Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Porozumění vybraným funkcím u žáků středních škol

Understanding of particular function by high school students

Šárka Matějovská

Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.
Studijní program:	Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy
Studijní obor:	Matematika jednoobor

2024

Odevzdáním této diplomové práce na téma Porozumění vybraným funkcím u žáků středních škol potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 11.7.2024

Ráda bych poděkovala vedoucímu své bakalářské práce, Prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, DSc., Dr, za jeho cenné rady, důležité připomínky, ochotu, čas a skvělý přístup. Dále děkuji svému manželovi, synovi a celé mé rodině za podporu při psaní této práce.

ABSTRAKT

Cílem diplomové práce *Porozumění vybraným funkcím u žáků středních škol* je popsat postupy a nejčastější chyby studentů při posouvání grafu mocninných funkcí a použití absolutní hodnoty u mocninných funkcí. První část práce mapuje historický vývoj funkcí, provádí analýzu dostupných učebnic a stručně rozebírá relevantní výzkumy týkající se této problematiky. Druhá část je zaměřena na vlastní výzkum, jeho stručný popis a analýzu chyb a strategií. Diskuze těchto výsledků a porovnání s již zmíněnými výzkumy se nachází v závěrečné kapitole.

KLÍČOVÁ SLOVA

mocninná funkce, graf funkce, absolutní hodnota

ABSTRACT

The aim of the thesis *Understanding of particular function by high school students* is to describe the procedures and the most common mistakes of students in shifting power functions and application of absolute value for power functions. The first part of the thesis traces the historical development of functions, analyses available textbooks and briefly discusses relevant research on the subject. The second part focuses on the research itself with a brief description and analysis of the errors and strategies. A discussion of these results and a comparison with previously mentioned research is found in the final chapter.

KEYWORDS

power, diagrams of functions, absolute value

Obsah

Úvod

Tato práce si klade za cíl prozkoumat, do jaké míry mají středoškolští žáci porozumění posunutí grafů funkcí a dále popsat jejich postupy a nejčastější chyby při posouvání grafu mocninných funkcí a použití absolutní hodnoty u mocninných funkcí. Funkce jsou jedním z pilířů matematiky a porozumění jim je zásadní pro rozvoj analytického myšlení a schopnost řešit složité problémy. Bohužel se v průběhu vzdělávání někteří žáci setkávají s obtížemi, které mohou vést k povrchnímu memorování pravidel, aniž by skutečně porozuměli podstatě funkcí. Tento přístup může způsobit nedorozumění a omezení ve zvládání matematických konceptů jak v současnosti, tak i v budoucnosti.

V rámci mé diplomové práce jsem se zaměřila na zkoumání matematického porozumění žáků na obchodní akademii, kteří budou v budoucnu pracovat v oborech, kde je matematika neodmyslitelnou součástí každodenního profesního života. Je zásadní, aby tito žáci měli pevný základ ve všech oblastech matematiky, včetně těch, které se týkají mocninných funkcí.

Rozhodla jsem se zaměřit právě na mocninné funkce, neboť jsou klíčovým prvkem matematického modelování v mnoha obchodních a ekonomických situacích, které patří k výuce na vybrané škole. Tyto důvody mě vedly k výběru této konkrétní oblasti pro mé zkoumání. K určení míry porozumění těmto funkcím využiji analýzu transformací funkcí, zejména posunutí ve směru osy x i y a mocninné funkce s absolutní hodnotou. Tyto techniky mi poskytnou ucelený pohled na schopnosti žáků v oblasti mocninných funkcí, což je důležité pro jejich budoucí profesní úspěch.

Tuto práci můžeme rozdělit na teoretickou a praktickou část. V teoretické části se zabývám nejen historií funkce a funkčního myšlení, ale také se zaměřuji na vývoj pojmu funkce jako takového. V podkapitolách 1.1 až 1.4 se věnuji částem historie od starověku až po moderní dobu 20. století. Kromě toho zde zkoumám postavení funkcí v RVP a analyzuji učebnice, které pokrývají téma funkcí na střední škole a sleduji jejich přístup k zavádění pojmu funkce. Na závěr této části je k dispozici shrnutí vybraných výzkumů, které se týkají tématu funkcí.

Ve druhé části se zabývám vlastním výzkumem. Na základě teoretické části jsem formulovala pět výzkumných otázek, které jsem si stanovila na začátku výzkumu. Tyto otázky byly klíčové při sestavování výzkumného testu, který jsem následně zadala žákům na obchodní akademii. Výzkumný test byl navržen tak, aby zkoumal různé aspekty porozumění posunutí grafu funkcí a absolutní hodnotě u mocninných funkcí.

Po provedení výzkumu a důkladné analýze dosažených výsledků jsem se v závěrečné části této práce zaměřila na zodpovězení předem stanovených výzkumných otázek. Získané výsledky analýzy poskytly cenné poznatky o tom, jak žáci chápou dané matematické koncepty, a odhalily různé problémy a chyby, které se u nich nejčastěji vyskytují.

1 Historie

Jak jsme již zmínili, v této části se budeme zabývat historií funkcí. A to jak pojmu, tak i funkčního myšlení, bez kterého by pojem funkce nedával smysl.

Funkční myšlení se vyvíjelo v lidské společnosti v řádech století až tisíciletí. Nemůžeme tedy určit přesný okamžik, odkdy lidé tento způsob myšlení již plně užívali. Naopak zavedení pojmu funkce můžeme datovat přesněji. Toto slovo poprvé použil Gottfried Wilhelm Leibniz roku 1673 a to v *„Methodus tangentium inversa, seu de functionibus" („Inverzní metoda tečen neboli o funkcích")* (Lomtatidze, str.171). Význam tohoto slova však nebyl stejný, jak je tomu dnes (viz. Odstavec 1.3 Raný novověk).

V následujících částech této práce se budeme podrobně zabývat vývojem funkčního myšlení, abychom následně mohli lépe pochopit obtíže, se kterými se mohou setkávat žáci středních škol. Pro přehlednost jsme z celé historie vybrali čtyři významné období, která jsou pro naše zkoumání nejdůležitější, a to: Starověk, Středověk, Raný novověk a Moderní doba (18.–20. století). Každé z těchto období přináší specifické poznatky a přístupy, které nám pomohou lépe pochopit vývoj funkčního myšlení v kontextu historického vývoje.

1.1 Starověk

Jako začátek starověku se považuje nástup prvních státních útvarů (cca 4.-1. tisíciletí před Kristem). Pro starověk je nejen z hlediska matematiky typické zaznamenávání přírodních dějů. Lidé pozorovali oblohu, nebeské děje nebo přírodu. Pomocí zaznamenávání těchto údajů získávali postupně spojitý děj a uvědomovali si různé závislosti.

První známky funkčního myšlení můžeme najít již kolem roku 2000 př. n. l. v Babylónské říši (cca 2100-2000 př. n. l. až 539 př. n. l.). Staří Babyloňané využívali tabulky k různým výpočtům v astronomii, zemědělství, obchodu atd. V těchto tabulkách měli konkrétně vyjádřené závislosti jako např.:

$n \to \frac{1}{n}, n \to n^2, n \to \sqrt{n}, n \to n^3, n \to \sqrt[3]{n}, n \to n^2 + n$ (Kopáčková, 2002, str. 150).

Dále ale i závislosti schodovité funkce, nebo po částech lineární, kterou můžeme vidět v appletu The Zigzag Function v programu Geogebra[1]. Jak píše Juškevič ve své knize *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century* tato funkce spolu se *step function* sloužily za vlády Seleuka k určení polohy Slunce a Měsíce na obloze.

Následuje další etapa, a to Starověké Řecko (1000 př. n. l. – 500 n.l.). John Fauvel ve své knize *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals* píše o raných Pythagorejcích (cca 5. stol. př. n. l.), kteří se zabývali mimo jiné i akustikou, kde zkoumali například vztah mezi délkou a tloušťkou struny a výškou zvuku. Po Pythagorejcích zmíníme Alexandrijskou dobu (cca 3. stol. př n. l.), kdy astronomové vypočítali pomocí tětiv a obvodů daného poloměru hodnoty podobné funkci sinus[2]. Nesmíme opomenout, že ani myšlenka změny proměnné hodnoty nebyla lidem v Antice cizí. Toto můžeme sledovat v problematice týkající se pohybu. Aristoteles rozlišil čtyři hlavní změny (pohyby) světových procesů: změna v substanci, změna v kvalitě a kvantitě a nakonec změna místa (Osolsobě, str. 70). Nicméně ačkoliv si byli lidé těchto proměnných vědomi, nestala se proměnná objektem matematických studií.

Řekové ale rozvíjeli dále i matematiku jako takovou. Snaha o nalezení kořenů kubických rovnic vedla k prohlubování znalostí o kuželosečkách. Řekové se pak pomocí takzvaného symptomu snažili popsat obecnou křivku:

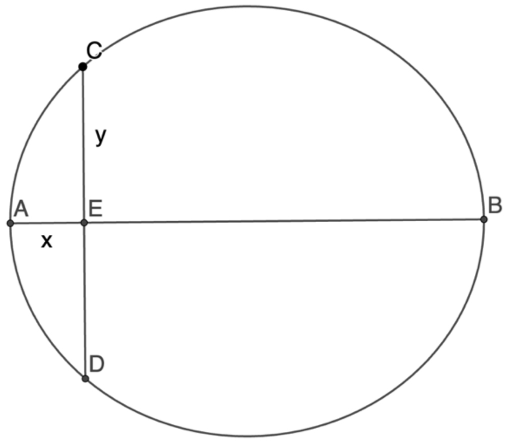
> Symptom nějakého kuželovitého řezu představuje, jak by moderní matematik řekl, pro každý bod dané křivky jednu a tu samou funkcionální závislost mezi půlkou tětivy y a úsečkou x na průměru konjugovaného s tětivou, konec této úsečky je průsečík průměru s tětivou a odpovídající vrchol (Kopáčková, 2001, str. 40).

Abychom tento pojem lépe pochopili, uvádím zde příklad symptomu. Mějme elipsu a na ní vyznačen její průměr *AB* (Obrázek 1). Dále její tětivu *CD.* Průsečík tětivy *CD* *s* průměrem nazvěme *E*. Dále označme úsečku *CE* jako y a *EA* jako x. Nechť *d* je velikost průměru. Pak existuje neměnné číslo, které nazveme symptomem:

---

[1] The Zigzag Function – GeoGebra. GeoGebra – the world's favorite, free math tools used by over 100 million students and teachers [online]. [cit. 11.11.2022]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/zqqnXG4U
[2] Funkci sinus však zaznamenali až Indové v 5. století n.l.

$$\frac{y^2}{x \cdot (d - x)}$$



Obrázek 1: Příklad symptomu u elipsy

Dalších konkrétních příkladů křivek je mnoho. Řekové se zabývali i křivkami vzniklými spojitými pohyby. Jedná se hlavně o křivky jako: kvadratrix, spirály, cissoida, nebo konchoida.

K dalšímu postupu ve funkcionálním ale i v infinitesimálním myšlení přispěla například: znalost $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ (Juškevič, str. 6) nebo řešení problémů týkajících se extrémních hodnot a tečen křivek. Řekové řešili tyto úlohy metodami, které byly podobné diferenciálním nebo integrálním počtům. Podle Edwardse v jeho knize *The Historical Development of the Calculus* Archimedes například používal takzvanou vykrývací metodu. Podstatou této metody je postupné přibližování se k hodnotě obsahu nebo objemu daného obrazce nebo tělesa pomocí geometrických útvarů, jejichž obsah nebo objem je známý a lze je snadno vypočítat. Například při určování obsahu kruhu Archimedes použil pravidelné mnohoúhelníky vepsané a opsané kruhu. Postupně zvyšoval počet stran těchto mnohoúhelníků, čímž se jejich obsah přibližoval skutečnému obsahu kruhu. Tento proces pokračoval, dokud rozdíl mezi obsahem vepsaného a opsaného mnohoúhelníku nebyl zanedbatelně malý. Takto dokázal určit i obsah segmentu paraboly, obsah elipsy nebo objem a povrch koule.

Musíme zde také uvést Ptolemaiovu práci týkající se refrakce. Své matematické metody a výpočty poloh Slunce a Měsíce, které vedly k funkcím o jedné, dvou nebo třech neznámých, popisuje Ptolemaios (85-165 n. l.) ve svém díle *Almagest.* Zde udává i tabulku hodnot délky tětivy v kruhu v závislosti na středovém úhlu, který ji vymezuje. Pomocí této tabulky popisuje funkční vztah, kde $tet(\alpha)$ je délka tětivy, r je poloměr kruhu a α je velikost středového úhlu:

$$tet(\alpha) = 2r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ (Smýkalová, str. 10).}$$

Pokud dáme stranou Diofanta (cca 250 n. l.) a jeho zápisy mocnin, antická matematika postrádala veškerý symbolický zápis, což činilo porozumění funkcím o něco složitějším. Ačkoli Staří Babyloňané a Řekové si dokázali jednotlivých závislostí všímat, nedokázali najít ale obecný předpis, či obecnou funkcionalitu. Jejich přínos můžeme však sledovat právě v těchto popisech jednotlivých závislostí. Přestože antická civilizace byla velmi vyspělá, nedá se tedy obecně říct, že by Řekové plně využívali funkční myšlení. Chyběl jim totiž výraz či pojem, který by všechny konkrétní zákonitosti sjednocoval. Tyto zákonitosti však dokázali Řekové vyjádřit pomocí tabulky, slovním popisem, graficky, nebo kinematickým pravidlem. A dále sloužily i byly hojně využívány pro další rozvoj funkcionality.

1.2 Středověk

Po pádu římské říše (476 n.l.) byli pro funkční myšlení významnější až indičtí myslitelé, kteří se matematikou více zabývali a dále ji rozvíjeli. V 5. století našeho letopočtu zavádějí funkci sinus a poté následuje i funkce kosinus.

Dále zmíníme perského filozofa, astronoma a matematika Al-Biruni (973-1050), který se zabýval zrychleným pohybem a také uvažoval o obecné křivce. Bohužel však po něm se dlouhou chvíli nikdo tímto směrem neubíral.

V Evropě, hlavně ve Francii a v Anglii, přírodní filozofové (13. – 14. století), kteří navazovali na Aristotela a další, prohlašovali matematiku za hlavní nástroj ke zkoumání přírodních dějů. To, čím se tito filozofové zabývali, bylo mimo jiné i optika, mechanika, teplotní jevy, hustota, ale i nerovnoměrný pohyb. Neboť nejen tyto obory vyžadovaly zapojení funkcí pro svůj rozvoj.

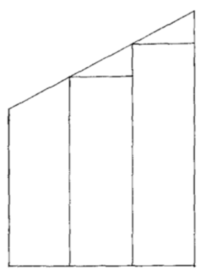
Jak píše Kopáčková (Kopáčková, 2001, str. 49), tito scholastici používají pojmy jako kvalita či forma (teplo, světlo, barva, hustota, vzdálenost, rychlost apod.). Tyto formy mají různé stupně intenzity a spojitě se mění uvnitř jistých mezí. Intenzity forem jsou pak posuzovány ve vztahu ke svým extenzitám (čas, hmotnost). Sjednotilo se kinematické a matematické myšlení a jak také udává i Juškevič:

Současně se objevila myšlenka, že kvantitativní zákony přírody jsou zákony funkčního typu postupně dozrávala v přírodní filozofii (Juškevič, str. 45)[3].

Oxfordší kalkulátoři, známí matematici z Mertonské koleje v Oxfordské univerzity, William Heytesburry, Richard Swineshead a John Dubleton se zabývali spíše kinematickoaritmetickým směrem. U této skupiny matematiků můžeme nalézt první rigorózní definici pojmu rovnoměrného pohybu. Tito matematici se proslavili i svým Mertonovým pravidlem a zasloužili se tak o největší průlom v mechanice ve své době. Toto pravidlo praví, že

> pokud je těleso rovnoměrně zrychleno z rychlosti v_0 na v_1 v určitém časovém intervalu a urazí vzdálenost s, pak stejnou vzdálenost urazí těleso pohybující se konstantní rychlostí:
>
> $v = \frac{v_0+v_1}{2}$ (Sonar, str. 140)[4].

Naopak Nicole Oresme (1323-1382) se zabýval geometrickým směrem, což si hned ukážeme. Tento scholastik znázorňoval stupně intenzity úsečkami (latitudes) odpovídajících délek, kolmo[5] k úsečkám (longitudes), které odpovídaly k extenzitám (Obrázek 2). Vyšší konec úseček zvaných latitudes vytvářel linii intezity (linea intensionis). Tato linie spolu s krajními latitudes a se všemi longitudes znázorňovala danou kvalitu a její stupně.



Obrázek 2: Oresme - latitudes a longitudes. Převzato z: A Source Book in Mathematics od Dirka Jana Struika

---

[3] Simultaneously, an idea that quantitative laws of nature were laws of functional type gradually ripened in natural philosophy.

[4] If a body is uniformly accelerated from velocity v_0 to v_1 within a certain time interval and traverses a distance s, then the same distance is traversed by a body moving with a constant velocity of $v = \frac{v_0+v_1}{2}$.

[5] Tento úhel můžeme zvolit libovolně.

Ačkoliv ještě nejsou definovány, můžeme zde vidět již vědomé používání závislé (latitudes) a nezávislé proměnné (longitudes). Dále můžeme chápat lineu intensionis jako funkční závislost. Dovolme si připomenout, že slovo funkce ještě nebylo známé. Můžeme však soudit, že lidé již lépe rozuměli funkcionalitě, a dokonce funkci dokázali definovat buď slovním popisem její specifické vlastnosti nebo graficky.

Oresme dále rozdělil lineární kvality (formy) na:

1) Rovnoměrná kvalita (qualitas uniformis), kde konstantní linie intenzity je rovnoběžná s longitudes
2) Nerovnoměrná kvalita (uniformiter difformis)

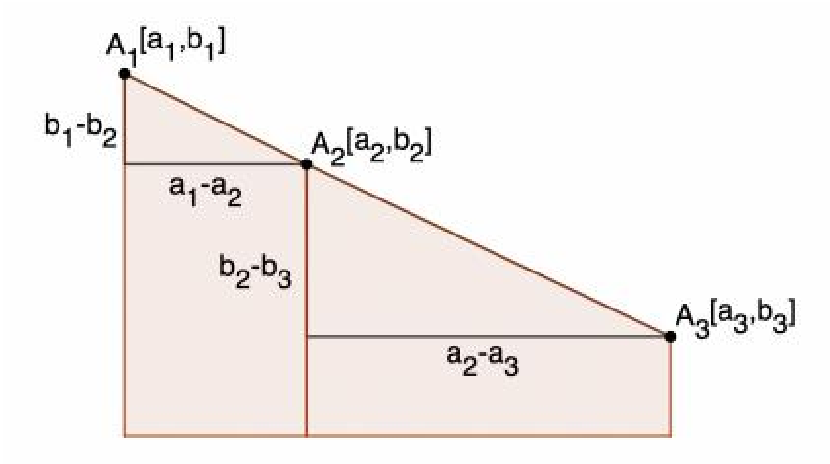
> je taková, že pokud vezmeme libovolné tři body (uvažované přímky), je poměr vzdálenosti mezi prvním a druhým bodem ke vzdálenosti mezi druhým a třetím bodem stejný jako poměr přebytku intenzity prvního bodu nad intenzitou druhého bodu k přebytku intenzity druhého bodu nad intenzitou třetího bodu; první z těchto tří bodů nazývám bodem s největší intenzitou (Oresme, str.192-193)[6].

Pokusíme se nyní tuto kvalitu definovat pomocí dnešní matematiky. Vezměme si tři body se souřadnicemi: $A_1[a_1, b_1], A_2[a_2, b_2], A_3[a_3, b_3]$ (Obrázek 3). Aby tyto body spadali do této kvality, musí splňovat tuto rovnost:

$$\frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3}$$

Linie intenzity je tu tedy přepona pravoúhlého trojúhelníku, nebo čtvrtá strana pravoúhlého lichoběžníku, jehož jedna strana je longitude a základny jsou latitudes (jedná se tedy v dnešním pojmosloví o lineární funkci).

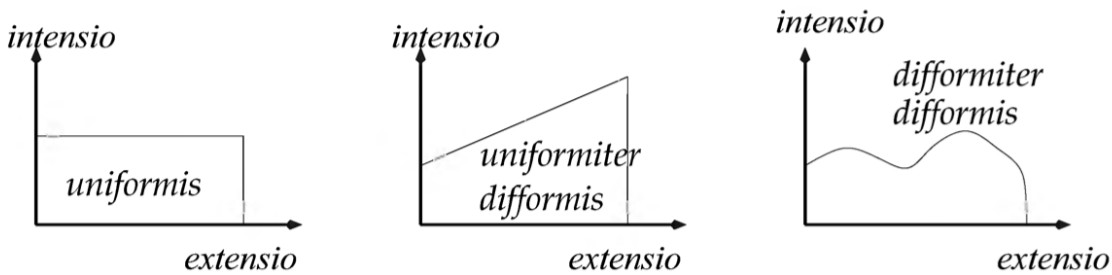
[6] Is one in which if any three points (of the line considered) are taken, the ratio of the distance between the first and the second to the distance between the second and the third is as the ratio of the excess in the intensity of the first point over that of the second point to the excess of that of the second point over that of the third point; I call the first of those three points the one of the greatest intensity.



Obrázek 3: Nerovnoměrná kvalita

3) Difformiter difformis, kam patří všechny ostatní případy.

Pokud uvedeme příklad těchto kvalit na pohybu, pak bychom mohli rovnoměrný pohyb považovat za zástupce rovnoměrné kvality (qualitas uniformis). Zástupcem nerovnoměrné kvality (uniformiter difformis) by byl zrychlený pohyb, a nerovnoměrný pohyb, který je zástupcem difformiter difformis, by vykazoval proměnlivou rychlost. Jejich grafické znázornění, kde osa x (extensio) představuje čas a osa y (intensio) představuje rychlost, by vypadalo takto (Obrázek 4):



Obrázek 4: Oresme - grafické zobrazení. Převzato z Sonar, str. 145.

Jistě můžeme říci, že scholastici 14. a 15. století výrazně přispěli k chápání funkcí. Vzápětí na ně navazují další matematičtí velikáni, kteří jejich poznání dále prohlubují a zdokonalují.

1.3 Raný novověk

Během raného novověku (přibližně konec 15. století -17. století) došlo k významným změnám v chápání matematických funkcí. Toto období bylo charakterizováno rozvojem matematických metod a myšlení, které položily základy pro moderní matematiku.

K vývoji funkcí určitě přispěly rozvíjející se algebraické metody. V 16. století přispěli matematici jako François Viète k rozvoji algebry. Viète použil symbolický zápis pro koeficienty a neznámé v rovnicích, což umožnilo zobrazovat matematické vztahy v abstraktní podobě. Tento symbolický zápis později převzali i jiní matematici jako například René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, nebo Leonhard Euler v jejich odvětvích matematiky.

Musíme však upozornit na začátky analytické geometrie, která je pro rozvoj funkcí nepostradatelná. Pierre de Fermat navázal na práci Françoisa Vièteho a rozvinul koncept souřadnic v algebraickém jazyce pro studium kuželoseček. Svoji práci se však nesnažil nijak propagovat, a proto nebyla jeho práce široce známa. Musíme zmínit jednu z nejdůležitějších vět v historii analytické geometrie, která je právě jemu připisována:

> V případě, kdy v konečné rovnici nalezneme dvě neznámé veličiny, máme obrazec, přičemž koncový bod jedné z těchto veličin popisuje přímku, buď rovnou, nebo zakřivenou. (Boyer, str 17).

Význam Fermatova přístupu k analytické geometrii spočívá v tom, že dokázal popsat geometrické útvary pomocí rovnic, což umožnilo algebraické studium geometrických problémů.

René Descartes také propojil geometrii s algebrou a zavedl souřadnicový systém. Tím umožnil zobrazovat geometrické objekty pomocí algebraických rovnic a zjednodušil tak analýzu matematických funkcí. Toto můžeme sledovat v jeho díle: *„La géométrie“:*

> Dáváme-li čáře (křivce) y postupně nekonečné množství různých hodnot, najdeme také nekonečné množství hodnot x a tímto způsobem dostaneme nekonečné množství různých bodů . . .: a ty opíšou hledanou křivou čáru (Kopáčková, 2001, str. 53).

Tyto hodnoty Descartes i Fermat zanášeli do grafu jinak, než je tomu známo dnes. Na horizontální osu, kde byl vyznačen počátek, v daném směru ordináty nanášeli různé body a tím dostali graf.

Svůj podíl ve vývoji funkcí má i trigonometrie. Její vývoj sehrál v novověku (převážně v 16. století) také důležitou roli a to hlavně v astronomii a v navigačních metodách. Jost Bürgi spočítal logaritmické tabulky jako vztah mezi geometrickým postupem mocnin stejného základu a aritmetickým postupem mocnin. Jiný pohled na logaritmus můžeme vidět u J. Nepera:

> … jehož práce byla publikována v letech 1614-1619, postupoval od srovnání dvou spojitých přímých pohybů, z nichž jeden byl pohyb bodu (L), který se pohybuje rovnoměrně a druhý byl pohyb druhého bodu (N), jehož rychlost se předpokládá proporcionální vzdálenosti od nějakého pevného bodu. V tomto případě je vzdálenost, kterou urazí bod L, (napierovský) logaritmus vzdálenosti, kterou urazí bod N (Juškevič, str.16)[7].

Tento logaritmus nesplňuje některé nám dnes známé vlastnosti logaritmů o libovolném kladném základu různém od jedné. V roce 1624 však přichází Henry Briggs s dekadickým logaritmem, který splňuje tyto vlastnosti a má vztah k Napierovskému:

$$Lg\ x = \frac{Nog_1 - Nog_x}{1 - Nog_{10}},$$

Kde *Nog* je Napierovký logaritmus (Kopáčková, 2001, str. 51)

Musím však zdůraznit, Edwards ve své knize *The Historical Development of Calculus* píše, že v této době ještě obecný koncept funkcí nebyl známý. Napierovský logaritmus je pouze založen na konkrétním funkčním vztahu. Logaritmická funkce se tak stala prototypem tohoto obecného konceptu funkcí.

[7] … whose work was published in 1614-1619, proceeded from a comparison of two continuous rectilinear motions, one being that of a point (L) moving uniformly and the other being that of a second point (N) the velocity of which is presumed proportional to its distance from some fixed point. In this case, the distance travelled by point L is the (Napierian) logarithm of the distance travelled by point N.

Infinitesimální úvahy se staly nedílnou součástí výpočtů obsahů, objemů a konstrukcí tečen, a to s významnými dopady v matematice. Johannes Kepler ve své práci *Nova stereometria doliorum vinariorum* využil těchto úvah k výpočtu objemu sudů na víno (Koudela, str.16). Zajímá se zde ale pouze o rotační tělesa. Bonaventura Cavalieri pak rozvinul tento koncept s Cavalierovým principem, který slouží k výpočtu obsahu rovinných útvarů a objemu těles v jeho díle *Geometria indivisibilibus continuoru* (Schwabik, str. 25). Tento princip můžeme použít k výpočtu objemu určitého tělesa, pokud známe objem druhého tělesa, které splňuje podmínky určené následující větou:

> Mají-li dvě tělesa stejnou výšku a jsou-li řezy rovinami rovnoběžnými s tělesem se základnami a ve stejných vzdálenostech od nich, jsou vždy v daném poměru, pak jsou v tomto poměru i objemy těchto těles (Edwards, str. 104)[8].

John Wallis se také zabýval infinitesimálními úvahami a využil je k určení kvadratury paraboly a k výpočtu poměru objemů kužele a válce.

Piere de Fermat a Blaise Pascal rovněž pracovali s těmito metodami. Fermat je využil k nalezení tečny ke křivce, zatímco Pascal se zabýval obsahem půlkruhu (Fauvel a Gray, 1987, s. 378). Tyto přístupy položily základy diferenciálního a integrálního počtu, což bylo zásadní pro rozvoj moderního kalkulu. Isaac Newton a Gottfried Wilelm Leibniz nezávisle na sobě rozvinuli tyto metody v 17. století, což umožnilo studovat změny a plochy pod křivkou. A to se stalo klíčovým prvkem analýzy funkcí.

U Isaaca Newtona, přesněji v jeho knize *Method of Fluxions and Infinite Series*, můžeme nalézt dva termíny: fluent (quantitas correlata) a fluxions (quantitas relata). Zatímco nejprve byly tyto termíny spjaty s časem, později je od tohoto hlediska odprostil. Fluenta hrála roli nezávislé proměnné, kdežto fluxions závislé proměnné. Fluenta mohla být vyjádřena analyticky, nebo pomocí součtu nekonečné řady (Newton, 1736).

Jak už jsme zmínili, v tomto časovém rozmezí byl poprvé použit termín funkce a to Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem roku 1673. Je důležité poznamenat, že význam slova „funkce“ v Leibnizově pojetí byl odlišný od jeho současného významu. Začal používat tento

[8] If two solids have equal altitudes, and if sections made by planes parallel to the bases and at equal distances from them are always in a given ratio, then the volumes of the solids are also in this ratio.

termín ve spojení s křivkou a její tečnou v daném bodě. Pro něj byly různé úseky na osách spojené s konstrukcí tečny funkcemi křivky. Neomezoval se pouze na úseky vytvořené tečnou, ale také zkoumal další úseky vznikající při konstrukci dalších přímek spojených s daným bodem na křivce, jako jsou normála a chordála.

I když Leibnizovo pojetí funkce mělo geometrický charakter, slovo funkce u něj mělo dokonce dva smysly. A to označení určité vlastnosti nebo role a pojmenování výsledku nebo objektu s touto vlastností. Leibniz také používal termín „relatio“ česky „vztah“ v kontextu, který by dnes odpovídal pojmu „funkce“.

Bohužel v té době ještě nedostatečně vymezoval, co jsou nezávislé volné proměnné, protože křivka nebyla chápána jako graf funkce, ale jako geometrický objekt, vyjadřující vztah mezi abscisou (x-ová souřadnice) a ordinátou (y-ová souřadnice). Jacob Bernoulli v roce 1684 použil termín „funkční čára“ pro křivku, což naznačuje přechod od původního geometrického významu k pojmenování křivek.

Postupně se význam slova „funkce“ změnil a matematici začali klást větší důraz na vzorce a rovnice spojené s funkcemi křivky. Proměnnou začali vnímat spíše jako hodnotu závislou na ostatních proměnných a konstantách v rovnici než na samotné křivce. Toto se promítlo v následujícím vývoji pojmu „funkce“.

V roce 1694 Johann Bernoulli začal používat písmeno n k označení libovolné veličiny v souvislosti s rozvojem řady $\int n\, dz$, ale v té době ještě nepoužíval termín „funkce“. Avšak v následujících letech, se začal i zde termín „funkce“ využívat. Ve svém dopise Leibnizovi z roku 1698 mluví o funkcích ordinát při řešení izoperimetrického problému. Dále mluví i o funkci proměnné místo funkce křivky a čím dál tím více považuje funkci za analytický výraz, což signalizuje změnu od původního geometrického pojetí k chápání funkce jako analytického výrazu

Celkově lze říci, že raný novověk přinesl do matematiky mnoho inovací a nových metod, které vedly k hlubšímu chápání matematických funkcí a umožnily rozvoj moderní matematické analýzy.

1.4 Moderní doba (18. - 20. století)

Technický pokrok 18. až 20. století přinesl průmyslovou revoluci, kdy vynálezy jako parní stroj a textilní stroje zásadně změnily výrobní procesy. Rozvoj železnic v 19. století revolučně změnil dopravu a umožnil rychlejší a levnější pohyb zboží a osob. Vynález telegrafu a později telefonu umožnil rychlou komunikaci na velké vzdálenosti, ovlivňující obchod i mezinárodní politiku. Vznik moderního inženýrství a technických disciplín položil základy pro další inovace a technologický růst v 20. století.

Můžeme zaznamenat i pokroky ve vývoji funkce. V roce 1718 Johann Bernoulli vyřkl definici funkce, na níž pak navázal v roce 1748 Leonhard Euler, kdy nahradil slovo „veličina" slovním spojením „analytický výraz".

> Funkce proměnné veličiny je analytický výraz složený jakýmkoli způsobem z této proměnné veličiny a z konstantních čísel nebo veličin (Dominiques, str. 195)[9].

Dále Euler definuje i pojmy jako je proměnná a konstantní veličina. Dodefinovává i způsoby, jak sestavit proměnnou veličinu. Za zajímavost můžeme ale brát, že konstanta pro Eulera nebyla funkcí. Tímto se pohled na funkce jako takové změnil. Matematici již s nimi mohli snáze provádět matematické operace. Bohužel tato definice nevyhovovala Jeanu Baptistovi le Rond d'Alembertovi a jeho slavnému problému kmitající struny. Proto v roce 1755 pak přišel Euler s novou definicí funkce:

> Když nějaké kvantity závisejí na jiných tak, že při změně posledních se samy také mění, pak se první nazývají funkcemi druhých. Toto pojmenování má mimořádně širokou povahu, zahrne v sobě všechny možné způsoby, jakými lze jednu kvantitu určit pomocí jiných (Schwabik, str. 46).

Euler také ve své knize *„Introductio"* rozděluje funkce na algebraické a transcendentní. Algebraické pak dále dělí na racionální a iracionální (Schwabik, s.40). A racionální na celé a lomené. Nacházíme u něj i explicitní a implicitní funkce, kde zastává

[9] Functio quantitas variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitabus constantibus.

názor, že každá funkce lze zapsat jako součet nekonečné mocninné řady s racionálními koeficienty. Zavedl i označení funkcí, jak jej známe dnes (f pro funkci a $f(x)$ pro oddělení argumentu). V roce 1772 známý matematik Joseph-Louis Lagrange definuje funkci jako jakýkoli výraz analýzy.

To, že Euler nemluví o tom, jak jsou funkční hodnoty získány, podtrhl svou definicí i Sylvestre Francois Lacroix, kdy:

> Pojem funkce přestává být spojován s algebraickým výrazem, připouští se i funkce definované pomocí mocninné řady nebo funkce, pro které není explicitní předpis znám (Koudela, str. 33).

S využitím trigonometrické řady jako analytického nástroje někteří matematici začali používat formule za příliš omezující. Začalo se opět více klást důraz na pojetí funkce jako křivky, což umožňovalo obecnější úvahy. Daniel Bernoulli se odvážil předpokládat, že jakoukoli křivku lze reprezentovat analytickým výrazem, avšak ne pouze ve formě mocninné, ale i trigonometrické řady.

Stojí za to si uvědomit rozdílnost v chápání termínu spojitost. Pro matematiky v začátcích 18. století byla funkce spojitá právě tehdy, když se její analytické vyjádření nezměnilo v celém jejím definičním oboru. Koncem 18. století však Augustin Louis Cauchy poukázal na funkci, která je daná $y = x$ pro $x \geq 0$ a $y = -x$ pro $x < 0$, jež je podle této definice nespojitá, ale kdybychom ji přepsali do $y = \sqrt{x^2}$, tak spojitá rázem je. Tento rozpor ho vedl k změně ve vnímání pojmu spojitost a nastartoval vývoj k již zmíněné dnes známé definici spojitosti:

> Buď f funkce definovaná v bodě x_0 a jistém jeho okolí. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže existuje $\lim_{x \to x_0} f(x)$ a platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Širůčková, str.10).

V 18. století začalo chápání funkce jako analytického výrazu či mocninné řady postupně narážet na nedostatky. Matematici se potýkali s novými problémy v astronomii a matematické fyzice, zejména při řešení kmitajících strun. Tyto problémy vedly k objevu funkcí, které nebylo možné popsat analyticky ani pomocí mocninných řad.

Na počátku 19. století se tak změnilo chápání funkce. Funkcí se již rozumí jakákoli závislost mezi proměnnými, což dokládá i Jean Baptiste Joseph Fourier:

> Obecně funkce představuje posloupnost hodnot nebo ordinát, z nichž je každá libovolná (Kopáčková, 2001, str. 67).

Definici pojmu funkce můžeme vidět i u Nikolaje Ivanoviče Lovabačevskije:

> Obecné pojetí funkce vyžaduje, aby funkce proměnné x byla číslo, které je dáno pro každé x a které se postupně mění s x. Hodnota funkce může být dána buď analytickým výrazem nebo podmínkou, která dává způsob testování všech čísel a výběru jednoho z nich, nebo konečně závislost může existovat a zůstat neznámá (Kopáčková, 2001, str. 70).

Ale až Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet poprvé roku 1837 explicitně zdůraznil jednoznačnost funkční hodnoty ve své definici funkce a tak se zrodila definice, která je dnes hojně využívaná:

> Jestliže proměnná y závisí na proměnné x tak, že je-li x přiřazena hodnota, pak z ní podle určitého pravidla vyplývá jedinečná hodnota pro y, pak se y nazývá funkce x (Sonar, str. 508)[10].

K dalšímu kroku v pochopení podstaty funkcí pomohl Dirichlet s funkcí $D(x)$, která není v žádném bodě spojitá (Obrázek 5):

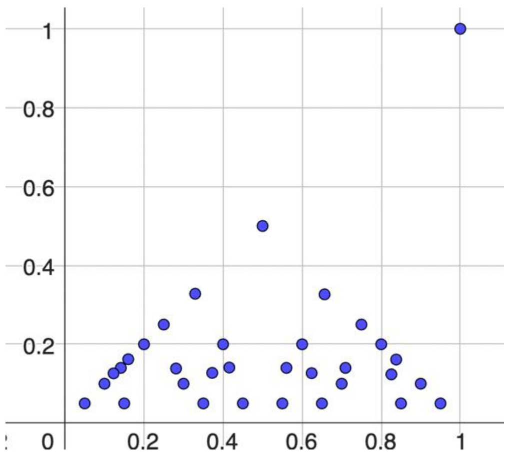
$$D(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{pokud } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$ (Habala, 2001).

[10] If a variable y depends on a variable x so that if x is an assigned value then, following a rule, it follows a unique value for y, then y is called a function of x.

Obrázek 5: Dirichletova funkce

Většina matematiků se v tuto dobu domnívala, že diferencovatelnost je důsledkem spojitosti. Toto vyvrátil až Georg Friedrich Berhard Riemann, kdy ukázal funkci, která je sice spojitá, ale přesto nemá derivaci v žádném jejím bodě (Obrázek 6).

$$R(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \text{ je iracionální číslo.} \\ \frac{1}{q}, & \text{pokud } x = \frac{p}{q}, \text{kde p, q jsou nesoudělná} \end{cases}$$ (Kánnai, str. 746).



Obrázek 6: Riemannova funkce

Přesuneme-li se do 20. století musíme zmínit Georga Cantora, který přispěl se svojí definicí funkce:

Pod pojmem „přiřazení množiny N k prvkům množiny M" nebo, jednodušeji řečeno, pod pojmem „přiřazení N k M" rozumíme zákon, podle kterého je určitý prvek M spojen s každým prvkem n z M, přičemž jeden a tentýž prvek M může být použit opakovaně. Prvek M spojený s n je do jisté míry jedinečnou funkcí n a lze jej označit

$f(n)$; nazývá se "přiřazovací funkce n"; odpovídající přiřazení N se nazývá $f(N)$ (Cantor, str. 486)[11].

Cantorova práce položila základy pro moderní matematické myšlení a jeho definice funkce se stala klíčovým nástrojem pro studium a pochopení vztahů mezi různými množinami a jejich prvky. Vidíme zde, že pojetí funkce se přeneslo z reálných čísel na všechny množiny.

Následně uvedeme i Constantina Carathéodory, který ve své publikaci *Reele Funktionen* dal v synonymum slova funkce, přiřazení a zobrazení a navíc rozdělil funkce na tři typy:

1) Reálné jednoznačné bodové funkce, která přiřazuje bodu číslo
2) Množinové funkce, která přiřazuje množině bodů číslo
3) Funkce přiřazující bodové množině bodovou množinu (Kopáčková, 2001, str. 74).

Při dalším definování funkce se matematici setkávali s nejasnostmi v základních pojmech, jako jsou množiny a zobrazení. Starší definice často obsahovali nejasné termíny, jako jsou pravidla nebo zákony, což vedlo ke zmatkům. V reakci na tyto problémy vznikaly různé modifikace, které se snažili zjednodušit definice a minimalizovat nejasnosti.

Giuseppe Peano definoval funkci pomocí jediného nedefinovaného termínu množiny. Podle jeho definice je funkce speciální binární relace nebo zobrazení, které lze chápat jako množinu uspořádaných dvojic.

Následně v průběhu 20. století se matematici přeli, zda je pojem funkce definovatelný, či nikoli. Někteří zastávali názor, že tento pojen je nedefinovatelný a díky němu můžeme dál definovat ostatní termíny jako je například relace. Další chtěli pojem funkce definovat pomocí termínu binární relace a zobrazení brát jako jednu z binárních relací a to můžeme vidět v dnešním přístupu k definici funkce.

[11] Unter einer „Belegung der Menge N mit Elementen der Menge M oder einfacher ausgedrückt, unter einer „Belegung von N mit M verstehen wir ein Gesetz, durch welches mit jedem Elemente n von N je ein bestimmtes Element von M verbunden ist, wobei ein und dasselbe Element von M wiederholt zur Anwendung kommen kann. Das mit n verbundene Element von M ist gewissermaß en eine eindeutige Funktion von n und kann etwa mit f(n) bezeichnet werden; sie heiße „Belegungsfunktion von nÿ; die entsprechende Belegung von N werde f(N) genannt.

2 Pojem funkce ve školním vzdělávacím systému a analýza učebnic

V této kapitole se nejprve podrobně zaměříme na Rámcový vzdělávací program, konkrétně na to, jaké požadavky jsou kladeny na výuku funkcí na středních školách. Prozkoumáme, jaké znalosti a dovednosti by měli studenti získat, aby úspěšně zvládli maturitní zkoušku v oblasti funkcí. Poté se důkladně zaměříme na podrobnou analýzu dvou konkrétních učebnic, které se na škole, kde bude prováděn výzkum, používají k výuce tohoto důležitého tématu.

2.1 Rámcový vzdělávací program (RVP)

Rámcový vzdělávací program je základní dokument, který vymezuje základní cíle a obsah vzdělávacího procesu v dané oblasti nebo předmětu. Tento program obvykle definuje klíčové dovednosti, vědomosti a kompetence, které studenti mají dosáhnout v průběhu svého vzdělávání v daném oboru. Zahrnuje také oblasti obsahu, které mají být pokryty ve výuce, metodiky výuky a hodnocení studentů. V této kapitole se budeme zabývat pouze Rámcovým vzdělávacím programem pro střední školy. Ten se dělí na Rámcový vzdělávací program pro gymnázia a pro střední odborné školy. Na základě těchto dokumentů si pak každá škola tvoří vlastní Školní vzdělávací program, kde konkretizuje cíle a obsahy vzdělávání uvedené v Rámcovém vzdělávacím programu. Protože se výzkum této práce odehrává na Obchodní Akademii, zaměříme se právě na Rámcový vzdělávací program určený tomuto typu školy[12]. V tomto dokumentu můžeme nalézt oblast „Funkce", která obsahuje toto učivo: *pojem funkce, definiční obor a obor hodnot funkce, graf funkce; vlastnosti funkce; lineárně lomená funkce; kvadratická funkce; exponenciální funkce; logaritmická funkce; logaritmus a jeho užití; věty o logaritmech; úprava výrazů obsahujících funkce a slovní úlohy*. A zároveň jsou zde uvedeny i očekávané výstupy:

- rozlišuje jednotlivé druhy funkcí, sestrojí jejich grafy a určí jejich vlastnosti včetně monotonie a extrémů;

[12] Dostupný na: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-stredniho-odborneho-vzdelavani-rvp-sov/

- pracuje s matematickým modelem reálných situací a výsledek vyhodnotí vzhledem k realitě;
- aplikuje v úlohách poznatky o funkcích při úpravách výrazů a rovnic;
- určí průsečíky grafu funkce s osami souřadnic;
- určí hodnoty proměnné pro dané funkční hodnoty;
- přiřadí předpis funkce ke grafu a naopak;
- sestrojí graf funkce dané předpisem pro zadané hodnoty;
- řeší reálné problémy s použitím uvedených funkcí zejména ve vztahu k danému oboru vzdělání;
- při řešení úloh účelně využívá digitální technologie a zdroje informací;

Nelze si nevšimnout, že téma mocninné funkce nejsou učivem uvedeným v Rámcovém vzdělávacím programu pro střední školy. Toto téma je tedy pro střední školy nepovinné. Mnoho z nich je ale dobrovolně začleňují do svých Školních vzdělávacích programů.

K ukončení Obchodní Akademie potřebuje žák splnit maturitní zkoušku. Ta se od roku 2011 dělí na dvě části a to státní a školní. U státní části je povinná zkouška z českého jazyka a literatury a dále si žák musí vybrat zda bude maturovat z matematiky, nebo z cizího jazyka.

V tematických okruzích pro maturitu z matematiky[13] také můžeme najít okruh „Funkce". V tomto okruhu je pět menších celků a to: *Základní poznatky o funkcích; Lineární funkce, lineární lomená funkce; Kvadratická funkce; Exponenciální a logaritmická funkce, jednoduché rovnice a Goniometrické funkce*.

V prvním okruhu se od žáka očekává, že s porozuměním používá pojmy jako: definiční obor, obor hodnot, argument funkce, hodnota funkce a graf funkce. Dokáže sestrojit graf funkce a přiřadí graf k předpisu funkce. Určí průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic, intervaly monotonie a bod, v němž nabývá funkce extrému.

V následujících třech celcích se podrobněji zajímá o lineární funkci a lineární lomenou funkci, kvadratickou funkci a exponenciální a logaritmické funkce. U všech těchto

[13] Dostupné na: https://maturita.cermat.cz/menu/katalogy-pozadavku

funkcí má žák umět stanovit definiční obor a obor hodnot a sestrojit graf. Vysvětlí význam parametrů v předpisu funkce a řeší reálné problémy s pomocí těchto funkcí.

Poslední celek je určen pro goniometrické funkce. Oproti předcházejícím celkům je u těchto funkcí navíc ještě užití pojmů jako je orientovaný úhel, velikost úhlu, stupňová míra, oblouková míra a jejich převody. Dále definuje goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku.

Žák si také může přidat k maturitní zkoušce nepovinnou část a to: Matematiku rozšiřující. V této části maturitní zkoušky je žák testován podrobněji v předcházejících okruzích. Je zde ale navíc téma absolutní hodnoty u kvadratické funkce a téma mocninných funkcí, kde je zapotřebí umět určit mocninnou funkci s celočíselným exponentem, funkci druhá a třetí odmocnina, nebo sestrojit grafy těchto funkcí.

2.2 Analýza učebnic

V této podkapitole se detailně zaměříme na dvě učebnice, které nabízejí různé přístupy k výuce posunu funkcí. První z nich je online učebnice *Www.realisticky.cz, když (se) chcete naučit* od Martina Krynického, která je určena pro ty, kteří se chtějí naučit matematiku praktickým a realistickým způsobem. Tato učebnice nabízí individuálnější a konstruktivní přístup, který usnadňuje pochopení složitých konceptů. Poté se budeme zabývat dvěma díly učebnice s názvem *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU* od Emila Caldy, které jsou navrženy speciálně pro střední odborné školy a učiliště a zaměřují se na matematiku v netechnických oborech. Tyto učebnice poskytují tradiční přístupy k výuce a jsou zaměřeny na specifické potřeby studentů těchto škol. Porovnáme jejich metody a přístupy k zavedení konceptu posunu funkcí.

.

2.2.1 Online učebnice

Nyní se přesuneme do online učebnice, kterou spravuje Mgr. Martin Krynický od roku 2010. Tato učebnice spojuje výukový materiál s metodickým průvodcem, což nám umožňuje lépe pochopit průběh jednotlivých hodin a hlouběji se ponořit do témat. Portál s názvem *Www.realisticky.cz, když (se) chcete naučit* nenabízí pouze matematiku pro střední školy, ale také matematiku pro základní školy a fyziku pro oba výše uvedené typy škol. Obsah je strukturován podle jednotlivých vyučovacích hodin, kde ke každé hodině obvykle patří dva PDF soubory: první s názvem *Lekce* obsahuje příklady s pedagogickými poznámkami, zatímco druhý, *Příklady*, nabízí samotné úlohy bez těchto poznámek. Autor se snaží přiblížit matematiku reálnému světu a často doplňuje příklady z praktického života, což žákům pomáhá lépe chápat učivo. Z pedagogických poznámek, které autor systematicky vkládá do příkladů, je patrný důraz na dostatek času pro žáky k promýšlení řešení a prohloubení jejich porozumění. Celá učebnice matematiky pro střední školy je rozdělena do 11 oddílů, přičemž nás bude zajímat zejména oddíl *Funkce a rovnice*, který obsahuje 9 kapitol. Zde nalezneme množství příkladů z reálného života, jako například úvod do lomené funkce (Obrázek 7).

Př. 1: 2. B vsadí sportku a vyhraje 50 mil. Urči, kolik peněz připadne na jednoho studenta, když se to dozví: 1, 2, 3, 5, 10, 15, 30 studentů.

Studenti	1	2	3	5	10	15	30
Kč(mil)	50	25	16,6	10	5	3,3	1,6

Čím víc lidí se to dozví, tím míň peněz dostanou.

Obrázek 7: Úloha z reálného života. Převzato z: Realistiky.cz od Martina Krynického

Následně se zaměříme na transformace funkcí. V této učebnici objevíme *metodu kreslení grafů funkcí pomocí napodobení výpočtu*, která nám umožňuje získat hlubší porozumění této problematice. Hlavním cílem je identifikovat základní funkci, jejíž graf budeme následně vykreslovat, a poté provést úpravy odpovídající výpočtům při určování funkčních hodnot (Obrázek 8).

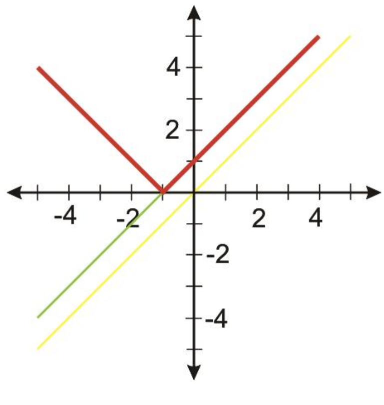
Př. 1: Nakresli metodou napodobení výpočtu graf funkce $y = |x-1|$.

Graf kreslíme postupně stejně, jako bychom počítali hodnotu pro konkrétní x. Změny grafu neustále kreslíme do obrázku.
Určení hodnoty pro x vypadá takto:

Vybereme x, například $x = -2$ $\Rightarrow$ Nakreslíme funkci $y = x$
Uděláme $-2-1=-3$ $\Rightarrow$ Nakreslíme funkci $y = x-1$
Dopočteme $|-2-1| = 3$ $\Rightarrow$ Nakreslíme funkci $y = |x-1|$

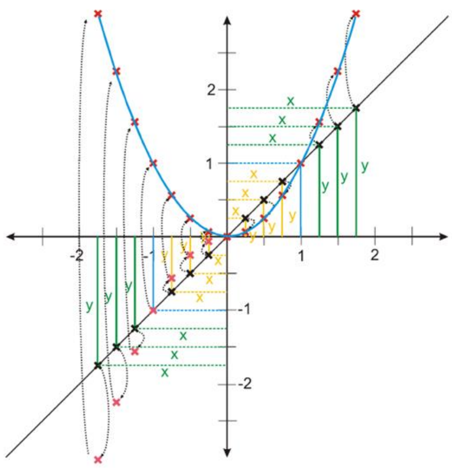
Obrázek 8: Metoda kreslení grafů pomocí napodobení výpočtu. Převzato z: Realisticky.cz od Martina Krynického

Tímto postupem získáme graf výsledné funkce. Díky tomu lépe pochopíme, jak různé transformace ovlivňují původní graf funkce (Obrázek 9).



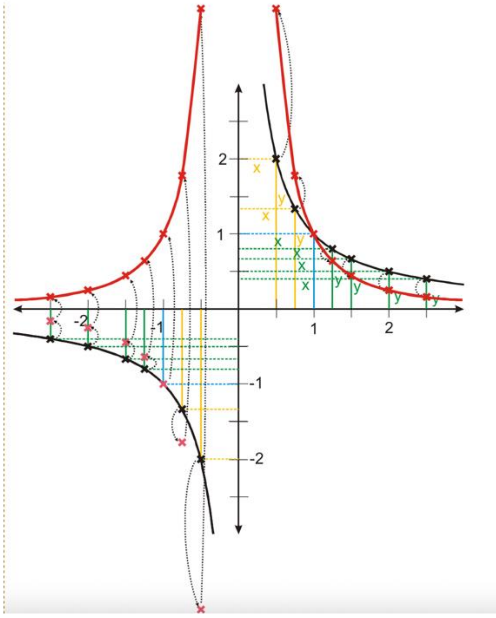
Obrázek 9: Výsledek metody kreslení grafu. Převzato z: Realisticky.cz od Martina Krynického

Dále bych ráda upozornila na způsob, jakým jsou mocninné funkce zavedeny v této učebnici. Na rozdíl od většiny učebnic, kde žáci nejprve vytvářejí tabulku hodnot a pak kreslí graf, zde najdeme jiný přístup. Krynický, podobně jako v ostatních učebnicích, rozděluje tuto kapitolu na dvě části: mocninné funkce s přirozeným exponentem a s exponentem záporným. V první části začíná s grafem funkce $y = x$ a následně několik vybraných hodnot násobí samy se sebou a okamžitě je zakreslí. Takto získává grafy funkcí $y = x \cdot x = x^2$ (Obrázek 10). Obdobně pak postupuje při určení grafů $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$. Tento přístup je velmi efektivní a umožňuje studentům rychle pochopit základy mocninných funkcí.



Obrázek 10: Násobení funkce y=x hodnotami sobě rovnými. Převzato z: Realisticky.cz od Martina Krynického

Podobně postupuje i při zavedení mocninných funkcí se záporným exponentem. Začíná však s grafem funkce $y = \frac{1}{x}$ a pro získání grafu funkce $y = \frac{1}{x^2}$ musí hodnoty dělit samy sebou (Obrázek 11). Postupně pak stejným způsobem získává i další grafy mocninných funkcí se záporným exponentem.



Obrázek 11: Dělení funkce y=1/x hodnotami sobě rovnými. Převzato z: Realisticky.cz od Martina Krynického

2.2.2 Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU 1. díl a 2. díl

Učebnice od Emila Caldy z roku 1996 se skládá z celkem devíti kapitol, z nichž pátá nese název *Lineární funkce* a osmá kapitola *Kvadratickou funkci a její graf*. Ostatní kapitoly se věnují různým jiným tématům nežli funkcím. Pátá kapitola obsahuje celkem tři podkapitoly, které detailně rozebírají lineární funkci, její graf a grafy lineárních funkcí s absolutní hodnotou. Autor předkládá jasný výklad doplněný vzorovými příklady, které pomáhají lépe porozumět probírané látce. K dispozici jsou také úlohy k procvičení, z nichž každá podkapitola obsahuje 5 úloh. Na konci učebnice můžeme nalézt výsledky těchto úloh, což je velmi užitečné pro ověření správnosti řešení. Celkově je v učebnici méně úloh z praktického života (ze šesti řešených příkladů tu není žádný a pouze jedna z patnácti úloh by mohla být považována za úlohu z reálného života). Horší situace je i v osmé kapitole, kde není žádný řešený příklad ani úloha z praktického života. Pozornost ale vzbuzuje řešený příklad 5 na straně 101 s následujícím zadáním:

Sestrojte grafy funkcí $g: y = |x| - 2$, $h: y = |x - 2|$ (Calda, str. 101).

Autor konstruuje oba grafy funkcí pomocí rozdělení definičního oboru na dva intervaly, ve kterých odstraní absolutní hodnotu podle definice absolutní hodnoty. Následně v každém intervalu sestrojí danou funkci a výslednou funkci pak najde jako sjednocení obou těchto funkcí. To, co stojí za zmínku, můžeme nalézt konkrétně u funkce g:

> Všimněte si, že graf funkce g můžeme dostat také z grafu funkce $f: y = |x|$, posuneme-li jej o dvě jednotky v záporném smyslu osy y (Calda, str. 101).

A i u funkce h můžeme nalézt obdobnou poznámku:

> … kde je graf funkce h sestrojen, si všimněte, že jej můžeme dostat z grafu funkce $f: y = |x|$ posunutím o dvě jednotky v kladném smyslu osy x (Calda, str. 102).

Je zde vidět snaha autora o utvoření širšího nadhledu při sestrojování grafů různých funkcí pomocí posouvání grafu ze základního tvaru.

Autor se dále podrobně zabývá posunem grafu kvadratické funkce, přičemž na třech řešených příkladech důkladně demonstruje účel parametrů a, m a n ve vrcholovém tvaru funkce $y = a(x - m)^2 + n$. Tímto konkrétním způsobem názorně ilustruje, jak tato parametrizace ovlivňuje polohu a tvar grafu. Tuto část učebnice zakončuje následujícími dvěma podrobnými odstavci:

> Na základě výsledků získaných v předchozích příkladech je jasné, jak sestrojíme graf funkce $y = a(x - m)^2 + n$. Je to zřejmě parabola, která vznikne z grafu funkce $y = ax^2$ posunutím o $|m|$ délkových jednotek ve směru osy x (pro $m > 0$ doprava, pro $m < 0$ doleva) a posunutím o $|n|$ délkových jednotek ve směru osy y (pro $n > 0$ nahoru, pro $n < 0$ dolů).
> Graf funkce $y = a(x - m)^2 + n, a \neq 0$ je parabola s osou rovnoběžnou s osou y a s vrcholem $V[m, n]$, která se otvírá nahoru pro $a > 0$ a dolů pro $a < 0$ (Calda, str. 162).

Druhý díl této sady učebnic přímo navazuje na díl první a obsahuje celkem 7 kapitol, přičemž se funkcím přímo věnují dvě z nich. První z nich, nazvaná *Prohloubení poznatků o funkcích,* se skládá z 7 podkapitol, ve kterých autor představuje lineární lomenou funkci, inverzní funkci a základní vlastnosti, jako je prostota, monotonie a hledání minima a maxima. Zde se již můžeme setkat s těžšími řešenými příklady, jež se zabývají grafy funkcí s absolutní hodnotou. I ve třetí kapitole s názvem *Funkce exponenciální a logaritmická* se s těmito příklady setkáváme. Celkově 2. díl této sady učebnic již nabízí více příkladů ze života (celkem 2 z 14) a také více úloh, které mají reálný kontext (celkem 5 z 35)

2.2.3 Závěr

Po seznámení s dvěma učebnicemi pro střední školy lze pozorovat, že online učebnice na *Www.realisticky.cz* je spíše konstruktivistická, kladoucí větší důraz na hlubší porozumění. Autor této učebnice se zároveň snaží poskytnout žákům více času na porozumění učivu, což dokládají pedagogické poznámky v textu. Na druhé straně sada učebnic od Emila Caldy je spíše instruktivní a obvykle obsahuje pouze jeden vzorový příklad, což může být přístupnější, ale větší počet takových příkladů by dal větší prostor pro hlubší pochopení. Nicméně, na rozdíl od online učebnice, nabízí výsledky řešených úloh, což může být pro žáky přístupnější.

3 Vybrané výzkumy

V této kapitole nalezneme detailní popis pěti vybraných výzkumů, které jsou relevantní k tématu posunutí grafu funkcí a absolutní hodnoty u funkcí. První tři z těchto výzkumů pocházejí ze zahraničí a poskytují mezinárodní perspektivu na studium tohoto matematického jevu. Zbylé dva výzkumy jsou z českého prostředí a nabízejí pohled na to, jak je toto téma vyučováno a zkoumáno v našich školách. Každá z těchto studií přináší cenné poznatky a analýzy do této oblasti matematiky.

3.1 Lage, A. E. a Gaisman, M. T.: An analysis of students' idea about transformations of functions

Tohoto výzkumu se zúčastnilo 158 žáků z malé soukromé univerzity v Ciudad de México, kteří navštěvovali předkalkulační kurzy a kurzy kalkulu. Tento výzkum byl prováděn s cílem zkoumat, jak studenti chápou a aplikují transformace funkcí. Dotazník obsahoval 11 otázek, které byly navrženy na základě APOS teorie (Action, Process, Object, Schema). Tato teorie poskytuje rámec pro zkoumání vývoje pochopení matematických konceptů a zdůrazňuje význam akcí, které studenti provádějí, procesů, které používají, objektů, se kterými pracují, a schémat, která si vytvářejí.

Na základě výsledků tohoto průzkumu byla následně vybrána skupina 16 studentů pro podrobnější analýzu jejich chápání transformací funkcí. Cílem bylo zjistit specifické obtíže, se kterými se studenti potýkají při práci s těmito matematickými operacemi. Z výsledků průzkumu vyplynulo, že studenti často spíše memorizují pravidla a procedury pro transformace funkcí a dále si často vypomáhají tabulkou hodnot, než aby porozuměli hlubší podstatě těchto operací, což můžeme vidět:

> Měli tendenci používat zapamatovaná fakta nebo si vytvářet tabulky hodnot, aby v těchto úlohách uspěli. Například na otázku ukazující graf paraboly, která se ptala:
>
> a) najděte hodnoty a a b v grafu $f(x) = (x - b)^2 + a$.
>
> b) co by se stalo pro různé hodnoty a a b,
>
> žák na akční úrovni odpověděl:

„Vím, že a to posouvá nahoru a dolů... a druhá, když je uvnitř... nemůžu si vzpomenout... musel bych si udělat tabulku hodnot a zjistit...“ (Lage a Gaisman, str. 26)[14].

Největšími výzvami se ukázaly být horizontální translace funkcí (Lage a Gaisman, str. 26). Další klíčovým zjištěním bylo, že studenti měli potíže s pochopením samotného pojmu „transformace funkcí“, což odráží jejich méně pevné základy v oblasti funkcí jako matematických objektů. Tento výzkum jasně ukázal, že použití různých reprezentací a přístupů k výuce transformací funkcí může významně přispět k hlubšímu a trvalejšímu porozumění této matematické problematiky u studentů.

3.2 Baker, B.; Hemenway, C. a Trigueros, M.: On transformations of functions

Během výzkumu vyplnilo dotazník 240 vysokoškolských studentů a následně s 24 z nich proběhly rozhovory. Cílem tohoto výzkumu bylo prokázat přínos zapisování si a používání grafických kalkulaček při výuce matematiky.

V rámci výzkumu byly zkoumány výzkumné otázky zaměřené na to, zda předkalkulační kurz, který se soustředil na výuku elementárních funkcí a jejich vlastností, a následné zobecnění těchto funkcí prostřednictvím transformací, podpoří dostatečné porozumění funkcím a transformacím u studentů. Tento přístup byl analyzován v rámci teorie APOS (Action, Process, Object, Schema).

Výsledky výzkumu naznačily, že studenti lépe porozuměli známým funkcím a někteří z nich

> … potřebuje vizualizovat funkce pomocí kalkulačky, aby byla schopná porovnat dvě funkce (Baker, Hemenway, Trigueros, str. 95)[15].

[14] They showed a tendency to use memorized facts or to make a table of data in order to succeed in these tasks. For example to a question showing the graph of a parabola which asked, a) find the values of a and b in $f(x) = (x-b)^2 + a$ and, b) what would happen for different values of a and b, a student at an action level responded “I know a moves it up anddown… the other, when it is inside… I cannot remember…I would have to make a table with values and see…“

[15] … needs to visualize the functions with the calculator to be able to compare the two functions

Ti, kteří si zapisovali poznámky během výuky, projevili vyšší úroveň znalostí v matematice. Grafické kalkulačky byly identifikovány jako užitečná vizuální pomůcka, avšak u slabších studentů se projevila tendence k větší závislosti na nich.

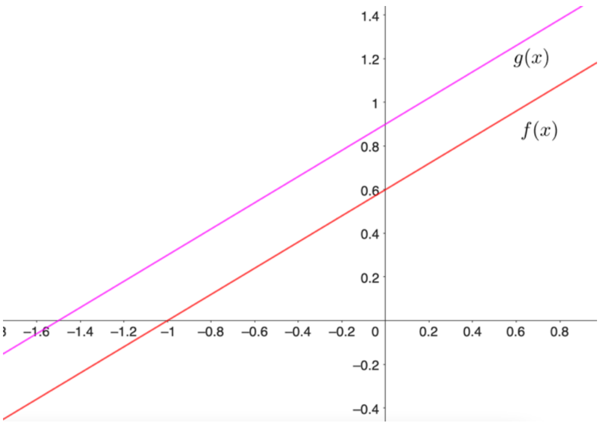
Studenti s pevnými matematickými základy již kalkulačky často nepotřebovali, neboť měli schopnost představit si průběh funkce nebo jej sami zakreslit. Výzkum ukázal, že „vertikální transformace se zdají být pro studenty snazší než horizontální“[16](Baker, Hemenway, Trigueros, str. 97). Přesto je pro úspěšné pracování s transformacemi funkcí nezbytné, aby studenti měli pevné znalosti o elementárních funkcích.

3.3 Burnett, S. C.: Students' Understandings of the Transformations of Functions

Výzkum byl realizován na základě rozhovorů s dvěma žáky devátých tříd a dvěma žáky ze 12. ročníků střední školy v Massachusetts. Učitelé těchto studentů potvrdili jejich výjimečné schopnosti a dovednosti v matematice. Teoretický rámec výzkumu vycházel z bodového a globálního přístupu k funkcím.

V této studii se objevili dvě úlohy, kterými jsem si inspirovala v mém výzkumu. Proto je zde i uvedu. Úloha s číslem dvě zní následovně:

Jaký může být vztah mezi funkcemi $f(x)$ a $g(x)$, pokud znáš následující informace (Obrázek 12)? (Burnett, str. 272)[17]



Obrázek 12: Úloha 2 z výzkumu 3.3. Převzato od C. S. Burnett.

[16] vertical transformations seem to be easier for students than horizontal ones

[17] Given the following information for the functions $f(x)$ and $g(x)$, what could be the relationship between $f(x)$ and $g(x)$?

Úloha číslo čtyři je obdobná, liší se pouze formou zadání obou funkcí.

Jaký může být vztah mezi funkcemi $f(x)$ a $g(x)$, pokud znáš následující informace (Obrázek 13)? (Burnett, str. 272)[18]

x	$f(x)$
-5	-8
-4	-5
-3	-2
-2	1
-1	4
0	7
1	10
2	13
3	16
4	19
5	22

x	$g(x)$
-5	-16
-4	-10
-3	-4
-2	2
-1	8
0	14
1	20
2	26
3	32
4	38
5	44

Obrázek 13: Úloha 4 z výzkumu 3.3. Převzato od C.S. Burnett.

Během rozhovorů studenti odpověděli na sedm otázek zaměřených na definice funkcí, transformace a porovnávání funkcí v různých reprezentacích - algebraických, grafických a tabulkových. Výsledky výzkumu naznačily, že „studenti nebyli schopni jasně určit typ transformace, která popisuje vztah mezi některou z dvojic funkcí, ale byli schopni použít jiná popisná slova pro totéž“ (Burnett, str. 273)[19]. Jejich matematický jazyk často nebyl dostatečně přesný a jejich schopnost vyjadřovat se byla omezená.

Dále studie ukázala, že flexibilita studentů v používání různých reprezentací a přístupů k funkcím může sloužit jako indikátor jejich porozumění funkcím. Studenti sice nebyli schopni explicitně identifikovat typ transformace, která popisuje vztah mezi funkcemi, avšak byli schopni použít jiné termíny a slovní obraty k popisu (aniž by se uchýlili k technickým termínům jako "translace" nebo "dilatace").

[18] Given the following information for the functions $f(x)$ and $g(x)$, what could be the relationship between $f(x)$ and $g(x)$?

[19] the students were unable to identify explicitly the type of transformation that described the relationship between any of the pairs of functions but were able to use other descriptive words for the same

3.4 Almong, N. a Ilany, B. S.: Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions

Studie provedená v Izraeli v roce 2012 na 481 studentech se zaměřila na jejich schopnost řešit rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou. Kromě samotných matematických výsledků zkoumala i přístupy studentů a časté chyby ve srovnání s předchozími výzkumy.

Cílem bylo analyzovat, jak studenti přistupují k řešení nerovnic a identifikovat jejich chybné představy. Test obsahoval netypické úlohy, po nichž následovaly rozhovory se studenty, kteří použili neobvyklé postupy nebo nedokončili úlohy. Důraz byl kladen na to, zda studenti cíleně využívají grafy k řešení nerovnic s absolutní hodnotou a jak správně je interpretují.

Nejčastější chybou bylo nesprávné určování, kdy absolutní hodnota vytváří kladné a kdy záporné číslo, a také mylné automatické zaměňování znamének čísel v absolutní hodnotě. Výzkum ukázal, že mnoho studentů má chybné představy o tom, jak absolutní hodnota matematicky funguje, přičemž dvě hlavní nesprávné interpretace se týkaly přesvědčení, že absolutní hodnota vždy dává kladné číslo, a domněnky, že výraz uvnitř absolutní hodnoty musí být vždy kladný.

3.5 Budínová, I.: Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladech učiva o funkcích na základní škole

Disertační práce se zaměřuje na analýzu výuky funkcí na základních školách a stav dovedností studentů učitelství na vysoké škole v této oblasti. Cílem výzkumu bylo podrobně prozkoumat, jaké konkrétní dovednosti a znalosti si žáci odnášejí ze základního školství týkající se funkcí a jak tyto dovednosti ovlivňují jejich schopnost práce s funkcemi na vyšší úrovni vzdělání.

V rámci výzkumu byly použity různé metodologické přístupy, včetně didaktických testů a pedagogických experimentů. Výsledky naznačily, že studenti na základních školách jsou často vyučováni lineárním funkcím v jednostranném směru, tj. kreslení grafů funkcí podle funkčního předpisu, avšak nemají systematicky zavedenou schopnost určit funkční předpis z daného grafu. „Pro učivo funkcí je důležité, aby se žáci dokázali pohybovat nejen ve směru *rovnice* → *graf* nebo *rovnice* → *tabulka,* ale také v opačných směrech. Tím se prohlubuje porozumění pojmu funkce“ (Budínová, str. 117). Dále výzkum identifikoval obtíže spojené s pochopením kartézské soustavy souřadnic u některých žáků, kde například mají problémy s orientací při zobrazování bodů bez záměny os souřadnic (Budínová, str. 115).

Tento výzkum přináší důležité poznatky pro další vývoj výuky matematiky na základních školách a pro přípravu budoucích učitelů, zdůrazňující potřebu více komplexního přístupu ke vzdělávání v oblasti funkcí a souřadnicových systémů.

4 Vlastní výzkum

Svůj výzkum jsem uskutečnila na střední odborné škole Obchodní Akademie ve Vlašimi, neboť jsem chtěla zjistit, jak dobře žáci s ekonomickým zaměřením porozuměli posunutí grafu funkcí, zejména funkcí mocninných. Tito žáci mohou v budoucnosti pracovat v oblasti, kde je pochopení matematických konceptů, včetně funkcí, klíčové pro úspěch. V rámci mého výzkumu jsem se tedy rozhodla zaměřit na jejich schopnost pracovat s grafy funkcí.

Škola byla ochotná spolupracovat a v průběhu května mi umožnila přístup k žákům. Zúčastnilo se celkem 153 žáků, kteří dobrovolně přistoupili k vyplnění dotazníku. Během výzkumu jsem se zaměřila na posunutí grafu mocninných funkcí a mocninné funkce s absolutní hodnotou.

4.1 Cíle výzkumu

Podle dostupné literatury a zahraničních výzkumů jsem si stanovila za cíl odpovědět na následující otázky, které se týkají chápání a řešení posunutí grafu mocninných funkcí žáky středních škol:

1 **Jaké nejčastější druhy chyb dělají žáci při posunutí grafu mocninných funkcí?**

Zaměřím se na identifikaci konkrétních chyb, které se objevují nejčastěji, když žáci pracují s posunutím grafu mocninných funkcí. To zahrnuje chyby v algebraických operacích, nesprávné aplikování pravidel a špatné porozumění grafickému vyjádření posunutí.

2 **Jaké strategie řešení žáci volí nejčastěji k posunutí grafu mocninných funkcí?**

Budu zkoumat, jaké metody a postupy žáci nejčastěji používají při řešení úloh zahrnujících posunutí grafu mocninných funkcí. To může zahrnovat využití grafů, algebraických transformací a dalších matematických nástrojů.

3 Je použití různých reprezentací účinným nástrojem k podpoře porozumění posunutí grafu funkcí?

Posoudím, zda různé způsoby reprezentace, jako jsou grafy, tabulky, slovní popisy a algebraické výrazy, pomáhají žákům lépe pochopit koncept posunutí grafu funkcí. Zhodnotím, které z těchto reprezentací jsou pro studenty nejefektivnější.

4 Chápou žáci posunutí grafu funkcí jako pravidlo, či mají hlubší vhled?

Zjistím, zda žáci vnímají posunutí grafu funkcí pouze jako mechanické aplikování pravidel, nebo zda mají hlubší porozumění tohoto konceptu. To zahrnuje zkoumání, jestli dokáží vysvětlit důvody a principy, které za posunutím grafu funkcí stojí.

5 Do jaké míry žáci chápou roli absolutní hodnoty u mocninných funkcí?

Prozkoumám, jak dobře žáci rozumí významu a roli absolutní hodnoty při práci s mocninnými funkcemi. To zahrnuje zjišťování, zda si jsou vědomi, jak absolutní hodnota ovlivňuje tvar a polohu grafu funkce.

4.2 Výzkumné strategie

Po důkladném průzkumu podobných výzkumů v oblasti funkcí jsem se rozhodla použít matematický test jako hlavní nástroj pro svůj experiment. Tento test byl navržen tak, aby poskytl vhled do porozumění středoškolských žáků v oblasti mocninných funkcí, mocninných funkcí s absolutní hodnotou a jejich posunů.

Jednotlivé úlohy v testu jsou inspirovány výzkumy na obdobné téma, které jsem zmínila výše. Každá úloha byla pečlivě vybrána a formulována tak, aby reflektovala klíčové aspekty, které se v těchto výzkumech ukázaly jako kritické pro porozumění a aplikaci daných matematických konceptů. Hlavním cílem bylo nejen ověřit znalosti žáků, ale také identifikovat běžné chyby a nedostatky v jejich myšlení.

Test byl koncipován do několika částí, přičemž každá část se zaměřovala na specifický aspekt problematiky. První část se soustředila na posuny mocninných funkcí a druhá část na práci s mocninnými funkcemi obsahujícími absolutní hodnotu.

V průběhu testování jsem se také zaměřila na způsob, jakým žáci k řešení úloh přistupovali. Pozorování jejich postupů mi poskytlo cenné informace o jejich myšlenkových procesech a strategiích, které využívají při práci s mocninnými funkcemi a jejich posuny. Dále jsem zaznamenávala, jaké typy chyb žáci dělají nejčastěji, a jaké koncepty jim činí největší potíže.

4.3 Charakteristika výzkumu

Test vyplnilo celkem 153 žáků z Obchodní akademie ve Vlašimi. Tito žáci navštěvovali první a druhé ročníky, což znamená, že byli ve věkovém rozmezí 16 až 17 let. Na konci prvního ročníku se studenti této školy seznamují se všemi druhy funkcí, které se vyučují na středních školách. Pro žáky tohoto ročníku je tedy téma funkcí opakováním a mají ho čerstvě v paměti díky nedávné výuce. Ve druhém ročníku se tomuto tématu již systematicky nevěnují, ale po konzultaci s vyučujícím jsem se rozhodla tento výzkum realizovat i mezi druhými ročníky v rámci závěrečného opakování učiva. V rámci tohoto výzkumu jsem se zaměřila na to, jak dobře žáci pracují s posuny funkcí a jak jsou schopni je aplikovat na mocninné funkce. Všechny testy byly prováděny anonymně, což znamená, že žádný z žáků nebyl identifikovatelný na základě svých odpovědí. Tento přístup byl zvolen s cílem zajistit, aby se žáci cítili pohodlně, aby výsledky byly co nejobjektivnější a aby testování proběhlo bez zbytečného stresu a obav.

4.4 Faktory ovlivňující výsledky

Při každém výzkumu se objevuje celá řada proměnných, které mohou negativně ovlivnit výsledky. Mezi tyto proměnné patří faktory, které se mohou projevit různými způsoby a mírou, a je nutné je brát v úvahu při interpretaci dat. Z celé řady možných proměnných uvádím pouze tři nejzásadnější, které měly významný dopad na náš výzkum:

- **Čas zadání testu:** Test byl žákům zadán během hodin matematiky, které probíhaly odpoledne. Je zřejmé, že tento fakt měl vliv na motivaci i na výkonnost žáků, protože odpolední hodiny mohou být náročnější kvůli únavě a poklesu koncentrace.
- **Stejné zadání pro všechny:** Všichni žáci měli stejné zadání testu. I když byli žáci upozorněni, že se test nebude hodnotit, mohlo dojít ve výjimečných případech

k opisování. Tato možnost opisování mohla narušit objektivitu výsledků a ovlivnit celkovou validitu testu.

- **Motivace žáků:** V důsledku nehodnocení testu a také anonymity testů žáci nemuseli být motivováni k dobrým výkonům. Absence motivace k dosažení co nejlepších výsledků mohla vést k tomu, že žáci nepřistupovali k testu s maximální vážností, což se mohlo odrazit na kvalitě jejich odpovědí.

Tyto faktory je důležité mít na paměti při vyhodnocování výsledků a při tvorbě závěrů, protože mohou podstatně ovlivnit interpretaci získaných dat a výsledků výzkumu. Rovněž je vhodné zvážit možné další proměnné (např. podmínky prostředí jako jsou teplota, hluk, nebo kvalita vzduchu), které by mohly mít dopad na výsledky, a případně provést doplňující analýzy.

4.5 Test

Test byl prováděn v průběhu května během odpoledního vyučování, konkrétně během 6. a 7. vyučovací hodiny. Tento test je určený pro studenty prvního a druhého ročníku Obchodní Akademie ve Vlašimi. Obsahoval celkem osm úloh, zaměřených na posun mocninných funkcí a absolutní hodnotu. Studenti měli k dispozici celou hodinu na jejich vypracování, avšak většina z nich dokončila test již během první půlhodiny. Při přípravě testu jsem úlohy strukturovala následovně:

- Posunutí ve směru osy x (doprava a doleva)
- Posunutí ve směru osy y (nahoru a dolů)
- Kombinace předchozích dvou typů úloh
- Úlohy zaměřené na absolutní hodnotu

Snažila jsem se zajistit rovnoměrné zastoupení všech uvedených kategorií úloh a současně jsem se snažila rozložit jejich uspořádání tak, aby dvě úlohy stejné kategorie následovaly po sobě.

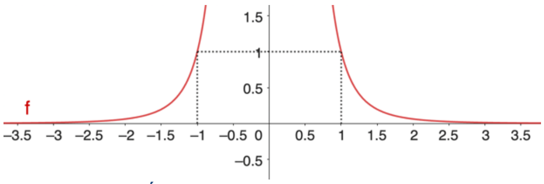
Jako poslední, osmou úlohu jsem zvolila úlohu, kde studenti měli určit předpis funkce zadané graficky. Tuto úlohu jsem záměrně umístila na konec, protože je netradiční a považuji ji za nejtěžší ze všech připravených úloh.

4.5.1 Zadání

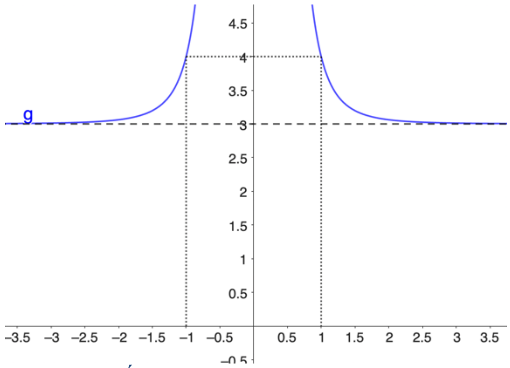
1) *Nakreslete grafy daných funkcí a popište jaký je mezi nimi vztah. Co mají společného? Co je jiné? Svá tvrzení zdůvodněte.*

$$f: y = x^3, \qquad g: y = x^3 + 1$$

2) *Jaký je vztah mezi funkcemi (Obrázek 14) a (Obrázek 15)? Svoje tvrzení zdůvodněte.*



Obrázek 14: Úloha 2 - graf funkce f



Obrázek 15: Úloha 2 - graf funkce g

3) *Napiš postup pro spolužáka, díky kterému nakreslí graf funkce:* $y = \frac{1}{(x+3)^3} - 1$.

4) *František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y) (Tabulka 1) a (Tabulka 2). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.*

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Tabulka 1: Tabulka hodnot funkce f

g:

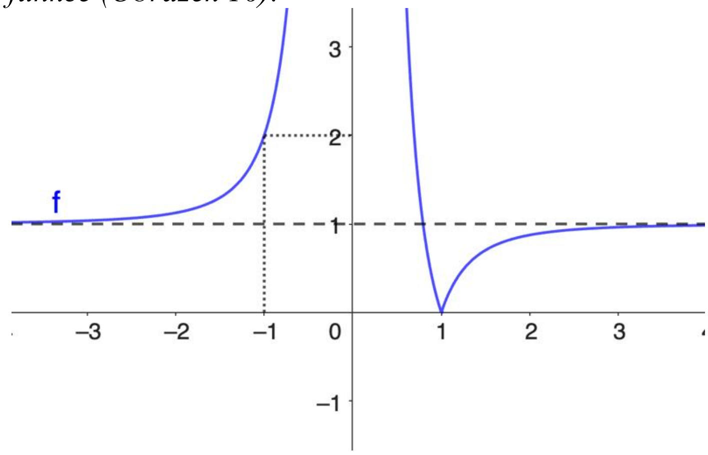
x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

Tabulka 2: Tabulka hodnot funkce g

5) *Nakresli graf funkce* $f: y = (x - 5)^2 - 3$

6) *Jaké vidíš rozdíly mezi funkcí* f *z předchozí úlohy a funkcí* $g: y = (x + 2)^2 - 3$*? Čím jsou způsobeny? (můžeš si pomoct grafem).*

7) *Jaké vidíš rozdíly mezi funkcí f z úlohy číslo 5 a funkcí $h: y = |(x-5)^2 - 3|$? Čím jsou způsobeny? (můžeš si pomoct grafem).*
8) *Najdi předpis funkce (Obrázek 16):*



Obrázek 16: Úloha 8 - zadání

Úvodní úloha se zaměřuje na vertikální posun funkcí. Hlavním úkolem je popsat, že se grafy funkcí f a g liší v jejich vertikální poloze. Očekává se použití formulací jako například „funkce g je posunuta výše než funkce f“ nebo „hodnoty y funkce f jsou menší než hodnoty y funkce g“. K podpoře porozumění této problematiky jsou připraveny dva směrové dotazy a výzva k vykreslení grafů obou funkcí. Funkce jsou úmyslně zvoleny jednoduché, což zvyšuje šanci na úspěch žáků, kteří s nimi již mají zkušenosti. Tato úloha však může být pro některé žáky náročnější v porovnání s ostatními, jelikož obsahuje rozsáhlejší instrukce. Žáci jsou vyzváni ke kreslení obou grafů a následnému jejich porovnání.

Druhá úloha se zaměřuje na posunutí grafu funkce nahoru po ose y. Funkce jsou prezentovány pomocí grafů a úkolem žáků je detailně popsat vztahy mezi nimi. Pro lepší přehlednost jsem ve všech grafech zvýraznila dvě klíčové hodnoty. Dále jsem v druhém grafu zobrazila asymptotu, avšak může to být prvkem, který žáky zbytečně mást. Tato úloha je inspirována druhým úkolem z výzkumu *Students‘ understandings of the transformations of functions* od Camille S. Burnett. Je pravděpodobné, že žáci budou mít podobné obtíže s tím, že si nebudou jistí, co se od nich přesně očekává, což může vést k tomu, že odpoví na jiné otázky.

Ve třetí úloze, která se zaměřuje na posun dolů a doleva, najdeme výzvu k popisu postupu. Tím je po žácích žádáno, aby vyjádřili postup řešení vlastními slovy. Díky tomu pak můžeme lehce odhalit jejich uvažování při konstrukci grafu funkce. Tato úloha může být pro žáky náročnější vzhledem k tomu, že obsahuje třetí mocninu ve jmenovateli. Očekávám, že žáci se pokusí o hyperbolu, která je jim již známá. Pravděpodobný postup je, že si žáci zvolí body, dosadí do tabulky a následně nanesou do kartézské soustavy souřadnic a proloží je hyperbolou. Tento postup mají zažitý z výuky. V posledních hodinách však probírali posuny funkcí a je tedy také možné a vítané, že někteří žáci zvolí tento postup.

Čtvrtá úloha se zaměřuje na posun doprava. Je zadána pro žáky poněkud netradičně. Můžeme zde vidět slovní popis situace a dvě funkce zadané tabulkou. S ohledem na lepší porozumění jsem se rozhodla pro finanční téma, které by mělo být žákům obchodní akademie blízké. Předpokládám, že žáci si všimnou, že když jsou dosazeny stejné hodnoty proměnné, jejich funkční hodnoty se liší a tento fakt blíže specifikují. Tato úloha je inspirována čtvrtou úlohou z výzkumu *Students' understandings of the transformations of functions* od Camille S. Burnett.

Na pátou úlohu zaměřenou na posun doprava a dolů navazují i úlohy 6 a 7. Žáci jsou zde vyzváni k nakreslení grafu kvadratické funkce, se kterou byli již v hodinách matematiky seznámeni. Proto by tato úloha neměla žákům činit větší potíže. Očekávaný postup je nalezení vrcholu této paraboly, dále jednoho bodu a následné proložení paraboly.

Šestá úloha se zaměřuje na posun funkce doleva a dolů. Oproti předchozí funkci, na kterou odkazuje, se liší pouze jednou konstantou a tedy i směrem posunutí po ose x. Předpokládám, že žáci při výzvě k identifikaci rozdílů upozorní právě na tuto konstantu. K lepšímu porozumění úkolu je k dispozici možnost nakreslit graf dané funkce.

Předposlední úloha navazuje rovněž na úlohu číslo 5. Rozdíl v těchto úlohách je evidentní již ze zadání a to díky absolutní hodnotě. Předpokládám, že i to žáci ve svých řešeních zmíní. Zde chci testovat porozumění absolutní hodnotě ve spojení s funkcemi.

Jako poslední, tedy osmou úlohu, jsem zvolila nalezení předpisu funkce. Tento typ úlohy je pro žáky netradiční a proto očekávám, že bude patřit mezi nejnáročnější úlohy. Jedná se o mocninnou funkci se záporným exponentem, jehož absolutní hodnota je liché číslo nebo číslo 1. Navíc je tato funkce posunuta o jednotku výše po ose y a dále v absolutní hodnotě. Pro přehlednost jsem v grafu funkce zobrazila jeden bod a asymptotu. Pro vyšší škálu správných odpovědí jsem zvolila bod, díky kterému nelze jednoznačně určit předpis funkce. Jako správnou odpověď tedy budu brát jakýkoli předpis funkce, který by vyhovoval zadání.

4.5.2 Hodnocení výsledků

V následující tabulce (Tabulka 3) jsou uvedeny výsledky všech osmi úloh matematického testu. Pro každou úlohu jsou testy rozděleny do tří kategorií: nevyplněné testy, testy s chybnými odpověďmi a testy se správnými odpověďmi. U každé úlohy jsou pak uvedeny počty odpovědí v jednotlivých kategoriích a jejich procentuální zastoupení. Tato analýza poskytuje podrobný přehled o úspěšnosti žáků při řešení jednotlivých úloh a ukazuje, ve kterých oblastech dochází k největším problémům. Data z tabulky reflektují rozdílné úrovně úspěšnosti v jednotlivých testovaných oblastech matematiky.

Úloha	Nevyplněno	Špatně	Správně
1. Úloha	14 (9,15%)	106 (69,28%)	33 (21,57%)
2. Úloha	49 (32%)	53 (34,64%)	51 (33,33%)
3. Úloha	44 (28,76%)	64 (41,83%)	45 (29,41%)
4. Úloha	53 (34,64%)	45 (29,41%)	55 (35,95%)
5. Úloha	37 (24,18%)	77 (50,33%)	39 (25,49%)
6. Úloha	55 (35,95%)	35 (22,88%)	63 (41,18%)
7. úloha	60 (39,22%)	27 (17,65%)	66 (43,14%)
8. úloha	90 (58,82%)	58 (37,9%)	8 (5,23%)

Tabulka 3: Analýza výsledků

V první úloze je výrazně vyšší počet špatných odpovědí (106, což představuje 69,28%) než počet správných odpovědí (33, což je 21,57%). Tento rozdíl naznačuje významné obtíže žáků s porozuměním nebo aplikací konceptů potřebných k řešení této úlohy. Pravděpodobně se jedná o základní nedostatky v porozumění principům mocninných funkcí. Navzdory tomu měla tato úloha nejméně nevyplněných testů (14, což představuje 9,15%). Tento fakt naznačuje, že žáci jsou s tímto typem úloh již poměrně obeznámeni.

U druhé úloze je pozorovatelný téměř vyrovnaný poměr mezi špatnými odpověďmi (53, což představuje 34,64%) a správnými odpověďmi (51, což je 33,33%), což naznačuje, že úloha byla pro žáky relativně náročná. Průměrný počet nevyplněných odpovědí (49, tedy 32%) ukazuje, že žáci nebyli s touto typologií úlohy obeznámeni a neměli jasno v tom, jak na ni správně reagovat. Pravděpodobně se jednalo o nový nebo nezvyklý koncept, se kterým se žáci dosud nesetkali.

U třetí úlohy je zjevné, že většina žáků měla významné obtíže s jejím řešením, jak dokládá vysoký počet špatných odpovědí (64, což představuje 41,83%) a výrazný počet nevyplněných odpovědí (44, tedy 28,76%). Tento markantní nedostatek správných odpovědí může být způsoben několika faktory. Časová náročnost úkolu byla pravděpodobně příliš vysoká, což mohlo významně snížit motivaci žáků k dokončení úkolu. Dalším možným faktorem může být jejich omezená znalost dané látky nebo nejistota ohledně správného postupu. Tento výrazná absence správných odpovědí může naznačovat, že úloha byla pro většinu žáků příliš náročná a možná nebyla adekvátně přizpůsobena jejich znalostem a schopnostem.

Čtvrtá úloha, i když byla třetí nejčastěji správně zodpovězenou úlohou (55 odpovědí, což představuje 35,95%), stále vykazuje vysoký počet špatných odpovědí (45 odpovědí, což je 29,41%). Tento jev by mohl být způsoben složitostí zadání nebo nejistotou žáků ohledně správného postupu. Dále je zde vysoký počet nevyplněných odpovědí (53 odpovědí, což představuje 34,64%) a to naznačuje, že někteří žáci mohli být odrazeni dlouhým nebo složitým zadáním úlohy, a proto se rozhodli úlohu vůbec neřešit.

Pátá úloha, i přestože dosáhla relativně vysokého počtu správných odpovědí (39, což představuje 25,49 %), stále zůstává významným zdrojem chybných odpovědí (77, tedy 50,33 %). Tento fakt naznačuje, že žáci měli výrazné obtíže s aplikací svých znalostí, přičemž úloha byla o něco srozumitelnější než ty předchozí.

Šestá úloha ukazuje poměrně malý počet chybných odpovědí (35, což představuje 22,88% z celkového počtu) ve srovnání s vysokým počtem správných odpovědí (63, což je 41,18%). Avšak výrazně vysoký podíl nevyplněných odpovědí (55, což je 35,95%) naznačuje, že mnoho žáků nemělo dostatek času nebo motivace dokončit úlohu. Tento fakt může být dále podpořen únavou nebo ztrátou koncentrace během testu. Důležité je též vzít v úvahu, že úloha číslo šest následovala po úloze číslo pět. Nevyplnění úlohy číslo pět tedy pravděpodobně vedlo i k nevyplnění této šesté úlohy.

Sedmá úloha vykazuje vysoký počet správných odpovědí, konkrétně 66, což představuje 43,14% úspěšnost. Tento výsledek ukazuje dobrou úroveň znalostí a schopností žáků v dané problematice. Na druhé straně, sedmá úloha má také nejnižší počet špatných odpovědí ze všech úloh, pouze 27 (17,65%), což opět svědčí o kvalitním zvládnutí obsahu. Nicméně, je zde také značný počet nevyplněných odpovědí, a to 60 (39,22%). Tento fakt naznačuje možné potíže žáků s časovým limitem nebo motivací k pokračování v testu. Toto nevyplnění může být ovlivněno i tím, že sedmá úloha navazovala na předchozí úlohu číslo pět, která rovněž mohla zůstat nevyplněna.

V osmé úloze je evidentní, že žáci měli největší obtíže s jejím řešením. Pouze 8 správných odpovědí (což představuje 5,23 %) a vysoký počet nevyplněných odpovědí (90, což je 58,82 %) naznačuje, že žáci buď nerozuměli zadání, nebo neměli jasno v tom, jak úlohu správně řešit.

Z výsledků je patrné, že nejjednoduššími úlohami podle počtu správných odpovědí byly úlohy číslo 7, 6 a 4. Úloha číslo 7 dosáhla nejvyšší úspěšnosti s 66 správnými odpověďmi (43,14 %), následovaná úlohou číslo 6 s 63 správnými odpověďmi (41,18 %) a úlohou číslo 4 s 55 správnými odpověďmi (35,95 %). Tyto úlohy zřejmě obsahovaly známé koncepty nebo byly formou, která byla žákům blízká a snadněji pochopitelná. Naopak nejnáročnějšími úlohami byly: úloha číslo 8, 1 a 3. Úloha číslo 8 vykázala nejnižší úspěšnost s pouhými 8 správnými odpověďmi (5,23 %), což naznačuje vysokou složitost nebo nejasnost zadání. Úloha číslo 1 měla výrazně více špatných odpovědí než správných, to ukazuje na obtíže s porozuměním a aplikací požadovaných matematických konceptů. Úloha číslo 3 dosáhla také vysokého počtu špatných odpovědí, což naznačuje, že byla pro žáky náročná z hlediska znalostí nebo jasnosti zadání.

5 Analýza chyb

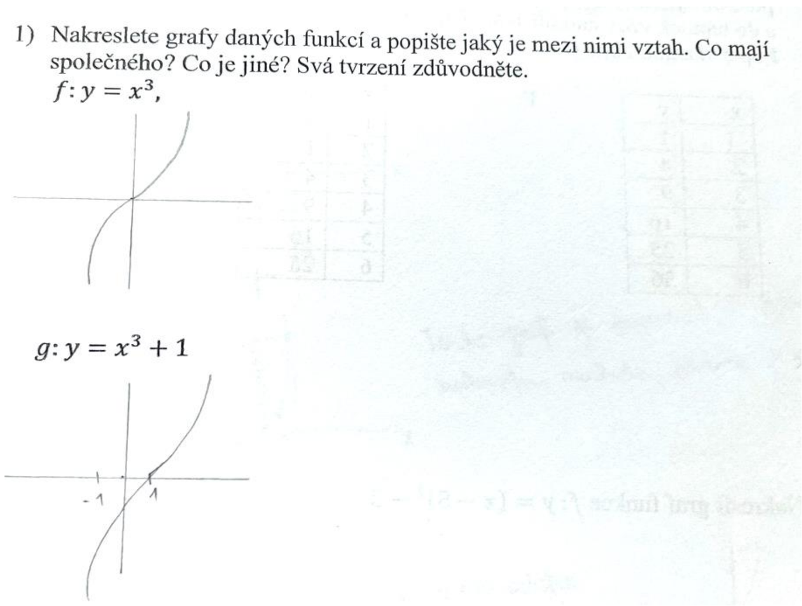
Během pečlivé analýzy výsledků testu jsem identifikovala rozmanité typy chyb, které se objevily v různých úlohách, a také specifické chyby v jednotlivých úlohách. Důležité je zdůraznit, že některé úlohy vykazují podobné postupy řešení. Například úlohy číslo 1, 3 a 5 vyžadují buď sestavení grafu funkce nebo popis jeho konstrukce a to je společná charakteristika. Úlohy 2, 4, 6 a 7 se soustředí na porovnání dvou funkcí. Osmá úloha je výjimečná tím, že žáci mají za úkol identifikovat předpis graficky znázorněné funkce. Tyto paralely se projevují v zjištěných chybových vzorech. Opakovaně jsem identifikovala stejné chyby při podobných úlohách. První krok mého přístupu byl analyzovat chyby, které se vyskytly v několika úlohách současně, a následně jsem se zaměřila na charakteristické chyby specifické pro jednotlivé úlohy.

5.1 Chyby ve vícero úlohách:

5.1.1 Posun funkce špatným směrem

Chyba, která se stala, byla předpokládaná a naznačuje, že žák má povědomí o posunech funkcí a jejich pravidlech. Bohužel si však tato pravidla špatně zapamatoval. Tento konkrétní typ chyby se dá rozdělit na *posuny podél osy* x*, posuny podél osy* y a *kombinované posuny oběma směry.*

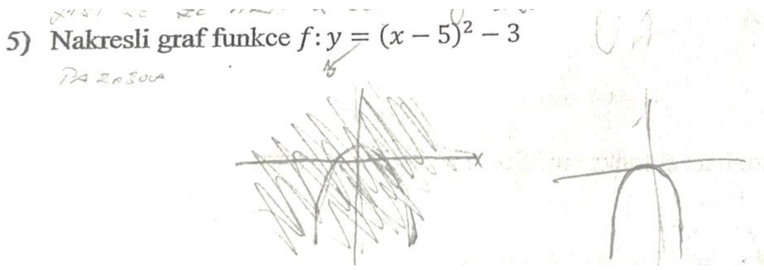
První příklad ukazuje chybu v *posunu podél osy* x, kde bylo zapotřebí posunout graf druhé funkce nahoru podél osy y. Celkem 16 žáků přeneslo druhý graf funkce doprava podél osy x (Obrázek 17). Nesprávně tedy vyložili, jak číslo jedna v předpisu funkce ovlivňuje graf funkce. Tito žáci zaměnili předpis druhé funkce s funkcí $y = (x-1)^3$.



Obrázek 17: Úloha 1 - posun doprava s jednotkou

Ve skupině, kde šlo o *posun podél osy* y, celkem 7 žáků udělalo chybu v úloze číslo šest. Tito žáci si uvědomili, že graf funkce bude posunut vzhledem k grafu z předchozí úlohy. Avšak chybně ho posunuli nahoru nebo dolů podél osy y, namísto aby provedli posun ve směru osy x.

Ve skupině zaměřené na *kombinované posuny oběma směry*, která se věnuje odpovědím na úlohu číslo pět, bylo zjištěno několik zajímavých přístupů. Úkolem bylo vytvořit graf kvadratické funkce, který je posunut osově doprava a po ose y směrem dolů. Celkem 11 žáků se pokusilo identifikovat kvadratickou funkci a zkonstruovat její graf. Bylo patrné, že žáci použili parabolu, ale jejich interpretace v kartézské soustavě souřadnic byla chybná. Tři žáci nakreslili pouze základní graf kvadratické funkce $y = x^2$, zatímco další dva posunuli tento graf nahoru podél osy y. Ostatních 5 žáků pracovalo s funkcí $y = -x^2$ (Obrázek 18) a prováděli s ním posuny v soustavě souřadnic. Tyto různé přístupy ukázaly, že žáci rozuměli kvadratickým funkcím, ale jejich schopnost přesně a úplně vytvořit grafy byla omezená nebo nepřesná.

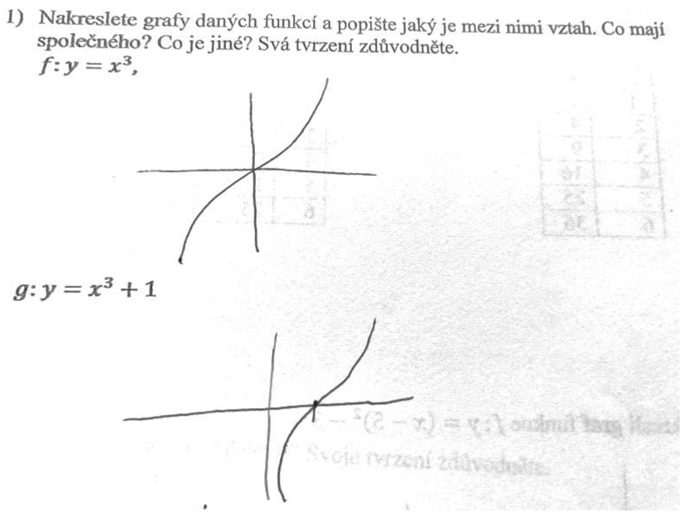


Obrázek 18: Úloha 5 - opačná parabola

V této úloze bylo také zjištěno, že 8 žáků správně identifikovalo potřebu posunout graf zadané funkce po ose y směrem dolů v porovnání se základním grafem funkce $y = x^2$. Bohužel však opomněli tento graf posunout i po ose x. Z tohoto poznatku lze usoudit, že tito žáci měli povědomí o potřebě posunu grafu po ose y směrem dolů.

5.1.2 Jednotky na osách

Tuto chybu můžeme nalézt již v první úloze. Zajímavé je, že 14 žáků zde neuvedlo žádnou jednotku na ose grafu (Obrázek 19), což naznačuje možný nedostatek porozumění měřítku a jeho nutnosti. Tento fakt může rovněž signalizovat určitý nedostatek pozornosti k detailům.



Obrázek 19: Úloha 1 - posun doprava bez jednotky

Dva žáci v úloze číslo pět správně posunuli graf základní kvadratické funkce směrem dolů a doprava po osách soustavy souřadnic, avšak nezahrnuli žádné jednotky na osách, což způsobuje značné nejasnosti při interpretaci daného grafu.

5.1.3 Nejednotné měřítko na ose y

Ve svém výzkumu jsem narazila na zajímavou chybu ve čtvrté úloze. Osm žáků nebralo v úvahu měřítko, takže jejich grafy vypadaly jako grafy lineární funkce (viz Obrázek 20), přestože ve skutečnosti šlo o kvadratické funkce.

Konkrétní problém spočíval v tom, že žáci použili čísla na y-ové ose pouze jako soubor značek, y-ová ose tak není skutečnou číselnou osu. To znamená, že nebrali v úvahu skutečné hodnoty a proporce mezi těmito čísly. Nejprve nakreslili graf bez pečlivého zvážení měřítka a poté doplnili souřadnice jednotlivých bodů, ale zapomněli, že jednotky na jednotlivých osách mohou být různé, ale na jedné ose musí být jednotky konzistentní.

Kvadratická funkce má charakteristický tvar paraboly, zatímco lineární funkce je reprezentována přímkou. Když žáci nesprávně aplikovali měřítko, zkreslili tvar paraboly do podoby, která připomínala přímku. To naznačuje, že žáci možná vidí rostoucí lineární graf jako univerzální vzor pro jakoukoli funkci a nedokáží správně rozlišit mezi různými typy funkcí na základě jejich grafického znázornění.

4) František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

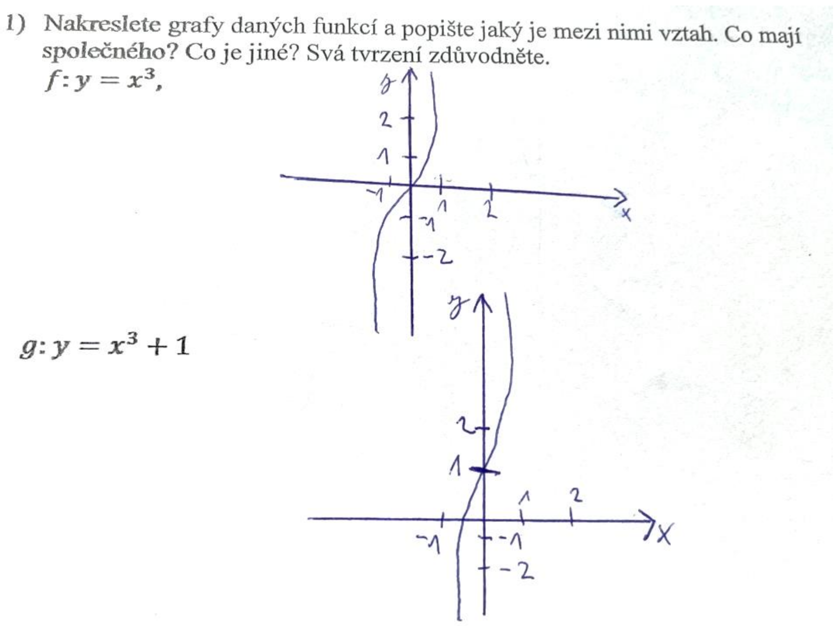
g:

x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

Obrázek 20: Úloha 4 – graf

5.1.4 Nedostatečná odpověď formou grafu

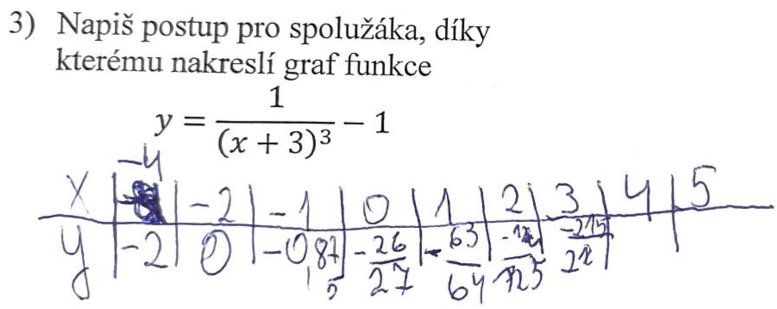
V této části se budeme zabývat odpověďmi, které jsou nějakým způsobem neúplné či nedostatečné. Zaměříme se zejména na odpovědi, které obsahují graf zadané funkce, nebo alespoň pokus o jeho zobrazení. Například v první úloze celkem 51 žáků správně nakreslilo oba grafy funkce, avšak popisy k těmto grafům buď chyběly, nebo byly uvedeny nesprávně (Obrázek 21). Tento problém může mít několik příčin. Tito žáci si možná nebyli jistí, jak na otázku přesně odpovědět, nečetli důkladně zadání, nebo spoléhali na to, že samotné grafy funkcí budou dostatečně výmluvné a další komentář není nutný. Je také možné, že měli potíže s časovým rozvrhem a nezbyl jim dostatek času na přidání všech potřebných popisů. Tento jev poukazuje na důležitost nejen správného vykreslení grafů, ale i pečlivého přístupu k zadání a doplnění všech požadovaných informací.



Obrázek 21: Úloha 1 - správně vykreslený graf bez tabulky

U třetí úlohy se 15 studentů pokusilo pouze nakreslit graf funkce, ačkoli to vůbec nebylo jejich úkolem. Je možné, že tito žáci nejprve chtěli zkusit graf sestrojit, možná aby si ověřili svůj postup, který zvolili. Bohužel však při pokusu o sestrojení grafu neuspěli. Tento neúspěch mohl být demotivující a vedl je k rozhodnutí nepokračovat dále v plnění této úlohy.

Dalších 7 žáků v této úloze sestavilo tabulku hodnot. Zvolili k tomu hodnoty 1, 2 a 3. Avšak tyto hodnoty nejsou ideální pro výpočet, protože jsou časově náročné a vyžadují matematickou preciznost, navíc výsledky bývají necelá čísla. Tento fakt mohl způsobit znejistění žáků a přimět je zastavit se v plnění úkolu (Obrázek 22).



Obrázek 22: Úloha 3 - tabulka hodnot

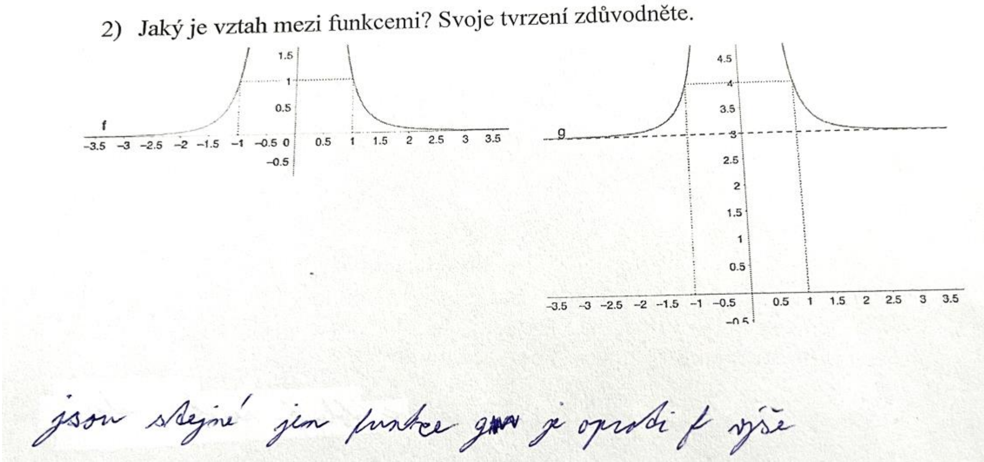
V úloze číslo čtyři se našlo pět žáků, kteří se pustili do konstrukce obou grafů. Nicméně tato aktivita nebyla explicitně požadována zadáním. Zdá se, že tito žáci mohli potřebovat jinou formu zadání funkce, než je tabulka, aby byli schopni popsat společné vlastnosti a rozdíly mezi funkcemi. Avšak ani jeden z nich se nakonec nedostal k samotnému popisu funkcí.

Podobná situace nastala i v úlohách šest a sedm. V úloze šest totiž osm žáků vytvořilo pouze graf dané funkce, aniž by se pustili do dalšího rozboru. A v úloze sedm bylo čtrnáct žáků, kteří se omezili jen na konstrukci grafu funkce h, aniž by se věnovali popisu či analýze této funkce.

5.1.5 Neúplná odpověď

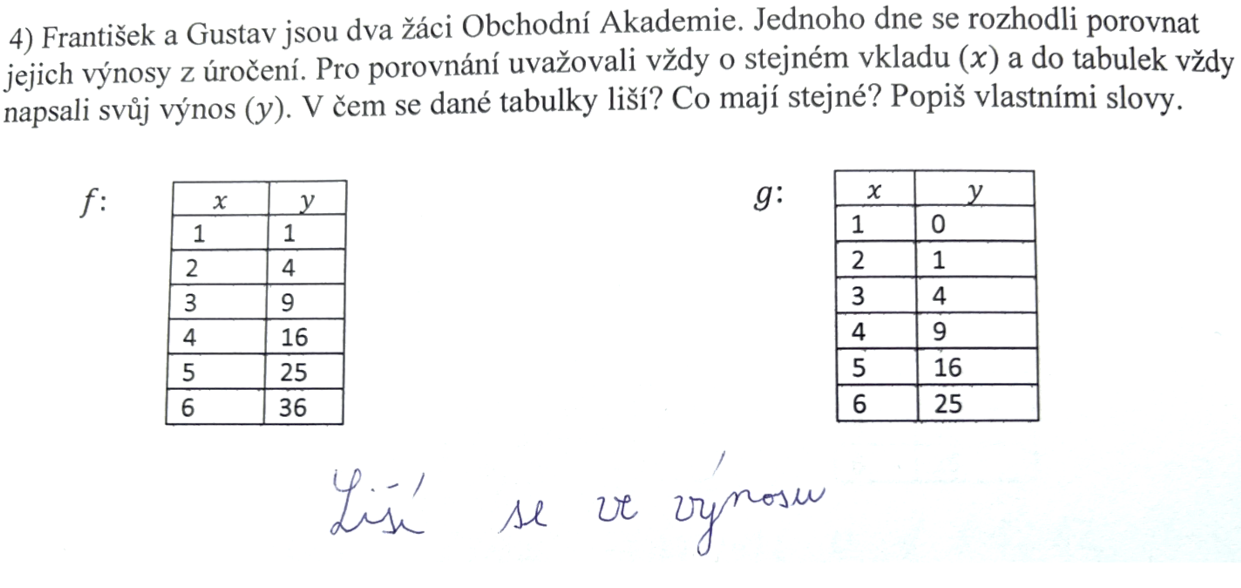
V této části se zaměřuji na odpovědi, které jsou pravdivé, avšak mohou být považovány za nedokončené, obsahovat určité nepřesnosti nebo být příliš obecné a mohly by být detailněji specifikovány. Prvním příkladem tohoto jevu je situace z první úlohy, kde 8 žáků nakreslilo pouze graf první funkce, zatímco graf druhé funkce zůstal prázdný.

V druhé úloze správně identifikovalo posunutí funkcí celkem 36 žáků, avšak nedostávalo se jim informací o konkrétním rozsahu tohoto posunutí. Je zajímavé, že jejich odpovědi se lišily, ale obecně ukazovaly na existenci posunutí funkcí. Někteří uvedli formulace jako: „funkce jsou jinak posunuté“, nebo „každá funkce je v jiné výšce“ (Obrázek 23).



Obrázek 23: Úloha 2 - jedna funkce je výše

Ve čtvrté úloze se žáci zaměřovali na porovnání funkcí a jejich rozdílnosti. Z celkového počtu všech žáků si jich 12 všimlo, že tabulky ukazují odlišné výsledky (Obrázek 24). Pět žáků identifikovalo rozdíl ve výnosech jako důsledek různých úrokových sazeb. Čtyři další žáci se domnívali, že rozdílnost vznikla tím, že František „začal úročit dříve“. Překvapivě ani jeden z těchto žáků neprovedl důkladnější porovnání hodnot obou funkcí, což by mohlo poskytnout hlubší pochopení jejich rozdílů.


4) František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

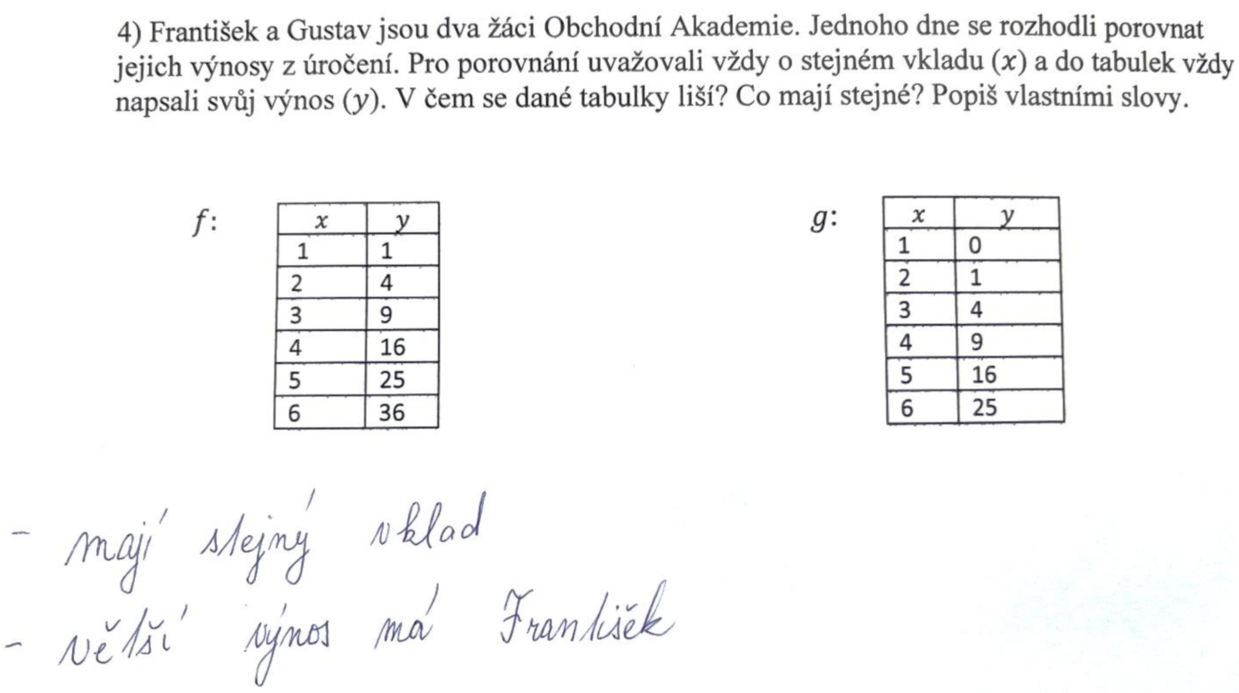
g:

x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

Liší se ve výnosu

Obrázek 24: Úloha 4 - jiný výnos

Naopak 12 žáků v této úloze provedlo porovnání hodnot zadaných dvou funkcí a na základě tohoto porovnání vyjádřilo tuto skutečnost slovy jako například: "František má vždy vyšší výnos než Gustav." Bohužel se však dále nesnažili hlouběji zkoumat a analyzovat tento jev, nebo možná nevěnovali dostatečnou pozornost přesnějšímu vztahu mezi těmito funkcemi, který mohl být klíčový pro lepší porozumění celé situaci (Obrázek 25).


4) František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

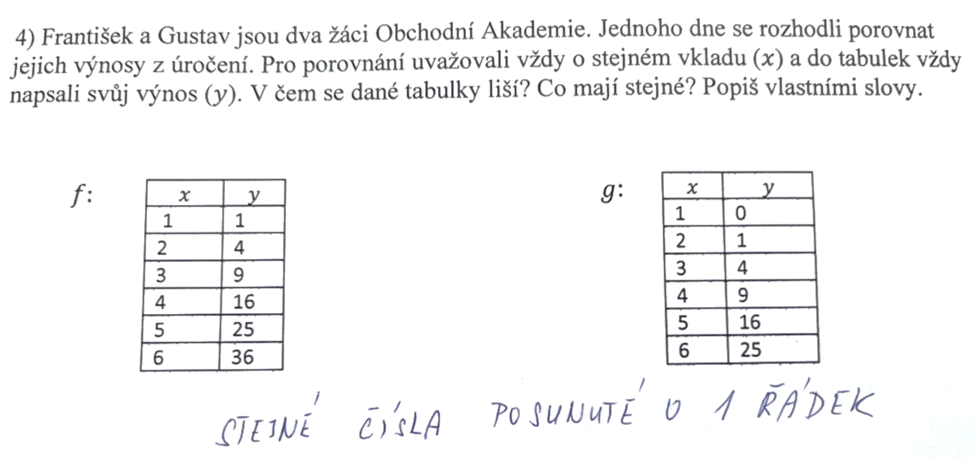
g:

x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

- mají stejný vklad
- větší výnos má František

Obrázek 25: Úloha 4 - František má víc

Navíc celkem 17 žáků zaznamenalo určitou spojitost mezi zobrazenými tabulkami (Obrázek 26). Tuto spojitost většina z nich popisovala jako: „u Gustava jsou výnosy opožděny“ nebo „Gustavovy výnosy jsou o jeden řádek posunuté“. Avšak nikdo z těchto žáků se nepokusil tuto spojitost hlouběji analyzovat či dále rozvíjet. Kvůli tomu se jim nepodařilo odhalit hlubší vztah mezi těmito dvěma funkcemi a jejich vzájemnými vazbami.


4) František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

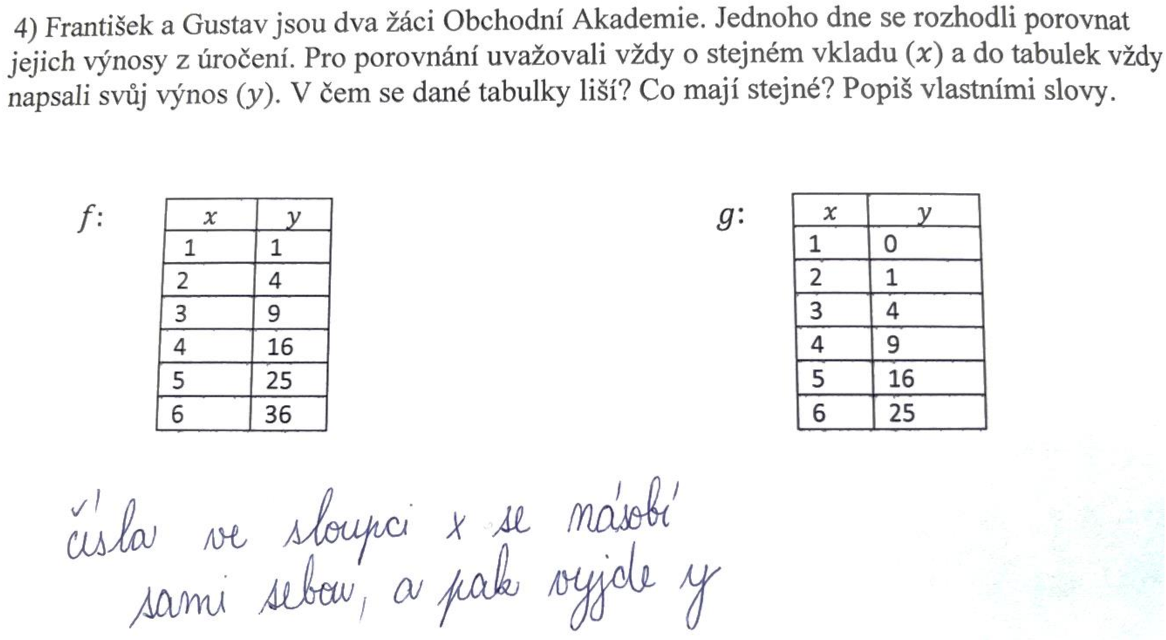
g:

x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

STEJNÉ ČÍSLA POSUNUTÉ O 1 ŘÁDEK

Obrázek 26: Úloha 4 - posunuto

Druhou skupinou, která zahrnuje 36 odpovědí, i když neúplných, tvoří žáci, kteří identifikovali vztah mezi proměnnými x a y, tedy mezi vkladem a výnosem, u první funkce f. Někteří z těchto žáků popsali tento vztah slovně (Obrázek 27), jiní vytvořili graf této funkce, a zbývající pak napsali analytický předpis $y = x^2$. Druhou funkci však žáci nepopsali vůbec.



4) František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

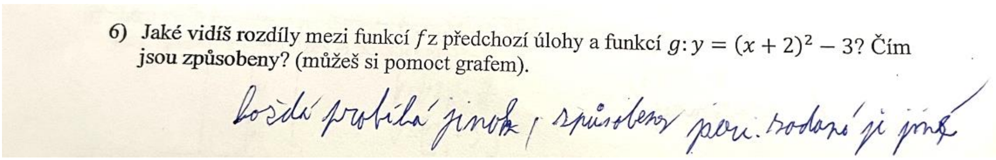
g:

x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

čísla ve sloupci x se násobí
sami sebou, a pak vyjde y

Obrázek 27: Úloha 4 - vztah u první funkce

V rámci šesté úlohy bylo úkolem žáků porovnat zadanou funkci s funkcí uvedenou v předchozí úloze. Celkem devět žáků zde zvolilo slovní popis, ve kterém vysvětlovali, že obě funkce se liší ve všech hodnotách (Obrázek 28). Přestože žáci správně identifikovali, že funkce nejsou shodné, jejich odpovědi postrádaly podrobnější specifikaci těchto rozdílů.

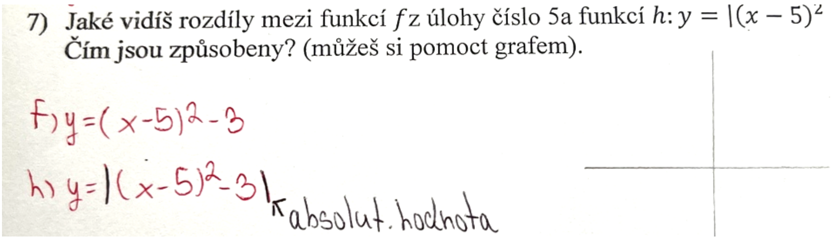


6) Jaké vidíš rozdíly mezi funkcí f z předchozí úlohy a funkcí $g: y = (x+2)^2 - 3$? Čím jsou způsobeny? (můžeš si pomoct grafem).

každá probíhá jinak, způsobeny posu. hodnoty jí jiné

Obrázek 28: Úloha 6 - nedostatečně zdůvodněno

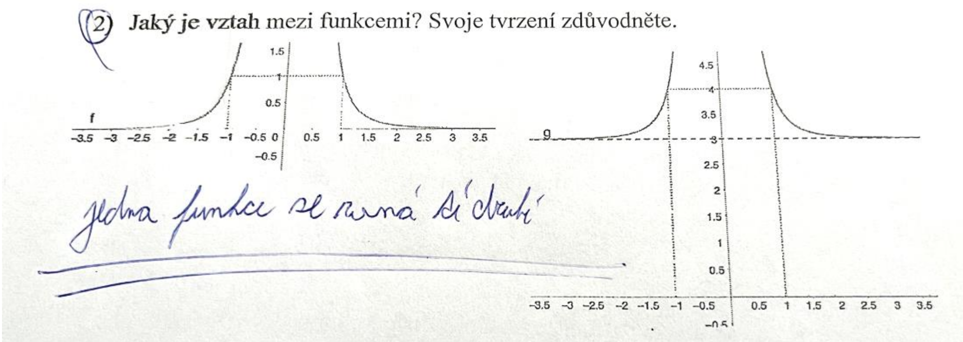
Naproti tomu 13 žáků v sedmé úloze si všimlo rozdílnosti v předpisu zadané funkce a funkce z páté úlohy, ale již roli absolutní hodnoty nijak nepopsali (Obrázek 29).



Obrázek 29: Úloha 7 - absolutní hodnota bez vysvětlení

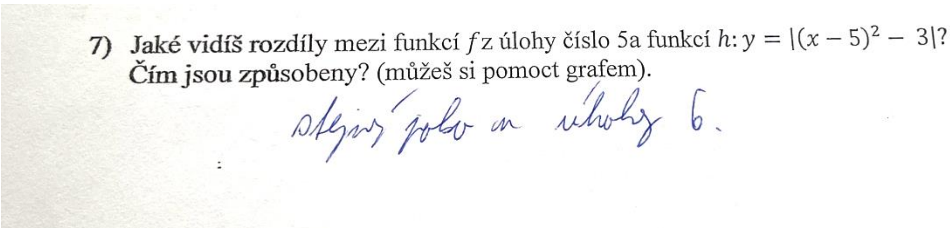
5.1.6 Stejné funkce

U úlohy číslo dvě 11 žáků vůbec nespatřilo žádný rozdíl mezi oběma grafy zadaných funkcí (Obrázek 30). Mohla je zmást asymptota zakreslená ve druhém grafu, kterou mohli zaměnit za osu x. Pro dosažení lepších výsledků by mohlo být užitečné, kdyby byly oba grafy nakresleny do stejné kartézské soustavy souřadnic. To by umožnilo žákům snadněji identifikovat rozdíly mezi grafy a správně interpretovat jejich vlastnosti.



Obrázek 30: Úloha 2 - funkce jsou stejné

K podobnému závěru došli i 3 žáci u úlohy číslo 7. Tito žáci tvrdí, že funkce h i funkce f jsou naprosto stejné a nemají žádné rozdíly (Obrázek 31).



Obrázek 31: Úloha 7 - stejný graf

5.1.7 Jiný graf

V tomto oddíle se zabývám chybou, kdy žák zkonstruoval graf jiné funkce, nežli byla zadána. V první úloze se objevilo celkem 10 žáků, kteří zaměnili předpis druhé funkce s předpisem funkce, jejíž graf je hyperbola, či parabola.

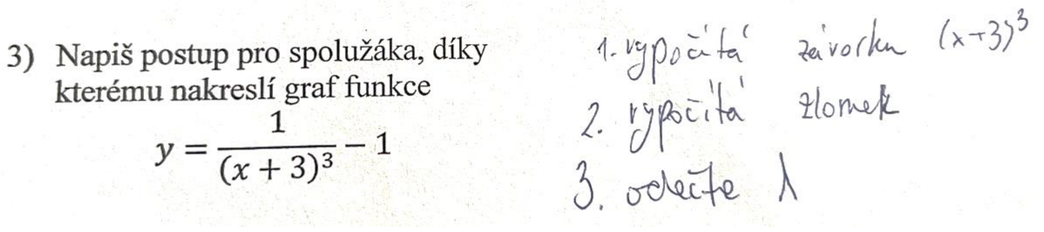
Ve třetí úloze 8 žáků úspěšně lokalizovalo střed hyperboly. Nicméně je třeba poznamenat, že poté zakreslili graf mocninné funkce, která má v exponentu číslo 3. K tomuto kroku je mohlo vést zaměnění funkce ze zadání za funkci $y = (x + 3)^3 - 1$. Navíc 3 z nich si spletli i pojmy vrchol a střed.

U úlohy číslo pět nalezneme 12 odpovědí, kde se žáci sice pokusili nakreslit graf kvadratické funkce podle zadání, ale žádný z výsledných grafů nepřipomínal parabolu. Žáci nepoužili ani tabulku hodnot, která by je vedla k vhodnému grafickému znázornění paraboly. Nejčastěji se zde objevovaly grafy hyperboly, jejích částí nebo exponenciální funkce.

5.1.8 Výpočet

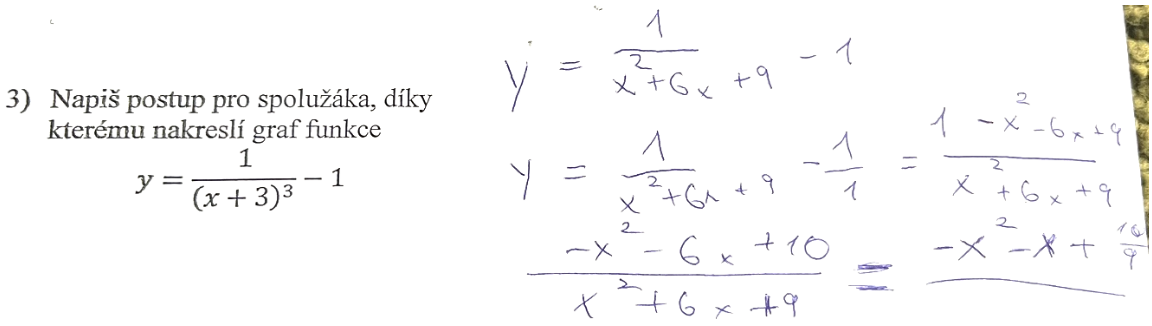
Pro tento druh chyby je typické, že se žák snaží použít výpočet ve chvíli, kdy není zapotřebí, nebo ho neprovede zcela správně, případně ho nedokončí.

Poprvé se s tímto druhem chyby můžeme setkat ve třetí úloze, kde mají žáci za úkol podrobně popsat postup při konstrukci grafu dané funkce. Celkem 5 žáků se pokusilo popsat výpočet funkční hodnoty, ale bohužel již nepokračovali v podrobném popisu samotné konstrukce grafu, čímž se dopustili této chyby (Obrázek 32).



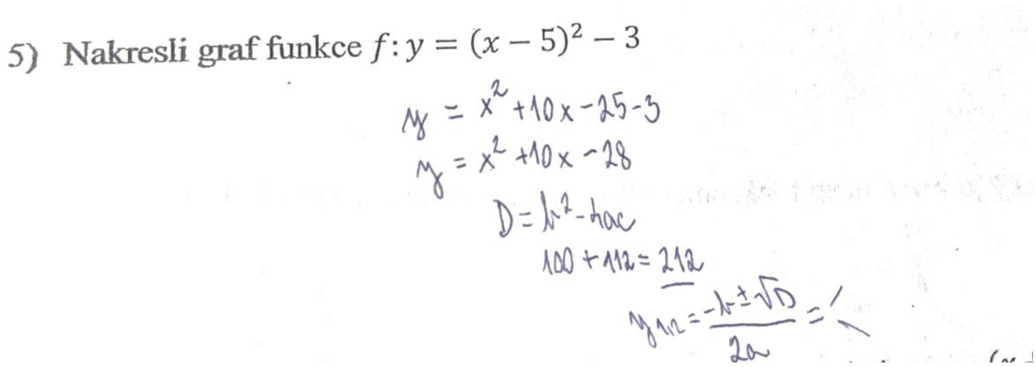
Obrázek 32: Úloha 3 - rada na výpočet

Dále se celkem 13 žáků pokusilo o úpravu výrazu v předpisu funkce (Obrázek 33). Je zde vidět nepochopení zadání a nerozpoznání mocninné funkce. Ve dvou případech se žák na předpis funkce díval jako na rovnici a vyjádřil proměnnou x.



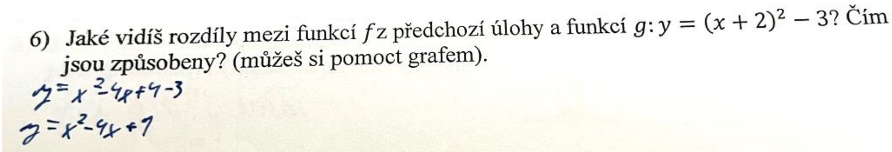
Obrázek 33: Úloha 3 - výpočet

Nyní pokračujeme v podrobné analýze řešení úlohy číslo 5, která byla zadána žákům. Jejich úkolem bylo zkonstruovat graf funkce. Při zkoumání jejich přístupů jsme zjistili, že ze všech žáků se 14 z nich nesoustředilo přímo na samotné kreslení grafu. Tito žáci se místo toho zaměřili na výpočet diskriminantu a následně na určení průsečíků s osami a vrcholu paraboly. Při těchto krocích bohužel došlo k několika chybám: 6 žáků udělalo chybu při roznásobení závorky, 5 žáků se omezilo pouze na výpočet diskriminantu a průsečíků s osou x a 3 žáci sice správně vypočítali diskriminant, ale chybovali ve vzorci pro určení vrcholu paraboly. Tento postup je čistě mechanický. Musíme konstatovat, že těmito kroky si žáci často úlohu zbytečně komplikovali (Obrázek 34).



Obrázek 34: Úloha 5 - nedopočítaný diskriminant

Na závěr se tento specifický typ chyby projevil i v případě úlohy číslo 6. V této úloze jsme identifikovali čtyři žáky, kteří se pokusili různými způsoby upravit funkční vzorec (Obrázek 35). U jednoho z těchto žáků jsme zaznamenali náznak použití diskriminantu, což mělo sloužit k určení průsečíku s osou x nebo k výpočtu vrcholu paraboly podle vzorců. Bohužel však zůstal nedokončený a nedopočítaný.

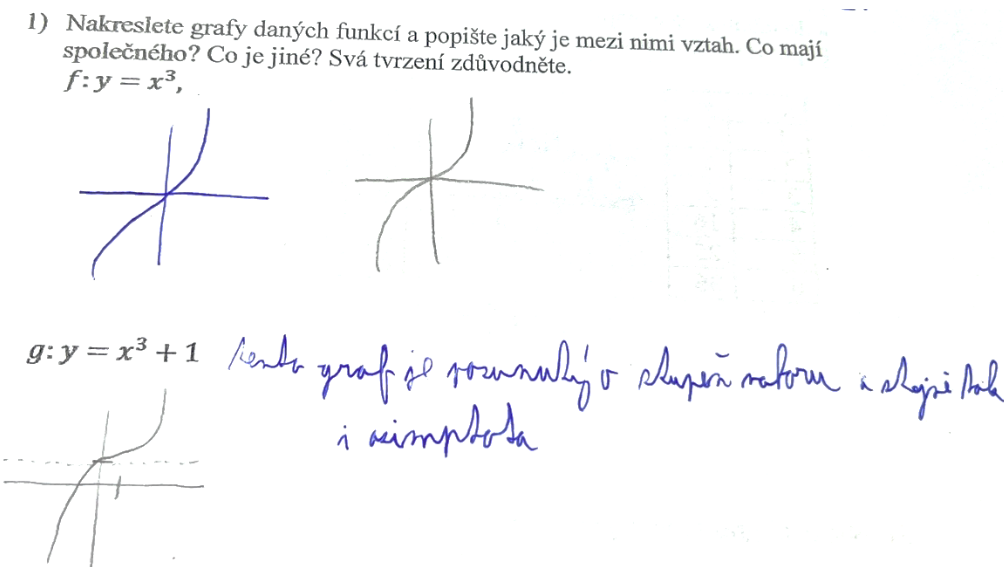


Obrázek 35: Úloha 6 - pokus o výpočet

5.2 Chyby typické pro jednotlivé úlohy

5.2.1 První úloha

V rámci této úlohy bylo nezbytné vytvořit grafy dvou funkcí. Je důležité zdůraznit, že při jejich konstrukci se objevila zajímavá situace ohledně asymptoty. I když obě zadané funkce vlastně asymptotu nemají, někteří žáci v jejich řešeních uvedli (Obrázek 36) přítomnost asymptoty. Avšak je zřejmé, že tito žáci chybně považovali za asymptotu jednu z os souřadnic systému, nikoli asymptotu v pravém slova smyslu.



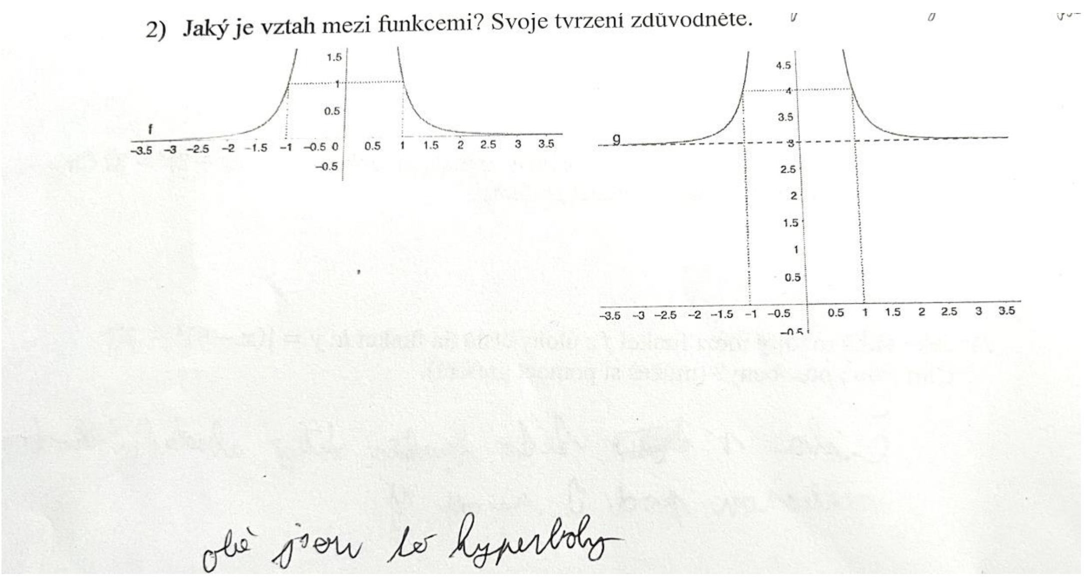
Obrázek 36: Úloha 1 - asymptota

V této úloze se často setkáváme s matematickým vyjadřováním, které není zcela přesné. Většina žáků správně pochopila, že druhá funkce je posunutá vzhledem k první. Nejčastěji tento jev popisovali slovně: „posunutá o 1 nahoru“, „posunutá o 1 bod nahoru“ nebo dokonce jako „graf je o 1 dílek šouplý“. V několika případech se objevila formulace „funkce je posunutá o 1 cm nahoru“, což naznačuje, že žáci předpokládali, že 1 cm na papíru odpovídá 1 dílku na jejich grafu. Pro ně byly tyto dva pojmy vzájemně zaměnitelné.

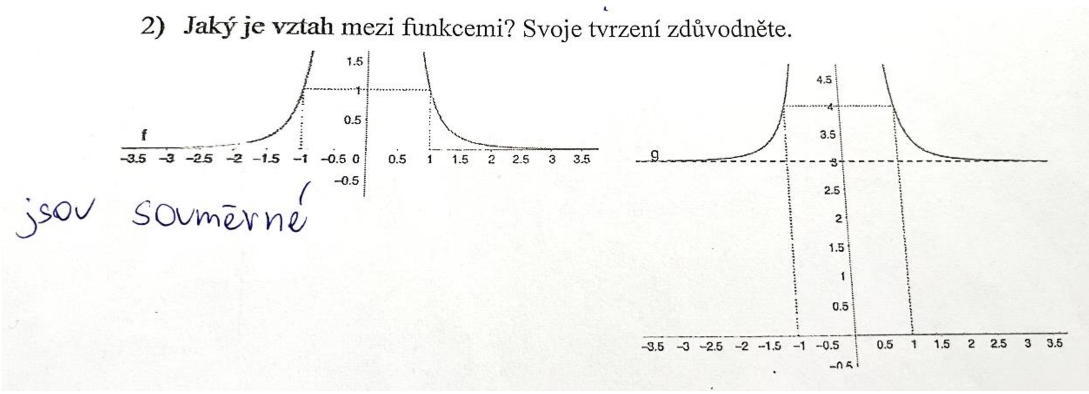
Další častou chybou bylo zrcadlové převrácení grafu druhé funkce podle osy y. Celkem sedm žáků vytvořilo obraz grafu funkce $y = x^3$ prostřednictvím osové souměrnosti podle osy y.

5.2.2 Druhá úloha

Celkem 20 žáků mělo problém se zadáním této úlohy. Z jejich odpovědí, jako například: „jsou to hyperboly“ (Obrázek 37), „jsou to funkce rostoucí“, „funkce mají lichou paritu“ lze vyčíst, že ne všichni žáci plně pochopili zadání, anebo spíše samotnou otázku. V této skupině však najdeme i 2 žáky, kteří tvrdili, že funkce nemají žádný vztah, což může být způsobeno nedostatečným pochopením matematických konceptů. Na druhou stranu, někteří žáci se zaměřili na osovou souměrnost těchto funkcí, to dokazuje tvrzení jednoho z nich: „křivky jsou na obou stranách osy y souměrné“ (Obrázek 38). Tato pozorování poukazují na to, že někteří žáci se snažili nalézt jakékoli podobnosti (ale ne vztahy) mezi grafy funkcí.



Obrázek 37: Úloha 2 - hyperbola



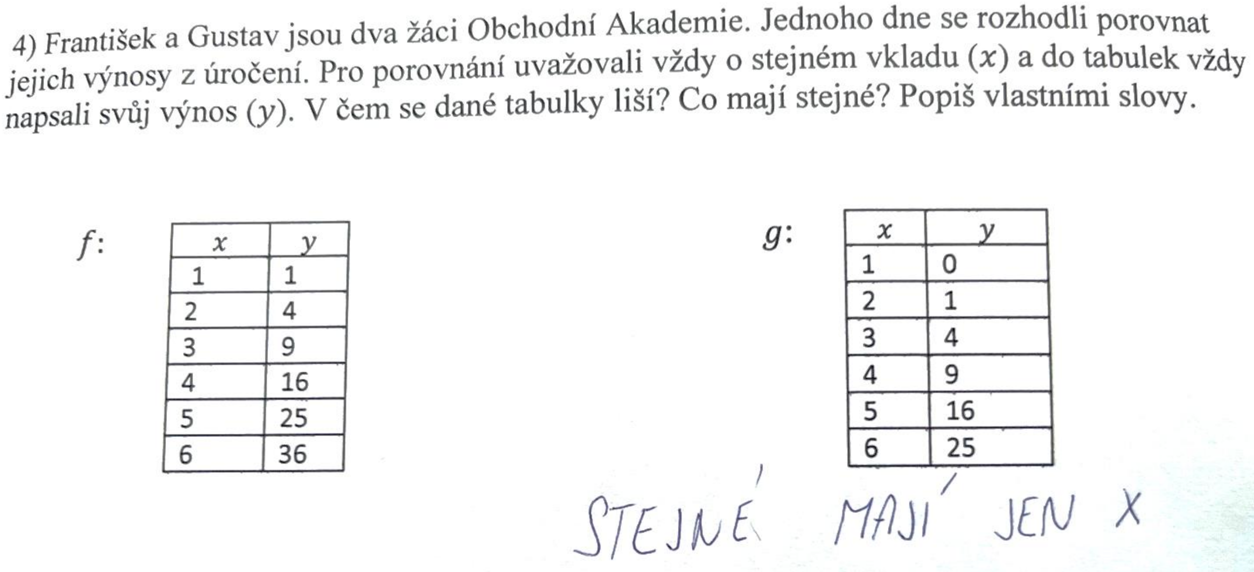
Obrázek 38: Úloha 2 - souměrnost grafů

5.2.3 Třetí úloha

V této úloze poskytli 2 žáci tak obecné pokyny, že by žák s nižším porozuměním konstrukce grafu mocninné funkce nemusel vědět, jak postupovat.

5.2.4 Čtvrtá úloha

Jako častou chybu zde lze označit nedostatečnou pozornost. Čtrnáct žáků si všimlo, že za proměnnou x je vždy dosazena stejná hodnota (Obrázek 39). Tento pozoruhodný fakt však zdůrazňuje spíše jejich možnou nedbalost při čtení zadání, neboť již zahrnují informace, které jsou v zadání vysvětleny.


4) František a Gustav jsou dva žáci Obchodní Akademie. Jednoho dne se rozhodli porovnat jejich výnosy z úročení. Pro porovnání uvažovali vždy o stejném vkladu (x) a do tabulek vždy napsali svůj výnos (y). V čem se dané tabulky liší? Co mají stejné? Popiš vlastními slovy.

f:

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

g:

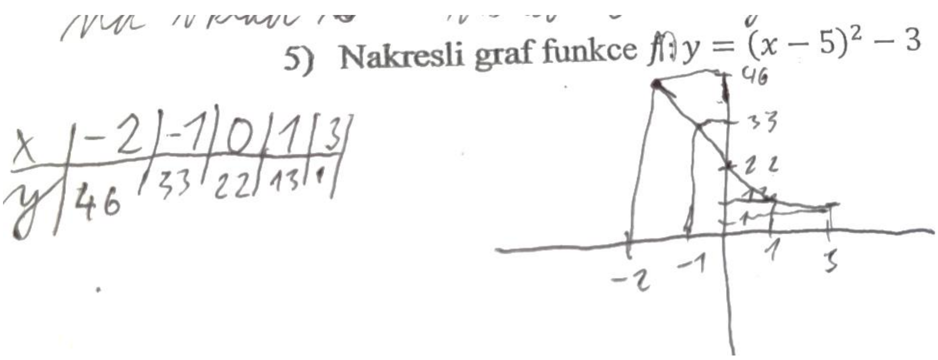
x	y
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16
6	25

STEJNÉ MAJÍ JEN X

Obrázek 39: Úloha 4 - stejné x

5.2.5 Pátá úloha

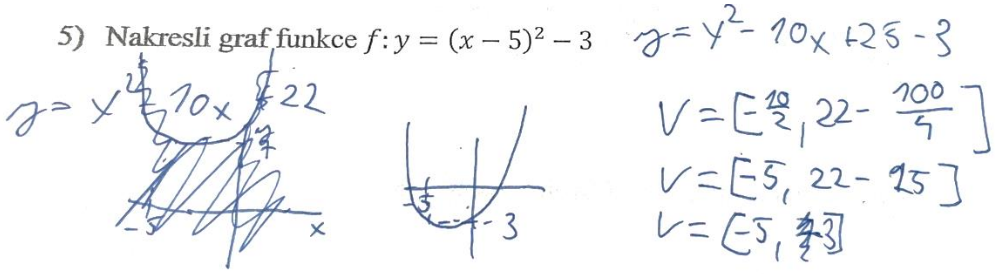
Při řešení této úlohy se nejčastější chyba objevila při konstrukci grafu pomocí tabulky hodnot. Tento přístup je sice správný, ale 25 žáků v něm udělalo nějakou formu chyby. Tito žáci se rozhodli vybrat několik prvků, spočítat jejich funkční hodnoty a na základě nich vytvořit graf funkce. Bohužel, 6 z nich se omezilo pouze na vytvoření tabulky hodnot, přičemž jejich volba nevhodných čísel vedla k mimořádně vysokým výsledným hodnotám. To pravděpodobně způsobilo jejich odraz od pokusu vytvořit grafickou reprezentaci funkce. Ostatních 15 žáků, kteří vytvořili správnou tabulku hodnot, zvolilo jen omezené množství prvků a jejich funkčních hodnot, což bránilo vytvoření správné paraboly při zanesení bodů do kartézské soustavy souřadnic (Obrázek 40). Tito žáci tedy byli spokojeni jen s částečnou grafickou reprezentací.



Obrázek 40: Úloha 5 - tabulka hodnot a špatně nakreslená parabola

Druhá běžná chyba, která se v této úloze vyskytla, byla spojena se souřadnicemi vrcholu paraboly. Ze sedmi žáků, kteří se pokusili určit souřadnice vrcholu podle předpisu dané funkce, dva z nich skutečně správně identifikovali tyto souřadnice. Bohužel, při jejich zanesení do kartézské soustavy souřadnic udělali chybu, což mělo za následek nesprávné vykreslení grafu funkce. Pravděpodobně k této chybě došlo kvůli nepozornosti.

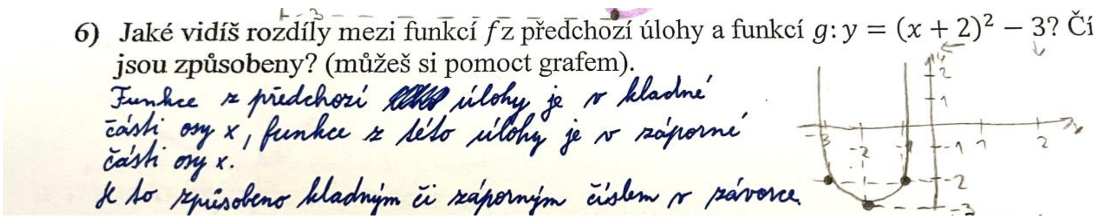
Ostatní čtyři žáci také udělali chybu při vypočítání (Obrázek 41) nebo vyčtení souřadnic vrcholu z funkčního předpisu. Někteří si sice uvědomili změnu znaménka, avšak nesprávně ji aplikovali buď na obě souřadnice nebo pouze na y-ovou souřadnici.



Obrázek 41: Úloha 5 - špatný vrchol

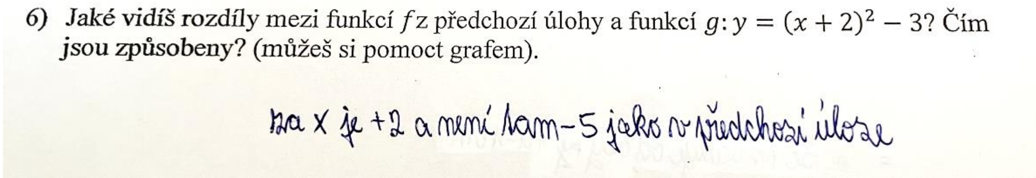
5.2.6 Šestá úloha

Zajímavou chybou, kterou udělalo celkem 17 žáků, bylo označení funkce g jako „v mínusu" a funkce f jako „v plusu" (Obrázek 42). Z přidaných obrázků je znát, že do grafu zakreslili pouze část paraboly (tu z předchozí úlohy omezili na kladná x a tu z této úlohy pouze na záporná x) a neuvědomili si, že definičním oborem paraboly jsou všechna reálná čísla.



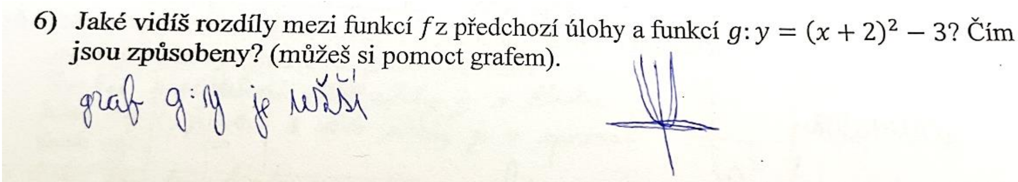
Obrázek 42: Úloha 6 - graf v mínusu

Celkem u 11 žáků nalezneme poukázání na rozdílnost v předpisu funkcí (Obrázek 43). Tito žáci si všimli jiných parametrů a někteří se pokusili bez jakékoli grafické interpretace tento jev vysvětlit. Bohužel poukázali pouze na předpisy daných funkcí a nijak dál tuto myšlenku nerozvíjeli. Ačkoliv je jejich odpověď správná, pro naše účely je bohužel nedostatečná.



Obrázek 43: Úloha 6 - znaménka

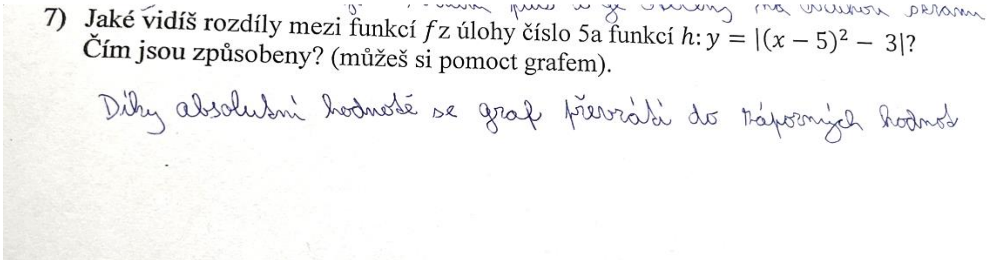
Víceméně nečekanou odpověď napsali čtyři žáci, kdy popisují, že tento graf je „užší" nežli graf předcházející funkce (Obrázek 44), nebo že se „více přiklání k ose y. Tato chyba mohla vzniknout se zaměněním parametrů a a m v předpisu kvadratické funkce doplněné na čtverec $y = a(x - m)^2 + n$, kde parametr a způsobuje, jak moc bude graf funkce „úzký“.



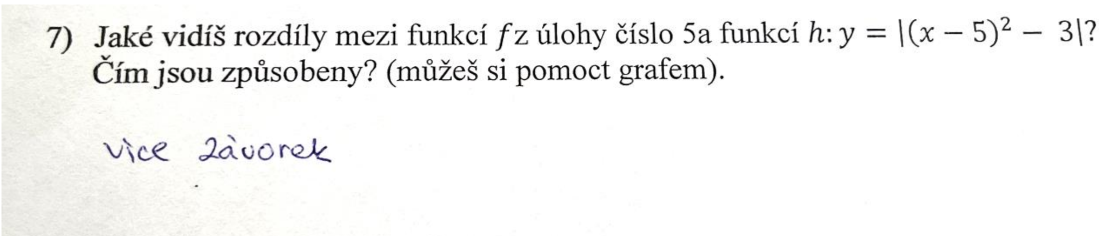
Obrázek 44: Úloha 6 - užší parabola

5.2.7 Sedmá úloha

Celkem 9 žáků popsalo rozdílnosti obou funkcí nesprávným způsobem. Tři z nich hledali posun mezi funkcemi, další čtyři tvrdili, že „absolutní hodnota převrátí hodnoty do záporu“ (Obrázek 45).Poslední dva označili absolutní hodnotu jako „nadbytečnou závorku“ (Obrázek 46).



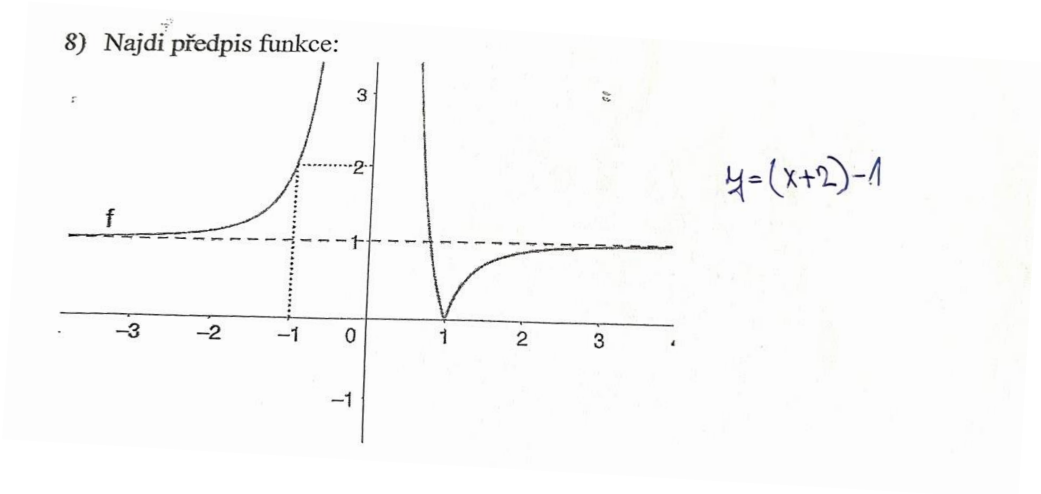
Obrázek 45: Úloha 7 - absolutní hodnota a záporné hodnoty



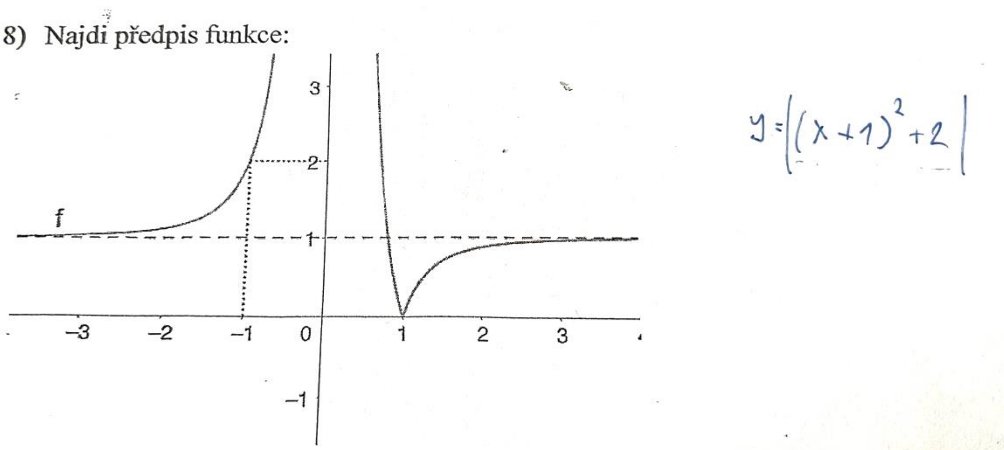
Obrázek 46: Úloha 7 - více závorek

5.2.8 Osmá úloha

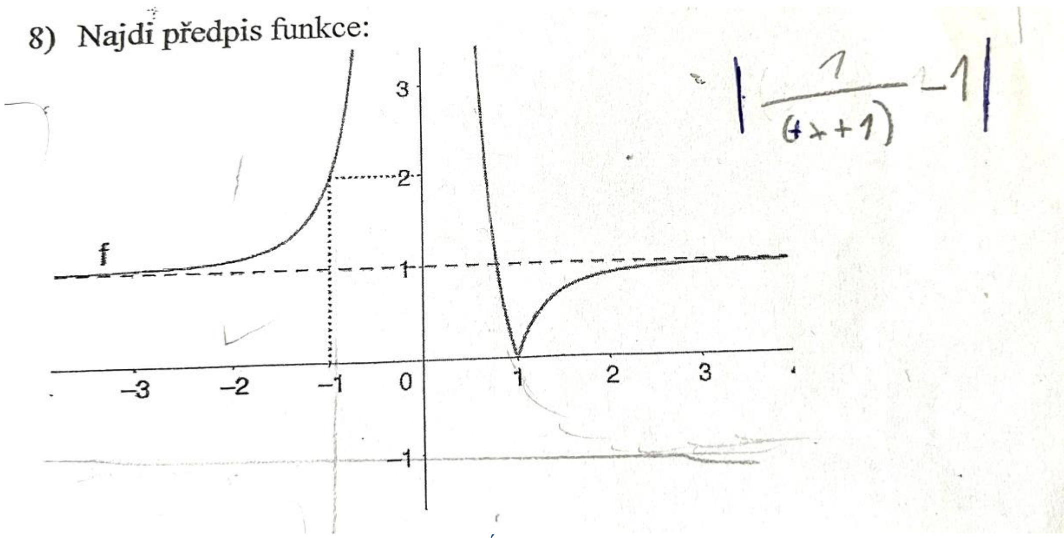
V této úloze identifikujeme 58 žáků (37,9%), kteří se pokusili o vyplnění úkolu, avšak neúspěšně. Z tohoto počtu žáků mělo deset z nich tendenci psát předpis lineární funkce, zatímco za parametry a a b dosadili souřadnice bodu vyznačeného na grafu dané funkce (Obrázek 47). Dalších osm žáků zvolilo předpis kvadratické funkce ve vrcholovém tvaru, přičemž pro souřadnice použili hodnoty z vyznačeného bodu na grafu. Jen jeden z těchto osmi žáků dokázal zahrnout i absolutní hodnotu do předpisu funkce. (Obrázek 48). Šestnáct žáků správně identifikovalo hyperbolu, ale špatně zapsalo parametry, které určují posun základní hyperboly. Z těchto šestnácti žáků si deset z nich uvědomilo nutnost zahrnout absolutní hodnotu (Obrázek 49). Zbylých 24 žáků se pokusilo pomocí náčrtků zjistit, jakými posuny vznikla naše zadaná funkce, avšak své myšlenky nebyli schopni přenést do analytického předpisu zadané funkce.



Obrázek 47: Úloha 8 - lineární funkce



Obrázek 48: Úloha 8 - kvadratická funkce



Obrázek 49: Úloha 8 - lomená funkce

6 Analýza strategií řešení

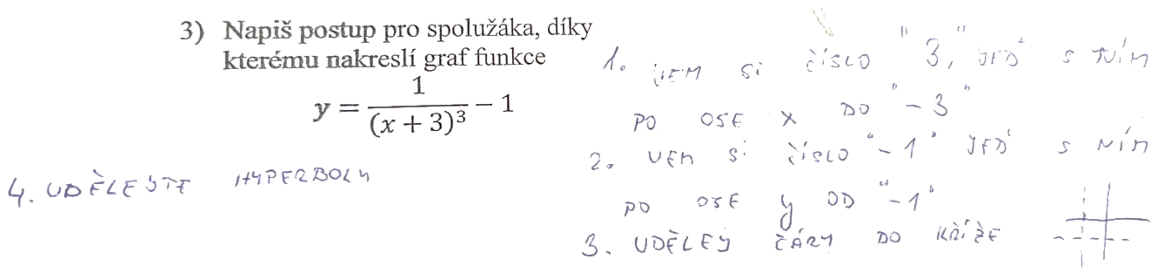
V této sekci se podrobně zaměřím na různé strategie řešení, které žáci použili při plnění zadaných úloh. Nejdříve je však důležité rozdělit tyto úlohy do dvou hlavních kategorií. První kategorie zahrnuje úlohy, kde byla nutná konstrukce grafu, což se týká úloh 1, 3 a 5. Druhá kategorie se pak vztahuje na úlohy, kde bylo potřeba provést popis rozdílností, konkrétně se jedná o úlohy 2, 4, 6 a 7. Na závěr se pak budu zvlášť zabývat osmou úlohou, která má oproti ostatním úlohám specifické zadání.

6.1 Konstrukce grafu:

6.1.1 Posun funkcí

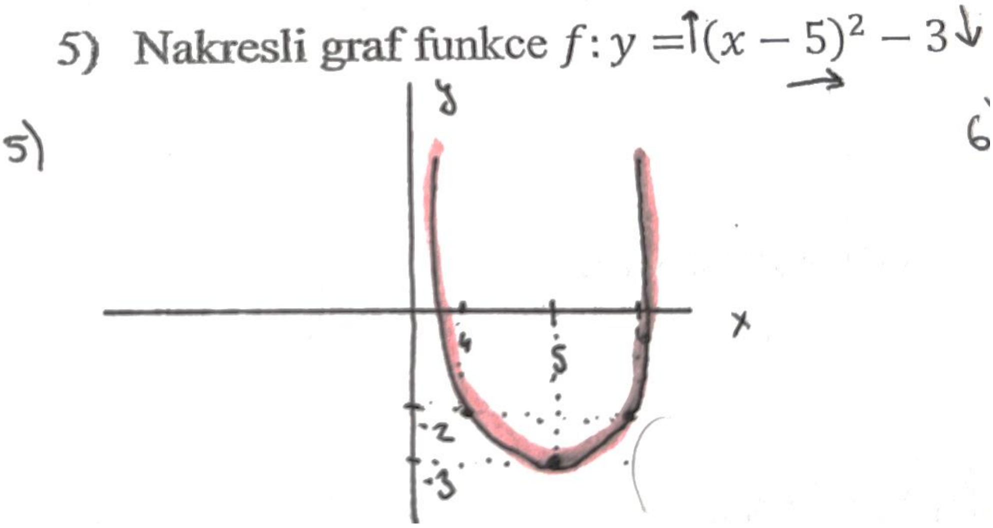
Ráda bych podrobněji rozvedla, že nejčastější strategií pro řešení matematických úloh je využití posunu funkcí. Tento postup začíná zakreslením grafu základní mocninné funkce, který žák následně posouvá ve směru jednotlivých os souřadnicového systému, dokud nedosáhne grafu požadované funkce. Tento konkrétní přístup byl pozorován u 27 žáků při řešení první úlohy.

U třetí úlohy se našlo 9 žáků, kteří si vzpomněli na látku probíranou v nedávných hodinách matematiky a podrobně popsali postup, při kterém nejprve zakreslili graf funkce $y = \frac{1}{x^3}$. Poté, pomocí posunutí grafu této funkce po souřadnicovém systému, dosáhli konečného grafu zadané funkce (Obrázek 50). Mnoho z těchto žáků si také usnadnilo práci použitím „šipek“, které doplnili do zadání a které jim pomohly lépe se orientovat v tom, jakým směrem bude funkce „pohybovat“.



Obrázek 50: Úloha 3 - rada nakreslení pomocí posunutí

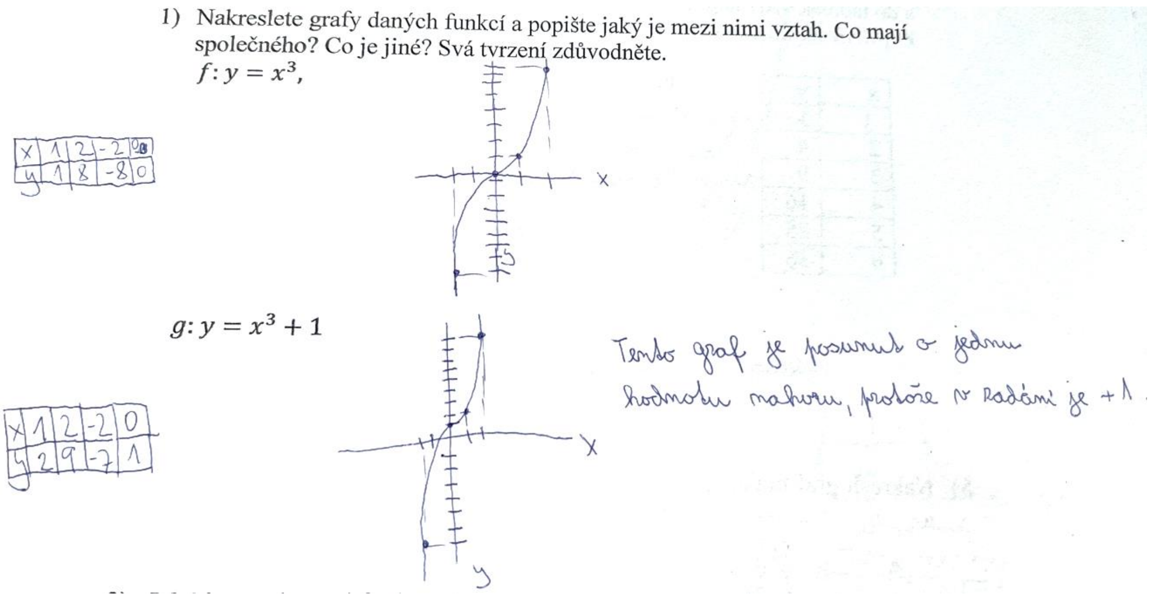
U páté úlohy bylo zjištěno, že celkem 13 žáků zakreslilo správný výsledek, aniž by připojili jakýkoli doplňující komentář nebo vysvětlení. Toto naznačuje, že pravděpodobně postupovali podle předpisu funkce a přesně věděli, jak graf vykreslit. Na druhou stranu, dalších 10 žáků využilo již zmíněné „šipky“, které přidali přímo do zadání. Tento postup naznačuje, že tito žáci si pomáhali vizualizací a představovali si posunutí grafu základní kvadratické funkce $y = x^2$. Díky těmto šipkám dokázali správně určit výsledný graf (Obrázek 51), což svědčí o jejich pochopení posunu grafu ve směru osy x nebo y.



Obrázek 51: Úloha 5 - správná parabola pomocí šipek

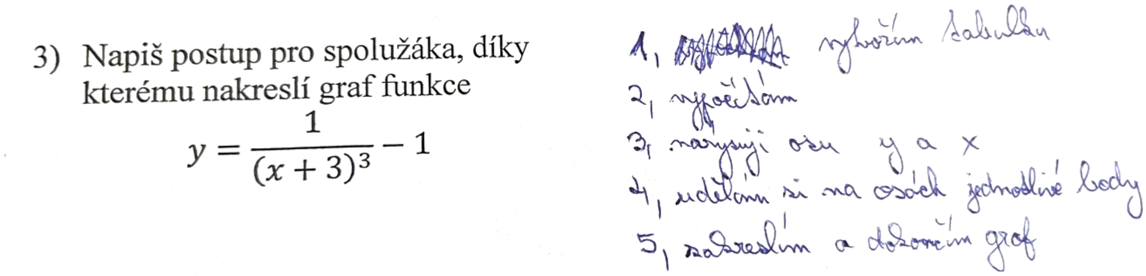
6.1.2 Tabulka hodnot

Další velmi častou strategií je použití tabulky hodnot, která se skládá z několika kroků. Nejprve si žák zvolí několik konkrétních hodnot pro nezávislou proměnnou. Pro tyto zvolené hodnoty pak vypočítá odpovídající funkční hodnoty, tedy hodnoty závislé proměnné. Následně tyto body, které představují dvojice (hodnota nezávislé proměnné, hodnota závislé proměnné), přenese do kartézské soustavy souřadnic. Po zakreslení těchto bodů do grafu je proloží křivkou, která odpovídá dané funkci. Tuto metodu, kterou jsme pozorovali, použilo šest žáků při řešení první úlohy (Obrázek 52).



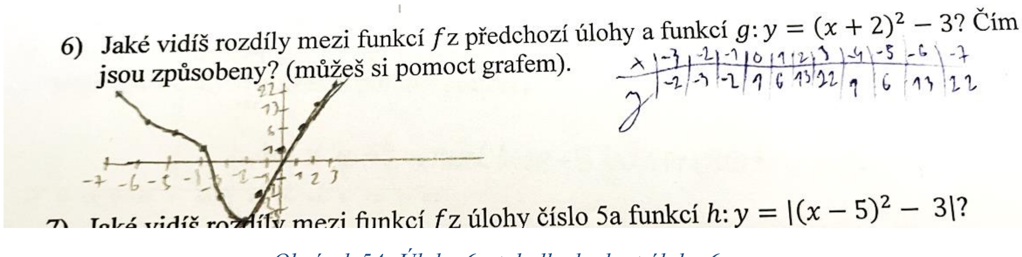
Obrázek 52: Úloha 1 - správně nakreslen i popsán graf

U třetí úlohy najdeme 22 žáků, kteří popisovali očekávaný postup konstrukce, kde začali sestavením tabulky hodnot (Obrázek 53). Poté, co získali body z této tabulky, je zakreslili do kartézské soustavy souřadnic a nakonec „spojili výsledky k sobě“.



Obrázek 53: Úloha 3 - rada na nakreslení tabulky hodnot

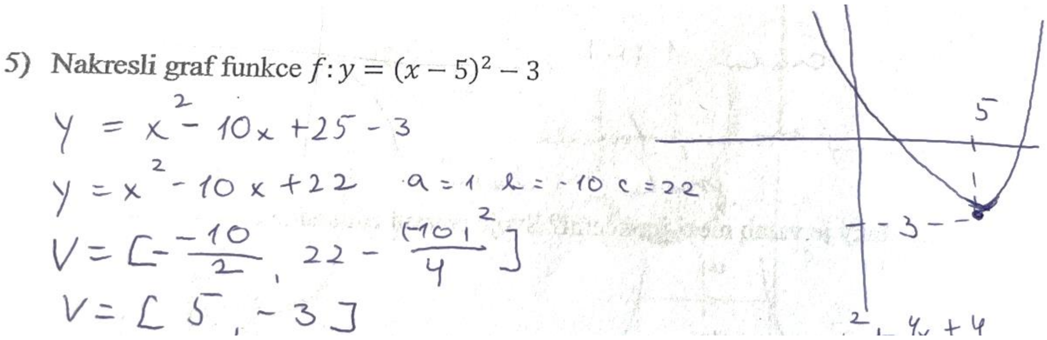
U šesté úlohy se tímto směrem rozhodlo jít 10 žáků (Obrázek 54).



Obrázek 54: Úloha 6 - tabulka hodnot úloha 6

6.1.3 Vrchol

Další ze strategií, můžeme pozorovat u mocninných funkcí se sudým exponentem, jejichž grafem je parabola. U těchto funkcí lze najít souřadnice vrcholu a jednoho bodu, který leží na dané parabole. Tyto dva body umístit do kartézské soustavy souřadnic a proložit jimi parabolu. Takový příklad můžeme najít u páté úlohy. Zde 7 žáků, jak jsem i očekávala, provedlo výpočet nebo vyčetlo souřadnice vrcholu paraboly a zkonstruovali graf zadané funkce (Obrázek 55).

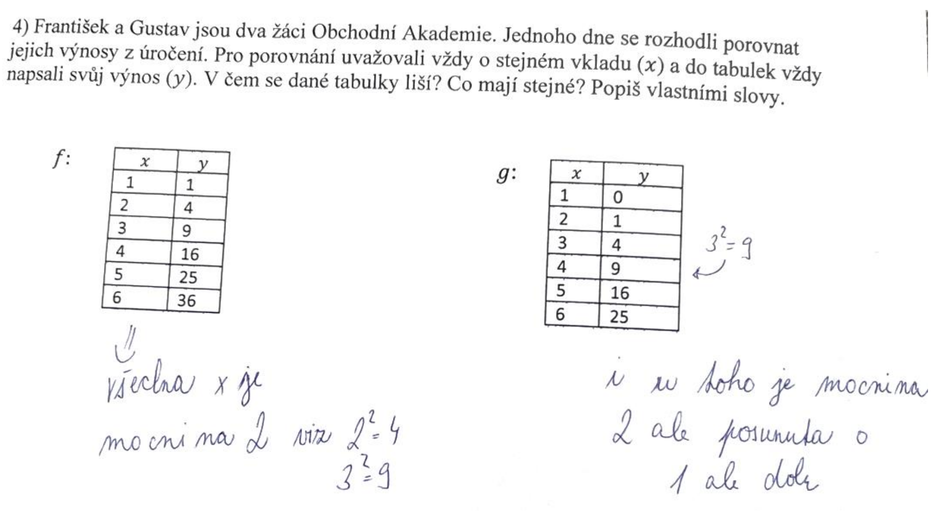


Obrázek 55: Úloha 5 - výpočet vrcholu a správná parabola

6.2 Popis rozdílností:

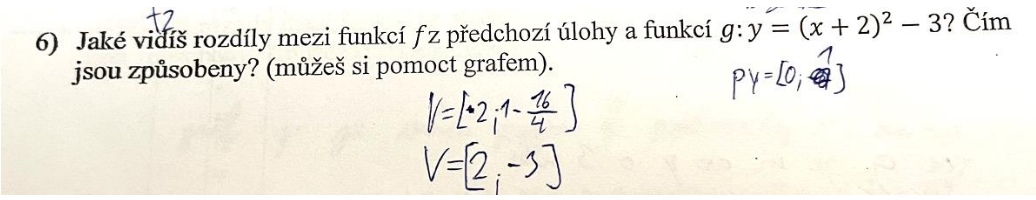
6.2.1 Slovní popis

Většina testovaných žáků se vydala tímto směrem popisu rozdílností a vztahů mezi funkcemi. Můžeme to přisoudit tomu, že slovní popis je pro mnohé žáky přirozenější. U úlohy číslo dvě můžeme najít hned 22 odpovědí, kde žáci například zmínili, že ve vzorečku druhé funkce je připsáno +3, nebo že ke každé hodnotě x bylo přičteno +3. Ve čtvrté úloze bylo zaznamenáno 11 takových odpovědí. Tito žáci detailně popsali vztah mezi vkladem a výnosem (x a y) u obou funkcí, což ukázalo na jejich rozdílnost a vztah mezi nimi (Obrázek 56).



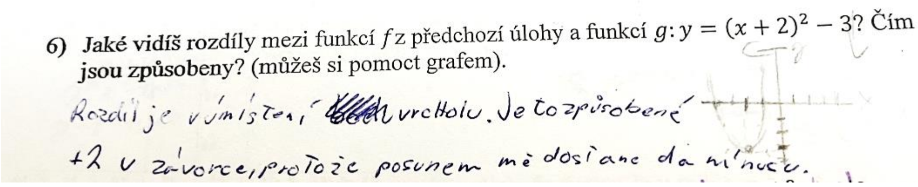
Obrázek 56: Úloha 4 - vztah u druhé funkce

U šesté úlohy celkem 3 žáci popisovali rozdílnost těchto dvou funkcí pomocí jiných souřadnic vrcholu paraboly (Obrázek 57).

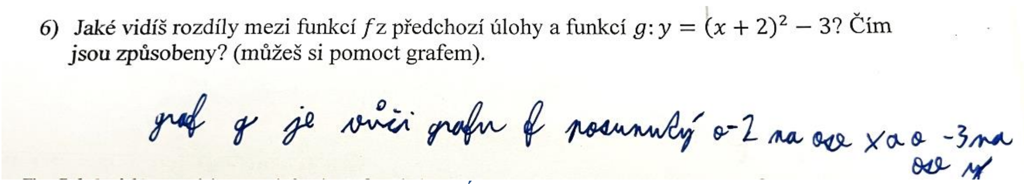


Obrázek 57: Úloha 6 - jiný vrchol

Třikrát více žáků, konkrétně devět, si všimlo toho, že grafy funkcí jsou posunuté (Obrázek 58) a (Obrázek 59). Tito studenti projevili značnou pozornost k detailům a někteří z nich dokonce poukázali na specifické parametry v předpisech obou funkcí. Díky tomu byli schopni přesně vysvětlit, jak zjistili, že se funkce posouvají.

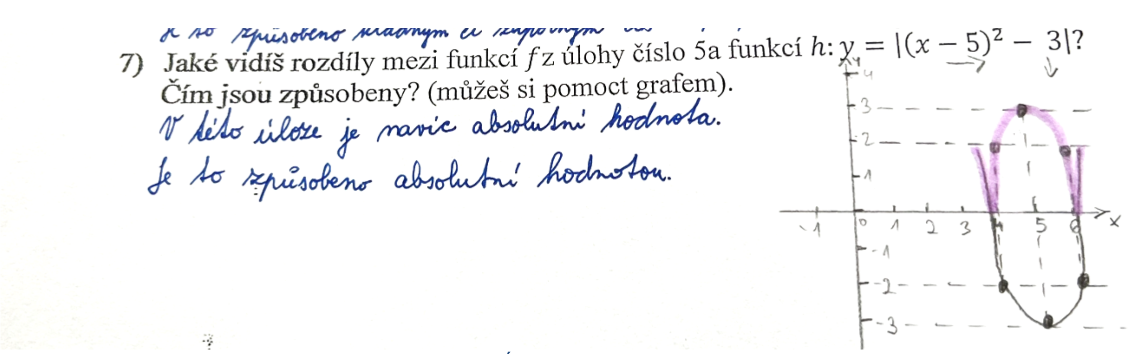


Obrázek 58: Úloha 6 - posun funkcí



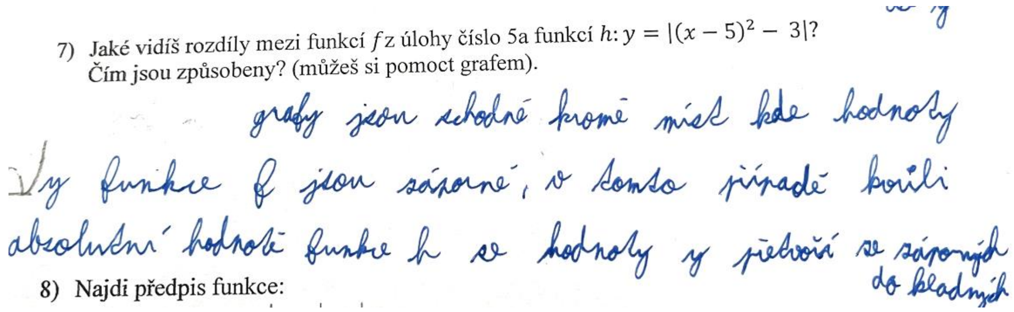
Obrázek 59: Úloha 6 - posun funkce 2

V sedmé úloze 10 žáků přidalo i slovní popis, kde uvádí podobnosti a rozdílnosti s funkcí f z úlohy číslo 5 (Obrázek 60).



Obrázek 60: Úloha 7 - graf funkce s popisem

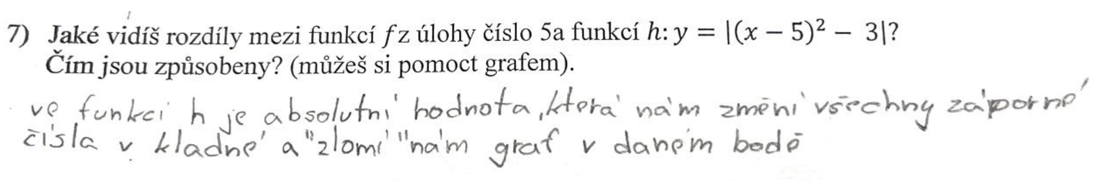
Čtrnáct žáků si zde všimlo rozdílnosti v předpisu obou funkcí a popsalo roli absolutní hodnoty v grafech funkcí (Obrázek 61). Čtyři z těchto žáků používali pojem „zlom" (Obrázek 62).


7) Jaké vidíš rozdíly mezi funkcí f z úlohy číslo 5a funkcí h: $y = |(x-5)^2 - 3|$?
Čím jsou způsobeny? (můžeš si pomoct grafem).

grafy jsou shodné kromě míst kde hodnoty y funkce f jsou záporné, v tomto případě kvůli absolutní hodnotě funkce h se hodnoty y převrácí ze záporných do kladných

8) Najdi předpis funkce:

Obrázek 61: Úloha 7 - vysvětlení absolutní hodnoty


7) Jaké vidíš rozdíly mezi funkcí f z úlohy číslo 5a funkcí h: $y = |(x-5)^2 - 3|$?
Čím jsou způsobeny? (můžeš si pomoct grafem).

ve funkci h je absolutní hodnota, která nám změní všechny záporné čísla v kladné a "zlomí" nám graf v daném bodě

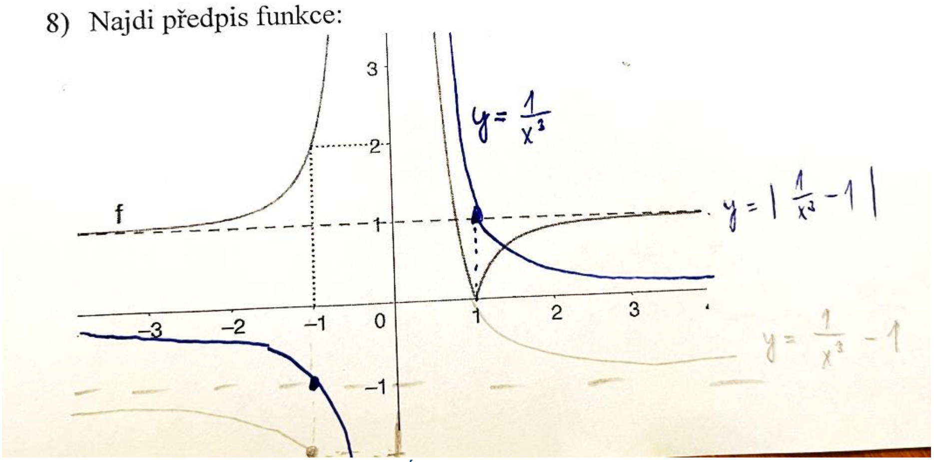
Obrázek 62: Úloha 7 - vysvětlení absolutní hodnoty pomocí termínu zlom

6.2.2 Analyticky

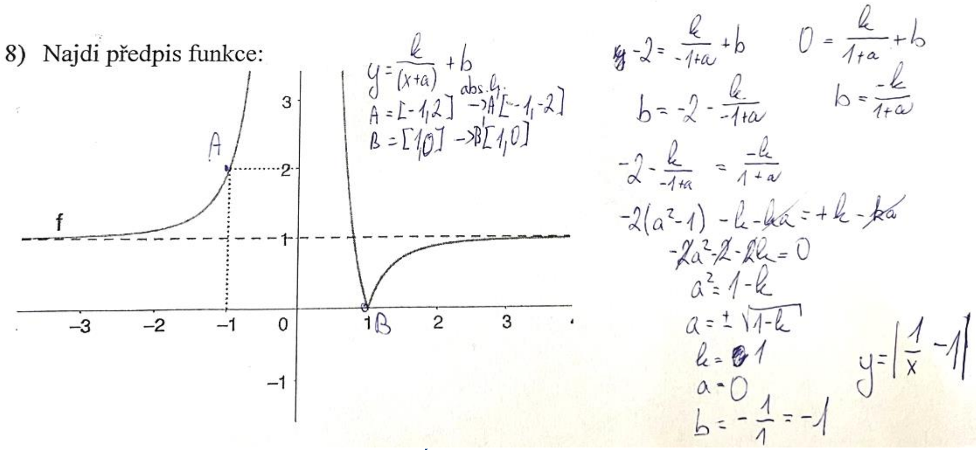
Menší počet žáků byl schopen výše zmíněné vztahy popsat pouze analyticky, což naznačuje, že tito žáci prokazují vyšší úroveň matematické zdatnosti. Tento jev proto nesmíme opomenout a je třeba ho podrobněji analyzovat. Ve druhé úloze bylo šest žáků schopno uvést vztah mezi funkcemi ve tvaru „$g = f + 3$". Tento výsledek ukazuje, že tito žáci nejen pochopili podstatu úkolu, ale také zvládli aplikovat své znalosti v praxi. Ve čtvrté úloze pak čtyři žáci dokázali správně formulovat analytický předpis jak pro funkci f, tak pro funkci g. To svědčí o jejich schopnosti přesně pracovat s matematickými výrazy a formulacemi. Jeden žák uvedl předpis ve tvaru „$y = x^2 - 1$", přičemž bylo zřejmé, že se jedná o nepřesný zápis. Tento konkrétní příklad je důležitý, protože ukazuje na nutnost pečlivé kontroly a ověřování správnosti matematických zápisů.

6.2.3 Osmá úloha

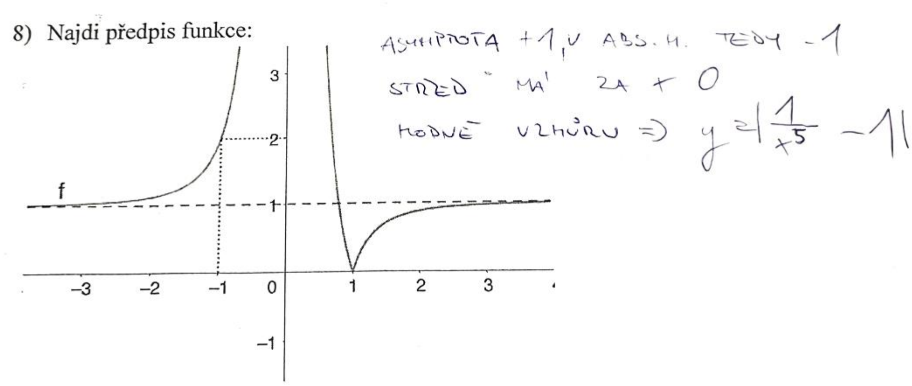
Na závěr bych ráda představila tři odlišná řešení osmi žáků, kteří úspěšně dokončili osmou úlohu. Jejich řešení jsou v tomto výzkumu ojedinělá natolik, že stojí za zmínku. Tři žáci si vytvořili pomocné funkce, které jim pomohly provést posuny a použít absolutní hodnotu k získání základní hyperboly se středem v počátku souřadnic. Poté, co měli tuto základní hyperbolu, postupovali při hledání předpisu od této hyperboly k zadané funkci (Obrázek 63). Další čtyři žáci (Obrázek 64) se rozhodli pro výpočet předpisu funkce. Vybrali si dva body zobrazené na grafu funkce, pracovali s jejich souřadnicemi a využili absolutní hodnotu, aby je převrátili přes osu x. Následně použili obecný předpis pro lomenou funkci, aby vyjádřili parametr b, a pomocí srovnávací metody vyřešil soustavu dvou rovnic pro vyjádření parametru a. Zde nejspíše zjistili, že tento parametr je závislý na posledním parametru k. Proto za tento parametr zvolili číslo 1 a následně vypočítali parametry a i b a zapsali výsledek. Poslední žák si všiml posunuté asymptoty o jednu jednotku a také si uvědomil význam absolutní hodnoty. Proto pravděpodobně převedl asymptotu přes osu x (což dokazuje jeho poznámka „v abs. h. tedy -1“). Dále postřehl, že střed hyperboly bude na ose y, takže jeho x-ová souřadnice bude 0. Nakonec zaregistroval zkosení této hyperboly a označil ji jako „hodně vzhůru“, což ho vedlo k závěru, že u neznámé x bude mocnitel 5. Na základě toho vyvodil správný výsledek (Obrázek 65).



Obrázek 63: Úloha 8 - 1. správné řešení



Obrázek 64: Úloha 8 - 2. správné řešení



Obrázek 65: Úloha 8 - 3. správné řešení

7 Diskuze

V této kapitole najdeme shrnutí a porovnání výsledků z mého výzkumu se zahraničními i českými výzkumy. Konkrétně se zaměřuji na práci žáků s posuny mocninných funkcí a s absolutní hodnotou u mocninných funkcí, což je téma, které je v dostupné literatuře jen zřídka zpracováno. V této části se také pokouším odpovědět na předem určené výzkumné otázky, které se týkají porozumění žáků danému tématu. Kromě toho kapitola zahrnuje popis dalšího důležitého výsledku, který přesahoval rámec jednotlivých výzkumných otázek a shodoval se s výše zmíněnými výzkumy. Tento výsledek jsem označila jako *Kartézská soustava souřadnic* a dále je rozebírám v závěru kapitoly.

7.1 Jaké nejčastější druhy chyb dělají žáci při posunutí grafu mocninných funkcí?

Žáci, kteří se rozhodli použít posunutí grafu funkcí při řešení úloh, se nejčastěji zaměřovali na to, jakým směrem mají posunout základní funkci. Z mých zjištění vyplývá, že žáci měli menší potíže s vertikálním posunutím grafu funkce. Tento trend je pozorovatelný i v rámci zahraničních studií, jako je *An Analysis of Students' Ideas about Transformations of Functions* od Lage, A. E. a Gaisman, M. T. a *On Transformations of Functions* od Baker, B.; Hemenway, C. a Trigueros M. Větší množství chyb se objevilo u mocninných funkcí s lichým mocnitelem. To by mohlo být způsobeno tím, že žákům jsou více povědomé mocninné funkce se sudým mocnitelem (například kvadratická funkce), což odpovídá výsledkům předchozích studií. Další častou chybou bylo zakreslení špatné základní funkce, což i přes správný postup nevedlo k správnému řešení.

7.2 Jaké strategie řešení studenti volí nejčastěji k posunutí grafu mocninných funkcí?

Mnoho z testovaných žáků se rozhodlo pro konstrukci grafu zadané funkce pomocí určení tabulky hodnot. Poté tyto body nanesli do kartézské soustavy souřadnic a snažili se proložit danou funkci. Tento přístup je v souladu s výsledky výzkumu je *An Analysis of Students' Ideas about Transformations of Functions* od Lage, A. E. a Gaisman, M. T. Mezi testovanými žáky byli i ti, kteří využívali posun funkce. To lze pozorovat například na základě pomocných šipek, které si žáci zaznamenávali do předpisu zadané funkce. Následně vynesli základní funkci do soustavy souřadnic a použili šipky v předpisu funkce k posunutí grafu v daném směru. Jako další strategii lze zmínit postup, kdy žák posunul jeden bod ze základní funkce, často se jednalo o střed nebo vrchol, a poté tento bod proložil výslednou funkcí.

7.3 Je použití různých reprezentací účinným nástrojem k podpoře porozumění posunutí grafu funkcí?

V průběhu tohoto výzkumu se žáci setkali s třemi různými způsoby reprezentace mocninných funkcí. Z výsledků výzkumu vyplývá, že funkce, která byla zadaná graficky, je pro ně nejzřetelnější. Většina žáků též projevila malou schopnost přizpůsobit se různým způsobům prezentace téže funkce (pouze osm žáků bylo schopno najít předpis funkce z jejího grafu). Navíc někteří žáci nebyli schopni vhodně popsat posunutí grafu funkcí nebo rozdíl mezi dvěma funkcemi pomocí vhodných termínů. Tyto nedostatky naznačují nedostatečné porozumění konceptu posunutí grafu funkcí, jak nakonec i ukazuje výzkum *Students' Understandings of the Transformations of Functions* od Burnett, C. S. Díky různým reprezentacím funkcí použitých v tomto výzkumu se mi ale podařilo odhalit, že někteří žáci skutečně mají hlubší vhled do této problematiky. Použití různých reprezentací určitě podporuje porozumění posunutí grafu funkcí a pojmu funkce jako tahového (výzkum *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladech učiva o funkcích na základní škole* od Budínové, I.), je ale třeba dodat, že je zapotřebí, aby se žáci s těmito různými reprezentacemi setkávali v hodinách matematiky.

7.4 Chápou studenti posunutí grafu funkcí jako pravidlo, či mají hlubší vhled?

Vzhledem k tomu, že většina žáků potřebovala vidět grafy mocninných funkcí k určení posunutí, lze usoudit, že jim chybí hlubší porozumění této problematice (tento závěr je shodný se závěrem výzkumu *On Transformations of Functions* od Baker, B.; Hemenway, C. a Trigueros M.). Z jiných zadání mocninných funkcí žáci zpravidla nedokázali vyvozovat žádné závěry. Často se též stávalo, že žáci posouvali graf funkce v horizontálním směru na opačnou stranu. To nasvědčuje tomu, že žáci chápou posunutí grafu funkcí pouze jako pravidlo, aniž by pochopili jeho podstatu. Kromě toho se ukázalo, že někteří žáci si toto pravidlo špatně zapamatovali. Tato zjištění jsou v souladu s výsledky z výzkumu *An Analysis of Students' Ideas about Transformations of Functions* od Lage, A. E. a Gaisman, M. T. Dále při porovnání mocninných funkcí zadaných pouze tabulkou hodnot byla schopna posun odhalit pouze malá skupina žáků. To naznačuje nedostatečné porozumění konceptu posunu funkcí.

7.5 Do jaké míry studenti chápou roli absolutní hodnoty u mocninných funkcí?

Většina žáků projevila správné pochopení a použití absolutní hodnoty. Nicméně, při řešení úloh souvisejících s absolutní hodnotou, někteří žáci dělali chyby, které nebyly přímo spojeny s použitím absolutní hodnoty, což vedlo k nesprávnému výsledku. Při verbálním popisu byli žáci schopni adekvátně vysvětlit účel absolutní hodnoty a rozpoznat rozdíly mezi funkcemi, kde byla absolutní hodnota použita a kde nikoli. Avšak z popisu je znát, že někteří žáci měli tendenci považovat výsledek absolutní hodnoty pouze za kladný, což odpovídá zjištěním z výzkumu *Absolute value inequalities: High School Students' Solutions and Misconceptions* od Almog, N. a Ilany, B. S. Je nutné podotknout, že malá část respondentů zahrnovala absolutní hodnotu do předpisu funkce, která měla graf pouze v kladné části osy y, přestože absolutní hodnota v tomto případě nebyla zapotřebí.

7.6 Kartézská soustava souřadnic

Mezi respondenty se našli i ti, kteří nebyli schopni správně znázornit bod v kartézské soustavě souřadnic. Při zakreslování prohodili osy x a y (podobné výsledky vycházely i ve výzkumu *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladech učiva o funkcích na základní škole* od Budínové, I.). V tu chvíli jim vycházela funkce inverzní k žádané funkci. Jiní žáci nezachovali stejné měřítko u obou os a tedy jim místo mocninné funkce vycházela třeba lineární. Další nepoužili žádnou jednotku ani na jedné z os kartézské soustavy souřadnic. Takové chyby ve znázornění bodů v kartézské soustavě souřadnic mohou být způsobeny nedostatečným porozuměním základnímu uspořádání os a principů grafické reprezentace funkcí. Jejich vznik může signalizovat potřebu dalšího tréninku a porozumění základním principům práce s grafy funkcí.

Závěr

Tato diplomová práce se zaměřovala na posunutí grafu mocninných funkcí a absolutní hodnotu u mocninných funkcí. Cílem bylo zjistit, do jaké míry středoškolští žáci rozumí posunutí grafů funkcí. Dále také popsat jejich postupy a nejčastější chyby při posouvání grafu mocninných funkcí a práci s absolutní hodnotou u mocninných funkcí. V první části jsem shrnula historii funkcí, analyzovala učebnice a stručně představila pět relevantních výzkumů na toto téma. Z těchto výzkumů vzešlo pět výzkumných otázek, které mi pomohly zjistit míru žákovského porozumění této problematice. Následně jsem vyjmenovala a popsala nejčastější chyby a postupy při posouvání grafů mocninných funkcí a práci s absolutní hodnotou u mocninných funkcí. Na závěr jsem odpověděla na výzkumné otázky.

Přínosem této diplomové práce je pohled z méně častého úhlu na problematiku posunů funkcí se zaměřením na mocninné funkce. Výzkum v této oblasti je zatím velmi omezený, a proto práce přináší cenné poznatky a nové perspektivy. Zaměření na mocninné funkce při studiu jejich posunů poskytuje hlubší pochopení těchto matematických konceptů, což může být užitečné nejen pro teoretický výzkum, ale také pro praktické aplikace ve výuce matematiky.

Dalším významným přínosem této práce je konkrétní pomoc učitelům matematiky. Upozornění na časté chyby žáků a identifikace oblastí, kde je jejich porozumění nedostatečné, mohou učitelům sloužit jako cenný zdroj informací při plánování a přípravě výukových materiálů. Díky těmto poznatkům mohou učitelé lépe přizpůsobit své vyučovací metody a strategie, aby u žáků více podporovali porozumění posunům funkcí. Navíc, podrobné analýzy chyb a nedostatků v porozumění mohou vést k vytvoření speciálních výukových aktivit a cvičení zaměřených na posuny mocninných funkcí. Tímto způsobem může tato diplomová práce přispět k rozvoji efektivnějších vzdělávacích strategií, které budou cílit na konkrétní problematické oblasti a zlepšovat celkovou úroveň matematického vzdělávání.

Nesmím opomenout ani přínos pro můj vlastní rozvoj. Při přípravě, zadávání a analyzování vlastního výzkumu jsem zjistila, jak důležité je vhodně pokládat otázky a formulovat je správným způsobem. Tato zkušenost mi jistě pomůže při tvorbě výukových materiálů a testů v mé vlastní praxi. Také považuji za přínosné seznámení se s historií funkcí, kde vidím určitou paralelu s objevováním funkcí žáky. Navíc jsem si uvědomila, jak klíčová je schopnost analyzovat a interpretovat získaná data, což mi poskytlo cenné dovednosti pro mou budoucí pedagogickou činnost.

Přestože má práce má mnoho přínosů, musím zmínit i některé slabší stránky. Kvůli mé nezkušenosti nejsou některé otázky ve výzkumném testu vhodně formulovány, což mohlo způsobit menší aktivitu žáků při jejich vyplňování.

Navzdory tomuto nedostatku věřím, že tato práce přináší hodnotné poznatky a může být přínosem pro další výzkum i praxi. Poskytuje nové pohledy a konkrétní doporučení, která mohou být využita pro zlepšení výuky matematiky a pro podporu hlubšího porozumění matematickým funkcím u žáků. Tato zkušenost mě také motivovala k dalšímu vzdělávání, což je pro mě osobně velkým přínosem pro můj osobní rozvoj.

Použitá literatura

BAKER, Bernadette, HEMENWAY, Clara a TRIGUEROS, Maria. *On transformations of functions*. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra, Vol. 1, 2000. pp.41-47. University of Melbourne

BOYER, Carl Benjamin. *History of analytic geometry.* New York : Dover Publications, 2004. ISBN: 0-486-43832-5.

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU*. Učebnice pro střední školy (Prometheus). Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-020-9.

CLAGETT, Marshall (ed). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. *A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.* Madison, Milwaukee & London 1968. ISBN 9780783759012.

DOMINIQUES, Joao Caramalho. *Lacroix and the Calculus.* 1. vyd. Birkhäuser Basel, 2008. ISBN 978-3-7643-8637-5.

EDWARDS, Charles Henry. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer, 1979. ISBN 978-0-387-94313-8.

FAUVEL, John. *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals.* Oxford University Press, U.S.A., 2006. ISBN: 978-0199298938.

FAUVEL, John a GRAY, Jeremy (ed.). *The History of Mathematics: A Reader*. The Open University, 1987. ISBN: 0-333-42790-4.

JUŠKEVIČ, Adolph-Andrei Pavlovič. *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, *Arch. Hist. Exact. Sci*. 16(1976), 37–85.

KOPÁČKOVÁ, Alena 2001. Fylogeneze pojmu funkce. *Matematika v proměnách věků. II*. Praha: Prometheus, 2001. pp. 46-80.

KOPÁČKOVÁ, Alena 2002. Nejen žákovské představy o funkcích. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* Jednota českých matematiků a fyziků, 2002.

KOUDELA, Libor. *O pojetí křivky.* Disertační práce. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2011.

LOMTATIDZE, Lenka. 5. Pojem křivka a pojem funkce. *Historický vývoj pojmu křivka.* Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 168–171.

NEWTON, Isaac. *The Method of Fluxions and Infinite Series: With Its Application to the Geometry of Curve-Lines*. Forgotten Books, 2018. ISBN: 1330454863.

ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 5. vyd. Praha: Prométheus, 1999, 200 s. ISBN 807196039.

OSOLSOBĚ, Petr 2003. Východiska srovnání Kierkegaardovy filosofie s filosofií Aristotelovou. *Sborník prací Filozofické fakulty brněnské univerzity. B, Řada filozofická. 2.*

SCHWABIK, Štefan. 1998. Druhá krize matematiky aneb potíže růstu diferenciálního a integrálního počtu. *Matematika v proměnách věků. I.* Praha: Prometheus, 1998. pp. 6-60.

SCHWABIK, Štefan. 1996. Vznik a vývoj infinitezimálního počtu (16.–18. století). *Malý průvodce historií integrálu.* Praha: Prometheus, 1996. pp. 21–53.

SMÝKALOVÁ, Radka. *Goniometrické funkce v elementární matematice*. *Scintilla*. V Brně: Nadace Universitatis, 2015. ISBN 978-80-7204-937-0.

SONAR, Thomas. *3000 Years of Analysis.* Springer, 2016. ISBN: 978-3-030-58221-0.

ŠIRŮČKOVÁ, Petra. *Poruchy spojitosti funkce v matematické analýze I.* Bakalářská práce. Brno: Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2011.

Elektronické zdroje:

ALMOG, Nava. *Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions*. Online. [cit. 2024-05-31]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/257557274_Absolute_ value_inequalities_High_school_students%27_solutions_and_ misconceptions.

CANTOR, Georg. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* Online. [cit. 2024-05-31]. Dostupné z: http://eudml.org/doc/157768.

BUDÍNOVÁ, Irena. *Vazba mezi systémem vzdělávacích cílů a reálných výukových výstupů na příkladu učiva o funkcích na ZŠ.* Online. Disertační práce. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. 2010. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/rsbcy/.

BURNETT, Cassie Sarah. *Students' Understandings of the Transformations of Functions.* Online.
[cit. 2024-05-31]. Dostupné z: https://pmena2020.cinvestav.mx/Program-Proceedings/Proceedings#28.

HABALA, Petr. *Math Tutor - Functions - Theory - Elementary Functions*. Online. 2001 [cit. 2024-03-15]. Dostupné z: https://math.fel.cvut.cz/mt/txtb/4/txc3ba4s.htm.

KÁNNAI, Zoltán. *A One-to-One Popcorn Function.* Online. The American Mathematical Monthly, vol.124, no. 8, s. 746. [cit. 2024-03-15]. Dostupné z: https://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.124.8.746

Katalogy požadavků | Maturitní zkouška. Online. Praha, 2023 [cit. 2024-03-12]. Dostupné z: https://maturita.cermat.cz/menu/katalogy-pozadavku

Rámcový vzdělávací program pro střední odborné školy. Online. Praha: MŠMT, 2023 [cit. 2024-03-12]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy- stredniho-odborneho-vzdelavani-rvp-sov/

*Www.realisticky.cz: když (se) chcete naučit…*Online. Česká republika: Martin Krynický, ©2010 [cit. 2024-03-15]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/

Seznam obrázků