelem těchto výkladů je napomoci k nasměrování této práce blíže k oblasti zájmu učitelů matematiky na středních školách.

Předposlední část této kapitoly je věnována základním metodám a fázím řešení konstrukčních úloh a jejich důležitým zásadám, které je třeba při práci s dodržovat, a to především proto, aby zůstala zachována jednoznačnost a kvalita výsledků.

Závěrem této kapitoly je výčet důležitých pojmů a jejich vlastností z oblasti středoškolské planimetrie. Na ty je odkazováno v praktické části této práce, kde jsou konkrétněji rozebírány v souvislosti s cílem celé práce.

4.1 Zavedení konstrukčních úloh

Způsob, jak uchopit filozofické koncepty geometrie, z nichž vychází další pojmy a úvahy nabízí Vopěnka (2016), který uvádí, že geometrická úloha je proces nalezení nebo rozhodnutí něčeho v geometrickém světě, což je místo, kde neplyne čas (tj. neexistuje v něm změna) a kam nahlížíme (tj. představujeme si) na geometrické útvary, což jsou takové evidované jevy, které lze alespoň v myšlenkách nějak osamostatnit (např. body a kružnice).

Polák (1991) a Pomykalová (2007) k tomu dodávají, že planimetrie (tj. studium geometrických útvarů v rovině) se zabývá, mimo jiné, konstrukčními úlohami, jejichž smyslem je sestrojit geometrický útvar, nebo všechny geometrické útvary, s předepsanými vlastnostmi. Toto tvrzení doplňují o vzdělávací kontext Rendl a Vondrová (2013) tak, že podle nich jsou konstrukční úlohy takové úlohy, ve kterých je úkolem žáků sestrojit geometrický útvar na základě určené množiny podmínek. Tato zmiňovaná množina podmínek, resp. tyto předepsané geometrické vlastnosti, jsou podle Vopěnky (2016) buď vztahy mezi veličinami (tj. metrické), nebo vztahy mezi vzájemnými polohami (tj. polohové).

O řešení konstrukčních úloh Polák (1991) píše, že jde o konečný počet elementárních kroků spočívajících v konstrukcích bodů, přímek a kružnic, tj. v konstrukcích za pomoci pravítka a kružítka (tzv. euklidovských konstrukcí). Vopěnka (2016) ještě dodává, že jednotlivé kroky těchto euklidovských konstrukcí se provádí podle pokynů z postulátů (tj. jednoznačných, snadno proveditelných a nedělitelných pokynů k sestrojení geometrických útvarů), a že počet kroků konstrukce musí být přesně a jednoznačně stanovený.

Na základě výše uvedených lze vymezení pojmu konstrukční úloha pro účely této práce shrnout jako: Konstrukční úloha je pokyn k nalezení jednoho rovinného útvaru, nebo všech rovinných útvarů takového nebo takových, že splňují požadované polohové nebo metrické vlastnosti, a to za pomoci konečného počtu elementárních kroků vedených kružítkem a pravítkem a vycházejících z Euklidových postulátů.

Úloha, jejíž řešení není dosažitelné užitím všech známých postupů (a jejich obměn), se podle Vopěnky (2016) nazývá problém. Díky tomu lze analogicky zavést pojem konstrukční problém.

4.2 Historie geometrie

Vzhledem k tomu, že oblastí zájmu této kapitoly jsou konstrukční úlohy, je pohled do historie geometrie pojat úmyslně omezeně na etapu od období jejího vzniku, jakožto důsledek zeměměřičských úvah, po sepsání Euklidových Základů, jakožto učebnice geometrie a návodu na deduktivní výstavbu vědních oborů.

Podle Pomykalové (2007) je výchozím místem geometrie na časové ose lidstva období přibližně odpovídajícímu 3. tisíciletí př. n. l., kdy byla geometrie ve starověkém Egyptě odvozena ze zkušeností získaných při řešení praktických stavebních a zeměměřičských úloh. K tomu Trkovská (2015) a Fuchs (1993) dodávají, že kromě starověkého Egypta šlo také o oblast starověké Mezopotámie a Číny. Tyto zmiňované zkušenosti byly podle Fuchse (1993) sice empiricky získané, nešlo podle něj ale o zdůvodněné či propojené poznatky.

Až v 5. stol. př. n. l. začala být podle Pomykalové (2007) geometrie vnímána jako příprava k filozofickému bádání, k čemuž Trkovská (2015) dodává, že v tomto období došlo ve starověkém Řecku (ve zkoumání geometrie) k vysokému stupni abstrakce. To Fuchs (1993) popisuje jako přeměnu na deduktivně budovanou vědu složenou ze systematických teorií a důkazů uváděných tvrzení.

Za nejvýznamnější mezník vybrané části historie geometrie bude považován v souladu s názory Trkovské (2015) i Pomykalové (2007) vznik první geometrické učebnice (čes. Základy, řec. *Stoicheia*, lat. *Elementa*) obsahující téměř celé kompendium tehdejších matematických znalostí vyložených v logicky strukturovaných větách, definicích, postulátech a axiomech. Pro úplnost Polák (1991) a Vopěnka (2016) připomínají, že definice jsou stanovením názvu a charakteristické vlastnosti pojmu, věty jsou dokázaná tvrzení, axiomy jsou zásady výkladu veličin (resp. jsou to přímé pokyny k evidenci) a postuláty jsou základní úlohy, kterých se musí umět ujmout každý, kdo geometrii provozuje.

Pro dotvoření úplného obrazu o vybrané části historii geometrie a aby se zabránilo mylným představám Fuchs (1993) doplňuje, že vývoj antické geometrie trval celé tisíciletí a významných mezníků a proměn bylo více, např.: Thaletova věta, založení pythagorejské školy, Aristotelův popis budování deduktivní teorie a již zmíněné Euklidovy Základy.

Z výše uvedeného tedy ve zkratce plyne, že první, ač izolované a nezdůvodněné, geometrické poznatky pramení ze zkušeností zeměměřičů a stavitelů, kteří žili v prvních starověkých civilizacích, přibližně před 5 tisíciletími. Až v 5. století př. n. l. se geometrie začala přeměňovat v logickou a systematickou vědu založenou na setu zásad výkladů a pokynů ke konstrukcím.

4.3 Konstrukční úlohy v geometrii

Pro pevné uchopení konstrukční úlohy, jako pojmu, není dostatečné pouhé vymezení a zasazení do historických souvislostí. Je také potřeba zasadit tento pojem do kontextu, resp. systému geometrie, tedy určit jeho místo v geometrii samotné. Tato potřeba je naplněna postupným specifikováním pojmů počínaje matematickou disciplínou: geometrií.

K tomuto záměru Pomykalová (2007) uvádí, že geometrie je součástí matematiky, která se zabývá studiem geometrických útvarů a Vopěnka (2016) sekunduje pohledem filozofa a dodává, že geometrie je proces osvětlování (tj. poznávání) geometrického světa.

Geometrie, která je obsahem zájmu Euklidových Základů, se podle Trkovské (2015) nazývá „euklidovská geometrie“ a ta se ve výuce podle Poláka (1991) dělí na stereometrii a planimetrii. Že se planimetrie zabývá geometrickými útvary v rovině vysvětlují Hruša a kol. (1964) i Pomykalová (2007) a ohlédnutím zpět do podkapitoly pojednávající o zavedení konstrukčních úloh je zřejmé, že součástí (resp. podřazeným pojmem v hierarchii pojmů) planimetrie jsou konstrukční úlohy.

Jiný úhel pohledu na lokalizaci konstrukčních úloh v geometrii nabízí Trkovská (2015), která popisuje, že F. Klein v tzv. Erlangerském programu ztotožňuje euklidovskou geometrii s grupou shodností. Činí tak pro účely logického systematizování geometrií, v jehož rámci je euklidovská geometrie z hlediska změn a zachování vlastností polohy, velikosti, kolmosti, rovnoběžnosti a kolineárnosti obsažena v geometrii podobností, která je obsažena v geometrii afinní, která je obsažena v geometrii projektivní.

Vezme-li se v potaz výše uvedené, včetně vymezení pojmu konstrukční úlohy, je možné dojít k následující vzestupné hierarchii nadřazených pojmů: konstrukční úlohy jsou součástí planimetrie, planimetrie je součástí euklidovské geometrie, euklidovská geometrie je součástí geometrie podobností, geometrie podobností je součástí afinní geometrie a afinní geometrie je součástí geometrie projektivní.

Pojmem konstrukční úlohy ovšem výše představená hierarchie pojmů nekončí, protože Polák (1991) a Pomykalová (2007) uvádí, že je možné dělení konstrukčních úloh na polohové, ve kterých je poloha daných prvků v rovině určena, a nepolohové, v nichž je poloha daných prvků v rovině volitelná. Další dělení konstrukčních úloh představují Hruša a kol. (1964), Polák (1991) a Pomykalová (2007), a to podle metody řešení. Konstrukční úlohy lze totiž řešit metodou množin bodů daných vlastností, metodou rovinných zobrazení, či metodou algebraickou. V tomto případě autoři připouští různé kombinace těchto metod. Nakonec Polák (1991) dodává, že konstrukční úlohy mohou obsahovat proměnné prvky (parametry), a pak se jedná o dělení na tzv. konstrukční úlohy s parametry a konstrukční úlohy bez parametrů.

Z výše uvedeného plyne, že další dělení pojmu konstrukční úloha jsou možná a jednotlivé díly lze zkombinovat na 28 způsobů mezi nimiž je např. nepolohová, parametrická konstrukční úloha řešená metodou rovinných zobrazení, nebo polohová, neparametrická konstrukční úloha řešená kombinací metod množin bodů dané vlastnosti a na základě výpočtu.

4.4 Konstrukční úlohy v RVP G

Další fází na cestě k získání komplexního obrazu o konstrukčních úlohách je určení jejich místa ve vzdělávání, resp. v kurikulárních dokumentech, konkrétně v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (dále jen RVP G). Volba RVP G spočívá v tom, že cílovou skupinou praktické části této práce jsou učitelé na středních školách, zejména na čtyřletých gymnáziích. Uchopení zmíněného počinu spočívá v účelovém vysvětlení pojmu „Rámcový vzdělávací program" a postupném propracování se strukturou tohoto dokumentu až k pojmu „konstrukční úlohy".

Podle RVP G (2007) jsou rámcové vzdělávací programy (obecně RVP) státní úrovní kurikulárních dokumentů české vzdělávací soustavy. Obstarání vydávání těchto dokumentů je v kompetenci Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) a realizuje se na portálu edu.cz[3] a to v naprostém souladu s Národním programem rozvoje vzdělávání ČR (tzv. Bílá kniha) a Školským zákonem (tj. zákonem 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním a vyšším odborném vzdělávání).

[3] Dostupné např. z: https://www.edu.cz/

Pod záštitou výše jmenovaných dokumentů a instituce se RVP G (2007) zaměřuje na zásadní pojmy, které tvoří základ pro strukturu a obsah vzdělávání. V této množině pojmů jsou klíčové kompetence, vzdělávací oblasti a průřezová témata. Klíčové kompetence RVP G (2007) vymezuje jako soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot, které jsou důležité pro osobní rozvoj jedince, jeho aktivní zapojení do společnosti a budoucí uplatnění v životě. Zatímco vzdělávací oblasti jsou v RVP G (2007) definovány svým postavením a významem ve vzdělávacím procesu a vyjadřují, jak jejich obory přispívají k rozvoji klíčových kompetencí žáků. Nakonec průřezová témata jsou podle RVP G (2007) aktuální témata ovlivňující žákovské postoje. Dále je v RVP G (2007) vysvětleno, že vzdělávací oblasti se dělí na vzdělávací obory a ty uvádí vzdělávací obsah, tj. závazné očekávané výstupy a doporučené učivo.

Konstrukční úlohy (spolu s dalšími jako např. klasifikace rovinných útvarů, obvody a obsahy, shodnosti a podobnosti trojúhelníků, Pythagorova věta…) podle RVP G (2007) spadají do učiva „Geometrie v rovině“, které spolu s vybranými očekávanými výstupy, konkrétně:

- žák používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary;
- žák určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky; využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému;
- žák řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu;
- a žák řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí,

spadají do vzdělávacího obsahu „Geometrie“. Vzdělávací obsah „Geometrie“ v rámci hierarchie pojmů RVP patří do vzdělávacího oboru „Matematika a její aplikace“. Vzdělávací obor „Matematika a její aplikace“ pak patří do stejnojmenné vzdělávací oblasti.

Souhrnně lze tedy říci, že podle Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia (RVP G), který slouží jako závazný kurikulární dokument na úrovni státního vzdělávacího systému, je řešení konstrukčních úloh zahrnuto jako povinná součást vzdělávacího obsahu pro všechny žáky čtyřletých gymnázií. Konstrukční úlohy jsou vymezeny jako klíčová část vzdělávacího obsahu, kterou musí žáci během studia zvládnout. Schopnost efektivně řešit tyto konstrukční úlohy je považována za jeden z hlavních očekávaných výstupů, které by žáci měli na konci svého studia na čtyřletém gymnáziu prokázat. Tento výstup reflektuje celkové vzdělávací cíle stanovené RVP G a je závazný pro všechny vzdělávací instituce, které tento program implementují.

4.5 Konstrukční úlohy v učebnicích

Poslední fází k získání komplexního obrazu o konstrukčních úlohách je seznámení se s jejich přítomností v učebnicích relevantních pro žáky na čtyřletých gymnáziích, tj. vynechají-li se vysokoškolské učebnice a učebnice pro střední odborné školy a střední odborná učiliště. Možná překvapivě je zahrnuta učebnice pro nižší stupně víceletých gymnázií, a to z toho důvodu, že je třeba vzít v potaz i ta eventualita, že si s sebou žáci přinesli nějaké znalosti a koncepty z předešlých ročníků.

Učebnice, která je níže zkoumána, byla vybrána na základě kritéria všeobecné známosti, tj. jde o nejpoužívanější učebnicí geometrie, resp. planimetrie na čtyřletých gymnáziích. Z dotazníkového šetření Machovcové (2014) vyplynulo, že učebnice „Matematika pro gymnázia – Planimetrie" od autorky Evy Pomykalové vydaná nakladatelstvím Prometheus v roce 2007 se používá ve výuce 100 % dotazovaných učitelů (tj. 24 z 24). Jde zřejmě o obecně nejznámější a nejpoužívanější učebnici rovinné geometrie na čtyřletých gymnáziích.

Skutečnost, že všichni Machovcovou dotazovaní učitelé a s největší pravděpodobností i většina učitelů matematiky v českých gymnáziích užívá učebnici planimetrie právě od Pomykalové, může působit dojmem, že jde o jedinou učebnici, kterou má smysl v této práci rozebírat. Východiskem je, že sama Pomykalová (2007) uvádí, že vychází z námětů autora Josefa Poláka a jeho Přehledu středoškolské matematiky, který vydalo Státní pedagogické nakladatelství (SPN) v roce 1991. Proto i tato publikace je zařazena, spíše ale ke srovnání.

Třetí a poslední učebnicí, která je v této kapitole představena, je „Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Geometrické konstrukce" od autora Jiřího Hermana, kterou vydalo nakladatelství Prometheus v roce 1998. Její zařazení je ospravedlněno potřebou opřít se nějaký teoretický výchozí stav znalostí.

V učebnici „Planimetrie" od Pomykalové jsou obsaženy celkem tři kapitoly:

- Geometrické útvary v rovině,
- Konstrukční úlohy,
- Zobrazení v rovně

Kapitola o geometrických útvarech v rovině se zabývá zavedením pojmů, jako jsou např. přímka a její části, polorovina, úhel, trojúhelník nebo kružnice a kruh, a popsáním jejich charakteristických vlastností. Kapitola „Konstrukční úlohy" rozebírá metody řešení konstrukčních úloh, zvláště pak řešení přes množinu bodů dané vlastnosti, a uvádí jejich řešené příklady. V kapitole „Zobrazení v rovině" Pomykalová popisuje základní geometrická zobrazení, tj. osovou a středovou souměrnost, posunutí, otočení a stejnolehlost.

V učebnici „Přehled středoškolské matematiky" od Poláka je celkem deset kapitol: Základní poznatky z logiky a teorie množin,

- Číselné obory
- Základní poznatky z algebry
- Funkce
- Rovnice a nerovnice
- Posloupnosti a řady
- Kombinatorika, počet pravděpodobnosti a statistika
- Matematická analýza
- Geometrie (planimetrie a stereometrie)
- Analytická geometrie

Jde tedy o velmi obsáhlou publikaci, která v současné době pokryje více než učivo celé střední školy. Kapitola „Geometrie" obsahuje celkem 16 podkapitol z nichž sedmá nese název „Množiny všech bodů dané vlastnosti v rovině" a devátá nese název „Konstrukční planimetrické úlohy", kde jsou představeny základní pojmy, metody řešení konstrukčních úloh včetně jejich fází a samozřejmě řešené příklady.

V kapitole „Množiny všech bodů dané vlastnosti v rovině" je rozebráno celkem 13 případů množiny všech bodů dané vlastnosti, a k nim jsou uvedeny řešené příklady.

V kapitole „Konstrukční planimetrické úlohy“ jsou představeny základní geometrické konstrukce, fáze a metody řešení konstrukčních úlohy, které jsou blíže rozebrány dál v této kapitole.

V učebnici „Geometrické konstrukce“ od Hermana je šest kapitol věnovaných základním konstrukcím, množinám bodů dané vlastnosti, konstrukčním úlohám, konstrukcím trojúhelníků, konstrukcím čtyřúhelníků, posunutí a souhrnným cvičením či příkladům z matematických olympiád. Základní konstrukce Herman popisuje Kuřinovou metodou tzv. filmového pásma (viz Kuřina 1994) a zevrubně i s příklady se zabývá konkrétně:

- osou úsečky a úhlu
- kolmicí a rovnoběžkou k dané přímce procházející daným bodem
- tečnou kružnice
- konstrukcemi trojúhelníků a některých významných úhlů

V kapitole o množinách bodů daných vlastností se zabývá: kružnicí, osou úsečky, sjednocením rovnoběžek, sjednocením osy úhlu a její kolmice, Thaletovou kružnicí a dalšími. V kapitole konstrukční úlohy se zabývá důkladným popisem a příklady jednotlivých fází řešení obecné konstrukční úlohy.

Z výše uvedeného plyne, že žáci čtyřletých gymnázií se s konstrukčními úlohami v učebnicích setkají s největší pravděpodobností v Planimetrii od Pomykalové (2007), která se inspirovala Přehledem středoškolské matematiky od Poláka (1991). V této učebnici se seznámí s elementárními konstrukcemi, fázemi řešení a metodami řešení konstrukčních úloh včetně ukázky aplikace nástrojů k jejich řešení. Teoreticky není potřeba, aby si s sebou žáci ze základní školy přinesli jiné znalosti než praktické, kterým se důsledně věnuje Herman (1998) ve své Matematice pro nižší ročníky víceletých gymnázií.

4.6 Uplatnění konstrukčních úloh

Jak je napsáno výše, cílem konstrukčních úloh je sestrojení rovinného útvaru (nebo útvarů) tak, aby měl (měly) požadované vlastnosti. Zbývá potřeba odpovědět na otázku smysluplnosti takového počínání. K tomu se tato kapitola staví z několika úhlů pohledu, z nichž první je pohled postupného uvědomění, kde a od kdy se můžeme s konstrukcemi setkat, zatímco druhý je směrem od kurikulárních dokumentů k procesu vzdělávání

Na to, že se už od raného dětství můžeme setkat s výsledky konstruktérské tvorby poukazují Kuřina a Vondrová (2022), kteří přistupují k účelnosti konstrukčních úloh z pohledu vzdělávání žáků. Uvádějí, že příkladem v domácnosti můžou být stůl nebo hodiny, zatímco příkladem mimo domácnost může být automobil či letadlo. V návaznosti na to poukazují, že konstrukční charakter má i žákovská školní praxe, neboť od začátku školní docházky může být hledání odpovědí i na aritmetické operace (nebo např. řešení rovnic či tvorbu grafů funkcí atd.) doprovázeno tvorbou modelů, jinými slovy konstrukcemi modelů.

Výše v této kapitole je uvedeno, že lze pojem „konstrukční úloha“ uchopit jako učivo, resp. lze uchopit schopnost řešit konstrukční úlohy jako očekávaný výstup. Pak je ovšem relevantní, že RVP G (2007) uvádí, že vzdělávání v dané vzdělávací oblasti (Matematika a její aplikace) směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že žáka vede, mimo jiné například k postupné abstrakci a generalizaci pojmů, zásobníku matematických pojmů a metod, analýze řešení problémů, logickému myšlení a tvorbě hypotéz nebo k práci s modely a geometrické představivosti.

Proces osvojování a systematického třídění základních matematických pojmů a vztahů začíná s konkrétními příklady, postupně přechází k obecným konceptům a zobecňuje jejich charakteristické vlastnosti. To umožňuje žákům lépe porozumět matematickým principům a aplikovat je v různorodých situacích. (RVP G, 2007)

Tvorba zásobníku matematických pojmů, vztahů a metod řešení úloh zahrnuje systematické shromažďování a organizování do strukturovaného rámce, který umožňuje nejen efektivně uchovávat a katalogizovat tyto koncepty, ale také je prakticky využívat při řešení různorodých matematických problémů. (RVP G, 2007)

Analýza problému zahrnuje pečlivé zkoumání jeho aspektů, identifikaci klíčových faktorů, volbu řešení a systematické vytváření plánu, který vede k dosažení požadovaného cíle. Dále počítá s tím, že žák navazuje důkladným vyhodnocením správnosti výsledku, s uvědoměním existence alternativních přístupů. (RVP G, 2007)

Rozvoj logického myšlení a úsudku podporuje tvorbu hypotéz založených na zkušenostech nebo experimentech a jejich ověřování či vyvracení pomocí protiargumentů, což u žáků posiluje schopnost kritického myšlení. (RVP G, 2007)

Zdůvodňování a obhajoba postupů umožňuje systematické prezentování a vyvracení argumentů a důvodů, což podporuje jasné a logické zdůvodnění rozhodnutí. (RVP G, 2007)

Práce s modely zahrnuje aktivní používání a porozumění jejich různorodým aplikacím a omezením, což žákům umožňuje efektivní práci s matematickými modely a uvědomění si, že realita může být interpretována různými způsoby. (RVP G, 2007)

Rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti posiluje schopnost vizualizovat a interpretovat geometrické vzory a tvary, což umožňuje efektivní řešení matematických problémů. (RVP G, 2007)

Pochopení matematiky, jako součásti kulturního dědictví a způsobu uchopování světa, umožňuje žákům širší pochopení významu matematických konceptů v kontextu lidského poznání, historie a umění. (RVP G, 2007)

Zvláště pak RVP G (2007) upozorňuje na to, že výše uvedené slouží k porozumění prostorovým vztahům reálného světa a k rozvoji schopnosti geometrického vhledu, vytváření hypotéz a deduktivních úvah. Dále jde o prostředek nového hlubšího poznání a pěstování myšlenkové ukázněnosti, která napomáhá žákům k prožitku celistvosti. Zmíněný výčet zahrnuje klíčové aspekty matematického vzdělávání podporujícího rozvoj analytických schopností a kritického myšlení žáků.

Na závěr lze ještě konstatovat, že výše uvedené odpovídá zavedení „kompetence k řešení problémů" tak, jak ji uvádí RVP G (2007), a tedy výše uvedené jsou argumenty ospravedlňující konstrukční úlohy, jako nástroj vzdělávacího procesu k povznesení žáků z hlediska základních dovedností, schopností a znalostí, které žáci potřebují k úspěšnému a efektivnímu fungování ve společnosti a v různých životních situacích.

4.7 Metody a zásady práce s konstrukčními úlohami

V odstavcích výše je specifikováno odkud se konstrukční úlohy vzaly, kam náleží v systému geometrie, v jakých učebnicích se s nimi žáci čtyřletých gymnázií mohou nejpravděpodobněji setkat, jaký je jejich smysl v kontextu vzdělávání a v úplném začátku této kapitoly je uvedeno vymezení konstrukčních úloh, které vysvětluje, že jde o pokyn k hledání rovinných útvarů s požadovanou vlastností pomocí kružítka, pravítka a Euklidových návodů na primitivní konstrukce. V následujících odstavcích jsou popsány základní zásady, fáze a metody vysvětlující, jak s konstrukčními úlohami pracovat, tedy stručný soubor pouček říkajících, jak se za pomoci jmenovaných nástrojů dobrat zamýšlených cílů.

Polák (1991) popisuje, že při jednotně a účelně uspořádaném výkladu geometrie se postupuje tzv. axiomatickou metodou, která vychází z několika základních vět (axiómů) obsahujících základní pojmy a popisujících vztahy mezi nimi. Na základě nich se pak dokazuje platnost dalších vět a generují se nové pojmy definicemi. Herman (1998) dodává, že konstrukční úlohy, jak je napsáno výše na začátku této kapitoly, nespočívají v dokazování, ale spíše v přemýšlení nad způsoby sestrojení význačných bodů útvaru, který lze nalézt jako průsečíky vhodných přímek, kružnic či jejich částí. Ony průsečíky lze nalézt, když se dojde k uvědomění důležitých vztahů mezi ze zadání známými (a odvozenými) body a body neznámými (popř. analogicky pro geometrické útvary). Polák (1991) navíc ještě uvádí, že řešení polohové konstrukční úlohy spočívá v tom, že hledáme jeden nebo více neznámých bodů sestrojovaného geometrického útvaru, zatímco v nepolohových úlohách, je poloha aspoň jednoho z daných prvků libovolně volitelná. Navíc dodává, že řešení nepolohové úlohy lze vždy převést umístěním některého z daných prvků na úlohu polohovou.

Vybraní autoři popisují následující fáze řešení konstrukční úlohy:

Fáze 1: rozbor

Podle Hermana (1998), Hrušy a kol. (1964), Poláka (1991) i Pomykalové (2007) je první a nejdůležitější fází rozbor (analýza), během kterého je třeba přemýšlet nad tím, jak zadaný geometrický útvar s požadovanými vlastnostmi, jehož existenci předpokládáme, zkonstruovat. Jde o hledání vzájemných souvislostí mezi danými a hledanými útvary. Součástí rozboru je náčrt, tj. obrázek a výpis zadaných i hledaných útvarů, jejich vztahů a vlastností, který má pomoci k uvědomění si těch důležitých vlastností, které vedou k řešení. Když je jasné, jak se k řešení dostat, fáze rozboru končí.

Fáze 2: postup konstrukce

Podle Hermana (1998), Poláka (1991) i Pomykalové (2007) pak následuje fáze „postup konstrukce“, tj. chronologický (obvykle symbolický) zápis všech kroků vedoucích ke všem řešením. Jinak řečeno logicky strukturovaný seznam daných bodů (prvků) a jejich vlastností a důsledků, který vede ke vzniku nových bodů, přičemž se vychází z nutných podmínek získaných v rozboru. Hejný a kol. (2017) uvádí, že rozvoj porozumění pojmům a jejich vlastnostem by měl mít přednost před učením se konstrukčních zápisů nazpaměť. Aby žáci nebyli zbytečně zatíženi, doporučuje Hejný a kol. (2017) minimalizovat počet symbolů v zápisech konstrukce. Že je reálně možné ujmout se postupu konstrukce volněji a bez užití symbolického jazyka ukazuje Kuřina (1994), který představuje tzv. filmový pás, tj. sadu obrázků popisujících jednotlivé kroky konstrukce.

Fáze 3: samotná grafická konstrukce

Podle Hermana (1998), Hrušy a kol. (1964), Poláka (1991) i Pomykalové (2007) následuje samotná grafická konstrukce, tj. realizace rysu za pomocí pravítka, kružítka a základních konstrukcí, během které je nutno dbát na preciznost a myšlenku toho, že práce probíhá s ideálními objekty, které se nevyskytují v reálném světě, ale pouze v myslích řešitelů. Dále je třeba uvědomovat si, že všechny body, které vznikly stejným způsobem jsou rovnocenné a žádný z nich nesmí být zanedbán, jinak by mohlo dojít ke ztrátě jednoho či více řešení.

Fáze 4: zkouška správnosti

Podle Hermana (1998), Poláka (1991) a Pomykalové (2007) je předposlední fází tzv. zkouška správnosti, což je kontrola a zdůvodnění, tj. ověření, že nutné podmínky zjištěné v rozboru jsou současně postačujícími a že realizovaný rys odpovídá všem požadavkům ze zadání. Důrazně je potřeba připomenout, že rys není řešením, ale modelem řešení, který skutečné myšlené řešení pouze nahrazuje, a proto nestačí ukázat rys, ale je ještě třeba zdůvodnit jednotlivé vztahy. Hruša a kol. (1964) dokonce hovoří o dokazování správnosti řešení.

Fáze 5: diskuze

Podle Hermana (1998), Poláka (1991) a Pomykalové (2007) je poslední fází tzv. diskuze, což je posouzení toho, kolik různých řešení zadané konstrukční úlohy existuje, popř. jakým způsobem nastavené parametry ovlivní počet řešení. Hruša a kol. (1964) používají pojem „determinace“, tedy vymezení toho, za kterých podmínek řešení neexistuje, za kterých podmínek je pouze jedno jediné, za kterých podmínek jsou dvě atd.

Lze tedy konstatovat, že řešení konstrukčních úloh je logicky strukturované a spočívá ve vymýšlení tvorby nových prvků odvozováním z vlastností prvků již existujících. Toto počínání se doprovází grafickým modelem, tj. rysem. Celý proces probíhá v pěti fázích a těmi jsou: rozbor, postup konstrukce, konstrukce, kontrola řešení a diskuze.

4.8 Důležité pojmy a jejich vlastnosti ze středoškolské planimetrie

Níže jsou uvedena nejdůležitější teoretická východiska, o která se opírají veškeré konstrukce uvažované a realizované v praktické části této práce, tj. každý pojem a každá vlastnost, které jsou v praktické části aplikovány, jsou zde uvedeny. Jako zdroje jsou v tomto pořadí využity: „Euklidovy základy“ v překladu Františka Servíta publikovaného Jednotou českých mathematiků v roce 1907 a volně dostupného na webu Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, „Přehled elementární matematiky“ od Karla Hrušy, Emila Kraemera, Jiřího Sedláčka, Jana Vyšína a Rudolfa Zelinky, který publikovalo Státní nakladatelství technické literatury v roce 1964, „Přehled středoškolské matematiky“ od Josefa Poláka publikovaného Státním pedagogickým nakladatelstvím v roce 1991, „Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií“ od Jiřího Hermana, kterou vydalo nakladatelství Prometheus v roce 1998, a „Matematika pro gymnázia“ od Evy Pomykalové, vydaná nakladatelstvím Prometheus v roce 2007.

Volba Euklidových Základů má za účel vytvořit začátek pomyslného mostu od historického kontextu, jemuž je věnovaný začátek této kapitoly (viz Historie geometrie), zatímco volba Hrušy a kol. (1964), Poláka (1991) a Pomykalové (2007) má dotvořit konec pomyslného mostu končícího v současném školství (viz Konstrukční úlohy v učebnicích).

Ve svém překladu Euklidových Základů uvádí Servít (1907) tři základní seznamy: Výměry (můžeme chápat jako definice ve smyslu uvedeném výše), Úkoly prvotné (můžeme chápat jako postuláty ve smyslu uvedeném výše) a Zásady (můžeme chápat jako axiomy ve smyslu uvedeném výše). Obsah jednotlivých seznamů je ke shlédnutí níže (Servít, 1907, s. 1 – 2):

Výměry

1) *Bod jest co nemá dílu.*
2) *Čára pak délka bez šířky.*
3) *Hranicemi čáry, body jsou.*
4) *Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.*
5) *Plocha jest co jen délku a šířku má.*

6) *Hranicemi plochy jsou čáry.*
7) *Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.*
8) *Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.*
9) *Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým.*
10) *Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena.*
11) *Tupý jest úhel pravého větší.*
12) *Ostrý pak pravého menší.*
13) *Meze jest, co jest něčeho hranicí.*
14) *Útvar jest, co nějaká nebo nějaké meze objímají.*
15) *Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.*
16) *Středem pak kruhu zove se ten bod.*
17) *Průměrem kruhu jest přímka některá vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.*
18) *Polokruh pak jest útvar omezený průměrem a částí obvodu jím usečeného. Střed polokruhu je týž jako kruhu.*
19) *Útvary přímkové jsou, které jsou přímkami omezovány, třístranné třemi, čtyřstranné čtyřmi, mnohostranné více než čtyřmi přímkami omezené.*
20) *Z třístranných útvarů jest trojúhelník stejnostranný, který má tři strany stejné, rovnoramenný pak, který má jen dvě strany stejné, a různostranný, který má tři strany nestejné.*
21) *Mimo to z útvarů třístranných jest trojúhelník pravoúhlý, který má pravý úhel, tupoúhlý pak, který má úhel tupý, a ostroúhlý, mající tři úhly ostré.*
22) *Ze čtyřstranných útvarů je čtverec, který jest stejnostranný a pravoúhlý; obdélník, pravoúhlý sice, však nestejnostranný; kosočtverec, stejnostranný, ne však pravoúhlý; kosodélník, jenž má protější strany i úhly navzájem stejné, jenž není ani stejnostranný ani stejnoúhlý; mimo to pak čtyřstranné útvary nazývány buďte lichoběžníky (různoběžníky).*

23) *Rovnoběžky jsou přímky, které jsouce v téže rovině a prodlouženy jsouce na obě strany do nekonečna nikde se nesbíhají.*

Úkoly prvotné *(Servít, 1907, s. 1 – 2)*

1) *Budiž úkolem od kteréhokoliv bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.*
2) *A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.*
3) *A z jakéhokoliv středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.*
4) *A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.*
5) *A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvoum pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna, že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.*

Zásady *(Servít, 1907, s. 1 – 2)*

1) *Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.*
2) *Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.*
3) *A odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části rovny jsou.*
4) *A když se přidají k nerovným rovné, celky jsou nerovny.*
5) *A dvojnásobky téhož vespolek rovny jsou.*
6) *A polovičky téhož vespolek rovny jsou.*
7) *A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.*
8) *A celek větší než díl.*
9) *A dvě přímky místa neomezují.*

Ve výše uvedených výčtech jsou pojmy archaické a pojmy, které není vhodné vnímat jako chybné (i když se to nabízí), ale spíše uchopené v tehdejším pojetí, např. 22. výměra uvádí jako poslední typ čtyřstranných útvarů lichoběžníky, i když by mělo jít o různoběžníky. Navíc je v celém výčtu užíváno pojmu „přímka“ tak, jak dnes užíváme pojem „úsečka“. Přesto je možné poukázat nejen na souvislosti mezi Euklidovým pojetím a tím současným, ale dokonce na přímé nezměněné dědictví.

Níže jsou uvedeny zavedení některých důležitých planimetrických pojmů a jejich vybrané vlastnosti. K tomuto výčtu je přistoupeno z pohledu různých autorů, jak je představeno v analogii o mostu výše. Konkrétně jsou zde vymezeny pojmy: bod, rovina, přímka, polopřímka, úsečka, polorovina, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník, a zvláště pak deltoid. Z vlastností jsou zde uvedeny: incidence, rovnoběžnost, kolmost a vztah mezi středovým a obvodovým úhlem nad daným obloukem.

Podle Euklida (in Servít, 1907)[4] platí, že bod je to, co nelze dále dělit. K tomu se vyjadřují například Hruša a kol. (1964) a Polák (1991), kteří bod nejenže považují za nejdůležitější prvek geometrie, ale samotný pojem „bod“ vymezují kruhem jako prvek bodové množiny (geometrického útvaru) a uvádí jej dále v příkladech, např.: průsečík dvou různoběžek je jeden bod, vrcholy šestiúhelníku jsou šesticí bodů nebo přímka je složena z nekonečného počtu bodů. V rozporu s jimi uvedeným zavedením je Vopěnka (2016), který neuznává geometrické útvary za množiny bodů. Netvrdí, že šest bodů tvoří vrcholy šestiúhelníku, nebo že nekonečně bodů tvoří úsečky, nýbrž to, že šest bodů leží na vrcholech šestiúhelníku a nekonečně mnoho bodů leží na přímce. Stejně tak podle něj například strana trojúhelníku není úsečkou, ale úsečka na straně trojúhelníka leží. Pomykalová (2007) dodává, že pojem „bod“ vznikl abstrakcí hmotných objektů a Čech (1974) i Došlá a Došlý (2006) zavádějí pojem „bod“ jako prvek metrického prostoru, tj. dvojici neprázdné množiny a specifického zobrazení, pro jejíž všechny prvky platí tzv. axiom totožnosti, axiom symetrie a trojúhelníková nerovnost.

Podle Euklida (in Servít, 1907) je rovina plocha, která je vůči přímkám, které na ni leží umístěna rovně, zatímco Hruša a kol. (1964) a Polák (1991) zavádí rovinu jako nekonečnou bodovou množinu a tím pádem ji označují za geometrický útvar. Opět by se mohlo zdát, že s tím je ve sporu Vopěnka (2016), který přistupuje jinak a tvrdí, že rovina je prostor, který se vyplňuje euklidovskými jevy a dodává, že prostor je to místo, ve kterém si geometrické objekty představujeme. Zcela odlišný vhled má pak Čech (1974), který zavádí pojem „rovina“ jako množinu všech komplexních čísel.

Euklid (in Servít, 1907) uvádí pojem „přímka“ (zamýšlí pojem úsečka) jako čáru, která je vůči bodům na ní ležícím umístěna rovně. Přitom připouští, že ji lze libovolně protahovat a tím vzniká prostor pro další pojmy (polopřímka a přímka). Opačně k těmto pojmům přistupuje Pomykalová (2007), která vychází z toho, že přímka je základní geometrický

[4] Servít (1907) – F. Servít přeložil v roce 1907 Základy (*Stoicheia*) od Euklida. V textu této práce je občas uváděno jméno překladatele bez autora (tj. Euklida)

pojem a je již znám. Doplňuje, že bod ležící na přímce (nevysvětluje, jestli každý, nebo jeden konkrétní) ji rozděluje na dvě opačné polopřímky a je jejich společným počátkem. Úsečka je pak průnikem dvou polopřímek, které jsou incidentní s jednou přímkou a každý z nich má vlastní počátek různý od počátku druhé, tyto počátky pak Pomykalová (2007) nazývá „krajní body úsečky“. Pojmy „počátek polopřímky“ a „krajní body úsečky“ používá také Polák (1991). S Pomykalovou (2007) se shodují Hruša a kol. (1964) i Polák (1991) na tom, že úsečky a přímky jsou elementární pojmy a zmiňují je pouze jako bodové množiny, resp. geometrické útvary.

Polák (1991) a Pomykalová (2007) uvádí, že přímka dělí rovinu na dvě poloroviny (Polák specifikuje, že libovolná). Tato přímka se pak označuje za jejich společnou hranici. Obě poloroviny se od sebe odlišují svým vnitřkem, tj. nějakým vnitřním bodem. Hruša a kol. (1964) ukazují, že např. přímka p a bod A, který není s přímkou p incidentní tvoří polorovinu pA.

Euklid (in Servít, 1907) uvádí „úhel“ jako vzájemný sklon dvou čar. Pomykalová (2007) se stoletým odstupem uvádí, že úhel je rozdělením roviny dvěma různými polopřímkami se společným počátkem. Polopřímky se pak nazývají ramena a společný počátek se nazývá vrchol. Hruša a kol. (1964) ještě dodávají, že vniklé dvě části roviny označujeme jako úhel vypouklý (konvexní, větší než 180 °) a úhel nevypouklý (nekonvexní, menší než 180 °). Polák (1991) a Pomykalová (2007) vysvětlují, že pro úhel AVB za konvexní úhel považujeme ten, který vznikl průnikem rovin VAB a VBA, a že za nekonvexní úhel považujeme ten, který vznikl sjednocením opačné roviny k rovině VAB s opačnou rovinou k rovině VBA.

Podle Euklida (in Servít, 1907) je trojúhelník přímočarý útvar ohraničený třemi čarami. K tomu Hruša a kol. (1964), Polák (1991) a Pomykalová (2007) souhlasně zavádí pojem „trojúhelník“, jako průnik polorovin ABC, BCA a CAB, přičemž zdůrazňují, že body A, B a C (vrcholy trojúhelníku) nesmí být kolineární. Dále rozdělují trojúhelníky podle délek stran na rovnostranné, rovnoramenné a různostranné (obecné). Různostranné pak dále dělí podle velikosti vnitřních úhlů na ostroúhlé, tupoúhlé a pravoúhlé. Navíc připomínají, že pro délky stran platí trojúhelníková nerovnost (tj. součet délek kterýchkoli dvou stran je větší než strana zbývající), a že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý. Společně se nakonec shodují, že těžnice je úsečka, jejíž krajní body jsou vrchol a protilehlý střed strany, a že výška je kolmice na stranu procházející protilehlým vrcholem.

Analogicky Euklid (in Servít, 1907) zavádí pojem „čtyřúhelník“, jako přímočarý útvar, který je ohraničený čtyřmi čarami. K tomu Pomykalová (2007) dodává, že pojem čtyřúhelník je zaveden jako uzavřená lomená čára spolu s částí roviny ohraničenou touto lomenou čarou tak, že má čtyři vrcholy a čtyři strany. Polák (1991) potom takto vymezené čtyřúhelníky dělí čtyřúhelníky na různoběžníky, lichoběžníky a rovnoběžníky. Rovnoběžníky pak dále dělí na obdélníky, čtverce, kosodélníky a kosočtverce. Za zvláštní druh lichoběžníku pak považuje deltoid, o kterém Hruša a kol. (1964) píší, že je to speciální typ tečnového čtyřúhelníku (tj. čtyřúhelníku, pro který existuje kružnice vepsaná), který je souměrný podle jedné osy.

Hruša a kol. (1964), Polák (1991) a Pomykalová (2007) píší, že o bodech, které leží na přímce (popř. neleží na přímce) říkáme, že jsou (popř. nejsou) s přímkou incidentní. Dodávají, že tento vztah funguje i naopak, tedy, pokud přímka prochází (popř. neprochází) bodem, pak je s ním (popř. pak s ním není) incidentní. Dále tito autoři shodně zavádí „rovnoběžnost“ jako polohovou vlastnost dvou přímek v rovině, které nemají žádný společný bod a „různoběžnost“ jako polohovou vlastnost dvou přímek v rovině, které mají právě jeden společný bod. Nakonec Pomykalová (2007) vysvětluje, že úhel, jehož vrcholem je střed kružnice a ramena procházejí krajními body oblouku kružnice, se nazývá středový. Dodává, že pokud je vrchol úhlu na kružnici, pak jde o úhel obvodový. A nakonec ukončuje myšlenkou, že pro tentýž oblouk je velikost středového úhlu rovna dvojnásobku velikosti úhlu obvodového.

Níže jsou uvedeny konstrukce, o kterých vybraní autoři pojednávají jako o základních.

Za základní konstrukce Euklid (in Servít, 1907) považuje pět úkonů a to, že:

- lze vytvořit úsečku, která prochází dvěma danými body; danou úsečku lze po obou stranách libovolně prodlužovat,
- lze sestrojit kružnice s daným středem a danou velikostí,
- uvědomění si, že všechny pravé úhly jsou si rovny,

- uvědomění si, že jestliže úsečka protíná dvě jiné úsečky tak, že na jedné straně je součet vnitřních přilehlých úhlů menší než dva pravé úhly, pak lze na této straně úsečky prodloužit tak, aby se protnuly

K tomu dodává Herman (1998) vlastní seznam základních konstrukcí:

- sestrojení osy dané úsečky a daného úhlu
- sestrojení kolmice a rovnoběžky k dané přímce procházející daným bodem
- sestrojení tečny ke kružnici
- sestrojení trojúhelníků podle vět *sss* (strana, strana, strana), *sus* (strana, úhel, strana), usu (úhel, strana, úhel), a *Ssu* (větší strana, menší strana, úhel naproti větší straně)
- sestrojení úhlu o velikosti 45° a sestrojení úhlu o velikosti 60°

Za zvlášť primitivní pak Herman (1998) považuje:

- sestrojení přímky procházející danými dvěma body
- sestrojení kružnice s daným středem a poloměrem
- přenesení dané úsečky na danou polopřímku
- přenesení daného úhlu k dané polopřímce
- grafické sečtení a odečtení úseček
- grafické sečtení a odečtení úhlů

Hruša a kol. (1964) doplňují Hermana o nanesení dané úsečky nebo daného úhlu na danou polopřímku. Pomykalová (2007) pak už jen pro úplnost doplňuje sestrojení kružnice trojúhelníku opsané a vepsané a sestrojení kružnice nad průměrem. Polák (1991) rovněž pro úplnost doplňuje primitivní konstrukce, a to o sestrojení průsečíku dvou různoběžek, sestrojení průsečíků kružnice a její sečny a sestrojení průsečíků dvou kružnic.

Od doby Euklidovy geometrie, která byla formálně uvedena ve 3. století před naším letopočtem, se základní principy konstrukčních úloh, geometrických definic a důkazů v mnoha ohledech téměř vůbec nezměnily. Euklides formuloval své definice, axiomy, věty a jejich a důkazy s neuvěřitelnou systematičností a jasností, což skutečně položilo (po Hilbertových úpravách) základy pro celou oblast geometrie jako organizovaného a deduktivního studia prostorových vztahů a forem. I přes tisíciletí rozvoje matematiky zůstávají základní pojmy, jako jsou body, přímky a úhly, stále relevantní a nezměněné. To, co se v průběhu času změnilo, je terminologie a jazyk, kterým tyto pojmy popisujeme. Moderní matematika disponuje rozvinutou škálou nových výkladů, které umožňují přesnější formulaci a abstrakci geometrických konceptů, což podporuje jejich aplikaci v širokém spektru disciplín od fyziky, přes architekturu, strojírenství, geografii, až po počítačovou vědu.

4.9 Shrnutí kapitoly

V této kapitole je čtenáři nabídnuto seznámení s:

- vymezením konstrukční úlohy, tj. pokynu k nalezení rovinného útvaru nebo všech rovinných útvarů s požadovanými vlastnostmi pomocí konečného počtu elementárních kroků za použití kružítka a pravítka a vycházejících z Euklidových postulátů
- tím, že geometrické poznatky, ač izolované a nezdůvodněné, mají počátky ve zkušenostech zeměměřičů a stavitelů prvních starověkých civilizací, které existovaly před přibližně 5 tisíci lety, přičemž až v 5. století př. n. l. se geometrie stala systematickou vědou
- tím, že konstrukční úlohy jsou součástí planimetrie, ta je zase součástí euklidovské geometrie, a ta dále patří do geometrie podobností, afinní geometrie a geometrie projektivní, což reflektuje vzestupnou hierarchii nadřazených matematických pojmů
- Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia (RVP G), který stanovuje konstrukční úlohy jako povinnou součást vzdělávacího obsahu a považuje schopnost řešit konstrukční úlohy za součást očekávaných výstupů pro všechny žáky, což reflektuje vzdělávací cíle závazné pro školy
- učebnicemi, jako je „Planimetrie“ od Pomykalové, které poskytují žákům praktické příklady a metody řešení konstrukčních úloh, kterýžto přístup podporuje rozvoj klíčových dovedností potřebných pro úspěšné fungování v životě a ve společnosti;
- některými důležitými planimetrickými pojmy a jejich vlastnostmi, jako např. bod, rovina, přímka, incidence apod.

Je tedy možné konstatovat, že záměry stanovené v úvodu této kapitoly jsou naplněny.

PRAKTICKÁ ČÁST

Praktická část práce je postavena na vlastním výzkumu realizovaném skrze dotazníková šetření. Dále pak je v této části práce zakomponován proces tvorby gradovaných úloh, způsob jejich hodnocení a ověřování a v neposlední řadě i metodika k jejich implementaci do výuky.

Z důvodu zachování přehlednosti byly všechny dotazníky shromážděny v jedné kapitole, přestože chronologicky mezi 3a a 3b patří sada gradovaných úloh.

Záměrem praktické části je seznámení čtenáře se způsobem sběru dat, jejich vyhodnocováním a jejich využitím při tvorbě sady gradovaných geometrických úloh. Dále pak zmiňované úlohy představit.

5 Dotazníková šetření

V praktické části této diplomové práce bylo zrealizováno celkem pět dotazníkových šetření, mimo jiné aktivity a výstupy, které jsou popsány níže. Šetření byla orientována jak na středoškolské učitele matematiky, tak na žáky středních škol, zejména gymnázií. Pojetí prvních dvou šetření bylo navrženo tak, aby první a druhý dotazník systematicky nashromáždily údaje o kritických místech geometrie, z pohledu dotazovaných učitelů. Z těchto údajů se pak odvíjela příprava koncepce sady gradovaných úloh (viz kapitola 6). Třetí dotazník byl užit ve třetím a čtvrtém šetření, která proběhla před a po práci se sadou gradovaných úloh implementovaných do vyučovací hodiny. Účelem těchto šetření bylo sesbírat data pro zjištění změny v žákovském porozumění geometrickým pojmům. Poslední, páté, šetření bylo určeno ke sběru zpětné vazby na sadu gradovaných úloh. Spolupracující učitelé měli možnost vyjádřit se k jednotlivým úlohám a sdílet svou konstruktivní kritiku.

Dotazníkové šetření probíhalo ve všech případech on-line formou (dotazník na survio.cz) a bylo zprostředkováno od konce října 2023 přes různé sociální sítě např. Facebook, Twitter, Instagram (v případě dotazníků pro učitele) a QR kód vložený do sady gradovaných úloh (v případě dotazníků pro žáky).

Pro snadnější orientaci je níže vypsán stručný přehled výše zmíněných dotazníků:

- Dotazník 1 – pilotní dotazník pro pedagogickou veřejnost (konkrétně středoškolské učitele matematiky)
- Dotazník 2 – navazující dotazník pro učitele, kteří měli zájem participovat na implementování a ověřování účinnosti sady gradovaných úloh ve své vyučovací hodině
- Dotazník 3
  - Dotazník 3a – evaluační dotazník pro žáky před prací se sadou gradovaných úloh ve vyučovací hodině
  - Dotazník 3b – evaluační dotazník pro žáky po práci se sadou gradovaných úloh ve vyučovací hodině
- Dotazník 4 – evaluační arch pro pedagogy, kteří se svými žáky a ve své vyučovací hodině sadu gradovaných úloh použili

Všechny zmiňované dotazníky obsahují jak otázky uzavřené, tak otázky otevřené. U uzavřených otázek je někdy povolena volba více odpovědí, na kteroužto možnost byli respondenti přímo v dotazníku upozorněni.

Sesbíraná data byla vyhodnocena pro každý dotazník zvlášť, a to buď formou grafů (koláčové grafy typicky pro uzavřené otázky s volbou jedné jediné odpovědi a sloupcové grafy typicky pro uzavřené otázky s možností volit více odpovědí), tabulek nebo formou parafrází slovních odpovědí respondentů. Způsob zpracování dat se odvíjel od charakteru otázky. V grafech, tabulkách i parafrázích byly zaneseny pouze relevantní odpovědi, tzn. v případě uzavřených otázek šlo typicky o nejčetnější odpovědi a v případě otevřených otázek šlo o odpovědi s přínosem pro téma (tj. byly podle nejlepšího vědomí a svědomí vynechány odpovědi, které neměly žádnou hodnotu pro účely této práce).

Konkrétní znění všech otázek, včetně všech nabízených možností k výběru odpovědí je ke shlédnutí v Přílohách 1 – 5 této práce.

5.1 Dotazník 1 – pilotní dotazník pro pedagogickou veřejnost

První ze čtyřdílné série dotazníků, které byly vytvořeny pro účely této diplomové práce, je dotazník koncipovaný jako pilotní. Zaměřen je na pedagogickou veřejnost (učitele matematiky) a skládá se ze tří částí. V první části dotazníku dochází k obecné identifikaci respondentů (typ školy, délka praxe, nejvyšší dosažené vzdělání, …). Druhá část ověřuje, zda dotazovaní učitelé považují geometrii za kritické místo matematiky. Ve třetí části dotazníku pak respondenti konkretizují a svým profesním názorem odůvodňují, která témata z učiva geometrie považují za kritická.

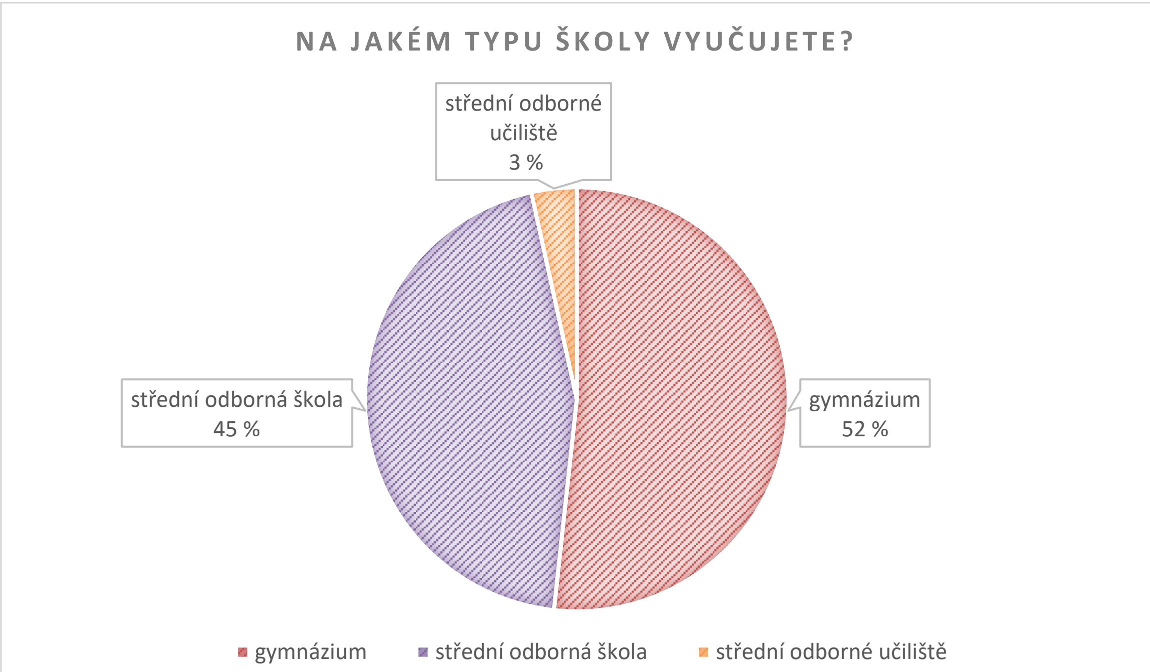
Cílem tohoto dotazníku bylo shromáždit informace pro specifikaci konkrétní oblasti geometrie, pro níž měly být gradované úlohy vytvořeny. Vedlejším cílem bylo najít učitele matematiky, kteří by byly ochotní vytvořené úlohy vyzkoušet ve své výuce a společně s žáky je pak reflektovat.

Dotazník obsahuje celkem 13 otázek, z toho 11 uzavřených a 2 otevřené. Zařazeny jsou jak otázky s možností jedné odpovědi, tak otázky nabízející volbu více odpovědí. Na dotazník odpovědělo celkem 58 respondentů, a to v průběhu 10 týdnů.

Jak je již v teoretické části této práce zmiňováno, tak podle Jirotkové a Kloboučkové (in Rendl a Vondrová, 2013) je kritickým místem v matematice na 1. stupni základní školy rýsování a míra v geometrii. Navíc podle Vondrové a Žalské (in Rendl a Vondrová, 2013) jsou kritickým místem v matematice na 2. stupni základní školy konstrukční úlohy. Na základě těchto informací bylo očekáváno, že se konstrukční úlohy s obvody a obsahy potvrdí jako kritická místa i u dotazovaných středoškolských učitelů.

5.1.1 Vyhodnocení *Dotazníku 1*

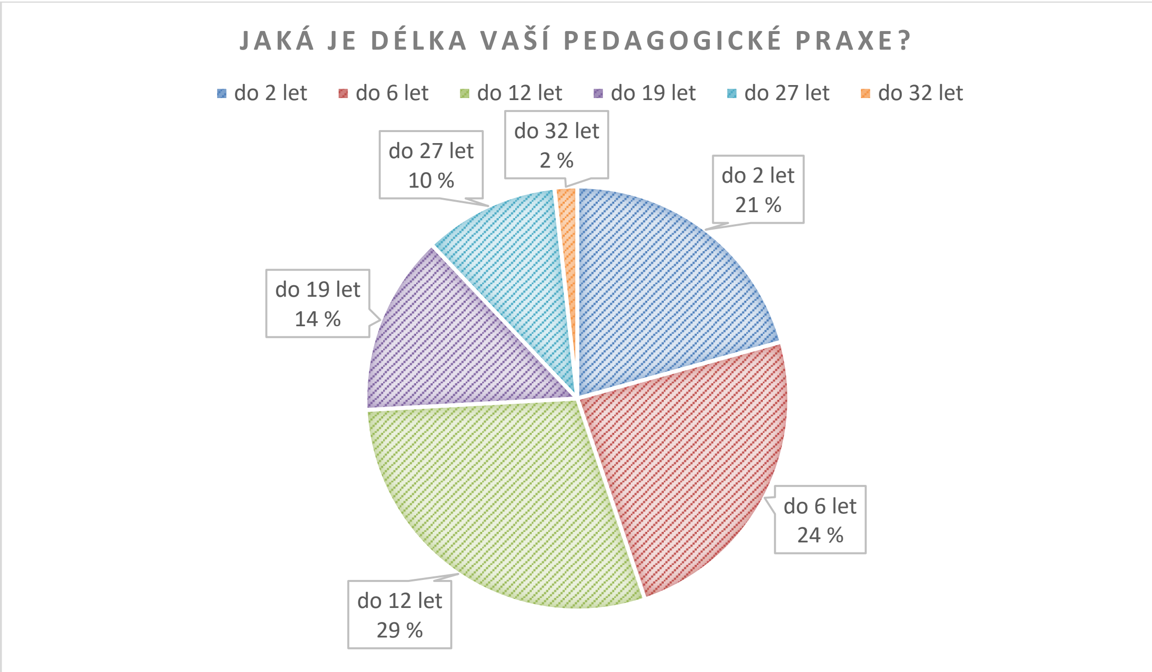
Otázka 1: Na jakém typu střední školy vyučujete?*



Graf 1 - odpovědi k otázce 1

Z celkového počtu 58 respondentů (učitelů a učitelek) jich 52 % (tj. 30 respondentů) vyučuje na gymnáziu, 45 % (tj. 26 respondentů) na střední odborné škole a 3 % (tj. 2 respondenti) na středním odborném učilišti.

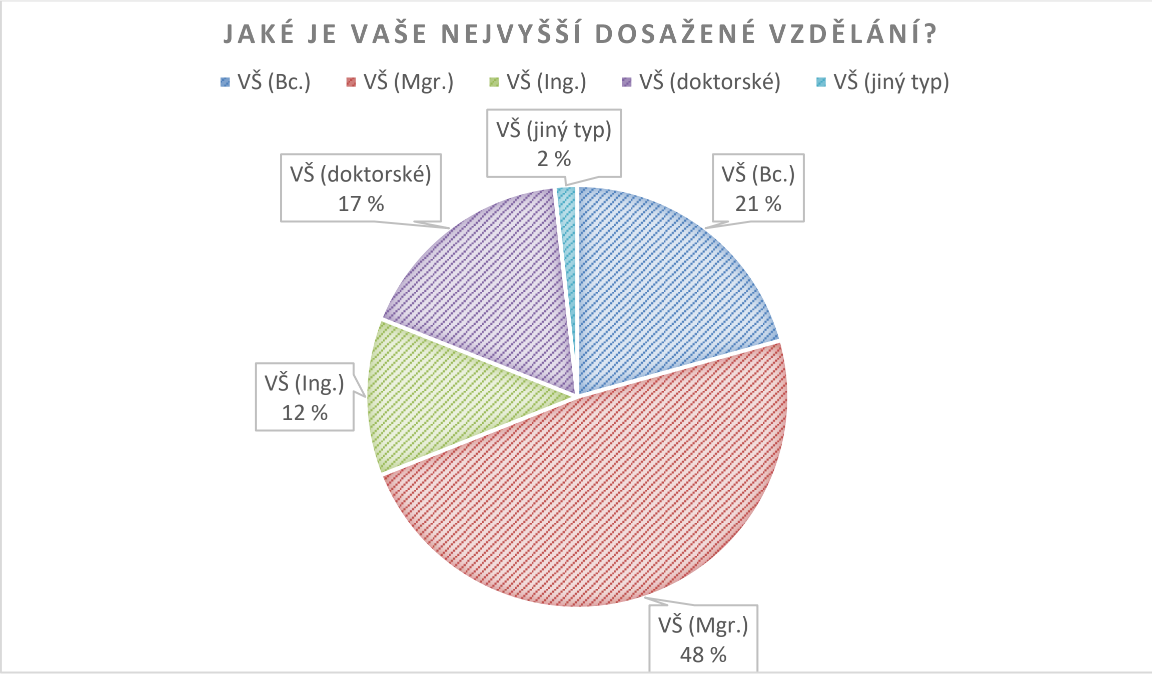
Otázka 2: Jaká je délka Vaší pedagogické praxe?*



Graf 2 - odpovědi k otázce 2

Co se týče délky pedagogické praxe respondentů, tak ta se pohybuje nejčastěji v době do 12 let (29 %, 17 respondentů) a do 6 let (24 %, 14 respondentů). Dále pak jsou zastoupeni respondenti s délkou praxe do 2 let (21 %, 12 respondentů), do 19 let (14 %, 8 respondentů), do 27 let (10 %, 6 respondentů) a ojediněle se vyskytl učitel s pedagogickou praxí do 32 let (2 %, 1 respondent).

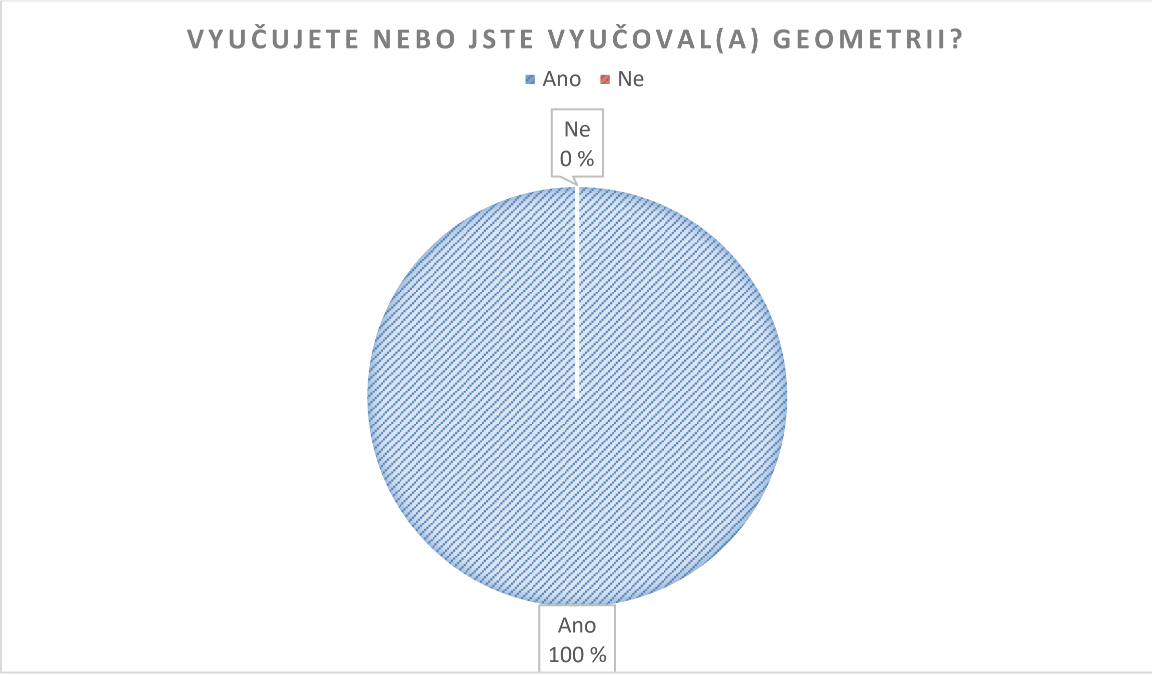
Otázka 3: Jaké je Vaše nejvyšší dosažené vzdělání?*



Graf 3 - odpovědi k otázce 3

Z *Grafu 3* vyplývá, že z dotázaných jsou s nejvyšší četností zastoupeni učitelé s vysokoškolským vzděláním a titulem Mgr. (48 %, 28 respondentů), dále pak učitelé s bakalářských titulem (21 %, 12 respondentů), dále pak učitelé s vysokoškolským doktorským vzděláním (17 %, 10 respondentů) a v neposlední řadě i učitelé s vysokoškolským vzděláním a titulem Ing. (12 %, 7 respondentů) a učitel s jiným vysokoškolským titulem, konkrétně titulem doc. (2 %, 1 respondent).

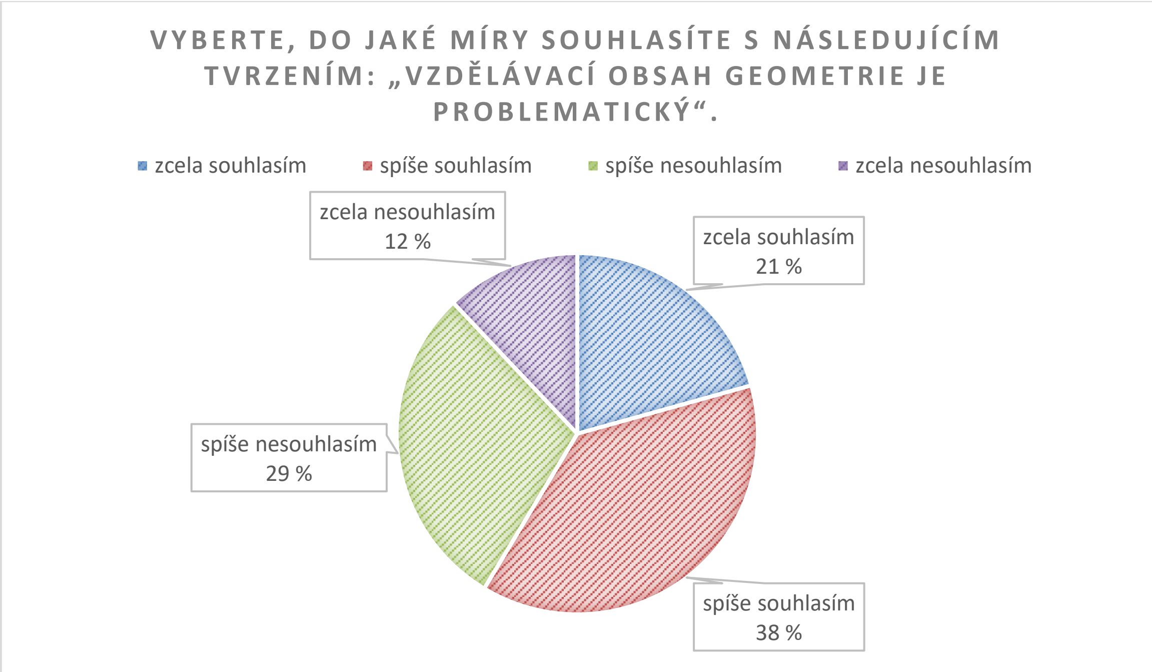
Otázka 4: Vyučujete nebo jste vyučoval(a) geometrii?*



Graf 4 - odpovědi k otázce 4

Všichni dotazovaní učitelé mají zkušenost s vyučováním geometrie (58 respondentů).

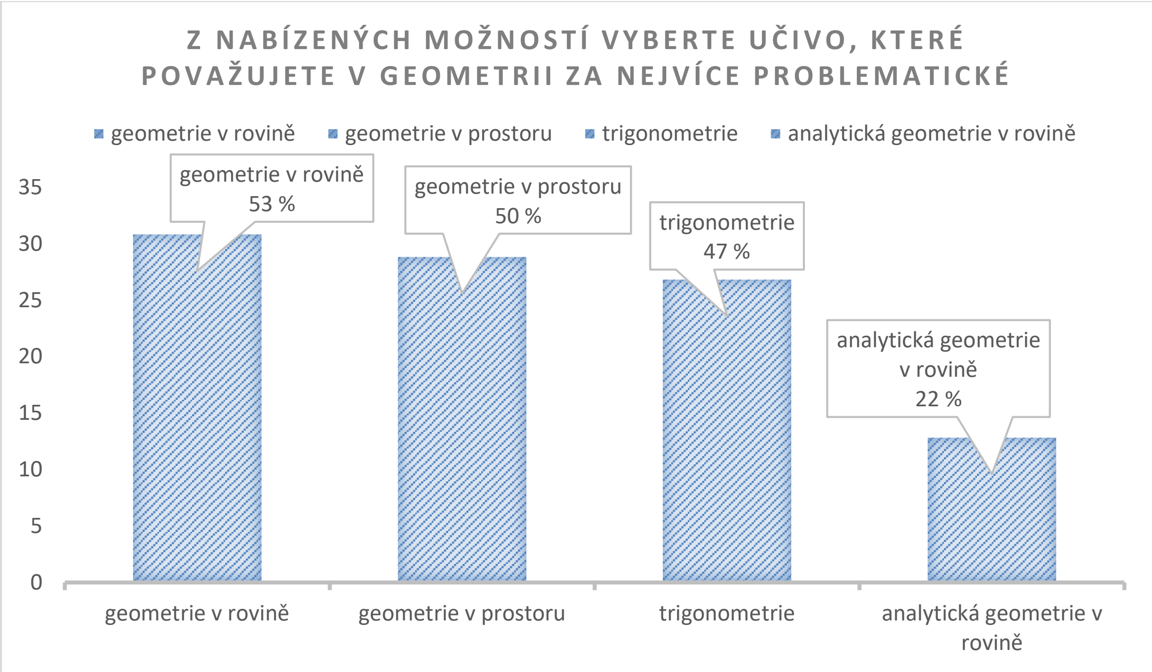
Otázka 5: Vyberte, do jaké míry souhlasíte s následujícím tvrzením: „Vzdělávací obsah geometrie je problematický“.*



Graf 5 - odpovědi k otázce 5

Z nasbíraných dat vyplývá, že vzdělávací obsah geometrie považuje za problematický 59 % (tj. 34 respondentů) z dotazovaných učitelů. Naopak 41 % (tj. 24 respondentů) z nich tento názor nesdílí.

Otázka 6: Z nabízených možností vyberte učivo, které považujete v geometrii za nejvíce problematické.*



Graf 6 - odpovědi k otázce 6

Otázka č. 6 měla nastavenou možnost volby více odpovědí. Za nejvíce problematické učivo v geometrii považují dotazovaní učitelé učivo geometrie v rovině (zvoleno 31x, tj. 53 % respondentů) a učivo geometrie v prostoru (zvoleno 29x, tj. 50 % respondentů). Dále učivo trigonometrie (zvoleno 27x, tj. 47 % respondentů). Jako nejméně problematické bylo vybráno učivo analytické geometrie v rovině (zvoleno 13x, tj. 22 % respondentů).

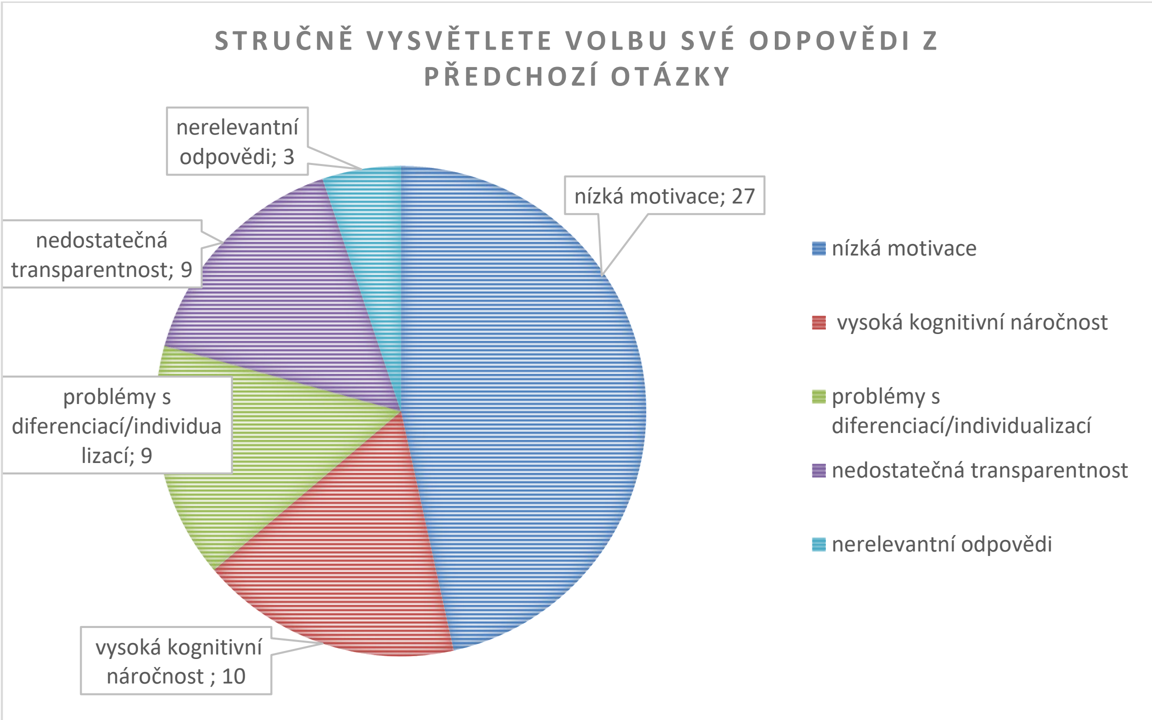
Otázka 7: Stručně vysvětlete volbu své odpovědi z předchozí otázky.*

Vzhledem k charakteru otázky (otevřená otázka) byly odpovědi vyučujících parafrázovány a sumarizovány dle podobnosti významu sdělení. Odpovědi byly zpracovány s ohledem na nejvyšší možnou míru zachování původního smyslu. U každé ze skupin shodných odpovědí je uveden počet učitelů, kteří svou odpovědí do skupiny spadají. Pro zpřehlednění je slovní vyhodnocení této otázky taktéž doplněno sloupcovým grafem.

Nejčastěji se vyučující vyjadřovali následovně:

A) Nízká motivace žáků – rýsování žáky nebaví/nejde jim (27 respondentů)

B) Vysoká kognitivní náročnost tématu – žáci umí reprodukovat, ale ne samostatně tvořit (10 respondentů)
C) Nedostatečná individualizace/diferenciace výuky – učitel nezvládá výuku dostatečně přizpůsobovat náročnosti tématu, tempu a velkému počtu žáků (9 respondentů)
D) Nedostatečná transparentnost – geometrické učivo v současných učebnicích není dostatečně průhledné, což vede k nesrovnalostem a nedostatečnému porozumění (9 respondentů)
E) Nerelevantní odpovědi (3 respondenti)



Graf 7 – odpovědi k otázce 7

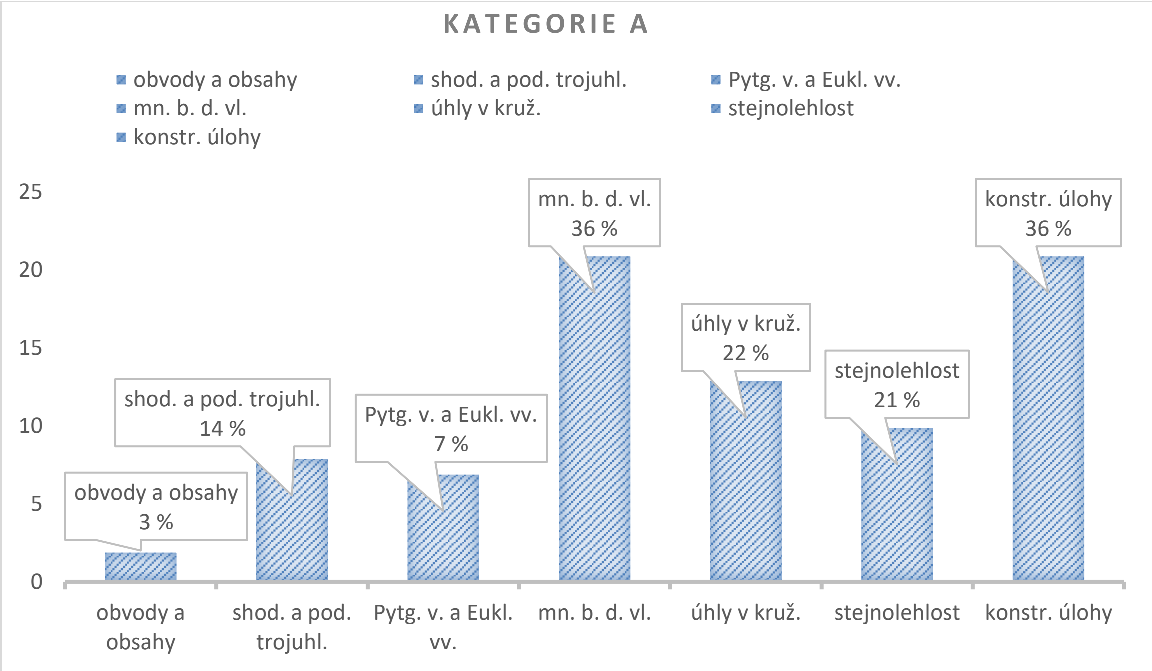
Jeden z dotazovaných vyučujících např. v odpovědi na tuto otázku uvedl: „*Když učím geometrii, tak mi hlavně v některých třídách dělá problém stíhat dohled nad všemi žáky. Každý si jede vlastním tempem a používá vlastní postupy a pak jsou po stránce odvedené práce úplně někde jinde.*“

Další vyučující zmínil: „*Na začátku geometrie se snažím žáky motivovat, ale nakonec většinou skončíme u toho, že je geometrie nebaví – nejčastěji proto, že musí při práci používat různé nástroje, a soustředit se.*“

Otázka 8: Z nabízených možností vyberte nejvíce problematické téma/témata.*

Otázka č. 8 je rozdělena do 4 podotázek (kategorií A – D), dle učiva vyplývajícího z RVP G (2007). Všechny kategorie této otázky měly nastaveny možnost volby více odpovědí.

Kategorie A: geometrie v rovině

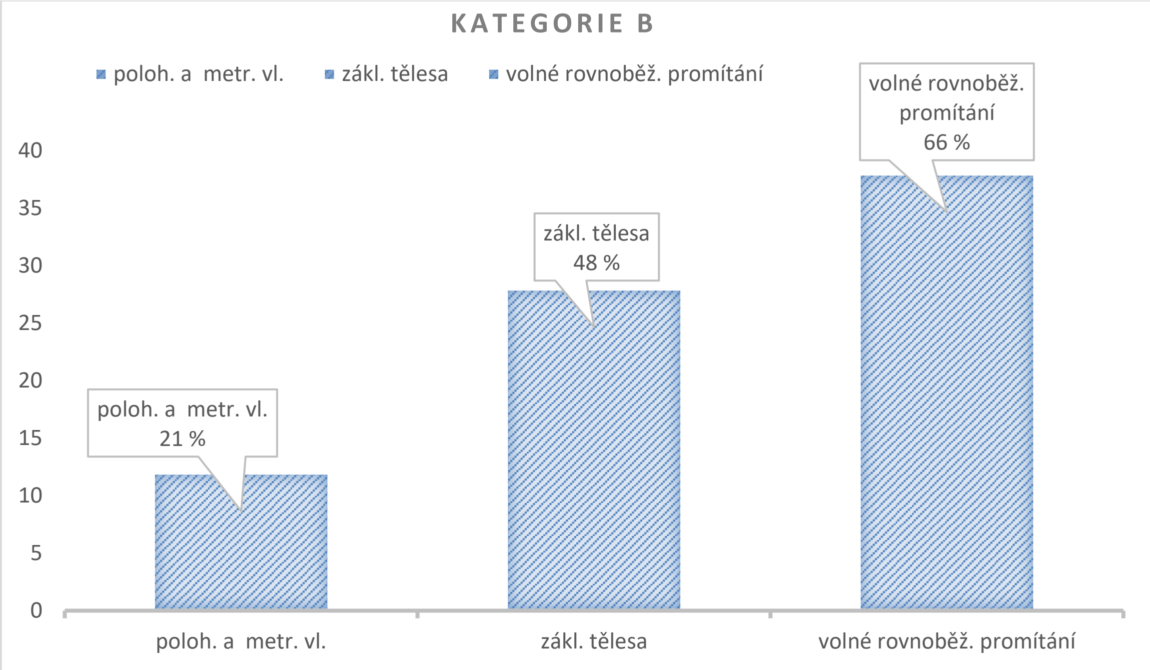


Graf 8 - odpovědi k otázce 8A

Z nabízených možností učiva geometrie v rovině vyučující nejčastěji vybírali učivo „množiny bodů dané vlastnosti“ a učivo „konstrukční úlohy“ (zvoleno 21x, tj. 36 % respondentů).

Dále pak „úhly v kružnici“ (zvoleno 13x, tj. 22 % respondentů), „stejnolehlost" (zvoleno 10x, tj. 21 % respondentů), „shodnost a podobnost trojúhelníků“ (zvoleno 8x, tj. 14 % respondentů) a učivo „Pythagorova věta a věty Euklidovi“ (zvoleno 7x, tj. 12 % respondentů). S nejnižší četností bylo zvoleno učivo „obvody a obsahy“ (zvoleno 2x, tj. 3 % respondentů).

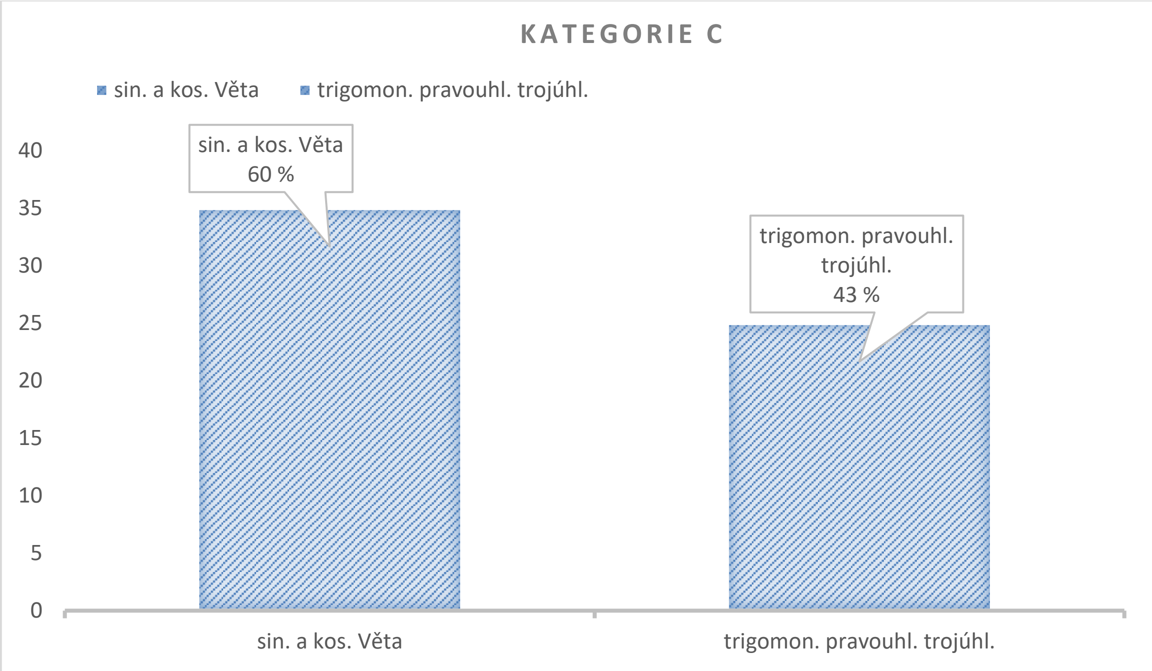
Kategorie B: geometrie v prostoru



Graf 9 - odpovědi k otázce 8B

Z nabízených možností učiva geometrie v prostoru vyučující nejčastěji vybírali „volné rovnoběžné promítání“ (zvoleno 38x, tj. 66 % respondentů). Dále pak učivo „základní tělesa“ (zvoleno 28x, tj. 48 % respondentů) a nejméně „polohové a metrické vlastnosti“ (zvoleno 12x, tj. 21 % respondentů).

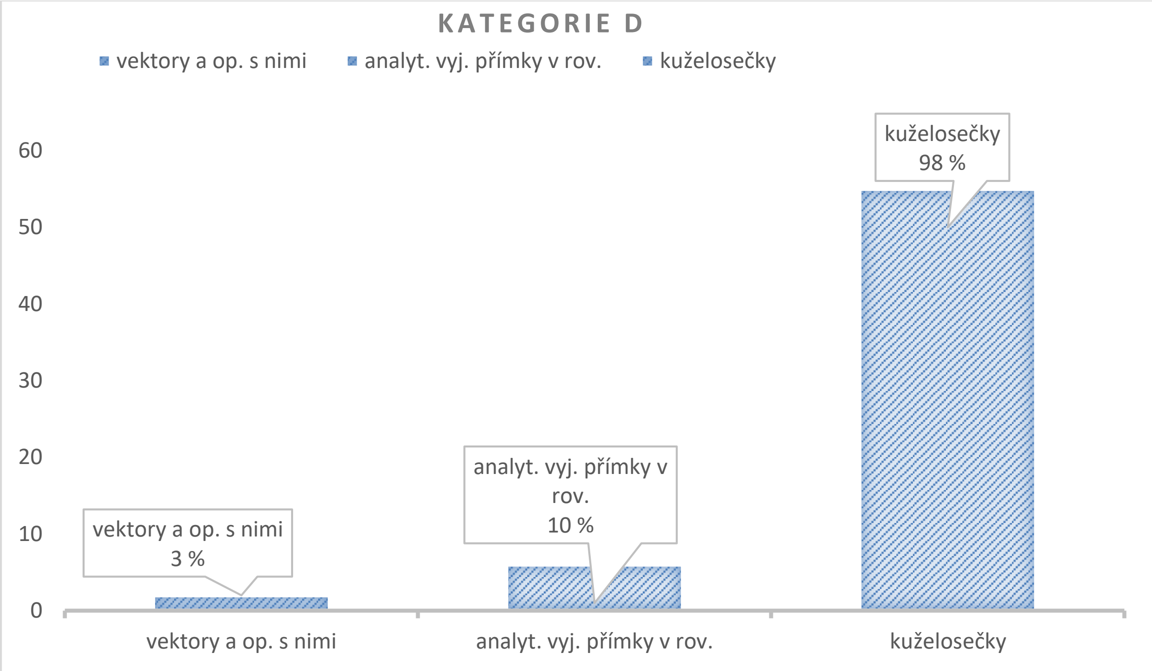
Kategorie C: trigonometrie



Graf 10 - odpovědi k otázce 8C

Z kategorie C byla s nejvyšší četností vybrána možnost „sinová a kosinová věta“ (zvoleno 35x, tj. 60 % respondentů) a dále pak možnost „trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku“ (zvoleno 25x, tj. 43 % respondentů).

Kategorie D: analytická geometrie v rovině



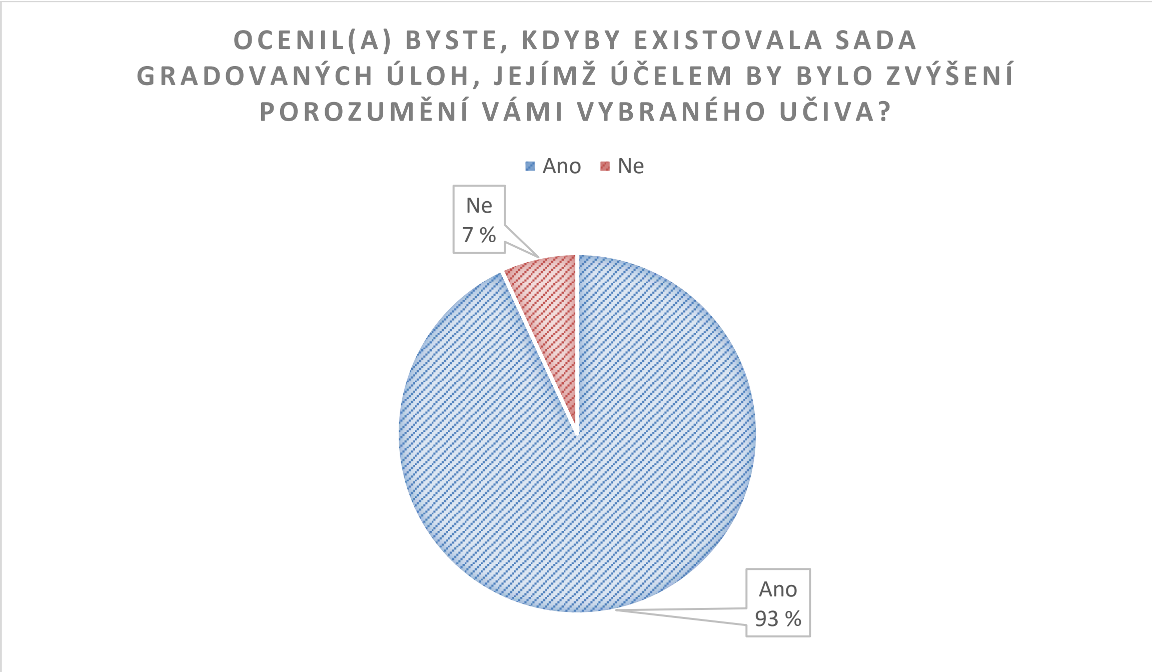
Graf 11 - odpovědi k otázce 8D

Z nabízených možností v kategorii D volili vyučující s nejvyšší četností jednoznačně možnost „kuželosečky“ (zvoleno 55x, tj. 98 % respondentů). Méně pak možnosti „analytické vyjádření přímky v rovině“ (zvoleno 6x, tj. 10 % respondentů) a možnost „vektory a operace s nimi“ (zvoleno 2x, tj. 3 % respondentů).

Z celkového vyhodnocení kategorií A – D v otázce 8 vyplývá, že za nejvíce problematická témata jsou v učivu geometrie považována následující:

A) Množiny bodů dané vlastnosti a konstrukční úlohy
B) Volné rovnoběžné promítání
C) Sinová a kosinová věta
D) Kuželosečky

Otázka 9: Ocenil(a) byste, kdyby existovala sada gradovaných úloh, jejímž účelem by bylo zvýšení porozumění Vámi vybraného učiva?*



Graf 12 - odpovědi k otázce 9

Z celkového počtu odpovídajících učitelů se k této otázce 93 % z nich (tj. 54 respondentů) vyjádřilo kladně, a tedy by sadu gradovaných úloh ocenili.

Otázka 10: Zde je prostor pro Vaše dotazy a připomínky a v případě zájmu o spolupráci na pilotáži gradovaných úloh zde můžete zanechat e-mailový kontakt.

Tato otázka byla nastavena jako nepovinná. Z odpovědí, které se k této otázce vážou, není žádná z nich relevantní pro vyhodnocení dotazníku – většinou se jedná o odpovědi typu „bez dotazů; nic; …“, dále pak o odpovědi se zanechanými e-mailovými kontakty respondentů.

5.1.2 Celkové vyhodnocení *Dotazníku 1*

Z vyhodnocení *Dotazníku 1* byly vybrány ty informace, které jsou relevantní pro zamýšlenou sadu gradovaných úloh, a to jsou následující:

- Všichni dotazovaní respondenti mají zkušenost s výukou geometrie a 59 % (tj. 34 respondentů) považuje geometrii za problematickou oblast matematiky.

- Z geometrie je pak respondenty považována za nejvíce problematickou „geometrie v rovině“, a to z důvodu nízké motivace žáků, náročnosti tématu nebo netransparentní prezentace učiva v učebnicích.
- Jako problematické učivo v oblasti „geometrie v rovině“ pak bylo nejvíce voleno pro „množiny bodů dané vlastnosti“ a „konstrukční úlohy“.

Na základě zjištění z *Dotazníku 1* bylo zvoleno zaměření sady gradovaných úloh. Sada bude zaměřena na gradované úlohy z geometrie v rovině, specificky na konstrukční úlohy a úlohy na množiny bodů dané vlastnosti.

Očekávání ohledně výsledků 1. dotazníku byla naplněna pouze z části. Přestože učitelé potvrdili, že konstrukční úlohy jsou kritickým místem, tak pojmy míry ve 2D (u kterých to bylo také očekáváno) zůstaly z tohoto hlediska téměř zcela přehlédnuty. Zdá se, že v pozdějších ročnících ZŠ (nebo hned v prvním pololetí prvního ročníku SŠ) dochází k něčemu, díky čemu obvody a obsahy žákům nadále přestávají dělat obtíže. Nic takového ale podle výše uvedených dat nelze konstatovat o konstrukčních úlohách.

5.2 Dotazník 2 – pro spolupracující učitele

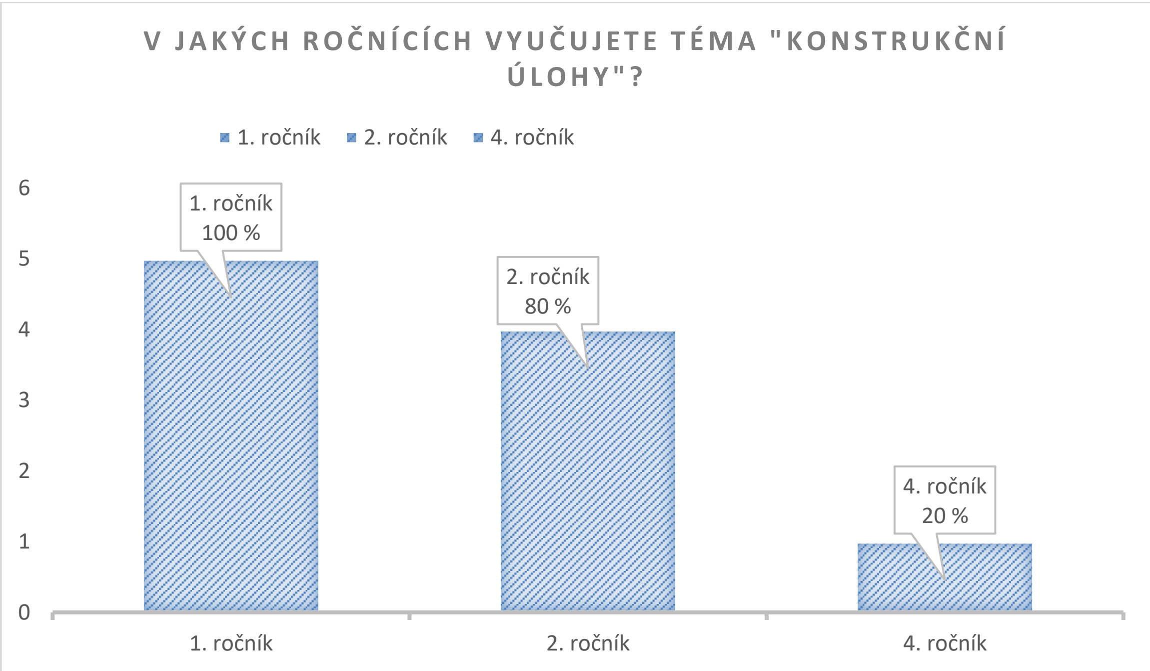
Dotazníkové šetření č. 2 (*Dotazník 2*) navazuje na předchozí dotazník s tím rozdílem, že se zaměřuje na ty učitele matematiky, kteří v poslední části 1. dotazníku vyjádřili zájem o spolupráci na ověřování sady gradovaných úloh ve svých vlastních vyučovacích hodinách. Cílem tohoto dotazníku je další specifikace pro tvorbu sady gradovaných úloh, konkrétně specifikovat, která metoda bude k řešení sady úloh použita (v *Dotazníku 1* bylo specifikováno, že sada úloh bude zaměřena na geometrii v rovině, konkrétně pak na konstrukční úlohy a množiny bodů dané vlastnosti).

Dotazník obsahuje celkem 6 otázek, z toho 5 uzavřených a 1 otevřenou (nepovinnou) a je rozdělen na dvě části. Cílem první části je identifikovat ročník, pro který bude sada úloh připravována, a cílem druhé části je získat podklady pro výše zmíněnou specifikaci. Na dotazník odpovědělo celkem 5 učitelů. Některé otázky mají nastavenou možnost výběru více odpovědí a v takovém případě byli respondenti na tuto skutečnost upozorněni.

Vzhledem k tomu, jakým nástrojům se věnují v teoretické části zmiňovaní autoři učebnic v kapitolách o konstrukčních úlohách (např. Herman, 1998; Pomykalová 2007) je možné formulovat očekávání, že učitelé budou volit množiny bodů dané vlastnosti: kružnici, osu úsečky, sjednocení dvou rovnoběžek, sjednocení osy úhlu a její kolmice a Thaletovu kružnici. Dále pak budou volit všechny algebraické metody a ze zobrazovacích metod osovou souměrnost, středovou souměrnost a stejnolehlost.

5.2.1 Vyhodnocení *Dotazníku 2*

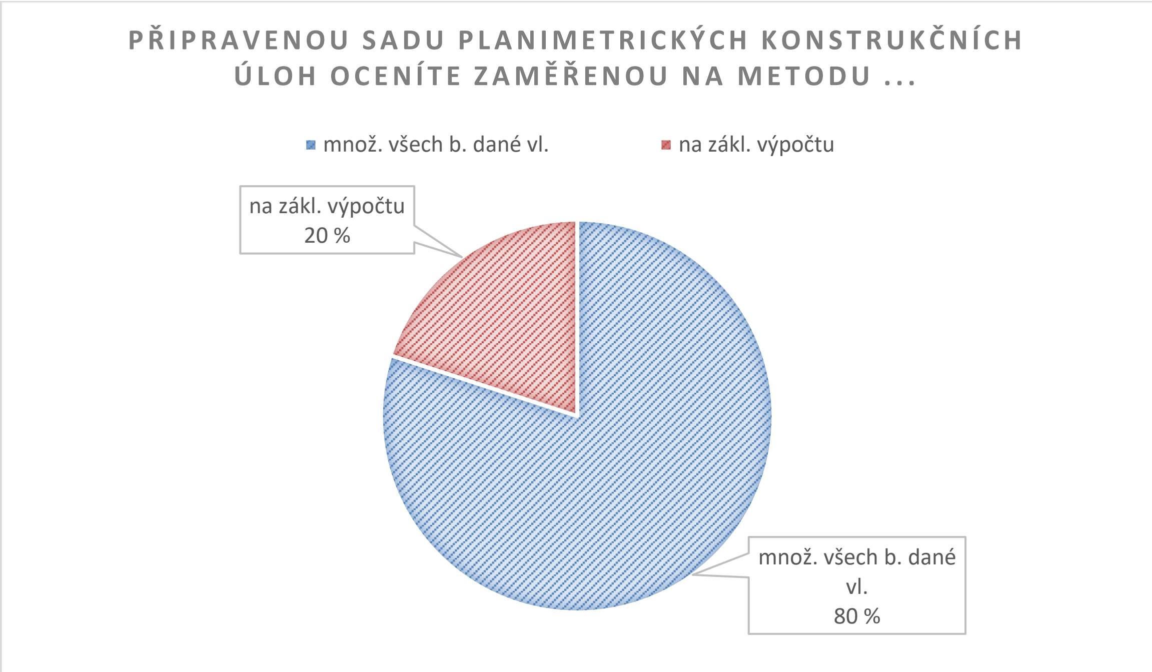
Otázka 1: V jakých ročnících vyučujete téma „konstrukční úlohy“?*



Graf 13 - odpovědi k otázce 1

Respondenti nejčastěji (5x zvoleno, tj. 100 % respondentů) vyučují téma konstrukčních úloh v 1. ročníku střední školy. Někteří z nich vyučují toto téma i ve 2. ročníku (4x zvoleno, tj. 80 % respondentů). Ojediněle se konstrukční geometrie vyučuje ve 4. ročníku střední školy (1x zvoleno, tj. 20 %). Žádný z dotazovaných učitelů nevyučuje konstrukční úlohy ve 3. ročníku.

Otázka 2: Připravenou sadu planimetrických konstrukčních úloh oceníte zaměřenou na metodu ...*



Graf 14 - odpovědi k otázce 2

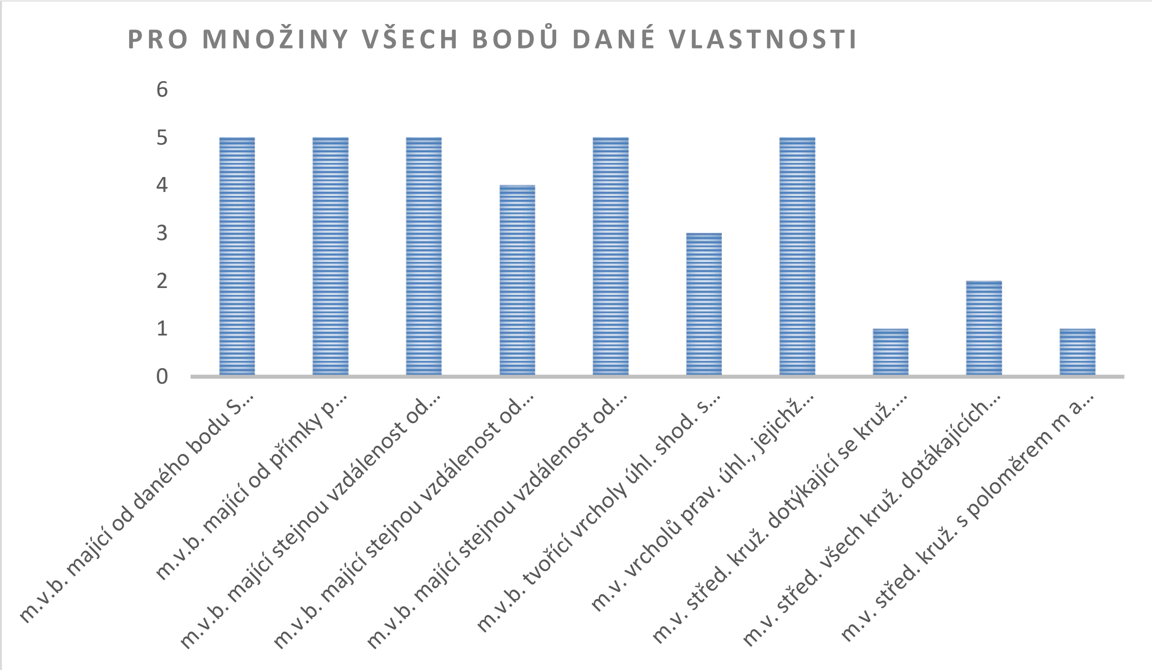
Většina dotazovaných (80 %, tj. 4 respondenti) by ocenila úlohy zaměřené na metodu množin všech bodů dané vlastnosti. Zbývající (20 %, tj. 1 respondent) by ocenil úlohy zaměřené konstrukční úlohy řešené algebraicky. Žádný z dotazovaných nevolil možnost rovinných zobrazení.

Otázka 3: V následující části dotazníku budete z nabízených možností vybírat takové, které ve své výuce využíváte při řešení konstrukčních úloh.*

Otázka č. 3 je rozdělena do 3 podotázek (kategorií A – C), dle jednotlivých metod řešení úloh. Všechny kategorie této otázky měly nastaveny možnost volby více odpovědí.

Pro zachování přehlednosti grafů, budou dále interpretovány pouze ty odpovědi, které byly zvoleny nejvíce.

Kategorie A: pro množiny všech bodů dané vlastnosti



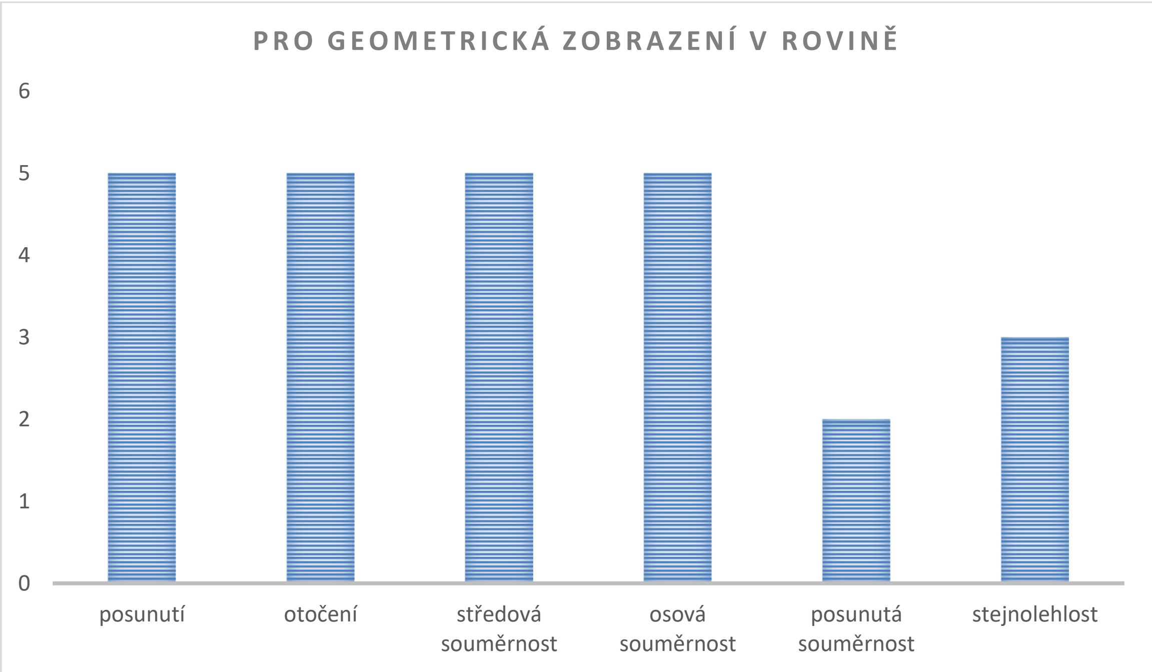
Graf 15 - odpovědi k otázce 3A

Z *Grafu 15* vyplývá, že respondenti ve své výuce z kategorie A využívají nejčastěji následující nástroje (seřazeno sestupně):

- Zvoleno 5x (tj. 100 % respondentů)
  - m. v. b., které mají od daného bodu *S* danou vzdálenost *r*
  - m. v. b., které mají od dané přímky *p* danou vzdálenost *r*
  - m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných bodů *A*, *B*
  - m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek *a*, *b*
  - m. v. vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body *A*, *B*
- Zvoleno 4x (tj. 80 % respondentů)
  - m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek *p*
- Zvoleno 3x (tj. 60 % respondentů)
  - m. v. b., které jsou vrcholy úhlů shodných s daným konvexním úhlem velikosti α

Méně jak 3x byly voleny následující možnosti: m. v. středů kružnic, které se dotýkají dané přímky *p* v jejím daném bodě *T* (0/5); m. v. středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice *k(S,r)* v bodě T (1/5); m. v. středů všech shodných tětiv (velikosti $t < 2r$) dané kružnice *k(S,r)* (0/5); m. v. středů tětiv kružnice *k(S,r)*, které mají společný jeden krajní bod *A* (0/5); m. v. středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných soustředných kružnic, zatímco s menší mají vnější dotyk a s vnitřní mají vnější dotyk (2/5); m. v. středů kružnic, které mají daný poloměr *m* a mají s danou kružnicí *k(S,r)* dotyk (1/5); m. v. středů kružnic, které mají daný poloměr *m* a mají s danou kružnicí *k(S,r)* dotyk.

<u>Kategorie B: pro geometrická zobrazení v rovině</u>



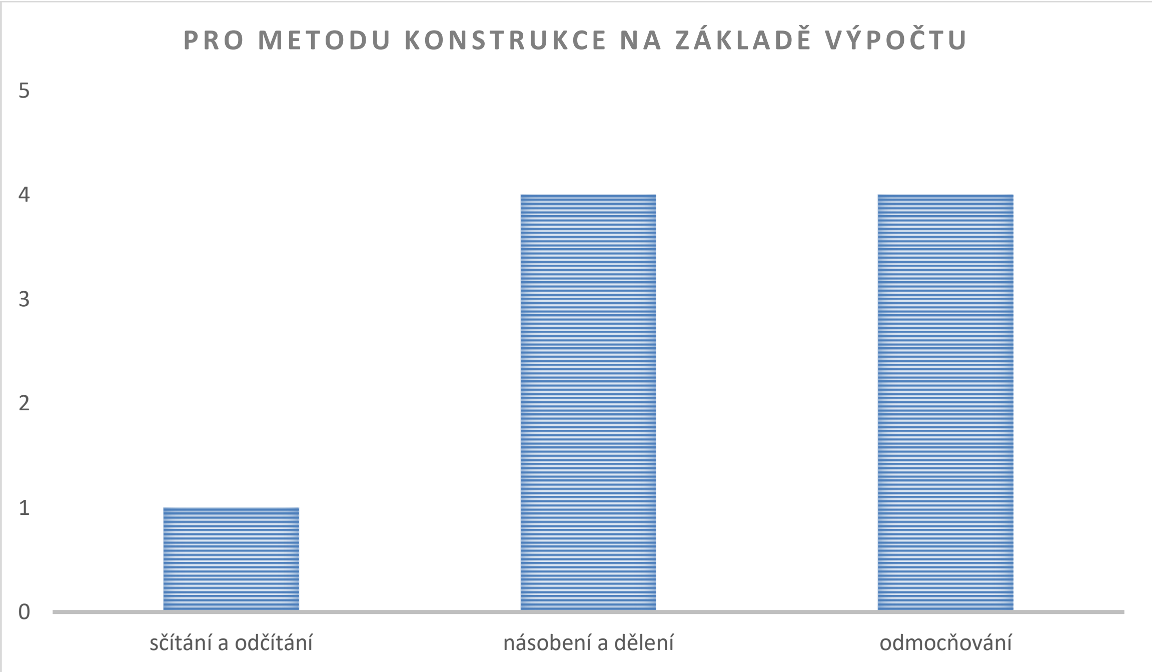
Graf 16 - odpovědi k otázce 3B

Z *Grafu 16* vyplývá, že respondenti ve své výuce z kategorie B využívají nejčastěji následující nástroje (seřazeno sestupně):

- Zvoleno 5x (tj. 100 % respondentů)
  - Posunutí
  - Otočení
  - Středová souměrnost
  - Osová souměrnost
- Zvoleno 3x (tj. 60 % respondentů)
  - Stejnolehlost

Méně, než 3x byla zvolena pouze metoda řešení konstrukčních úloh posunutou souměrností.

Kategorie C: pro metodu konstrukce na základě výpočtu



Graf 17 - odpovědi k otázce 3C

Z *Grafu 17* vyplývá, že respondenti ve své výuce z kategorie C využívají nejčastěji následující nástroje (seřazeno sestupně):

- Zvoleno alespoň 4x (tj. 80 % respondentů)
  - Násobení a dělení
  - Odmocňování

Jeden respondent (tj. 20 %) uvedl, že užívá sčítací a odčítací metodu při řešení konstrukčních úloh.

Otázka 4: Zde je prostor pro Vaše dotazy a připomínky.

Tato otázka byla nastavena jako nepovinná. Z odpovědí, které se k této otázce vážou, není žádná z nich relevantní pro vyhodnocení dotazníku a další postup práce.

5.2.2 Celkové vyhodnocení *Dotazníku 2*

Z *Dotazníku 2* vyplynulo pro další zpracování diplomové práce následující:

- Respondenti vyučují geometrii nejčastěji v 1. ročníku střední školy.
- Respondenti by nejvíce ocenili sadu úloh zaměřenou na metodu množiny bodů dané vlastnosti.
- Pro zmíněnou metodu jsou nejvyužívanějšími nástroji (zvoleny alespoň 3x) následující:
    - m. v. b., které mají od daného bodu *S* danou vzdálenost *r*
    - m. v. b., které mají od dané přímky *p* danou vzdálenost *r*
    - m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných bodů *A*, *B*
    - m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek *a*, *b*
    - m. v. vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body *A*, *B*
    - m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek *p*
    - m. v. b., které jsou vrcholy úhlů shodných s daným konvexním úhlem velikosti α

Na základě zjištění z *Dotazníku 2* byla vybrána konkrétní metoda (metoda množin bodů dané vlastnosti) a nástroje (viz výše) pro řešení sady gradovaných úloh.

Očekávání formulovaná výše byla téměř zcela naplněna. Co se množin bodů daných vlastností týče, nedošlo k žádné odchylce od predikce. K té došlo u posunutí a otočení, kteréžto zobrazení nebyla očekávána jako metody řešení konstrukčních úloh. Na druhou stranu byla očekávána algebraická metoda užívající sčítání a odčítání délek úseček. Toto očekávání naplněno nebylo.

5.3 Dotazník 3a a 3b – porozumění žáků (před a po)

Dotazníková šetření č. 3 (*Dotazník 3a* a *Dotazník 3b*) jsou zaměřena na zkoumání žákovského porozumění vybraným planimetrickým pojmům před zadáním sady gradovaných úloh (*Dotazník 3a*) a po zadaní sady gradovaných úloh (*Dotazník 3b*). Pro lepší možnost porovnání dat před a po zadání úloh je vyhodnocení těchto dotazníků vytvořeno a prezentováno společně.

Měření míry porozumění daným pojmům spočívá ve dvou otázkách: první vychází z teorií Skempa (1976) o relačním a instrumentálním porozumění a Fana a Bokhovea (2014) o kognitivního modelu učení se algoritmům, druhá vychází z teorie Hieberta a Lefevreové (in

Vondrová, 2014) o konceptuálních a procedurálních znalostech. Zmíněné teorie jsou blíže popsány v teoretické části této práce (viz kapitola 3).

Dotazníky „před“ a „po“ jsou obsahově shodné, akorát *Dotazník 3b* („po“) obsahuje ještě třetí otázku, která se zaměřuje na žákovskou reflexi. Dotazník pro žáky obsahuje celkem 2 (resp. 3) otázky, z nichž dvě jsou dělené na 5 podotázek. Na dotazníky odpovědělo celkem 101 respondentů (4 třídy) z řad žáků. Skupina respondentů označena jako Třída 1 čítá 29 žáků z 1. ročníku čtyřletého gymnázia. Skupina respondentů označena jako Třída 2 čítá 26 žáků z 1. ročníku čtyřletého gymnázia. Skupina označená jako Třída 3 čítá 22 žáků z 1. ročníku čtyřletého gymnázia. Skupina označená jako Třída 4 čítá 24 žáků ze 2. ročníku čtyřletého gymnázia. Uvedené počty žáků reprezentují stav ve vyučovací hodině, během které došlo k implementování sady gradovaných úloh. Třída 3 a Třída 4 mají stejného učitele matematiky. Třída 1 je mimopražská, zatímco třídy 2, 3 a 4 jsou ze dvou pražských gymnázií. Všechny spolupracující třídy a jejich učitelé byli z veřejných škol.

Následující otázka (č. 1) je zpracována v grafech na několika úrovních tak, aby vyhodnocení reflektovalo zjištění dotazníku. V každé z podotázek (A – E) je vždy nejprve vložen graf reprezentující situaci v jednotlivých třídách před zadáním sady gradovaných úloh a následně pak graf reprezentující situaci ve třídách po zadání úloh. Každý pár grafů je následně doplněn souhrnnou tabulkou, která obsahuje údaje o změně hodnot každé ze tříd před i po zařazení úloh a následně i o celkovém posunu.

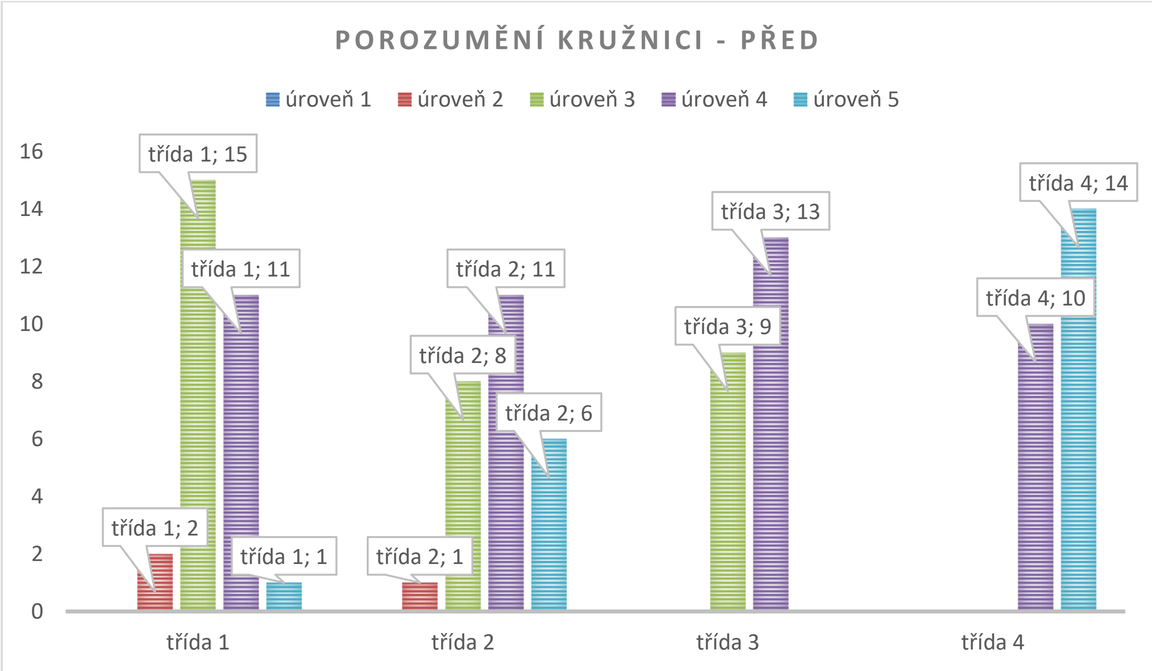
Očekávání jsou formulována pro celé 3. šetření, nikoliv pro 3. a 4. dotazník zvlášť. Prvním a nabízejícím se očekáváním bylo, že žáci druhého ročníku nebudou mít s úlohami problémy a zaznamenaná změna v jejich porozumění bude zanedbatelná. U žáků prvních ročníků se předpokládalo, že pojmy, které se učili na základní škole, jim budou dělat větší obtíže než pojmy, které probírali v minulém pololetí.

5.3.1 Vyhodnocení *Dotazníku 3*

Otázka 1: Představ si kamaráda, kterému geometrie vůbec nejde a který tě požádá o vysvětlení několika pojmů. Upřímně se zamysli a z následujících možností vyber tu, která nejvíc odpovídá pravdě.

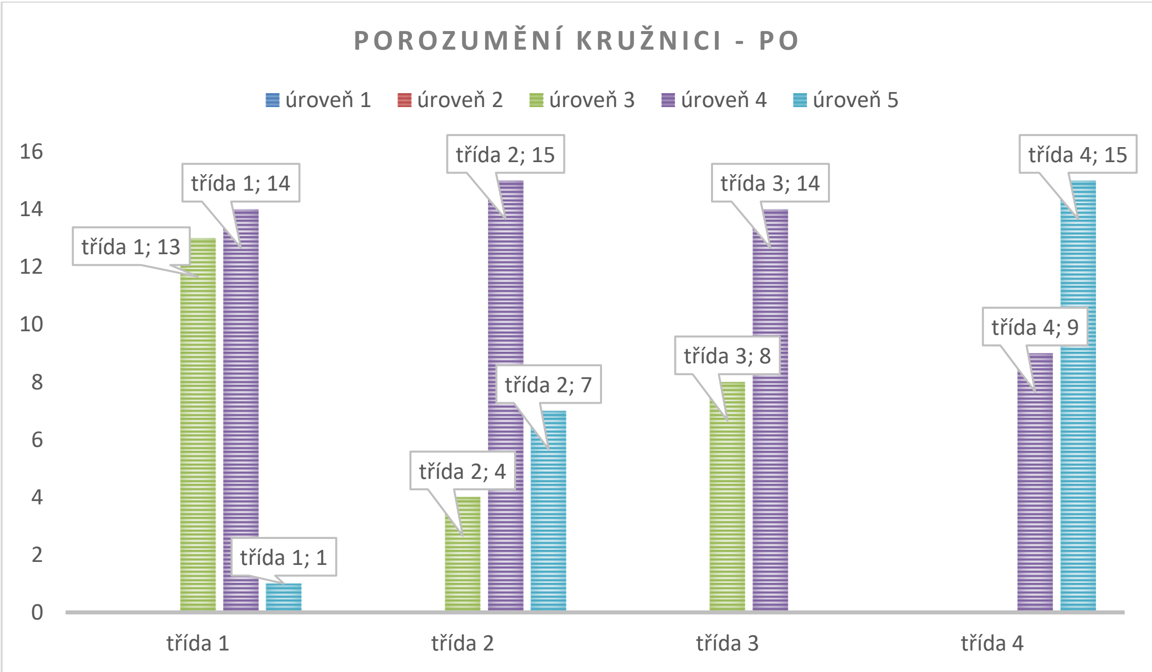
(pozn.: nejnižší možnou úrovní je *úroveň 1* = „nezvládl(a) bych téma kamarádovi vysvětlit“, nejvyšší úrovní je pak *úroveň 5*, která zahrnuje schopnost téma vysvětlit komplexně a ve správném kontextu. Konkrétní možnosti odpovědí jsou k dispozici v přílohách – viz Příloha 3 a 4).

<u>Kategorie A: Kružnice</u>



Graf 18 - porozumění kružnici před

Z *Grafu 18* lze vyčíst míru porozumění pojmu „kružnice“ v jednotlivých třídách před implementací úloh.



Graf 19 - porozumění kružnici po

Z *Grafu 19* lze vyčíst míru porozumění pojmu „kružnice“ v jednotlivých třídách po implementaci úloh.

Výše zmíněným úrovním porozumění byly přiřazeny číselné hodnoty tak, že 1. úroveň porozumění bylo přiřazeno číslo 1, 2. úrovni porozumění bylo přirazeno číslo 2 atd. Tímto způsobem je možné vytvořit aritmetický průměr úrovně porozumění pro celou třídu, resp. pro celou skupinu 101 respondentů. Vzhledem k tomu, že aritmetický průměr je metoda výběru vhodného reprezentanta skupiny citlivá na extrémy, je do vyhodnocení dat zařazen i medián, který se vyznačuje opačnou vlastností (tj. extrémně nízké, popř. extrémně vysoké hodnoty nemají na prostřední hodnotu jiný vliv, než kterákoli jiná hodnota souboru).

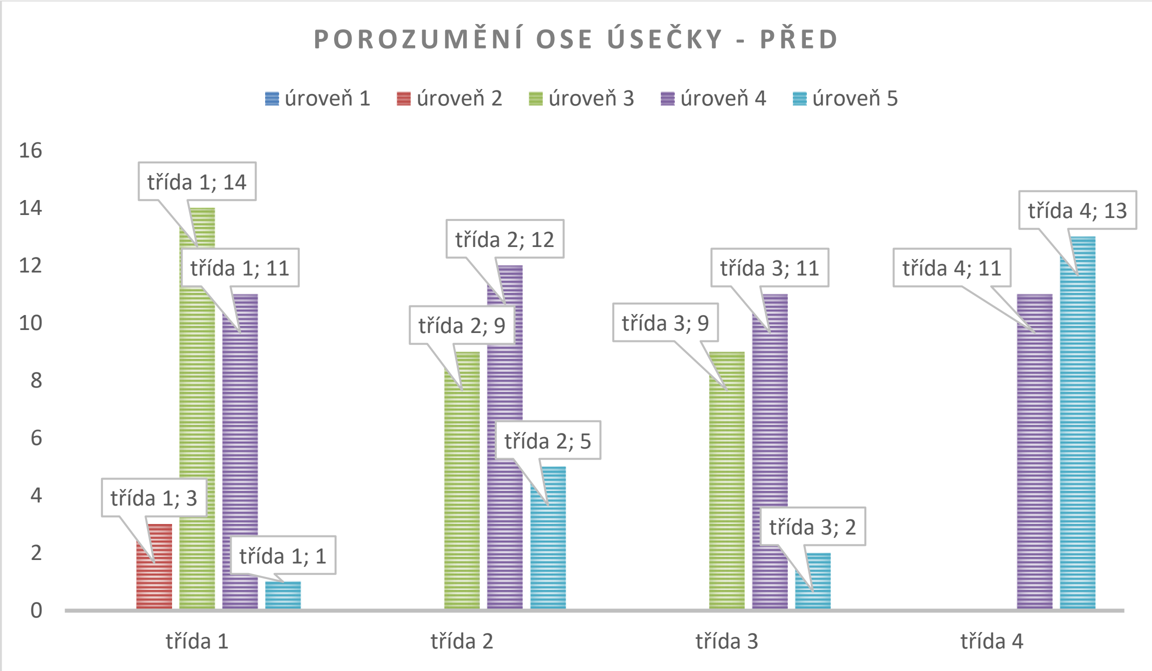
Tabulka 1 – porovnání porozumění pojmu „kružnice“ (1A)

		Třída 1	**Třída 2**	**Třída 3**	**Třída 4**	**Celkem**
Před	Aritmetický průměr	3,3793	3,8462	3,5909	4,5833	3,8499
	Medián	3	4	4	5	4
Po	Aritmetický průměr	3,6207	4,1154	3,6364	4,625	3,9994
	Medián	4	4	4	5	4
Změna	Aritmetických průměrů [%]	**+ 7,14 %**	**+ 7 %**	**+ 1,27 %**	**+ 0,91 %**	**+ 4,04 %**
	Mediánů	**+1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Z *Tabulky 1* vyplývá, že žáci Třídy 1 se po implementaci sady úloh zlepšili v porozumění pojmu „kružnice“ průměrně o 7,14 %, žáci Třídy 2 o 7 %, žáci Třídy 3 o 1,27 % a žáci Třídy 4 o 0,91 %.

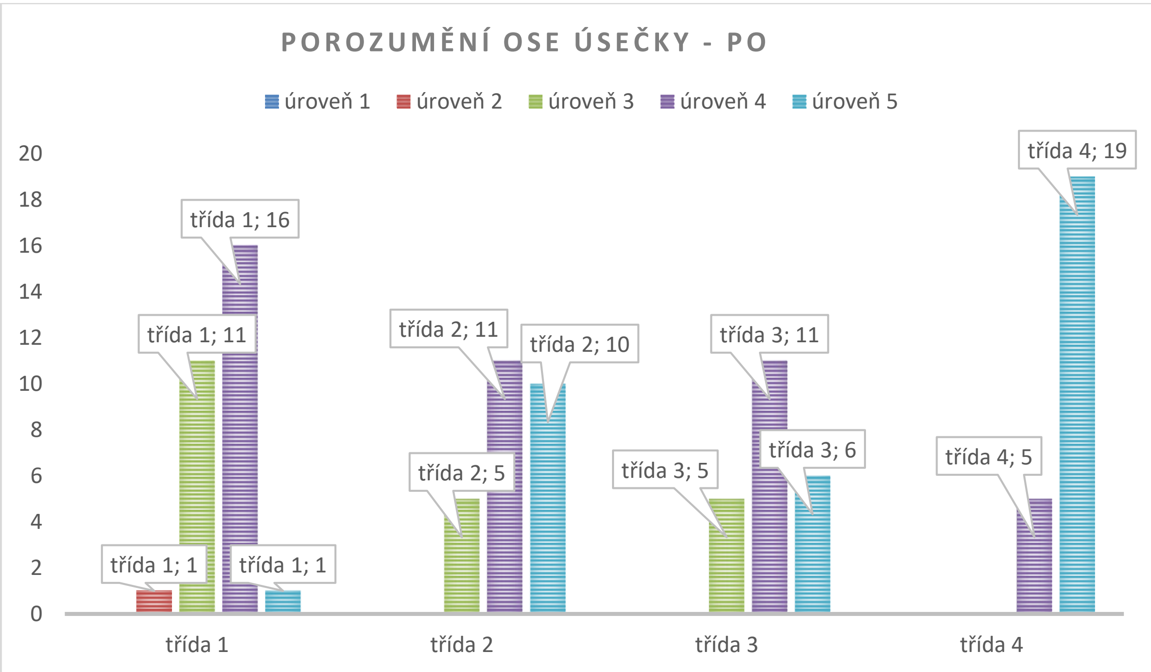
Celkově se žáci zlepšili o průměrně o **4,04 %**.

Kategorie B: Osa úsečky



Graf 20 - porozumění ose úsečky před

Z *Grafu 20* lze vyčíst míru porozumění pojmu „osa úsečky" v jednotlivých třídách před implementací úloh.



Graf 21 - porozumění ose úsečky po

Z *Grafu 21* lze vyčíst míru porozumění pojmu osa úsečky v jednotlivých třídách po implementaci úloh.

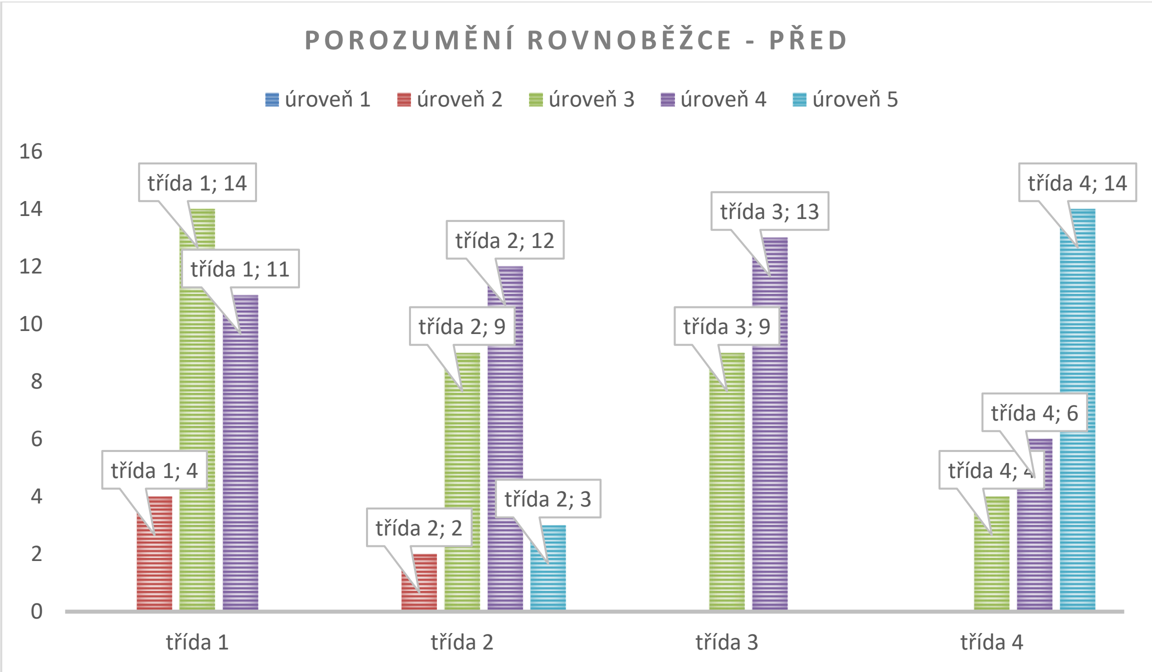
Tabulka 2 – porovnání porozumění pojmu „osa úsečky“ (1B)

		Třída 1	**Třída 2**	**Třída 3**	**Třída 4**	**Celkem**
Před	Aritmetický průměr	3,3448	3,8462	3,6818	4,5417	3,8536
	Medián	3	4	4	5	4
Po	Aritmetický průměr	3,5862	4,1923	4,0455	4,7917	4,1539
	Medián	4	4	4	5	4
Změna	Aritmetických průměrů [%]	**+ 7,2 %**	**+ 9 %**	**+ 9,88 %**	**+ 5,5 %**	**+7,88 %**
	Mediánů	**+1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Z *Tabulky 2* vyplývá, že žáci Třídy 1 se po implementaci sady úloh zlepšili v porozumění pojmu „osa úsečky“ průměrně o 7,2 %, žáci Třídy 2 o 9 %, žáci Třídy 3 o 9,88 % a žáci Třídy 4 o 5,5 %.

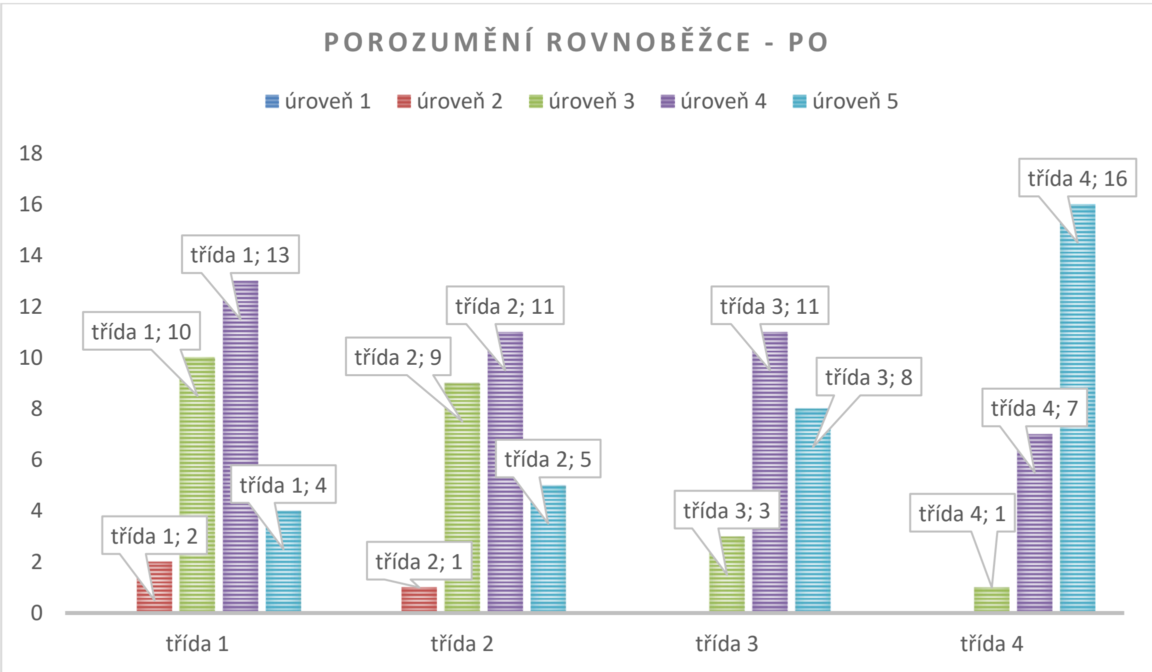
Celkově se žáci zlepšili o průměrně o **7,88 %**.

Kategorie C: Rovnoběžka



Graf 22 - porozumění rovnoběžce před

Z *Grafu 22* lze vyčíst míru porozumění pojmu „rovnoběžka“ v jednotlivých třídách před implementací úloh.



Graf 23 - porozumění rovnoběžce po

Z *Grafu 23* lze vyčíst míru porozumění pojmu „rovnoběžka“ v jednotlivých třídách po implementaci úloh.

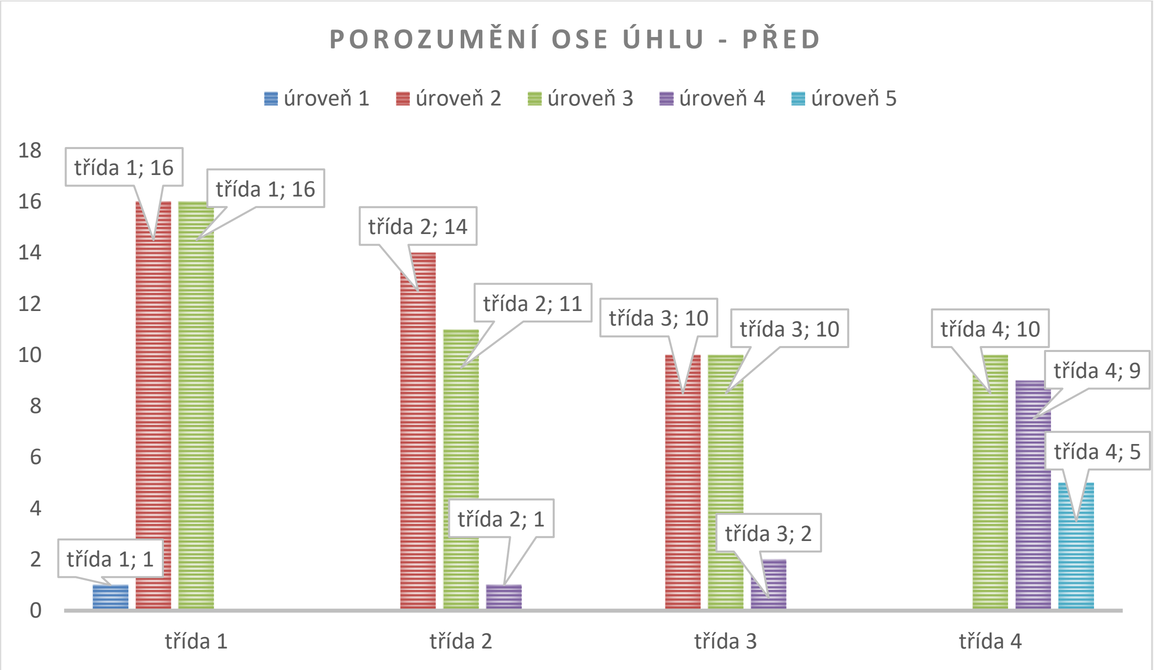
Tabulka 3 – porovnání porozumění pojmu „rovnoběžka“ (1C)

		Třída 1	**Třída 2**	**Třída 3**	**Třída 4**	**Celkem**
Před	Aritmetický průměr	3,2414	3,6154	3,5909	4,4167	3,7161
	Medián	3	4	4	4	4
Po	Aritmetický průměr	3,6552	3,7692	4,2273	4,625	4,0692
	Medián	4	4	4	5	4
Změna	Aritmetických průměrů [%]	**+ 12,77 %**	**+ 4,25 %**	**+ 17,72 %**	**+ 4,72 %**	**+ 9,72 %**
	Mediánů	**+1**	**0**	**0**	**+1**	**+0,5**

Z *Tabulky 3* vyplývá, že žáci Třídy 1 se po implementaci sady úloh zlepšili v porozumění pojmu rovnoběžka průměrně o 12,77 %, žáci Třídy 2 o 4,25 %, žáci Třídy 3 o 17,72 % a žáci Třídy 4 o 4,72 %.

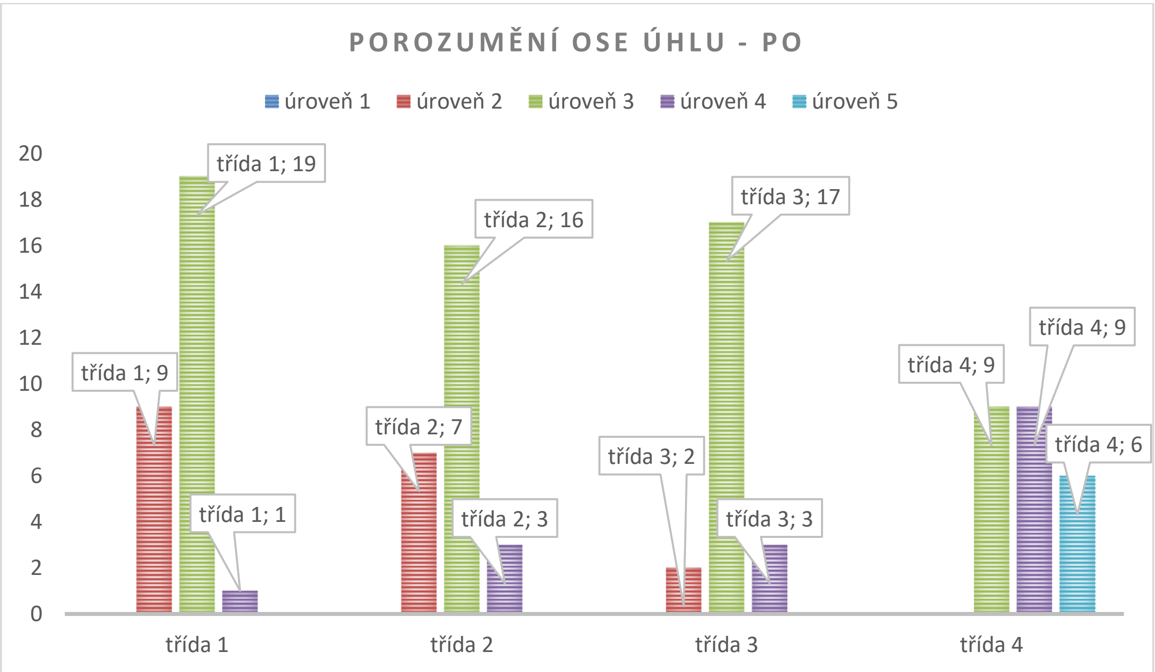
Celkově se žáci zlepšili o průměrně o **9,72 %**.

Kategorie D: Osa úhlu



Graf 24 - porozumění ose úhlu před

Z *Grafu 24* lze vyčíst míru porozumění pojmu „osa úhlu" v jednotlivých třídách před implementací úloh.



Graf 25 - porozumění ose úhlu po

Z *Grafu 25* lze vyčíst míru porozumění pojmu „osa úhlu“ v jednotlivých třídách po implementaci úloh.

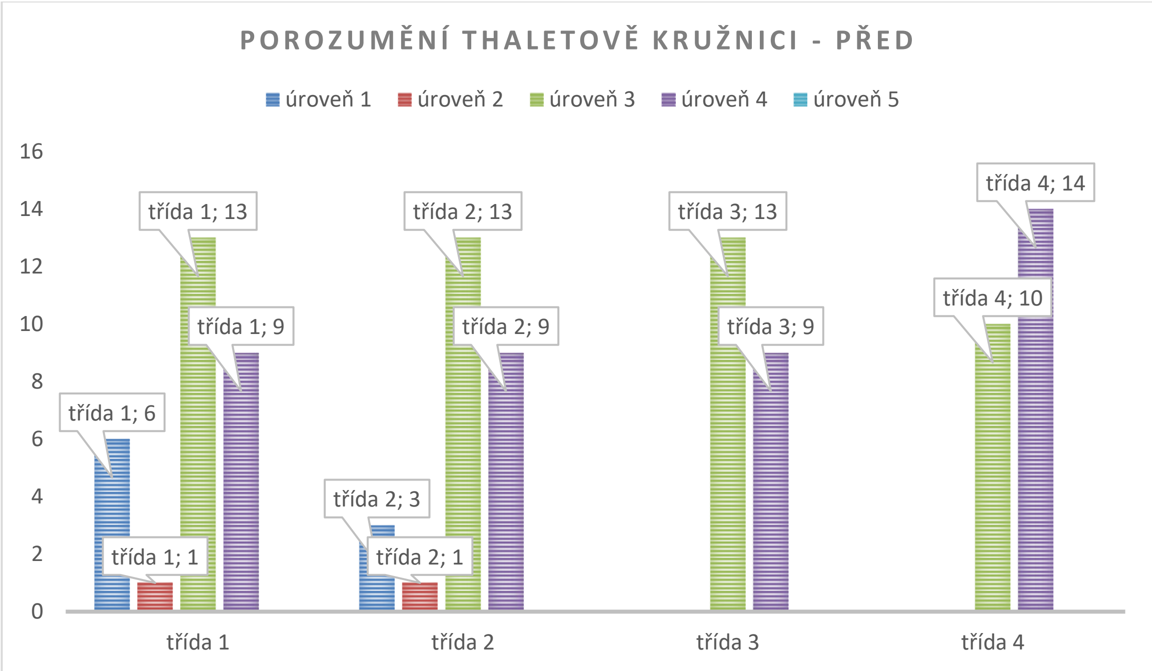
Tabulka 4 – porovnání porozumění pojmu „osa úhlu“ (1D)

		Třída 1	**Třída 2**	**Třída 3**	**Třída 4**	**Celkem**
Před	Aritmetický průměr	2,3793	2,5	2,6364	3,7917	2,8269
	Medián	2	2	3	4	2,5
Po	Aritmetický průměr	2,7241	2,8462	3,0454	3,875	3,1228
	Medián	3	3	3	4	3
Změna	Aritmetických průměrů [%]	**+ 14,5 %**	**+ 13,85 %**	**+ 15,51 %**	**+ 2,2 %**	**+ 11,38 %**
	Mediánů	**+1**	**+1**	**0**	**0**	**+0,5**

Z *Tabulky 4* vyplývá, že žáci Třídy 1 se po implementaci sady úloh zlepšili v porozumění ose úhlu průměrně o 14,5 %, žáci Třídy 2 o 13,85 %, žáci Třídy 3 o 15,51 % a žáci Třídy 4 o 2,2 %.

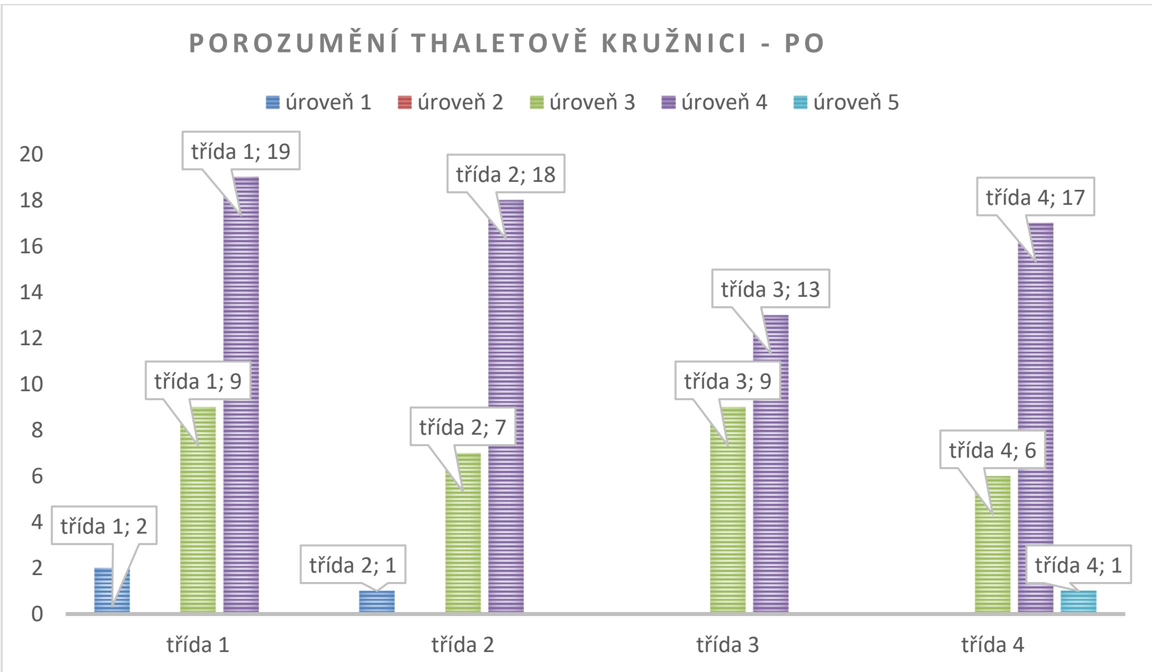
Celkově se žáci zlepšili o průměrně o **11,38 %**.

Kategorie E: Thaletova kružnice



Graf 26 - porozumění Thaletově kružnici před

Z *Grafu 26* lze vyčíst míru porozumění pojmu „Thaletova kružnice“ v jednotlivých třídách před implementací úloh.



Graf 27 - porozumění Thaletově kružnici po

Z *Grafu 27* lze vyčíst míru porozumění pojmu „Thaletova kružnice“ v jednotlivých třídách po implementaci úloh.

Tabulka 5 – porovnání porozumění pojmu „Thaletova kružnice“ (1E)

		Třída 1	**Třída 2**	**Třída 3**	**Třída 4**	**Celkem**
Před	Aritmetický průměr	2,862	3,0769	3,409	3,409	3,2328
	Medián	3	3	3	4	3
Po	Aritmetický průměr	3,5172	3,6154	3,5909	3,7917	3,6288
	Medián	4	4	4	4	4
Změna	Aritmetických průměrů [%]	**+ 22,89 %**	**+ 17,5 %**	**+ 5,34 %**	**+ 5,82 %**	**+ 12,64 %**
	Mediánů	**+1**	**+1**	**+1**	**0**	**+1**

Z *Tabulky 5* vyplývá, že žáci Třídy 1 se po implementaci sady úloh zlepšili v porozumění Thaletově kružnici průměrně o 22,89 %, žáci Třídy 2 o 17,5 %, žáci Třídy 3 o 5,34 % a žáci Třídy 4 o 5,82 %.

Celkově se žáci zlepšili o průměrně o **12,64 %**.

Otázka 2: Pokud tě napadne nějaký přímý geometrický vztah mezi libovolnými dvěma pojmy z obrázku níže, spoj je čarou a tu výstižně pojmenuj zamýšleným vztahem. Nakonec uveď počet čar, které jsi udělal(a).

Tabulka 6 – porovnání množství odhalených vztahů mezi geometrickými pojmy

	minimum		**maximum**		**průměr**		**změna ar. průměrů [%]**	**medián**		**změna mediánů**
	před	**po**	**před**	**po**	**před**	**po**		**před**	**po**	
Třída 1	6	7	20	21	12,8966	13,8621	+7,49 %	13	14	+1
Třída 2	8	10	20	21	14,0769	14,5	+ 3,01 %	14	14	0
Třída 3	10	12	18	22	13,8182	17,3182	+25,33 %	14	17,5	+ 3,5
Třída 4	17	18	24	24	20,0833	20,375	+ 1,45 %	20	20	0
Souhrnné hodnoty	**6**	**7**	**24**	**24**	**15,2188**	**16,5138**	**+ 8,93 %**	**14**	**15,75**	**+ 2,25**

Z *Tabulky 6* jsou uvedeny hodnoty minimální a maximálního počtu spojení, které byly žáci schopni vytvořit před implementací sady úloh a po její implementaci. Lze konstatovat, že u každé třídy došlo k navýšení minimálního spojení (alespoň o 1). Totéž platí u většiny tříd (s výjimkou třídy 4) i u maxima počtu nalezených spojení.

Před implementací úloh nacházeli žáci všech tříd v průměru 15,2 spojení (s mediánem 14) a po implementaci úloh došlo k navýšení průměrného počtu nalezených spojení na 16,5 (s mediánem 15,75). Celkově tak došlo k navýšení průměrného množství nalezených spojení o **8,93 %**.

Otázka 3: Odpověz na níže uvedené otázky zadáním čísla úlohy.

A) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), ti připadala nejtěžší? Stručně vysvětli proč.
B) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), ti připadala nejlehčí? Stručně vysvětli proč.
C) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), se ti nejvíce líbila? Stručně vysvětli proč.
D) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), se ti nejméně líbila? Stručně vysvětli proč.

Tabulka 7 – hodnocení sady gradovaných úloh žáky

Úloha	nejtěžší	nejlehčí	nejvíce líbivá	nejméně líbivá
č. 1	0	**46**	**26**	0
č. 2	1	13	17	1
č. 3	0	0	10	2
č. 4	0	31	6	3
č. 5	**43**	0	7	**43**
č. 6	0	0	10	4
č. 7	28	13	17	16
č. 8	29	0	8	20

V *Tabulce 7* je zaneseno souhrnné hodnocení (od všech 101 dotazovaných žáků) jednotlivých úloh zadané sady gradovaných úloh podle výše zmíněných kritérií. Za nejtěžší (zvoleno 43x, tj. 43 % respondentů) byla žáky označena úloha č. 5, která byla žáky zároveň označena i jako nejméně líbivá (zvoleno 43x, tj. 43 % respondentů). Naopak za nejlehčí (zvoleno 46x, tj. 46 % respondentů) a zároveň nejvíce líbivou (zvoleno 26x, tj. 26 % respondentů) byla označena úloha č. 1.

Stručná vysvětlení žáci ve velké míře ignorovali. Z několika málo odpovědí má smysl uvést následující (parafráze): *„Úloha (8.) mi nepřišla těžká, protože jsem se k ní postupně dopracoval předchozími úlohami a bylo pro mě snadné pochopit, co se po mě chce a jak to mám udělat.“*

E) Kolik úloh jsi zvládl(a) vyřešit?

Tabulka 8 – přehled počtu vyřešených úloh v jednotlivých třídách

	třída č.	minimum	maximum	aritmetický průměr	medián
Počet vyřešených úloh	1	5	8	7,8276	8
	2	6	8	7,8846	8
	3	7	8	7,9091	8
	4	8	8	8	8
Souhrnné hodnoty		**5**	**8**	**7,9053**	**8**

V celkovém shrnutí byl nejméně úspěšný řešitel ten, kdo splnil 5 úloh. Nejvíce úspěšní byli všichni ti, kteří vyřešili všech 8 úloh. Průměrně žáci všech tříd vyřešili všech 8 úloh.

5.3.2 Celkové vyhodnocení *Dotazníku 3 (3a, 3b)*

Z *Dotazníku 3* celkově vyplynulo pro další zpracování diplomové práce následující:

- Žáci všech tříd se po implementaci sady úloh v různé míře ve výsledcích zlepšili – lze tedy předpokládat, že u některých došlo ke zvýšení porozumění. V jednotlivých kategoriích došlo k následovnému zlepšení:
  - Kružnice: + 4,04 %
  - Osa úsečky: + 7,88 %
  - Rovnoběžka: + 9,72 %
  - Osa úhlu: + 11,38 %
  - Thaletova kružnice: + 12,64 %
- U žáků rovněž vzrostl počet nalezených vztahů mezi nabízenými geometrickými pojmy, a to o 9,83 %.
- Z hodnocení jednotlivých úloh žáky vyplynulo, že za nejtěžší a zároveň nejméně líbivou považují úlohu č. 5 a naopak za nejlehčí a zároveň nejvíce líbivou úlohu č. 1.
- Co do počtu vyřešených úloh, tak žáci vyřešili průměrně všech 8 úloh.

Očekávání pro výsledky žáků 2. ročníku bylo naplněno. Skutečně, hodnoty Třídy 4 jsou ve všech kategoriích nejvyšší, až na jednu jedinou, a tou je změna. Očekávání pro výsledky žáků 1. ročníku naplněno nebylo. Očekávalo se totiž, že žáci budou méně úspěšní na začátku sady a postupně se bude jejich úspěšnost zvyšovat. Z výsledků šetření plyne, že je tomu přesně naopak. Zajímavým úkazem je, že se postupně (tak, jak bylo předpovězeno pro výsledky) zvyšovaly hodnoty reprezentující změnu v porozumění. Důvodem by mohlo být buď, že si žáci některé vědomosti připomenuli, nebo proto, že procvičováním došli k porozumění.

5.4 Dotazník 4 – evaluace od spolupracujících učitelů

Poslední ze série dotazníkových šetření se zaměřuje na sběr zpětné vazby k ověřované sadě gradovaných úloh z konstrukční geometrie, a to od vyučujících, kteří tuto sadu vyzkoušeli ve své výuce. Vzhledem k charakteru otázek budou odpovědi vyhodnoceny následovně: na základě obsahů odpovědí vyučujících budou vytvořeny skupinové názvy, které budou obsahově souhlasit s hodnocením dané úlohy vyučujícími. Tyto názvy budou přidány za označení konkrétní úlohy (viz dál).

Po konzultaci s participujícími vyučujícími bylo rozhodnuto, že otevřené otázky v tomto dotazníku nebudou povinné, a tak v některých případech bude uvedena pouze jedna odpověď, nebo žádná.

Pro větší přehlednost bylo také ke každé otázce (příp. úloze) vyžadováno její zhodnocení tradičními známkami (1-5) – tato data jsou zanesena v tabulkách (viz *Tabulka 9* a *10*).

Ve své výuce vyzkoušeli navrženou sadu gradovaných úloh celkem 3 vyučující, a to v období mezi únorem a dubnem 2024, podle toho, jak se jim hodina zaměřená na konstrukční úlohy hodila do celkového plánu na aktuální školní rok.

Vzhledem k povaze účelu dotazníku, nebyla žádná očekávání zformulována.

5.4.1 Vyhodnocení *Dotazníku 4*

Otázka 1: Připomínkujte, prosím, jednotlivé úlohy. Každou z nich také oznámkujte (tradičně 1-5)*

Tabulka 9 – známkování jednotlivých úloh v sadě

	Učitel	Učitel 1	Učitel 2	Učitel 3	Průměrné hodnocení
Hodnocená (známkovaná) úloha	Úvodní část sady	1	3	1	1,66 (2)
	Úloha 1	4	1	1	2
	Úloha 2	4	2	3	3
	Úloha 3	3	1	2	2
	Úloha 4	3	1	1	1,66 (2)
	Úloha 5	1	2	2	1,66 (2)
	Úloha 6	3	2	1	2
	Úloha 7	1	3	1	1,66 (2)
	Úloha 8	1	1	1	1
	Závěrečná část sady	1	2	1	1,33 (1)
	Celkové zhodnocení	**2,2 (2)**	**1,8 (2)**	**1,4 (1)**	**1,79 (2)**

Úvodní část sady: srozumitelné pokyny a vhodná motivace

- *„Úvodní část dokumentu obsahuje srozumitelné pokyny a zajímavou motivaci.“*
- *„Dokument začíná nadměrně rozsáhlým úvodem a přehnaně detailními pokyny.“*

Úloha 1: úloha jako pro základní školu

- *„První úloha je příliš jednoduchá a odpovídá základní škole. Žáci se jejím řešením nenaučili nic nového.“*
- *„Pro žáky by první úloha neměla být problém, na rozjezd dobrá volba.“*

Úloha 2: faktické chyby v zadání

- *„Polopřímka má počátek, nikoliv krajní bod a úhel je zřejmě zamýšlen orientovaný, ale chybí stanovený směr.“*

Úloha 3: s úhloměrem snadno řešitelná a nenáročná

- *„S úhloměrem je tato úloha opět primitivní a žáci se při jejím řešení nic nového neučí.“*
- *„Chválím originální text v nápovědě.“*

Úloha 4: téměř bezvadná nápověda

- *„Při použití metody posouvání pravítek jde opět o velmi primitivní úlohu, která se hodí spíše na základní školu.“*
- *„Nápověda by byla bezvadná, kdyby si žáci v nějaké předchozí úloze vyzkoušeli sestrojit osu úsečky.“*

Úloha 5: pro žáky těžko řešitelná úloha

- *„Tato úloha by si zasloužila vlastní předúlohu, nebo obrázkovou nápovědu.“*
- *„Pokud žáci řešení neznají ze základní školy, tak sami ho nevymyslí.“*

Úloha 6: zákeřný deltoid a další chyby v zadání

- *„Deltoid je zákeřný pojem.“*
- *„Někteří žáci by ocenili, kdyby v nápovědě bylo připomenutí definice deltoidu. Takto byl jejich úspěch závislý nejprve na znalosti pojmu a pak teprve na schopnosti konstruovat.“*
- *„Úsečka má dva body krajní, nikoliv koncové. Protažením úsečky taky nevzniká přímka, ale delší úsečka.“*

Úloha 7: znalost vztahu obvodového a středového úhlu

- *„Pokud neznají větu o středovém a obvodovém úhlu, pak s touto úlohou nemají šanci pohnout a vzhledem k tomu, jaký význam má pro úlohu následující, by bylo vhodné, aby měla názornější nápovědu.“*
- *„Spolu s šestkou sedmička šikovně nahrazuje složitou definici množiny všech bodů, které shlíží na úsečku pod daným úhlem.“*

Úloha 8: přiměřená obtížnost

- *„Chválím přiměřenou obtížnost hlavní úlohy.“*

Závěrečná část sady: „mozkové“ hodnocení

- *„Mozková škála je zábavný nápad na odlehčení.“*
- *„Mozková škála byla zavádějící. Žáci si mysleli, že mají označit do jaké míry se nad úlohou zamysleli, a tak hodnotili její obtížnost, nikoliv to, jak daleko se dostali.“*

Otázka 2: Prosím, ohodnoťte celou sadu známkou (tradičně 1-5) dle následujících kritérií, a přidejte slovní komentář odůvodňující vybranou známku.

Tabulka 10 – známkování celé sady dle zadaných kritérií

	Učitel	Učitel 1	Učitel 2	Učitel 3	Průměrné hodnocení
Kritéria k ohodnocení (oznámkování)	Grafické zpracování	1	1	3	1,66 (2)
	Časová náročnost	2	4	3	3
	Vhodnost obsahu	1	2	3	2
	Srozumitelnost zadání	1	2	1	1,33 (1)
	Srozumitelnost metodiky	1	1	1	1
	Celkové zhodnocení	**1,125**	**2,625**	**1,75**	**1,83 (2)**

Slovní hodnocení jednotlivých kritérií:

- Grafické zpracování:
  - *„Ohraničení úloh rámečkem bylo pro žáky stresující.“*
  - *„Miniobrázky řešených úloh na konci obsahovaly čitelné nápovědy u jednoduchých úloh a nečitelné nápovědy u obtížných úloh.“*
  - *„Chválím, že úlohy mají prostor pro rozbor. Ještě by se hodil prostor pro diskuzi.“*

- Časová náročnost:
  - *„Pokud někdo řešil u všech úloh všechny výzvy, neměl šanci sadu dokončit za jednu vyučovací hodinu.“*
  - *„Základní sadu úloh (bez výzev) žáci zvládli i za 15 minut. Proto by se mohl navýšit čas na žákovské online dotazníky.“*
- Vhodnost obsahu:
  - *„Náročnost úloh byla nevyvážená.“*
  - *„Nápovědy někdy podněcovaly k přemýšlení a jindy nabízely řešení.“*
  - *„Výzvy by mohly obsahovat diskuzi na základě parametrizace nějakého prvku.“*
- Srozumitelnost obsahu:
  - *„Úlohy logicky navazovali.“*
  - *„Jazyk byl zvolen přiměřeně k věku cílové skupiny.“*
  - *„Některá dlouhá souvětí v pokynech byla pro žáky matoucí.“*
- Srozumitelnost metodiky:
  - *„Metodika byla jasná, dostatečně podrobná a kompletní.“*
- Celkové zhodnocení:
  - *„Navrhuji snížit počet úloh a zvýšit počet a kvalitu nápověd.“*

5.4.2 Celkové vyhodnocení *Dotazníku 4*

O celkovém hodnocení sady gradovaných konstrukčních úloh učiteli, nejspíše nejobjektivněji hovoří data z *Tabulky 9* a *10*.

Z *Tabulky 9* vyplývá, že nejlepšího hodnocení dosáhla úloha č. 8 (známka 1) a nejhůře pak byly hodnoceny úlohy 1, 4, 5 a 7 (shodně s průměrem 1,66, a tedy se známkou 2). Důvodem tohoto hodnocení může být např. přílišná jednoduchost úloh (pokud žáci využijí všechny pomůcky), nebo naopak jejich přílišná náročnost (pokud žáci postrádají znalosti ze základní školy). Celkově byly úlohy zhodnoceny průměrnou známkou 1,79, tedy známkou **2**.

V *Tabulce 10* jsou zanesena data hodnotící jednotlivé aspekty sady úloh jako celku. Nejlépe byla hodnocena Metodika pro implementaci úloh (známka 1). Ze samotné sady úloh byla nejlépe hodnocena srozumitelnost zadání (průměr 1,33, tedy známka 1), nejhůře pak grafické zpracování úloh (průměr 1,66, tj. 2). Důvodem negativního hodnocení grafického zpracování může být fakt, že ohraničení úloh (ač dostatečné) mohlo u žáků navozovat pocit nedostatku prostoru pro řešení úlohy, a tedy u nich vyvolávat stres. Celkově obdržela sada úloh známku **2** (průměr 1,83).

V rámci všech pěti šetření bylo postupně zjištěno, že učitelé mají zájem o sadu gradovaných úloh na téma „konstrukční úlohy“ řešené metodou množin bodů dané vlastnosti, a že žáci prvních ročníků mají porozumění základním pojmům relační a instrumentální v poměrně vyrovnané míře. Při bližší zkoumání lze zjistit, že tito žáci mají znalosti o tom, proč postupy fungují a jak je mohou aplikovat v komplikovaných situacích. U žáků druhých ročníků výrazně převažuje porozumění relační a ve velké míře jsou schopni posuzovat efektivitu svých postů, popřípadě je nahrazovat výhodnějšími. Z posledních dotazníků vyplynulo několik návrhů na vylepšení, popř. opravení zadání v sadách gradovaných úloh.

6 Sada gradovaných úloh

V této kapitole je představen jeden z hlavních cílů této diplomové práce – sada 8 gradovaných úloh na řešení konstrukčních úloh metodou množin všech bodů dané vlastnosti. Představení sestává ze dvou částí: povrchní seznámení se sadou se zaměřením na obecné prvky sady a zevrubnou analýzou všech úloh. Nakonec je zde popsána metodika, kterou obdrželi participující učitelé.

Sada je určena pro žáky 1. ročníků a 2. ročníků středních škol, zejména gymnázií, a tematické zaměření úloh vzniklo na základě informací z 1. a 2. online dotazníkového šetření, ve kterém byli tázáni středoškolští učitelé. Účelem této sady bylo zvýšit u žáků míru porozumění vybraným pojmům. Použité pojmy byly vybrány ve 2. dotazníkovém šetřením. Vyhodnocení účinnosti úloh (a naplnění jejich cíle) proběhlo v rámci 3. a 4. dotazníkového šetření, ve kterém byly dotazování žáci, kteří s úlohami pracovali. Na závěr proběhlo 5. dotazníkové šetření, které poskytlo cennou zpětnou vazbu k sadě úloh v podobě konstruktivní kritiky od učitelů, kteří sadu úloh do svých vyučovacích hodin zakomponovali.

Gradace níže uvedených úloh spočívá v postupně se zvyšující obtížnosti úloh, a to buď navyšováním počtu kroků, nutností komplexnějších nástrojů a zvyšování složitosti pojmů, potřebných k řešení. Přestože by bylo vhodné, aby každá z úloh žáky něco nového naučila, v této práci bude považováno za uspokojivé, když si každou úlohou žáci něco alespoň připomenou tak, že budou schopni úspěšně vyřešit poslední úlohu. Obtížnost gradovaných úloh je ve třech úrovních: jednoduchá (úlohy 3 a 7) střední (úlohy 1, 2 a 4), těžká (úlohy 5, 6 a 8).

Tvorba úloh probíhala v multiplatformním dynamickém softwaru GeoGebra[5]. Poslední, osmá, úloha byla inspirována příkladem 1 na straně 101 v učebnici „Matematika pro gymnázia – Planimetrie“ od Pomykalové (2007). Ostatní úlohy vymýšlel autor sám, přestože se pro jejich primitivní a všeobecně známou povahu nedá o skutečném autorství uvažovat. Šlo spíše o využití obecně známých elementárních konstrukcí a jejich účelné poskládání.

[5] Dostupná např. z: https://www.geogebra.org/

V přílohách této diplomové práce je zanesena sada úloh, která reflektuje validní připomínky participujících pedagogů, tj. v Příloze 7 je k vidění finální (upravená) verze sady gradovaných úloh.

6.1 Parametry sady úloh

Jak již bylo zmíněno, sada je tvořena 8 na sebe navazujícími úlohami. Celkově jde o dokument o délce 12 stran, který lze ovšem tisknout bez problémů oboustranně – lze tedy počítat s 6 listy papíru na jednoho žáka. Sadu lze tisknout černobíle, doporučený formát je A4 (při tisku v jiných formátech může dojít k nepoměru zadání s očekávaným výsledkem).

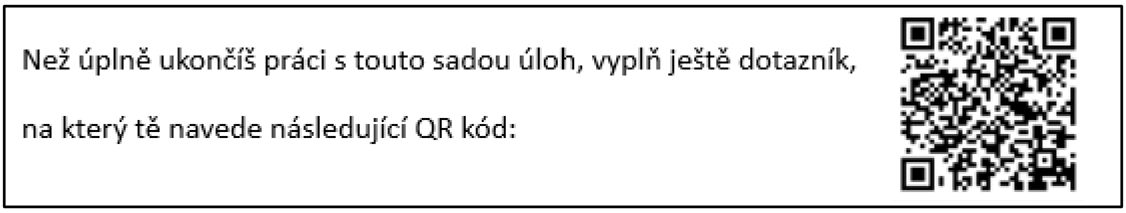
Obsah sady

- Titulní stránku s názvem sady
- Uvítací slovo autora, krátká motivace a představení cíle (resp. účelu)
  - V rámci pilotáže vytvořené sady úloh v praxi byly na úvodní a závěrečné straně vloženy QR kódy odkazující žáky na evaluační dotazníky před (3a) a po (3b) zpracování sady úloh (viz *Obrázek 1* a *2*). Ve finální verzi sady (viz Příloha 7) už tyto QR kódy z důvodu zachování přehlednosti chybí.


Než začneš úlohy řešit, vyplň krátký dotazník,

na který tě navede tento QR kód:

Obrázek 1 - QR odkazující žáky na dotazník 3a


Než úplně ukončíš práci s touto sadou úloh, vyplň ještě dotazník,

na který tě navede následující QR kód:

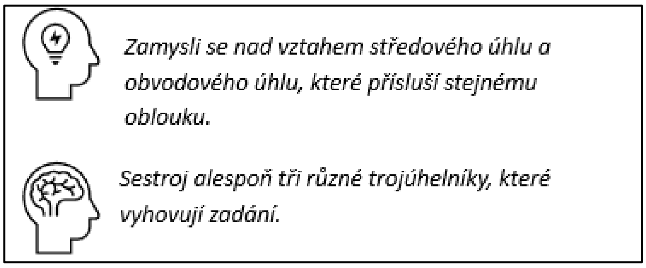
Obrázek 2 - QR kód odkazující žáky na dotazník 3b

- Základní technické informace a pokyny pro vyplňování (včetně výčtu pomůcek)
- Vlastní úlohy (zadání, prostor pro rozbor, výzvy a nápovědy)
  - Výzvy a nápovědy jsou v zadání úloh označeny ikonami:

ikona 1 označuje nápovědu – může žákům pomoci v řešení úlohy

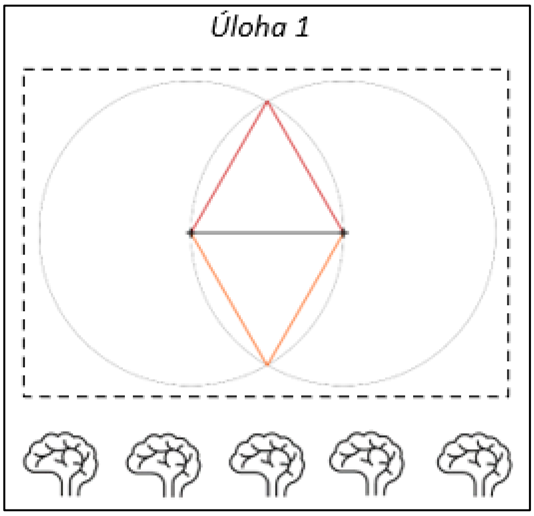
ikona 2 označuje výzvu – nabídne žákům příležitost otestovat své dovednosti s omezeným množstvím pomůcek

Příklad užití ikon v sadě úloh:



Obrázek 3 - ukázka nápovědy a výzvy k úloze č. 7

- Ukázka řešení a zpětná vazba na konci sady
  - Ukázka řešení jednotlivých úloh – žáci se mohou seznámit se správnými řešeními jednotlivých úloh a porovnat s nimi svá řešení – na základě toho mohou svou práci reflektovat
  - Pod každým modelovým řešením je umístěna hodnotící škála (viz *Obrázek 4*), na které mohou žáci označit, jak daleko se v úloze dostali.



Obrázek 4 - ukázka hodnocení náročnosti úloh

- V závěru sady jsou pak umístěny návodné otázky, které mají žákům pomoci v uvědomění si vlastního postupu a příp. i posunu v tématu konstrukčních úloh.

Časová náročnost a vyhodnocení úloh

Na základě zjištění učiněných při praktickém ověřování sady úloh ve výuce lze předpokládat, že práce s touto sadou, včetně obou dotazníků, by žákům neměla trvat déle než 1 vyučovací hodinu (tj. 1x45 minut). Samotná sada žákům zabrala mezi 15 až 35 minutami, nejčastěji však 25 minut (medián). V souladu se zachováním dostatečného prostoru pro strukturování hodiny, uvedení úlohy a její následné zhodnocení, je ale doporučeno věnovat práci se sadou úloh 2 standardní vyučovací hodiny.

Vyučující, který začlení zmíněnou sadu úloh do své výuky, by měl při vyhodnocování hodiny dbát na identifikaci kritických míst a společně s žáky tato kritická místa následně analyzovat. Vhodné je dbát nejen na vyhodnocení samotných výsledků úloh, ale i na vyhodnocení postupu a posunu každého z žáků.

K vyhodnocování správného vyřešení úloh je možno využít náhledy řešení umístěné na konci sady úloh, příp. v metodice nebo v následující kapitole této práce.

6.2 Analýza úloh

V této podkapitole jsou zevrubně rozebrány všechny úlohy ze sady. Ke každé úloze je přistoupeno tak, že se nejprve připomene její zadání. Poté se stanoví předpokládaná doba řešení a její účel, tj. význam, který úloha pro žáky má v kontextu celé sady. Pak je uvedeno vzorové řešení formou filmového pásu, tak jak jej představuje Kuřina (1994). V rámci vzorového řešení jsou uvedeny i stručný rozbor, konstrukční zápis a věcná diskuze. Nakonec jsou do analýzy každé úlohy zakomponované cenné připomínky kolegů z 5. dotazníkového šetření.

Všechna vzorová řešení jsou připravena tak, aby splnila podmínky výzev.

Úloha 1

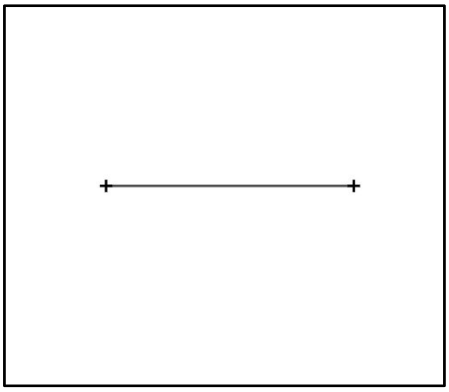
<u>Zadání:</u> Máš zadanou úsečku. Sestroj rovnostranný trojúhelník tak, aby zadaná úsečka byla jeho stranou.

<u>Časová náročnost:</u> 1 minuta.

Účel: Smyslem této jednoduché úlohy je přeorientovat mentální zaměření žáků na geometrické úvahy a konstrukce. Navíc úspěch při vyřešení této úlohy má mít motivační účinek, zvláště u žáků, kteří na úspěch v matematice nejsou zvyklí. Dále pak má tato úloha být pomůckou při řešení druhé úlohy.

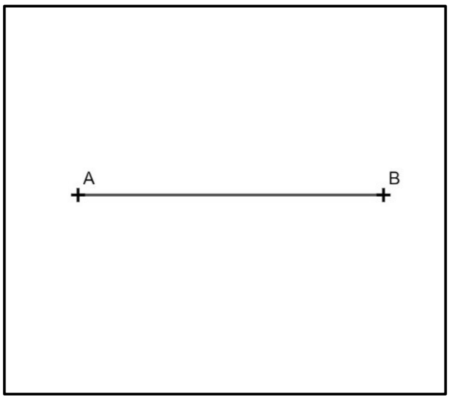
Vzorové řešení:

Na prvním obrázku je vidět zadaná úsečka, která má být stranou rovnostranného trojúhelníku. (viz *Obrázek 5*)



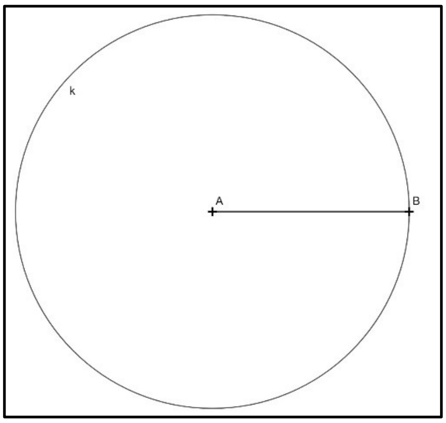
Obrázek 5 - úloha 1, krok 1

V první fázi řešení je vhodné pojmenovat dané útvary, tj. bod *A* a bod *B*. Daná úsečka jméno nepotřebuje, neboť je dána krajními body, má-li však nějaké jméno nést, nejvhodnějším označením bude *c*, protože jde o stranu trojúhelníku protilehlou vrcholu *C*. (viz *Obrázek 6*)



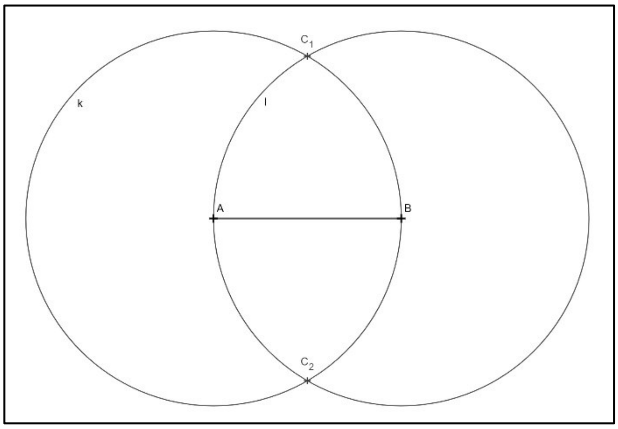
Obrázek 6 - úloha 1, krok 2

Při hledání třetího vrcholu je třeba uvědomit si, že jde o rovnostranný trojúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé. To znamená, že vzdálenost bodu *C* od bodů *A* i *B* je již známá, neboť jde o stejnou vzdálenost, kterou mezi sebou mají body *A* a *B*. Vyústěním úvahy o tom, jaký nástroj je třeba použít k nalezení všech míst, která mají danou vzdálenost od daného bodu, je být kružnice. Proto je třeba sestrojit kružnici *k* se středem v bodě *A* a poloměrem o velikosti rovné vzdálenosti bodů *A* a *B*, tj. $k(A;|AB|)$. (viz *Obrázek 7*)



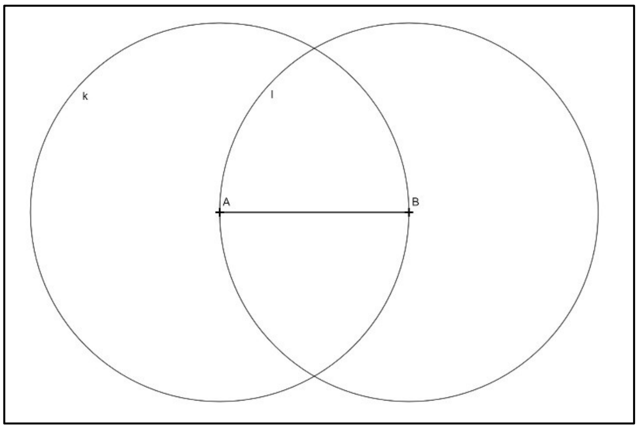
Obrázek 8- úloha 1, krok 3

Pokračováním předchozí myšlenky je kružnice *l* se středem v bodě *B* a poloměrem o velikosti vzdálenosti bodů *A* a *B*, tj. $l(B;|AB|)$. (viz *Obrázek 8*)



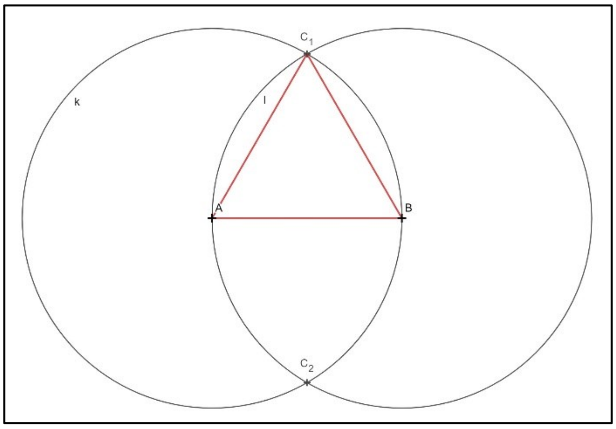
Obrázek 7 - úloha 1, krok 4

Obě kružnice mají dva průsečíky, tj. společné body C_1 a C_2. Jedná se o jediné dva body v rovině, které jsou stejně vzdáleny od bodů *A* a *B* tak, jako jsou body *A* a *B* vzdáleny od sebe, tj. $C_1, C_2 = k \cap l$. (viz *Obrázek 9*)



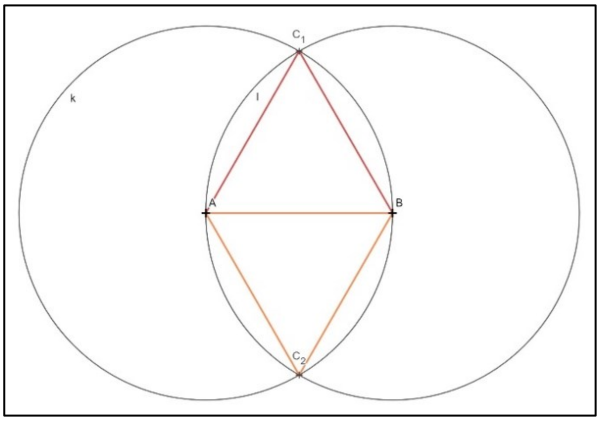
Obrázek 9 - úloha 1, krok 5

Body C_1 a C_2 splňují všechny podmínky pro to, aby mohly být vrcholy rovnostranného trojúhelníku požadovaného v zadání, a proto je možné jej dotvořit, tj. sestrojit trojúhelník ABC_1 jako první řešení. (viz *Obrázek 10*)



Obrázek 11 - úloha 1, krok 6

A sestrojit trojúhelník ABC_2 jako druhé řešení požadované ve výzvě. (viz *Obrázek 11*)



Obrázek 10 - úloha 1, krok 7

Diskuze: Tato úloha má dvě řešení, jelikož existují dva průsečíky kružnic *k* a *l*. Řešení by bylo více pouze tehdy, kdyby existovalo více průsečíků dvou nesoustředných kružnic. Kdyby byly kružnice soustředné, měly by sice více průsečíků, ale nebyla by splněna trojúhelníková nerovnost, a celá úloha by přestala dávat smysl. Jedno řešení by úloha měla pouze tehdy, kdyby byla omezena na jednu jedinou polorovinu určenou přímkou (protaženou úsečkou *AB*) a jedním průsečíkem kružnic *k* a *l*.

Návrhy: Participující učitelé neměli žádné validní připomínky k této úloze, kromě toho, že jim přišla moc jednoduchá.

Úloha 2

Zadání: Máš zadanou polopřímku (počáteční rameno úhlu) a její krajní bod (vrchol úhlu). Sestroj polopřímku (koncové rameno úhlu) tak, aby velikost úhlu, který obě polopřímky svírají, byla 60°.

Časová náročnost: 1 minuta

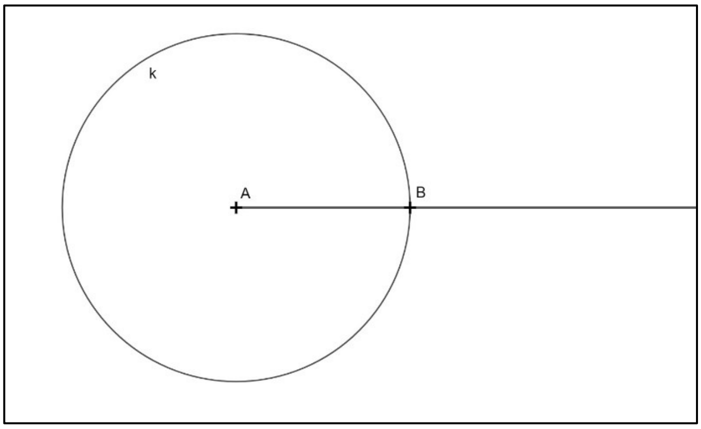
Účel: Tato úloha je stále ještě velmi jednoduchá a má žákům připomenout práci s úhloměrem. Její nízká obtížnost má stejně, jako u předchozí úlohy, podnítit i méně aktivní žáky k řešení výzev. Pustí-li se žák do řešení výzvy, zjistí, že bez přemýšlení tuto úlohu nevyřeší. Výsledek této úlohy bude spolu s výsledkem následující úlohy užitečný v úloze 6.

Vzorové řešení: Na prvním obrázku je vidět zadaná polopřímka a její počátek. Zadaná polopřímka má být jedním ramenem úhlu o velikosti 60° a počátek má být vrcholem tohoto úhlu. (viz *Obrázek 12*)

Obrázek 12- úloha 2, krok 1

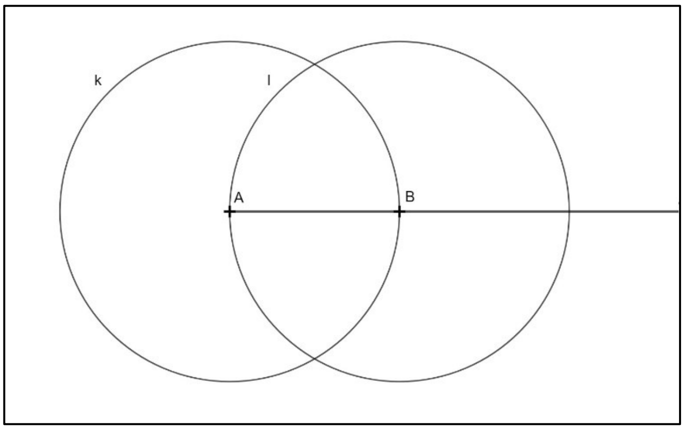
V první fázi je vhodné pojmenovat dané útvary, tj. počátek polopřímky pojmenovat jako bod *A*. Pojmenování samotné polopřímky nepřinese žádný užitek. (viz *Obrázek 13*)

Pokud si žák s pomocí předchozí úlohy uvědomí, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°, a že v rovnostranném trojúhelníku jsou všechny úhly stejně velké, pak mu může dojít i postup, který je třeba k řešení této úlohy, tj. kopírovat postup předchozí úlohy a sestrojit rovnostranný trojúhelník. První konstrukcí tedy je sestrojení kružnice k se středem v bodě *A* a libovolným poloměrem *r*, tj. *k(A;r).* Tím vznikne průsečík dané polopřímky a kružnice *k*, pojmenovaný *B*. Poloměr *r* kružnice *k* má nyní velikost vzdálenosti bodů *A* a *B*. (viz *Obrázek 14*)



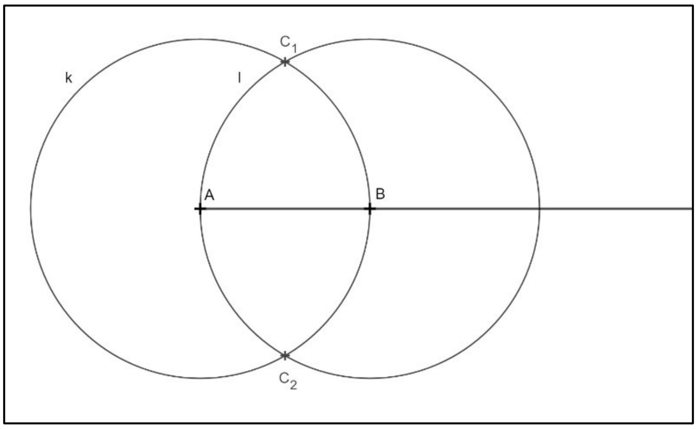
Obrázek 14- úloha 2, krok 3

Následuje konstrukce kružnice *l*, která má střed v bodě *B* a poloměr *r*, tj. *l(B;r).* Opět hledáme všechny body, které jsou stejně daleko od bodů *A* a *B*, jako jsou body *A* a *B* vzdáleny od sebe. (viz *Obrázek 15*)



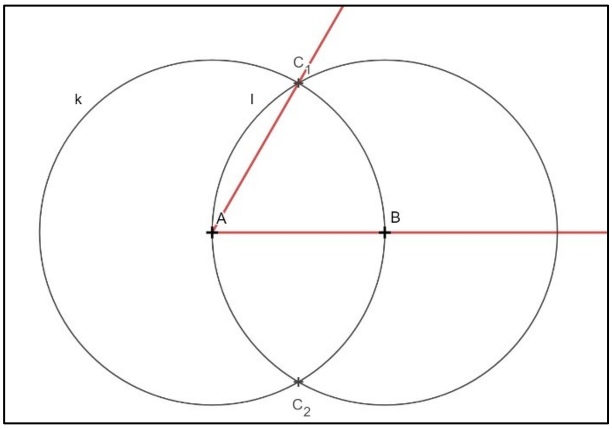
Obrázek 15- úloha 2, krok 4

Průsečíky kružnic *k* a *l* pojmenujeme C_1 a C_2. Jsou to vrcholy rovnostranných trojúhelníků nad stranou *AB* zrovna tak, jako v předchozí úloze, tj. $C_1, C_2 = k \cap l$. (viz *Obrázek 16*)



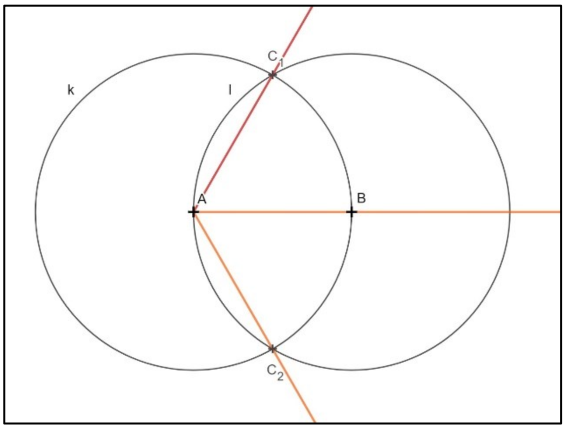
Obrázek 16- úloha 2, krok 5

Vzhledem k tomu, že strana rovnostranného trojúhelníku AC_1 svírá s další jeho stranou *AB* úhel 60°, je možné ji protáhnout a splnit tak zadání této úlohy. (viz *Obrázek 17*)



Obrázek 17- úloha 2, krok 6

Druhé řešení, požadované ve výzvě, lze vytvořit analogicky s trojúhelníkem ABC_2. (viz *Obrázek 18*)



Obrázek 18 - úloha 2, krok 7

Diskuze: Vzhledem k charakteru této úlohy je možné použít diskuzi z úlohy 1.

Návrhy: Participující učitelé měli k této úloze, zcela správně, výhrady. První spočívala v nepřesné terminologii, a to, když v zadání byl počátek polopřímky pojmenován jako krajní bod. To je ovšem chyba a dobrá cesta k tvorbě miskonceptu. Správně se tento bod nazývá počátek tak, jak uvádí např. Pomykalová (2007). Druhou výhradou kolegů byla snaha pojmenovat polopřímky jako počáteční a koncové rameno úhlu. To by ovšem znamenalo, že se jedná o orientovaný úhel, a v takovém případě by mělo být stanoveno v jakém směru má být řešení sestrojeno (kladný = proti směru hodinových ručiček, záporný = po směru hodinových ručiček).

Úloha 3

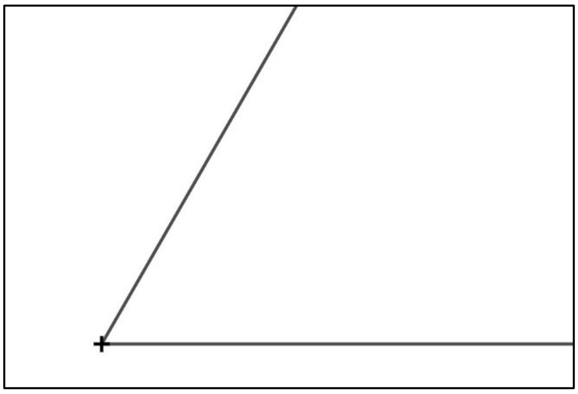
Zadání: Máš zadané dvě polopřímky se společným krajním bodem tvořící úhel. Zmenši zadaný úhel na poloviční velikost.

Časová náročnost: 2 minuty

Účel: Náročnost úloh se začíná pomalu zvyšovat, a s tím roste i počet možností, kterými lze úlohu řešit. Typickým postupem bylo změření daného úhlu úhloměrem následované vydělením naměřené velikosti dvěma na kalkulačce. Následovalo narýsování vypočítané velikosti. Žáci si tímto způsobem připomněli, že některé údaje konstrukční úlohy lze vypočítat, a tím pádem si uvědomili, že k řešení mohou vést různé cesty. Žák, který následoval nápovědu, byl veden k tomu, aby si uvědomil, že pokud je třeba úhel rozpůlit, pak je třeba sestrojit takovou množinu bodů, které jsou stejně vzdáleny od obou polopřímek, a že vzhledem k této množině bodů jsou obě polopřímky souměrné (osově). To mělo žáky navést k sestrojení osy souměrnosti. Účelem této úlohy bylo ukázat žákovi, že k řešení se může dostat jak výpočetní metodou, zobrazením, tak množinou všech bodů dané vlastnosti (pokud si pamatoval, že sjednocení osy úsečky a její vhodné kolmice je množina všech bodů stejně vzdálených od dvou různoběžek). V kontextu sady je pro žáka užitečné, že se naučí sestrojit úhel o velikosti 30°, který využije v úloze 6.

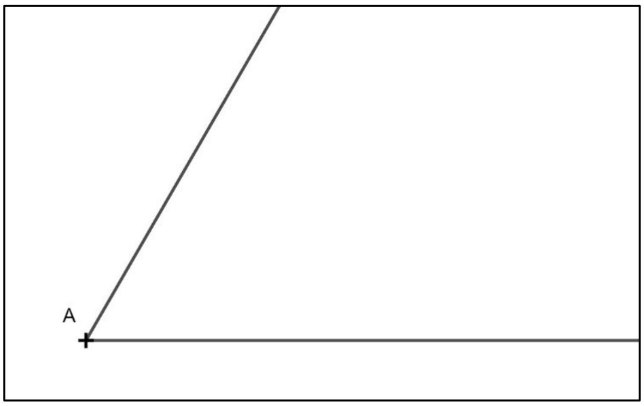
<u>Vzorové řešení:</u>

Na prvním obrázku jsou vidět dvě polopřímky a jejich společný počátek ohraničující část roviny, tj. úhel. Cílem této úlohy je sestrojit třetí polopřímku s týmž počátkem takovou, že vznikne úhel o poloviční velikosti. (viz *Obrázek 19*)



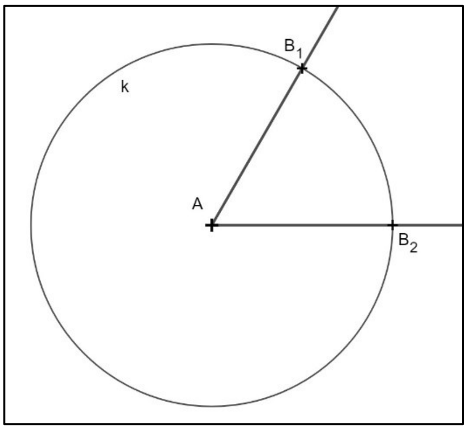
Obrázek 20- úloha 3, krok 1

V první fázi je vhodné pojmenovat dané útvary. V tomto případě jde o bod A, počátek daných polopřímek. (viz *Obrázek 20*)



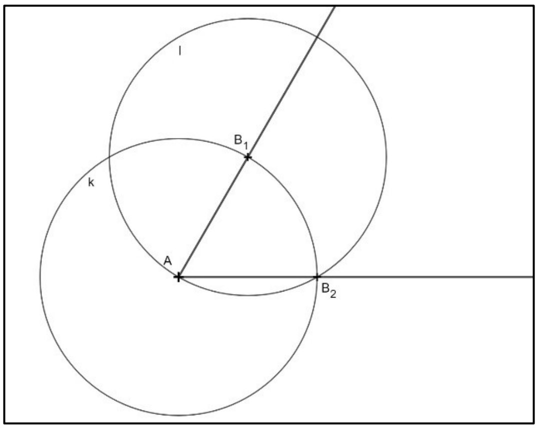
Obrázek 19- úloha 3, krok 2

Jde-li nám o sestrojení osy souměrnosti takové, že jedna polopřímka bude vzorem druhé a druhá bude obrazem první (a naopak), pak potřebujeme alespoň dva páry bodů, které si v tomto zobrazení navzájem odpovídají. Nalezení prvního páru je triviální. Jde o bod A, který v rámci zmiňované osové souměrnosti samodružný, tj. je sám sobě vzorem i obrazem. Druhý pár B_1, B_2 bude nalezen tak, že se vezmou dva body, které jsou stejně vzdálené od počátku, a každý z nich leží na jednom z ramen úhlu, tj. každý z nich leží na jedné z daných dvou polopřímek. Takové body nalezneme užitím množiny všech bodů, které jsou stejně vzdáleny od daného bodu, tj. kružnicí k se středem v bodě A a poloměrem r o libovolné velikosti, tedy $k(S;r)$. (viz *Obrázek 21*)



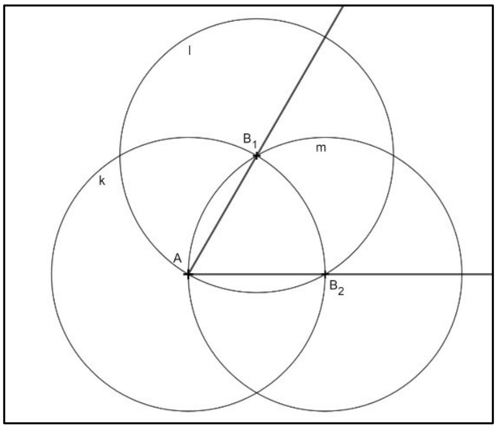
Obrázek 21- úloha 3, krok 3

Máme-li průsečíky B_1 a B_2 kružnice k s polopřímkami k dispozici, je potřeba najít jejich střed, tj. místo, kterým prochází hledaná osa souměrnosti (hledaná osa úhlu). Proto je třeba sestrojit kružnici l se středem v bodě B_1 a skoro libovolným poloměrem. Poloměr kružnice l musí být větší než polovina vzdálenosti bodů B_1 a B_2. Konstrukční zápis kružnice l je: $l(B_1;r)$ v případě, že bude použit stejný poloměr, jako v navrhovaném řešení. (viz *Obrázek 22*)



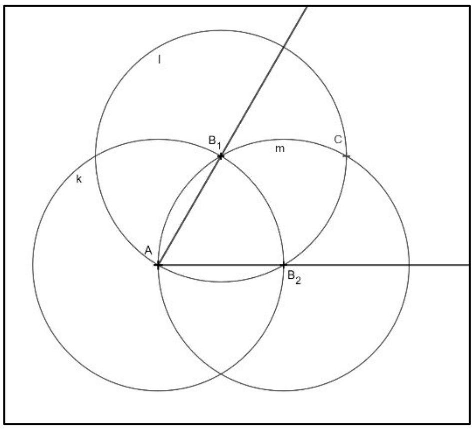
Obrázek 22- úloha 3, krok 4

Pokračování výše uvedené myšlenky spočívá v sestrojení kružnice *m* se středem v bodě B_2 a stejným poloměrem, jako měla kružnice *l*, tj. $m(B_2;r)$. (viz *Obrázek 23*)



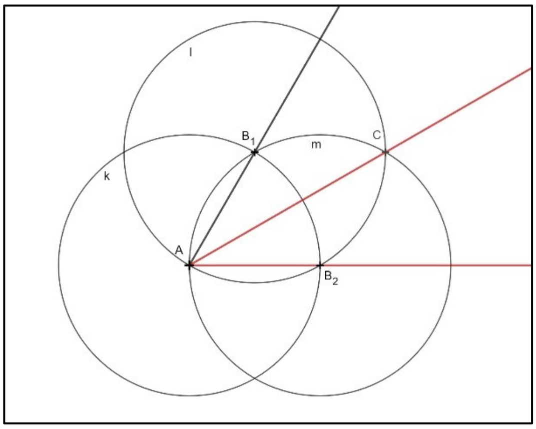
Obrázek 23- úloha 3, krok 5

Průsečík kružnic *l* a *m* je bod *C*, který je stejně vzdálený od bodů B_1 a B_2, tj. $C = l \cap m$. (viz *Obrázek 24*)



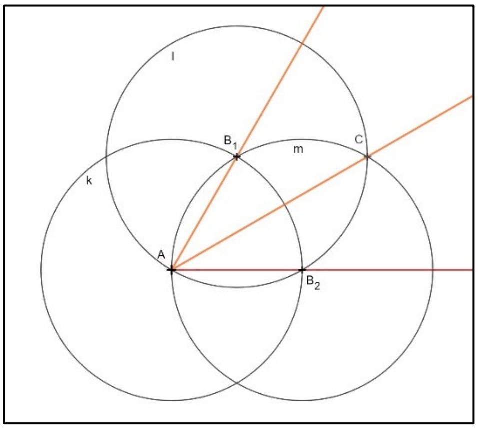
Obrázek 24 - úloha 3, krok 6

Prvním řešením této úlohy je úhel B_2AC. (viz *Obrázek 25*)



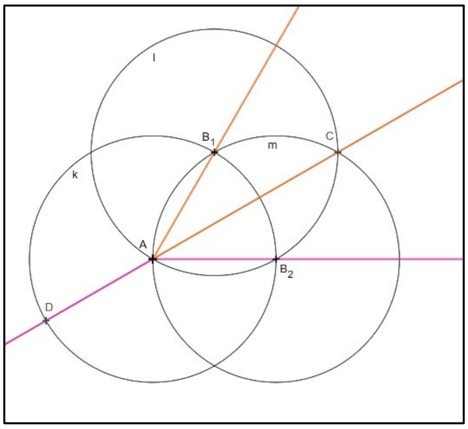
Obrázek 25 - úloha 3, krok 7

Druhým řešením, které bylo požadováno ve výzvě, této úlohy je úhel CAB_1. (viz *Obrázek 26*)



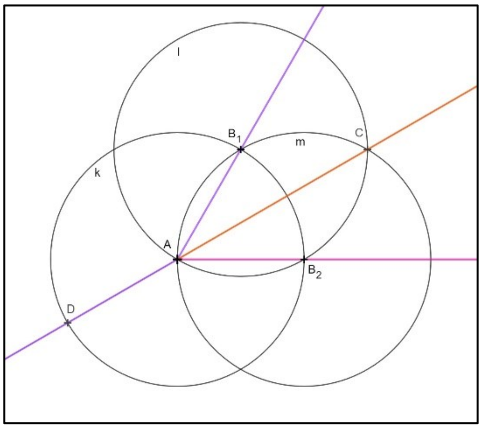
Obrázek 26 - úloha 3, krok 8

Pozorný žák si může povšimnout, že na obrázku v zadání úlohy jsou úhly dva. Jeden je konvexní (ostrý) a druhý nekonvexní. Proto může vzniknout další řešení protažením polopřímky za bod *A*, čímž vznikne průsečík *D* s kružnicí *k*. Třetím řešením je pak úhel DAB_2. (viz *Obrázek 27*)



Obrázek 27- úloha 3, krok 9

Čtvrtým řešením je úhel B_1AD. (viz *Obrázek 28*)



Obrázek 28- úloha 3, krok 10

<u>Diskuze:</u> Tato úloha má 4 řešení. Není možné, aby měla více řešení z důvodů, které jsou více rozebrány v diskuzi první úlohy. Méně řešení by vzniklo, kdyby byla úmluva o tom, že se konkávní úhlu nebudou brát v potaz. Pak bychom přišli o dva tupé úhly, řešení č. 3 a řešení č. 4.

<u>Návrhy:</u> Participující učitelé komentovali nepřesnost v zadání: počátek polopřímek.

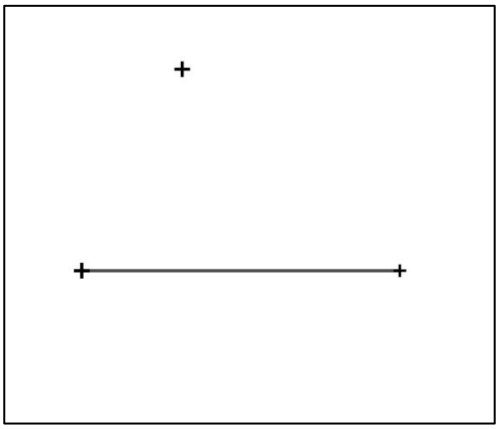
Úloha 4

Zadání: Máš zadanou úsečku a bod, který na ní neleží. Sestroj přímku rovnoběžnou se zadanou úsečkou tak, aby procházela zadaným bodem.

Časová náročnost: 1 minuta

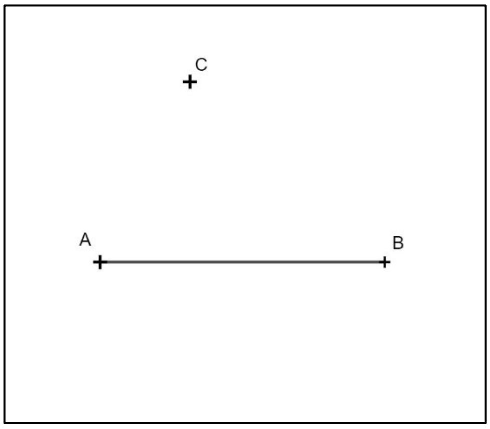
Účel: Smyslem této úlohy je jednak připomenout žákům práci s dvěma pravítky (tj. sestrojení rovnoběžky metodou posunutí dvou pravítek) a také je přimět k zamyšlení nad vztahem mezi kolmicí na kolmici na danou přímku a danou přímkou. V ideálním případě si žáci uvědomí, že jde o množinu všech bodů, které jsou stejně vzdáleny od dané přímky. V rámci celé sady slouží tato úloha jako pomocný nástroj v následující úloze a v úloze 8.

Vzorové řešení: Na prvním obrázku je vidět úsečka a bod, který na ni neleží. Žákovým úkolem je sestrojit rovnoběžku s danou přímkou tak, aby procházela daným bodem. (viz *Obrázek 29*)



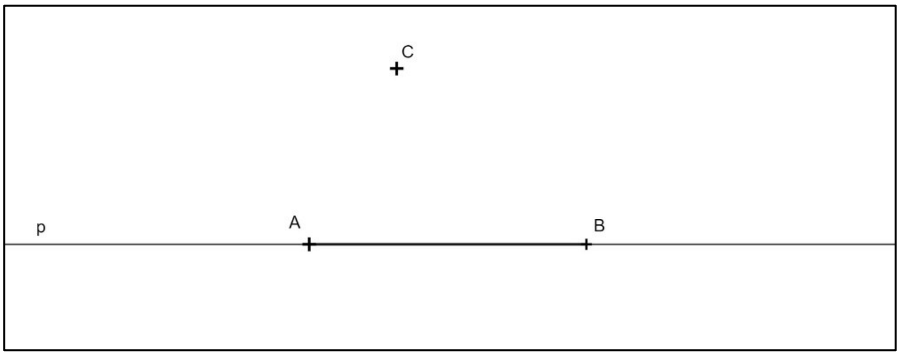
Obrázek 29- úloha 4, krok 1

V první fázi dojde k pojmenování daných útvarů, tj. bodů *A*, *B* a *C*. (viz *Obrázek 30*)



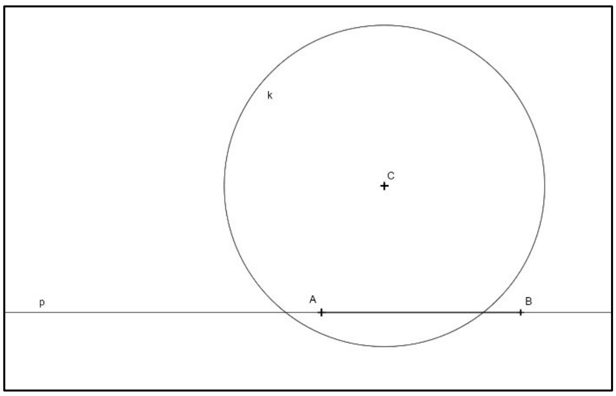
Obrázek 30- úloha 4, krok 2

První konstrukcí je protažení úsečky *AB* do přímky *p*. (viz *Obrázek 31*)



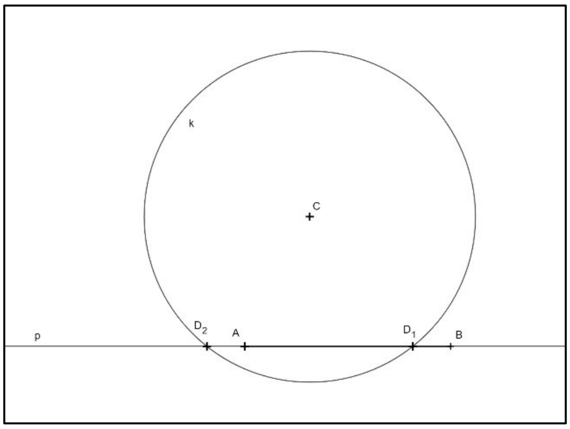
Obrázek 31- úloha 4, krok 3

Následuje kružnice *k* se středem v bodě *C* a libovolným poloměrem *r* takovým, že je větší než vzdálenost bodu *C* od přímky *p*, tj. *k(C;r)*. (viz *Obrázek 32*)



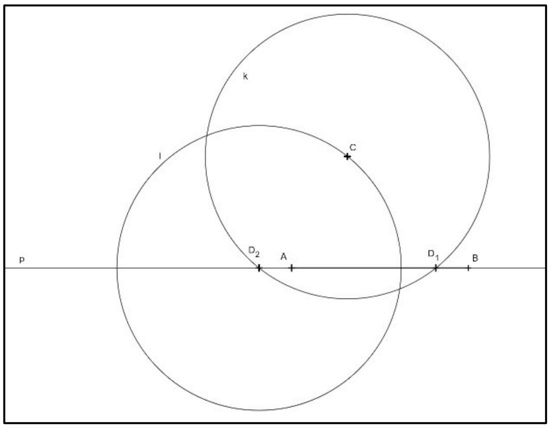
Obrázek 32- úloha 4, krok 4

Účelem bylo získat dva průsečíky D_1 a D_2 kružnice k s přímkou p, tj. $D_1, D_2 = k \cap p$. (viz *Obrázek 33*)



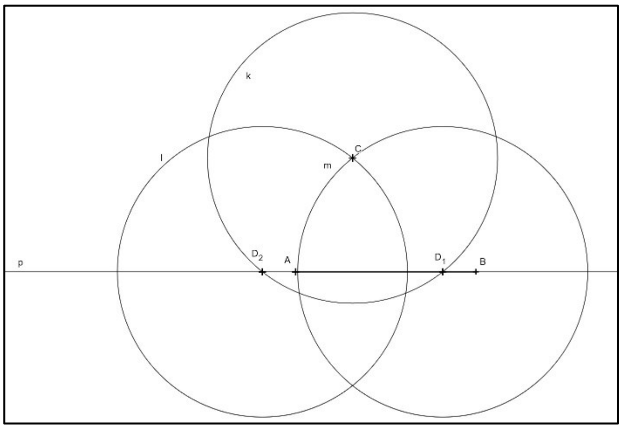
Obrázek 33- úloha 4, krok 5

Nyní je možné započít hledání středu mezi body D_1, D_2, neboť tento střed je nejbližší bod na přímce p k bodu C, a nejkratší vzdálenost je realizována na kolmici. Střed nalezneme s pomocí kružnice l se středem v bodě D_2 a téměř libovolným poloměrem, tj. $l(D_2;r)$. Poloměr kružnice l musí být větší než polovina vzdálenosti bodů D_1 a D_2. (viz *Obrázek 34*)



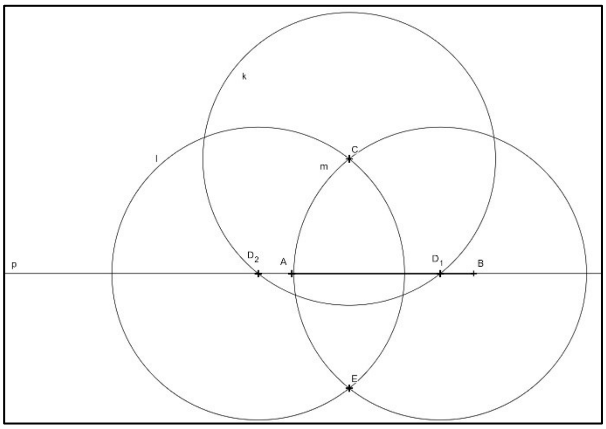
Obrázek 34- úloha 4, krok 6

V duchu stejné myšlenky je sestrojena kružnice m se středem v bodě D_1 a stejným poloměrem jako má kružnice l, tj. $m(D_1;r)$. (viz *Obrázek 35*)



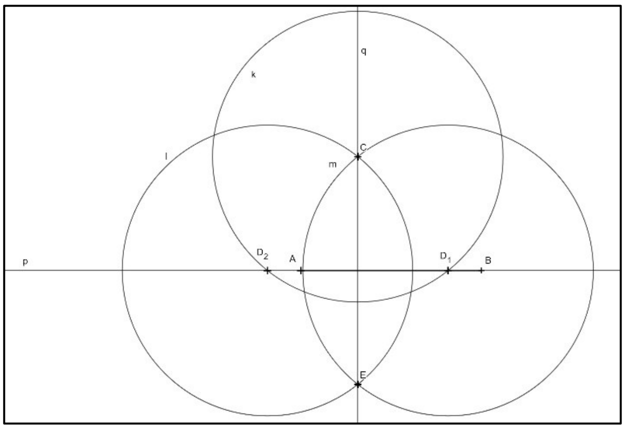
Obrázek 35- úloha 4, krok 7

Průsečíkem kružnic m a l jsou body C a E, tj. $C,E = m \cap l$. (viz *Obrázek 36*)



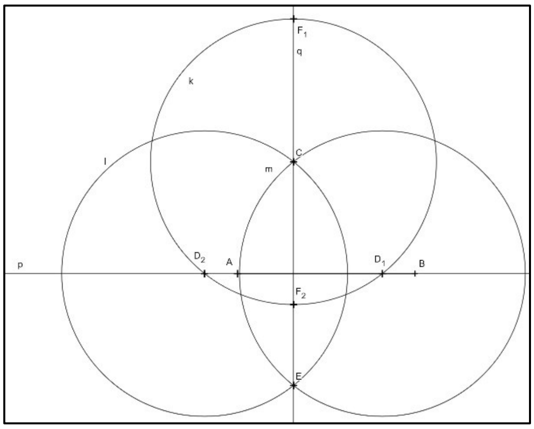
Obrázek 36- úloha 4, krok 8

Následuje přímka q, která je incidentní s body C a E, tj. q; $C \in q \wedge E \in q$. (viz *Obrázek 37*)



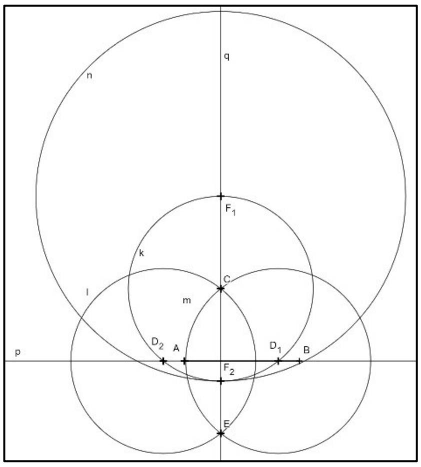
Obrázek 37- úloha 4, krok 9

Průsečíky přímky q s kružnicí k jsou body F_1 a $F2$, tj. $F_1,F_2 = q \cap k$. (viz *Obrázek 38*)



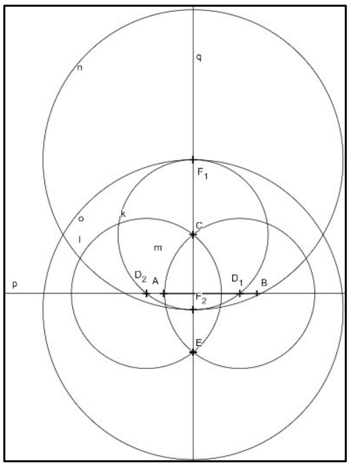
Obrázek 38- úloha 4, krok 10

Nyní se již celý proces opakuje a znovu se konstruuje kolmice na danou přímku, tj. kolmice na přímku q. Postupuje se tedy dále sestrojením kružnice n, se středem v bodě F_1 a libovolným poloměrem s, tj. $n(F1;s)$. (viz *Obrázek 39*)



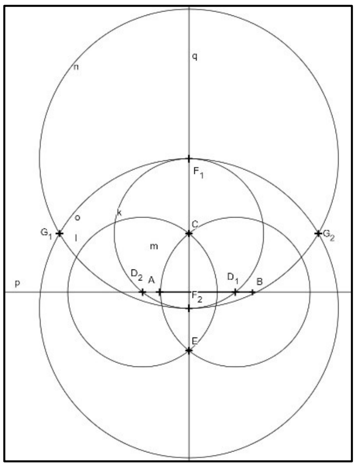
Obrázek 39- úloha 4, krok 11

V duchu stejné myšlenky se sestrojí druhá kružnice *o* se středem v bodě F_2 a stejným poloměrem, jako měla kružnice *n*, tj. $o(F_2;s)$. (viz *Obrázek 40*)



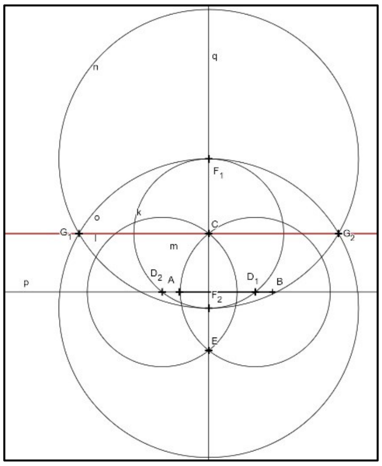
Obrázek 40- úloha 4, krok 12

Průsečíkem kružnic *o* a *n* jsou body G_1 a G_2, tj. $G_1, G_2 = o \cap n$. (viz *Obrázek 41*)



Obrázek 41- úloha 4, krok 13

Řešením této úlohy je jedna jediná přímka, která je incidentní s body G_1, G_2. (viz *Obrázek 42*)



Obrázek 42- úloha 4, krok 14

<u>Diskuze:</u> Tato úloha má jedno jediné řešení, neboť existuje jen jedna jediná rovnoběžka k dané přímce procházející daným bodem neležícím na dané přímce. Pokud by daný bod ležel na zadané úsečce, dávalo by smysl takové řešení, ve kterém by výsledná přímka procházela zadanou úsečkou. Více řešení by mohla mít tato úloha i v případě, že daný bod neleží na dané úsečce, ale takové úvahy patří do neeuklidovské geometrie, a tedy mimo učivo žáků na středních školách.

Návrhy: Participující učitelé neměli žádné validní připomínky k této úloze.

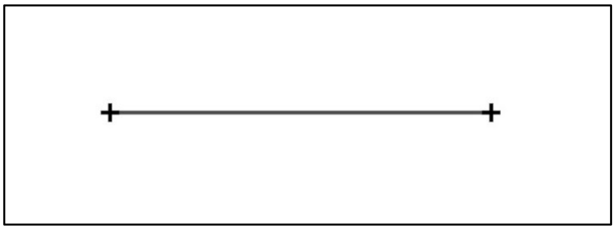
Úloha 5

Zadání: Máš zadanou úsečku takovou, že její délka je 5 jednotek. Sestroj úsečku, která bude mít délku 3 jednotky.

Časová náročnost: 5 minut

Účel: Smyslem této úlohy je sestrojit díl dané úsečky. Kromě toho, že tato konstrukce bude klíčová v úloze 8, tak jde o učivo základní školy, které by si žáci touto úlohou měli připomenout. Konkrétně jde o podobnosti trojúhelníků. Na druhou stranu, stejně jako v úloze 3, i zde žáci nejčastěji volili cestu měření a počítání, resp. změřili si s pomocí pravítka délku zadané úsečky *x* a na kalkulačce spočítali násobek *x*(3/5)*. Úsečku s požadovanou délkou pak narýsovali.

Vzorové řešení: Na prvním obrázku je vidět zadaná úsečka, jejíž délka je 5 jednotek, a její krajní body. Cílem úlohy je sestrojit novou úsečku, která bude mít délku 3 jednotky. (viz *Obrázek 43*)

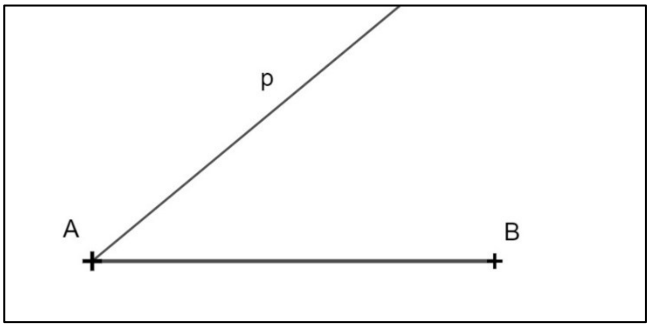


Obrázek 43- úloha 5, krok 1

První fází je pojmenování důležitých prvků, tj. bodů *A* a *B*. (viz *Obrázek 44*)

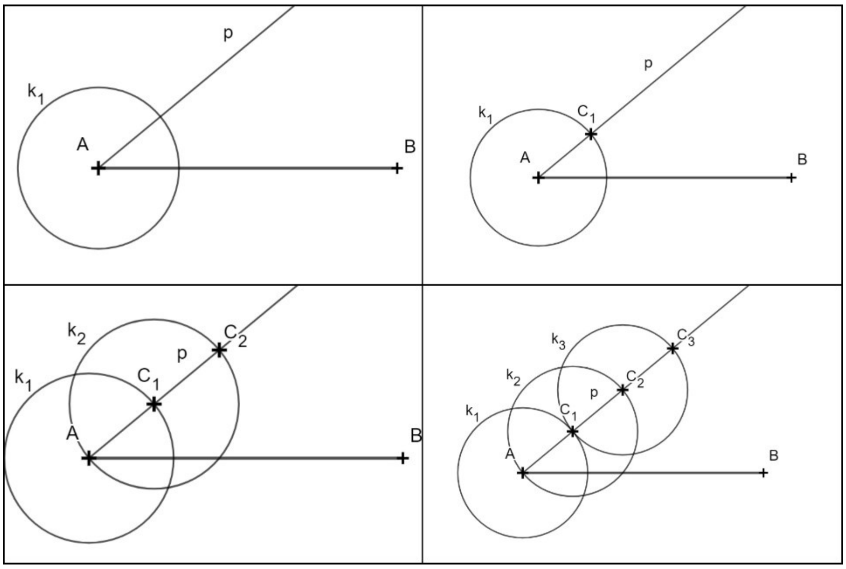
Obrázek 44- úloha 5, krok 2

Nyní by se měli žáci pokusit sestrojit libovolný trojúhelník takový, že zadaná úsečka AB je jeho stranou. Pro tyto účely se hodí polopřímka svírající se zadanou úsečkou libovolný konvexní úhel. První konstrukcí tedy je polopřímka p s počátkem v bodě A. (viz *Obrázek 45*)

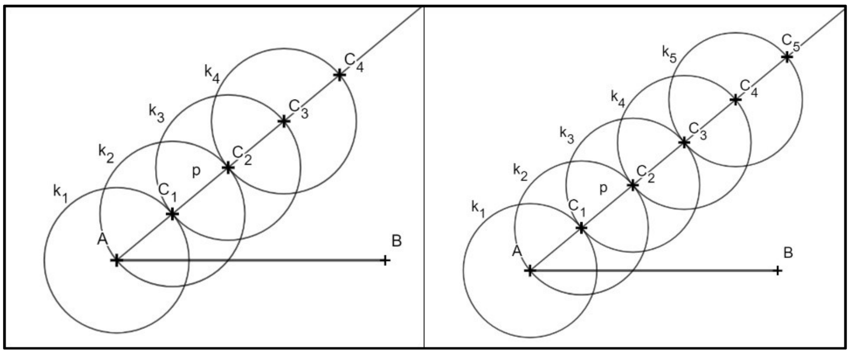


Obrázek 45- úloha 5, krok 3

Nyní se na polopřímku p nanese pomocná míra k měření, tj. pět nesoustředných kružnic k_1 až k_5 se středy A, C_1, C_2 až C_4 tak, aby vzniklo 5 stejně dlouhých úseků končících bodem C_5. Délka poloměru r první kružnice je libovolná, ale všechny ostatní kružnice musí mít poloměr stejný. (viz *Obrázek 46* a *47*)

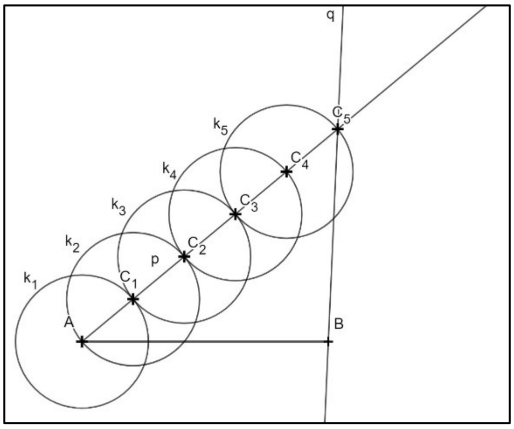


Obrázek 46- úloha 5, krok 4 až 7



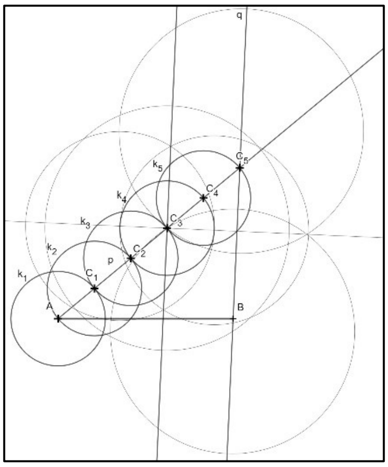
Obrázek 47- úloha 5, krok 8 a 9

Dokončení trojúhelníku ABC_5 proběhne spojením bodů C_5 a B přímkou q nebo úsečkou s těmito body incidentní, tj. $C5 \in q \wedge B \in q$. (viz *Obrázek 48*)



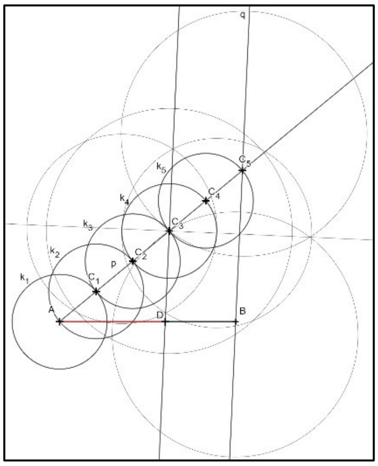
Obrázek 48 - úloha 5, krok 10

Rovnoběžka s přímkou q se sestrojí za pomoci konstrukce uvedené v úloze 4, a proto zde nebude dále rozebírána. Jediné, co je třeba odůvodnit, je volba bodu C_3, kterým má rovnoběžka procházet. Zřejmě jde o zkrácení jedné strany (AC_5) trojúhelníku ABC_5 z pěti jednotek na tři. Vzhledem k tomu, že úhly zůstaly zachovány, vzniká podobný trojúhelník, pro který platí, že zmenší-li se jedna strana s koeficientem podobnosti 5/3, pak se musí všechny ostatní strany zmenšit se stejným koeficientem. (viz *Obrázek 49*)



Obrázek 49 - úloha 5, krok 11

Proto úsečka *AD* odpovídá 3/5násobku úsečky *AB*. Bod *D* vznikl jako průsečík rovnoběžky s přímkou *q* a úsečkou *AB*. (viz *Obrázek 50*)



Obrázek 50 - úloha 5, krok 12

<u>Diskuze:</u> Tato úloha má jedno jediné řešení, jelikož neexistuje jiné řešení úlohy *(x/5)*3* než *(3/5)*x*.

<u>Návrhy:</u> Participující učitelé neměli žádné validní připomínky k této úloze.

Úloha 6

<u>Zadání:</u> Máš zadanou úsečku. Sestroj deltoid tak, aby platilo: a) zadaná úsečka je jeho úhlopříčkou; b) úhly při protilehlých vrcholech (krajních bodech zadané úsečky) jsou pravé; c) protahováním zadané úsečky vzniká přímka rozdělující rovinu na dvě poloroviny a v jedné z nich je z výše uvedeného pravého úhlu 30°.

Časová náročnost: 4 minuty

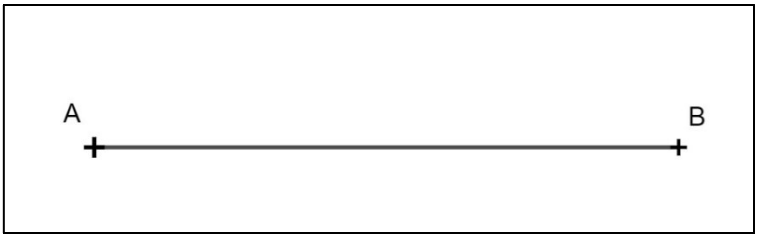
Účel: V této sadě se nepočítá s tím, že by žáci znali množinu všech bodů, ze kterých se shlíží na danou úsečku pod daným úhlem, a proto je třeba vytvořit sadu dílčích konstrukcí, které jim napoví, jak postupovat. Jednou z nich je tato úloha, která společně s úlohou následující, připraví dostatečné množství informací, ze kterých by žáci mohli řešení vymyslet. Cílem je, aby si uvědomili, že když sestrojí rovnoramenný trojúhelník, který má při ramenech úhly o velikosti 30°, pak jim na úhel při vrcholu naproti základně zbude 120°. Dále pak, když si uvědomí, že deltoid je osově souměrný, mohou pracovat pouze s jednou polorovinou a všechny zbývající konstrukce dodělat rychleji s pomocí osové souměrnosti, podle osy incidentní s hlavní úhlopříčkou.

Vzorové řešení:

Na prvním obrázku je vidět zadaná úsečka, která má sloužit jako vedlejší úhlopříčka deltoidu. (viz *Obrázek 51*)

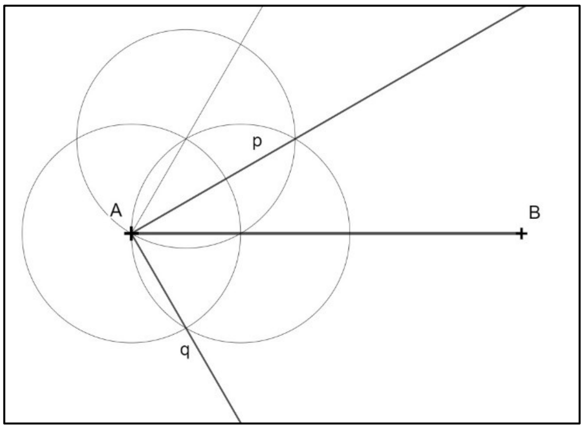
Obrázek 51 - úloha 6, krok 1

První fází je opět pojmenování důležitých bodů, krajních bodů dané úsečky. (viz *Obrázek 52*)



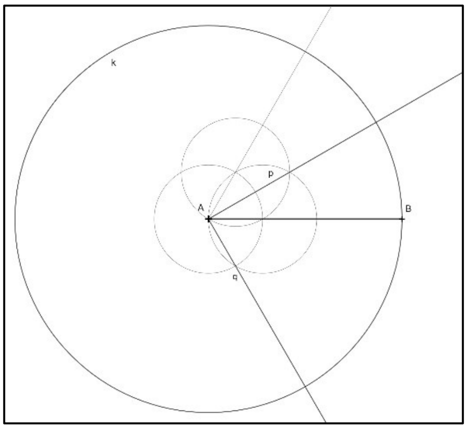
Obrázek 52 - úloha 6, krok 2

Konstrukcí z 2. a 3. úlohy se sestrojí polopřímky q, p svírající se zadanou úsečkou úhly o velikosti 60° a 30° (v tomto pořadí). Tyto konstrukce jsou již popsány v úlohách 2 a 3, a poroto zde nebudou více rozebírat. (viz *Obrázek 53*)

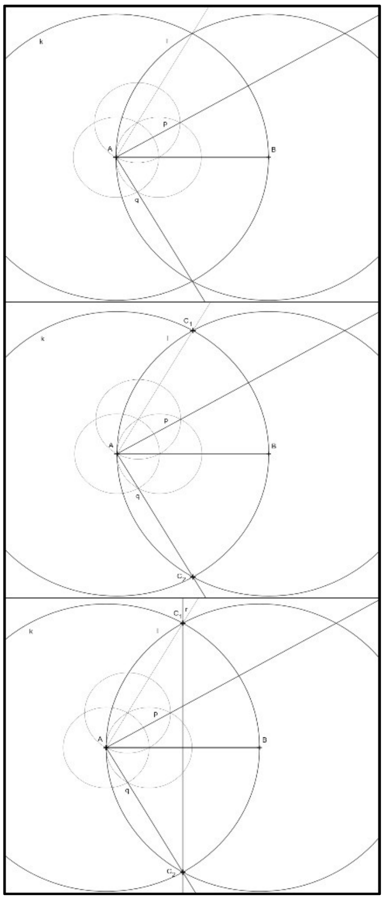


Obrázek 53 - úloha 6, krok 3

Deltoid je osově souměrný podle hlavní úhlopříčky, která je kolmá na úhlopříčku vedlejší. Proto je potřeba sestrojit osu úsečku *AB* (vedlejší úhlopříčky), která je kolmou přímkou procházející středem, a tedy splňuje všechny požadavky. Sestrojení osy úsečky je popsáno v úloze 4, a proto zde nebude více rozebíráno. (viz *Obrázek 54* a *55*)

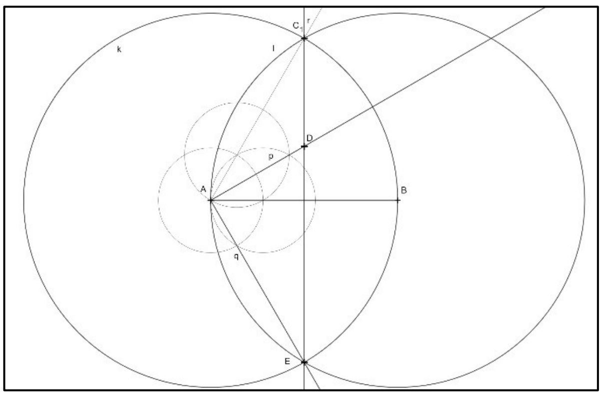


Obrázek 54 - úloha 6, krok 4



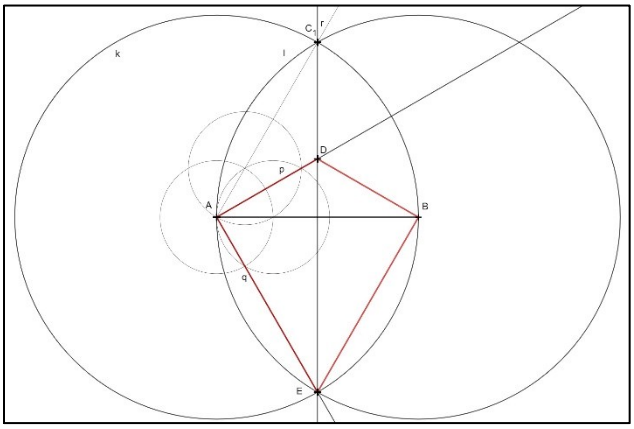
Obrázek 55 - úloha 6, krok 5 až 7

Průsečík D osy r úsečky AB s polopřímkou p svírající s úsečkou AB úhel 30° zapíšeme konstrukčním zápisem jako $D = p \cap r$. Průsečík E osy r úsečky AB s polopřímkou q svírající s úsečkou AB úhel 60° zapíšeme konstrukčním zápisem jako $E = q \cap r$. (viz *Obrázek 56*)



Obrázek 56 - úloha 6, krok 8

Vznikl požadovaný deltoid *ADBE*. (viz *Obrázek 57*)



Obrázek 57 - úloha 6, krok 9

<u>Diskuze:</u> Tato úloha má dvě řešení, z nichž obě jsou shodná a závisí na volbě polorovin, ve kterých bude z pravého úhlu při vrcholech *AB* 30° a 60°.

<u>Návrhy:</u> Participující učitelé neměli žádné validní připomínky k této úloze.

Úloha 7

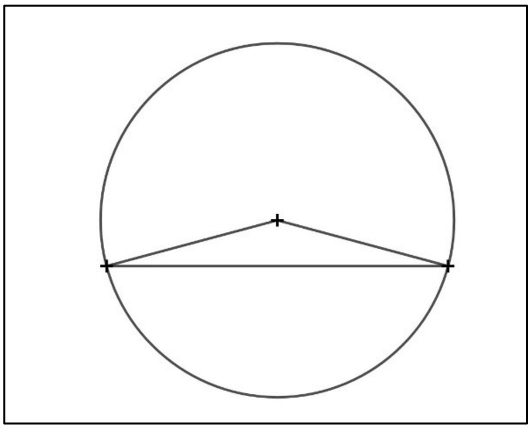
<u>Zadání:</u> Máš zadanou kružnici a rovnoramenný trojúhelník takový, že jeho základna je její tětivou, jeho ramena svírají úhel 150° a jeho vrchol protilehlý základně je jejím středem.

<u>Časová náročnost:</u> 1 minuta

<u>Účel:</u> Účelem této úlohy je připomenout si větu o obvodovém a středovém úhlu nad daným obloukem. Její užitečnost se projeví v kombinaci s úlohou 6 při řešení úlohy 8.

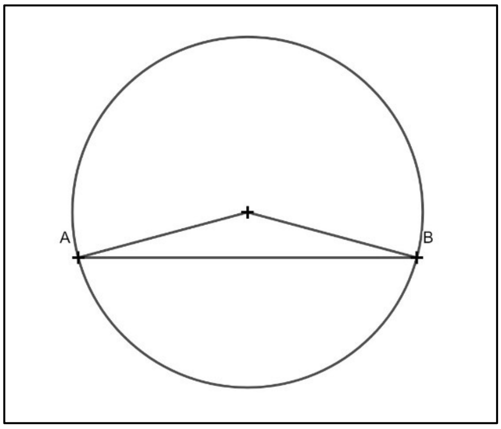
<u>Vzorové řešení:</u>

Na prvním obrázku je vidět rovnoramenný trojúhelník a kružnice. Vrcholy při základně daného trojúhelníku ohraničují oblouk. Vrchol daného trojúhelníku naproti základně je středem kružnice a je při něm středový úhel nad daným obloukem. (viz *Obrázek 58*)



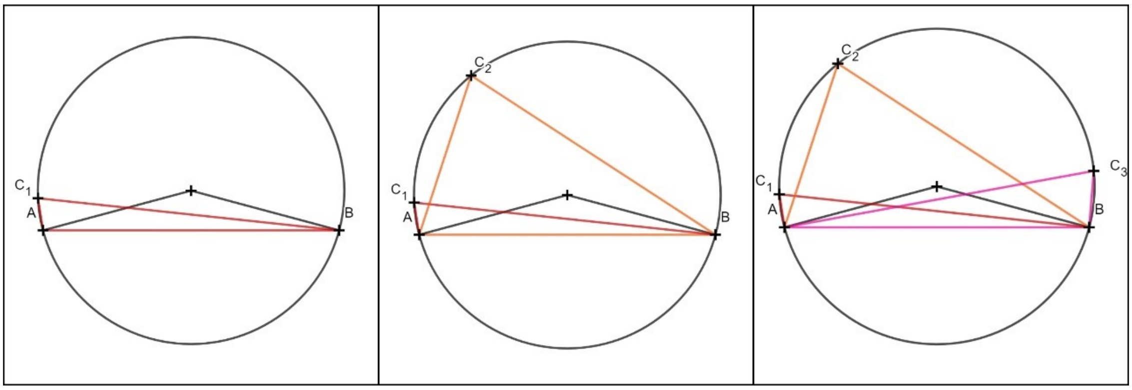
Obrázek 58 - úloha 7, krok 1

V první fázi je vhodné pojmenovat body důležité pro další konstrukce, tj. body *A* a *B*. (viz *Obrázek 59*)



Obrázek 59 - úloha 7, krok 2

Vzhledem k tomu, že věta o středovém a obvodovém úhlu nad daným obloukem říká, že libovolný obvodový úhel má poloviční velikost vůči velikosti úhlu středového, a nezáleží ani, kam na kružnici se vrchol sestrojovaného trojúhelníku umístí, dokud to nebude na daném oblouku. (viz *Obrázek 60*)



Obrázek 60 - úloha 7, krok 3 až 5

Diskuze: Tato úloha má nekonečně mnoho řešení a všechny se odvíjí od umístění vrcholu *C*. Ten musí být na oblouku *BA*, neboť kdyby se vyskytoval na oblouku *AB*, změnil by se oblouk, vůči kterému se věta vztahuje (středový úhel by měl velikost (360-150)° a obvodový by měl velikost ($\frac{360-150}{2}$)°).

Návrhy: Participující kolegové se vyjádřili v tom smyslu, že tato úloha není řešitelná pro žáky, kteří neznají větu o středovém a obvodovém úhlu nad daným obloukem. Navrhují zesílit nápovědu, nebo přidat pomocnou úlohu.

Úloha 8

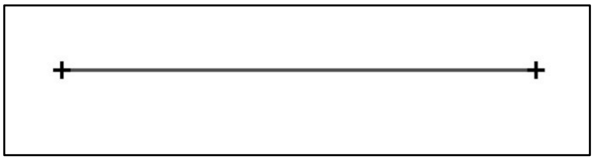
Zadání: Máš zadanou úsečku, která má délku 5 jednotek. Sestroj takový trojúhelník, aby současně platilo: a) zadaná úsečka je jeho stranou; b) úhel naproti zadané straně bude mít velikost 60°; c) výška na zadanou stranu bude mít 3 jednotky.

Časová náročnost: 10 minut

Účel: Cílem této úlohy je přimět žáky k uvědomění si, že každá složitá úloha je rozložitelná na konečný počet jednoduchých podúloh. Řešení předchozích úloh (zejm. úlohy 7, úlohy 6 a úlohy 5) poskytne dostatečnou nápovědu k vyřešení této úlohy i pro méně zdatné žáky.

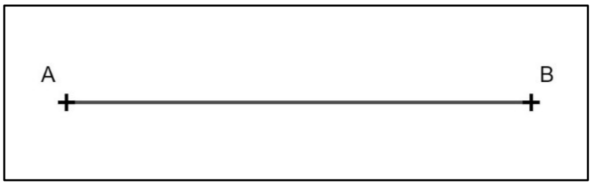
Vzorové řešení:

Na prvním obrázku je vidět zadaná úsečka s délkou 5 jednotek, která má být danou stranou trojúhelníku, pro nějž platí, že výška na tuto danou stranu má 3 jednotky, a na níž je z protilehlého vrcholu shlíženo pod úhlem 60°. (viz *Obrázek 61*)



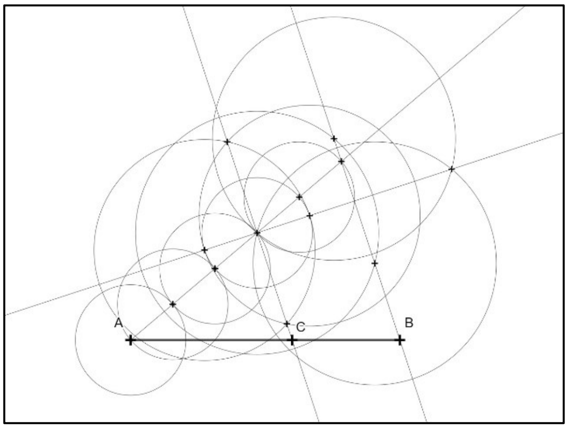
Obrázek 61 - úloha 8, krok 1

První fází je jako v přechozích úlohách pojmenování krajních bodů *A*, *B*. (viz *Obrázek 62*)



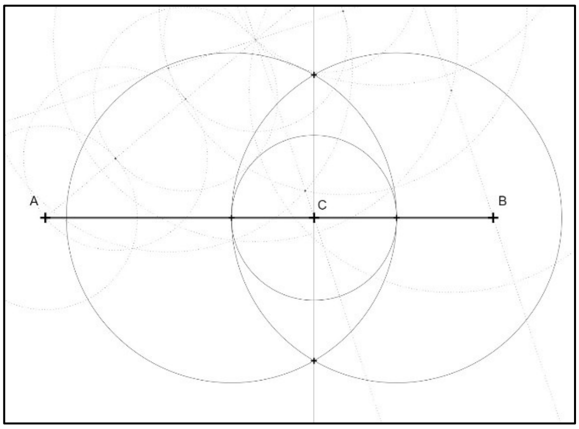
Obrázek 62 - úloha 8, krok 2

Konstrukcí uvedenou v úloze 5 sestrojíme úsečku s délkou 3/5 dané úsečky. (viz *Obrázek 63*)

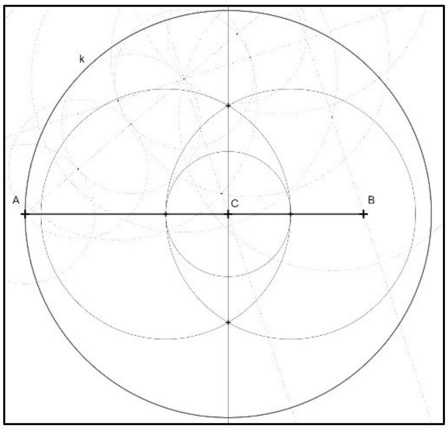


Obrázek 63 - úloha 8, krok 3

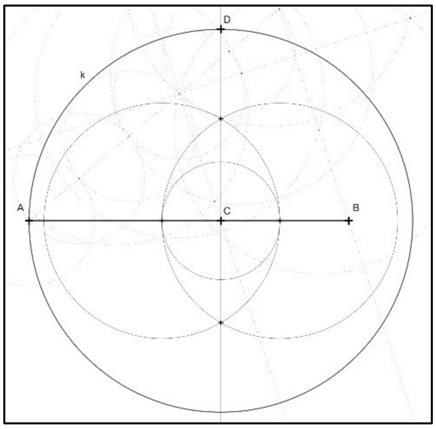
Z úlohy 4 je známá konstrukce rovnoběžky s danou úsečkou procházející daným bodem. (viz *Obrázek 64 až 67*)



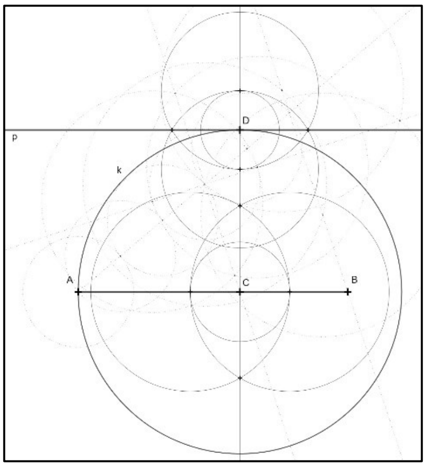
Obrázek 65 - úloha 8, krok 4



Obrázek 64 - úloha 8, krok 5

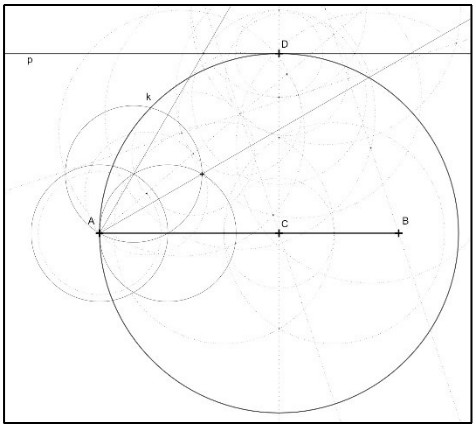


Obrázek 66 - úloha 8, krok 6



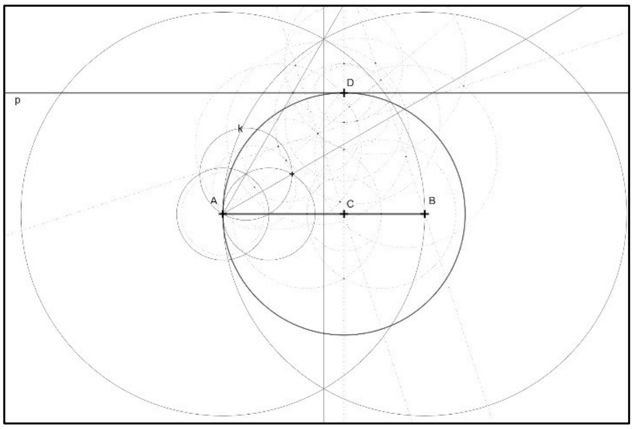
Obrázek 67 - úloha 8, krok 7

Z úlohy 3 je známá konstrukce polopřímky svírající s danou úsečkou úhel 30°. (viz *Obrázek 68*)

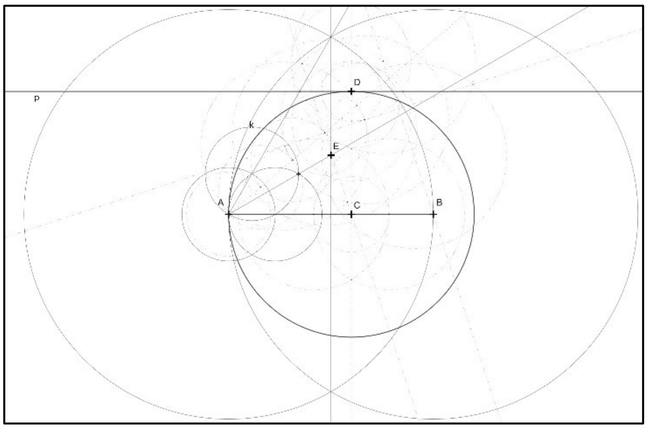


Obrázek 68 - úloha 8, krok 8

Z úlohy 6 je známá konstrukce vrcholů deltoidu. (viz *Obrázek 69* a *70*)

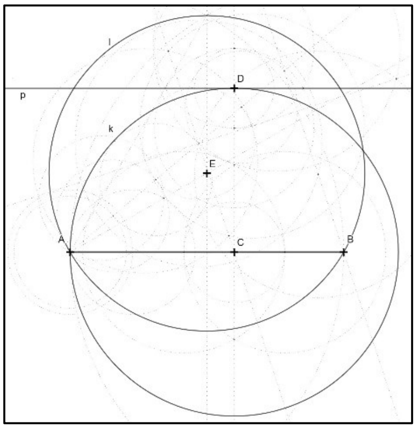


Obrázek 69 - úloha 8, krok 9



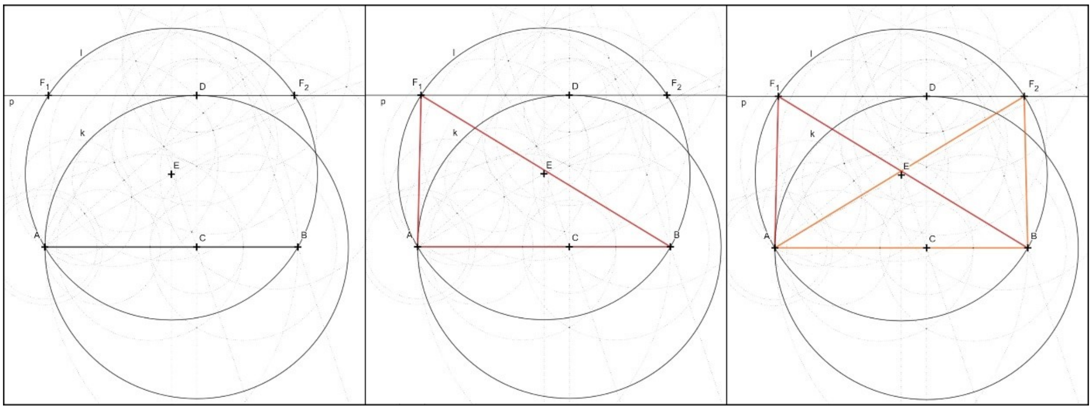
Obrázek 70 - úloha 8, krok 10

Z úlohy 7 je zřejmý význam vrcholu deltoidu *E* a kružnice *l*. (viz *Obrázek 71*)



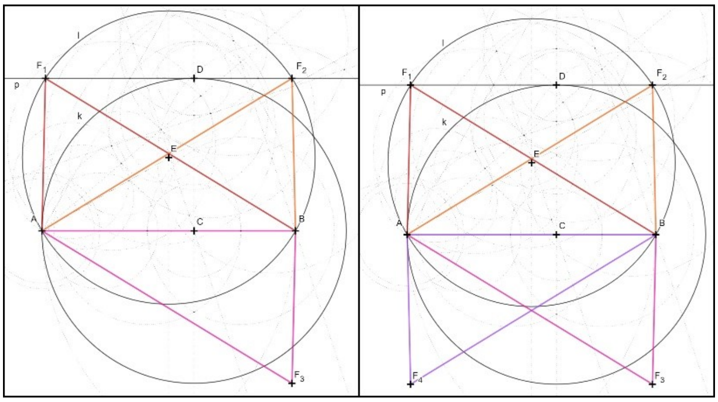
Obrázek 71 - úloha 8, krok 11

Řešení úlohy jsou trojúhelníky ABF_1, ABF_2, které vzniknout jako průsečíky množiny všech bodů, ze kterých je shlíženo na danou úsečku pod úhlem 60°, a množiny všech bodů, které jsou od dané přímky 3 jednotky vzdálené. (viz *Obrázek 72*)



Obrázek 72 - úloha 8, krok 12 až 14

Další řešení vzniknou stejnou konstrukcí, akorát se (stejně jako v úloze 6) vymění poloroviny. (viz *Obrázek 73*)



Obrázek 73 - úloha 8, krok 15 a 16

<u>Diskuze:</u> Úloha má celkem 4 řešení. Další diskuze není třeba, neboť všechny možné obměny byly probrány v předchozích úlohách.

<u>Návrhy:</u> Participující učitelé neměli žádné validní připomínky k této úloze.

6.3 Metodika pro participující učitele

Aktuální kapitola obsahuje stručně popsanou Metodiku pro implementaci vytvořené sady konstrukčních úloh do výuky. Cílem této kapitoly (i metodiky samotné) je představit učitelům, kteří by chtěli vytvořenou sadu úloh zařadit do své výuky, zamýšlený kontext, pro který je sada úloh vytvořena. Součástí metodiky je i návrh vyučovací jednotky s ohledem na zařazení úloh.

Kompletní metodika pro implementaci úloh je uložena v přílohách této diplomové práce (viz Příloha 6).

Sada gradovaných konstrukčních úloh je určena pro žáky středních škol, konkrétně pro žáky gymnázií, kteří se aktuálně vzdělávají v oblasti konstrukční geometrie (typicky v prvním až druhém ročníku čtyřletého oboru).

Sada obsahuje celkem 8 úloh, které na sebe vzájemně navazují a postupně gradují v obtížnosti. Žáci si během práce s úlohami připomenou řešení elementárních konstrukčních úloh známých ze základní školy, a to metodou množin bodů dané vlastnosti. Aby v sadě byla možnost diferenciace (resp. individualizace) úloh, obsahuje každá úloha nápovědu a výzvu.

Cílem sady úloh je zvýšit porozumění žáků v oblasti konstrukční geometrie. Na základě postupného zvyšování obtížnosti a postupného skládání množství jednoduchých kroků dohromady, kterými v konečném důsledku žáci vytvoří poměrně komplexní rys, může u některých žáků dojít k prozření a uvědomění si, že každý komplexní úkol se skládá z konečného počtu základních kroků. Samotná práce s úlohami může žákům přinejmenším připomenout základní planimetrické pojmy, a proto lze konstatovat, že není ze vzdělávacího hlediska zcela zbytečná.

Při řešení jednotlivých úloh se žáci setkají nejprve s jednoduchými konstrukcemi, jako je sestrojení rovnostranného trojúhelníku, a postupně se propracují ke konstrukcím složitější, např. ke trojúhelníku s danou stranou, výškou na danou stranu a daným úhlem proti dané straně.

Zařazení úloh zabere celou jednu vyučovací hodinu. Samotné řešení úloh žákům zabere průměrně 25 minut. Dalších 15 minut je třeba k společnému prodiskutování postupů a věnování se problematickým místům.

Na následujících řádcích je stručně analyzována každé z osmi úloh tvořících sadu. Analýza každé úlohy se skládá ze 3 částí:

- Zadání – co se od žáků očekává
- Znalosti a dovednosti – to, co žáci potřebují znát/zvládnout, aby si s úlohou poradili
- Cíl úlohy – co je cílem úlohy/ k čemu žákům poslouží

Úloha 1

Zadání: Máš zadanou úsečku. Sestroj rovnostranný trojúhelník tak, aby zadaná úsečka byla jeho stranou.

Znalosti a dovednosti: Žáci potřebují vědět, že kružnice je množinou všech bodů, které jsou stejně daleko od daného bodu a dále pak, že rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé.

Cíl úlohy: Cílem je dovést žáky k uvědomění si, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180° a k tomu, že v rovnostranném trojúhelníku mají všechny úhly stejnou velikost, tedy že při každém vrcholu je úhel 60°.

Úloha 2

Zadání: Máš zadanou polopřímku (počáteční rameno úhlu) a její počátek (vrchol úhlu). Sestroj polopřímku (koncové rameno úhlu) tak, aby velikost úhlu, který obě polopřímky svírají, byla 60°.

Znalosti a dovednosti: Znalosti potřebné pro zvládnutí této úlohy vyplývají z cíle úlohy předchozí – pokud žáci naplní cíl úlohy 1, pak získají znalosti potřebné ke splnění úlohy 2.

Cíl úlohy: Cílem této úlohy je umožnit žákům bezprostředně aplikovat znalost nabytou v předchozí úloze do tvorby úhlu 60°.

Úloha 3

Zadání: Máš zadané dvě polopřímky se společným počátkem tvořící úhel. Zmenši zadaný úhel na poloviční velikost.

Znalosti a dovednosti: Žáci musí umět vytvořit úhel 60° (zde úloha navazuje na úlohu 1) a následně si musí být vědomi toho, jak vytvořit ze zadaného polovinu, tj. musí si být vědomi toho, že vytvořit 2 poloviny znamená vytvořit 2 souměrné části jednoho celku

Cíl úlohy: Cílem je poskytnout žákům připomenutí si procesu půlení (např. skrze osu úhlu)

Úloha 4

Zadání: Máš zadanou úsečku a bod, který na ní neleží. Sestroj přímku rovnoběžnou se zadanou úsečkou tak, aby procházela zadaným bodem.

Znalosti a dovednosti: Žáci si v této úloze musí vybavit vztah, že kolmice na kolmici k dané přímce je současně rovnoběžkou této dané přímky.

Cíl úlohy: Cílem je dovést žáky k uvědomění toho, že rovnoběžka je množinou všech bodů, které jsou od dané přímky stejně daleko.

Úloha 5

Zadání: Máš zadanou úsečku takovou, že její délka je 5 jednotek. Sestroj úsečku, která bude mít délku 3 jednotky.

Znalosti a dovednosti: Pro zpracování této úlohy si musí žáci oživit principy podobnosti trojúhelníků.

Cíl úlohy: Cílem je umožnit žákům tvorbu určitého dílu z dané délky.

Úloha 6

Zadání: Máš zadanou úsečku. Sestroj deltoid tak, aby platilo:

a) zadaná úsečka je jeho úhlopříčkou;
b) úhly při protilehlých vrcholech (krajních bodech zadané úsečky) jsou pravé;
c) protažením zadané úsečky vzniká přímka rozdělující rovinu na dvě poloroviny a v jedné z nich je z výše uvedeného pravého úhlu 30 °.

Znalosti a dovednosti: V této úloze je potřeba si vzpomenout, že deltoid je osově souměrný dle jedné úhlopříčky a dále pak je nutné si uvědomit velikosti vnitřních úhlů v deltoidu.

Cíl úlohy: Cílem této úlohy je připomenutí si všech potřebných znalostí o deltoidu.

Úloha 7

Zadání: Máš zadanou kružnici a rovnoramenný trojúhelník takový,

že jeho základna je její tětivou, jeho ramena svírají úhel 150 ° a jeho vrchol protilehlý základně je jejím středem. Sestroj trojúhelník tak, aby platilo že:

a) oba trojúhelníky sdílí základnu;
b) všechny vrcholy sestrojeného trojúhelníku leží na zadané kružnici;
c) vnitřní úhel při vrcholu protilehlému základně má velikost 75 °.

Znalosti a dovednosti: Zde je nezbytné znát větu o středovém a obvodovém úhlu nad daným obloukem.

Cíl úlohy: Žáci si v této úloze vyzkouší zkonstruovat množinu všech bodů, které shlíží na danou úsečku pod daným úhlem.

Úloha 8

Zadání: Máš zadanou úsečku, která má délku 5 jednotek. Sestroj takový trojúhelník, aby platilo:

a) zadaná úsečka je jeho stranou;
b) úhel naproti zadané straně bude mít velikost 60°;
c) výška na zadanou stranu bude mít 3 jednotky.

Znalosti a dovednosti: Znalosti a dovednosti k vyřešení úlohy 8 jsou souborem připomenutých znalostí z předchozích úloh, konkrétní návaznost úloh s cílem dovést žáky k řešení úlohy číslo 8 je následující:

splnění *úlohy 1* napomůže k vyřešení *úlohy 2* → splnění *úlohy 2* napomůže k vyřešení *úlohy 3* → splnění *úlohy 3* napomůže k vyřešení *úlohy 6*

splnění *úlohy 4* napomůže k vyřešení *úlohy 5*

úloha 7 stojí samostatně

splnění *úloh 6, 5* a *7* napomůže k vyřešení *úlohy 8*

Cíl úlohy: Cílem poslední úlohy je ukázat žákům, že složitá úloha není ničím jiným než složením konečného počtu jednodušších kroků.

7 Diskuze

Z dotazníkových šetření vyplynulo, že se většina participujících učitelů shoduje v tom, že geometrie je kritické místo matematiky a nadpoloviční většina dále konkretizuje geometrii v rovině. Poté se dotazovaní učitelé nejvíce shodli v tom, že z geometrie v rovině je pro žáky nejobtížnější učivo tématu konstrukční úlohy a množina bodů daných vlastností. Toto souhrnné zjištění částečně koresponduje s očekáváním, které vyplynulo z výzkumu Rendla a Vondrové (2013), podle kterých by měla patřit mezi kritická místa (geometrie) ještě míra, resp. obvody, obsahy a objemy.

Rozdíl ve výsledcích šetření může být připsán některému z limitujících faktorů této práce, např. distribuce dotazníkového šetření byla realizována ryze on-line formou (přes sociální sítě), což zcela znemožnilo možnost vyjádřit se učitelům, kteří sociální sítě nepoužívají. Dalším limitujícím faktorem mohl být relativně malý počet respondentů, kteří se dotazování zúčastnili (prvního dotazníkového šetření se zúčastnilo 58 respondentů, v následném šetření se jednalo už jen o 5 a finálně jen o 3 respondenty – učitele).

Za další limitující faktorky práce lze považovat skutečnost, že do úplné spolupráce (tzn. včetně implementace sady do svých hodin a její reflexe) se zapojili pouze tři učitelé a všichni tři byli vyučujícími na gymnáziích. Tím, že všichni zapojení žáci byli z gymnázií, došlo podle očekávání pouze k malému posunu v porozumění, typicky šlo napříč celým šetřením o jednotky žáků (až pojem „Thaletova kružnice“, u kterého došlo ve dvou třídách k posunu u pětiny žáků).

Jako příležitost se nabízí vyzkoušet sadu gradovaných úloh např. na středních odborných školách, což by mohlo poskytnou větší rozdíly v hodnotách porozumění před a po implementaci sady gradovaných úloh.

Za pozitivum práce lze považovat, že sada gradovaných konstrukčních úloh, byla vyzkoušena ve výuce. Na jejím ověřování se podílelo celkem 101 žáků a 3 pedagogové. Na základě tohoto ověřování byla sada připomínkována jak žáky, tak učiteli, a následně upravena do finální podoby tak, jak je možné ji vidět v Příloze 7 této práce.

Závěr

Prezentovaná diplomová práce na téma „Diferenciace ve výuce matematiky a gradované úlohy v geometrii jako cesta k porozumění“ nabídla pohled na základní teoretické poznatky z oblasti diferenciace, porozumění a konstrukčních úloh. Její praktická část nabídla výzkum provedený skrze dotazníková šetření (viz Přílohy 1 – 5), jehož fyzickým výstupem je konkrétní, v praxi ověřená, sada gradovaných úloh z konstrukční geometrie, včetně metodiky pro implementaci této sady do výuky.

Pro celou diplomovou práci byl stanoven jeden souhrnný hlavní cíl – zvýšit porozumění žáků v oblasti konstrukční geometrie. Tento cíl byl pak dospecifikován skrze další cíle stanovené zvlášť pro teoretickou část práce a zvlášť pro část praktickou. Všechny stanovené cíle (dílčí i hlavní) byly naplněny.

Materiálním výstupem této práce je sada konstrukčních úloh, jejímž záměrem je postupnou gradací zbavit konstrukční geometrii závoje abstrakce a přiblížit tak zdánlivě složité postupy žákům tak, aby došlo ke zvýšení jejich porozumění geometrickým konstrukcím. Sada gradovaných úloh, která reflektuje připomínky vzniklé během jejího ověřování (tzn. sada úloh ve finální podobě), je umístěna v Příloze 7 této práce. Stejně tak je v přílohách práce umístěna i metodika k implementaci této sady do výuky (viz Příloha 6).

Seznam použitých zdrojů

1) BARTLETT, Jayne. *Outstanding differentiation for learning in the classroom*. Routledge, 2015.
2) BLAŽKOVÁ, Růžena. *Vzdělávání žáků se specifickými poruchami učení – matematika*. Online. Brno: Masarykova Univerzita, 2020. ISBN 978-80-210-9930-2.
3) BRINCKOVÁ, Jaroslava. Gradované série úloh v matematike ZŠ. In: STEHLÍKOVÁ, Naďa, JIROTKOVÁ, Darina (ed.). *Sborník příspěvků semináře Dva dny s didaktikou matematiky 2006*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a Společnost učitelů matematiky JČMF, 2007, s. 81-84. ISBN 978-80-7290-286-6.
4) BUDÍNOVÁ, Irena, et al. Diferencovaná a individualizovaná výuka matematiky na základní škole. *Gramotnost, pregramotnost a vzdělávání*, 2018, 2.2: 91-111.
5) ČECH, Eduard. *Bodové množiny*. 3. Praha: Academia, 1974. ISBN 21-098-74.
6) ČR. Zákon č. 561/2004 Sb. Zákon o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). In: *Zákony pro lidi*. Online. Dostupné z: https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2004-561 [cit. 2024-06-27]
7) DREW, Chris. Differentiated Instruction – Strategies, Pros & Cons. Online. 2023. Dostupné z: https://helpfulprofessor.com/differentiated-instruction/. [cit. 2024-06-27].
8) DOŠLÁ, Zuzana a DOŠLÝ, Ondřej. *Metrické prostory: teorie a příklady*. 3. Brno: Masarykova Univerzita, 2006. ISBN 80-210-4160-9.
9) FAN, Lianghuo; BOKHOVE, Christian. Rethinking the role of algorithms in school mathematics: A conceptual model with focus on cognitive development. *ZDM*, 2014, 46: 481-492.
10) FUCHS, Eduard. Přehled vývoje matematiky. Online. Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách. 1993, s. 4-19.
11) HEJNÝ, Milan. Cíle vyučování matematice. *Učitel matematiky*, 2019, 27.3: 160-168.
12) HEJNÝ, Milan. Zmocnování se slovní úlohy (Grasping of word problem, in Czech). *Pedagogika*, 1995, 45.4: 386-399.
13) HEJNÝ, Milan; NOVOTNÁ, Jarmila a VONDROVÁ, Naďa (ed.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

14) HEJNÝ, Milan; ŠALOM, Pavel; JIROTKOVÁ, Darina; HANUŠOVÁ, Jana; KUŘÍK SUKNIAK, Anna et al. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2017. ISBN 978-80-905756-9-1.

15) HERMAN, Jiří. *Matematika: geometrické konstrukce : [učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia]*. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-114-0.

16) HRUŠA, Karel; KRAEMER, Emil; SEDLÁČEK, Jiří; VYŠÍN, Jan a ZELINKA, Rudolf. *Přehled elementární matematiky*. 4. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964. ISBN 04-008-64.

17) HUDECOVÁ, Dagmar. Revize Bloomovy taxonomie edukačních cílů. *Pedagogika*, 2004, 54.3: 274-283.

18) JANČAŘÍKOVÁ, Kateřina. Modely v didaktice biologie. *Biologie.Chemie.Zeměpis.* 2017, roč. 26, č. 1, s. 2-22. ISSN 2533-7556.

19) JANÍK, Tomáš. *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. *Syntézy výzkumu vzdělávání*. Brno: Masarykova univerzita, 2013. ISBN 978-80-210-6349-5.

20) JURÁŠKOVÁ, Jana. *Základy pedagogiky nadaných*. Praha : Institut pedagogicko-psychologického poradenství ČR, 2006. ISBN 80-86856-19-4.

21) KALHOUS, Zdeněk a OBST, Otto. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-253-x.

22) KASÍKOVÁ, Hana a VALENTA, Josef. *Reformu dělá učitel, aneb, Diferenciace, individualizace, kooperace ve vyučování: (pohledy pedagogické)*. Praha: Sdružení pro tvořivou dramatiku, 1994. ISBN 80-901660-0-8.

23) KUŘINA, František. *Geometrické praktikum: Učeb.pro zákl.školy*. Praha: Matematický ústav, 1994. ISBN 80-85823-03-9.

24) KUŘINA, František. Geometrie a geometrické vzdělávání. In: *Sborník příspěvků 25. Konference o geometrii a počítačové grafice (15–22). Praha: JČMF*. 2005.

25) KUŘINA, František a VONDROVÁ, Naďa. 15 pohledů na školskou matematiku: jak to vidíme. [Praha]: Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, 2022. ISBN 978-80-7603-343-6.

26) KOLÁŘ, Zdeněk. *Výkladový slovník z pedagogiky: 583 vybraných hesel*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-3710-2.
27) MAGABLEH, Ibrahim Suleiman Ibrahim; ABDULLAH, Amelia. On the Effectiveness of Differentiated Instruction in the Enhancement of Jordanian Students' Overall Achievement. *International Journal of Instruction*, 2020, 13.2: 533-548.
28) MACHOVCOVÁ, Lucie. Výuka rovinné geometrie na středních školách. Diplomová práce, vedoucí Zhouf, Jaroslav. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, 2014
29) MALINOVÁ, Dagmar a MELICHAR, Jan. *Diferenciace v primárním a preprimárním vzdělávání a rozvoj matematického myšlení*. Online. Dostupné z: https://www.pf.ujep.cz/wp-content/uploads/2018/06/KPR_MA_Diferenciace_v_primarnim_a_preprimarnim_vzdelavani.pdf. [cit. 2024-06-27].
30) MOURALOVÁ, Magdalena. Postoje českých učitelů k vnější diferenciaci žáků a možné hodnotové kořeny těchto postojů. *Orbis scholae*, 2013, 7.3: 11-26.
31) MŠMT. *Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+*. 2020. ISBN 978-80-87601-47-1. Online. Dostupné z: https://msmt.gov.cz/uploads/Brozura_S2030_online_CZ.pdf [cit. 2024-06-27]
32) NAVRÁTILOVÁ, Jana. Diferencovaná výuka jako cesta k žákovské participaci. *Studia paedagogica*, 2019, 24.1: 157-186.
33) NAVRÁTILOVÁ, Jana. Spolu, a přece odděleně: Podoba částečně diferencovaného vzdělávání na druhém stupni ZŠ optikou učitelů. *Pedagogická orientace*, 2020, 30.3: 347-374.
34) NOVOTNÁ (2008) in *Setkání učitelů matematiky: seminář určený učitelům a studentům: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta*. [2008]-. Brno: Masarykova univerzita, [2008]-. ISBN 978-80-86843-62-9.
35) NPI. Bloomova taxonomie. *Metodický portál RVP.CZ* [online]. 2024. Dostupné z: https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogicky_lexikon/B/Bloomova_taxonomie#Revidovan.c3.a1_Bloomova_taxonomie_(90._l.c3.a9ta) [cit. 2024-06-28]
36) POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 5. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-22885-2.

37) POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia. Planimetrie. 4. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-174-1.

38) PRŮCHA, Jan (ed.). *Pedagogická encyklopedie*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-546-2.

39) PRŮCHA, Jan; WALTEROVÁ, Eliška a MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 7., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0403-9.

40) Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G). Online. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2020/08/RVPG-2007-07_final.pdf . [cit. 2024-06-24].

41) RENDL, Miroslav a VONDROVÁ, Naďa. Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

42) SERVÍT, František. Eukleidovy základy (*Elementa*). Online. Praha: Jednota českých matematiků, 1907. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Eukleides.pdf. [cit. 2024-06-24].

43) SIERPIŃSKA, Anna. *Understanding in Mathematics*. Routledge, 1994. ISBN 0-7507-0334-2.

44) SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika: vyučovací proces, učivo a jeho výběr, metody, organizační formy vyučování*. 2., rozš. a aktualiz. vyd., [V nakl. Grada] vyd. 1. *Pedagogika (Grada)*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7.

45) SKEMP, Richard R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 1976, 77.1: 20-26.

46) ŠEDIVÝ, O.-VALLO; VALLO, D. D. Prečo vyučovať slovné a konštrukčné úlohy. *Slovné a konštrukčné úlohy ako prostriedok k rozvoju logického myslenia*, 2013, 516: 3-10. ISBN 978-80-558-0238-1.

47) ŠEĎOVÁ, Klára; ŠVAŘÍČEK, Roman. Zamlčené hodnocení: zpětná vazba ve výukové komunikaci na druhém stupni základní školy. *Studia paedagogica*, 2010, 15.2: [61]-86.

48) ŠVRČEK, Jaroslav. *Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014. ISBN 978-80-244-4018-7.

49) TRKOVSKÁ, Dana. *Historický vývoj geometrických transformací*. *Dějiny matematiky*. Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v

Praze, 2015. ISBN 978-80-7378-289-4.TOMLINSON, Carol Ann. Differentiation of Instruction in the Elementary Grades. ERIC Digest. 2000.

50) TOMLINSON, Carol Ann. Differentiation of Instruction in the Elementary Grades. ERIC Digest. 2000.

51) TOMLINSON, Carol A. *How to differentiate instruction in academically diverse classrooms*. Ascd, 2017.

52) VALIŠOVÁ, Alena a KASÍKOVÁ, Hana. *Pedagogika pro učitele*. *Pedagogika (Grada)*. Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1734-0.

53) VONDROVÁ, Naďa; HAVLÍČKOVÁ, Radka; RENDL, Miroslav a ŽALSKÁ, Jana. *Kritická místa matematiky základní školy: metodická materiál pro učitele*. Online. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2015.

54) VONDROVÁ, Naďa. *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2019. ISBN 978-80-7603-109-8.

55) VOPĚNKA, Petr. Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci: souborné vydání Rozprav s geometrií. Vydání čtvrté, brožované první. Praha: Práh, 2016. ISBN 978-80-7252-624-6.

56) WESELBY, Cathy. What is differentiated instruction? Examples of how to differentiate instruction in the classroom. *Teaching Strategies*, 2014. Online. Dostupné z: https://resilienteducator.com/classroom-resources/examples-of-differentiated-instruction/ . [cit. 2024-06-27]

57) ZORMANOVÁ, Lucie. *Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod*. *Pedagogika (Grada)*. Praha: Grada, 2012. ISBN 978-80-247-4100-0.

Seznam příloh

Seznam obrázků

Obrázek 72 - úloha 8, krok 12 až 14

Obrázek 73 - úloha 8, krok 15 a 16

Dotazník 1 – pilotní dotazník pro pedagogickou veřejnost

(učitele matematiky)

Otázka 1: Na jakém typu střední školy vyučujete?*

a) Gymnázium
b) Střední odborná škola
c) Střední odborné učiliště

Otázka 2: Jaká je délka Vaší pedagogické praxe?*

a) do 2 let
b) do 6 let
c) do 12 let
d) do 19 let
e) do 27 let
f) do 32 let
g) nad 32 let

Otázka 3: Jaké je Vaše nejvyšší dosažené vzdělání?*

a) VŠ – bakalářské
b) VŠ – magisterské (Mgr.)
c) VŠ – magisterské (Ing.)
d) VŠ – doktorské
e) VŠ – jiný titul

Otázka 4: Vyučujete nebo jste vyučoval(a) geometrii?*

a) Ano
b) Ne

Otázka 5: Vyberte, do jaké míry souhlasíte s následujícím tvrzením: „Vzdělávací obsah geometrie je problematický“.*

a) naprosto souhlasím
b) spíše souhlasím
c) spíše nesouhlasím
d) naprosto nesouhlasím

Otázka 6: Z nabízených možností vyberte učivo, které považujete v geometrii za nejvíce problematické.*

a) geometrie v rovině
b) geometrie v prostoru
c) trigonometrie
d) analytická geometrie v rovině

Otázka 7: Stručně vysvětlete volbu své odpovědi z předchozí otázky.*

Otázka 8: Z nabízených možností vyberte z každé kategorie nejvíce problematické téma/témata.*

<u>Kategorie A: geometrie v rovině</u>

a) Klasifikace rovinných)tvarů
b) Obvody a obsahy
c) Shodnost a podobnost trojúhelníků
d) Pythagorova věta a Euklidovy věty
e) Množiny bodů dané vlastnosti
f) Úhly v kružnici
g) Shodná zobrazení
h) Stejnolehlost
i) Konstrukční úlohy

<u>Kategorie B: geometrie v prostoru</u>

a) Polohové a metrická vlastnosti
b) Základní tělesa
c) Povrchy a objemy
d) Volné rovnoběžné promítání

<u>Kategorie C: trigonometrie</u>

a) Sinová a kosinová věta
b) Trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku

<u>Kategorie D: analytická geometrie v rovině</u>

a) Vektory a operace s nimi

b) Analytické vyjádření přímky v rovině
c) Kuželosečky

Otázka 9: Ocenil(a) byste, kdyby existovala sada gradovaných úloh, jejímž účelem by bylo zvýšení porozumění Vámi vybraného učiva?*

a) Ano
b) Ne

Otázka 10: Zde je prostor pro Vaše dotazy a připomínky a v případě zájmu o spolupráci na pilotáži gradovaných úloh zde můžete zanechat e-mailový kontakt.

Dotazník 2 – pro učitele participující na ověřování sady gradovaných úloh

Otázka 1: V jakých ročnících vyučujete téma „konstrukční úlohy“?*

a) 1. ročník
b) 2. ročník
c) 3. ročník
d) 4. ročník

Otázka 2: **Připravenou sadu planimetrických konstrukčních úloh oceníte zaměřenou na metodu ...***

a) Množin všech bodů dané vlastnosti
b) Geometrických zobrazení v rovině
c) Na základě výpočtu

Otázka 3: V následující části dotazníku budete z nabízených možností vybírat z každé kategorie takové možnosti, které ve své výuce využíváte při řešení konstrukčních úloh.*

<u>Kategorie A: pro množiny všech bodů dané vlastnosti</u>

a) m. v. b., které mají od daného bodu S danou vzdálenost r;
b) m. v. b., které mají od dané přímky p danou vzdálenost r;
c) m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných bodů A, B;
d) m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek p;
e) m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek a, b;
f) m. v. b., které jsou vrcholy úhlů shodných s daným konvexním úhlem velikosti α;
g) m. v. vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body A, B;
h) m. v. středů kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T;
i) m. v. středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice k(S,r) v bodě T;
j) m. v. středů všech shodných tětiv (velikosti $t < 2r$) dané kružnice k(S,r);
k) m. v. středů tětiv kružnice k(S,r), které mají společný jeden krajní bod A;
l) m. v. středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných soustředných kružnic, zatímco s menší mají vnější dotyk a s vnitřní mají vnější dotyk;
m) m. v. středů kružnic, které mají daný poloměr m a mají s danou kružnicí k(S,r) dotyk.

Kategorie B: pro geometrická zobrazení v rovině

a) posunutí
b) otočení
c) středová souměrnost
d) osová souměrnost
e) posunutá souměrnost
f) stejnolehlost

Kategorie C: pro metodu konstrukce na základě výpočtu

a) sčítání a odčítání
b) násobení a dělení
c) odmocňování

Otázka 4: Zde je prostor pro Vaše dotazy a připomínky.

Dotazník 3a – evaluační dotazník pro žáky před implementací úloh

Otázka 1: Představ si kamaráda, kterému geometrie vůbec nejde a který tě požádá o vysvětlení několika pojmů. Upřímně se zamysli a z následujících možností vyber pro každou kategorii tu, která nejvíc odpovídá pravdě.

Kategorie A: Kružnice

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od daného bodu, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice, i když není zadaný střed nebo poloměr, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od daného bodu, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití kružnic a posoudit nejefektivnější metodu k sestrojení kružnice nebo jejího využití.

Kategorie B: Osa úsečky

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou daných různých bodů, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky, i když je zadána jen dvěma body, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od dvou daných různých bodů, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití osy úsečky a posoudit nejefektivnější metodu k sestrojení osy úsečky nebo jejího využití.

Příloha 3 – Dotazník 3a

Kategorie C: Rovnoběžka

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka, vysvětlit, že v páru jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dané přímky, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka, vysvětlit, že v páru jde o množinu všech bodů v rovně, které jsou stejně vzdálené od dané přímky, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití rovnoběžky a posoudit nejefektivnější metodu sestrojení rovnoběžky nebo jejího využití.

Kategorie D: Osa úhlu

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu, vysvětli, že v páru kolmic jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou různoběžných přímek, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu, včetně úhlů konkávních, vysvětlit, že v páru kolmic jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou různoběžných přímek, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití osy úhlu a posoudit nejefektivnější metodu sestrojení osy úhlu nebo jejího využití.

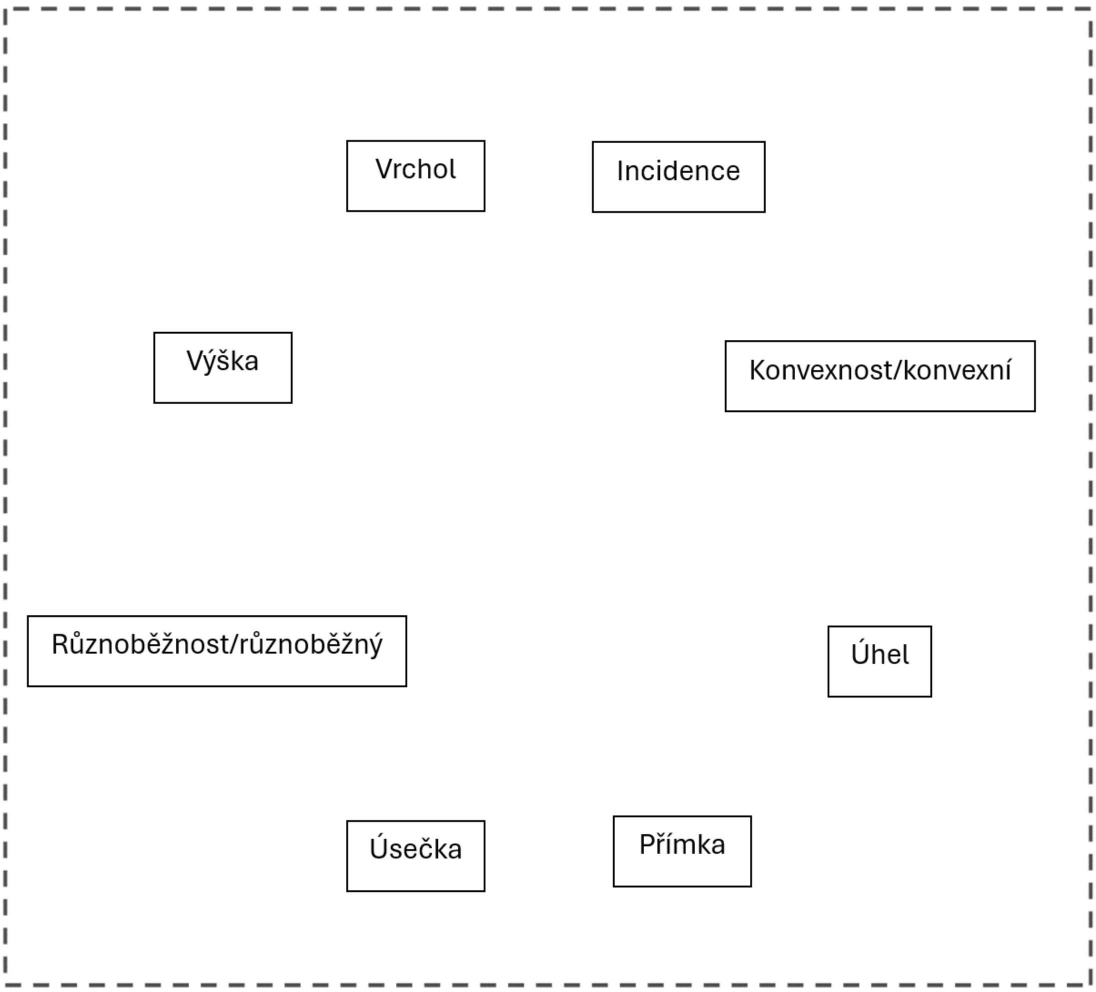
Kategorie E: Thaletova kružnice

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.

d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, ze kterých shlížíme na danou úsečku pod pravým úhlem, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.

e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice pro danou úsečku, která je jejím průměrem, vysvětlit, že jde o speciální případ množiny všech bodů v rovině, ze kterých shlížíme na danou úsečku pod daným úhlem, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití Thaletovy kružnice a posoudit nejefektivnější metodu sestrojení Thaletovy kružnice nebo jejího využití.

Otázka 2: Pokud tě napadne nějaký přímý geometrický vztah mezi libovolnými dvěma pojmy z obrázku níže, spoj je čarou a tu výstižně pojmenuj zamýšleným vztahem. Nakonec uveď počet čar, které jsi udělal(a).



Uveď počet čar, které jsi udělal(a):_________

Dotazník 3b – evaluační dotazník pro žáky po implementaci úloh

Otázka 1: Představ si kamaráda, kterému geometrie vůbec nejde a který tě požádá o vysvětlení několika pojmů. Upřímně se zamysli a z následujících možností vyber pro každou kategorii tu, která nejvíc odpovídá pravdě.

Kategorie A: Kružnice

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od daného bodu, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá kružnice, i když není zadaný střed nebo poloměr, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od daného bodu, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití kružnic a posoudit nejefektivnější metodu k sestrojení kružnice nebo jejího využití.

Kategorie B: Osa úsečky

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou daných různých bodů, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úsečky, i když je zadána jen dvěma body, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od dvou daných různých bodů, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití osy úsečky a posoudit nejefektivnější metodu k sestrojení osy úsečky nebo jejího využití.

Příloha 4 – Dotazník 3b

Kategorie C: Rovnoběžka

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka, vysvětlit, že v páru jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dané přímky, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá rovnoběžka, vysvětlit, že v páru jde o množinu všech bodů v rovně, které jsou stejně vzdálené od dané přímky, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití rovnoběžky a posoudit nejefektivnější metodu sestrojení rovnoběžky nebo jejího využití.

Kategorie D: Osa úhlu

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.
d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu, vysvětli, že v páru kolmic jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou různoběžných přímek, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.
e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá osa úhlu, včetně úhlů konkávních, vysvětlit, že v páru kolmic jde o množinu všech bodů v rovině, které jsou stejně vzdálené od dvou různoběžných přímek, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití osy úhlu a posoudit nejefektivnější metodu sestrojení osy úhlu nebo jejího využití.

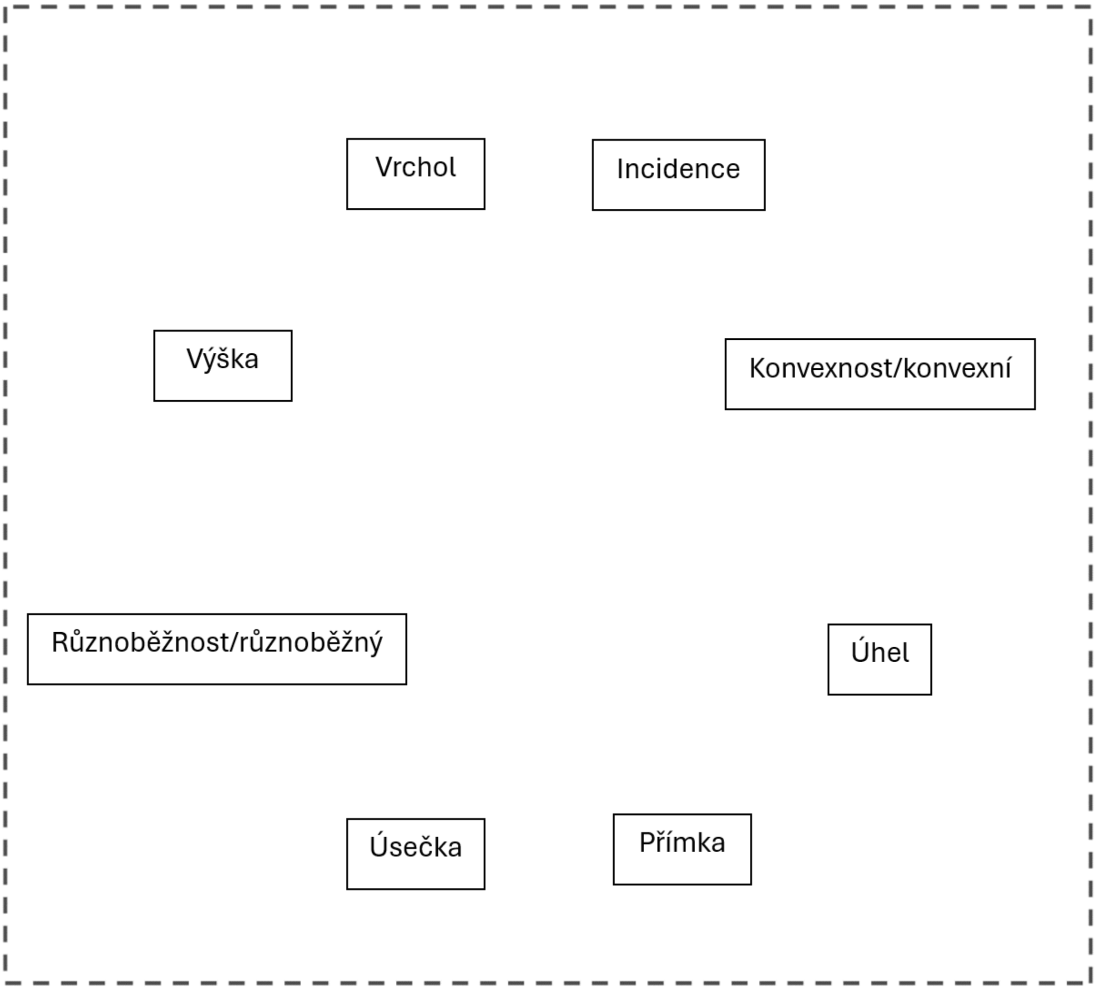
Kategorie E: Thaletova kružnice

a) Nezvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice.
b) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice.
c) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice a uvést alespoň dva příklady, ve kterých se její konstrukce využije.

d) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice, vysvětlit, že jde o množinu všech bodů v rovině, ze kterých shlížíme na danou úsečku pod pravým úhlem, a uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije.

e) Zvládl(a) bych kamarádovi ukázat, jak se dělá Thaletova kružnice pro danou úsečku, která je jejím průměrem, vysvětlit, že jde o speciální případ množiny všech bodů v rovině, ze kterých shlížíme na danou úsečku pod daným úhlem, uvést obecný typ příkladů, ve kterých se její konstrukce využije, uvést zvláštní případy využití Thaletovy kružnice a posoudit nejefektivnější metodu sestrojení Thaletovy kružnice nebo jejího využití.

Otázka 2: Pokud tě napadne nějaký přímý geometrický vztah mezi libovolnými dvěma pojmy z obrázku níže, spoj je čarou a tu výstižně pojmenuj zamýšleným vztahem. Nakonec uveď počet čar, které jsi udělal(a).



Uveď počet čar, které jsi udělal(a):_________

Otázka 3: Odpověz na níže uvedené otázky zadáním čísla úlohy.

a) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), ti připadala nejtěžší? Stručně vysvětli proč.
b) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), ti připadala nejlehčí? Stručně vysvětli proč.
c) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), se ti nejvíce líbila? Stručně vysvětli proč.
d) Která úloha z těch, které jsi řešil(a), se ti nejméně líbila? Stručně vysvětli proč.
e) Kolik úloh jsi zvládl(a) vyřešit?

Dotazník 4 – evaluační arch pro pedagogy

Otázka 1: Připomínkujte, prosím, jednotlivé úlohy. Každou z nich také oznámkujte (tradičně 1-5)*

Úvodní část sady úloh:

Úloha 1:

Úloha 2:

Úloha 3:

Úloha 4:

Úloha 5:

Úloha 6:

Úloha 7:

Úloha 8:

Závěrečná část sady úloh:

Otázka 2: Prosím, ohodnoťte celou sadu známkou (tradičně 1-5) dle následujících kritérií, a přidejte slovní komentář odůvodňující vybranou známku.*

Grafická zpracování:________

Časová náročnost:________

Vhodnost obsahu (úroveň odbornosti a náročnost):________

Srozumitelnost zadání (volba komunikace, návaznost úloh): ________

Srozumitelnost metodiky: ________

Celkové zhodnocení:________

Slovní zhodnocení:

Metodika pro implementaci sady gradovaných konstrukčních úloh do výuky

Vážená paní učitelko, vážený pane učiteli,

před sebou máte podpůrný materiál (metodiku) k zařazení sady gradovaných konstrukčních úloh do své výuky. Sada úloh je vytvořena v rámci diplomové práce. V rámci této metodiky Vám budou představeny základní informace o celé sadě, technické parametry sady a způsoby, jakými se sadou pracovat tak, aby plnila účel, pro který byla vytvořena. V závěru také naleznete stručný rozbor jednotlivých úloh a jejich modelové řešení vytvořené skrze webovou aplikaci GeoGebra.

Doufám, že jak tato metodika, tak samotná sada úloh budou pro Vaši výuku přínosem a naplní zamýšlené cíle.

Základní informace o sadě úloh

Sada gradovaných konstrukčních úloh je určena pro žáky středních škol, konkrétně pro žáky gymnázií, kteří se aktuálně vzdělávají v oblasti konstrukční geometrie (typicky v prvním až druhém ročníku čtyřletého oboru).

Sada obsahuje celkem 8 úloh, které na sebe vzájemně navazují a postupně gradují v obtížnosti. Žáci si během práce s úlohami připomenou řešení elementárních konstrukčních úloh ze základní školy, a to metodou množin bodů dané vlastnosti (dále m. b. d. v.). Pro navýšení možností diferenciace úloh obsahuje každá úloha *nápovědu* a *výzvu* (více viz dál).

Cílem sady úloh je zvýšit porozumění žáků v oblasti konstrukční geometrie, a to zejména skrze již zmíněnou gradaci. Na základě postupného zvyšování obtížnosti a postupného skládání více jednoduchých kroků dohromady, kterými žáci vytvoří v konečném důsledku poměrně komplexní rys, může u některých žáků dojít k prozření a uvědomění si, že každý komplexní úkol se skládá z konečného počtu základních kroků. Na základě toho pak lze předpokládat navýšení porozumění žáků v této oblasti.

Sada je vytvořena s předpokladem již existujících (základních) prekonceptů žáků o tématech konstrukční geometrie. Při procházení jednotlivými úlohami se žáci setkají nejprve s jednoduchými konstrukcemi, jako je sestrojení rovnostranného trojúhelníku, a postupně se propracují ke konstrukcím složitější, např. ke konstrukci deltoidu (více viz dále). I přesto, že se jednotlivé úlohy mohou zdát banální, jsou za sebou řazeny tak, aby žákům pomohly postupně o připomenout/ představit základní kroky a cíleně tak dovést žáky k aplikaci těchto jednoduchých konstrukcí. K aplikaci většiny kroků pak dochází v úloze 8 (viz dál).

Technické parametry sady

Jak již bylo zmíněno, sada je tvořena 8 na sebe navazujícími úlohami. Celkově jde o dokument o délce 12 stran, který lze ovšem tisknout bez problémů oboustranně – lze tedy počítat s 6 listy papíru na jednoho žáka. Sadu lze tisknout černobíle, doporučený formát je A4 (při tisku v jiných formátech může dojít k nepoměru zadání s očekávaným výsledkem).

Obsah sady

- Titulní stránku s názvem sady
- Uvítací slovo autora, včetně motivace žáků a cílů sady
- Základní technické informace a pokyny pro vyplňování (včetně výčtu pomůcek)
    - Mezi povolené pomůcky při plnění základní úrovně úlohy patří: jakákoliv pravítka, úhloměry, kružítko, psací potřeby
    - Mezi povolené pomůcky při plnění výzev patří: jedno pravítko bez rysky a kružítko (povolené pomůcky jsou v jednotlivých výzvách připomínány)
- Vlastní úlohy – každá strana s úlohou obsahuje její zadání, včetně příp. specifikace podmínek, dále nápovědu, výzvu/příp. výzvy a prostor pro rozbor (poznámky, náčrtek)
    - Výzvy a nápovědy jsou v zadání úloh označeny ikonami:

ikona 1

ikona 2

ikona 1 označuje **nápovědu** – může žákům pomoci v řešení úlohy (typicky se jedná o větu nebo souvětí, které žáky navede na správnou cestu nebo jim připomene to, co už vědí) *ikona 2* označuje **výzvu** – nabídne žákům příležitost otestovat své dovednosti s omezeným množstvím pomůcek (typicky pouze s jedním pravítkem bez rysky a s kružítkem)

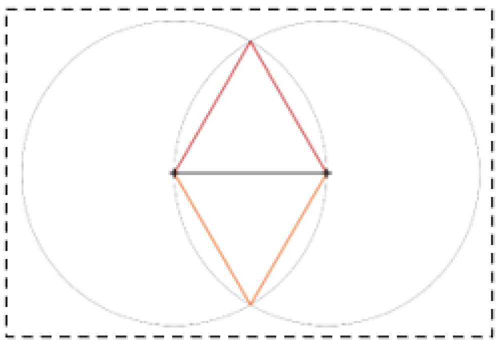
Příklad užití ikon v sadě úloh:

Zamysli se nad vztahem středového úhlu a obvodového úhlu, které přísluší stejnému oblouku.

Sestroj alespoň tři různé trojúhelníky, které vyhovují zadání.

- Ukázka řešení a zpětná vazba na konci sady
  - Ukázka řešení jednotlivých úloh – žáci se mohou seznámit se správnými řešeními jednotlivých úloh a porovnat s nimi svá řešení – na základě toho mohou svou práci reflektovat
  - Pod každým modelovým řešením je umístěna hodnotící škála (viz obrázek), na které mohou žáci označit, jak daleko se v úloze dostali.

Úloha 1



  - V závěru sady jsou pak umístěny návodné otázky, které mají žákům pomoci v uvědomění si vlastního postupu a příp. i posunu v tématu konstrukčních úloh.

Časová náročnost a vyhodnocení úloh

Na základě zjištění učiněných při praktickém ověřování sady úloh ve výuce lze předpokládat, že práce s touto sadou by žákům neměla trvat déle než 1 vyučovací hodinu (tj. 1x45 minut). Průměrná doba řešení byla zjištěna na 25 minut. Dalších 15 minut je vhodné třeba k společnému prodiskutování postupů a věnování se problematickým místům. V souladu se zachováním dostatečného prostoru pro strukturování hodiny, uvedení úlohy a její následné zhodnocení, je doporučeno věnovat práci se sadou úloh alespoň 2 standardní vyučovací hodiny.

Vyučující, který začlení zmíněnou sadu úloh do své výuky, by měl při vyhodnocování hodiny dbát na identifikaci kritických míst a společně s žáky tato kritická místa následně analyzovat. Vhodné je dbát nejen na vyhodnocení samotných výsledků úloh, ale i na vyhodnocení postupu a posunu každého z žáků.

K vyhodnocování správného vyřešení úloh je možno využít náhledy řešení umístěné na konci žákovské sady úloh, nebo modelová řešení umístěná dále v této metodice.

Analýza jednotlivých úloh

Na následujících řádcích je stručně analyzována každé z osmi úloh tvořících sadu. Analýza každé úlohy se skládá ze 4 částí:

- Zadání – co se od žáků očekává
- Znalosti a dovednosti – to, co žáci potřebují znát/zvládnout, aby si s úlohou poradili
- Cíl úlohy – co je cílem úlohy/ k čemu žákům poslouží
- Modelové řešení – modelové řešení každé úlohy vytvořené webovou aplikací GeoGebra[6]

Úloha 1

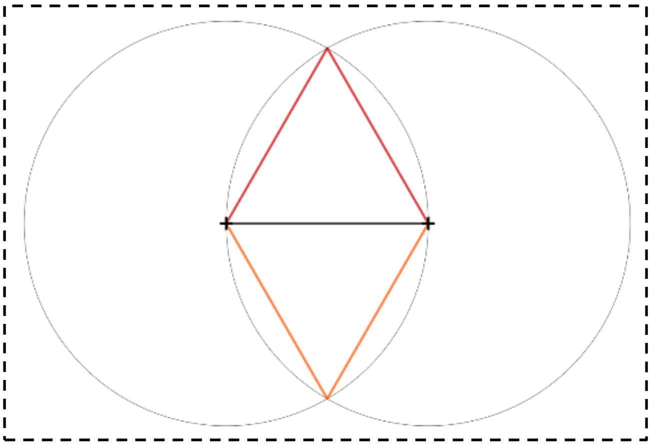
Zadání: Máš zadanou úsečku. Sestroj rovnostranný trojúhelník tak, aby zadaná úsečka byla jeho stranou.

[6] Dostupná např. z: https://www.geogebra.org/

Znalosti a dovednosti: žáci potřebují vědět, že kružnice je množinou všech bodů, které jsou stejně daleko od daného bodu a dále pak, že rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé

Cíl úlohy: cílem je dovést žáky k uvědomění si, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180° a k tomu, že v rovnostranném trojúhelníku mají všechny úhly stejnou velikost, tedy že při každém vrcholu je úhel 60°

Modelové řešení:



Obrázek 74 - řešení úlohy 1

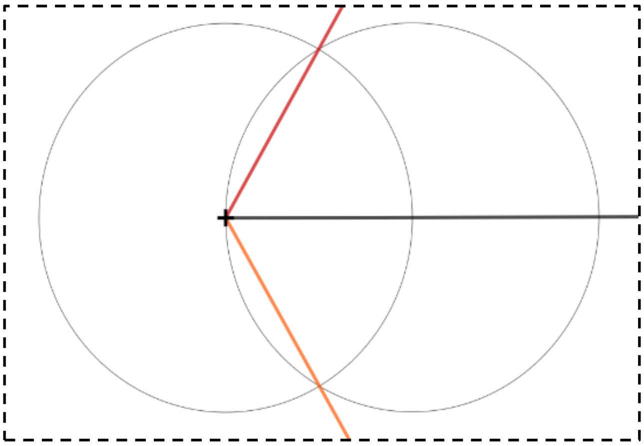
Úloha 2

Zadání: Máš zadanou polopřímku (počáteční rameno úhlu) a její počátek (vrchol úhlu). Sestroj polopřímku (koncové rameno úhlu) tak, aby velikost úhlu, který obě polopřímky svírají, byla 60 °.

Znalosti a dovednosti: znalosti potřebné pro zvládnutí této úlohy vyplývají z cíle úlohy předchozí – pokud žáci naplní cíl úlohy 1, pak získají znalosti potřebné ke splnění úlohy 2

Cíl úlohy: cílem této úlohy je umožnit žákům bezprostředně aplikovat znalost nabytou v předchozí úloze do tvorby úhlu 60°

Modelové řešení:



Obrázek 75 - řešení úlohy 2

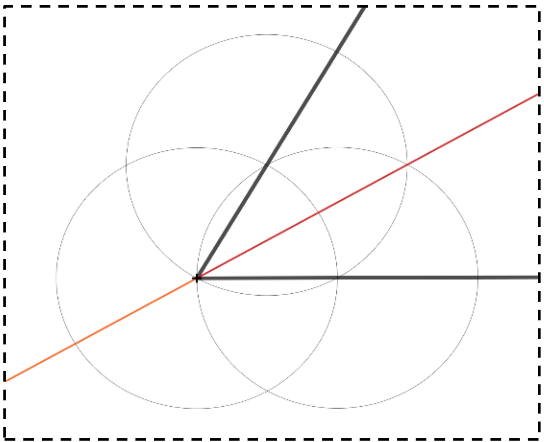
Úloha 3

Zadání: Máš zadané dvě polopřímky se společným počátkem tvořící úhel. Zmenši zadaný úhel na poloviční velikost.

Znalosti a dovednosti: žáci musí umět vytvořit úhel 60° (zde úloha navazuje na úlohu 1) a následně si musí být vědomi toho, jak vytvořit ze zadaného polovinu, tj. musí si být vědomi toho, že vytvořit 2 poloviny znamená vytvořit 2 souměrné části jednoho celku

Cíl úlohy: cílem je poskytnout žákům připomenutí si procesu půlení (např. skrze osu úhlu)

Modelové řešení:



Obrázek 76 - řešení úlohy 3

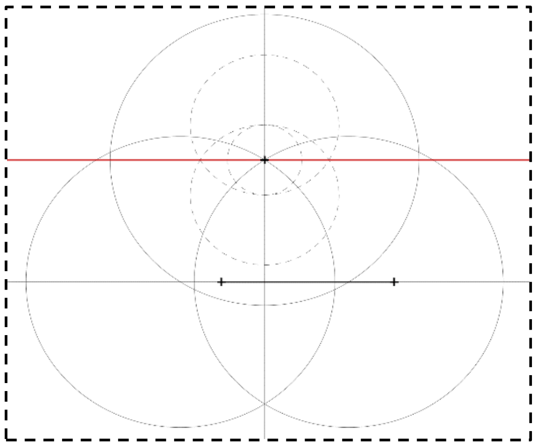
Úloha 4

Zadání: Máš zadanou úsečku a bod, který na ní neleží. Sestroj přímku rovnoběžnou se zadanou úsečkou tak, aby procházela zadaným bodem.

Znalosti a dovednosti: žáci si v této úloze musí vybavit vztah, že kolmice na kolmici k dané přímce je současně rovnoběžkou této dané přímky

Cíl úlohy: cílem je dovést žáky k uvědomění toho, že rovnoběžka je množinou všech bodů, které jsou od dané přímky stejně daleko

Modelové řešení**:**



Obrázek 77 - řešení úlohy 4

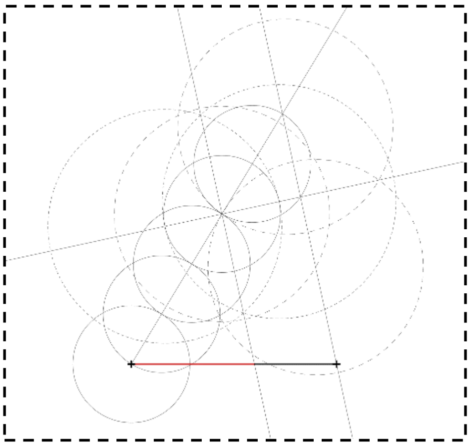
Úloha 5

Zadání: Máš zadanou úsečku takovou, že její délka je 5 jednotek. Sestroj úsečku, která bude mít délku 3 jednotky.

Znalosti a dovednosti: pro zpracování této úlohy si musí žáci oživit principy podobnosti trojúhelníků

Cíl úlohy: cílem je umožnit žákům tvorbu určitého dílu z dané délky

Modelové řešení:



Obrázek 78 - řešení úlohy 5

Úloha 6

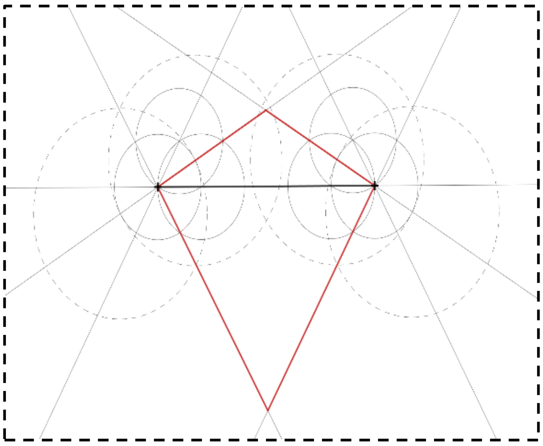
Zadání: Máš zadanou úsečku. Sestroj deltoid tak, aby platilo:

a) zadaná úsečka je jeho úhlopříčkou;
b) úhly při protilehlých vrcholech (krajních bodech zadané úsečky) jsou pravé;
c) protažením zadané úsečky vzniká přímka rozdělující rovinu na dvě poloroviny a v jedné z nich je z výše uvedeného pravého úhlu 30 °.

Znalosti a dovednosti: v této úloze je potřeba si vzpomenout, že deltoid je osově souměrný dle jedné úhlopříčky a dále pak je nutné si vzpomenout na velikosti vnitřních úhlů v deltoidu

Cíl úlohy: cílem této úlohy je připomenutí si všech potřebných znalostí o deltoidu

Modelové řešení:



Obrázek 79 - řešení úlohy 6

Úloha 7

Zadání: Máš zadanou kružnici a rovnoramenný trojúhelník takový,

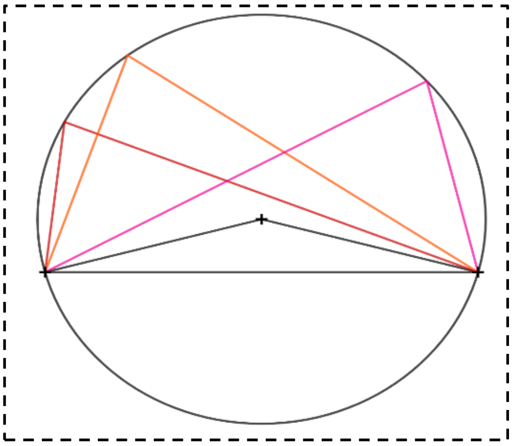
že jeho základna je její tětivou, jeho ramena svírají úhel 150 ° a jeho vrchol protilehlý základně je jejím středem. Sestroj trojúhelník tak, aby platilo že:

a) oba trojúhelníky sdílí základnu;
b) všechny vrcholy sestrojeného trojúhelníku leží na zadané kružnici;
c) vnitřní úhel při vrcholu protilehlému základně má velikost 75 °

Znalosti a dovednosti: zde je nezbytné znát větu o středovém a obvodovém úhlu nad daným obloukem

Cíl úlohy: žáci si v této úloze vyzkouší zkonstruovat množinu všech bodů, které shlíží na danou úsečku pod daným úhlem

Modelové řešení**:**



Obrázek 80 - řešení úlohy 7

Úloha 8

Zadání: Máš zadanou úsečku, která má délku 5 jednotek. Sestroj takový trojúhelník, aby platilo:

a) zadaná úsečka je jeho stranou;
b) úhel naproti zadané straně bude mít velikost 60°;
c) výška na zadanou stranu bude mít 3 jednotky.

Znalosti a dovednosti: znalosti a dovednosti k vyřešení úlohy 8 jsou souborem připomenutých znalostí z předchozích úloh, konkrétní návaznost úloh s cílem dovést žáky k řešení úlohy číslo 8 je následující:

splnění *úlohy 1* napomůže k vyřešení *úlohy 2* → splnění *úlohy 2* napomůže k vyřešení *úlohy 3* → splnění *úlohy 3* napomůže k vyřešení *úlohy 6*

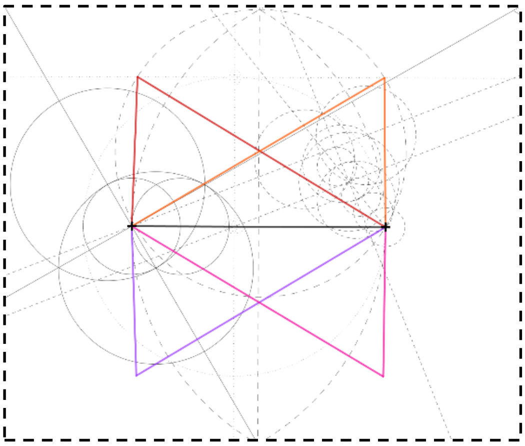
splnění *úlohy 4* napomůže k vyřešení *úlohy 5*

úloha 7 stojí samostatně

splnění *úloh 6, 5* a *7* napomůže k vyřešení *úlohy 8*

<u>Cíl úlohy</u>: cílem poslední úlohy je ukázat žákům, že složitá úloha není ničím jiným než skládáním konečného počtu jednodušších kroků

<u>Modelové řešení</u>**:**



Obrázek 81 - řešení úlohy 8

Slovo na závěr

Vážená paní učitelko, vážený pane učiteli,

došli jste na závěr této metodiky. Doufám, že pro Vás byla přínosem a pomůže Vám vhodně implementovat tyto úlohy do Vaší výuky a tím zvýšit porozumění Vašich žáků tajům konstrukční geometrie.

Přeji Vám bezproblémovou práci a jsem s pozdravem.

Bc. Tomáš Šplíchal

Planimetrické konstrukční úlohy

Příloha 7 – Sada gradovaných konstrukčních úloh

Milá žákyně, milý žáku,

před sebou máš sadu 8 planimetrických konstrukčních úloh.

Umění řešit geometrické konstrukční problémy v rovině je staré tisíce let – stálo při vzniku prvních civilizací a jejich největších úspěchů. Nejenže ti úspěšně vyřešená úloha poskytne pocit uspokojení, navíc tě může hřát u srdce vědomí, že řešení geometrických úloh bylo po celá staletí považováno za projev vzdělanosti a moudrosti.

Tvým cílem by nemělo být vyřešení všech úloh za každou cenu, ale snaha dostat se při řešení těchto úloh co nejdál poctivě a s využitím svých vlastních znalostí, nápadů a schopností. Smyslem těchto úloh je pomoci ti uspořádat a vyjasnit si vědomosti o vztazích mezi geometrickými pojmy, uvědomit si jejich význam a možnosti aplikace, a nakonec posoudit efektivitu vlastní práce. Jednoduše, zlepšit tvé porozumění.

Úlohy řeš postupně, protože některé jsou připraveny tak, aby jejich řešení sloužilo jako nápověda pro následující úlohu. K řešení ti budou stačit znalosti ze základní školy a rýsovací potřeby (tužka, pravítka a kružítko). Prostor pro řešení úlohy je sice ohraničený, ale vůbec nevadí, když při rýsování přesáhneš mimo ohraničenou část. Volný prostor pod zadáním použij na rozbor úlohy (náčrtek a poznámky).

Na konci této sady máš prostor pro vlastní zhodnocení své práce.

V úlohách se setkáš i s následujícími ikonami:

 *ikona 1* označuje **nápovědu** – může ti pomoci ve splnění úlohy

ikona 1

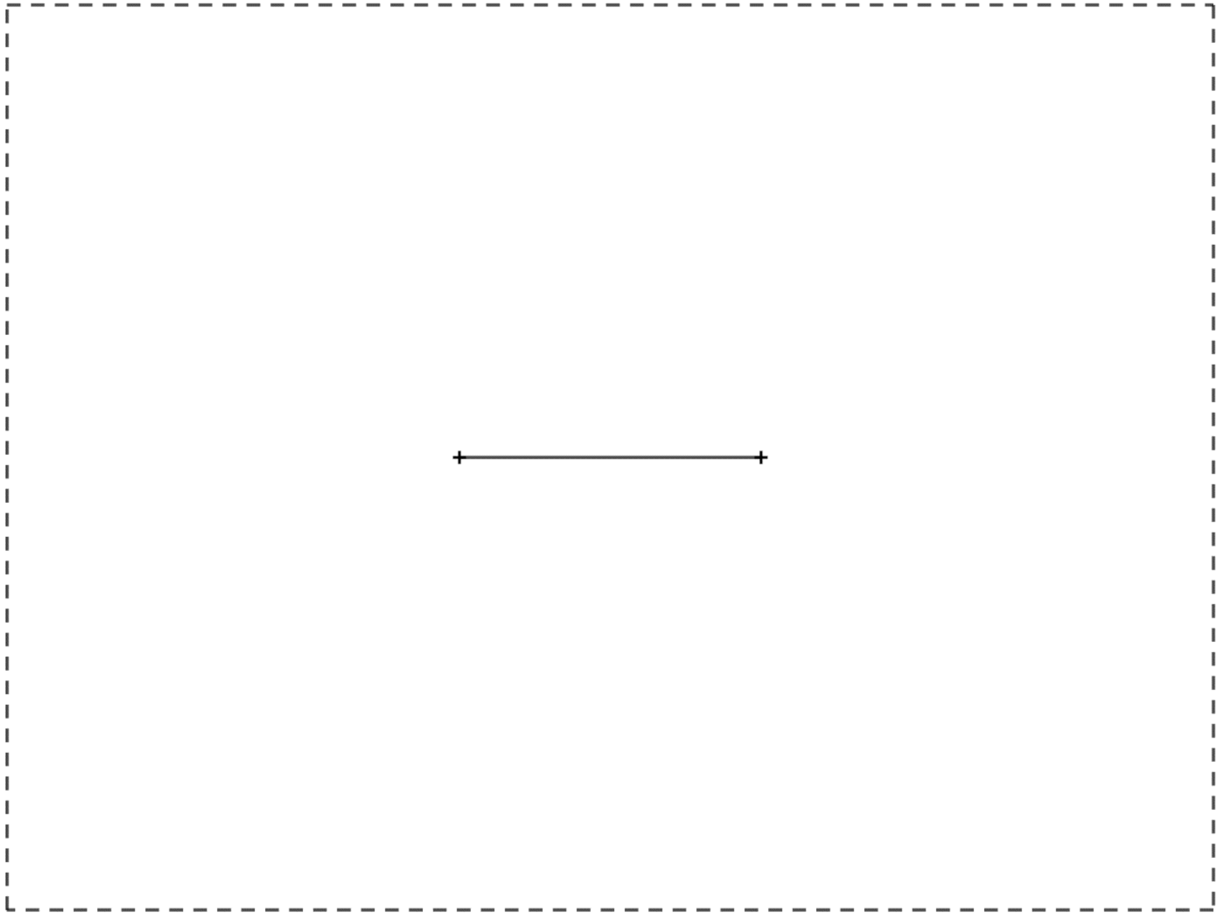
 *ikona 2* označuje **výzvu** – nabídne ti příležitost hlouběji o úlohách přemýšlet

ikona 2

1. Úloha: Máš zadanou úsečku. Sestroj rovnostranný trojúhelník tak, aby zadaná úsečka byla jeho stranou.

Zamysli se nad délkami stran rovnostranného trojúhelníka a množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu.

Sestroj všechna řešení, která odpovídají zadání.



Prostor pro rozbor:

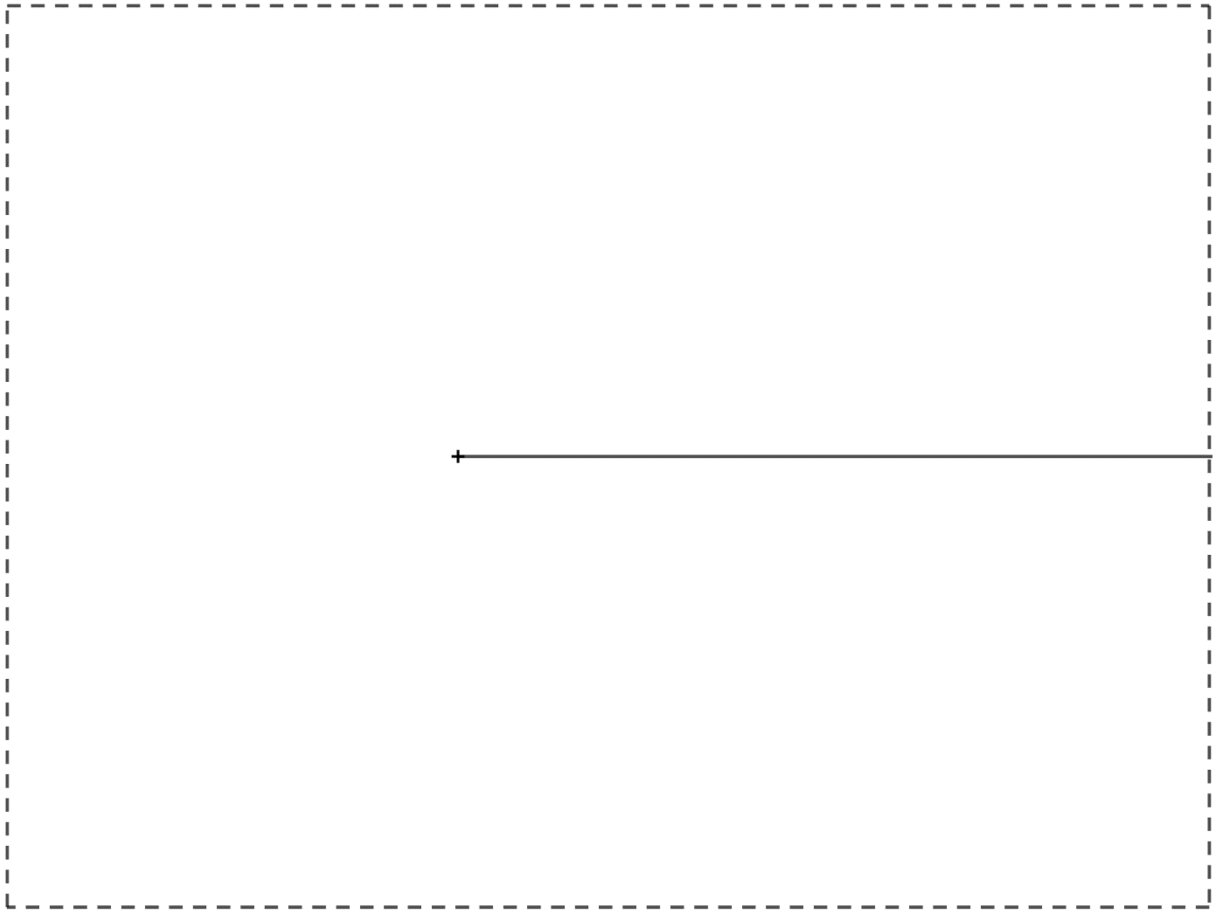
2. Úloha: Máš zadanou polopřímku a její počátek. Sestroj polopřímku z téhož počátku tak, aby velikost úhlu, který obě polopřímky svírají, byla 60 °.

Zamysli se nad velikostí vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku.

[1]Smíš použít pouze 1 pravítko bez rysky a kružítko.

[2]Sestroj všechna řešení, která odpovídají zadání.

Prostor pro rozbor:

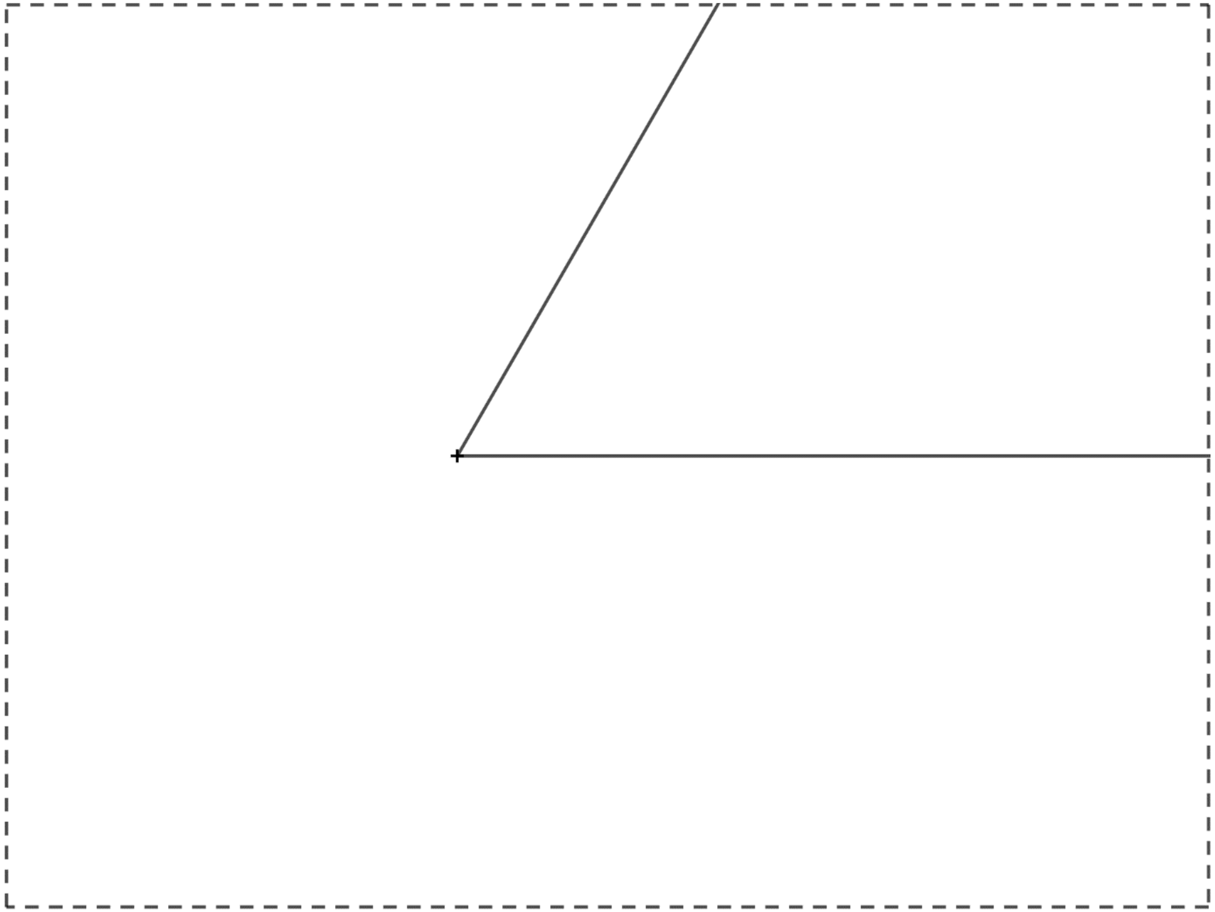


3. Úloha: Máš zadané dvě polopřímky se společným počátkem bodem tvořící úhel. Zmenši zadaný úhel na poloviční velikost.

Jestliže máš za úkol něco rozpůlit, obvykle se po tobě chce rozdělit to na dvě shodné části. Dva shodné útvary zrcadlí například osa souměrnosti.

[1]*Smíš použít pouze 1 pravítko bez rysky a kružítko.*

[2]*Sestroj všechna řešení, která odpovídají zadání.*



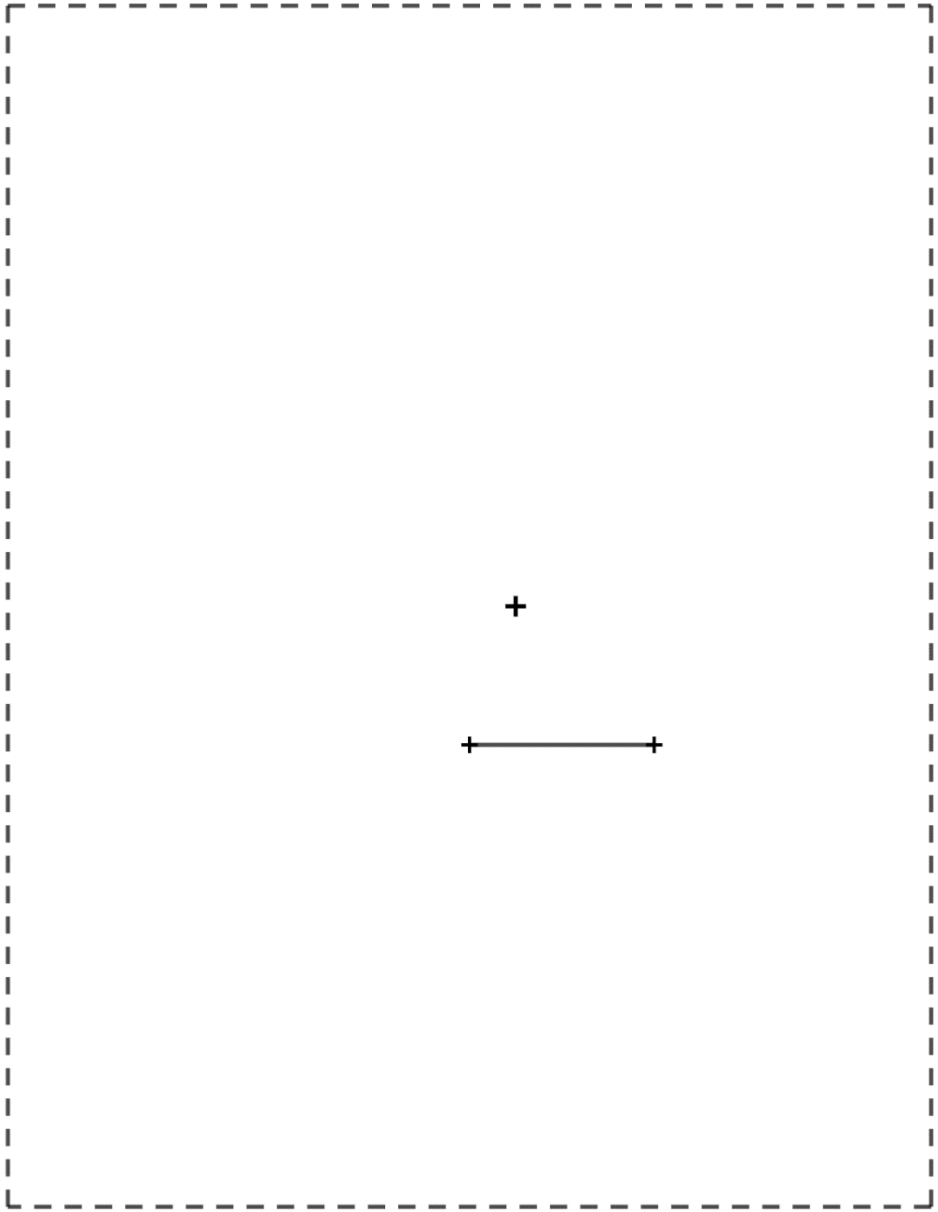
Prostor pro rozbor:

4. Úloha: Máš zadanou úsečku a bod, který na ní neleží. Sestroj přímku rovnoběžnou se zadanou úsečkou tak, aby procházela zadaným bodem.

Představ si tři přímky a zamysli se nad vzájemnou polohou prvních dvou přímek, pokud jsou obě kolmé na přímku třetí.

Smíš použít pouze 1 pravítko bez rysky a kružítko.

Prostor pro rozbor:

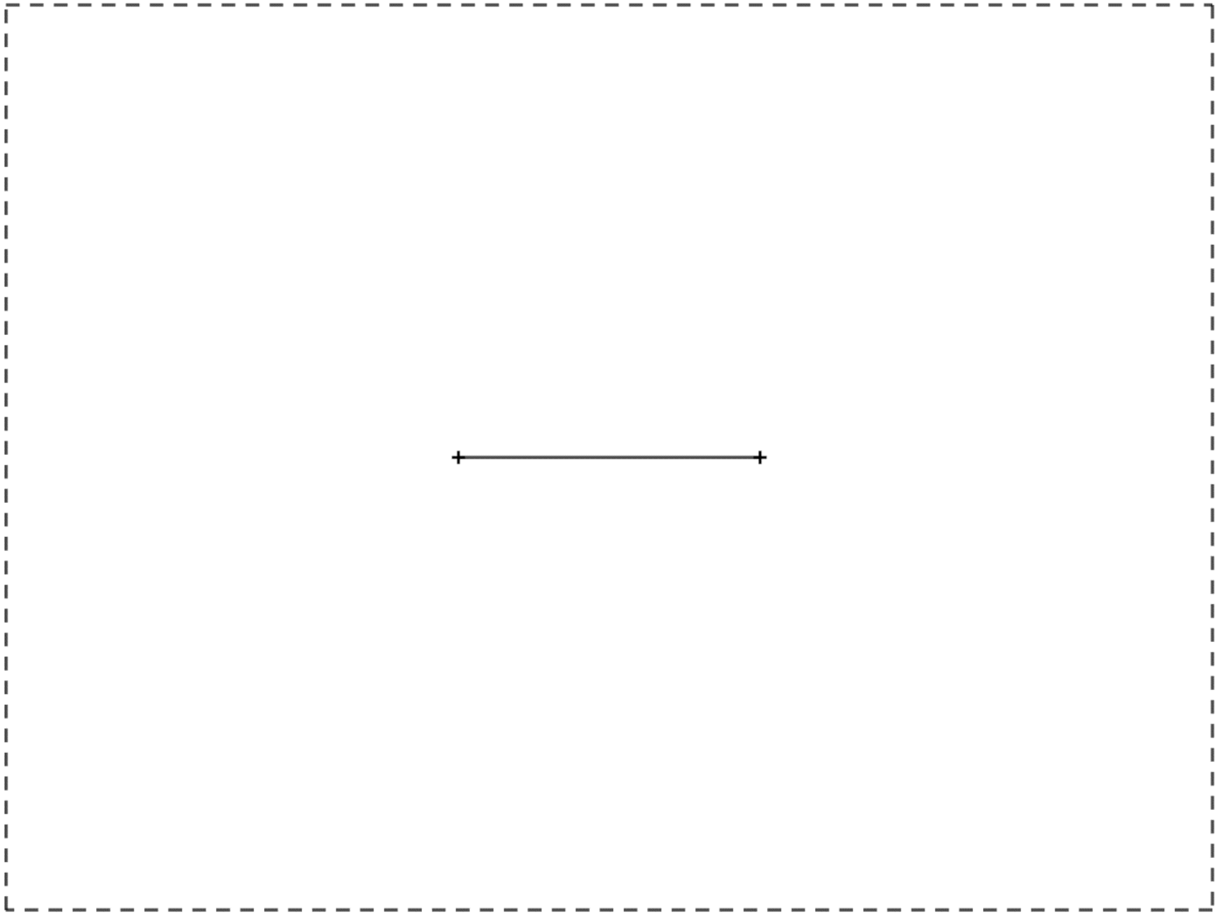


5. Úloha: Máš zadanou úsečku takovou, že její délka je 5 jednotek. Sestroj úsečku, která bude mít délku 3 jednotky.

Využij podobnost trojúhelníků.

Smíš použít pouze 1 pravítko bez rysky a kružítko. Navíc pomocí pravítka nesmíš zadanou úsečku měřit.

Prostor pro rozbor:



6. Úloha: Máš zadanou úsečku. Sestroj deltoid tak, aby platilo:

a) zadaná úsečka je jeho úhlopříčkou;

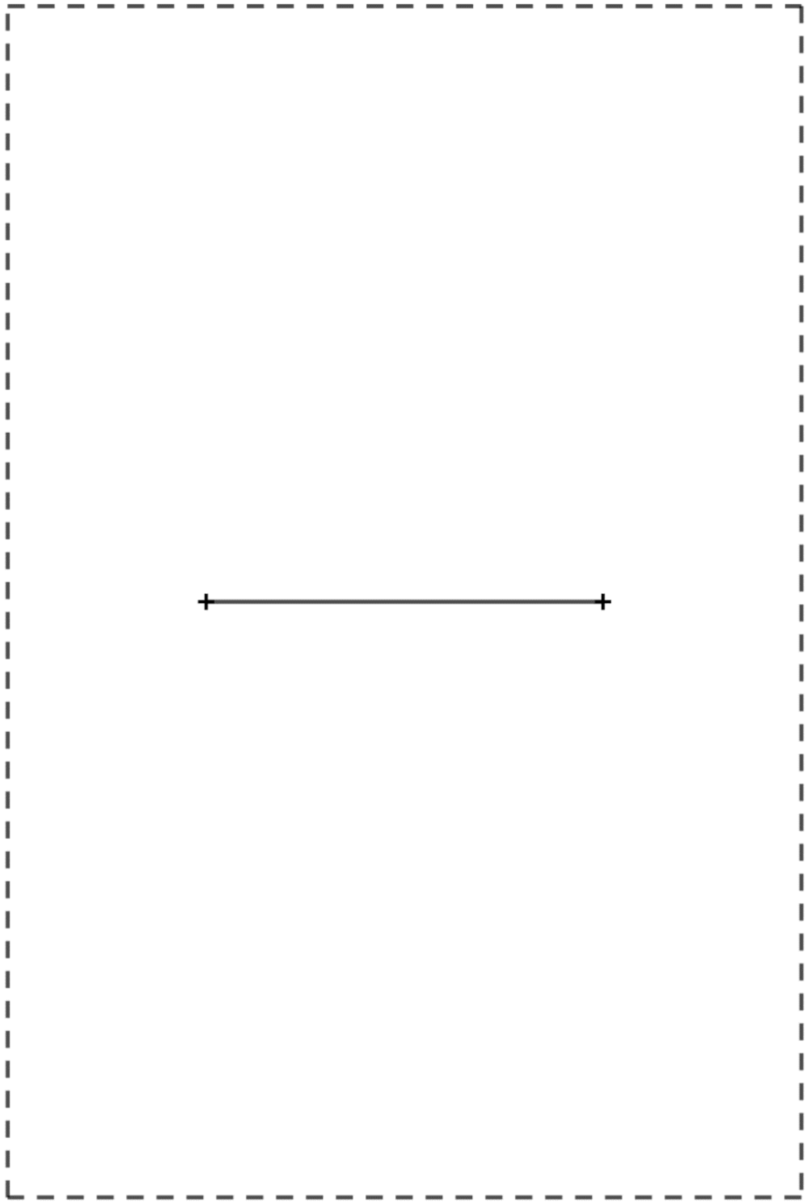
b) úhly při protilehlých vrcholech (krajních bodech zadané úsečky) jsou pravé;

c) protažením zadané úsečky vzniká přímka rozdělující rovinu na dvě poloroviny a v jedné z nich je z výše uvedeného pravého úhlu 30 °.

Zamysli se nad vlastnostmi úhlopříček deltoidu.

Smíš použít pouze 1 pravítko bez rysky a kružítko.

Prostor pro rozbor:

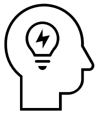


7. Úloha: Máš zadanou kružnici a rovnoramenný trojúhelník takový, že jeho základna je její tětivou, jeho ramena svírají úhel 150 ° a jeho vrchol protilehlý základně je jejím středem. Sestroj trojúhelník tak, aby platilo že:

a) oba trojúhelníky sdílí základnu;

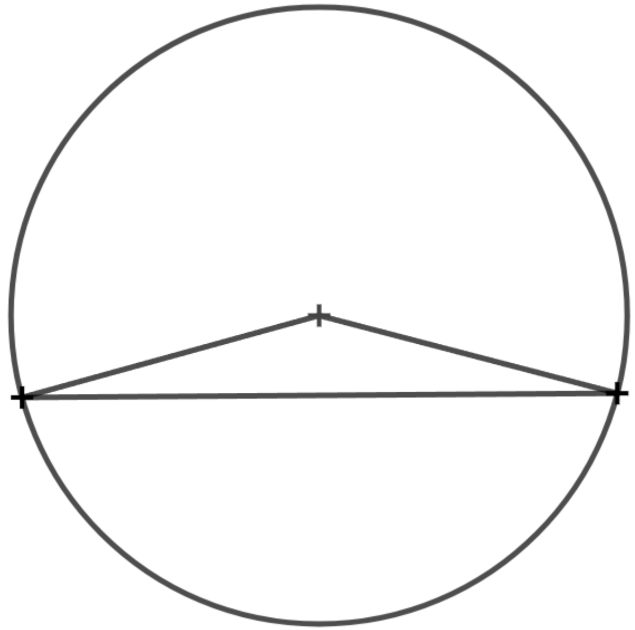
b) všechny vrcholy sestrojeného trojúhelníku leží na zadané kružnici;

c) vnitřní úhel při vrcholu protilehlému základně má velikost 75 °.



Zamysli se nad vztahem středového úhlu a obvodového úhlu, které přísluší stejnému oblouku.

Sestroj alespoň tři různé trojúhelníky, které vyhovují zadání.



Prostor pro rozbor:

8. Úloha: Máš zadanou úsečku, která má délku 5 jednotek.

Sestroj takový trojúhelník, aby platilo:

a) zadaná úsečka je jeho stranou;

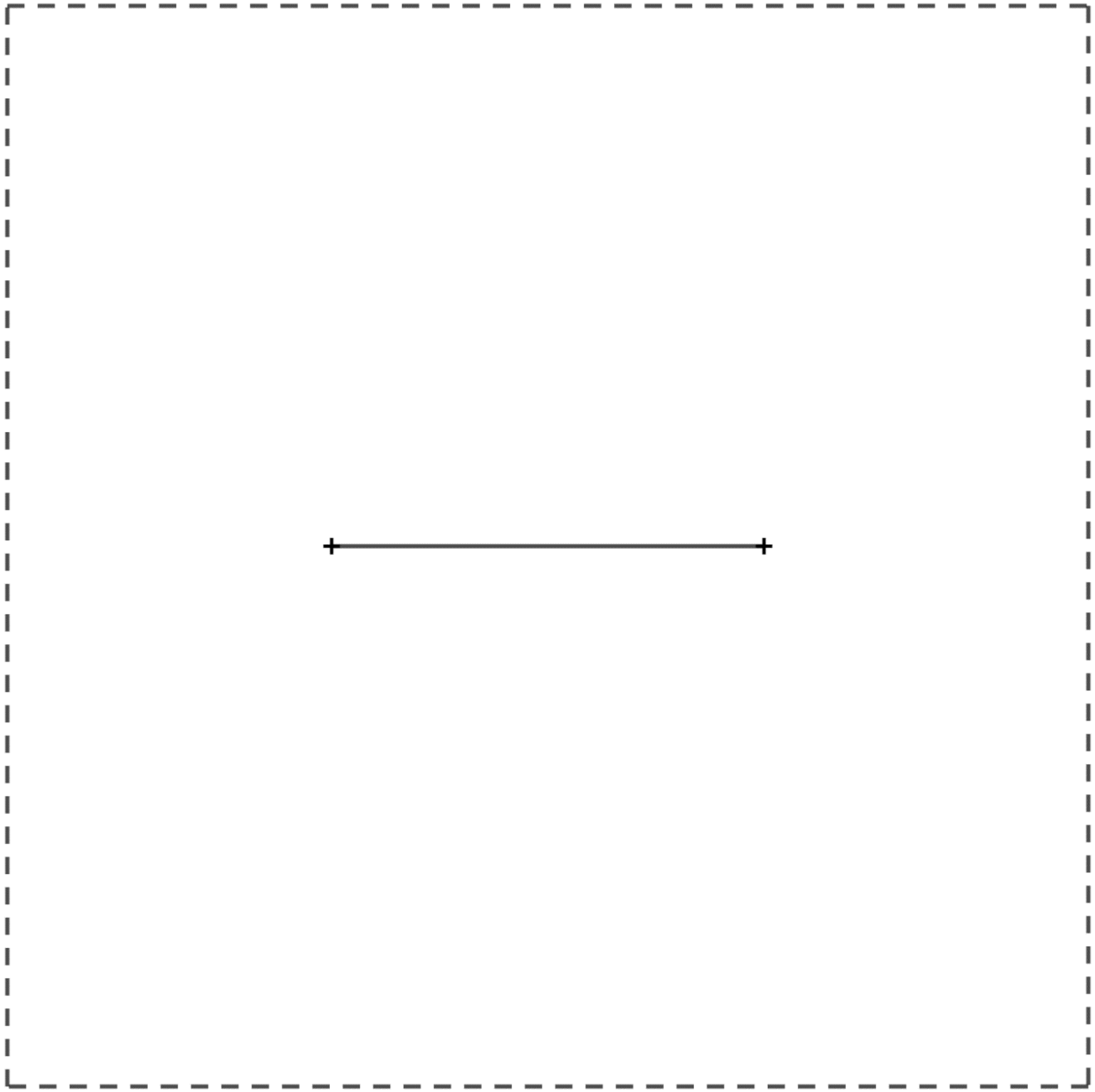
b) úhel naproti zadané straně bude mít velikost 60°;

c) výška na zadanou stranu bude mít 3 jednotky.

[1]Sestroj všechny trojúhelníky, které vyhovují zadání.

[2]Smíš použít pouze 1 pravítko bez rysky a kružítko. Navíc pomocí pravítka nesmíš zadanou úsečku měřit.

Prostor pro rozbor:



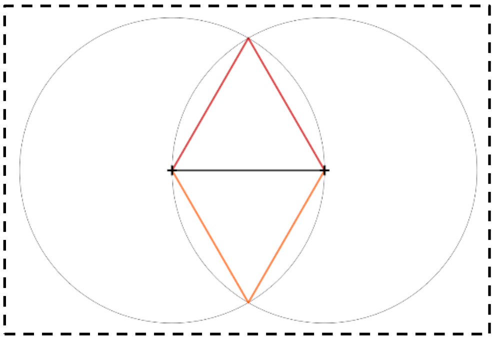
Příloha 7 – Sada gradovaných konstrukčních úloh

Na následujících obrázcích můžeš vidět, jak mohou vypadat správná řešení. Podívej se na ně a u každé z úloh zhodnoť, jak sis s nimi poradil(a). Ke zhodnocení použij „mozkovou škálu“ – podle obtížnosti vybarvi daný počet mozků.

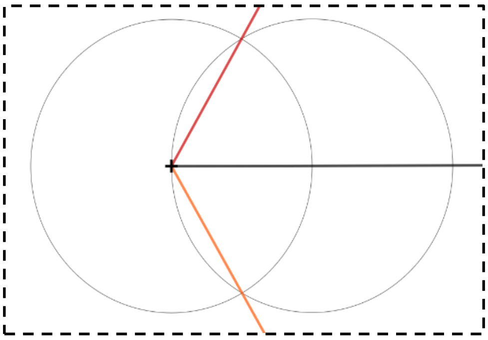
1 mozek = úlohu jsem nevyřešil(a); 2 mozky = úlohu jsem vyřešil(a) částečně;
3 mozky = úlohu jsem vyřešil(a) s nápovědou; 4 mozky = úlohu jsem vyřešil(a) bez nápovědy;
5 mozků = úlohu jsem vyřešil(a) i s výzvou (výzvami)

Níže, prosím, ohodnoť jednotlivé úlohy podle toho, jak náročné pro tebe byly.

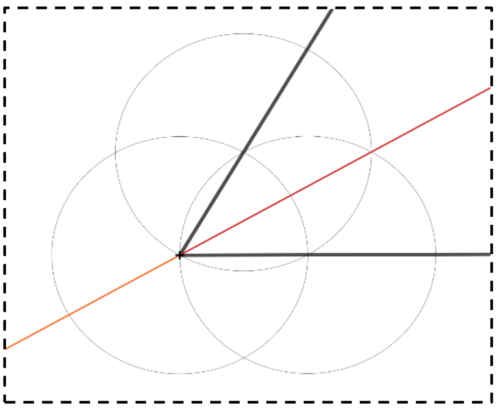
Úloha 1



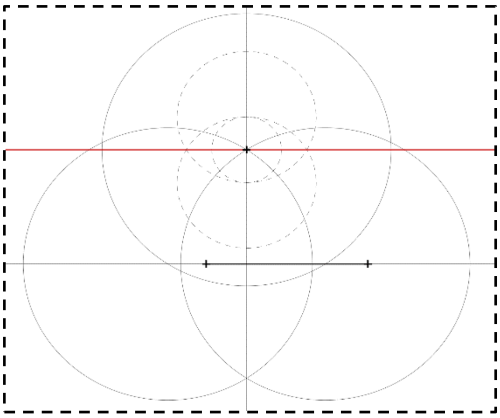
Úloha 2



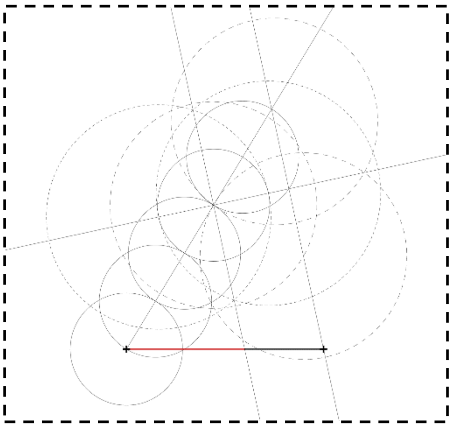
Úloha 3



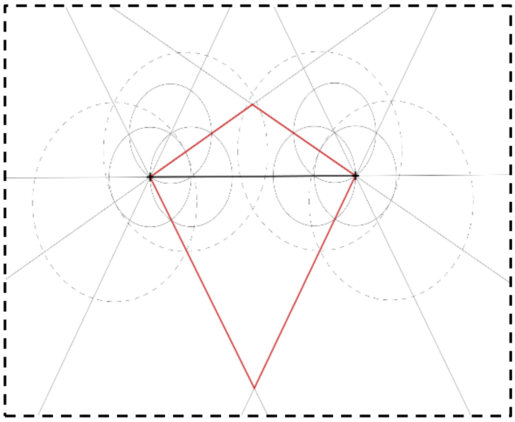
Úloha 4



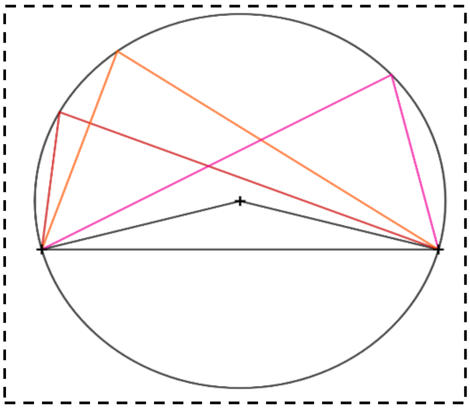
Úloha 5



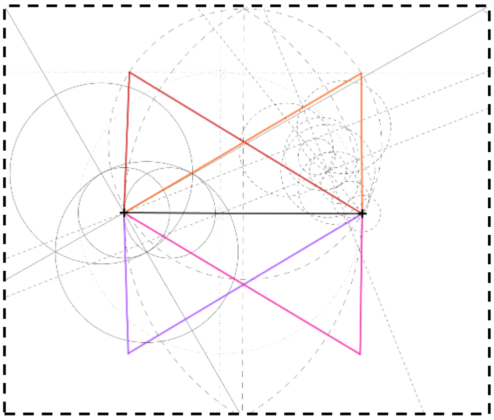
Úloha 6



Úloha 7



Úloha 8



Níže uvedené otázky ti pomohou uvědomit si, co nového ses naučil(a):

1. Jaké pojmy pro tebe byly nové a co reprezentují?

2. Mezi kterými dvěma pojmy si odhalil(a) překvapivou souvislost a jakou?

3. Jak bys svou práci příště zefektivnil(a)?

4. Pochlub se. Jakou myšlenku jsi vymyslel(a) úplně sám (sama)?