Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vztah mezi definováním a kategorizací na příkladu neklesající posloupnosti

Relationship between defining and classifying in case of increasing sequence

Klára Čechová

Vedoucí práce: Mgr. David Janda, PhDr.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2024

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Vztah mezi definováním a kategorizací na příkladu neklesající posloupnosti potvrzuji, že jsem ji vypracoval/a pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Písku dne 10.7.2024

Tímto bych ráda vyjádřila vděčnost Mgr. Davidu Jandovi, PhDr., za všechny konzultace, jeho cenné rady, trpělivost, odborné vedení a velkou podporu po celou dobu zpracování mé bakalářské práce.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na zkoumání vztahu mezi definováním a kategorizací matematických pojmů na příkladu neklesající posloupnosti. Práce zkoumá, jak dvě různé metody definování ovlivňují schopnost studentů správně kategorizovat matematické objekty a zda je možné prostřednictvím aktivního zapojení do procesu definování zlepšit jejich matematické chápání a analytické dovednosti. V teoretické části je představena literatura týkající se kategorizace v psychologii a didaktice matematiky, stejně jako analýza interakce mezi definováním, vysvětlováním a kategorizací, čemuž se věnovala studie popsaná v článku od Alcockové a Simpsona (2016). Praktická část práce obsahuje kvalitativní výzkum, ve kterém byl proveden experiment s účastí studentů, kteří byli rozděleni do skupin na základě dvou přístupů k definování. Výsledky ukazují, že studenti, kteří sami formulovali definice, nedosahovali výrazně lepších výsledků v kategorizaci než ti, kteří pracovali s předem danými definicemi. Zjistili jsme ale, že studenti si vlastními definicemi nebyli jistí, a tedy nepracovali s nimi na takové úrovni, jako ti, kteří ji dostali správně naformulovanou. Závěry práce nabízejí implikace do výuky matematiky, přínos pro pedagogickou praxi a možné návaznosti studie.

KLÍČOVÁ SLOVA

neklesající posloupnost, definice, kategorizace, kategorie

ABSTRACT

This bachelor thesis focuses on investigating the relationship between defining and classifying mathematical concepts in case of increasing sequences. The thesis examines how two different methods of defining affect students' ability to correctly classify mathematical objects and whether active participation in the defining process can improve their mathematical understanding and analytical skills. The theoretical background presents literature related to classification in psychology and mathematics didactics, as well as an analysis of the interaction between defining, explaining, and classifying, which was the focus of the study described in the article by Alcock and Simpson (2016). The practical part of the thesis includes qualitative research in which an experiment was conducted with students who were divided into groups based on two approaches to defining. The results show that students who formulated their own definitions did not achieve significantly better results in classification of sequences than those who worked with predefined definitions. However, we found that students were unsure of their own definitions, and therefore did not work with them at the same level as those who received a correctly formulated definition. The conclusions of the thesis offer implications for mathematics education, benefits for educational practice, and possible follow-up studies.

KEYWORDS

increasing sequence, definition, classifying, category

Obsah

Úvod

Definice matematických pojmů představují základní stavební kameny matematického myšlení. Poskytují studentům jasné a pevné vymezení klíčových konceptů, čímž jim usnadňují pochopení a užívání matematiky. V tomto smyslu hrají definice klíčovou roli v budování matematické gramotnosti a rozvoji logického myšlení. Většina pojmů z běžného života ovšem tímto způsobem definována není a proto mohou rozdíly mezi matematickými pojmy a pojmy z běžného života působit značné problémy.

Tato bakalářská práce se ve své teoretické části zaměřuje na proces kategorizace v matematice a každodenním životě. Věnuje se jeho důležitosti pro interpretaci světa pomocí matematických definic a prototypů a popisuje, jak se s ním setkáváme v didaktice matematiky. V rámci tohoto tématu se práce věnuje popisu odborného článku od Alcockové a Simpsona (2016), je popsán jeho průběh a cíl, výzkumný vzorek a jeho zjištění. Také je vysvětlena souvislost článku s touto prací. Pozornost je věnována i analýze konceptu rostoucí/klesající a neklesající/nerostoucí posloupnosti pomocí české literatury, protože v citovaném článku hraje důležitou roli. Je vysvětleno, jak byl pojem použit v původním článku a jak s ním pracujeme my.

V praktické části práce je popsán kvalitativní experiment provedený na základě polostrukturovaných rozhovorů. Je zde popsán výzkumný cíl, metodologie a realizace experimentu. V analýze se věnujeme každému respondentovi zvlášť a následně jsou jejich výsledky shrnuty v diskuzi, kde se vyjadřujeme k očekáváním, které jsme před začátkem experimentu formulovali. Popisujeme další zajímavá pozorování, která z analýzy vyplývají, a zabýváme se možnými důsledky, které bychom z experimentu mohli vyvodit. Také se věnujeme implikacím do výuky matematiky a přínosům do praxe učitele. Zabýváme se i možnými omezeními provedeného experimentu a navrhujeme směry pro další studie.

1 Teoretická část

1.1 Kategorizace v didaktice matematiky

Ve výuce matematiky se běžně setkáváme s úlohami, kde máme rozhodnout, zda daný objekt splňuje definici určitého pojmu. Může se jednat o geometrické útvary (např. zda je trojúhelník rovnostranný), funkce (např. zda je funkce rostoucí) i čísla (např. zda je číslo prvočíslo). Tato činnost, v psychologii nazývaná kategorizace, je důležitým kognitivním procesem, který hraje podstatnou roli nejen v našem porozumění matematice, ale i chápání a interakci se světem kolem nás (Sfard, 2000).

Lakoff (1987) upozorňuje, že kategorizace je základním principem lidského poznání. V běžném životě se s ní setkáváme neustále. Například když se rozhlédneme po pokoji, vidíme nábytek, oblečení, elektroniku a další předměty. Tyto předměty kategorizujeme na základě sdílených vlastností a funkcí, i když neexistuje striktní definice pro každý z nich.

Kategorie nám pomáhají organizovat naše myšlení a vnímat svět smysluplným způsobem. Je ale otázkou, jak přesně jsou kategorie v naší mysli reprezentovány. Roschová (1975) představila pojem prototyp – nejtypičtější příklad dané kategorie – a ukázala, že hraje v procesu kategorizace důležitou roli. Pomáhají nám kategorizovat nové objekty v rámci kategorií prostřednictvím porovnání právě s prototypy. Například když se řekne "nábytek", nevybaví se nám striktní definice, ale spíše prototypické příklady, jako je židle, stůl, postel atd. Tyto prototypy nám slouží jako mentální reprezentace kategorie a s jejich pomocí se také rozhodujeme, zda daný objekt do kategorie nábytku spadá (Rosch, 1975).

V matematice se studenti setkávají s definicemi matematických konceptů, které jim slouží jako vodítko pro kategorizaci objektů. Nicméně, v praxi se studenti často spoléhají i na prototypy matematických konceptů, které si uchovávají v paměti a které jim pomáhají v rozhodování o tom, zda daný objekt splňuje definici (Lakoff, 1987).

Lze tedy konstatovat, že má smysl se zabývat kategorizací matematických objektů ve výuce matematiky, protože podle toho, jak lidé kategorizují objekty, můžeme poznat, jak chápou a pracují s definicemi. Výzkum Alcockové a Simpsona (2002, 2017) a dalších představují důležité výsledky v rámci zkoumání tohoto tématu. Zjištění těchto výzkumů ukazují, že rozdíly v kategorizačních strategiích mohou mít dopad na poznávací procesy studentů v matematice a jsou natolik zajímavé, že jsme se rozhodli je podrobit dalšímu zkoumání, aby bylo možné lépe porozumět těmto procesům a aplikovat případná zjištění ve výuce matematiky.

1.2 Interakce mezi definováním, vysvětlováním a kategorizací

Lara Alcocková a Adrian Simpson jsou autory článku z roku 2017 s názvem "Interakce mezi definováním, vysvětlováním a kategorizací: případ rostoucí a klesající posloupnosti"[1] (Alcock a Simpson, 2016), který je hlavním podkladem pro tuto práci. Zaměříme se na experiment, který provedli, na jeho výsledky, navrhneme a realizujeme jeho rozšíření a zhodnotíme možné přínosy pro výuku matematiky a porozumění tomu, jak žáci pracují s matematickými poznatky.

1.2.1 Popis a cíl článku

Článek zkoumá vzájemné působení tří vybraných aspektů ve výuce matematiky: definování pojmů, vysvětlování jejich významu a kategorizace příkladů v rámci těchto pojmů. Alcocková a Simpson ve své studii zkoumají vzájemné působení těchto tří aspektů na konkrétním případě nerostoucích a neklesajících posloupností, které jsou jedním ze základních pojmů matematické analýzy. Zkoumáním toho, jak studenti s těmito posloupnostmi pracují, se autoři snaží objasnit složitý vztah mezi definováním, vysvětlováním a kategorizací v procesu učení.

Pochopení těchto interakcí může přispět k tomu, aby učitelé pracovali s matematickými pojmy přiměřeně tomu, jak je dokážou uchopit žáci. Definování pojmu představuje jasné vyjádření jeho základních charakteristik, ukotvení v rámci dalších souvisejících pojmů v dané matematické disciplíně. Samotná definice však nemusí studentům k hlubokému porozumění pojmu stačit, což ukazují i další autoři, například Tall a Vinner (1981).

Vysvětlení (v tom smyslu, jak jej používají Alcocková a Simpson) má přidanou hodnotu tím, že definici rozvádí, používá příklady, analogie nebo jiné techniky k objasnění významu

[1] Vlastní překlad. V originále se jedná o článek Interactions between defining, explaining and classifying: the case of increasing and decreasing sequences

a použití pojmu. Zatímco definice pojmu zpravidla přichází z vnějšího zdroje, ať už z učebnice, od pedagoga, nebo z matematické teorie, vysvětlení nám ukazuje, jak daný pojem student chápe a používá. To nám umožňuje nahlédnout do jeho kognitivní struktury a zjistit, do jaké míry danému konceptu skutečně rozumí. Na základě těchto znalostí může pedagog lépe diagnostikovat individuální porozumění studenta a lépe na něj navázat při výuce.

Kategorizace potom vystihuje jeden z možných způsobů, jak daný pojem používáme, a v matematice ji často chápeme jako rozhodnutí, zda dané příklady splňují definiční charakteristiky. Úkol kategorizace v pracovních listech je pro všechny respondenty stejný. Úloha vyžaduje, aby studenti kategorizovali 15 posloupností jako neklesající, nerostoucí, obojí nebo ani jedno; příloha 3 uvádí seznam posloupností a normativně správné odpovědi. Výběr posloupností částečně vychází z těch, které použili Alcocková a Simpson (2011), a každý pracovní list měl seznam posloupností v náhodném pořadí.

V popisované studii autoři testují 5 skupin přibližně po 26 respondentech, které se liší v řešených úkolech a jejich pořadí. Respondenti první skupiny měli za úkol si nejprve nastudovat předloženou definici neklesající[2] posloupnosti a následně konkrétní posloupnosti kategorizovat. Respondenti další skupiny si měli tuto definici formulovat sami a následně posloupnosti kategorizovat. Studenti třetí skupiny měli nejprve vysvětlit, co to neklesající posloupnost je a poté opět určují zadané posloupnosti. Respondenti čtvrté skupiny nejprve kategorizují a následně formulují definici. Studenti poslední skupiny opět nejdříve kategorizují a následně vysvětlují, co znamená, že je posloupnost neklesající.

Hlavním cílem studie je zjistit, jaký vliv má pořadí činností (definování, vysvětlování, kategorizace) na porozumění daného konceptu.

1.2.2 Výzkumný vzorek

Respondenty této studie byly studenti prvního ročníku bakalářského studia na jedné z prestižních britských univerzit. Všichni studovali matematiku, nebo přírodní vědy. Data

[2] V originálním znění autoři studie používají pojem ‚increasing sequence' a diskutují jeho význam jak s ostrou, tak i neostrou nerovností (‚increasing' a ‚strictly increasing'; v českém překladu standardně ‚neklesající' a ‚rostoucí' posloupnost. Více o definici pojednáváme v kapitole 1.2.3.

byla shromážděna v osmém týdnu prvního semestru, poté, co se studenti setkali s určitou formální matematikou, a v době, kdy všichni navštěvovali kurz (reálné) matematické analýzy. To znamená, že před zahájením studie se studenti setkali s řadou formálních definic týkajících se posloupností reálných čísel. Konkrétně se 4 týdny před studií seznámili s pojmy rostoucí a klesající; dostali formální definici, ve stejné podobě, jaká byla použita ve studii. (Alcock & Simspon, 2016)

1.2.3 Výsledky popsané v článku a východiska praktické části práce

Autoři této studie uvádí tři hlavní zjištění na základě kvantitativní analýzy. První zjištění říká, že variabilita definic a vysvětlení pojmu neklesající posloupnost byla v rámci zkoumaného vzorku značná, a to jak z hlediska obsahu, tak i kvality.

Autoři dále zjistili, že studenti, kteří si sami formulovali definici a vysvětlení pojmu rostoucí posloupnosti, dosáhli v kategorizaci lepších výsledků než ti, kteří pracovali s definicí již předloženou. „Požadavek prostudovat danou formální definici je totiž zřejmě slabší oporou pro správnou klasifikaci než požadavek vysvětlit definici, alespoň u žáků v našem vzorku: ti, kteří vysvětlovali, dosáhli vyššího klasifikačního skóre než ti, kteří studovali poskytnutou definici." (Alcock & Simpson, 2016, s. 16)

Posledním důležitým zjištěním je, že pokud studenti nejprve provedli kategorizaci, pak negativně ovlivnila kvalitu následně formulovaných definic a vysvětlení pojmu rostoucí posloupnosti.

Cílem této práce je reprodukce části experimentu, která vedla ke druhému jmenovanému zjištění. Základní otázkou, kterou si klademe je, zda studenti dosáhnou horších výsledků v kategorizaci neklesajících posloupností, pokud jim definici předložíme, než když si ji sami naformulují a jaké to bude mít případně důvody. Na základě popsaných výsledků zvolíme 8 respondentů, z nichž polovina bude zkoumána pomocí přístupu s prezentovanou definicí a polovina přístupem s vlastní definicí a popíšeme jejich rozhodovací proces prostřednictvím rozhovorů.

1.3 Analýza konceptu rostoucí/klesající a neklesající/nerostoucí posloupnosti s ohledem na výzkumný závěr

Alcocková a Simpson (2016, s. 11) ve své studii užívají termín „Increasing sequence“ s následující definicí:

“The following is the definition of what it meansfor a sequence (a_n) to be increasing:
A sequence (a_n) is increasing if $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \geq a_n$”.

Ve volném překladu do češtiny:

„Následuje definice toho, co znamená, že posloupnost (a_n) je neklesající:
Posloupnost (a_n) je rostoucí, pokud $\forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} \geq a_n$“.

Autoři se k pojmu neklesající posloupnosti a jeho definici v článku vyjadřují takto: „S kontextem, který byl pro výzkum zvolen, souvisí jedna složitost: existují dvě standardní definice pro rostoucí a klesající, přičemž rozdíl závisí na tom, zda je nerovnost mezi po sobě jdoucími členy ostrá, nebo ne.“[3] (Alcock & Simpson, 2016, s. 11). V kategorizačních úlohách se vyskytují dvě posloupnosti, kde by tento rozdíl hrál roli ve správnosti určení. Autoři se rozhodli, tyto úlohy zahrnout a za správné uznávat odpovědi, které souhlasí s oběma definicemi.

Při překladu do češtiny běžnou terminologii z české literatury, které odpovídá překlad pojmu „incresing“ jako „nerostoucí“ a „strictly increasing“ jako „rostoucí“, tak aby byl dodržen význam definice uvedené v článku. Zajímavé nicméně je do nejvýznamnějších českých zdrojů nahlédnout, dále uvádíme, jak k těmto pojmům přistupují.

[3] Z anglického „“, vlastní překlad.

Například Jarník (1974) definuje neklesající/nerostoucí posloupnosti takto:

Jestliže v posloupnosti

(43) $$a_1, a_2, a_3, \dots$$

je $a_n < a_{n+1}$ pro každé *n,* tj. je-li každý následující člen větší než předcházející., říkáme, že posloupnost (43) je *rostoucí;* v takové posloupnosti je tedy $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ Mnohé úvahy, platné pro rostoucí posloupnosti, platí i tehdy, nahradíme-li znamení $<$ znamením $\leq$. Proto dáváme takovým posloupnostem zvláštní jméno: je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé *n,* říkáme, že posloupnost (43) je *neklesající.* Každá rostoucí posloupnost je neklesající, ale ne naopak. Obdobně: je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé *n,* říkáme, že posloupnost (43) je *klesající;* je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé *n,* říkáme, že posloupnost (43) je *nerostoucí* (každá posloupnost klesající je ovšem nerostoucí, ale ne naopak) (s. 94).

Veselý (2004) dané pojmy vymezuje podobně takto:

Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n \geq a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *nerostoucí*; platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *neklesající*. Posloupnost, která je nerostoucí nebo neklesající se nazývá monotónní. Podobně, jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n > a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *klesající*; platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n < a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *rostoucí*. Jestliže je posloupnost $\{a_n\}$ zároveň neklesající a nerostoucí, tj. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n = a_{n+1}$, je $\{a_n\}$ *konstantní* posloupnost (s.52).

Dále Polák (2015) definuje tyto pojmy takto:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

neklesající posloupnost, je-li $a_{n+1} \geq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

nerostoucí posloupnost, je-li $a_{n+1} \leq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (s. 292).

Společným prvkem uvedených zdrojů je jejich zaměření na výklad matematiky, konkrétně na porozumění vlastnostem posloupností a následné propojení s dalšími pojmy matematické analýzy. Pro pojem neklesající/nerostoucí posloupnost lze formulovat i ekvivalentní definici. Ve své učebnici pro střední školy ji uvádí Krynický (2020), který se ji snaží využít rovnou také k didaktickým cílům. V tomto případě propojuje posloupnosti a jejich vlastnosti s pojmem funkce.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$ platí:
Je-li $r < s$ pak $a_r \leq a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$ platí:
Je-li $r < s$ pak $a_r \geq a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost
$a_n \leq a_{n+1}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí
$a_n \geq a_{n+1}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$ (s. 1).

Tato definice se nezakládá na vztahu dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti, ale na libovolných dvou různých členech posloupnosti a vyplývá z definic analogických vlastností funkcí. Ekvivalence obou definic potom plyne z definice posloupnosti jako funkce. Krynický uvádí také přímý důkaz, zřejmě proto, že se jedná na úrovni střední školy o zajímavý důkaz ekvivalence prostřednictvím dílčích důkazů obou implikací (Krynický, 2020):

Důkaz: Věta má tvar ekvivalence:
Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.

$\Rightarrow$ Musíme dokázat „šipku“ oběma směry (obě implikace).

1. Dokazujeme první implikaci $\Rightarrow$

   Víme: pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r \leq a_s$ (funkce je rostoucí).

Chceme: pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Jednoduché: zvolíme $r = n$, $s = n + 1$ a dosadíme: $a_r < a_s \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

1. Dokazujeme druhou, opačnou implikaci $\Leftarrow$

   Víme: pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.

Chceme: pro všechna $r, s \in \mathbb{N}$ platí: Je-li $r < s$ pak $a_r \leq a_s$ (funkce je rostoucí).

Zvolíme r a s libovolně tak, aby platilo $r < s$.
Víme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_r < a_{r+1}$, ale i $a_{r+1} < a_{r+2}$ … a tak dále, až dojdeme k nerovnosti $a_{r+k} < a_s$ a tedy i $a_r < a_s$ (s. 2).

V praxi se však definice, která porovnává pouze sousední členy posloupnosti, používá častěji, a to jak v učebnicích, tak v odborných textech. Důvodem je její jednoduchost vyjádřená také tím, že obsahuje pouze jeden kvantifikátor.

1.3.1 Shrnutí

V teoretické části práce jsme se seznámili se základní literaturou související s pojmem kategorizace v psychologii a následně s reprezentantem aplikace tohoto pojmu ve výzkumu v didaktice matematiky. Tím je článek Alcockové a Simpsona (2016). Hlavní zjištění tohoto článku se dají popsat takto:

- Ve výzkumném vzorku byla značná variabilita v kvalitě definic a vysvětlení neklesající/nerostoucí posloupnosti.
- Studenti, kteří si sami formulovali definici a vysvětlení, dosáhli v kategorizaci lepších výsledků než ti, kteří pracovali s předloženou definicí.
- Kategorizace provedená před definováním a vysvětlením negativně ovlivnila kvalitu následných definic a vysvětlení.

Na základě těchto zjištění jsme si stanovili za cíl replikovat část experimentu s cílem ověřit, zda studenti s předloženou definicí dosáhnou v kategorizaci horších výsledků než studenti s vlastní definicí a popsat, jak studenti ke kategorizaci přistupují. K tomuto cíli je vhodné zvolit kvalitativní přístup na malém vzorku, proto experiment proběhne na vzorku osmi respondentů. Metodologie a výsledky experimentu budou prezentovány v následující kapitole.

Dále jsme upozornili na rozdíly v terminologii používané autory (původem se jedná o britský kontext) a v české literatuře. Uvedli jsme, jak je pojem neklesající posloupnost zaváděn a definován v českých učebnicích.

Náš výzkum se zaměřuje na důležitost aktivního zapojení žáků do pochopení matematických konceptů, a to spíše než na pouhé memorování definic. Aktivním definováním, vysvětlováním a klasifikováním si studenti vytvářejí hlubší a smysluplnější porozumění matematickým myšlenkám. Tento přístup k výuce matematiky je v souladu s Původní i náš výzkum se ve své podstatě zaměřuje na důležitost aktivního zapojení žáků do pochopení matematických konceptů v kontrastu k pouhému memorování či reprodukování definic. Základní premisa je, že aktivním definováním, vysvětlováním a klasifikováním si studenti vytvářejí hlubší a smysluplnější porozumění matematickým myšlenkám. Tento přístup k výuce matematiky je v souladu s mnohými dalšími obecně pedagogickými či didakticko-matematickými principy. Příkladem může být revidovaná Bloomova taxonomie, která klade důraz na vyšší kognitivní úrovně učení (Anderson & Krathwohl, 2000). Zapojením žáků do aktivního konstruování matematického poznání jim umožňujeme rozvíjet tyto vyšší kognitivní dovednosti a dosahovat hlubšího pochopení matematických konceptů.

Zkoumání propojení definování, vysvětlování a kategorizace má proto přímý význam pro pedagogickou praxi. Studováním těchto interakcí na libovolném kontextu přispívá k hlubšímu pochopení toho, jak se studenti učí a jak pracují s matematickými pojmy.

2 Praktická část

2.1 Výzkumný cíl

Podstatou našeho výzkumu je pozorovat rozdíly v práci s definicí a následné kategorizaci mezi dvěma skupinami studentů. První skupina dostane za úkol využít již zadanou definici ke kategorizaci konkrétních příkladů neklesající posloupnosti. Druhá skupina dostane za úkol ke kategorizaci stejných příkladů využít definici, kterou si sami formulují. Hlavním cílem experimentu je zjistit, zda se potvrdí zjištění uvedené v článku (Alcock & Simpson, 2016), tedy zda tyto dva přístupy mají vliv na úspešnost studenta.

Tohoto cíle se snažíme dosáhnout pomocí kvalitativního experimentu. Nejprve proběhne sběr dat prostřednictvím pracovních listů, poté studenty se studenty vedeme polostrukturovaný rozhovor (Mišovič, 2019), pomocí kterých se pokusíme popsat kognitivní procesy, které studenti využili ke kategorizaci zadaných posloupností. V souvislosti s tímto cílem vyvstávají další zajímavé otázky, které formulujeme níže ve formě našich dalších očekávání.

V rámci analýzy uvedeme příklady definic respondentů druhé skupiny, popíšeme kategorizaci jednotlivých posloupností v obou skupinách a porovnáme jejich argumenty, které formulovali při rozhovorech.

2.2 Metodologie

Od původního experimentu se tento popisovaný liší svým kvalitativním přístupem. Kvalitativní přístup prostřednictvím polostrukturovaných rozhovorů umožní studentům vyjádřit se svými vlastními slovy a sdílet své zkušenosti způsobem, na který jsou zvyklí a který je bohatší než v původním experimentu. To může vést k bohatším a komplexnějším datům, která pomohou lépe porozumět zkoumanému jevu. Navíc polostrukturované rozhovory nám dají prostor pro kladení doplňujících otázek a prozkoumání témat, která se během rozhovoru objeví (Mišovič, 2019). Naším cílem nebylo vytvářet obecné, plošně aplikovatelné závěry. Spíše se zaměřujeme na to, zda rozdíl mezi skupinami a jednotlivými respondenty bude patrný, či nikoli.

2.2.1 Očekávání

Vzhledem ke zvolenému vzorku respondentů a tomu, že mají absolvovaný kurz zaměřený na posloupnosti a jejich vlastnosti:

1. Očekáváme nízkou chybovost při kategorizaci zadaných posloupností.
2. Také bychom očekávali vysokou kvalitu definic.[4]

Dále očekáváme, že se v definicích neklesající posloupnosti formulované studenty objeví následující chyby:

3. Definice nebude úplná. Student nezmíní, že nerovnost mezi dvěma po sobě jdoucími členy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
4. Student zformuluje definici jiného pojmu souvisejícího s posloupností – rostoucí, neklesající, klesající, omezenou…

Na základě závěrů z podkladového článku také přepokládáme:

5. Studenti, kterým definici neklesající posloupnosti předložíme my, s ní nedokážou pracovat na takové úrovni, jako studenti, kteří si definici naformulují sami.

2.2.2 Průběh experimentu

Pro experiment jsme zvolili 8 respondentů – studentů Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy, oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání. Tento vzorek jsme dále upřesnili na studenty prvního ročníku, kteří se právě pojmem posloupnosti zabývají v kurzu *Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ*, abychom co nejvíce snížili různorodost kvality definic a vysvětlení. Pokud by studenti měli různé definice a chápání neklesající posloupnosti, výsledky by mohly odrážet spíše tyto individuální rozdíly než skutečný vliv experimentálních podmínek. Studenti byli náhodně rozděleni do dvou skupin po čtyřech, kde každá dostala jinou variantu pracovního listu – A nebo B. Varianta A obsahuje již předepsanou definici neklesající posloupnosti a následně dává studentům za úkol rozhodnout o konkrétních posloupnostech, zda je nebo není neklesající. Varianta B dává studentům za úkol napsat vlastní definici neklesající posloupnosti, případně vysvětlit, co znamená, že je posloupnost neklesající a rozhodnout o konkrétních posloupnostech (příloha 3).

[4] Navzdory závěrům původního článku, kde respondenti nepodávali příliš kvalitní definice – pravděpodobně z důvodu, že byl experiment realizován v dřívějším období prvního ročníku.

Pracovní list, který byl studentům předložen, byl převzat z původního článku (Alcock a Simpson, 2016). Stejně tak přesné formulace a definice. Dodrželi jsme také instrukci autorů, že do formulované definice z pracovního listu během kategorizace studenti již nemohli nahlížet.

2.2.3 Struktura pracovních listů a postup při jejich zadávání

Studenti řešili pracovní listy v prostorech fakulty. V učebně byli vždy dva studenti, přičemž jeden dostal pracovní list varianty A, druhý varianty B.

Studentům bylo sděleno, že pro každého máme dva pracovní listy s úkoly, které vypracují a následně budou absolvovat krátký rozhovor týkající se jejich odpovědí. Informaci, že první pracovní list (tj. ten s předloženou definicí, respektive s úkolem definici neklesající posloupnosti naformulovat) jim bude před listem s úlohami ke kategorizaci odebrán, studenti nedostali.

Zadání úlohy na pracovním listu skupiny A:

Skupina A

Jedna z možných definic neklesající posloupnosti zní:

Posloupnost (a_n) *je neklesající, pokud* $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n$.

Zadání úlohy na pracovním listu skupiny B:

Skupina B

a) Definujte co nejpřesněji co znamená, že posloupnost (a_n) je neklesající.

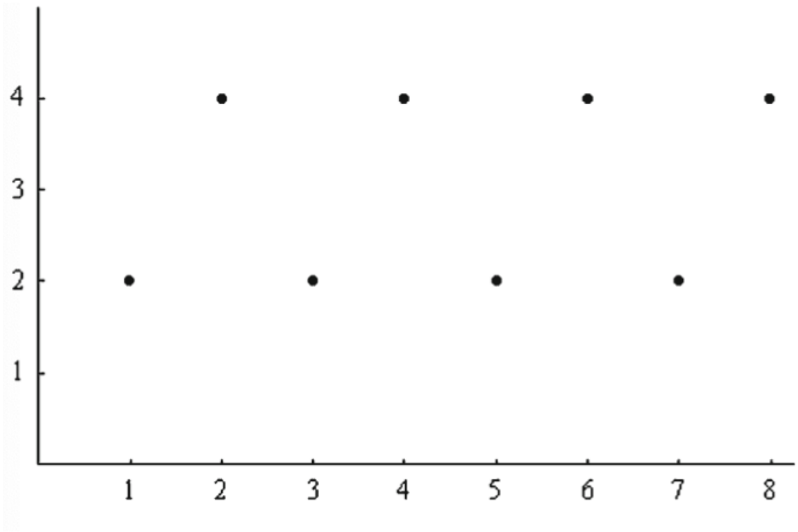
Posloupnost (a_n) *je neklesající, pokud…*

Po formulaci/prostudování, aniž by byl na studenty vyvíjen časový tlak, byly studentům pracovní listy odebrány a byly jim předloženy list s konkrétními posloupnostmi, které měli za úkol kategorizovat, v následujícím znění:

b) Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti neklesající, nerostoucí, oboje, nebo ani jedno.

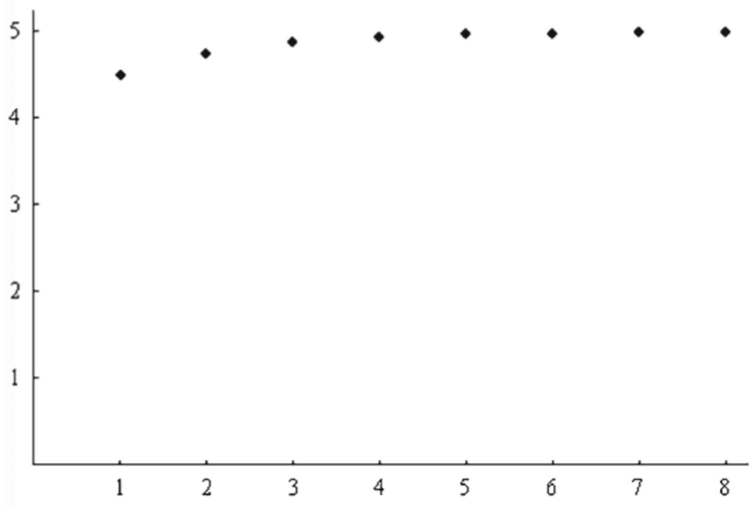
- $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$
- $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots)$
- $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$
- $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$
- $(1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, \dots)$
- $(6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, \dots)$
- $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$
- $(10\frac{1}{2}, 10\frac{3}{4}, 10\frac{7}{8}, 10\frac{15}{16}, 10\frac{31}{32}, 10\frac{63}{64}, 10\frac{127}{128}, 10\frac{255}{256}, \dots)$
- $(-2, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -16, \dots)$
- (a_n), kde $a_n = n^2 + 1$
- (a_n), kde $a_n = 3 + (-1)^n$
- (a_n), kde $a_n = 5 - \frac{1}{2^n}$

- Posloupnost (a_n) daná grafem:



Obrázek 1: První posloupnost zadaná graficky

- Posloupnost (a_n) daná grafem:



Obrázek 2: Poslední posloupnost zadaná graficky

Tyto úlohy měly obě skupiny stejné.

Po vypracování následoval individuální polostrukturovaný rozhovor, kde jsme studentům pokládali následující otázky směřované na jednotlivé příklady:

1. *Která z vašich rozhodnutí byste chtěl/chtěla okomentovat ve smyslu, že jste si nebyl/a jistý, že se jednalo o zajímavou úlohu, že jste pouze odhadl řešení a podobně?*

Pomocí této otázky jsme chtěli jsme získat informace o tom, které úlohy studenti hodnotili jako obtížné nebo zajímavé. Očekávali jsme, že studenti zmíní úlohu konstantní posloupnosti $(3,3,3,3,3,3,3,3,\dots)$. Také nás zajímalo, zda studenti zmíní například způsob zadání posloupností. Pro některé by mohlo být zadání vzorcem pro n-tý člen náročnější, než zadání rekurzivní. Také jsme čekali, že studenti zmíní poslední posloupnost zadanou graficky.

2. *Z jakého důvodu jste tuto úlohu přeskočil/a? (v případě „bez odpovědi“)*

Cílem této otázky bylo zjistit, zda nastal problém v porozumění definice, při zadání posloupnosti nebo jinde.

3. *Proč, podle vás, tato posloupnost je/není neklesající? (v případě chybné odpovědi)*

V případě třetí otázky nás zajímalo, jak student přemýšlel a postupoval při určování konkrétních posloupností a chtěli jsme přijít na chybu. Stejně jako u předchozí otázky jsme hledali důvod nesprávného určení.

Dále jsme se ptali na následující otázky směřované na vyznění celého testu:

1. *Přišel vám test náročný? Proč?*

Cílem této otázky bylo zhodnotit náročnost úloh na pracovním listu. Zároveň jsme chtěli prozkoumat, zda nízká obtížnost vnímaná studentem implikuje i bezchybnou kategorizaci všech posloupností.

2. *Vracel/a jste se k definici neklesající posloupnosti během jednotlivých rozhodnutí? Případně jak jste s tou definicí pracoval?*

Touto otázkou jsme se chtěli dostat k jádru výzkumu, zda naše očekávání, že se k definici budou vracet spíše studenti s vlastní definicí, bude potvrzeno. Také jsme chtěli vědět, jakým způsobem studenti s definicí pracují.

Skupiny B jsme se navíc ptali na otázku:

1. *Doplnil/a byste teď nějakým způsobem definici, kterou jste uvedli v první části?*

Touto otázkou jsme cílili na myšlenku, zda studenta ovlivní kategorizace daných posloupností, například k lepšímu porozumění nebo k upřesnění pojmu neklesající posloupnosti a její definice. Očekávali jsme, že pokud by v definici byla chyba, student by definici upravil.

2.3 Pilotní experiment

Cílem pilotního experimentu bylo ověřit vhodnost skupiny vybraných respondentů (orientačně určit, zda náročnost zadaného testu bude adekvátní k našemu hlavnímu výzkumu) a ověřit funkčnost zvolené metodologie.

Pilotního experimentu se zúčastnili dva studenti. Jeden z nich dostal pracovní list varianty A, druhý student pracovní list varianty B. Na vyplnění měli oba přibližně 30 minut. Následně absolvovali rozhovor, kde jsme chtěli získat zpětnou vazbu jak k obtížnosti příkladů, tak k časové náročnosti. Dále jsme zjišťovali kognitivní procesy studentů při řešení úloh, které nebyly vyřešeny správně. Upřesnili jsme si otázky, které při hlavní studii budou relevantní a kde skutečně budou rozdíly mezi řešením studentů skupiny A a skupiny B.

K pilotnímu výzkumu byly použity pracovní listy, které nebyly v souladu s výše uvedenou terminologií. Namísto pojmu neklesající/nerostoucí posloupnost byly užity pojmy rostoucí/klesající posloupnost. Definice byla stejná jako ve studii (Alcock & Simpson, 2016), tedy s neostrou nerovností. Po pilotním výzkumu byly pracovní listy upraveny tak, aby souhlasily s probíranou terminologií v této práci, tedy neklesající/nerostoucí.

Oba studenti odpověděli, že jim pracovní list nepřišel náročný, a zároveň v úlohách ke kategorizaci nechybovali. Také se oba vyjádřili k poslední posloupnosti zadané grafem, že si nebyli jistí na první pohled správnou odpovědí. Jeden ze studentů k této úloze napsal „vypadá, že rostoucí". Množství času bylo dostatečné. V obou rozhovorech studenti uvedli, že se při kategorizaci konkrétních posloupností vraceli k definici. Student, který dostal definici již napsanou řekl, že ho tato definice znejistila, protože měl pocit, že je to definice posloupnosti klesající. Matoucí pro něj bylo pořadí členů a_n a a_{n+1}, byly obráceně, než je student zvyklý. Tato informace byla natolik zajímavá, že jsem se jí rozhodla reflektovat i v rámci hlavního experimentu. S definicí však oba studenti pracovali stejným způsobem, postupně dosazovali členy posloupností do definice a ověřovali, zda ji splňují nebo ne.

2.4 Hlavní experiment

Hlavního experimentu se zúčastnilo celkem 6 studentů. Všichni studenti byli osloveni na přednášce kurzu *Posloupnosti pro učitele ZŠ a SŠ*, byli informováni o cíli experimentu, jeho stručném průběhu a dobrovolně se k němu přihlásili.

S každým studentem jsem se setkala osobně v učebnách na fakultě. Studenti vždy přišli ve dvojici, abych mohla experiment provést pro obě varianty pracovních listů současně. Se studenty jsem se seznámila a znovu jim vysvětlila cíl a průběh experimentu. Studenti měli poté možnost položit dotazy, pokud by nějaké měli.

Každý student obdržel první pracovní list (ten s definicí nebo s úkolem definici naformulovat) a měl asi 6 minut na prostudování/ vyplnění. Poté mu byl tento pracovní list odebrán a byl mu předložen druhý pracovní list s úlohami ke kategorizaci. Na vyřešení tohoto pracovního listu měl student asi 15 minut. Tuto část experimentu absolvovali oba studenti z dvojice najednou. Po dokončení druhého pracovního listu jeden ze studentů opustil učebnu a s druhým studentem byl proveden polostrukturovaný rozhovor. Rozhovor byl proveden na základě otázek popsaných v kapitole 2.2.3. Po dokončení rozhovoru se studenti vyměnili.

Rozhovory probíhaly osobně v učebnách fakulty po předchozím souhlasu studentů. Pro účely analýzy experimentu byly rozhovory nahrávány. Z důvodu zachování anonymity byli respondenti označeni čísly od 1 do 6, přičemž studenti s čísly 1 až 3 obdrželi pracovní list skupiny A a studenti s čísly 4 až 6 obdrželi pracovní list skupiny B. Z každé nahrané odpovědi studenta byly vyexcerpovány klíčové myšlenky.

2.4.1 Analýza

V této kapitole budou analyzovány výsledky sběru dat pomocí pracovních listů, a provedených polostrukturovaných rozhovorů. Budeme analyzovat každého respondenta zvlášť a následně tyto výsledky porovnáme.

Respondenti, kterým byla předložena formulovaná definice

Respondent 1

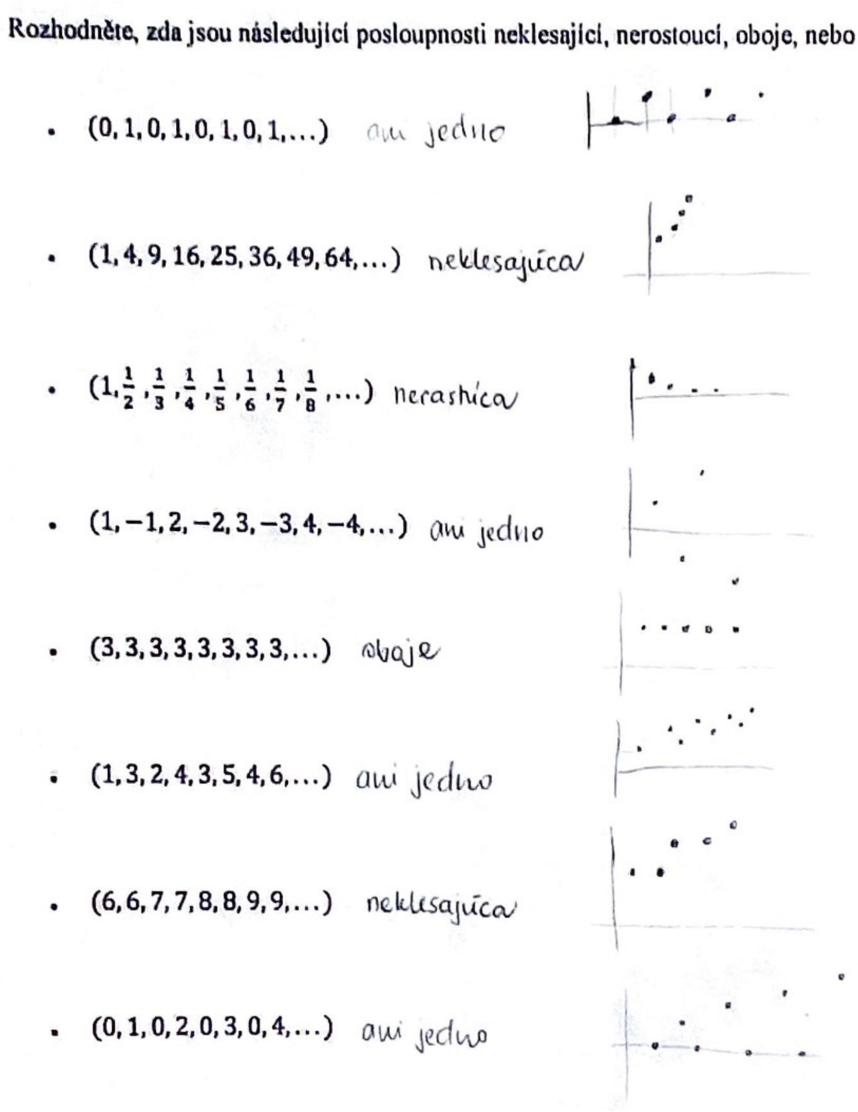
Studentce je 22 let a studuje obor kombinující matematiku a anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání. Odborné pedagogické zkušenosti nemá, pouze jednou doučovala matematiku žáka základní školy. Na pedagogickou fakultu přestoupila z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, kde studovala jeden měsíc.

Studentka měla v kategorizaci pouze jednu chybu, konkrétně v poslední posloupnosti, která je zadaná graficky (obrázek 2).

Určila ji jako neklesající a zároveň nerostoucí. Tuto úlohu zmiňovali již respondenti v pilotním experimentu, zde se studentka pravděpodobně nechala zmást a viděla členy posloupnosti v přímce, tedy konstantní. Konstantní posloupnost $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$ určila správně, tedy neklesající a zároveň nerostoucí. Při rozhovoru si jmenované chyby sama od sebe všimla a svou odpověď opravila.

Studentka uvedla, že jí test nepřišel náročný. Dále své řešení pracovního listu okomentovala takto: „Nejdřív jsem si nebyla jistá, jestli $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ nebude jako neklesající a zároveň nerostoucí, protože je to rozdělené na takové, jakože intervaly, ale pak jsem si vzpomněla na tu definici, co jsem měla na tom předcházejícím papíře, že prostě pro VŠECHNY n to platí, že musí být ten a_{n+1} člen větší nebo roven a_n-tému členu, a tady to pro každý neplatí, proto ani jedno." Tímto jsme se dostali k tomu, že studentka s definicí neklesající posloupnosti pracovala správně, a ověřovala, zda vztah z definice skutečně platí pro všechny členy zadaných posloupností.

U této studentky bylo zajímavé, že si prvních 8 posloupností vyjádřila graficky (obrázek 3). Z rozhovoru vyplynulo, že je pro studentku určení kategorie snazší vidět z obrázku než si graf pouze představit na základě výčtu prvků.



Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti neklesající, nerostoucí, oboje, nebo ani jedno.

- $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ ani jedno
- $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots)$ neklesajúca
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots)$ nerastúca
- $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots)$ ani jedno
- $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots)$ oboje
- $(1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, \ldots)$ ani jedno
- $(6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, \ldots)$ neklesajúca
- $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \ldots)$ ani jedno

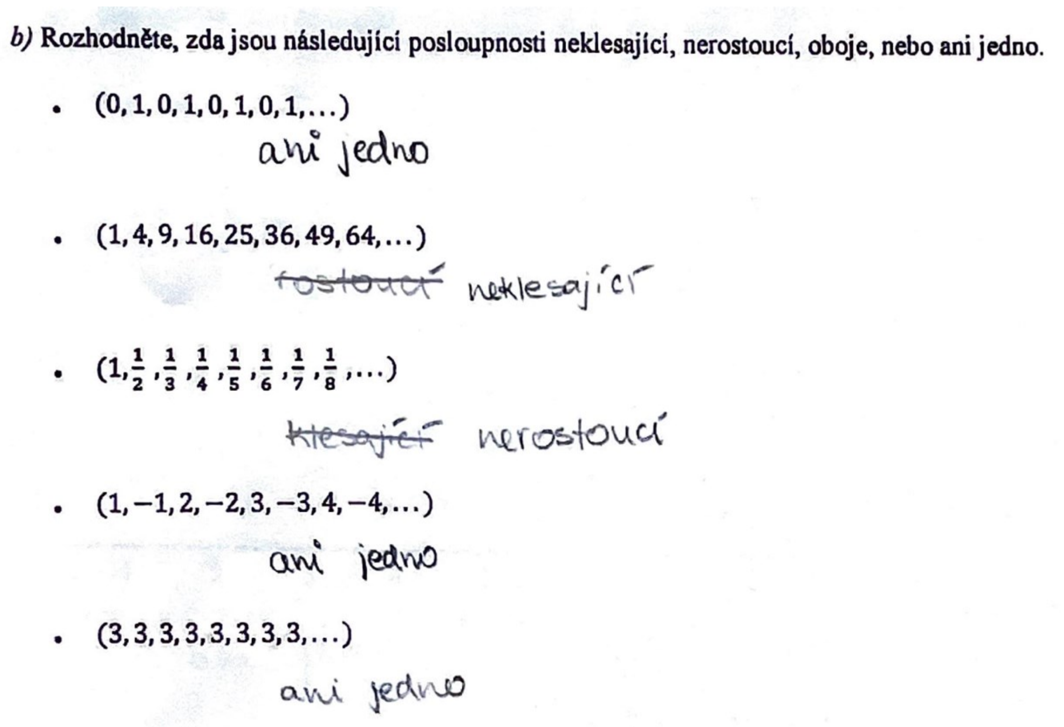
Obrázek 3: ukázka kategorizace respondenta 1 a jeho grafické vyjádření posloupností

Respondent 2

Respondentka 2 je studentka, které je 20 let, studuje obor Matematika a výchova ke zdraví se zaměřením na vzdělávání. Již v minulosti se aktivně věnovala pedagogické praxi, jelikož doučovala žáky devátých ročníků základních škol v rámci přípravy na přijímací zkoušky. Na Pedagogickou fakultu nastoupila hned po dokončení osmiletého gymnázia.

Úlohy označila za nenáročné. Studentka chybovala v kategorizaci posloupnosti $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots)$. Zařadila ji do kategorie ani neklesající, ani nerostoucí. I po přímé otázce, zda by studentka nějakou posloupnost označila za neklesající, a zároveň nerostoucí odpověděla, že ne.

Jako úlohu, kde se pozastavila, zmínila posloupnost $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$. „Myslím, že jsem se zasekla tady, protože… měla jsem tam neklesající, protože tady se zvedala, ale pak jsem si vzpomněla na tu definici, že to má být vždycky větší nebo rovno," popisovala své kroky. Dále zmínila poslední posloupnost zadanou graficky, že její zařazení nebylo hned jasné na první pohled.



b) **Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti neklesající, nerostoucí, oboje, nebo ani jedno.**

- $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$
  ani jedno
- $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots)$
  ~~rostoucí~~ neklesající
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots)$
  ~~klesající~~ nerostoucí
- $(1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$
  ani jedno
- $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$
  ani jedno

Obrázek 4: Kategorizace respondenta 2

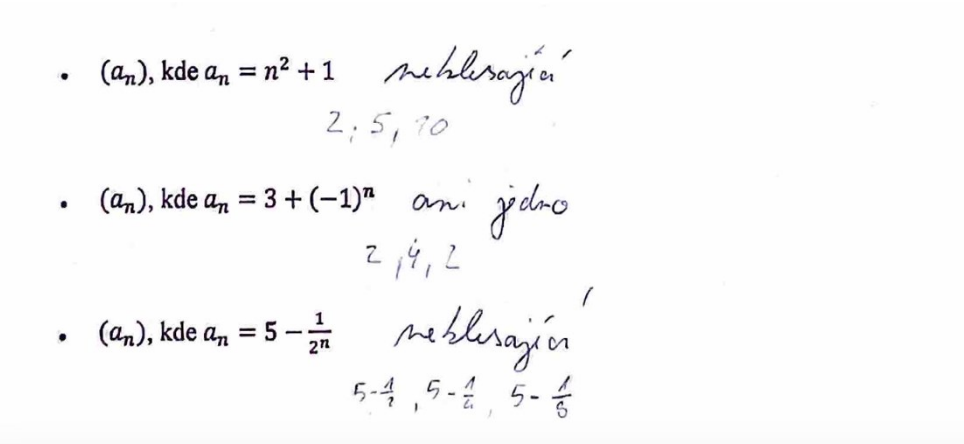
Jak vidíme na obrázku 4, studentka začala nejprve určovat posloupnosti jako klesající/rostoucí. To naznačuje, že chyba, kterou studentka udělala, vychází z toho, že měla v paměti definici rostoucí posloupnosti namísto neklesající (ovšem jedná se pouze o domněnku).

V rozhovoru studentka odpověděla, že se k definici vracela, opakovala si ji a ověřovala, zda ji splňují všechny členy posloupnosti. Studentka však upozornila, že ne u všech posloupností definici ke kategorizaci potřebovala.

Respondent 3

Respondentka 3 je dvaadvacetiletá studentka jednooborového programu Matematika se zaměřením na vzdělávání. Během svého studia získala zkušenost s doučováním matematiky studentů středních škol. Na Pedagogickou fakultu přešla po dvou letech studia na Fakultě architektury ČVUT. Střední vzdělání získala na Mendelově gymnáziu v Opavě.

Studentce nepřišel pracovní list náročný. Jako zajímavé úlohy označila posloupnost $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$. Své rozhodnutí odůvodnila takto: „Je to oboje, a ne každý si to jako může uvědomit, že když někdo špatně pochopí tu definici, že si to prostě splete s rostoucí a klesající že jo, tak řekne, že to není ani neklesající, ani nerostoucí. Ale přitom je to oboje takhle.“



Obrázek 5: Kategorizace pro n-tý člen respondenta 3

Dále jako zajímavé zmínila posloupnosti zadané vzorcem pro n-tý člen. Studentka si takto zadané posloupnosti přepsala do částečného výčtu prvků, aby se jí lépe kategorizovala (obrázek 5).

Když jsem se zeptala, zda při kategorizování posloupností pracovala s definicí a jakým způsobem, odpověděla: „Jo tady u těch právě, kde třeba jsou hozené ty 0 mezi tím, tak jakoby, jsem se vracela k té definici, že jsem si to tím zdůvodnila, že pro každé n to prostě musí vyjít větší než to předchozí. Takže když to tam takhle skáče nahoru a dolů, tak tím pádem už to nemůže být neklesající nebo nerostoucí. Takže tam jsem se k tomu vrátila nějak. Jo i tady u té $(1, -1, 2, -2, \dots)$. Takže spíš jsem si to tak překontrolovala tou definicí.

Ale jinak jsem tak nějak potom jela intuitivně." V tomto případě studentka dokázala využít definici jako nástroj k určení kategorie posloupnosti, aniž by se nechala ovlivnit svými dojmy.

V této skupině respondentů, studovali dva ze tří před nástupem na Pedagogickou fakultu na jiné vysoké škole. Možný vliv na výsledky stručně rozebereme v diskuzi.

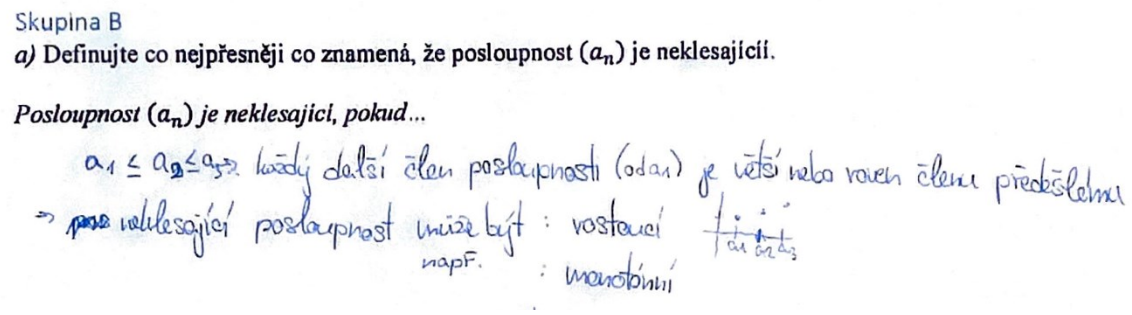
Respondenti, kteří definici sami formulovali

Respondent 4

Respondent 4 je dvacetiletá studentka oboru Tělocvik a matematika se zaměřením na vzdělávání. Již má zkušenosti s pedagogickou praxí, a to v podobě doučování mladších rodinných příslušníků v učivu základní školy. Na pedagogickou fakultu nastoupila po absolvování Gymnázia Postupnická.

Studentka se dopustila jedné chyby při kategorizaci posloupností. Posloupnost $\left(10\frac{1}{2}, 10\frac{3}{4}, 10\frac{7}{8}, 10\frac{15}{16}, 10\frac{31}{32}, 10\frac{63}{64}, 10\frac{127}{128}, 10\frac{255}{256}, \dots\right)$ označila jako nerostoucí. Na začátku rozhovoru se studentka zmínila, že má problém se zlomky, tedy v tomto případě s interpretací členů posloupnosti. Po odhalení chyby v této posloupnosti studentka reagovala tak, že okamžitě opravila svou odpověď a omluvila se, že se pravděpodobně pouze přepsala. Je také možné, že pokud studentka ví, že si v oblasti zlomků není jistá, mohla při kategorizaci takto zadané posloupnosti být méně důsledná. To je však tvrzení, které by bylo vhodné více prozkoumat.

K náročnosti se studentka vyjádřila tak, že jí pracovní list ke kategorizaci náročný nepřišel. K úkolu naformulovat definici neklesající posloupnosti řekla: „Já ty definice moc neumím." Navzdory tomu definice obsahovala klíčové aspekty neklesající posloupnosti, i když definice není uvedena ve standardním znění. Kvantifikátor je použit korektně a není ve formě symbolu. Definice obsahovala i příkladné grafické vyjádření a poznámku, že neklesající posloupnost může být rostoucí a monotónní (obrázek 6). V tomto případě se domnívám, že studentka myslela konstantní, nikoli monotónní. Studentka, dle svého názoru, uvedla spíše vysvětlení než přímo definici, a to také zmínila v rozhovoru. Uvedla, že napsala spíše to, jak pojem chápe. Je možné, že pod pojmem „definice" si představila výraz s kvantifikátory, už jí ale nedošlo, že její „vysvětlení“ říká to samé, a je to tedy správně. Konkrétně u této studentky jsem pozorovala nižší sebevědomí, co se matematiky týče.


Skupina B
a) **Definujte co nejpřesněji co znamená, že posloupnost (a_n) je neklesající.**

Posloupnost (a_n) je neklesajici, pokud...

$a_1 \le a_2 \le a_3$... každý další člen posloupnosti (od a_1) je větší nebo roven členu předešlému
⇒ neklesající posloupnost může být : rostoucí
např. : monotónní

Obrázek 6: Definice neklesající posloupnosti respondenta 4

Po otázce, zda by svou definici po kategorizaci posloupností nějakým způsobem upravila, studentka odvětila: „Asi možná nějakou specifikaci… Ne, radši bych to už nepředělávala.“ V této odpovědi bych se opět vrátila k myšlence, že si studentka svým schopnostem moc nedůvěřuje a pod pojmem definice si představuje výraz s kvantifikátory. Domnívám se, že kombinace ji mohla vést k pocitu, že zapomněla něco zmínit (například že $n \in \mathbb{N}$). V každém případě studentka zdůraznila, že se v průběhu kategorizování k definici vracela a to způsobem, že ověřovala, zda členy posloupnosti definici splňují.

Respondent 5

Respondent 5 je jednadvacetiletý student oboru Matematika a dějepis se zaměřením na vzdělávání. Zatím nemá žádnou praxi v oboru, ale v minulosti působil jako vedoucí a výchovný pracovník na dětském táboře. Před zahájením studia na pedagogické fakultě absolvoval střední průmyslovou školu elektrotechnickou a následně studoval jeden semestr na ČVUT FEL v oboru Elektrotechnika, energetika a management.

Student na otázku, zda mu pracovní lis přišel náročný odpověděl: „Náročný to není, spíš si nepamatuju definice.“ Student dále zmínil, že pro něj úkol s definicí byl složitější a definici spíš vymýšlel.

Skupina B

***a)* Definujte co nejpřesněji co znamená, že posloupnost (a_n) je neklesající.**

Posloupnost (a_n) je neklesající, pokud... se členy posloupnosti „nechovají“ jako klesající posloupnost. Neklesající posloupnost je posloupnost, která neklesá. Podíváme se na opačný případ – klesající posloupnost. Je klesající, pokud s rostoucím „n“ její následující členy jsou menší, nežli členy jim předcházející (např. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$) Pokud tedy by se podmínka pro definici klesající posloupnosti porušila (např. $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} < 2 > \frac{1}{5}$), tak dostaneme neklesající posloupnost.

Obrázek 7: Definice neklesající posloupnosti respondenta 5

Definice, kterou student naformuloval, není správně (obrázek 7). Neobsahuje klíčové aspekty pojmu neklesající posloupnost. Student má také zatím nepříliš kvalitně uchopenou problematiku kvantifikace proměnných, i když je zřejmé, že má na tento koncept určitý intuitivní pohled. Nicméně je vidět, jak při definování student postupoval. Evidentně znal definici klesající posloupnosti, tu naformuloval správně i s konkrétním příkladem. Mylně se však domníval, že předpona ne- v pojmu neklesající posloupnost, vyjadřuje negaci pojmu klesající a tedy že každá posloupnost, která poruší definici klesající posloupnosti, bude neklesající.

Také řekl, že pracovní list s úlohami ke kategorizaci vyplňoval spíše intuitivně, ale je si vědom toho, že pokud nezná přesnou definici, mohl se dopustit systematické chyby, která se může opakovat. Student hodně mluvil o analogiích, které se snažil využívat. Typy úloh se podle něj opakují a proto se snažil je porovnávat mezi sebou a pokud si byly posloupnosti podobné, jejich kategorie určoval jednotně.

Respondenta 5 zaskočila také posloupnost $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$. Věděl správně, že tato posloupnost je konstantní, ale už si nebyl jistý, jak využít právě pojmy neklesající a nerostoucí.

Zajímavé je, jak student chápe pojmy „oboje“ a „ani jedno“. Při kategorizaci tyto pojmy prohodil u tří posloupností. Při rozhovoru bylo toto nejdéle probírané téma. „Nacházíme se ve dvou mezích, jako u funkce sinus, skáčeme sem tam, sem tam a kvůli tomu ta hodnota, když se podíváme celkově, neroste a neklesá. Je furt v nějakých mezích, proto mi přišlo, že je to oboje (nerostoucí i neklesající),“ popisoval, jak postupoval při kategorizaci první posloupnosti $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, ve které chyboval. To ukazuje, že student zatím nerozhoduje o zařazení do kategorie s využitím konkrétní definice, ale na základě vlastních parametrů, které intuitivně vyhodnocuje. Zde postupně odbočil k jinému aspektu – rozhodnutí, zda je funkce omezená. Chybu student udělal také u posloupností (a_n), kde $a_n = 3 + (-1)^n$ a u první posloupnosti zadané graficky (Obrázek 1). Jakmile jsem zkontrolovala všechny úlohy a na tuto skutečnost natrefila, neptala jsem se už na konkrétní chyby v úlohách, ale položila jsem studentovi otázku, jak tedy pojmy „oboje“ a „ani jedno“ vnímá. „Asi to vnímám úplně stejně. Nebo takhle, já to rozlišuju. Oboje to je, když ty meze jsou jakoby konstantní, když je to pila obyčejná a ani jedno je to v tom případě, když se ty funkce rozbíhají navzájem. Že ta limita prostě, nebo ty meze se mění tím, jak postupujeme s *n* do nekonečna,“ snažil se vysvětlit svůj pohled.

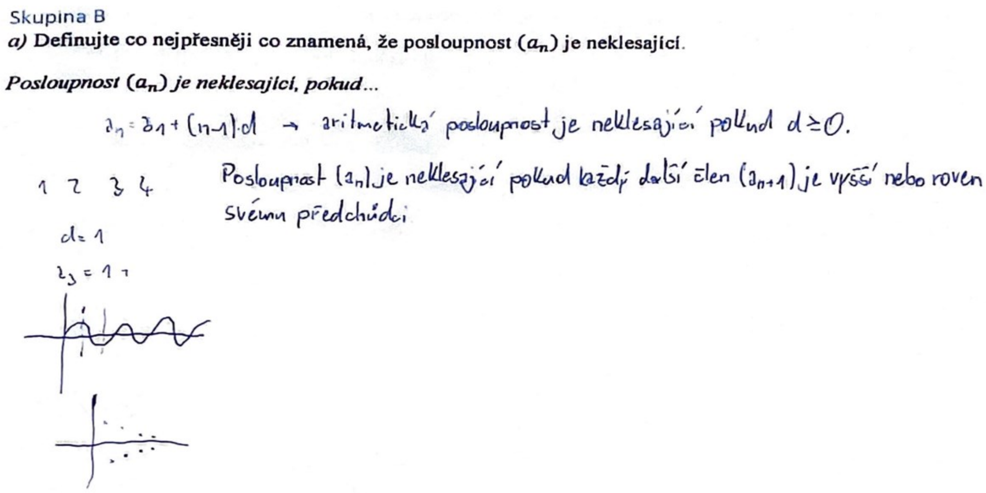
Na základě studentova vysvětlení se zdá, že jeho kategorizace posloupností není v souladu s definicí, kterou si sám (nesprávně) naformuloval. Je možné, že jeho vnímání bylo ovlivněno delším studiem na vysoké škole a zaměřením na matematiku v tomto prostředí. To ho mohlo vést k hledání složitějších souvislostí ve středoškolské látce, než je v daném případě nutné.

Student uvedl, že by ve své definici pravděpodobně nic neměnil, ale znovu upozornil na fakt, že definice obecně neovládá a postupoval by stejným způsobem – odrazil by se od definice klesající posloupnosti.

Respondent 6

Respondent 6 je jednadvacetiletý student studující obor Matematika a dějepis se zaměřením na vzdělávání. Kromě studia se aktivně věnuje doučování, a to jak žáků základních škol, tak i studentů gymnázia. Na Pedagogickou fakultu přešel po roce studia na stavební fakultě VUT v Brně.

Tento student neudělal v kategorizaci žádnou chybu. Také se vyjádřil, že mu pracovní listy nepřišly náročné. Při rozhovoru se ale zmínil, že si nebyl jistý posloupnostmi, o kterých rozhodnul, že nejsou ani neklesající, ani nerostoucí. „Nevím, já jsem totiž to tady nějak nadefinoval sám a potom jsem se snažil držet té vlastní definice. Nevím, jestli je správná, nicméně jsem se toho nějak snažil držet. To znamená, že ve chvíli, kdy je tady třeba tahle konkrétní, když je to $(0, 1, 0, 2, \dots)$ tak jsem nevěděl, jestli když je tam pořád 0, tak jestli je to automatický, že je to neklesající. Jenom jsem nevěděl, tak jsem tam psal ani 1 a nevím, jestli je to správně," vysvětloval své myšlenky. Toto vyjádření nám říká, že student rozumí pojmu „definice" a dokáže posloupnosti kategorizovat v souladu s definicí, kterou sám naformuloval i přes to, že si není jistý její správností.


Skupina B

a) **Definujte co nejpřesněji co znamená, že posloupnost (a_n) je neklesající.**

Posloupnost (a_n) je neklesající, pokud...

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ → aritmetická posloupnost je neklesající pokud $d \geq 0$.

1 2 3 4

Posloupnost (a_n) je neklesající pokud každý další člen (a_{n+1}) je vyšší nebo roven svému předchůdci

$d = 1$

$a_3 = 1$

Obrázek 8: definice respondenta 6

Student pravděpodobně neznal přesnou definici neklesající posloupnosti, z toho důvodu začal aritmetickou posloupností a zkoušel si tuto vlastnost přestavit na ní, a tedy pomocí diference. Následně obecnou definici správně naformuloval (mohl by doplnit značení

„předchůdce“). První obrázek na Obrázku 8 souvisí s myšlenkou studenta (zmiňuje „úsek“), kterou také popsal v rozhovoru v rámci odpovědi na otázku, zda se při kategorizaci vracel k definici, popřípadě jakým způsobem s ní pracoval: „Jo trošku, právě já jsem si říkal, jestli právě, když je to nula, tak teoreticky vzato by to mohlo být, jakože to neklesne pod tu nulu nikdy, ale nadefinoval jsem si to předtím tak, že to neplatí, že ve chvíli, když je to na nějakým úseku klesající, tak už to nebude neklesající,“ popisoval student. Tímto nám poskytnul vhled, jak si pojem sám vysvětlil a pracoval s ním, i když to vlastně nenapsal do samotné definice.

Možnost upravit definici respondent 6 nevyužil, ale zmínil, že by možná něco doplnil, kdyby měl k dispozici více času a potřeboval by déle přemýšlet.

Obecná pozorování

V této kapitole shrneme obecná pozorování z experimentu, ve kterém respondenti kategorizovali posloupnosti a poskytli své definice neklesající posloupnosti. Zaměříme se na celkové vnímání úkolů respondenty, opakující se chyby, způsob práce s definicemi a zajímavé poznatky z jejich přístupů. I přes malý počet respondentů se ukázala řada zajímavých trendů a individuálních přístupů, které by mohly být užitečné pro zkvalitnění výuky matematiky.

Nejprve si shrneme chybovost všech respondentů (viz tabulka 1) i s pravděpodobnými důvody, proč chybu udělali. Ty jsou založeny na analýze rozhovorů popsaných předchozí kapitole.

		Chyby v kategorizaci	**Pravděpodobný důvod chyb/y**
Skupina A	**Respondent 1**	Posloupnost zadaná graficky – obrázek 2	nepozornost
	Respondent 2	$(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots)$	Neúplné porozumění definice
	Respondent 3	Bez chyby	

Skupina B	**Respondent 4**	$(10\frac{1}{2}, 10\frac{3}{4}, 10\frac{7}{8}, 10\frac{15}{16}, 10\frac{31}{32}, 10\frac{63}{64}, 10\frac{127}{128}, 10\frac{255}{256}, \dots)$	Problémy se zlomky
	Respondent 5	$(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ (a_n), kde $a_n = 3 + (-1)^n$ Posloupnost zadaná graficky – obrázek 1	Nesprávná definice a neporozumění pojmů
	Respondent 6	Bez chyby	

Tabulka 1: Přehled chybovosti respondentů

Všichni respondenti shodně hodnotili pracovní listy s úlohami jako nenáročné. To naznačuje, že testované koncepty jsou pro studenty oboru Matematika se zaměřením na vzdělávání na dané úrovni (druhý semestr bakalářského studia, po absolvování kurzu matematické analýzy) srozumitelné a zvládnutelné. I když se někteří respondenti zpočátku vyjádřili s jistou mírou nejistoty, po seznámení s definicí a příklady posloupností se jim práce se zadanými úlohami bez větších obtíží dařila. Zpětná vazba respondentů naznačuje, že úroveň obtížnosti byla přiměřená jejich znalostem a schopnostem. Na druhou stranu, 4 studenti ze 6 v rozhovoru uvedli, že již nějakou vysokou školu matematického zaměření studovali, lze tedy očekávat, že v případě širší studie napříč celým ročníkem by byla úspěšnost spíše nižší.

Některé úlohy se ukázaly jako obzvlášť zajímavé pro studenty a vyvolaly diskuzi o interpretaci pojmů neklesající a nerostoucí posloupnost. Patřily mezi ně příklad konstantní posloupnosti $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, \dots)$ a poslední posloupnost zadaná graficky, kde respondenti často zmiňovali, že určení této posloupnosti nebylo jasné na první pohled. Příklad konstantní posloupnosti poukázal na důležitost jasné definice a důkladného pochopení jejích implikací, aby byl student schopen kategorizovat posloupnost správně, jako nerostoucí a zároveň neklesající. Posloupnost zadaná graficky by měla studentům pomoci k jasné představě o tom, jak posloupnost funguje a následně ověřit podmínku definice.

Mnoho respondentů intuitivně využívalo grafickou reprezentaci posloupností k usnadnění jejich kategorizace. V některých případech si studenti pro posloupnosti zadané vzorcem pro n-tý člen vypisovali prvních několik prvků, aby si lépe ujasnili jejich chování a usnadnili tak jejich zařazení do dané kategorie. Tyto strategie naznačují, že studenti aktivně pracují s informacemi a hledají různé způsoby, jak je interpretovat a kategorizovat.

Respondenti, kteří měli za úkol sami formulovat definici neklesající posloupnosti, dokonce i v tak malém počtu ukázali různorodé přístupy. Zatímco respondenti 4 a 6 správně identifikovali klíčové vlastnosti neklesající posloupnosti a uvedli příklady, respondent 5 se s úkolem potýkal a jeho definice obsahovala chyby a nejasnosti. Tyto individuální rozdíly odrážejí různé úrovně znalostí a pochopení této oblasti matematiky, s nimiž studenti do studia na Pedagogické fakultě přicházejí. Po absolvování druhého semestru a prvního kurzu matematické analýzy na této fakultě bychom však čekali, že všichni studenti budou mít koncept posloupnosti a jejích vlastností důsledně promyšlení a jejich znalosti budou na srovnatelné úrovni. Uvedené výjimky nás tedy překvapily.

Většina respondentů se při kategorizaci posloupností podle svých slov myšlenkově vracela k definici neklesající posloupnosti, aby ověřili, zda daná posloupnost splňuje všechny požadované vlastnosti. Někteří studenti se k definici vraceli opakovaně, zatímco jiní ji používali spíše jako kontrolní nástroj. I když se u některých respondentů objevily chyby v kategorizaci, jejich snaha o práci s definicí naznačuje porozumění tomu, jak správně klasifikovat uvedené příklady v souladu s definicí.

Respondenti 1 a 3, kteří dostali formulovanou definici, prokázali jistotu v kategorizaci a nechybovali z důvodů, které by vyplývali z neporozumění definice. Důvod chyby respondentky 2 vyplývá pouze z částečného neporozumění definice neklesající posloupnosti. Tento fakt naznačuje, že předložená definice jim poskytla pevný základ pro rozhodování. Naopak respondenti, kteří si definici sami formulovali, sice neměli tendenci více chybovat, ale v rozhovorech působili, že si jsou méně jistí svými odpověďmi. Někteří z nich (respondent 5) se snažili definici sestavit na základě analogií nebo intuitivního přístupu, což vedlo k nepřesnostem a chybám v jejich kategorizaci.

Jak jsme zmiňovali v kapitole 2.3, respondenta pilotního experimentu zmátlo pořadí členů a_{n+1} a a_n v definici, která mu byla předložena. Nikdo z respondentů 1-3 se o ničem podobném nezmínil a respondenti, kteří měli formulovat svou definici také postupovali nejprve od členu a_{n+1}.

Další zajímavé poznatky z experimentu je možné shrnout takto:

- Zaujala nás také jedno zdůvodnění respondenta 5. Ten uvedl: „Nacházíme se ve dvou mezích, jako u funkce sinus,“. Student se pravděpodobně snaží najít souvislost mezi funkcemi, posloupnostmi a jejich vlastnostmi. Je možné, že student byl ovlivněn svým delším studiem na vysoké škole nebo jiným způsobem tyto pojmy nepřesně propojil.
- Respondenti často zmiňovali, že definice jim pomohly zpřesnit kategorizaci, i když někteří přiznali, že si definice museli připomenout a že je neovládají perfektně.
- Někteří respondenti se potýkali s interpretací posloupností, které obsahovaly nulové prvky. To naznačuje, že je důležité věnovat dostatečnou pozornost specifickým případům.

3 Diskuze

Představená studie byla zaměřena na rozdíly v práci s definicí a následné kategorizaci mezi dvěma skupinami studentů. První skupina dostala za úkol na základě zadané definice pojmu nerostoucí posloupnost kategorizovat konkrétní příklady posloupností, zatímco druhá skupina si definici formulovala sama. Cílem bylo zjistit, zda tyto dva přístupy ovlivňují úspěšnost studentů, jak bylo naznačeno v článku Alcockové a Simpsona (2016).

3.1 Porovnání skupin A a B po analýze experimentu

Studenti, kterým byla předložena definice (skupina A), měli tendenci se k této definici často vracet během kategorizace a ověřovali s její pomocí, zda skutečně všechny členy posloupnosti splňují danou podmínku. To bylo patrné u respondentů 1 a 3. Museli ji pouze správně interpretovat a aplikovat. Tento postup jim pomohl ověřovat, zda všechny členy posloupností splňují zadanou podmínku. I přesto, že všichni tři respondenti (1,2,3) zmiňovali, že se jednalo o nenáročný úkol, se objevily chyby. Respondentka 2 například chybovala při kategorizaci konstantní posloupnosti. Rozhovor ukázal, že studentka nerozumí pojmu neklesající a zároveň nerostoucí posloupnost, a proto konstantní posloupnost označila jako ani nerostoucí ani neklesající i po vyzvání. Respondentka 1 nesprávně zařadila posloupnost zadanou graficky (obrázek 2), na chybu si však sama přišla a sama opravila svou odpověď. Respondentka 3 měla všechny odpovědi bez chyby a pouze upozorňovala na úlohy, kde by mohli chybovat ostatní a proč. Tím ukázala, že pojmům opravdu rozumí a umí s nimi správně pracovat.

Studenti, kteří si definici formulovali sami (skupina B), ukázali jiný přístup k řešení úkolů. Z rozhovorů vyplynulo, že respondenti 5 a 6 často využívali intuici a své vlastní chápání konceptu neklesající posloupnosti. Vyjádřit adekvátní definici z vlastního chápání pojmu pro studenty mohlo být v této fázi porozumění náročnější než aplikovat naformulovanou. Například respondentka 4 si vytvořila definici, která byla kompletní a přesná, což vedlo k bezchybným výsledkům (studentka nechybovala na základě nesprávné definice ani práce s ní). Avšak respondent 5 měl problémy s formulací definice a při kategorizaci udělal několik chyb. Zároveň se nedokázal držet své nesprávné definice a při kategorizaci se jí nedržel. To naznačuje, že schopnost vytvořit správnou a úplnou definici je klíčová pro úspěšnou kategorizaci. Respondent 6 nepůsobil úplně sebejistě, jeho definice ale byla správná a v kategorizaci také chybu neudělal. V rozhovoru zmínil, že cílil na to, aby se své naformulované definice držel při určování kategorie, což byl zcela odlišný přístup od respondenta 5.

Studenti z obou skupin se v rozhovorech zmiňovali, že se k definici během kategorizace myšlenkově vraceli. Bylo by zajímavé zjistit, zda by bylo možné v souvislosti s tímto jevem pozorovat nějaký rozdíl mezi oběma skupinami na větším vzorku studentů. Žádný z respondentů také nevyužil možnost svou definici upravit (což je zajímavé zejména u respondenta 5, jehož formulaci nelze považovat za definici).

Většina studentů z obou skupin uvedla, že test nepovažovala za náročný, ale některé konkrétní úlohy byly hodnoceny jako obtížné nebo zajímavé. Například posloupnost zadaná graficky (obrázek 2 na s. 21) byla často zmiňována jako problémová. K tomu se také vyjadřovali oba respondenti z pilotního experimentu, že si nebyli jistí správnou odpovědí na první pohled, i když u jiných posloupností zadané grafem je názornost většinou výhodou. Studenti z obou skupin měli tendenci přepisovat posloupnosti zadané vzorcem do částečného výčtu prvků, nebo posloupnosti zadané výčtem prvků do grafické podoby, aby si usnadnili jejich kategorizaci.

3.2 Výzkumné otázky a očekávání

Očekávání 1 a 2, nízká chybovost při kategorizaci a vysoká kvalita definic se potvrdila. Jedinou výjimkou byl respondent 5, který nedokázal naformulovat správnou definici neklesající posloupnosti a při kategorizaci udělal tři chyby, a zároveň se při určování kategorií posloupností své definice nebyl schopen držet. Ostatní respondenti neudělali více než jednu chybu. V definici neklesající posloupnosti respondenta 5 se vyskytly všechny očekávané chyby (očekávání 3 a 4). U respondentů 4 a 6 definice obsahovaly všechny hlavní aspekty, pouze nezmínili, že *n* jsou z oboru přirozených čísel (částečně potvrzuje očekávání 3). Páté a poslední zmíněné očekávání – studenti, kterým definici neklesající posloupnosti předložíme my, s ní nedokážou pracovat na takové úrovni, jako studenti, kteří si definici naformulují sami – se nepotvrdilo. S definicí neuměli pracovat dva respondenti, respondentka 2 a již zmíněný respondent 5. Respondentka 2, která konstantní posloupnost nezařadila do kategorie „nerostoucí a zároveň neklesající“. Pomocí definice tedy nedokázala odvodit správnou kategorii. To naznačuje neúplné porozumění definice neklesající posloupnosti. Nenaplněné očekávání si vysvětlujeme tím, že jsme pro experiment vybrali respondenty, kteří byli příliš zkušení a většina z nich získávala další vzdělání ještě před tím, než nastoupili na Pedagogickou fakultu. Více tuto myšlenku rozvíjíme níže.

Zjištění z naší studie nám ukázala, že co se týče úspěšnosti při kategorizaci, respondenti obou skupin dosáhli téměř shodných výsledků. V čem se ale tyto skupiny liší, je způsob práce s definicí. Studenti, kteří dostali předem formulovanou definici, měli tendenci ji využívat jako pevný referenční bod. Tito studenti projevovali při kategorizaci větší jistotu. Naopak studenti, kteří si museli definici formulovat sami, projevovali větší nejistotu při aplikaci jejich vlastních definic. Tento rozdíl je částečně dán už samotným zadáním – studenti pracují s definicí s větší jistotou, protože ví, že je zadána správně. Nejistotu korektnosti vlastní definice ukázal například respondent 6, když říkal: „Nevím, já jsem totiž to tady nějak nadefinoval sám a potom jsem se snažil držet té vlastní definice. Nevím, jestli je správná…“.

3.3 Další pozorování

Za zmínku stojí i stručná analýza matematického vyjadřování při rozhovorech. Na základě odpovědí i takto malého vzorku respondentů lze konstatovat, že kvalita matematického vyjadřování se mezi jednotlivými respondenty poměrně liší. Někteří respondenti, jako například Respondent 1, projevují schopnost jasně a srozumitelně popsat svůj myšlenkový proces a správně využívají matematickou terminologii. To vypovídá o jejím důkladném pochopení definice a schopnosti aplikovat ji na konkrétní příklady. Na druhou stranu někteří respondenti, jako Respondent 5, vykazují nedostatky v přesnosti a konzistenci matematického vyjadřování. Jeho výroky jsou z hlediska matematické přesnosti nejasné a nesprávně interpretuje pojmy, což naznačuje, že student spíše intuitivně manipuluje s pojmy, než aby vycházel z přesných matematických definic. Konkrétně není zřejmé, zda rozumí tomu, jaký význam má v definici obecný kvantifikátor nebo co přesně znamenají pojmy „oboje“ a „ani jedno“. Pro respondenty našeho experimentu lze říci, že schopnost správně kategorizovat posloupnosti a aplikovat matematické definice závisí také na schopnosti přesného matematického vyjadřování.

Jak jsme již zmínili v obecném pozorování, ve skupině respondentů, kteří dostali definici naformulovanou, studovali dva ze tří studentů před nástupem na Pedagogickou fakultu na jiné vysoké škole. Studenti s předchozím studiem, kde byla součástí studijního programu i matematika (v tomto případě mluvíme o Matematicko-fyzikální fakultě UK a Fakultě architektury ČVUT), mohli mít silnější základy v matematice ve srovnání s respondentem bez předchozího matematického studia. Předchozí znalosti jim mohli zásadně usnadnit řešení všech předložených úloh.

Ve druhé skupině se na vysoké škole vzdělávali respondenti 5 a 6 (v tomto případě konkrétně fakulta elektrotechnická na ČVUT a stavební fakulta na VUT). Respondent 5 uvedl, že typy úloh se podle něj opakují, a proto je srovnával mezi sebou a určoval jejich kategorie jednotně, pokud si byly posloupnosti podobné. Tento přístup odpovídá teorii prototypů, která popisuje, že lidé často kategorizují objekty na základě jejich podobnosti s typickými příklady neboli prototypy, spíše než podle striktních definic (Rosch, 1973). Prototypy zahrnují nejběžnější nebo nejtypičtější vlastnosti objektů v dané kategorii a slouží jako referenční body při kategorizaci nových objektů (Rosch, 1978). Tento intuitivní způsob myšlení je přirozený a efektivní, ale v matematice, kde jsou přesné definice klíčové, může vést k systematickým chybám. Respondent 5 tak často docházel k nesprávným závěrům, což potvrzuje význam formálního pochopení matematických pojmů a definic vedle intuitivního přístupu založeného na podobnosti. Zajímavé na reakcích respondenta 5 také je, že spíše než s nějakým centrálním prototypem neklesající posloupnosti, porovnával dané příklady podle svého popisu vzájemně nebo ve skupinách.

3.4 Rozlišení studentů podle rostoucích zkušeností s definicemi matematických pojmů

Jeden z možných důsledků této studie naznačuje, že s rostoucími zkušenostmi studentů s danými pojmy se zmenšuje vliv přístupu k definici (ve smyslu zadání v rámci experimentu – tedy předložená definice x vlastní formulce definice) na jejich výkon. Jinými slovy, čím lépe studenti chápou koncept neklesajících posloupností, tím méně záleží na tom, zda jim byla definice předložena, nebo si ji museli sami formulovat.

Na základě této úvahy lze formulovat následující hypotézu. V procesu učení matematických konceptů můžeme předpokládat tři etapy vývoje, které se liší vlivem přístupu k definici na výkon studentů. První etapu bychom mohli charakterizovat tak, že studenti obecně neumí příliš pracovat s definicemi, mají problémy využít ke kategorizaci předloženou definici i formulovat svou vlastní a na jejím základě se rozhodovat. U studentů, kteří se v této etapě nachází, je těžké odhadnout, jak by si se zadáním A i B vedli. Ti, kteří obdrží formulovanou definici, mohou mít výhodu, pokud mají aspoň rámcové zkušenosti s definováním pojmů (nebo alespoň ověřováním definic) a poskytnutá definice jim umožní rychleji a přesněji o konkrétních příkladech uvažovat (např. respondent 3). Studenti, kteří si musí definici formulovat sami, mohou čelit obtížím, protože jejich schopnost vytvořit přesnou a funkční definici může být omezena jejich zatím nedostatečnými dosavadními znalostmi a zkušenostmi s daným konceptem (např. respondent 5). Tento rozdíl může vést k chybám v kategorizaci a k nesprávnému pochopení pojmů, což může bránit jejich dalšímu pokroku (respondent 5 a částečně respondent 2).

Druhá etapa odpovídá vzorku studentů, které zahrnuli do svého experimentu Alcocková a Simpson (2016), kteří ukázali, že se situace mění a výkonnější mohou být spíše studenti, kteří si definici formulují sami a studenti, kteří musí svou definici vysvětlit. Proces formulace vlastní definice a případně jejího vysvětlení pak zřejmě funguje jako jakýsi akcelerátor jejich rozhodování a umožňuje hlubší nahlédnutí daného pojmu. Zároveň se dá předpokládat, že tím, že si studenti definici sami vytvoří, se studenti aktivně zapojují do procesu učení, což podporuje lepší osvojení a aplikaci nových znalostí (Chi, 2009). Samotná aktivita formulování definice v této etapě pravděpodobně stimuluje kognitivní procesy, které vedou k lepšímu pochopení a efektivnějšímu využití pojmů v praxi.

V třetím stádiu se rozdíly mezi oběma přístupy postupně vytrácejí. Jakmile je poznatek natolik pevně zakotven v kognitivní struktuře studenta, již není významný rozdíl v tom, zda student obdržel definici formulovanou nebo si ji musel formulovat sám. Obě skupiny studentů dosahují srovnatelné úrovně porozumění a schopnosti aplikace pojmů, protože jejich znalosti jsou již dostatečně integrovány do jejich kognitivní struktury. Respondenti této studie byli přesně v tomto stádiu, a proto jsme nebyli schopni z experimentu vyvodit žádné obecnější závěry, protože studenti (respektive skupiny) mezi sebou neměli významné rozdíly v řešení úloh. Jediným drobným rozdílem byla zmiňovaná nejistota v reakcích respondentů ze skupiny, která si formulovala vlastní definice.

Tato hypotéza má implikace pro pedagogickou praxi. Při počátečním seznamování s novými pojmy může být efektivnější vést studenty k budování schopnosti umět definice správně formulovat. Abychom tuto fázi zkrátili, mohli bychom schopnost se studenty budovat pomocí co nejvíce pojmů. Jakmile však studenti dosáhnou určité úrovně porozumění, chtěli bychom u nich co nejvíce podpořit hlubší kognitivní proces a lepší osvojování pojmů (Chi, 2009). Způsob, jak tohoto cíle dosáhnout, zatím není jednoznačně daný. Nakonec, v pokročilých stádiích učení, může být důležité zaměřit se na aplikaci pojmů, protože rozdíly mezi metodami se již stávají irelevantními. Aktivním procvičováním formulací definic (například pomocí zajímavých a netypických příkladů a protipříkladů) a vysvětlování matematických pojmů u studentů podporujeme obecnou práci s definicemi a ti si tak postupně osvojí tuto schopnost a můžou jí dále úspěšně využít v podobných situacích a u dalších matematických konceptů.

3.5 Implikace do výuky matematiky a přínos do praxe učitele

Zjištění prezentované v této práci spolu se závěry z článku (Alcock & Simpson, 2016) přinášejí cenné poznatky pro pedagogickou praxi učitelů matematiky. Zkoumání vlivu pořadí činností (definování, vysvětlování, kategorizace) na porozumění konceptu neklesající/nerostoucí posloupnosti mohou být především podkladem pro zamyšlení se praktikujících učitelů o tom, jak přistupují k výuce matematických pojmů a jejich definicí. Proto k následujícím obecným závěrům uvádíme vždy návrh nějaké aktivity či úlohy, které představují jeden z možných způsobů, jak s těmito fenomény může pracovat učitel ve výuce.

Studie prezentovaná v této práci zdůrazňuje důležitost aktivního zapojení studentů do procesu učení. Namísto pasivního přijímání hotových definic a vysvětlení by měli být studenti povzbuzováni a motivováni k tomu, aby si pojmy sami definovali a vysvětlovali.

To jim umožňuje nejenom hlubší pochopení daného pojmu, ale také pravděpodobně snadnější porozumění novým pojmům.

V praxi bychom tuto myšlenku mohli aplikovat například prostřednictvím následující aktivity:
Úkolem studentů je vytvořit příklady neklesajících posloupností podle zadaných instrukcí. Například:

- Každý další člen posloupnosti je větší než člen předchozí.
- Každý další člen posloupnosti je o polovinu větší než člen předchozí.
- Každý člen posloupnosti se opakuje dvakrát a hodnoty posloupnosti rostou o 2, po každých dvou členech.
- …

Poté společně se studenty sepíšeme vlastnosti těchto posloupností a necháme je o nich diskutovat. Můžeme pokládat doplňující otázky a podporovat jimi aktivní účast studentů. Na závěr se studenti pokusí na základě svých pozorování a diskuze formulovat vlastní definici neklesající posloupnosti.

Učitelé mohou vést studenty k diskuzím o daném tématu, pokládat jim podnětné otázky a povzbuzovat je k vyjádření vlastních myšlenek a argumentů. Tento přístup může být studentům nápomocný při pochopení dané problematiky a je možné jich dosáhnout například prostřednictvím skupinových prací. Ty dávají studentům možnost si mezi sebou ukázat různé pohledy na věc a také svými slovy vysvětlovat látku a rozvíjet spolupráci. Skupinové práce přináší také pocit volnosti a možnost se vyjádřit před menší skupinou studentů může být komfortnější než před celou třídou.

Do výuky bychom mohli tento aspekt práce s definicemi zařadit tímto způsobem:
Na úvod se zeptáme studentů, co si představí pod pojmem "neklesající posloupnost". Zapíšeme jejich nápady na tabuli. Rozdělíme studenty do skupin. Předložíme studentům seznam konkrétních posloupností i s jejich správným zařazením do kategorií. Necháme studenty diskutovat o znění definice neklesající posloupnosti a po skončení s nimi shrneme hlavní body jejich diskuzí a společně korektní definici naformulujeme.

Řešené kategorizační úlohy, podobné těm, které byly použity v tomto experimentu, by pak mohly sloužit jako nástroj pro zjištění, zda studenti chápou jednotlivé části definice. Zde ještě poznamenejme, že správná kategorizace předložených příkladů nemusí nutně znamenat pochopení definice. Někteří respondenti dokázali správně kategorizovat příklady, i když neuměli definici korektně formulovat nebo používat. Kategorizaci studenti mohli provádět například na základě prototypů nebo vzájemné podobnosti posloupností. Netvrdíme přitom, že to je v nějakém smyslu špatný přístup, ale spíše to nepředstavuje cíl, jehož se při práci s definicemi matematických pojmů snaží učitelé dosáhnout.

Studie naznačuje, že pořadí činností (definování, vysvětlování, kategorizace) může mít vliv na učení různých studentů. Proto je důležité tuto variabilitu zohledňovat a rozlišovat výuku tak, aby vyhovovala potřebám a preferencím jednotlivých studentů.

Učitelé by také měli studenty vést k uvědomění si vlastních procesů učení a rozvíjení metakognitivních dovedností. Reflexe nad tím, jak s pojmy pracují, může studentům pomoci v dalším učení a zlepšit jejich studijní strategie.

Konkrétní využití ve výuce si dovedeme představit například prostřednictvím této aktivity:

Nejprve zahájíme diskuzi se studenty o významu definic v matematice. Zeptáme se jich, proč je důležité mít korektní definice a jak definice ovlivňují jejich schopnost řešit problémy. Poté začneme diskuzi o tom, zda je nezbytné naformulovat správnou definici neklesající posloupnosti, aby bylo možné kategorizovat konkrétní posloupnosti, které studentům předložíme. Konkrétně bychom postupovali prostřednictvím následujících otázek a úkolů (ideálně v psané podobě tak, aby každý svou odpověď musel naformulovat samostatně):

- Proč je pro nás důležité mít přesné definice matematických pojmů?
- Definujte neklesající posloupnost.
- Je možné rozhodnout o každé posloupnosti, kterou si dovede představit, zda je neklesající nebo ne pouze na základě vaší definice?
- Jak je možné tuto zkušenost využít při dalším studiu matematiky?

Na závěr aktivity shrneme hlavní výstupy z odpovědí žáků.

Výše uvedené závěry a navržené aktivity mohou být využity k práci s definicemi a tím posílit jejich porozumění matematickým pojmům.

3.6 Limity studie, sebereflexe

V této kapitole se zaměříme na limity a slabé stránky této studie a na možnosti, jak ji v budoucnu vylepšit. Při realizaci této studie jsem přišla na několik limit, které ovlivnily výsledky a interpretaci dat. Tyto limity je důležité zmínit, aby bylo možné správně vyhodnotit platnost a přenositelnost našich zjištění. Sebereflexe tohoto výzkumu poskytuje také pohled na možné oblasti zlepšení a navrhuje budoucí směry pro další výzkum.

Jedním z hlavních limitů této studie byl malý, a ne zcela reprezentativní vzorek respondentů (n = 8). To omezuje možnost zobecnit zjištění na širší populaci studentů, jelikož zkušenosti a přístupy k učení se mohou lišit v závislosti na geografické lokalitě[5], kultuře a akademické disciplíně[6] studentů. Zvýšení rozsahu a různorodosti vzorku v budoucích studiích by posílilo věrohodnost a aplikovatelnost závěrů. Zařazení studentů z rozmanitých prostředí a s různou úrovní zkušeností s matematikou by umožnilo lépe reflektovat realitu a posunout poznatky k širšímu publiku.

Při výběru studentů nebyly kontrolovány všechny potenciální faktory, které mohly ovlivnit výsledky studentů, jako je jejich motivace, kognitivní styl a učební strategie či předchozí zkušenosti se studiem matematiky. Jeden z překvapivých faktorů byla také skutečnost, že většina respondentů (čtyři z šesti) už před studiem na Pedagogické fakultě studovali na jiných vysokých školách. Daní studenti díky tomu mohli mít lépe rozvinutou schopnost práce s matematickými pojmy a definicemi než jejich kolegové bez těchto zkušeností. To však v této studii nebylo jediné, co se ukázalo. Domnívám se, že předchozí vysokoškolské studium v technickém oboru zahrnující i matematiku mohlo ovlivnit studenty i opačným způsobem. Příkladem uveďme respondenta 5, který ve středoškolské látce hledal souvislosti, se kterými se na střední škole u pojmu *Posloupnosti* jistě nesetkal. Byl pravděpodobně ovlivněn výukou vysokoškolské matematiky a nedokázal všechny své znalosti oddělit a smysluplně s nimi pracovat.

[5] Stejně jako naši respondenti, kteří podle získaných informací studovali před nástupem na Pedagogickou fakultu v různých částech republiky, Respondentka 1 dokonce na Slovensku.
[6] V tomto kontextu myslíme specifickou oblast znalostí a dovedností, kterou studenti rozvíjí v průběhu svého studia.

3.7 Možné návaznosti

I když tato studie přinesla cenné poznatky o procesu učení a osvojování si matematických konceptů, otevírá se prostor pro hlubší prozkoumání, rozšíření a případnou úpravu některých oblastí.

Pro budoucí výzkum by bylo přínosné zvýšit počet účastníků a zároveň zajistit jejich větší různorodost. Toto zahrnuje zařazení studentů z různých geografických lokalit, kulturních zázemí a s různou úrovní matematických znalostí a zkušeností. Takové rozšíření by umožnilo lépe reflektovat rozmanitost skutečné studentské populace a poskytnout výsledky, které jsou více zobecnitelné a aplikovatelné na širší škálu studentů. Do takové studie bych zařadila studenty, kteří mají menší zkušenosti, ale zároveň vědí, že se studiu matematiky chtějí dále věnovat. Takoví studenti by byli schopni o matematických konceptech mluvit s dostatečnými znalostmi získanými během jejich dosavadního studia. Vzhledem k jejich zájmu se matematice věnovat i nadále předpokládám, že této oblasti učení věnovali dostatečné množství pozornosti.

Kdybychom studii pojali z dlouhodobějšího hlediska, mohli bychom lépe pozorovat, jak se přístup studentů k matematickým pojmům postupem času mění. To by nám mohlo potvrdit důsledek studie popisovaný v kapitole 3.1. Kromě sledování okamžitých výsledků by bylo možné zaznamenávat, jak se studentům daří aplikovat získané znalosti, jak se jejich porozumění matematickým konceptům vyvíjí v průběhu času a jaké dlouhodobé výhody přinášejí různé výukové strategie. Tento přístup by mohl odhalit další faktory, které ovlivňují efektivitu učení, a poskytnout cenné informace pro pedagogy.

Dalším krokem by mohlo být rozšíření výzkumu na jiné matematické koncepty mimo současné zaměření na nerostoucí a neklesající posloupnosti. Zkoumání dalších oblastí, jako jsou například algebraické struktury, geometrické pojmy nebo diferenciální a integrální počet, by mohlo přinést nové poznatky o tom, jak studenti vnímají a kategorizují různé typy matematických objektů. Tento širší pohled by mohl přispět k obecnému porozumění procesů učení v matematice.

Závěr

V této práci jsme se pokusili prozkoumat vztah mezi definováním a kategorizací matematických pojmů na příkladu neklesající posloupnosti. Cílem bylo prozkoumat, jak různé přístupy k definování ovlivňují schopnost studentů správně kategorizovat matematické objekty, a zda si studenti lépe osvojí koncepty, pokud jsou aktivně zapojeni do formulace definic. Kvůli malému vzorku respondentů jsme nemohli z analýzy experimentu vyvodit jednoznačný závěr, kterým by se tato domněnka potvrdila či vyvrátila. Pro obecnější závěry bychom museli změnit metodologii výzkumu a upravit vzorek respondentů.

I přes uvedené limity poskytuje tato studie zajímavé poznatky o procesu vývoje a osvojení si nových pojmů z pohledu studenta. Rozlišení tří stádií vývoje učení přináší nový pohled na dynamiku učení a zdůrazňuje důležitost různých přístupů v různých fázích učení.

Psaní této práce mi umožnilo získat hlubší vhled do procesu experimentu, analýzy dat a také vhled do matematických pojmů a tomu, jak s nimi pracujeme. Naučila jsem se, jak pečlivě plánovat a designovat výzkum, stejně jako jak důkladně dokumentovat a prezentovat své zjištění. Práce na tomto projektu mi rovněž pomohla rozvinout schopnost reflektovat vlastní práci, což jsou dovednosti, které jsou neocenitelné nejen v akademickém prostředí, ale i v praktické pedagogické činnosti.

Seznam použitých informačních zdrojů

Alcock, L., & Simpson, A. (2017). Interactions between defining, explaining and classifying: the case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies In Mathematics*, *94*(1), 5-19. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9709-4

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Chi, M. T. H. (2009). Active-constructive-interactive: A conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in Cognitive Science, 1*(1), 73-105.

Janda, D. (2020). *Simple categorization of mathematical objects: Examining students' decisions* [Disertační práce]. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Jarník, V. (1974). *Diferenciální počet I* (6 vyd.). Academia.

Krynický, M. (2020). *Posloupnosti*. Realisticky.cz. Dostupné 9 červenec 2024, z http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20SŠ/08%20Posloupnosti/01%20Posloupnosti%20a%20jejich%20vlastnosti/01%20Posloupnosti.pdf

Krynický, M. (2020). *Vlastnosti posloupností I*. Realisticky.cz. Dostupné 9 červenec 2024, z http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20SŠ/08%20Posloupnosti/01%20Posloupnosti%20a%20jejich%20vlastnosti/06%20Vlastnosti%20posloupností%20I.pdf

Lakoff, G. (1987). In *Women, Fire, and Dangerous Things: Whaat Categories Reveal about the Mind* (s. 5-57). The University of Chicago Press.

Mišovič, J. (2019). *Kvalitativní výzkum se zaměřením na polostrukturovaný rozhovor*. Slon.

Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky* (10. vydání). Prometheus.

Rosch, E. (1973). Natural categories. *Cognitive Psychology, 4*(3), 328-350.

Rosch, E. (1978). Principles of categorization. In E. Rosch & B. B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 27-48). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2000). Learning mathematics as a qualitative leap: Further thoughts on learning from example. *Journal of Mathematical Education, 69*(1), 32-59.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Seznam příloh

Příloha 1 – Pracovní list skupiny A

Příloha 2 – Pracovní list skupiny B

Příloha 3 – Seznam posloupností ke kategorizaci se správným řešením